Н.Б. Тихомиров, А.М. Шелехов

МАТЕМАТИКА

Учебный курс для юристов

Москва Юрайт 2000

ДК 51(34)
К22.1(67)я73
46

торы учебного курса:

ихомиров Николай Борисович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета, специалист по теории приближения функции; **Шелехов Александр Михайлович** - доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета, специалист в области дифференциальной геометрии.

цензенты:

ктор физико-математических наук, профессор *А. В. Гладкий;*

служенный деятель науки Российской Федерации, доктор философских наук, академик АПСН *Г. В. Телятников;* кандидат юридических наук, доцент *Н.С. Шерстнев*

ихомиров Н.Б., Шелехов А.М.

46 Математика: Учебный курс для юристов. —М.: Юрайт, 2000. — 223 с.

BN 5-85294-047-X

астоящее издание представляет собой учебный курс, подготовленный в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности "021100—Юриспруденция". Изучение основ математики по методике данного учебного пособия **позволяет специалистам, занимающимся юридической деятельностью, расширить свои профессиональные возможности, а будущим юристам — сформировать качественное профессиональное мышление.**

книге показано применение математических знаний в юридической практике, криминалистике; излагаются основные положения статистической проверки гипотез и способы построения математических моделей процессов, интересующих юристов. Одна из глав посвящена теории принятия решений, владение которой помогает находить оптимальное решение сложных проблем, в том числе юридических.

дание рекомендуется студентам, преподавателям юридических вузов и факультетов, а также юристам-практикам.

ДК 51(34)
К 22.1(67)я73
BN 5-85294-047-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

особие написано на основании курса, прочитанного авторами студентам Тверского института экологии и права. Мы исходили из того, что курс математики для юристов должен, с одной стороны, быть достаточно широким, чтобы играть развивающую, гуманитарную роль. С другой стороны, он должен быть и достаточно содержательным, чтобы студенты научились решать хотя бы несложные прикладные задачи.

рс рассчитан всего на 24—26 часов, поэтому по содержанию может быть только продолжением на более высоком уровне школьного курса математики. Небольшой объем не позволил нам рассказать о других разделах математики, с которыми, на наш взгляд, было бы также полезно познакомиться будущему юристу. О них можно прочитать в книгах, список которых приведен на с. 222-223.

зложение теории сопровождается упражнениями и типовыми заданиями. Последние служат основанием для индивидуальных домашних заданий. За каждое индивидуальное задание студент получает определенное число баллов. Общее число баллов (рейтинг) является основанием для получения (или не получения) зачета. Студентам могут быть предложены также курсовые работы по истории математики, по отдельным разделам математики — арифметике, комбинаторике, элементарной статистике.

едлагаемый курс служит введением в более серьезную математику. Если учащийся захочет более детально разобраться в каком-либо разделе или какой-либо задаче (индивидуально, в рамках специального курса или факультатива), он сможет, освоив это пособие, обратиться к специальной литературе.

вторы глубоко признательны рецензентам Н. С. Шерстневой и А.В. Гладкому, а также своим коллегам О. М. Виноградову, А. И. Катулеву, И. Ш. Могилевскому и Г. С. Шарову, прочитавшим рукопись и сделавшим много полезных замечаний. Особую благодарность мы выражаем руководству Тверского института экологии и права и инженеру-программисту Н. Л.

Ивановой, без помощи которых эта книга навряд ли была бы издана в этом тысячелетии.

Б. Тихомиров, А. М. Шелехов

Введение: Нужна ли юристу математика?

зторы этого пособия полагают, что нужна. Математика — это часть общечеловеческой культуры, такая же неотъемлемая и важная, как право, медицина, естествознание и многое другое. Все наилучшие достижения человеческой мысли и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Таким образом, для студента гуманитария математика прежде всего *общеобразовательная дисциплина*, как, например, право для студента математика.

) для юриста значение математики этим не исчерпывается. В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — выявить истину. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, уметь применять на практике индуктивный и дедуктивный методы (вспомните Шерлока Холмса!). Поэтому, *занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое профессиональное мышление.*

іконец, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. В юридической практике важную роль играет статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала. Ценность специалиста существенно возрастает, если он умеет делать все это.

істоящее пособие помогает достичь указанных целей. Но написать его оказалось делом весьма непростым. Прежде всего потому, что предполагается обучать математике тех, кто уже мысленно с ней распрощался после окончания школы и полагал, что больше с ней не встретится. Понимая все это, мы начинаем наш курс с повторения школьного материала, несколько его обобщая и углубляя. Мы предлагаем учащимся такие разделы математики и такую последовательность изложения, при которых, на наш взгляд, усвоение будет происходить наиболее просто и естественно. В этом смысле изложение не является строгим и поэтому наше пособие отличается от стандартного математического курса примерно так же, как сборник рассказов от романа. Мы обсуждаем важнейшие математические понятия: число, вектор, функция, предел, аксиома, вероятность и показываем, как развивались математические идеи, заключенные в этих понятиях. Основная содержательная часть пособия представляет собой элементарное введение в курс теории вероятностей и математической статистики. Предполагается, что именно этому материалу будет посвящена большая часть практических занятий.

Глава I ЧИСЛА

§1. Натуральные, целые и рациональные числа

зестные нам числа 1, 2, 3... называются *натуральными.* Их используют для счета или обозначения *количества предметов,* например: один юрист, два юриста и т.д. Кроме того, с помощью натуральных чисел обозначают *порядок* предметов. Например, если всех милиционеров в отделении выстроить по росту, то каждому из них можно присвоить номер: первый милиционер, второй милиционер и т.д. Поэтому различают *количественные числа* — один, два, три, четыре..., и *порядковые числа* — первый, второй, третий...

тобы записывать натуральные числа, большие десяти, мы пользуемся так называемой *десятичной позиционной системой.* Слово «позиционная» означает, что значение цифры зависит от ее места, например: 147 = 1 • 100 + 4 • 10 + 7 • 1,

714 = 7 • 100 + 1 • 10 + 4 • 1,

471 = 4 • 100 + 7 • 10 + 1 • 1.

юво «десятичная» означает, что используются степени десятки. В другой системе, например, пятиричной, содержащей всего пять цифр 0, 1, 2, 3, 4, числовая позиционная запись расшифровывается так: $143 = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1$;

двоичной системе, содержащей всего две цифры 0 и 1, мы получим:

$$1\,011\,001 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1.$$

атуральные числа можно, как известно, складывать, вычитать, умножать и делить. Однако эти операции неравноценны. Очевидно, что сумма $a + b$ любых двух натуральных чисел a и b снова будет натуральным числом; то же самое можно сказать и о произведении ab. При этом порядок слагаемых и сомножителей не играет роли, т.е. $a + b = b+a$ и $ab = ba$.

то же касается операций вычитания и деления, то здесь ситуация иная. Например, разность 5 – 2 = 3 — число натуральное, но натурального числа 2 – 5 не существует. В последнем случае используют так называемые *отрицательные числа* и записывают 2 – 5 = –3, 4 – 10 = –6 и т.п. Числа a и $-a$ называются *противоположными.*

ежду натуральными числами и целыми отрицательными числами находится число 0 (нуль). Его рассматривают как количественное число; нуль предметов данного вида (например, попугаев в Антарктиде) означает отсутствие предметов данного вида. Пользуясь математической терминологией, можно сказать, что множество попугаев, проживающих в Антарктиде, есть *пустое множество.** Нуль обладает следующими свойствами: 1) $a + 0 = a$;

2) $a + (-a) = 0$; 3) на нуль делить нельзя.

онятие множества обсуждается в гл. VIII.

туральные числа, целые отрицательные числа и число нуль называются в совокупности *целыми числами.* Множество всех натуральных чисел обозначается символом **N**, множество всех целых чисел — символом **Z**. Наглядно целые числа представляют точками на прямой (шкала термометра):

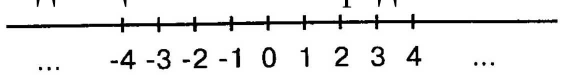

Рис. 1

отличие от множества натуральных чисел, множество целых чисел устроено более «демократично»: любые два целых числа можно вычитать друг из друга и результат вычитания всегда будет также целым числом. Математики говорят, что множество целых чисел *замкнуто относительно операций сложения и вычитания,* и что это множество получено *расширением* множества натуральных чисел.

требность расширить множество натуральных чисел возникает и при делении. Например, семь милиционеров нельзя разделить на четыре равные части — такого количества милиционеров 7/4 не существует. Но мы вполне можем разделить семь миллионов рублей на четыре равные части. Это число (1 миллион 750 тысяч) составляет 7/4 от общей суммы. Аналогичный смысл имеет обозначение , где a и b — любые натуральные или даже целые числа (b 0). Числа вида называются *обыкновенными дробями* или *рациональными числами.** Множество всех рациональных чисел обозначается символом **Q**.

ежду этими двумя понятиями есть некоторое различие. Например, одно и то же число 2/3 можно записать в виде различных дробей: 4/6, 6/9, 10/15 и т.д. Последние можно сократить, но дробь 2/3 сократить нельзя. Она является *несократимой.*

елое число a можно записать как дробь a/1, поэтому целые числа входят как часть во множество рациональных чисел. В этом случае говорят, что множество целых чисел является *подмножеством* множества рациональных чисел. Точно так же, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел. Записывается это следующим

образом: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$,
знак «» читается так: «содержится в», «является подмножеством» или «является частью». Заметим, что во множестве рациональных чисел «равноправия» еще больше, чем во множестве целых чисел: любые два рациональных числа можно не только вычитать друг из друга, но можно и делить одно на другое (кроме деления на нуль!); при этом в результате указанных действий всегда будут получаться снова рациональные числа. Таким образом, множество рациональных чисел замкнуто относительно всех четырех операций: сложения, вычитания, умножения и деления.

е натуральные числа, за исключением единицы, подразделяются на *простые* и *составные.* Натуральное число называется *составным,* если оно представляет собой произведение двух натуральных чисел, не равных единице, например: 4=2 • 2, 39 = 3 • 13, 111 = 3 • 37. Если натуральное число нельзя представить в виде такого произведения, то оно называется *простым,* например: 2, 3, 5, 7, 11.

остые числа играют в математике особую роль. В их жизни много загадочного, и математики, стремясь разгадать эти тайны, открыли (и продолжают открывать до сих пор!) интереснейшие свойства простых чисел, придумали оригинальные математические методы исследования, которые применяются не только в теории чисел, но и в других разделах математики.

евнегреческий математик Эратосфен предложил способ получения простых чисел, который называется решетом Эратосфена. Представим себе ряд натуральных чисел:

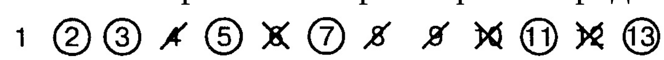

Рис. 2

тметим (кружком) простое число 2 и затем вычеркнем все четные числа (или, как говорят, числа, кратные двум). Согласно определению, вычеркнутые числа не являются простыми, так как делятся на два и их можно записать в виде 2*k.* Затем отметим простое число 3 и вычеркнем все числа, кратные трем: 3, 6, 9, 12 и т.д. Эти числа не простые, а составные, так как их можно записать в виде 3*k.* Часть этих чисел, а именно четные, уже вычеркнута (на рис. 2 они зачеркнуты два раза). Следующее наименьшее незачеркнутое число — 5, оно простое. Выделим его, а затем вычеркнем все числа, кратные пяти: 10, 15, 20 и т.д. В результате останутся незачеркнутыми только простые числа.

метим, что осуществить описанную процедуру *полностью* практически невозможно, так как *множество натуральных чисел бесконечно.* Но мы можем, пользуясь решетом Эратосфена, найти «вручную» все простые числа, например, в первой тысяче натуральных чисел. Современные компьютеры позволили отодвинуть эту границу до 10^{20}. Принципиально, возможности ЭВМ здесь не ограничены.

УПРАЖНЕНИЯ

Найдите такое число *x*, что для любого числа *a* выполняется равенство *xa* = *a*.

Вспомните, что такое четные и нечетные числа. Назовите все четные простые числа.

Будет ли множество четных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения?

Назовите наименьшее натуральное число.

Сравните дроби: и ; и ; и ; и .

Вспомните, что такое среднее арифметическое двух, трех или нескольких чисел. Найдите среднее арифметическое следующих чисел: а) 1 и 2; б) –3 и 5; в) и ; г) и 3; д) , и ; , и .

Покажите, что следующие числа являются простыми:

• 3 + 1; 2 • 3 • 5 + 1; 2 • 3 • 5 • 7 + 1; 2 • 3 • 5 • 7 • 11+1.

эпробуйте предсказать общий результат.

ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ

Выполните следующие арифметические действия:

$$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}.$$

§2. Десятичные дроби и действительные числа

эоби, у которых знаменатель представляет собой степень десятки, т.е. 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000 и т.д., называются *десятичными дробями.* Записываются они особым образом: $\frac{7}{10}=0{,}7;\ 1\frac{3}{10}=1{,}3;\ 2\frac{14}{1000}=2{,}014.$

эпытка записать любую обыкновенную дробь в виде десятичной дроби приводит иногда к *бесконечной десятичной дроби.* Например, разделив «уголком», мы получим:

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots;\quad \frac{1}{11}=0{,}090909\ldots;$$

$$\frac{22}{7}=3{,}142857142857142857\ldots;$$

ık видно, получающаяся бесконечная последовательность цифр содержит так называемый *период* — один и тот же повторяющийся набор цифр. Поэтому полученные десятичные дроби называют *бесконечными периодическими десятичными дробями.* Можно доказать, что любая обыкновенная дробь записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Обратное также верно: любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой десятичную запись некоторой обыкновенной дроби. Как найти последнюю, поясним на примере.

имер. Превратим в обыкновенные дроби числа q = 0,777... и p = 0,999...

множив на 10, получаем:

$10q$ = 7,777... = 7 + q, откуда $9q$ = 7 и q = .

оверьте результат, превратив 7/9 в десятичную дробь.

$10p$ = 9,999... = 9 + p, откуда $9p$ = 9 и p = 1. Заметим, что 1 можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с периодом 0: 1,000...; аналогично, 0,24 = 0,24000..., 3,5 = 3,5000... и т.п.

УПРАЖНЕНИЯ

С помощью калькулятора и «вручную» превратите данную обыкновенную дробь в бесконечную периодическую десятичную дробь и укажите период: , , , , .

Превратите бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную: 1,888...; 0,1212...; 0,444...

шив эти примеры, каждый будущий юрист задаст себе вопрос: а имеют ли смысл бесконечные *непериодические* десятичные дроби?

ссмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катетов которого равна единице. Обозначим длину гипотенузы через x. По теореме Пифагора

. (1)

кажем, что корни этого уравнения не являются рациональными числами. В самом деле, предположим противное, т.е. что корнем уравнения (1) является дробь (a и b — целые числа). Если дробь можно сократить, сделаем это, и будем полагать далее, что дробь является уже несократимой.

дставляя в уравнение (1), получим = 2 или

. (2)

к как в правую часть равенства (2) входит множитель 2, то a^2 — число четное. Следовательно, число a также четное и его можно записать в виде $a = 2c$. Подставив в (2), получим $(2c)2 = 2b^2$ или, сократив на 2, $2c^2 = b^2$. Отсюда следует, что число b^2 также является четным. Но тогда четным будет и число b. Теперь, поскольку оба числа a и b получились четными, дробь является сократимой. Это противоречит сделанному выше предположению, что дробь — несократимая. Противоречие возникло вследствие того, что в самом начале было сделано неверное предположение — корнем уравнения (1) является рациональное число — дробь . Следовательно, никакая дробь не может быть корнем уравнения (1), что и требовалось доказать.

зультат наших рассуждений можно сформулировать иначе: квадратный корень из числа 2 не является рациональным числом, т.е. бесконечной периодической десятичной дробью.

дем искать приближенные значения числа x = . Ясно, что $1 < x < 2$. Далее, так как $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 = x^2$, а $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2 = x^2$, то $1{,}4 < x < 1{,}5$. Это означает, что с точностью до 0,1 число x приближенно равно 1,4, (x 1,4). Аналогично устанавливаем, что $1{,}41 < x < 1{,}42$, так как $1{,}41^2 < 2$, а $1{,}42^2 > 2$. Следовательно, с точностью до 0,01 получаем x 1,41. Применив еще раз тот же прием, найдем, что $1{,}414 < x < 1{,}415$, т.е. x 1,414, и т.д.

писанная процедура позволяет находить все более точные приближения числа . Но ни одно из этих

иближений не может быть равным , так как все приближенные значения являются рациональными числами, а мы доказали, что не является рациональным числом. Поэтому последовательность приближенных значений будет *бесконечной.*

гак, число представляется в виде бесконечной последовательности приближенных значений. Каждое последующее значение получается добавлением к предыдущему нового десятичного знака. Это позволяет записать в виде бесконечной десятичной дроби: = 1,414213562373...

писанным способом можно находить десятичные приближения любого числа. Для обыкновенных дробей — это просто деление уголком (см. выше), которое приводит к бесконечным периодическим дробям. Поскольку число не является рациональным, то представляющая его бесконечная десятичная дробь не будет периодической. Таким образом, мы приходим к понятию *бесконечной непериодической десятичной дроби.*

я чисел вида , a **N** также имеются процедуры, позволяющие найти любое число знаков в их десятичной записи. Один из таких алгоритмов мы приводим ниже без описания:*

то ребус посложнее, чем деление «уголком». Попробуйте его разгадать.

айдите еще несколько знаков и проверьте результат с помощью калькулятора.

метим, что всякую бесконечную десятичную дробь можно записать в виде

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots;$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots$$

суммы бесконечного числа слагаемых:

кие суммы называются *рядами*. Первый ряд представляет собой так называемую *бесконечную геометрическую прогрессию, с* которой, возможно, Вы познакомились в школе. Второй ряд прогрессией уже не является.

школе Вы решали квадратные, кубические и биквадратные уравнения. Их корни выражаются через радикалы второй, третьей или четвертой степени. Например, уравнение $x^3 = 5$ имеет корень $x =$, уравнение $2x^2 = 3$ — корни $x =$ и $x = -$. Корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ічисляются по формуле

школьных учебниках числа a, b и c обычно подбирают так, чтобы под корнем получался квадрат целого числа. Но, если коэффициенты уравнения не подбирать специально, то корни x_1 и x_2 будут, вообще говоря, бесконечными непериодическими десятичными дробями. Наиболее общий результат формулируется так: корень любого алгебраического уравнения

(3)

епени n с целыми коэффициентами (если этот корень существует!) является, вообще говоря, бесконечной непериодической десятичной дробью.

эмимо алгебраических уравнений, существуют другие источники получения бесконечных непериодических десятичных дробей.

іределим два очень важных числа. Первое из них — число , равное отношению длины l произвольной окружности к ее диаметру d: $\pi = \frac{l}{d}$.

го число известно с глубокой древности. Вавилонские, египетские, китайские и греческие математики нашли различные приближенные значения числа .

$$3, \quad 4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2, \quad \sqrt{10}, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{377}{120}$$

другие. Рассматривая вписанные в окружность правильные 2*n*-угольники, Архимед умел вычислять с большой точностью. В частности, он нашел, что .

:йбниц доказал, что число можно представить в виде следующего ряда:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

аметьте, что дроби в правой части не являются десятичными.) Этот ряд позволяет находить приближенные значения числа . Например, мы можем переписать равенство (4) так: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)-\ldots$

скобках стоят положительные числа. Поэтому, «отбросив» их, мы увеличиваем правую часть:

$$\frac{\pi}{4}<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{263}{315}.$$

иножив это равенство на 4, найдем оценку «сверху» для числа : С другой стороны, из того же равенства (4) находим:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\ldots$$

скобках стоят положительные слагаемые. Поэтому, отбрасывая их, получаем:

$$\frac{\pi}{4}<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{228}{315},$$

о дает оценку «снизу» для числа *:* . Итак, мы получили, что

$$\frac{912}{315}<\pi<\frac{1052}{315}.$$

:о довольно грубая оценка истинного значения числа . Ее можно улучшить, если взять для оценки не 5, а более слагаемых из ряда (4). Вот первые 15 точных знаков после запятой: = 3,141592653589793...

ругое очень известное в математике число — так называемое неперово* число *e* — также может быть представлено в виде ряда: $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

; честь математика XVI в. Джона Непера.

:есь мы используем стандартное обозначение *n*! = , которое читается «*n* факториал».

:обы найти приближенное значение числа *e*, нужно в сумме (5) оставить несколько слагаемых, а остальными пренебречь. Чем больше слагаемых мы оставим, тем точнее будет результат: *e* = 2,718281828459045...

:пользуя ЭВМ, можно подсчитать числа *e* и с любой точностью.

исла и *e* относятся к так называемым *трансцендентным* числам. Так называются числа, которые не могут быть корнями никакого уравнения вида (3) с целыми коэффициентами.

одведем итоги. Назовем *действительными* или *вещественными* числами все бесконечные десятичные дроби. Обозначим множество всех таких чисел через **R**. Из предыдущих рассуждений вытекает, что множество **R** включает в себя множество **Q** всех рациональных чисел, поэтому можно записать

N Z Q R.

ействительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными.*

есьма важный математический факт заключается в том, что множество действительных чисел является *упорядоченным.* Это означает, что любые два действительных числа можно сравнить между собой, т.е. указать, какое из них больше (или меньше). Процедура сравнения очень проста: нужно последовательно сравнивать цифры, стоящие на одинаковых позициях. Например, 2,381615... > 2,381529..., т.к. на первых четырех позициях соответствующие цифры одинаковы, а 6 > 5. Описанное правило сравнения работает при одном (и единственном) соглашении: не рассматривать периодические дроби с периодом 9. При этом множество действительных чисел, образно говоря, не сузится, т.к. всякую бесконечную периодическую дробь с периодом 9 можно заменить равной ей *конечной* десятичной дробью, например: 0,999... = 1, 0,42999... = 0,43, 2,65999... = 2,66 и т.п. (см. пример на с. 15).

апомним свойства операций сложения и умножения действительных чисел:

реместительность или коммутативность:

$$a + b = b + a;$$

четательность или ассоциативность (для сложения):

$(a + b) + c = a + (b + c);$ сочетательность или ассоциативность (для умножения):

$$(ab)c = a(bc);$$

спределительность или дистрибутивность:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

исловые множества **N, Z, Q, R** являются примерами так называемых *числовых систем,* которые имеют специальные названия. Например, говорят *кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле действительных чисел.* Эти термины мы обсуждаем в восьмой главе. Там мы покажем, в частности, что поле действительных чисел можно расширить и получить так называемые *комплексные числа.*

ПРАВИЛО ОКРУГЛЕНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

ясним на примере. Следующие десятичные дроби мы округляем до сотых долей:

),811 0,81, 0,812 0,81, ..., 0,814 0,81, 0,815 0,82, 0,816 0,82, ..., 0,819 0,82.

УПРАЖНЕНИЯ

. Вычислите с помощью калькулятора и округлите до тысячных:

, , , , , , , , , .

. Найдите 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, 81, 9!, 10!.

. Расставьте правильно знаки > или **<:**

0,142816... 0,142827...; б) ; в) ; г) 2,421619.

. Округлите числа и *е* до тысячных.

. Решите линейное уравнение $3x - 2 = 0$, запишите ответ в виде бесконечной периодической десятичной дроби и округлите его до сотых.

. Решите неравенство $3x + 7 > 0$, запишите ответ в виде бесконечной периодической десятичной дроби и округлите его до сотых.

ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

) определению

$$a^0 = 1,\quad a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n},\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

з этого определения следует, что для любых натуральных чисел *m* и *n* справедливы следующие формулы: $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^n)^m = a^{mn}$, $a^n b^n = (ab)^n$.

исло, которое при возведении в степень *n* дает *a*, называется корнем степени *n* из *a*. Если число *n* нечетное, то существует только один корень степени *n* из числа *a*, который обозначается или . Если *n* четное, а число *a* — положительное, то корней будет два. Например, числа 3 и –3 будут корнями четвертой степени из 81, т.к. $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Положительный корень называется арифметическим и именно он обозначается символом или .

епень с дробным показателем определяется так:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

казывается, что имеют смысл и выражения вида a^x, где *x — любое* действительно число, например . Действия с такими степенями производятся по тем же правилам, что и с натуральными степенями, например, .

)и различных вычислениях большие числа удобно записывать в так называемой *стандартной форме,* т.е. в виде произведения двух множителей, первый из которых заключен между числами 1 и 10, а второй представляет собой степень десятки: $243507 = 2{,}43507 \cdot 10^5$, $0{,}184 = 1{,}84 \cdot 10^{-1}$ и т.д. Стандартную форму используют при работе с калькулятором, в особенности тогда, когда не хватает разрядов для точных вычислений. Например, 243507 • 1385462 = 2,43507 • 10^5 • 1,385462 • 10^6 = (2,43507 • 1,385462) • 10^{11} 3,37369695 • 10^{11}; $3^{17} = 3^{16}$ • 3 = $(3^4)^4$ • 3 = $(81)^4$ • 3 = $(6581)^2$ • 3 = 3 • $(6{,}581 \cdot 10^3)^2$ = 3 • $(6{,}581)^2$ • $(10^3)^2$ 129,140163 • 10^6.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Вычислите, округляя в каждом действии результат до тысячных; окончательный результат округлите до сотых:

$$\left(\frac{(2{,}6^3+\frac{9}{8}):6{,}37-(2{,}44-\sqrt{4{,}637}\cdot 8{,}1)}{2{,}1^2-\frac{120{,}3:7{,}33}{5}-(\frac{1}{17}-14\cdot 21{,}51)}\right)^{1/2}.$$

Найдите корни квадратного уравнения и округлите результат до сотых:

$$15{,}6x^2+8{,}13x-3\frac{7}{9}=0.$$

ПРОЦЕНТЫ

ҷна сотая доля какого-либо количества называется *процентом.* Например, в городе N всего 300 судей, следовательно, 3 судьи — это 1%, 6 судей — 2% и т.д.

ɔдумайте, сколько тверских судей составляют 4% от их общего числа? (В Твери 145 судей.)

ɔугой пример. Некто утаил прибыль в размере 10 млн. руб. Какую сумму недополучила казна, если налог на прибыль составляет 22%?

шение: 10 млн • = 2,2 млн.

ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ

За год в области совершено 6720 преступлений. Из них тяжких — 33; в состоянии алкогольного опьянения — 3262; связанных с дорожно-транспортными происшествиями — 1310. После завершения следствия переданы в суд 4520 дел; по 3816 из них уже вынесены приговоры, причем половина из последних — обвинительные; из всех обвинительных приведены в исполнение 40%. Заполните до конца следующую таблицу:

Всего	6720	100%
Тяжких	33	
В состоянии алкогольного опьянения	3262	
Транспортных	1310	
Завершено	4520	
Всего приговоров	3816	
Обвинительных		
Исполнено		

первом столбце проставьте соответствующие абсолютные значения, а во втором укажите, какой процент они составляют от общего числа преступлений.

Глава II ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

вления, происходящие в природе, обществе, человеке очень сложны и разнообразны. Ученые изучают разные стороны этих явлений, причем каждая наука вырабатывает свои специфические методы исследования. Например, такое важное социальное явление как преступность изучают не только юристы, но и социологи, психологи, медики и т.д. Есть тут серьезная работа и для математиков. Их задача состоит, например, в том, чтобы подвергнуть математической обработке огромный статистический материал — отчеты органов внутренних дел и любые другие документы, содержащие различные числовые данные. Цель этой работы — выделить наиболее существенные сведения об интересующем нас явлении.

зультаты обработки представляют в виде таблиц, графиков, диаграмм и различных числовых характеристик, которые называют параметрами. Важнейшие из них — *среднее арифметическое* и *дисперсия*.

§1. Среднее арифметическое

онятие *среднего значения* используется для описания разнообразных явлений природы и общественной жизни. Так, говорят о средней температуре воздуха, средней скорости движения, средней зарплате, средней продолжительности жизни и т.д. В науке и технике на основе взаимоотношений между средними величинами изучают и рассчитывают всевозможные проекты, в экономике — оптимальные планы, в военном деле — возможные стратегии и основанные на них военные доктрины, в общественной жизни — прогнозы общественно-политической ситуации. Например, во время предвыборной кампании службы по изучению общественного мнения составляют прогнозы, в которых оценивают шансы на успех различных кандидатов. Ясно, что провести опрос всех избирателей невозможно, поэтому проводят опрос небольшой части населения. По результатам опроса прогнозируют средние проценты популярности кандидатов у различных социальных групп и в разных регионах. Если обработка результатов опроса проведена математически грамотно, то выводы будут достаточно точно отражать реальную ситуацию.

едней величиной обычно называют *среднее арифметическое*.

усть x_1, x_2, ... , x_n — некоторые числа. Их *средним арифметическим* называется число

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \qquad (1)$$

ример 1. По сведениям автоинспекции, количество дорожных происшествий на улицах города Дрюкова в первую декаду октября было таким: 6 8 10 7 6 11 9 8 7 11.

еднее арифметическое этих чисел

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(6 + 8 + 10 + 7 + 6 + 11 + 9 + 8 + 7 + 11) = 8,3$$

казывает среднее число дорожных происшествий в день.

сводке за следующие 10 дней оказались такие данные:

0 5 7 7 12 11 14 13 7 6.

к среднее арифметическое будет

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(0 + 5 + 7 + 7 + 12 + 11 + 14 + 13 + 7 + 6) = 8,2.$$

ы видим, что средние значения (8,2 и 8,3) отличаются друг от друга значительно меньше, чем число происшествий за каждый день, которое может быть 0, 5, 7, ...14. Поэтому *среднее* число дорожных происшествий можно прогнозировать, причем достаточно точно.*

Конечно, средние величины могут различаться, и довольно значительно. Например, количество дорожных происшествий зависит от погоды, времени года, солнечной активности и от многих других факторов. Однако свойство средних величин состоит в том, что различие между ними все-таки меньше, чем различие между исходными данными.

от факт подтверждается и отчетами ГАИ за много лет. Из них видно также, что чем больше срок, за который составляется отчетность (декада, месяц, квартал, год, пятилетка), тем средняя величина устойчивее. Иными словами, среднее число происшествий за декаду колеблется меньше, чем число происшествий за каждый день; среднее число происшествий за месяц колеблется еще меньше, и так далее.

писанное свойство средних представляет собой одно из важнейших проявлений Закона Больших Чисел, открытого знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым.

ли таблица исходных данных содержит несколько десятков чисел, то составляют более сложную таблицу, в которой для каждой из величин указывают, сколько раз она наблюдалась.

ример 2. УВД города Дрюкова опубликовало сводку о числе правонарушений, совершенных подростками за первые 20 дней сентября: 8 6 13 4 13 13 12 9 7 6 12 14 13 12 17 6 8 12 7 12.

этим данным составлена следующая таблица:

Таблица 1

$\tilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
m_i	1	3	2	2	1	5	4	1	1

есь m_i — число дней с одним и тем же количеством правонарушений, — число правонарушений за день. Из таблицы видно, например, что был всего 1 день, в течение которого произошло ровно 4 правонарушения; в течение трех дней было по 6 правонарушений и т.д. Заметьте, что в первой строке числа расположены в порядке возрастания, а если сложить все числа второй строки, то получится общее число дней, т.е. 20.

згласно приведенным данным, среднее число правонарушений за один день будет

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(4 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 13 + 13 + 13 + 13 + 14 + 17) = \frac{1}{20}(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 13 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 17 \cdot 1) = \frac{1}{20} \cdot 204 = 10{,}2.$$

ким образом, формулу (1) для подсчета среднего арифметического можно записать так:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots + \tilde{x}_k m_k).$$

есь — *различные* среди заданных n чисел, причем значение встречается m_1 раз, значение повторяется m_2 раз, и так далее, наконец, значение встречается m_k раз. При этом

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

бл. 1 можно переписать так, чтобы в ней не содержалась информация о числе дней, в течение которых проводились наблюдения. Заменим в табл. 1 вторую строку на новую, которую составим так: вместо числа дней поставим долю, которую это число составляет от числа всех дней. Эта доля называется *частотой.* Так как число всех дней 20, то 1 заменим на 1/20 = 0,05, 3 — на 3/20 = 0,15 и т.д. В результате табл. 1 примет следующий вид:

Таблица 2

$\tilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
$\tilde{p}_i$	0,05	0,15	0,10	0,10	0,05	0,25	0,20	0,05	0,05

к и в табл. 1, в первой строке указано число правонарушений за день, а во второй — соответствующая частота. Сумма чисел, стоящих во второй строке, равна единице. Это свойство следует из определения частоты.

спользуя понятие частоты, мы можем подсчитать среднее значение x [см.

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 13 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 17 \cdot 1) = 4 \cdot \frac{1}{20} + 6 \cdot \frac{3}{20} + 7 \cdot \frac{2}{20} + 8 \cdot \frac{2}{20} + 9 \cdot \frac{1}{20} + 12 \cdot \frac{5}{20} + 13 \cdot \frac{1}{20} + 14 \cdot \frac{1}{20} + 17 \cdot \frac{1}{20} = 4 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}15 + 7 \cdot 0{,}10 + 8 \cdot 0{,}10 + 9 \cdot 0{,}05 + 12 \cdot 0{,}25 + 13 \cdot 0{,}20 + 14 \cdot 0{,}05 + 17 \cdot 0{,}05.$$

(2)] иным способом:

ким образом, среднее арифметическое равно сумме произведений чисел, взятых из первой строки табл. 2, на их частоты.

эеобразуем таким же способом формулу (3). Введем частоты

$$\tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n}, \ \tilde{p}_2 = \frac{m_2}{n}, \ldots, \ \tilde{p}_k = \frac{m_k}{n}.$$

результате формула (3) для среднего арифметического запишется так:

$$\overline{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{p}_k. \quad (4)$$

эеимущество этой формулы, по сравнению с формулой (3), состоит в том, что ей можно пользоваться и в том случае, когда не известны величины m_1, m_2, ..., m_k и n, но известны значения частот.

эимер 3. В городе Дрюкове каждому пассажиру междугородного автобуса вручают страховой полис на 50 000 руб., взимая за это 500 руб. Какова средняя прибыль страховой компании от продажи одного полиса, если несчастные случаи происходят в среднем с одним пассажиром из 10 000? Учтите, что по правилам страховых компаний города Дрюкова страховка выплачивается только в случае гибели пассажира.

шение. Прибыль может принимать два значения:

0 руб, если несчастного случая не произошло, и –49 500 руб. при автокатастрофе (знак «минус» означает, что компания терпит убыток). Прибыль -49 500 руб. рублей появляется в одном случае из 10 000, следовательно, частота этого значения прибыли равна 0,0001. Частота другого значения — 500 руб. равна 0,9999. Получаем следующую таблицу:

Прибыль	500	–49500
Частота	0,9999	0,0001.

эеднее значение прибыли найдем по формуле (4):

$$\overline{x} = 500 \cdot 0{,}9999 + (-49500) \cdot 0{,}0001 = 499{,}95 - 4{,}95 = 495 \text{ (руб.)}.$$

§2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

эи описании некоторых явлений среднее арифметическое дает о них примерное представление, вполне удовлетворительное для практических целей. Таково, например, среднее число правонарушений в день, рассмотренное в примере 1 (§1). Однако весьма часто встречаются такие ситуации, для описания которых недостаточно знать только среднее арифметическое.

:тория первая. Двух студентов юридического факультета послали на практику, одного в город Дрюково, другого — в город Стуково. Практиканты узнали, что в это время года среднесуточная температура в этих городах равна нулю. Тот из них, кто поехал в Стуково, будучи человеком осторожным, взял с собой только теплые вещи. Другой, более легкомысленный, оделся по-летнему. Оказалось, что в течение всей практики в обоих городах температура была стабильной: в Дрюкове — +2 днем и –2 ночью, в Стукове — +15 днем и –15 ночью. В результате, несмотря на то, что среднесуточная температура действительно была нулевой, оба студента заболели, так как один постоянно перегревался, а другой — постоянно мерз.

:тория вторая. Один из торговцев в Дрюкове был очень набожным человеком. Как-то раз, под впечатлением воскресной проповеди о пользе благотворительности, он в первой половине недели сдавал каждому покупателю сдачу на 1000 руб. больше, чем нужно. Но потом действие проповеди ослабело, и нашего торговца одолела природная корысть. В следующие три дня он уже обманывал каждого покупателя, беря со всех на 1000 руб. больше. Поскольку число покупателей в первые и последние три дня недели было одинаковым, то получается, что в среднем размер неправильной сдачи равен нулю, т.е. в среднем покупатели получали сдачу правильно!

з этих историй видно, что, помимо средней величины, нужно знать еще и то, *как* заданные числа рассеяны около их среднего значения. Для этой цели вводятся *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение.*

ıсперсией величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$D = \frac{1}{n}\left((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2\right). \quad (5)$$

oимер 1. На обследование каждого из десяти автомобилей было затрачено следующее время (в мин): Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	25	30	22	22	54	36	41	45	25	40

ȩесь символом x_i обозначено время, затраченное на обследование автомобиля с номером i. Найти дисперсию величин x_i.

шение. Составим таблицу из трех столбцов:

<u>Таблица 4</u>

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
25	–9	81
30	–4	16
22	–12	144
22	–12	144
54	20	400
36	2	4
41	7	49
45	11	121
25	–9	81
40	6	36
340	0	1076

последней строке первого столбца записано общее время обследования всех автомобилей, т.е. сумма всех чисел x_i — 340. Поделив ее на 10, найдем среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, ..., x_{10}$: = 34 (мин).

) втором столбце записаны разности , , ... , , представляющие собой отклонения величин $x_1, x_2, ..., x_{10}$ от их среднего. *Сумма отклонений всегда равна нулю,* что показано в последней строке второго столбца. Это важнейшее свойство средней величины.

третьем столбце табл. 4 записаны квадраты отклонений: $()^2$, $( )^2$, ... , $( )^2$. ммa квадратов, как видно из последней строки, равна 1076. По формуле (5) находим дисперсию D: $D = \frac{1}{10} \cdot 1076 = 107{,}6$ (мин^2).

:ли известны частоты , то для вычисления дисперсии вместо формулы (5) можно использовать формулу

$$D = (\tilde{x}_1 - \bar{x})^2 \tilde{p}_1 + (\tilde{x}_2 - \bar{x})^2 \tilde{p}_2 + \ldots + (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 \tilde{p}_k \ , \qquad (6)$$

е, как и выше, суть различные среди заданных чисел .

›едним квадратическим отклонением величин от их среднего значения называется величина

(7)

примере 1 среднее квадратическое отклонение равно

(мин).

з формулы (5) видно, что дисперсия представляет собой среднее арифметическое квадратов разностей , , ... , . Поэтому величину S можно рассматривать как среднее отклонение величин от их среднего значения .

з определения дисперсии и среднего квадратического отклонения следует, что последнее не превышает наибольшей из величин (абсолютная величина отклонения). Так, в первом примере 10,4 < 20, т.е. S существенно меньше максимального отклонения. Зато в историях, которые мы рассказали в начале параграфа, среднее квадратическое отклонение S является максимально возможным, так как все отклонения от среднего значения одинаковы по абсолютной величине. Вычислив по формулам (5) и (6) среднее квадратическое отклонение температуры в Дрюкове и Стукове, мы найдем, что оно равно максимальной температуре (2 и 15 соответственно); во второй истории среднее квадратическое отклонение будет 1000 руб., что также совпадает с величиной максимального отклонения.

режде чем двигаться дальше, необходимо ввести весьма важное понятие *переменной величины*. В примере 1 центральную роль играет табл. 3, в которой каждому автомобилю ставится в соответствие время его обследования. Математики в этом случае говорят, что время обследования есть переменная величина *X*, принимающая значения . В примере 2 из §1 переменной величиной является число правонарушений, в примере 3 — прибыль страховой компании.

перь допустим, что нужно обследовать *все* автомобили города Дрюкова. Но число автомобилей так велико, что описать все значения величины *X* (*X* — время обследования) практически невозможно. Однако мы можем, не проводя самого обследования, предсказать его результаты приближенно, с помощью примера 1. Предварительно, используя табл. 3, составим другую таблицу, в которой укажем время обследования и соответствующую частоту : Таблица 5

$\tilde{x}_i$	22	25	30	36	40	41	45	54
$\tilde{p}_i$	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

бычно, прогноз содержит следующую информацию о величине *X*: 1) диапазон значений величины *X*,

среднее значение ,

среднее квадратическое отклонение *S*,

интервал наиболее вероятных значений величины *X*,

долю значений величины *X*, попадающих в заданный промежуток.

данным примера 1:

емя обследования автомобиля изменяется в пределах от (22 – *x*) до (54 – *x*) мин, среднее время обследования одного автомобиля — = 34 мин,

еднее отклонение величины *X* от ее среднего значения составляет *S* = 10,4 мин.

нтервалом наиболее вероятных значений величины *X* обычно называют интервал, серединой которого является точка — среднее арифметическое, и в который попадает более половины значений величины *X*. Рассмотрим, например, интервал (– *S;* + *S*). Имеем: – *S* = 23,6 и + *S* = 44,4. Из табл. 5 видно, что в интервале 23,6 – 44,4 содержится 5 значений величины *X*: 25, 30, 36, 40, 41. Их частоты соответственно равны 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1. Суммарная частота будет 0,6. Это число составляет 60% от единицы, т.е. от суммы всех частот. Следовательно, в интервал 23,6 – 44,4 попадает 60% (т.е. большая часть) значений величины *X*. Таким образом, этот интервал является интервалом наиболее вероятных значений величины *X*. Доля значений величины *X*, попавших в какой-либо другой интервал, оценивается так же. Обычно оценивают долю больших и малых значений. В нашем примере доля автомобилей, на обслуживание которых затрачивается меньше 23,6 мин, составляет 20% от общего количества автомобилей (в табл. 5 имеется одно такое значение — 22, и его частота равна 0,2). Доля автомобилей, на обслуживание которых затрачивается больше 44,4 мин, составляет также 20% от общего количества автомобилей.

ри обработке статистического материала используется специальная терминология. Совокупность всех рассматриваемых объектов называют *генеральной совокупностью*, а часть объектов, каким-либо способом выбранных для обследования, называют *выборкой*. В нашем примере с автомобилями генеральную совокупность образуют все автомобили города Дрюкова, а выборку — те 10 автомобилей, которые рассматривались в примере 1.

чень важно сделать выборку правильно. От этого зависит, насколько точными и достоверными будут полученные выводы, результаты прогноза. В математической статистике изучаются способы отбора, позволяющие сделать выборку так, чтобы полученная с ее помощью информация давала достаточно полное и адекватное представление об интересующем нас признаке изучаемой генеральной совокупности. Тогда найденные с помощью выборки среднее арифметическое и *D* дисперсия будут близки к гипотетическим величинам — среднему арифметическому и дисперсии, которые могли бы быть получены при обработке всей генеральной совокупности.

§3. Интервальный ряд. Гистограмма

ри обработке большого числа экспериментальных данных их предварительно группируют и оформляют в виде так называемого *интервального ряда.*

ример 1. Средняя месячная зарплата за год каждого из пятидесяти случайно отобранных работников хозяйства такова: 317 304 230 285 290 320 262 274 205 180 234 221 241 270 257 290 258 296 301 150 160 210 235 308 240 370 180 244 365 130 170 250 370 267 288 231 253 315 201 256 279 285 226 367 247 252 320 160 215 350.

есь переменной величиной *X* является средняя месячная зарплата. Как видно из приведенных данных, наименьшее значение величины *X* равно

130, а наибольшее — 370. Таким образом, диапазон наблюдений представляет собой интервал 130 – 370, длина которого равна 370 – 130 = 240.

зобьем диапазон наблюдений на части *(разряды)* так, чтобы каждый разряд содержал несколько экспериментальных данных. Например, разделим интервал 130 – 370 на 6 равных частей, тогда длина каждого разряда будет 40. Границами разрядов будут числа 130, 170, 210, 250, 290, 330, 370 (рис. 3).

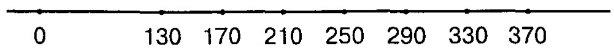

Рис. 3

одсчитаем число значений, попавших в каждый разряд. Например, в первый разряд попадают следующие числа: 150 (1 раз), 160 (2 раза), 130 (1 раз), 170 (1 раз). Поскольку число 170 находится на границе между первым и вторым разрядами, мы включим его и в первый и во второй разряды, но с кратностью 1/2. Сложив кратности, мы получим *абсолютную частоту первого разряда:* $m_1 = 1 + 2 + 1 + 0,5 = 4,5$.

зделив абсолютную частоту на число n всех наблюдений, получим *относительную частоту* попадания величины X в первый разряд: $\tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{4,5}{50} = 0,09$.

оделав вычисления для всех разрядов, мы получим следующую таблицу.

Таблица 6

	130-170	170-210	210-250	250-290	290-330	330-370
m_i	4,5	5	12	14,5	9	5
$\tilde{p}_i$	0,09	0,10	0,24	0,29	0,18	0,10

есь m_i — абсолютные частоты, — относительные частоты. Табл. 6 называется *интервальным рядом.*

мма всех абсолютных частот равна числу всех приведенных в табл. 6 значений переменной величины:

$$4,5 + 5 + 12 + 14,5 + 9 + 5 = 50.$$

о свойство используется для проверки правильности вычислений. Из него следует, что сумма всех относительных частот равна единице: 0,09 + 0,10 + 0,24 + 0,29 + 0,18 + 0,10 = 1.

нтервальный ряд изображают графически в виде *гистограммы*, которая строится так. Сначала вычисляют плотности частот $h_1, h_2, h_3, \ldots$, разделив относительную частоту каждого разряда на его длину: $h_1 = \frac{0,09}{40} = 0,00225$, $h_2 = \frac{0,10}{40} = 0,00250$, $h_3 = 0,00600$

$h_4 = 0,00725$, $h_5 = 0,00450$, $h_6 = 0,00250$.

тем выбирают на плоскости систему координат и откладывают на оси *X* значения 40, 80, 120, ... , соответствующие границам разрядов. На каждом из отрезков длины 40, как на основании, строят прямоугольник, высота которого равна плотности частоты соответствую щего разряда. Полученная фигура и называется *гистограммой*. Она изображена на рис. 4.

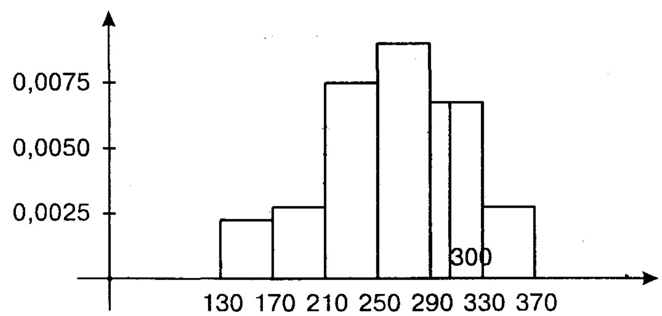

Рис. 4

метьте, что высоты h_1, h_2, ... , h_6 прямоугольников, образующих гистограмму, выбраны так, что их площади будут , т.е. равны соответствующим относительным частотам. Отсюда вытекает такое правило: Для того, чтобы найти долю тех значений величины. X, которые попадают в некоторый интервал, нужно найти площадь той части гистограммы, основанием которой является данный интервал.

ıределим, например, долю значений величины *X*, принадлежащих интервалу 210 – 300. Для этого вычислим площадь фигуры с основанием 210 – 300 (на рисунке она выделена штриховкой). Площади первых двух прямоугольников, составляющих фигуру, равны соответственно = 0,24 и = 0,29; площадь третьего равна 10 • 0,0045 = 0,045. Сумма площадей 0,24 + 0,29 + 0,045 = 0,575 и дает нужное число. Иными словами, 57,5% значений величины *X* находится в границах от 210 до 300.

ık мы заметили в начале параграфа, интервальный ряд составляют при обработке больших массивов информации. В таких случаях, как правило, отдельные значения величины *X* не фиксируются, а подсчитывается количество ее значений, попавших в каждый разряд (т.е. абсолютные частоты). Поэтому исследователь не знает отдельных значений наблюдаемой величины *X* и не может воспользоваться формулами (1), (5) и (7) для вычисления среднего арифметического, дисперсии и среднего квадратического отклонения. Но приближенное значение этих числовых характеристик можно найти с помощью интервального ряда. Для этого сначала находят середины разрядов: (здесь k — число всех разрядов интервального ряда); затем проводят вычисления по следующим

$$\bar{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{p}_k, \qquad (8)$$

$$D = (\tilde{x}_1 - \bar{x})^2\tilde{p}_1 + (\tilde{x}_2 - \bar{x})^2\tilde{p}_2 + \ldots + (\tilde{x}_k - \bar{x})^2\tilde{p}_k, \qquad (9)$$

формулам:

$$S = \sqrt{D}. \qquad (10)$$

зультаты расчетов по данным табл. 6 сведены в следующую таблицу:

Таблица 7

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \bar{x}$	$(\tilde{x}_i - \bar{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \bar{x})^2\tilde{p}_i$
1	150	13,5	–106,8	11406,24	1026,56
2	190	19,0	–66,8	4462,24	446,22
3	230	55,2	–26,8	718,24	172,38
4	270	78,3	13,2	174,24	90,53
5	310	55,8	53,2	2830,24	509,44
6	350	35,0	93,2	8686,24	868,62
		256,8			3113,75

первом столбце записаны номера разрядов, во втором — числа (середины разрядов), в третьем — произведения , и т.д. Таблица заполняется по столбцам. Середину разряда вычисляем как полусумму его границ:

$$\tilde{x}_1 = \frac{130 + 170}{2} = 150, \quad \tilde{x}_2 = \frac{170 + 210}{2} = 190, \text{ и т.д.}$$

›гласно формуле (8), сумма чисел третьего столбца дает среднее арифметическое = 256,8. Оно записано в последней строке этого столбца. Сумма чисел последнего столбца равна дисперсии D = 3113,75 [см. формулу (9)]. Наконец, по формуле (10) определяем среднее квадратическое отклонение S = = 55,80.

ıтервальный ряд, гистограмма и числовые характеристики, найденные по формулам (8)—(10), составляют *математическую модель* средней заработной платы. Она используется при проведении различных социологических исследований, например, при определении уровня жизни работников какой-либо отрасли.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Для проведения демографических исследований выбрали 50 семей и получили следующие данные о количестве членов семьи: 2 5 3 4 1 3 6 2 4 3 4 1 3 5 2 3 4 4 3 3 2 5 3 4 4

3 3 4 4 3 2 5 3 1 4 3 4 2 6 3 2 3 1 6 4 3 3 2 1 7.

ıажите переменную величину; составьте табл. 5; найдите числовые характеристики — среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Управление сельского хозяйства Дрюковского района представило сводку по пятидесяти хозяйствам. Согласно этой сводке, урожайность ржи в них составила (в центнерах с гектара): 17.5 17.8 18.6 18.3 19.1 19.9 20.6 20.1 22 21.4 17.5 18.5 19 20 22 20.6 19.1 18.6 17.9 19.1 22 19 17.5 22 22.6 21 21.4 19

17.8 18.3 19.9 20.1 21.4 18.5 20 20.6 18.6 21.4 21 20 20 18 18 18 17.5 18.6 19.1 20.6 17.5 18.6 .

остройте интервальный ряд (табл. 6), гистограмму, составьте табл. 7 и по формулам (8)-(10) найдите числовые характеристики — среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Глава III ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

практической деятельности юристу часто приходится иметь дело с самыми разнообразными ситуациями. Умение анализировать сложившуюся обстановку, адекватно ее оценивать и делать правильные выводы является важным качеством каждого профессионала. Во многих случаях практика приводит к так называемым *комбинаторным задачам.*

§1. Комбинаторные задачи и методы их решения

омбинаторные задачи связаны: а) с выбором из некоторой группы предметов тех, которые обладают заданными свойствами; б) с расположением этих предметов в определенном порядке; в) с расчетом числа возможных комбинаций. Ниже мы приводим примеры таких задач и обсуждаем способы их решения.

дача 1. *90 дней майора Зимина*

айор Зимин ежедневно формирует наряд для поддержания общественного порядка в центре города Дрюкова. Наряд состоит из двух человек — старшего наряда и дежурного. В распоряжении майора находится 10 милиционеров. Чтобы избежать длительных контактов милиционеров с нарушителями правопорядка, майор составляет наряд каждый день по-разному. Сколько дней майор Зимин может спать спокойно (т.е. до тех пор, пока какой-нибудь наряд не повторится)?

шение. Прежде всего, майор занумеровал личный состав числами 1, 2, ... , 10. Далее, поскольку майор был страстным болельщиком, он составил таблицу наподобие той, в которой отмечал результаты футбольного первенства:

дежурный / старший	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

клетках он проставил даты дежурств. Каждая клетка находится на пересечении некоторого столбца и некоторой строки, номера которых и определяют состав соответствующего наряда.

ои этом пары вида (1,7) и (7,1) считаются разными, т.к. хотя в них люди одни и те же, но должности у них разные. Клетки (1,1), (2,2), ... , (10,10) заштрихованы потому, что один и тот же человек не может быть и старшим и дежурным одновременно.

дучи от природы человеком весьма сообразительным, майор Зимин заметил, что в каждом из десяти столбцов записано 9 вариантов наряда, поэтому 9 • 10 = 90 дней он может спать спокойно.

дача 2. *Когда следствие ведут знатоки*

Стукове происходят два ЧП в день. На место происшествия отправляют оперативную группу из трех человек: следователя, оперативника и эксперта. В УВД несут службу 3 следователя, 2 оперативника и 3 эксперта. График их работы составляется таким образом, чтобы каждая очередная опергруппа отличалась от всех предыдущих (пока это будет возможно). Трое друзей — следователь Зубов, оперативник Прокопенко и эксперт Зульфия всегда добиваются успеха. Как часто эта группа попадает в график?

шение. Будем перебирать всевозможные составы оперативной группы, учитывая, что следователя можно выбрать тремя способами (C_1, C_2, C_3), оперативника — двумя (O_1 и O_2), а эксперта — тремя способами ($Э_1$, $Э_2$, $Э_3$).

оставим так называемое *дерево*. Проведем из некоторой точки A три отрезка: AC_1, AC_2 и AC_3, каждый из которых символизирует выбор следователя (рис. 5).

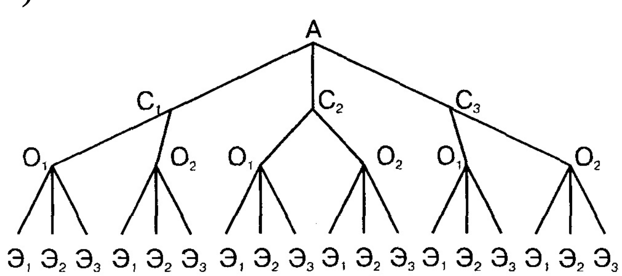

Рис. 5

з концов этих отрезков проведем по два новых отрезка C_1O_1, C_1O_2, C_2O_1, ... , C_3O_2, каждый из которых показывает, кто из оперативников включен в опергруппу.

з концов последних отрезков проведем еще три отрезка с концами $Э_1$, $Э_2$,

$Э_3$, которые указывают на назначение в группу одного из трех экспертов. Изображенную на рисунке схему и называют деревом. Всякий путь вдоль ветвей этого дерева от его вершины A к какой-либо вершине $Э_1$, $Э_2$ или $Э_3$ изображает состав одной из оперативных групп. Например, путь $AC_2O_1Э_3$ изображает оперативную группу, в которую включены следователь C_2, оперативник O_1 и эксперт $Э_3$.

обы найти число всех путей, перемножим число всех отрезков, выходящих из точки A, на число отрезков с началом в точках C_1, C_2, C_3 и на количество отрезков, проведенных из точек O_1 и O_2. Полученное произведение 3 • 2 • 3 = 18 дает число всевозможных различных оперативных групп. Так как в день выезжают две группы, то через 18 : 2 = 9 дней группы начнут повторяться. Итак, знатоки (Зубов, Прокопенко и Зульфия) встречаются на выездах раз в 9 дней.

дача 3. *Случай с адвокатом*

адвоката N из юридической фирмы «Брюковские адвокаты» произошла досадная неприятность с компьютером — сразу после включения оперативная система зависла и на экране монитора появилось сообщение: «Привет! Я — компьютерный вирус «Загадка Сфинкса». Ты должен ответить на 12 вопросов, которые записаны с помощью дренеегипетских иероглифов. На каждый вопрос можно ответить только «да» или «нет». Если через 10 дней ты не сможешь правильно ответить на мои вопросы или попытаешься выключить компьютер — твой винчестер умрет».

компьютере содержалась очень важная информация, восстановить, которую, в случае потери, было бы практически невозможно. Но адвокат N не поддался панике, а придумал два способа решения проблемы. Во-первых можно попробовать расшифровать иероглифы с помощью специального словаря. Адвокат выяснил, что такой словарь есть в брюковской библиотеке, но получить его можно будет только через 8 дней. Поэтому он решил действовать вторым способом: перебирать все возможные комбинации ответов «да» и «нет» на 12 непонятных вопросов, пока не обнаружится правильный вариант. Чтобы не сбиться, адвокат решил записывать каждую комбинацию ответов в виде следующей таблички:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
да	да	нет	да	да	да	нет	да	нет	нет	нет	нет

составление очередной комбинации ответов и ввод ее в компьютер адвокат тратит одну минуту. Успел ли он сделать работу вовремя и спасти винчестер, если работал по 6 ч в сутки, а правильная комбинация оказалась последней?

шение. Число комбинаций так велико, что составление таблицы (как в задаче 1) или графической схемы (как в задаче 2) было бы слишком трудоемким. Поэтому мы ограничимся только логическими рассуждениями.

:ли бы вопрос был один, то на него было бы всего два варианта ответов: «да» и «нет». Если бы вопросов было два, то комбинаций ответов было бы 4: да-да, нет-нет, да-нет, нет-да. Если бы вопросов было три, то число комбинаций ответов было бы 8, т.к. к каждому из предыдущих четырех пришлось добавить либо «да», либо «нет» при ответе на третий вопрос. Таким образом, при добавлении одного вопроса число комбинаций ответов удваивается: четыре вопроса дают 8 • 2 = 16 комбинаций ответов, на пять вопросов получается $2^4 \cdot 2 = 2^5$ комбинаций и т.д., двенадцать вопросов дадут $2^{12} = 4096$ комбинаций.

так последняя — нужная — комбинация ответов появится через 4096 мин работы. Разделив на 60, мы получим 68 ч 16 мин, что при шестичасовом рабочем дне составляет более одиннадцати суток.

ы обсудили три задачи, в каждой из которых занимались расчетом числа определенных комбинаций. На самом деле, все эти задачи решаются по одной и той же логической схеме. Сейчас мы запишем общие формулы для решения любых задач подобного типа.

наиболее общем виде решение первой задачи выглядит так.

/сть требуется выполнить последовательно два действия (например, первое действие — выбор старшего наряда, второе — выбор дежурного). *Если первое действие выполняется m различными способами, а второе — n различными способами, то оба действия можно выполнить $m \cdot n$ различными способами.* Это утверждение называется *правилом умножения*.

дача 2 обобщается следующим образом: *пусть требуется последовательно выполнить три действия, причем, первое действие может быть выполнено m способами, второе — n способами и третье — k способами. Тогда три действия можно выполнить $m \cdot n \cdot k$ способами*.

>пробуйте сформулировать в общем виде аналогичную задачу для произвольного числа действий. Например, во второй задаче всего 12 действий и каждое из них выполняется двумя способами («да» и «нет»). Поэтому ответ будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ — всего 12 сомножителей, т.е. $2^{12} = 4096$.

.блица и дерево, с помощью которых мы решали первые две задачи, описывают правило умножения в некоторой специфической форме.

равило умножения — хотя и простой, но важный математический факт. Поэтому его необходимо строго доказать. Это будет сделано в следующем параграфе.

УПРАЖНЕНИЯ

В забеге участвовало 5 спортсменов. Сколькими способами можно предсказать распределение первых трех мест, если известно, что эти спортсмены всегда показывают разные результаты?

Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырех цифр от 0 до 9. Преступник пытается открыть сейф и набирает шифр наудачу. Найдите наибольшее возможное число безуспешных попыток.

Некто написал 6 новогодних поздравлений своим друзьям, затем взял 6 разных конвертов и разложил открытки по конвертам наудачу. Каково число всех возможных комбинаций?

§2. Метод математической индукции

етод математической индукции является одним из наиболее универсальных методов проведения математических доказательств. Суть его заключается в следующем. Допустим, мы хотим доказать, что некоторое утверждение справедливо при любых значениях натурального числа *n*, содержащегося в формулировке этого утверждения. Например, что для любого натурального *n* справедливо следующее равенство: (1)

егко проверить, что эта формула дает правильный результат при $n = 1, 2, 3, 4$. Но невозможно ее проверить для *всех* значений *n*, т.к. множество натуральных чисел бесконечно! Как же доказать, что утверждение верно для любых *n*, не проверяя этого непосредственно? Оказывается, что достаточно: а) проверить данное утверждение при $n = 1$;

предположив, что оно верно при $n = k$, доказать, что оно верно при $n = k + 1$. В этом и заключается метод математической индукции.

рассматриваемом примере формула (1) при $n = 1$ дает , т.е. что сумма из одного слагаемого 1 равна единице. Таким образом, при $n = 1$ формула верна. Теперь предположим, что она верна при $n = k$, тогда справедливо равенство

.

окажем, что формула (1) верна при $n = k + 1$, т.е.

.

ействительно, используя допущение, получаем

,

о и требовалось доказать.

ссмотрим еще один пример. Докажем, что при любом натуральном показателе степени n число $8^n - 1$ делится на 7.

казательство. Проверим условия а) и б). Подставим в выражение $8^n - 1$ вместо n число 1. Тогда значение этого выражения будет равно $8 - 1 = 7$. Это число делится на 7, т.е. условие а) проверено. Теперь допустим, что $8^k - 1$ делится на 7. Покажем, что в таком случае $8^{k+1} - 1$ также делится на 7. Преобразуем последнее выражение так:

$$8^{k+1} - 1 = 8^{k+1} - 8^k + 8^k - 1 = 8^k(8 - 1) + (8^k - 1) = \\ = 8^k \cdot 7 + (8^k - 1).$$

результате преобразований мы получили сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 7. Действительно, первое слагаемое имеет множитель 7, а второе делится на 7 по предположению индукции. Следовательно, сумма также делится на 7 и условие б) также проверено. Утверждение доказано.

перь докажем общее правило умножения (см. §1).

орема 1. *Пусть требуется последовательно выполнить n действий, причем первое действие может быть выполнено* m_1 *способами, второе —* m_2 *способами и т.д. , наконец, n-е действие —* m_n *способами. Обозначим через* S_n *число всех способов, которыми можно выполнить n действий. Тогда*

$$S_n = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n. \qquad (2)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

и $n = 1$ мы получаем одно действие, которое можно выполнить m_1 способами. Произведение (2) состоит в этом случае также из одного сомножителя m_1. Следовательно, формула (2) при $n = 1$ верна.

пустим, что формула (2) верна для $n = k$ действий: $S_k = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$. (3) Докажем, что она верна для $n = k + 1$ действий. Обозначим произвольный вариант выполнения k действий набором из k чисел. Например, набор (3, 1, 6, ..., 5) означает вариант, в котором первое действие выполнено третьим способом, второе действие — первым способом и так далее, наконец, k-е действие выполнено пятым способом. В случае, если выполняются $k + 1$ действий, каждый вариант записывается как набор из $k + 1$ чисел. Но всякий набор из $k + 1$ чисел получается добавлением одного числа к какому-либо набору из k чисел. Например, из одного набора (3, 1, 6, ... , 5) можно получить такие: (3, 1, 6, ..., 5, 1), (3, 1, 6, ..., 5, 2), ... , (3, 1, 6, ... 5, m_{k+1}), т.е. всего m_{k+1} вариантов. Поэтому число всех способов выполнения $k + 1$ действий будет

$$S_{k+1} = S_k \cdot m_{k+1} = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k \cdot m_{k+1}.$$

ким образом, условие б) индукции тоже выполняется. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наудачу. Каково наибольшее возможное число безуспешных попыток абонента?

Семеро терпеливых стоят в очереди в кассу. Сколькими способами можно составить очередь?

В колоде 36 карт. Наудачу вынимают 3 карты. Каково число всех возможных комбинаций? Сколько троек содержат по крайней мере один туз? Сколько троек содержат только один туз? Сколько раз попадется комбинация дама—семерка—туз?

§3. Размещения, перестановки, сочетания

эи решении комбинаторных задач мы имеем дело с комбинациями из некоторых предметов. Эти комбинации могут отличаться одна от другой числом предметов, их составом или порядком.

эимер 1. *Пять бойцов сержанта Сбруева*

отделении сержанта Сбруева проходят службу 5 новобранцев: Белкин, Пенкин, Фенькин, Свечкин и Овечкин. В свободное от нарядов время сержант обучает их, как рассчитаться по порядку. По команде «В одну шеренгу становись!» солдаты выстраиваются справа от Сбруева и по команде «По порядку номеров рассчитайсь!» производят расчет: «первый-второй-третий-четвертый-пятый». После этого сержант перестраивает новобранцев по-новому и расчет повторяется. Сколько раз может Сбруев повторить это упражнение, используя только разные способы построения солдат?

шение. Договоримся указывать порядок расположения солдат первыми буквами их фамилий. Например, комбинация ПСОФБ означает, что первым является Пенкин, вторым — Свечкин и т.д. Все комбинации отличаются одна от другой порядком букв и называются *перестановками* из пяти букв. Нам нужно найти число всех таких перестановок. Сначала мы выведем общую формулу, а потом закончим обсуждение примера.

усть дано множество из n элементнов. Занумеруем все элементы каким-нибудь способом от 1 до n (в случае с новобранцами $n = 5$). Ясно, что занумеровать можно многими способами.

пределение. *Перестановкой* из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов.*

олее подробно о перестановках будет сказано в гл. VIII «Математические структуры».

орема 2. *Число всех различных перестановок из n элементов равно n*!

казательство. Всякую перестановку из n элементов можно получить с помощью n действий: первое действие — выбор первого элемента, второе действие — выбор второго элемента, и т.д., наконец, n-е действие — выбор элемента с номером n.

рвый элемент можно выбрать n различными способами; второй выбирается из оставшихся $n – 1$ элементов, поэтому число всех способов выполнения второго действия будет $n – 1$. После выбора второго элемента их останется $n – 2$, следовательно, число способов, которыми можно выполнить третье действие, будет $n – 2$. Таким образом, число способов, которыми выполняется очередное действие, будет на единицу меньше предыдущего. Следовательно, четвертое действие можно выполнить $(n – 2)$ способами, пятое — $(n – 4)$ способами и т.д., наконец, последнее действие — одним способом.

правилу умножения (теорема 1) число всех способов выполнения действий, т.е. число всех перестановок, равно $n(n – 1)(n – 2) \bullet ... \bullet 1 = n!$. Теорема доказана.

исло всех перестановок из n элементов обозначают P_n. Согласно теореме 1 его можно найти по формуле

$Pn = n!$. (4) Например, в случае с новобранцами ($n = 5$) мы получим $P_5 = 5! = 120$.

УПРАЖНЕНИЯ

Выпишите все перестановки из букв *a*, *b*, *c*.

Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 7, 2, 4, 9, если каждая цифра используется в записи числа только один раз?

Проверьте равенство $P_6 = 6P_5$.

. Что больше: P_7 или 2^7?

. С помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 закодируйте буквы А, В, Д, Е, Л, О, С, Т, Ь, заменив каждую букву какой-нибудь цифрой, и зашифруйте слово СЛЕДОВАТЕЛЬ. Каково число возможных вариантов кода?

имер 2. *Однажды утром*

днажды утром по улицам города Дрюкова на высокой скорости пронеслась машина. Она сбила зазевавшегося поросенка и скрылась в неизвестном направлении. Возвращавшийся из ресторана житель *N*, заметил номер автомобиля. Но когда появилась милиция, он с перепугу вспомнил только, что номер четырехзначный, все цифры разные, причем первая цифра 1, а последняя 4. Сколько автомобилей должна проверить автоинспекция?

шение. Второй и третьей цифрами номера могут быть любые две из следующих: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Выбрав любую пару цифр, автоинспектор получит номер какого-либо автомобиля. Например, пара 5, 7 дает номер 1574. Эти же цифры но в другом порядке дают номер 1754. Следовательно, нужно перебрать столько номеров сколько будет всевозможных комбинаций из восьми перечисленных цифр по две с учетом их порядка. Такие комбинации называют *размещениями.* В данном случае мы ищем число размещений из восьми цифр по две.

пределение. *Размещением* из *n* элементов по *k* называется всякая перестановка из *k* элементов, выбранных каким-либо способом из данных *n*.

ісло всех размещений из *n* элементов по *k* обозначается .

еорема 3. *Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k\ \text{сомножителей}}\ . \qquad (5)$$

га теорема доказывается так же, как и теорема 2. Каждое размещение можно получить с помощью *k* действий. Первое действие — выбор первого элемента — осуществляется *n* способами, второе действие — выбор второго элемента — (*n* – 1) способами, и т.д., наконец, последнее действие — выбор *k*-того элемента — *(n – k* + 1) способами. По правилу умножения число всех размещений будет *n(n* – 1) • • • (*n* – *k* + 1), что и требовалось доказать.

ернемся к примеру 2. Согласно формуле (5) автоинспекция должна проверить = 8 • 7 = 56 автомобилей.

УПРАЖНЕНИЯ

. На трех карточках написаны буквы *Р, А, К.* Сколько различных слов можно составить, если словом считается любой набор из двух букв? Запишите эти слова.

. В домоуправлении трудится 6 человек. Поступило распоряжение о премировании трех сотрудников (различными суммами). Сколькими способами можно это сделать?

. На железнодорожной ветке Дрюково—Стуково имеется 10 станций. В течение дня с каждой станции на каждую другую выехало в точности по одному пассажиру. Сколько билетов было куплено в этот день?

. Сколькими способами можно выбрать из семи разных книг какие-либо четыре и подарить их четырем милиционерам, занявшим первые четыре призовых места на конкурсе «Настоящий мужчина города Брюкова»?

. Студенты одной группы должны сдать 5 экзаменов в течение восемнадцати дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?

. В течение дня из Брюкова в Стуково отправляется 8 автобусов. Разведенные супруги гражданин *N* и гражданка *M* не хотят ехать в одном автобусе. Сколькими способами они могут отправиться в разных автобусах?

оимер 3. *День Брюквы*

огласно древнему обычаю, самый главный праздник в Брюкове — День Брюквы, проводится за счет средств городского бюджета и празднуется столько дней, сколько депутатов проголосует за то, чтобы праздник состоялся. Из десяти депутатов «за» проголосовали семь.

ково число всех возможных вариантов голосования?

шение. Мы должны найти число всех возможных групп из семи депутатов. Здесь порядок выбора не играет никакой роли, поэтому рассматриваемые комбинации отличаются одна от другой только составом лиц. Комбинации такого типа называются *сочетаниями.*

пределение. *Сочетанием* из *n* элементов по *k* называется всякая совокупность *k* элементов, выбранных каким-либо способом из данных *n* элементов.

исло всех сочетаний из *n* элементов по *k* обозначается . В примере 3 нужно найти .

орема 4. *Число всех сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}. \quad (6)$$

казательство. Возьмем какое-нибудь сочетание из *n* элементов по *k*

$$\underbrace{(a, b, c, \ldots, f)}_{k \text{ букв}}.$$

ереставляя эти элементы всевозможными способами, получим *k*! всех размещений из *n* по *k* одного и того же состава. Таким образом, из одного сочетания получается *k*! размещений. Следовательно, из сочетаний получится • *k*! размещений, т.е.

.

гсюда, с учетом формулы (5) получаем:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k},$$

о и требовалось доказать.

примере 3 было *n* = 10, *k* = 7, поэтому число всех вариантов голосования присяжных равно $C_{10}^{7} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = 120.$

УПРАЖНЕНИЯ

. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выбрать 6 делегатов для переговоров с администрацией института по вопросу о свободной продаже пива в студенческом буфете?

. Сколькими способами можно поставить три пешки на белые клетки шахматной доски?

. Для участия в соревнованиях тренер отбирает 5 спортсменов из двенадцати. Сколькими способами он может составить команду?

. На окружности выбрано 7 точек. Сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?

. На карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 4. Каково число всех возможных вариантов?

исла сочетаний обладают многими важными свойствами. Некоторые из них понадобятся нам в дальнейшем. Например, $C_n^k = C_n^{n-k}.$ (7)

оказательство. Если из *n* элементов выбрать *k* элементов, то останется *n* – *k* элементов. Следовательно, каждому сочетанию из *n* элементов по *k* соответствует определенное сочетание из *n* элементов по *n* – *k*. Поэтому число тех и других сочетаний одинаково. Доказательство закончено.

ормула (7) сокращает вычисления, например:

$$C_{10}^{7} = C_{10}^{10-7} = C_{10}^{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 120.$$

метим, что формулы (4)-(6) допускают более широкое толкование. По определению полагают 0! = 1, =1, = 1.

исла также называют *биномиальными коэффициентами, с* их помощью записывается так называемая *формула бинома Ньютона:*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 +$$

$$+ \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

у формулу можно доказать, например, методом математической индукции. Попробуйте сделать это самостоятельно.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет», «не знаю». Найти число всех различных способов заполнения анкеты.

Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а вторая 14. Сколькими способами можно обменять 5 военнопленных?

В партии из ста деталей имеется 10 бракованных. Наудачу выбирают 4 детали. Сколькими способами можно это сделать? Сколько будет четверок, не содержащих бракованных деталей? Найдите отношение числа последних к числу первых.

Глава IV ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

рудно найти такую сферу человеческой деятельности, в которой не использовались бы вероятностно-статистические методы. Они применяются практически во всех областях науки, в экономике, военном деле, технике, медицине, юридической практике, криминалистике и т.д. Эти методы базируются на понятиях *случайного события* и *вероятности.* Решающий вклад в теорию вероятностей внесли такие замечательные математики как Пьер Ферма, Якоб Бернулли, Симон Лаплас, Пафнутий Львович Чебышев, Андрей Николаевич Колмогоров и многие другие.

§1. Случайные события

кружающий нас мир пронизан явлениями, которые носят случайный характер. Мы встречаемся с ними, наблюдая состояние атмосферы, физические эксперименты, производственные процессы, общественно-политические ситуации и т.п. Результаты многих наблюдений нельзя предсказать однозначно. Предположим, в 10 ч в Твери пошел дождь. Утверждение «в 11 ч дождь кончится» может оказаться либо верным, либо нет. То же самое можно сказать о прогнозе на следующий день уровня радиации, курса доллара, популярности мэра, числа разбойных нападений, количества дорожно-транспортных происшествий. Допустим, что, исходя из каких-то соображений, мы прогнозируем на завтра 12 дорожно-транспортных происшествий на улицах нашего города. Это событие может либо произойти, либо нет. Дело в том, что ситуация на дорогах зависит от большого количества факторов и учесть влияние каждого из них заранее невозможно (погода, видимость, направление и сила ветра, самочувствие водителей и пешеходов, количество и расположение транспорта на трассе и т.д.) Поэтому не исключено, что число происшествий окажется не 12, а, например, 10, 8, или 15. Каждый такой факт является *случайным событием.*

се наблюдаемые при определенных условиях события можно разделить на три вида: *достоверные*, *невозможные* и *случайные*. Всякий раз, когда указанные условия выполняются, говорят, что происходит *испытание.*

остоверным называют такое событие, которое происходит при каждом испытании.

евозможным называют событие, которое не может произойти ни при одном испытании.

учайным называют событие, которое в данном испытании может произойти, а может и не произойти.

имер 1. **В** урне имеются шары только синего и красного цвета. Наугад вынимают один шар. Событие, состоящее в том, что вынут либо синий, либо красный шар — достоверное. Событие, состоящее в том, что вынут шар белого цвета — невозможное. Событие «вынут шар красного цвета» (или событие «вынут шар синего цвета») является случайным.

имер 2. Стрелок производит один выстрел по мишени, разделенной на 10 зон. Выстрел — это испытание; попадание в определенную зону, например, в «десятку» — событие; событие, состоящее в том, что мишень либо поражена, либо не поражена — достоверное событие; поражение одним выстрелом сразу трех зон — невозможное событие.

учайные события будем обозначать буквами *A*, *B*, *C*, ... , достоверное событие — символом ,* невозможное событие — символом .

реческая строчная буква омега.

учайные события A_1, A_2, ... , A_n, называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

имер 3. При одном бросании монеты выпадает либо орел (событие *A),* либо решка (событие *B).* События *A* и *B* несовместны.

примере 2 обозначим через A_1, A_2, ... , A_{10} события, состоящие, соответственно, в поражении первой, второй, ... , десятой зоны. Так как при попадании в границу двух зон судья всегда делает выбор в пользу какой-нибудь одной из них, то можно считать что события A_1, A_2, ... , A_{10} несовместны.

бытия A_1, A_2, ... , A_n называются *единственно возможными,* если в результате испытания происходит какое-либо одно и только одно из этих событий.

имер 4. Игральную кость бросают один раз. События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, состоят, соответственно, в выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти события являются единственно возможными.

примере 2 события A_1–A_{10} не будут единственно возможными, т.к. стрелок может вообще не попасть в мишень.

ждое испытание можно описать с помощью событий, которые являются несовместными и единственно возможными. Эти события называются *исходами испытания* или *элементарными событиями.* Совокупность всех исходов испытания называют также *пространством элементарных событий.*

Примеры

Из колоды (36 карт) наугад вынимают одну. Это испытание имеет 36 исходов, каждый из которых соответствует выбору определенной карты.

В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Участник приобретает один билет. Здесь испытанием является выбор одного билета. Таким образом, мы имеем 1000 исходов.

Карточка спортлото содержит 49 наименований. Играющий зачеркивает 6 из них. Здесь исходом является набор из шести клеток карточки. Так как порядок зачеркивания не играет никакой роли, то число всевозможных исходов будет равно числу сочетаний из 49 по 6 – .

При демографических исследованиях выбирают случайным образом супружеские пары и отмечают их возраст. Исходом каждого такого испытания является *упорядоченная пара чисел* — возраст мужа и возраст жены.

В программе экзамена 30 вопросов, студент выбирает 2 из них. Исходом здесь является любая пара вопросов из данных тридцати. Количество исходов будет .

§2. Классическое определение вероятности

мире случайных явлений, хотя они и случайные, имеются закономерности, которые изучают с помощью понятия *вероятности.* Вероятность представляет собой количественную характеристику возможности наступления некоторого случайного события. Исторически сложились различные подходы к определению вероятности. Классическое определение вероятности сформировалось в XVII в. в результате анализа азартных игр и основано на понятии *равновозможности* событий. Равновозможность событий означает, что нет оснований предпочесть какое-либо одно из них другим. Например, появление орла или решки при одном подбрасывании монеты считают равновозможными событиями; случайный выбор какой-либо карты из колоды — тоже.

.ссмотрим испытание, в результате которого может появиться событие *А.* Каждый исход, при котором осуществляется событие *А,* называется *благоприятным событию А.*

,усть, например, событие *А* состоит в выпадении четного числа очков при одном бросании игральной кости. Из шести равновозможных исходов (от одного до шести очков) три исхода (2, 4, 6) являются благоприятными событию *А.*

пределение. *Вероятностью* события *A* называется отношение числа исходов, благоприятных событию *A*, к числу всех исходов испытания.

апример, вероятность появления четного числа очков при одном бросании игральной кости равна 1/2, т.к. число всех исходов 6, а число исходов, благоприятных событию *A* — три.

ероятность события *A* обозначают *P(A);* число исходов, благоприятных событию *A*, через *m(A);* число всех исходов — через *n*. Тогда по определению

.

Задачи

В урне 10 красных и 8 синих шаров. Наугад вынимают один. Какова вероятность того, что вынут шар красного цвета?

шение. Это испытание имеет 18 равновозможных исходов. Каждый исход означает выбор одного шара. Пусть событие *A* означает выбор красного шара. Число исходов, благоприятных событию *A*, равно 10. Итак, *m(A)* = 10, *n* = 18 и

.

Монета подбрасывается два раза. Найти вероятность того, что выпадут и решка и орел.

шение. Обозначим событие, состоящее в выпадении орла, буквой О, решки — буквой Р. Испытанием здесь является двукратное подбрасывание монеты. Всего может быть 4 исхода: ОО, РР, ОР, РО, поэтому *n* = 4. Событие *A*, состоящее в выпадении и орла и решки имеет два благоприятных исхода: РО и ОР. Следовательно, *m(A)* = 2, *n* = 4 и *P(A)* = .

В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Их них 15 выигрывают по 50 000 руб., 25 — по 10 000 руб., 60 — по 5000 руб. Играющий приобрел один билет. Какова вероятность выиграть не менее 10 000 руб.?

шение. Испытание состоит в выборе наугад одного билета из 1000. Поэтому число всех равновозможных исходов равно *n* = 1000. Пусть событие *A* состоит в том, что участник лотереи приобрел билет, который выигрывает либо 5000, либо 10 000 рублей. Число всех таких билетов равно *m(A)* = 40. Поэтому

з определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

Вероятность любого события заключена между нулем и единицей.

Вероятность достоверного события равна единице.

. Вероятность невозможного события равна нулю.

ервое свойство следует из того, что число благоприятных исходов составляет часть от числа всех возможных исходов.

:орое свойство вытекает из того, что достоверное событие происходит при всяком испытании.

›етье свойство вытекает из того, что невозможное событие не имеет благоприятных исходов.

›и решении задач на вычисление вероятностей возникают трудности, связанные с определением числа тех или иных исходов испытания. В таких случаях используются комбинаторные формулы, которые мы обсуждали в предыдущей главе.

Задачи

Найти вероятность того, что четырехзначный номер случайно встреченного автомобиля состоит из одинаковых цифр.

шение. Каждая цифра номера может быть одной из десяти: 0, 1, 2, ..., 9. Испытанием является выбор какой-либо четверки цифр. Количество всех возможных номеров, т.е. число всех исходов, равно 10 • 10 • 10 • 10 = 10 000 (см. гл. III). Пусть событие *А* состоит в том, что все цифры выбранного номера одинаковы. Благоприятных исходов будет 10: 0000, 1111, ..., 9999. Итак, n = 10 000, $m(A)$ = 10 и $P(A)$ = = 0,001.

Во время процедуры опознания двух подозреваемых посадили на скамью вместе с восемью другими лицами. Какова вероятность того, что на скамье между подозреваемыми оказалось ровно 3 человека?

шение. Занумеруем места на скамье в естественном порядке: 1, 2, ..., 10.

›гда любое расположение двух подозреваемых описывается парой чисел, причем пары (a,b) и (b,a) считаются различными. Таким образом, испытанием будет выбор упорядоченной пары чисел и число всевозможных исходов равно числу размещений из десяти по два, т.е. = 10 • 9 = 90 (см. гл. III). Событие *А* состоит в том, что разность между числами пары равна 4 или –4 (это и означает, что между подозреваемыми находится 3 человека). Перечислим все исходы, благоприятные событию *А:* (1,5), (5,1), (2,6), (6,2), (3,7), (7,3), (4,8), (8,4), (5,9), (9,5), (6,10), (10,6).

:его, как мы видим, получилось 12 пар. Поэтому

Программа экзамена содержит 30 вопросов. Студент знает 20 из них. Каждому студенту предлагают 2 вопроса, которые выбираются случайным образом. Положительная оценка ставится в том случае, если студент правильно ответил хотя бы на один вопрос. Какова вероятность успешной сдачи экзамена?

шение. Рассмотрим испытание, состоящее в выборе двух из тридцати вопросов. Исходом испытания является пара вопросов. Поскольку порядок, в котором выбираются вопросы, несуществен, то число всех n исходов равно числу сочетаний из тридцати по два. Согласно формуле (6) из гл. III, n = = 435. Пусть событие A состоит в том, что студент знает хотя бы один вопрос из двух выбранных. Благоприятные событию A исходы разделим на две группы. В первую включим пары с одним известным студенту вопросом, во вторую — пары с двумя известными ему вопросами. Пары первого типа составляются так: один вопрос выбирается из двадцати знакомых, другой — из десяти незнакомых. По правилу умножения число таких пар равно 20 • 10 = 200. Пары второго типа получаются выбором двух из двадцати знакомых вопросов.

к число равно = 190. Следовательно, число всех благоприятных исходов будет 200 + 190 = 390 и

A) = = 0,8965... 0,9.

Преступник знает, что шифр сейфа составлен из цифр 1, 3, 7, 9, но не знает, в каком порядке их набирать.

Какова вероятность того, что первые две цифры он набрал верно?

Какова вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки?

шение.

Исходом будем считать упорядоченную пару первых цифр шифра. Число таких пар равно числу размещений из четырех по два, т.е. 4 • 3 = 12. Так как в этом случае только один исход является благоприятным, то искомая вероятность равна 1/12.

Исходом испытания является какая-либо перестановка из цифр 1, 3, 7, 9. Согласно формуле (4) из гл. III, число всех исходов равно 4! = 24. Так как только один исход является благоприятным, то вероятность открыть сейф с первой попытки равна .

УПРАЖНЕНИЯ

Игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 11? 7? 8?

В партии из 100 деталей имеется 10 бракованных. Для проверки отобрали 5 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется только одна бракованная.

В студенческой группе (12 девушек и 8 юношей) разыгрываются 5 зарубежных путевок. Какова вероятность того, что путевки получат 3 девушки и 2 юноши?

Для включения в избирательный бюллетень нужно выбрать 8 из 10 кандидатов. Какова вероятность того, что в бюллетень попадет интересующий нас кандидат, если все кандидаты имеют одинаковые шансы?

Из цифр 3, 5, 9 составлены всевозможные двузначные числа. Какова вероятность того, что выбранное из этой совокупности число делится на три?

§3. Операции над событиями. Свойства вероятности

теории вероятностей изучаются методы вычисления вероятностей случайных событий. Часто бывает так, что вероятность некоторого события С можно найти, зная вероятности других событий, связанных с событием С. Для этого прежде всего используются правила сложения и умножения вероятностей, о которых мы расскажем в этом и следующем параграфах.

стория о находчивом майоре.

городе Дрюкове объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших Дрюковоуниверсал-банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события: событие Р — обнаружен преступник Рыков;

бытие У — обнаружен преступник Угрюмов;

бытие Ф — обнаружен преступник Фомкин;

бытие Т — обнаружен преступник Трошкин.

помощью этих обозначений майор Зимин мог передать любую информацию. Например, сообщение Р + У означало бы, что обнаружен по крайней мере один из двоих преступников, Рыков или Угрюмов; сообщение УФ — обнаружены Угрюмов и Фомкин; сообщение — Трошкин не обнаружен.

коре в Центр пришли следующие сообщения: 1) У + Ф; 2) УТ; 3) . Там их без труда расшифровали. Согласно первой шифровке, обнаружен кто-то из двоих — Угрюмов или Фомкин, причем не исключено, что и оба. Второе сообщение означало, что обнаружены и Угрюмов и Трошкин. Из третьего сообщения следовало, что Фомкин и Рыков не обнаружены. Таким образом, на первом этапе розыска обнаружили двоих преступников. Дальнейшие шифровки были такими: 4) УТ(Ф + Р); 5) УТФ; 6) УТФР.

ервая из них означала, что обнаружены Угрюмов, Трошкин и по крайней мере один из двух других преступников. Вторая шифровка: обнаружены все, кроме Рыкова. Третья: обнаружены все четверо.

УПРАЖНЕНИЯ

Расшифруйте донесения группы захвата:

Т+У; 2) Т; 3) У+Ф; 4) У; 5) Р+Ф; 6) У(Ф + Т).

Зашифруйте следующие донесения: 1) взят только ин из четырех; 2) взят по крайней мере один; 3) взяли не менее двух; 4) взяли только двоих; 5) взяли только троих; 6) взяли всех четверых.

ы уже поняли, конечно, что майор Зимин изучал теорию вероятностей. Для шифровки донесений он использовал следующие понятия этой теории.

умма событий.

сли в некоторой ситуации произошло по крайней мере одно из двух событий *A* или *B*, то говорят, что произошло событие $A + B$. Так вводится понятие *суммы событий*. Например, событие Т + Р + Ф означает, что взят по меньшей мере один из трех (Трошкин, Рыков, Фомкин).

оизведение событий.

сли произошли оба события, и *A* и *B*, то говорят, что произошло событие *AB*. Так вводится понятие *произведения событий*. Например, событие РТФ состоит в том, что взяты трое — Рыков, Трошкин и Фомкин.

сли событие *A* не произошло, то говорят, что произошло событие . Так вводится понятие *противоположного* события. Например, событие означает, что не взяты оба преступника, Трошкин и Фомкин, а событие , противоположное событию Т+Ф, состоит в том, что не произошло по крайней мере одно из событий — Т или Ф.

УПРАЖНЕНИЯ

Из колоды карт вынимается одна. Событие *A* — вынута карта красной масти; событие *B* — вынут туз. Что означают события: ,, $A + B$, *AB*?

Игральная кость бросается один раз. Событие *A* — выпало четное число очков; событие *B* — выпало число очков, кратное трем. Что означает событие *A* + ? Запишите событие, состоящее в выпадении шести очков.

. В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие *A* состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку; событие *B* — он сдал экзамен по философии; событие С — получил зачет по физкультуре.

пишите события:

студент не получил зачета;

сдал 2 экзамена;

сдал по крайней мере один экзамен;

получил зачет, но не сдал ни одного экзамена;

сдал только один из экзаменов и не получил зачета;

не сдал ничего;

сдал все.

Свойства вероятности

еорема 1. *Если события A и B несовместны, то вероятность их суммы вычисляется по формуле*

$P(A + B) = P(A) + P(B)$. (1)

оказательство. Пусть число всех исходов равно *n*. В число исходов, благоприятных событию $A + B$, входят все исходы, благоприятные событию A и все исходы, благоприятные событию B. Так как события A и B несовместны, то среди перечисленных исходов нет одинаковых. Поэтому $m(A + B) = m(A) + m(B)$. Следовательно, P(A+B)==P(A)+P(B)

о и требовалось доказать.

дача. В урне 8 белых, 5 синих и 2 красных шара. Какова вероятность того, что вынутый шар будет синего или красного цвета?

шение. Пусть событие A состоит в том, что вынут синий шар, а событие B — вынут красный шар. Тогда $P(A) =$, $P(B) =$. Событие $A + B$ означает, что вынут шар синего или красного цвета. Так как события A и B несовместны, то вероятность события $A + B$ вычисляется по формуле (1) $P(A+B) =$.

орема 2. *Справедлива формула*

$P()=1 – P(A)$. (2)

оказательство. Так как события A и несовместны, то по формуле (1) $P(A+) = P(A) + P( )$.

другой стороны, событие A + является достоверным, поэтому по свойству II из §2 имеем $P(A +) = 1$. Следовательно, $P(A) + P( ) = 1$, отсюда $P( ) = 1 – P(A)$, что и требовалось доказать.

дача. Один лотерейный билет выигрывает с вероятностью 0,0001. Какова вероятность того, что владелец одного билета ничего не выиграет?

шение. Пусть событие A означает выигрыш. Тогда означает, что билет не выигрывает. По формуле (2) $P( )$ = 1 – 0,0001 = 0,9999.

мечание. Формулу (1) можно распространить на любое число событий. Методом математической индукции доказывается, что если события A_1, A_2, ..., A_n. попарно несовместны, то вероятность их суммы вычисляется по формуле

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ...+ P(A_n)$. (3) УПРАЖНЕНИЕ

. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 выбирают две и составляют двузначное число. Событие A — обе цифры числа четные; событие B — обе цифры нечетные. Что означают события , , $A + B$, , AB? Найдите вероятности всех перечисленных событий.

§4. Условные вероятности. Независимые и зависимые события

ижеследующая история показывает, что иногда вероятность события зависит от некоторого другого связанного с ним события.

...стория о выборах.

...юковцы и брюковцы решили выбрать общее правительство в составе мэра и вице-мэра. Согласно регламенту, каждый город выставляет четырех кандидатов. Каждому кандидату дают шар, на котором тот записывает свою фамилию и затем опускает шар в урну. К урне подходит победитель конкурса «Настоящий мужчина города Дрюкова», наугад вынимает один шар из урны и объявляет имя мэра. После этого то же самое проделывает победительница конкурса «Мисс Брюково» и объявляет имя вице-мэра. Какова вероятность того, что

вице-мэром станет брюковец;

вице-мэром станет брюковец, если мэром стал брюковец;

вице-мэром станет брюковец, если мэром стал дрюковец?

...ссмотрим следующие события:

...бытие *A* — вице-мэром избран брюковец;

...бытие *B* — мэром избран брюковец;

...бытие *C* — мэром избран дрюковец.

...тобы ответить на первый вопрос, найдем число всех исходов голосования и число благоприятных исходов. Так как мэр выбирается из восьми кандидатов, а вице-мэр из оставшихся семи, то по правилу умножения число всех исходов (упорядоченных пар) равно 8 • 7 = 56. Число благоприятных исходов будет 28, т.к. число брюковских и дрюковских кандидатов одинаково. Таким образом, вероятность события *A* равна 1/2.

...тветим теперь на второй вопрос. Так как мэром стал брюковец, то в числе претендентов на должность вице-мэра осталось 4 дрюковца и 3 брюковца. Следовательно, вероятность того, что вице-мэром выберут брюковца, равна 3/7.

...оследняя вероятность подсчитывается столь же просто. Если мэром стал дрюковец, то в числе претендентов осталось 4 брюковца и вероятность того, что вице-мэром стал брюковец, равна 4/7.

...так, мы получили три разные вероятности. Последние две из них называются *условными вероятностями*. Во втором случае мы нашли *вероятность A при условии B* (мэром стал брюковец), в последнем случае — *вероятность A при условии C* (мэром стал дрюковец).

...пределение. Условной вероятностью *P(A/B)* называют вероятность события *A*, вычисленную в предположении, что произошло событие *B*.

...зультаты выборов теперь можно записать так:

$$P(A) = \,,\; P(A/B) = \,,\; P(A/C) = .$$

УПРАЖНЕНИЕ

... Из 36 карт выбирают одну. Событие *A* состоит в том, что выбрана карта красной масти, событие B — выбрана дама. Найти вероятности $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$.

едующая теорема дает способ вычисления условной вероятности.

орема 3.

$P(A/B)$ = (4)

казательство. Напомним, что произведение AB означает, что произошли оба события, A и B. Пусть испытание, в котором могут появиться события A и B, имеет n исходов. Число исходов, благоприятных событиям B и AB, обозначим, как и выше, через $m(B)$ и $m(AB)$ соответственно. Найдем вероятность события A при условии, что произошло событие B, т.е. $P(A/B)$. По смыслу определения условной вероятности $P(A/B)$ мы учитываем только те исходы, в которых произошло событие B, поэтому число всех возможных исходов при вычислении этой вероятности будет $m(B)$. Число же исходов, благоприятных в этой ситуации событию A, будет $m(AB)$. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{m(AB)}{m(B)} = \frac{m(AB)}{n} : \frac{m(B)}{n} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

орема доказана.

формулы (4) вытекает следствие:

роятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: $P(AB) = P(B)P(A/B)$, $P(AB) = P(A)P(B/A)$. (5)

дача. Из колоды карт выбирают две. Какова вероятность того, что будут вынуты 2 туза?

шение. Пусть событие B состоит в том, что первая карта туз, а событие A — вторая карта туз. Нужно найти вероятность произведения AB. По формуле (5) $P(AB) = P(B)P(A/B) =$.

етодом математической индукции формулу (5) можно распространить на любое число событий. Например, для трех событий аналогичная формула выглядит следующим образом: $P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$, (6)

ля четырех событий она имеет вид:

$P(ABCD) = P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC)$. (7)

дача. Из одиннадцати карточек составлено слово

$$\boxed{С}\ \boxed{Л}\ \boxed{Е}\ \boxed{Д}\ \boxed{О}\ \boxed{В}\ \boxed{А}\ \boxed{Т}\ \boxed{Е}\ \boxed{Л}\ \boxed{Ь}.$$

них выбирают поочередно четыре карточки и приставляют одну к другой. Какова вероятность того, что получится слово «дело»?

шение. Введем события Д, Е, Л, О, состоящие в том, что первая выбранная буква — Д, вторая — Е, третья — Л и четвертая — О. Нам нужно найти вероятность произведения этих событий. По формуле (7) имеем:

$$P(ДЕЛО) = P(Д) \cdot P(Е/Д) \cdot P(Л/ДЕ) \cdot P(О/ДЕЛ) =$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{1980}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

. Управление УВД Стукова выделило 3 премии для сотрудников оперативных групп. В фуражку начальника положили 8 фантов с фамилиями всех восьми сотрудников. Какова вероятность того, что первую премию получит следователь Зубов, вторую — оперативник Прокопенко, третью — эксперт Зульфия?

. В команде по синхронному плаванию Независимого международного университета из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. Для участия в соревновании выбирают четверых. Какова вероятность, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

. В милицейском колледже города Брюкова экзамены сдают так. Студент выбирает пять вопросов и получает столько баллов, на сколько вопросов он правильно ответил. Студент Громов знает 15 вопросов из 24. Какова вероятность того, что он получит пятерку?

пределение. События *А* и *В* называются *независимыми,* если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

ными словами, события *А* и *В* независимы, если выполняются следующие условия: *P(A/B) = P(A), P(B/A) = P(B).* (8) С учетом равенств (8) формула (5) примет такой вид:

P(AB) = P(A)P(B). (9)

гак, мы получили еще одну важную теорему.

еорема 4. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

дача. Два стрелка независимо один от другого делают по одному выстрелу по одной и той же мишени.

ероятность поражения мишени первым стрелком — 0,5, вторым — 0,6. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

шение. Пусть событие *А* состоит в том, что мишень поразил первый стрелок, а событие *В* — в том, что мишень поразил второй стрелок. По условию *Р(А)* = 0,5 и *Р(В)* = 0,6. Рассмотрим противоположные события: — промах первого стрелка, — промах второго. По теореме 2 (с. 69) получаем *Р( )* = 1 – 0,5 = 0,5 и *Р()* = 1 – 0,6 = 0,4. Произведение событий • означает промах обоих стрелков. По смыслу задачи события *А* и *В* являются независимыми, поэтому и противоположные события и также будут независимыми. По формуле (9) мы получаем вероятность того, что оба стрелка промахнутся: $P(\bullet) = 0{,}5 \bullet 0{,}4 = 0{,}2$. Нас же интересует вероятность противоположного события, состоящего в том, что мишень поражена. Поэтому искомую вероятность мы находим по формуле (2): $1 – 0{,}2 = 0{,}8$.

УПРАЖНЕНИЯ

. Найдите вероятность того, что два мотора на самолете выйдут из строя, если вероятность выхода из строя одного мотора не зависит от исправности других и равна 0,0001.

. Вероятность того, что студент Громов сдаст экзамен по уголовному праву, равна 0,7, а вероятность успешной сдачи им экзамена по гражданскому праву — 0,8. Какова вероятность того, что он успешно сдаст оба экзамена?

. Ведутся поиски четырех преступников. Каждый из них независимо от других может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

казание: запишите формулу (9) для произвольного числа множителей.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

В течение месяца суд вынес 30 приговоров, в том числе 6 — за кражу. В порядке прокурорского надзора проверено 10% дел. Какова вероятность того, что в их числе оказалось два дела по обвинению в краже?

Вероятность того, что спортсмен улучшит свой личный рекорд с первой попытки, равна 0,5. Если первая попытка оказалась успешной, то вероятность улучшить этот результат в следующей попытке остается той же. В случае, если первая попытка оказалась безуспешной, вероятность улучшить результат со второй попытки равна 0,4. Найдите вероятность того, что спортсмен улучшит свой результат: а) в каждой из двух попыток,

только в первой попытке,

только во второй попытке,

хотя бы в одной из двух попыток.

Как показывает практика, в среднем в трех автомобилях из каждой тысячи, проходящих таможенный досмотр, обнаруживают наркотики. Какова вероятность того, что наркотики будут обнаружены хотя бы в одной из пятисот проверенных машин?

Глава V ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§1. Декартовы координаты

етод координат представляет собой один из наиболее универсальных математических методов и используется для решения самых разнообразных задач. В основе метода лежит понятие *системы координат* на прямой, плоскости и в пространстве.

истема координат на прямой возникла в результате осознания математиками того факта, что точек на прямой, образно говоря, столько же, сколько действительных чисел. Точнее, каждую точку на прямой можно соотнести с некоторым действительным числом (единственным!), которое называется *координатой* этой точки.*

Іа самом деле все обстоит сложнее. Бесконечные множества сравнивают не по количеству элементов, в них содержащихся, а с помощью *взаимно однозначного соответствия*. Поэтому точнее было бы сказать, что между множеством точек прямой и множеством действительных чисел имеется взаимно однозначное соответствие.

роще всего это сделать с помощью так называемой равномерной шкалы (вспомните термометр!):

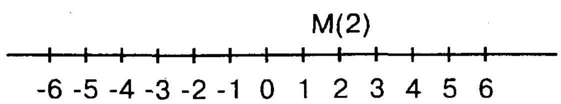

Рис. 6

рямую с отмеченным на ней положительным направлением называют *осью*. Точка O называется *началом координат*. Около каждой точки записывается ее координата.

зделим, например, отрезок [0,1] на десять равных частей:*

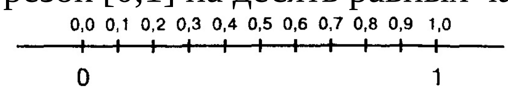

Рис. 7

Мы изобразили отрезок [0,1] большим, чем на предыдущем рисунке. Но мы не считаем, что он увеличился, просто мы смотрим на него сквозь увеличительное стекло.

аждой точке деления определим координату как показано на рисунке. Точно так же делим на десять частей любой другой отрезок, концы которого отмечены целыми числами. В результате на шкале появятся точки, отмеченные координатой с одним десятичным знаком после запятой.

алее каждый новый отрезок делим опять на десять частей, например:

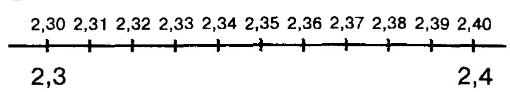

Рис. 8

результате появятся точки, отмеченные координатами с двумя десятичными знаками после запятой. Продолжая эту процедуру, мы получим точки, координатами которых будут дроби с тремя, четырьмя ... десятичными знаками после запятой. При этом, какую бы десятичную дробь мы ни взяли, после некоторого числа шагов мы получим точку, координатой которой является эта десятичная дробь.*

Иногда говорят так: «продолжая эту процедуру до бесконечности, мы получим все точки, координатами которых являются всевозможные десятичные дроби». Возможность продолжать процедуру деления до бесконечности — это *математическая абстракция*. Здесь необходимо принять во внимание два допущения. На первое из них указал еще Евклид, определив точку так: точка это то, что не имеет частей. Во-вторых, предполагается, что при уменьшении длины отрезка все его свойства сохраняются, т.е. с меньшим отрезком можно делать все то же, что и с большим отрезком. Однако это не будет верно, если прямые и точки считать *физическими* объектами. Современная физика утверждает, что бесконечно дробить нельзя, т.к. существует наименьшая величина — квант, и что свойства больших тел (макромир) отличаются от свойств малых тел (микромир).

›мимо этих точек, на прямой есть также точки, координаты которых являются бесконечными десятичными дробями.*

;уществование таких точек гарантирует аксиома Дедекинда, входящая в систему аксиом евклидовой геометрии (см. гл. VII, §2).

ık описать положение этих точек на прямой? Рассмотрим, например, точку *A* с координатой = 2,333.... 3

·сконечная периодическая дробь удовлетворяет бесконечной последовательности неравенств:

2,3 < < 2,3, 2,33 < < 2,34, 2,333 < < 2,334,...

›этому точка *A* (7/3) находится между точками M_1(2,3) и N_1(2,4); между M_2(2,33) и N_2(2,34); между M_3(2,333) и N_3(2,334) и т.д. Расстояние между правой и левой точками все время уменьшается и стремится к нулю, поэтому существует *единственная* точка, удовлетворяющая всем написанным выше неравенствам. Это и есть точка *A* (7/3).

.сстояние $|MN|$ между точками $M(x)$ и $N(y)$ прямой вычисляется через их координаты x и y по формуле: $|MN| = |y - x|$. (1)

ıмая простая и наиболее распространенная система координат на плоскости называется *декартовой* по имени известного математика и философа Рене Декарта. Декартова система координат образована двумя перпендикулярными осями, осью X и осью Y (рис. 9).

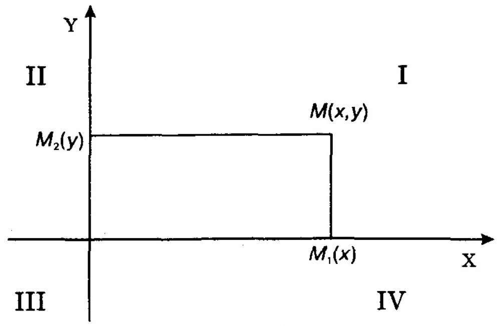

Рис. 9

чка пересечения осей называется *началом* и служит одновременно началом координат на каждой из осей. Масштаб на осях выбирается одинаковый.* Система координат нужна для того, чтобы каждой точке плоскости соответствовали две координаты — два действительных числа *x* и *y*. Делается это так. Спроектируем точку *M* на координатные оси, т.е. опустим из нее перпендикуляры на них. Обозначим основания перпендикуляров M_1 и M_2. Тогда *x* есть координата точки M_1 на оси X, а *y* есть координата точки M_2 на оси Y. Очевидно, что

ли точка *M* лежит в I квадранте, то *x* 0, *y* 0; если точка *M* лежит во II квадранте, то *x* 0, *y* 0; если точка *M* лежит в III квадранте, то *x* 0, *y* 0; если точка *M* лежит в IV квадранте, то *x* 0, *y* 0; если точка *M* лежит на оси X, то *y = 0*; если точка *M* лежит на оси Y, то *x = 0*; начало O имеет координаты (0,0).

Iначе система координат будет называться *аффинной*, а не декартовой.

УПРАЖНЕНИЯ

Если точка *M* лежит в верхней полуплоскости, т.е. выше оси X, то ее координаты удовлетворяют неравенству ... ; если точка *M* лежит в нижней полуплоскости, т.е. ниже оси X, то ее координаты удовлетворяют неравенству ... ; если точка *M* лежит в правой полуплоскости, т.е. справа от оси Y, то ее координаты удовлетворяют неравенству ... ; если точка *M* лежит в левой полуплоскости, т.е. слева от оси Y, то ее координаты удовлетворяют неравенству ....

Постройте точки с координатами (1,1), (-1,1), (1,-1),(-1,-1).

Опишите часть плоскости, в которой находятся точки с координатами

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ y > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ y > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ y < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ y < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ y > 3. \end{cases}$$

школе Вы доказывали, что расстояние между двумя точками плоскости $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ вычисляется по формуле

. (2)

›казательство основано на применении теоремы Пифагора к треугольнику M_1M_2M (см. рис. 10).

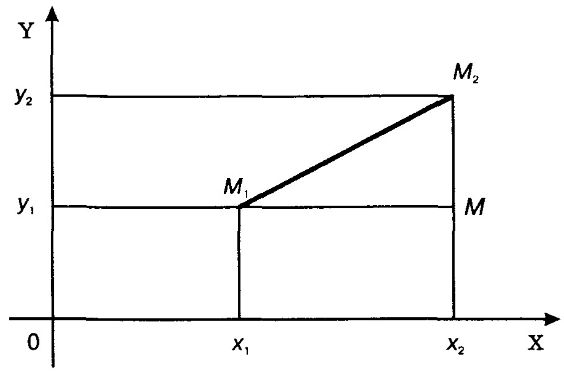

Рис. 10

УПРАЖНЕНИЯ

Найдите расстояние между точками $M_1(1,2)$ и $M_2(3,4)$; M_1(l,–2) и $M_2(-3,4)$; M_1(l,3) и $M_2(1,-7)$; $M_1(3,5)$ и $M_2(-1,5)$.

тметьте эти точки на чертеже.

Укажите все точки с целыми координатами, находящиеся внутри круга радиуса 2 с центром в начале координат, и отметьте их на чертеже. Найдите расстояния от этих точек до начала координат и округлите результаты до 0,01.

§2. Линейная и постоянная функции

еременная величина и *функция* — важнейшие понятия современной математики и физики. Примеры переменных величин и функций поставляет нам природа. Протекающие в ней процессы и закономерности ученые облекают в форму законов физики, математики, химии и т.д. Важнейшая переменная величина — *время* — входит практически во все физические законы, связанные с движением. Например, известный закон прямолинейного и равномерного движения

$$s = v_0 t \quad (3)$$

держит две переменные величины: пройденное расстояние s (путь) и время *t*. Форма записи этого закона подчеркивает тот факт, что пройденный путь зависит от времени, а не наоборот. Математики в этом случае говорят, *что переменная величина s является линейной функцией переменной величины, t*, т.е. *s — зависимая переменная, а t — независимая переменная*.

корость $v = v_0$ при равномерном движении постоянна, т.е. одна и та же в каждый момент времени. Но, выражаясь таким образом, мы, очевидно, считаем, что скорость является функцией времени. Это пример так

называемой *постоянной функции.*
вномерное движение представляет собой математическую абстракцию, т.к. на самом деле в природе таких движений не бывает. Например, на участке Тверь—Москва электричка несколько раз изменяет скорость движения, останавливается. Тем не менее, может показаться, что в середине достаточно длинных перегонов скорость постоянна. Однако, так можно считать лишь приближенно. Если бы мы измеряли скорость более точным прибором, то обнаружили бы, что в разные моменты времени она различна. Это различие очень мало, но оно есть.
гда же электричка, трогаясь с места, только набирает скорость, то последняя (опять же приближенно!) меняется с течением времени так: $v = at$,
е a — некоторая постоянная функция, называемая *ускорением.* Из школьного курса физики нам известно, что линейная зависимость скорости от времени характеризует так называемое *равноускоренное движение*, при котором пройденный путь вычисляется по формуле: $s = at^2$.
едположение, что a — постоянная, тоже математическая абстракция. С помощью точных приборов можно установить, что на самом деле при разгоне электрички скорость меняется по более сложному закону, например, $v = at + bt^2$,
е b — некоторое сравнительно маленькое число. Второе слагаемое, в силу его малости, обычно отбрасывают, и тогда получаются известные формулы равноускоренного движения. Если же его не отбрасывать, то движение нельзя считать равноускоренным, и тогда формула для вычисления пути будет более сложной.
ссмотрим еще один физический закон — Второй Закон Ньютона, который запишем так:

$a = .$ (4)

дем считать переменными величинами силу F и ускорение a. Тогда равенство (4) отражает следующий физический эксперимент: на тело с массой m действует сила F, которую можно менять; в результате действия этой силы тело получает ускорение a, которое, следовательно, также является переменной величиной — функцией силы F.
математической точки зрения оба физических закона — (3) и (4) — это некоторые *линейные функции.* По сравнению с другими функциями, линейные функции устроены наиболее просто, но они являются и наиболее важными.
бщепринятая форма записи произвольной линейной функции такова:

$y = kx + b$, k 0, (5) где k и b — некоторые постоянные, k 0, а x и y — переменные, причем y зависит от x (или является функцией переменного x). егда важно указать, какие значения может принимать независимая переменная x. Собственно говоря, символом x обозначается произвольный элемент некоторого числового множества,* которое называется *областью определения функции.* Например, в законе равномерного прямолинейного движения (3) можно было считать, что 0 t 2 ч 40 мин. Если же множество не указано, то считается («по умолчанию»), что t может быть любым действительным числом.

ообще говоря, функции можно задавать не только на числовых множествах, но других функций в этой главе мы не рассматриваем.

помощью системы координат мы можем каждую функцию изобразить наглядно, в виде *графика*. Построим, например, график линейной функции

$y = 2x - 3$. (6) (Здесь $k = 2$, $b = -3$.) Подставляя вместо x различные числовые значения, найдем соответствующие значения y и составим таблицу:

x	0	1	–1	2	3	0,1	–0,1	1,5	...
y	–3	–1	–5	1	3	–2,8	–3,2	0	...

дем считать, что каждая пара чисел x и y, удовлетворяющих уравнению (6), служит координатами некоторой точки на плоскости. Множество всех таких точек и будет графиком функции (6). Некоторые из этих точек мы уже нашли, их координаты записаны в столбцах таблицы. Если построить на плоскости точки с координатами (0,–3), (1,–1), (–1,–5), (2,1) и т.д., то все они окажутся на одной прямой, которая и будет графиком функции (6) (см. рис. 11).

отношение (6) называется *уравнением* построенной прямой, а число $k = 2$ — ее угловым коэффициентом, т.к. $k = \mathrm{tg}$, где — угол между осью X и прямой.

ли в уравнении (5) положить $k = 0$, то оно примет вид

$y = b$. (7)

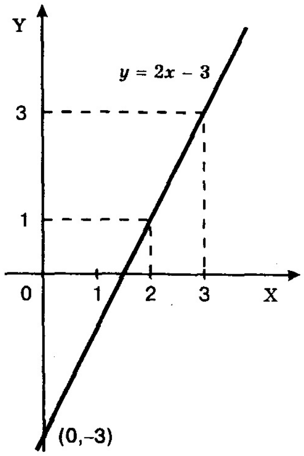

Рис. 11

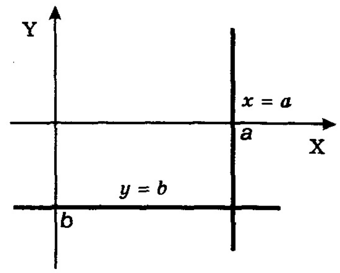

Рис. 12

о *постоянная функция*: величина *y* имеет одно и то же значение при любом *x*, т.е. не зависит от переменной *x*. Графиком постоянной функции $y = b$ будет прямая, параллельная оси X (см. рис. 12).

авнение

$x = a$ (8)

кже задает постоянную функцию, но здесь мы уже считаем, что переменная *x* не зависит от переменной *y*. График этой функции представляет собой прямую, параллельную оси Y (см. рис. 12).

ли переменная *y* зависит от переменной *x*, то и наоборот: переменная *x* зависит от переменной *y*. Например, если из уравнения (6) выразить *x* через *y*, то получим

$x = y +$.   (9) Эта функция называется *обратной* по отношению к функции $y = 2x - 3$. Для любой линейной функции всегда существует ей обратная функция, т.к. из уравнения (5) всегда можно выразить *x* через *y*: $x = y -$. (10) Заметьте, что эта функция также является линейной.

вот для постоянной функции обратной не существует. Почему?

ак, графики линейной и постоянной функций представляют собой наклонные, вертикальные и горизонтальные прямые. Их уравнения (5), (7) и (8) можно записать в единообразной форме: $Ax + By + C = 0$, (11) где *A*, *B* и C — некоторые постоянные, причем *A* и *B* не могут быть нулями одновременно. Левая часть уравнения (11) представляет собой *многочлен первой степени относительно переменных x и y.*

ли *A* 0 и *B* 0, то из уравнения (11) можно выразить *x* или *y* и мы получим либо уравнение вида (5), либо уравнение вида (9). Следовательно, при неравных нулю *A* и *B* уравнение (11) определяет линейную функцию.

ли *A*=0 а *B* 0, то в уравнении (11) остается только переменная *y* и его можно прописать в виде $y = b$. Следовательно, если в уравнении (11) *A*= 0 и

B 0, то оно задает постоянную функцию. Аналогично, при A 0 и В = 0 мы получаем постоянную функцию вида $x = a$.
равнение (11) называется *общим уравнением прямой.*

УПРАЖНЕНИЯ

Укажите точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одному из следующих соотношений:
= 0, $x > 0$, x 0; $y = 0$, y 0, y 0; $x = 2$, x 2, $x < 2$; $y = -3$, $y < -3$, $y > -3$; $y = x$, y x, y $< x$; $y = x+2$, $y > x+2$, $y < x+2$; $x+y+1=0$, $x+y+1$ 0, $x+y+1$ 0; $2x - 5y + 10 = 0$, $2x - 5y + 10 < 0$, $2x - 5y + 1$ 0.
Постройте следующие пары точек:
,2) и (2,1); (1,–3) и (–3,1); (–2,–4) и (–4.–2); *(a,b)* и *(b, a).* Проверьте их симметричность относительно прямой $y = x$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов.
казание: перегните чертеж по этой прямой.
опробуем изобразить график функции $y = kx + b$ и обратной ей функции (10) на одном и том же чертеже. Здесь есть некоторое препятствие. Дело в том, что в нашей записи обратной функции независимой переменной является у (т.е. x выражается через y), в то время как у исходной функции независимая переменная обозначена через x. Но раз мы решили строить оба графика на одном и том же чертеже, независимую переменную в обоих случаях необходимо обозначить одинаково, например, x. Тогда уравнение обратной функции (10) запишется так: $y =$ (12)
и

$$x = ky + b. \quad (13)$$

о уравнение отличается от уравнения исходной функции (5) заменой переменных x y. Поэтому, если координаты точки *М(x,y)* удовлетворяют уравнению (5), то координаты точки *M'(y,x)* удовлетворяют уравнению (12) [или (13)]. Но эти точки симметричны относительно прямой $x = y$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов. Следовательно, *графики функции* (5) *и обратной ей функции* (12) *симметричны относительно прямой* $x = y$ (т.е. они совпадут, если чертеж перегнуть по этой прямой).

УПРАЖНЕНИЯ

Постройте графики данных функций и функций, им обратных (если они существуют):
$y = -x + 4$; б) $y = -$l; в) $x = 3$.
инейные функции часто используют при обработке результатов наблюдений (экспериментов). Рассмотрим два примера.
ример 1. В электрической цепи в течение десяти секунд измеряется

напряжение U с интервалом в 1 секунду. Результаты приведены в табл. 8.

<u>Таблица 8</u>

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U	12	11	10	9	9	8	8	7	7	6

з теории известно, что зависимость между U и t *линейная,* т.е.

$$U = kt + b.$$

есь k и b — некоторые числа (параметры), которые нужно найти. Если бы измерения были точными, то хватило бы двух замеров, поскольку прямая линия вполне определяется двумя точками. Но практически результаты любого измерения являются приближенными. Если, например, построить точки с координатами t, U по данным табл. 8, то окажется, что они не лежат на одной прямой (рис. 13).

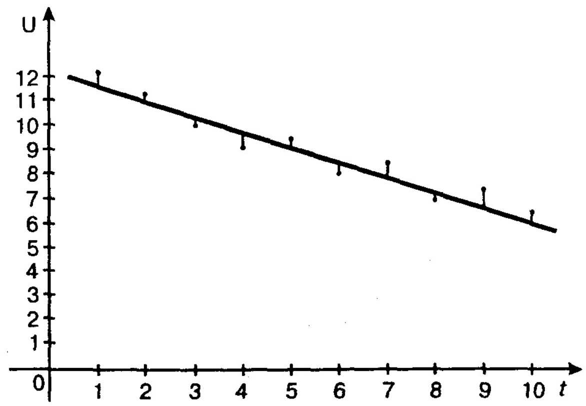

Рис. 13

зникла проблема: как найти такие параметры k и b, при которых линейная функция $U = kt + b$ достаточно точно отражает результаты эксперимента, приведенные в табл. 8?

шим эту задачу так называемым *методом наименьших квадратов.* Суть его в следующем: прямая выбирается так, чтобы сумма квадратов вертикальных отклонений экспериментальных точек от искомой прямой (см. рис. 13) была как можно меньше. Это условие приводит к формулам

, . (14)

есь , и — средние арифметические значений t, U и tU, а D — дисперсия значений t (см. гл. II).

ставим таблицу:

<u>Таблица 9</u>

t	U	tU	$t-\bar{t}$	$(t-\bar{t})^2$
1	12	12	–4,5	20,25
2	11	22	–3,5	12,25
3	10	30	–2,5	6,26
4	9	36	–1,5	2,25
5	9	45	–0,5	0,25
6	8	48	0,5	0,25
7	8	56	1,5	2,25
8	7	56	2,5	6,25
9	7	63	3,5	12,25
10	6	60	4,5	20,25
55	87	428	0	82,5

последней строке записана сумма всех чисел соответствующего столбца. Средние арифметические и дисперсию найдем по формулам (1) и (5) [гл. II]: ; ; .

эдставив найденные значения в формулы (1), получим искомые параметры:

, .

гак, искомая линейная функция имеет вид

$$U = –0,61t + 12,06.$$

: график показан на рис. 13. Проверьте, что он проходит через точку (5,5; 8,7).

ссмотренный метод применяется и для описания других зависимостей, которые приближенно можно считать линейными.

УПРАЖНЕНИЕ

В табл. 10 приведены результаты измерения силы звука самолета (она обозначается *v* и измеряется в децибелах *(дб)* на различных расстояниях от точки взлета (расстояние обозначается, как обычно, через *s* и измеряется в километрах).

Таблица 10

s	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
v	115	108	102	98	93	89	87	72	65	60

спользуя метод наименьших квадратов, подберите линейную функцию, которая описывает зависимость *v* от *s*. Найдите: а) на каком расстоянии от точки взлета звук становится смертельно опасным для человека (свыше 120 децибел); б) на каком расстоянии от аэродрома можно строить жилые помещения (менее 75 децибел), детские учреждения и больницы (60 децибел)?

казание: Воспользуйтесь формулами (14).

§3. Степенные функции

ункция

$$y = x^2 \quad (15)$$

зывается *квадратичной*, а ее график называется *параболой* (см. рис. 14).

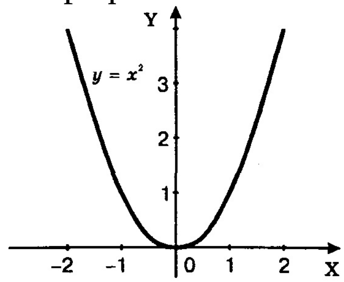

Рис. 14

очка *O* называется *вершиной параболы.* Ось Y является *осью симметрии* параболы, т.к. для каждой точки *M(x,y),* лежащей на параболе, симметричная ей относительно оси Y точка *M'(–x,y)* также лежит на параболе. Другими словами, если чертеж перегнуть по оси Y, то левая половина параболы совпадет с правой.

еременная *x,* стоящая в правой части уравнения (15), может принимать любые значения. Если *x* возрастает от – до нуля (*x* [– ,0]), то $y = x^2$ убывает от + до нуля. Следовательно, на промежутке (– ,0) функция (15) убывает. Это хорошо видно на рисунке: левая часть графика идет сверху вниз, если двигаться в направлении возрастания координаты *x*, т.е. слева направо. Правая часть графика демонстрирует нам тот факт, что функция возрастает на промежутке [0,+).

айдем теперь график обратной функции, для чего, как и в случае с линейной функцией, поменяем местами переменные *x* и *y* а затем выразим *y.* После замены получим $x = y^2$, откуда *y* = или *y* = –. Таким образом, мы получили две функции. Первая (*y* =) будет обратной для функции $x = y^2$, *x* 0, графиком которой является правая ветвь параболы; функция *y* = – является обратной для функции $x = y^2$, *x* 0, графиком которой является левая половина параболы (см. рис. 15).

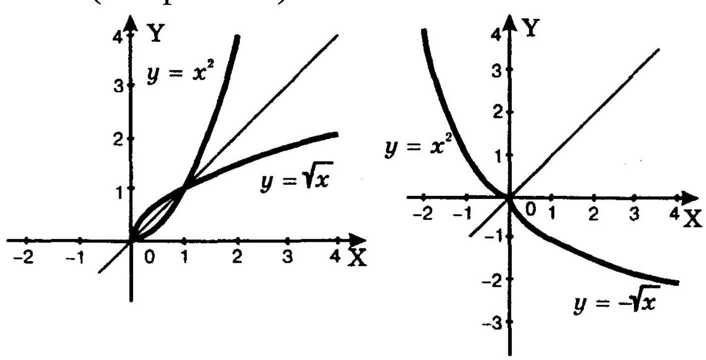

Рис. 15

УПРАЖНЕНИЯ

. Постройте графики следующих функций и функций, им обратных:

$y = 2x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = -2x^2$.

тепенная функция

$$y = x^3 \quad (16)$$

зывается *кубической.* Ее график (см. рис. 16) называется *кубической параболой.*

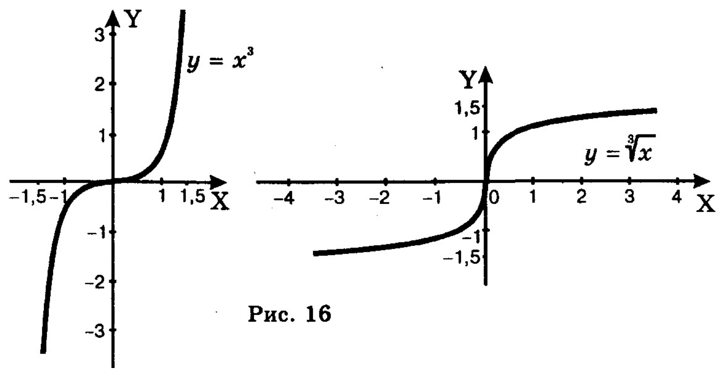

Рис. 16

братной к функции (16) будет $x = y^3$ или $y =$. Ее график (см. рис. 16) также будет кубической параболой. Обе параболы симметричны относительно начала координат. Действительно, если уравнению (16) удовлетворяют координаты точки $M(x,y)$, то ему же удовлетворяют и координаты точки $M'(-x\ -y)$, которая симметрична M относительно начала координат.

рис. 17 приведены графики степенной функции $y = x^4$ и соответствующих обратных функций.

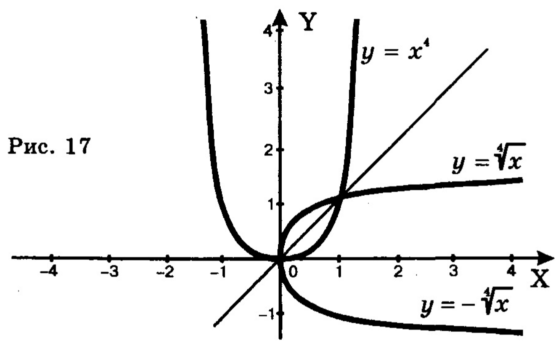

Рис. 17

УПРАЖНЕНИЯ

. Постройте графики заданных функций и функций, им обратных:

а) $y = -x^3$; **б)** $y = 2x^3$; **в)** $y = -2x^3$; **г)** $y = -x^4$;
д) $y = 2x^4$; **е)** $y = -2x^4$.

§4. Показательная и логарифмическая функции

ункция

$$y = a^x \quad (17)$$

зывается *показательной,* потому что независимая переменная x входит в показатель степени. При $a = 1$ мы получаем $a^x = 1$, т.е. постоянную

функцию y = 1. Если, например, a = –3, то при x = получаем . Но такого действительного числа не существует. Поэтому полагают, что a 1 и a > 0.
ссмотрим, например, показательную функцию с основанием 2:

$y = 2^x$. (18) Эта функция возрастает на всей числовой оси, т.е. при изменении переменной x от – до . Если x стремится к – , то y стремится к нулю. Это видно из следующей таблицы значений функции $y = 2^x$:

x	0	–1	–2	–3	–4	–5	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...

афик функции $y = 2^x$ изображен на рис. 18.

айдем теперь функцию, обратную показательной (17). Для этого, как и выше, сделаем замену x y: $x = a^y$.

гак, величина y представляет собой показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить x. Это принято записывать следующим образом: $y = \log_a x$. (19)

ыражение справа читают так: «логарифм числа x по основанию a». Функция (19) называется *логарифмической.* Согласно определению, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^k = k$.

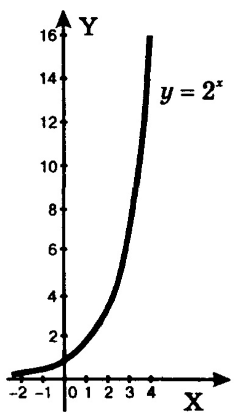

Рис. 18

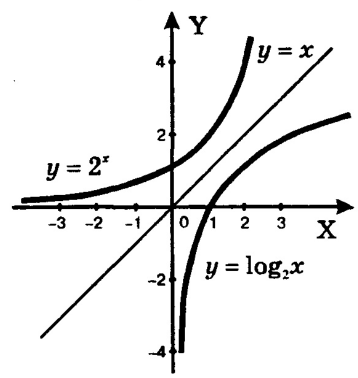

Рис. 19

афик логарифмической функций, как и положено, симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

а рис. 19 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$. Мы видим, что обе функции — показательная и логарифмическая являются возрастающими. Но это только потому, что основание a больше единицы. Например, в случае a = графики показательной функции y = и обратной ей логарифмической функции y = имеют иной вид (см. рис. 20). Видно, что обе функции являются убывающими.

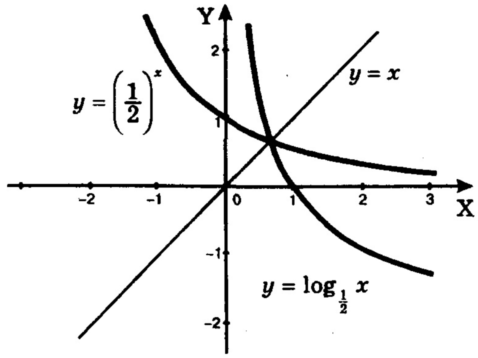

Рис. 20

ıя логарифмов по основаниям 10 и *e* (*e* — неперово число, см. гл. I, §2) используются специальные обозначения: $\log_{10} x = \lg x$, $\log_e x = \ln x$.

ɔказательная функция $y = a^x$ играет в математике особую роль. Она называется *экспоненциальной функцией* или, короче, *экспонентной.*

ɔимер. Степень экологической безопасности мест захоронения радиоактивных отходов зависит от скорости распада радиоактивной массы *m*. Известно, что эта скорость в момент времени *t* пропорциональна массе вещества, что приводит к следующей зависимости: $m(t) = m_0\, e^{-kt}$.

ıесь m_0 — масса отходов в начальный момент, $m(t)$ — масса отходов, оставшаяся к моменту времени *t*. Параметр *k* находят опытным путем.

ɔльзуясь приведенной выше формулой, можно вычислить количество отходов на любой интересующий нас момент времени. Например, для одного из изотопов кобальта $k = 0{,}13$. Найдем массу отходов кобальта, которая останется через 5,2 года, при условии, что исходная масса была 100 граммов. Имеем: $m(5{,}2) = 100\, e^{-0{,}13 \cdot 5{,}2} = 100 \cdot e^{-0{,}676} = 50{,}87$ г.

ıапоминаем, что временной промежуток, за который распадается половина массы, называется периодом полураспада.) УПРАЖНЕНИЯ

. Постройте графики функций а) $y = 3^x$; б) $y =$; в) $y = \log_3 x$; г) $y =$.

. Постройте графики функций а) $y = 2^x$; б) $y = 3^x$; в) $y = e^x$.

ıазание: учтите, что $2 < e < 3$.

. Изобразите на одном чертеже графики функций а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_e x \ln x$.

ɔгарифмы используют для приближенного вычисления произведений, частных и степеней. Если под рукой нет калькулятора, но имеется таблица десятичных логарифмов, то вычисления проводят так. Найдем, например, число $N = 0{,}9^{50}$. Пользуясь свойствами степеней и логарифмов, находим: $\lg N = 50\lg(0{,}9) = 50 = 50(\lg 9 - \lg 10)\ 50(0{,}9542 - 1) = 50(-0{,}0458) = -2{,}29$.

ıак, $\lg N = -2{,}29$. Следовательно,

$$N = 10^{-2,29} = 10^{-3+0,71} = = 0,005125.$$

ıачения lg 9 и $10^{0,71}$ найдены с помощью таблиц десятичных логарифмов и антилогарифмов.

ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ

С помощью калькулятора постройте график функции

y = 2 (20)

отрезке [-4,4].

ıзание: разбейте отрезок на 16—20 частей и найдите значения заданной функции в полученных точках. Результаты оформите в виде таблицы:

x	$-1 = 2x$	$e^{-1/2x}$	$y = 2e^{-1/2x}$
...	...	...	...
...	...	...	...

§5. Элементарные функции

ıоме функций, перечисленных в предыдущих параграфах, в школе изучают еще тригонометрические функции — синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс, причем последние четыре просто выражаются через синус и косинус:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad (21)$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

ı определению, sin $x = a$, *cos* $x = b$, где *(a,b)* — координаты точки *M,* которая лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, а *x* — угол, образованный вектором *OM* и осью X (см. рис. 21).

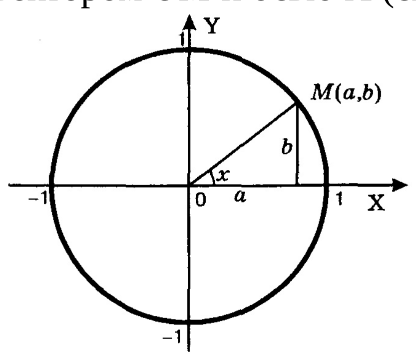

Рис. 21

ıли точка *M* сделает полный оборот и придет в исходное положение, то угол *x* увеличится на 2 .* Но числа *a* и *b* в результате этой процедуры не изменятся. Отсюда вытекает, что синус, косинус и все другие тригонометрические функции будут *периодическими функциями с периодом* 2 , т.е. для них

sin x = sin (x + 2) = sin (x + 4) = ... = sin(x + 2 k), cos x = cos (x + 2) = cos

$(x + 4\ ) = ... = \cos (x + 2\ k)$, где k — любое целое число. *Периодичность* — важнейшее специфическое свойство тригонометрических функций. Другие функции — степенная, показательная и логарифмическая — периодическими не являются. С помощью тригонометрических функций описываются самые разнообразные периодические процессы, происходящие в живой и неживой природе: колебательные и вращательные движения, волновые явления, движение планет, биологические ритмы и т.д.

'гол здесь и дальше измеряется в радианах. Напоминаем, что полный угол равен 360° или *2* радиан.

)думайте, является ли постоянная функция периодической.

ункции, как и числа, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Например, если разделить одну линейную функцию на другую, то получим так называемую *дробно-линейную функцию:* $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}\quad (a, b, c, d \in \mathbf{R}).$

:ли сложить несколько степенных функций вида ax^n, где n — натуральное число или нуль, то получится *многочлен.* Например, многочлен второй степени

$$y = ax^2 + bx + c$$

)лучается как сумма трех функций:

$$y = ax^2,\ y = bx = bx^1,\ y = c = cx^0.$$

)чно так же получается многочлен любой степени n:

$$y = a_0\, x^n + a_1\, ^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + ... + a_{n-1}\, x + a_n\, .$$

ногочлены играют важную роль и математике и ее приложениях. Примерно 100 лет назад Карл Вейерштрасс* доказал, что любую непрерывную функцию можно приближать многочленами с любой степенью точности. В частности, приближенное значение функции e^x находят по формуле

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

:м больше n (число слагаемых), тем выше точность, т.е. тем меньше приближенное значение функции отличается от ее истинного значения.

---

*Карл Вейерштрасс (1815-1897) — выдающийся математик XIX в. В университете начал изучать юриспруденцию, но оставил ее, увлекшись математикой. Вейерштрасс одним из первых начал строго определять основные математические понятия.

ычислим, например, с помощью многочленов значение массы кобальта (см. пример из предыдущего параграфа). Если ограничиться тремя слагаемыми, то получим: .

)льзуясь этой формулой, находим:

$(5,2) = 100 \cdot e^{-0,676}$ $100(1 - 0,676 + ½(-0,676)^2) = 100 \cdot 0,5525 = 55,25$ *г.*

ли же взять четыре слагаемых, то получим

$$e^x\ 1 + x + x^2 + x^3.$$

а формула дает уже более точное значение:

$$m(5,2)\ 100 = 50,10 \text{ г.}$$

ли один многочлен поделить на другой, получится *дробно-рациональная функция*, например: .

оме того, представляют интерес и более сложные выражения:

$$y = x \sin x,\ y = x + \sin x,\ y = (e^x + e^{-x}) \text{ и т.п.}$$

ад функциями можно производить еще одну операцию, которая не имеет аналога у чисел. Это операция *композиции*. Рассмотрим, например, функции $y = v^2$ и $v = x - 1$. Их композицией будет функция

$$y = (x - 1)^2,$$

торая получается подстановкой значения v в выражение для y. Точно так же функция

едставляет собой композицию функций $y = e^v$ и $v = - x^2$.

мпозиции двух или нескольких функций называются также *сложными функциями.*

перь мы можем ответить на вопрос, что такое *элементарная функция*. Так называются постоянные, линейные, степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции, а также функции, которые получаются из них с помощью конечного числа арифметических операций и операций композиции. Например, следующие функции являются элементарными: $y = \ln \cos x$, $y = 2^{\sin x}$, $y = \lg x + \lg \lg x$.

определения ясно, что всякая элементарная функция может быть представлена в виде композиции наиболее простых элементарных функций, что дает возможность построить ее график. Именно так в школе исследуется многочлен второй степени (так называемый *квадратный трехчлен).*

апомним, как это делается. Рассмотрим, например, многочлен

$$y = 2x^2 - 10x + 12. \qquad (22)$$

Преобразуем правую часть, выделив полный квадрат:

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6,25) - 0,5 = 2(x - 2,5)^2 - 0,5.$$

результате заданный многочлен можно записать следующим образом:

$$y = 2(x - 2,5)^2 - 0,5.$$

перь хорошо видно, что он представляет собой композицию трех функций:

$y = u - 0{,}5;\ u = 2v^2;\ v = x - 2{,}5.$ (23) Пользуясь этим, построим график многочлена (22). Сначала строим график известной нам функции $u = 2v^2$ (см. рис. 22).

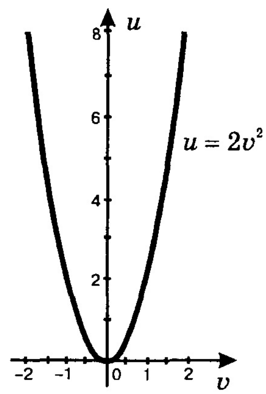

Рис. 22

ссмотрим далее первое из равенств (23):

$$y = u - 0{,}5.$$

ю означает, что у каждой точки M плоскости мы уменьшаем ее вторую координату u на 0,5, в результате чего получается новая вторая координата y. Эта операция равносильна тому, что мы поднимаем горизонтальную ось (ось v) на 0,5 вверх. В результате получаем картину, изображенную на рис. 23 (прежнее положение оси v обозначено пунктиром).

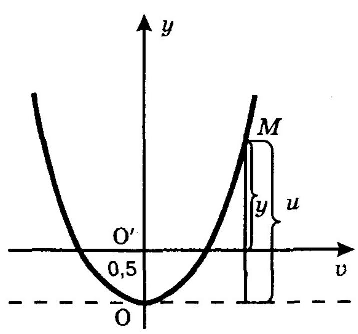

Рис. 23

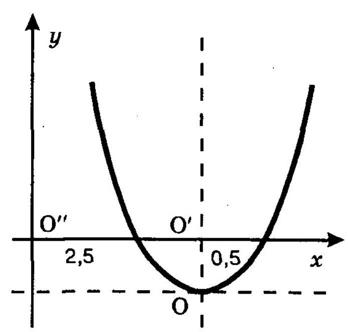

Рис. 24

ілее рассмотрим третье равенство (23), которое запишем так:

$$x = v + 2{,}5.$$

ю означает, что к первой координате v каждой точки плоскости мы прибавляем число 2,5 и получаем в результате новую первую координату x. Это равносильно тому, что мы сдвигаем ось y на 2,5 единицы влево (см. рис. 24, на котором прежнее положение оси Y обозначено пунктиром).

гак, график многочлена второй степени (22) получается сдвигом параболы $y = 2x^2$ на 2,5 единицы вправо и 0,5 единицы вниз. Числа 2,5 и –0,5 являются координатами вершины полученной таким образом параболы.

:но, что описанные построения можно проделать с любым многочленом второй степени, так что графиком любого многочлена второй степени является парабола.

олее того, с помощью аналогичных рассуждений можно строить графики и других элементарных функций.

УПРАЖНЕНИЯ

. Постройте графики следующих функций:

$y = 2^{x-1} + 3$; б) $y = \lg(x + 1)$; в) $y = (x - 1)^3$.

ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ

Процесс роста популяции описывается так называемой логистической функцией $f(t) =$. Здесь $f(t)$ — размер популяции в момент времени t. Постройте график этой функции.

§6. Корреляционная зависимость

ак мы уже отмечали, понятие функции является одним из самых важных в математике, физике и естественных науках. Следующий пример показывает, что понятия функции недостаточно, чтобы описать всевозможные причинные связи, с которыми жизнь нас сталкивает повседневно.

овершенно ясно, что между ростом и весом человека существует определенная зависимость. Но столь же ясно, что существует сколько угодно людей с одинаковым ростом, но разным весом. Следовательно, *зависимость веса от роста не является функциональной*, т.к. функции обладают тем свойством, что по заданному значению независимого переменного x можно найти *единственное* значение зависимой переменной y. Таким образом не может быть такой формулы, по которой, зная точный рост, мы находили бы точный вес.

а, скажет наш догадливый читатель! Вес зависит не только от роста, но и от размера талии! Несомненно так, ответим мы, но в то же время можно найти сколько угодно людей с одинаковым ростом и одинаковой талией, у которых, тем не менее, вес различный. Следовательно, вес не является функцией только двух переменных — роста и размера талии. Все ясно, скажет читатель: вес зависит от роста, размера талии, объема груди, размера обуви и т.д. и т.п. Вот тут-то мы и подошли к важному выводу: если искомая функциональная зависимость и существует (а пока еще она никем не обнаружена), то она должна быть исключительно сложной. А поскольку нельзя пользоваться тем, чего нет, то проще описывать эту сложную причинную связь между весом, ростом и другими параметрами человека как-то по иному, минуя классическое определение функции.

ес и рост человека определяются практически одними и теми же факторами, число которых довольно велико (возраст, наследственность, физиологические особенности, социальные условия, экологическая среда и пр.). Поэтому можно считать, что вес человека зависит от ряда случайных величин, среди которых рост является одной из основных. Эту зависимость описывают с помощью понятия вероятности. Например, имеет смысл говорить о вероятности того, что вес молодого человека с ростом 175 см равен 75 кг или заключен в пределах от 70 до 80 кг. Зависимости такого рода называются стохастическими, вероятностными или статистическими. Они существуют между биологическими параметрами человека, животного, растения; между способностями студента и его успехами в учебе; между отношением сообщества к образованию и уровнем преступности; между внешним видом солдат и боеспособностью полка. Подобных примеров можно привести сколько угодно. Важнейшим видом стохастической зависимости является *корреляционная зависимость.* Покажем на примере, как описать корреляционную зависимость по результатам наблюдений.

таблице приведены данные измерения веса и роста двадцати курсантов школы МВД:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рост	178	170	181	173	169	178	177	165	187	182
Вес	72	65	92	75	68	79	78	67	80	81

Номер	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рост	59	182	178	173	176	173	198	187	191	170
Вес	56	82	77	63	80	65	85	89	87	72

ти результаты можно представить графически, построив точки с соответствующими координатами:

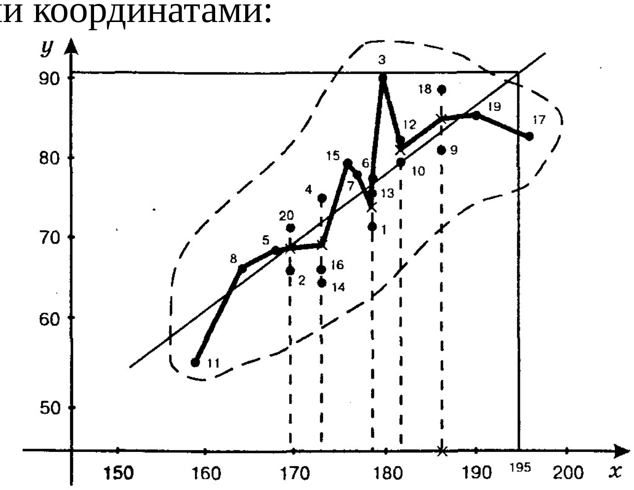

Рис. 25

олученные точки лежат внутри некоторой области или «облака», которое обозначено пунктирной линией. Хорошо заметно, что облако вытянуто вдоль какой-то наклонной прямой. Этот факт означает, что величины *X* и *Y* хорошо скоррелированы, т.е. при увеличении роста вес, как правило, тоже увеличивается. Мы видим, что на некоторых вертикальных прямых внутри облака находится по нескольку точек: 1, 6 и 13; 2 и 20; 4, 14 и 16; 9 и 18; 10 и 12. Для точек 1, 6 и 13 средний вес будет (72 + 79 + 77) : 3 = 76; для точек 2 и 20 средний вес будет 68,5 и т.д. Если на вертикальной прямой находится одна точка, то ее вес и есть средний. Соединив средние точки отрезками, получим ломаную линию, которая называется *эмпирической линией регрессии. С* ее помощью можно приближенно находить средний вес по заданному росту в пределах от 159 см до 198 см. Например, при росте 185 см получаем вес 83,4 кг. Если бы мы провели не 20, а 200 измерений, то точек внутри облака оказалось бы больше, соответствующая линия регрессии была бы по форме ближе к прямой и давала бы более точный средний вес при заданном росте.

оретически, каждую точку внутри облака можно считать результатом измерения. При этом допущении линия регрессии, как показывает теория, является прямой. Эта прямая будет графиком некоторой линейной функции, которая называется *регрессией*. Доказано, что *регрессия является наилучшим решением задачи, о которой шла речь в начале этого параграфа — приближенно выразить вес как функцию роста*.*

аилучшим в смысле метода наименьших квадратов.

ли бы линия регрессии была нам известна, мы смогли бы ее продолжить за пределы облака и вычислить с ее помощью средний вес человека с ростом, например, 195 см. Однако мы можем с достаточной степенью точности решить эту задачу, имея в своем распоряжении эмпирическую линию регрессии — ломаную, изображенную на рис. 25. Для этого заменим ее прямой, используя приведенный выше метод наименьших квадратов. Уравнение искомой прямой имеет вид

$$y = kx + b,$$

е

, .

есь и — средние значения роста, веса и их попарных произведений, D_x — дисперсия роста. Применяя формулы из второй главы, получаем:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(178 + 170 + \ldots + 170) = 177{,}35;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{20}(72 + 65 + \ldots + 72) = 75{,}65;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{20}(178 \cdot 72 + 170 \cdot 65 + \ldots + 178 \cdot 72) = 13485{,}15;$$

$$D_x = \frac{1}{20}((178 - 177{,}35)^2 + (170 - 177{,}35)^2 + \ldots +$$

$$+ (170 - 177{,}35)^2) = 79{,}1.$$

дставляя в предыдущие формулы, находим k и b:

$$k = \frac{13485{,}15 - 177{,}35 \cdot 77{,}65}{79{,}1} = 0{,}8675 \approx 0{,}87;$$

$$b = 75{,}65 - 0{,}8675 \cdot 177{,}35 = -78{,}20.$$

так, получим следующее уравнение искомой прямой:

$y = 0{,}87x - 78{,}20.$ (24) Она называется *эмпирической прямой регрессии.* Подставляя в последнее уравнение $x = 195$, найдем средний вес курсанта с таким ростом — 91 кг.

перь мы можем найти вероятность *P(h)* того, что вес курсанта с ростом x заключен в пределах от y - h до $y + h$. Здесь y — средний рост, найденный по формуле (24). Вероятность *P(h)* вычисляют с помощью функции Лапласа **Φ**, определенной в гл. VI, по формулам: $P(h) = 2\Phi(a)$, (25) , (26)

, (27)

е $n = 20$ — число наблюдений. Величины , и D_x уже найдены выше;

$$S_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{79{,}1} = 8{,}89;$$

$$D_x = \frac{1}{20}((72 - 75{,}65)^2 + (65 - 75{,}65)^2 + \ldots +$$

$$+ (72 - 75{,}65)^2) = 86{,}03;$$

$$S_y = \sqrt{86{,}03} = 9{,}28;$$

вычислим S_x, S_y и r:

$$r = \frac{13485{,}15 - 177{,}35 \cdot 75{,}65}{8{,}89 \cdot 9{,}28} = 0{,}8318 \approx 0{,}83.$$

перь можно находить *P(h)*. Пусть, например, $h = 5$. Тогда

$$a = \frac{5}{9{,}28 \cdot \sqrt{0{,}6919}} \cdot \sqrt{\frac{18}{30}} \approx 0{,}5.$$

ачение Φ(0,5) находим по таблице, данной в Приложении на с. 219: Φ(0,5) = 0,1915. Подставляя в формулу (25), получаем $P(5) = 0{,}383$ 0,38.

ким образом, вероятность того, что вес курсанта отличается от среднего веса не больше чем на 5 кг, равна 0,38. Например, при росте 195 см средний вес курсанта будет 91 кг, следовательно, 38% курсантов с ростом 195 см имеют вес в пределах от 86 до 96 кг. Заметим, что формула (26) применяется для таких x, которые удовлетворяют условию: .

еличина r, определенная формулой (27), называется *коэффициентом корреляции* между величинами X и Y. Коэффициент корреляции играет важную роль в вопросах математической статистики. Он обладает следующими свойствами: 1. .

Если величины X и Y независимы, то коэффициент корреляции между ними равен нулю.

Если величины X и Y связаны линейной зависимостью, то коэффициент корреляции равен 1 или –1. Обратно, если коэффициент корреляции равен 1 или –1, то величины X и Y связаны линейной зависимостью.

ри совместном изучении двух случайных величин X и Y прежде всего находят коэффицент корреляции, и если он оказывается близким к единице (по крайней мере большим 0,5), то имеет смысл описывать корреляционную связь тем способом, который мы только что рассмотрели. Проведенные нами расчеты являются приближенными, и их точность зависит от того, насколько близка эмпирическая линия регрессии к теоретической линии регрессии. Точность повышается при увеличением числа наблюдений, т.е. объема выборки.

УПРАЖНЕНИЕ

. Майор Зимин решил сравнить среднее число книг, прочитанных среднестатистическим восьмиклассником за год, с количеством правонарушений, совершенных подростками в его микрорайоне в течение года. Проанализировав данные за 10 лет, он получил следующую таблицу:

X	19	25	24	22	18	38	39	30	35	38
Y	20	20	15	15	10	4	6	10	10	5

десь X — среднее число книг прочитанных одним восьмиклассником за год, Y — число правонарушений в течение года.

зобразите данные графически, найдите коэффициент корреляции, постройте эмпирическую ломаную регрессии, определите параметры эмпирической линейной регрессии, найдите вероятность того, что при $x = 41$ число правонарушений отличается от среднего не более чем на 2.

ечта майора Зимина — найти число N с таким волшебным свойством: всякий недоросль, прочитавший N книг, становится потенциально образцовым гражданином. Согласно его расчетам, при этом значении N среднее значение y должно равняться нулю, т.е. $N = 50$. Но будьте снисходительны к майору Зимину — он идеализировал математические методы из самых лучших побуждений!

Глава VI ИДЕЯ ПРЕДЕЛА

деяю предельного перехода использовал еще Архимед при вычислении площадей и объемов. Эти вычисления совершенствовались два тысячелетия и привели к созданию дифференциального и интегрального исчисления — наиболее мощного и универсального современного математического метода. Этот метод возник в трудах выдающихся ученых Ньютона и Лейбница и развивался усилиями Иоганна I Бернулли, Леонардо Эйлера, Огюстена Коши, Бернгарда Римана, Валле Пуссена, Анри Лебега, Николая Николаевича Лузина, Андрея Николаевича Колмогорова, Александра Яковлевича Хинчина и многих других.

§1. Предел функции

редел функции — одно из самых тонких понятий математического анализа. Вы сможете заметить это, внимательно прочитав параграф до конца, в особенности то место, где вычисляются замечательные пределы.

ссмотрим вначале одну из самых простых функций $y = x^2$. Обычно правую часть в аналитической записи функции обозначают через $f(x)$. Итак, у нас

$$y = f(x) = x^2.$$

метим, что значение этой функции в точке $x_0 = 2$ будет $y_0 = 4$.

ссмотрим на оси x бесконечную последовательность точек с координатами

$$x_1 = 2 - 1 = 1;\ x_2 = 2 - ;\ x_3 = 2 - ;\ ...$$

обое из чисел x_1, x_2, x_3 ... меньше 2-х. Как хорошо видно на рис. 26, эти точки скапливаются около точки $x_0 = 2$. Разности

$$2 - x_1 = \frac{1}{1};\quad 2 - x_2 = \frac{1}{2};\quad 2 - x_3 = \frac{1}{4};\quad 2 - x_4 = \frac{1}{8}\ \ldots$$

еньшаются (в два раза) и могут стать меньше любого наперед заданного малого положительного числа. Поэтому говорят, что бесконечная последовательность чисел x_1, x_2, x_3 ... *стремится* к числу 2 или имеет своим *пределом* число 2.

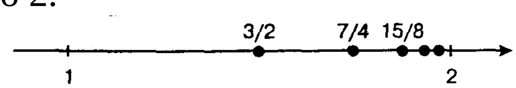

Рис. 26

к при этом ведет себя функция $y = x^2$? Значения переменного y

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = 1,$$

$$y_2 = f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4},$$

$$y_3 = f(x_3) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_k = f(x_k) = f\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 =$$

$$= 4 - \frac{1}{2^{k-3}} + \frac{1}{2^{2k-2}} \ldots$$

разуют бесконечную последовательность. С увеличением номера *k* дроби и стремятся к нулю, поэтому y^k с увеличением номера *k* стремится к четырем. В этом случае говорят, что предел функции $y = x^2$ при *x*, стремящемся к двум, равен четырем, и записывают так: .

ак lim есть сокращение от латинского слова *limes*, т.е. граница.

жное замечание. Математики любят придираться к своим результатам и проверяют их до тех пор, пока придраться уже будет не к чему. Такой подход гарантирует, что полученный результат является полностью дос-товерным и математически точным, или, как говорят математики, корректным.

к вот, в наших рассуждениях о пределе имеется существенный пробел. В первом примере мы взяли последовательность

2 – 1, 2 – , 2 – , 2 – , ...

можно было взять, например, и такую:

2 – 1, 2 – , 2 – , 2 – , ...

торая также имеет своим пределом число 2. Ясно, что таких последовательностей можно указать сколько угодно. Возникает вопрос: зависит ли предел функции от выбора последовательности, т.е. от того, *каким образом* переменная *x* стремится к заданному значению? Оказывается, что нет, не зависит. Так вот, строгое определение предела функции включает в себя требование независимости от выбора последовательности.

ы рассмотрели простой пример, когда предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. В этом случае говорят, что функция *непрерывна* в точке x_0. Например, функции $kx + b$, x^2, e^x, $\sin x$ являются непрерывными в каждой точке.

ценность столь сложных понятий, как последовательность, предел последовательности и предел функции состоит прежде всего в том, что с их помощью можно описывать поведение функций на границе области определения, т.е. при таких значениях переменного *x*, в которых функцию определить трудно или невозможно. Рассмотрим, например, функцию

$y = f(x) =$,

іражающую известный закон обратной пропорциональности. Ее графиком будет гипербола

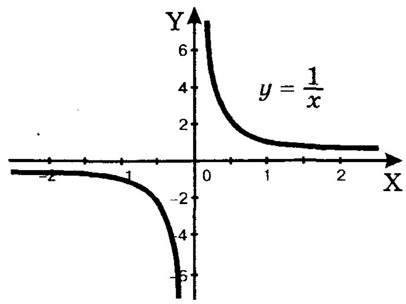

Рис. 27

ıблица значений этой функции

x	1	2	3	4	...
$y = \frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

ıказывает, что если *x* стремится к бесконечности (*x*), то *y* стремится к нулю (*y* 0). Используя понятие предела, это можно записать так: .

метим, что выражение «*x* стремится к бесконечности» означает, что *x* может принять сколь угодно большое значение, или, как еще говорят, стать больше любого наперед заданного числа.

то же время, если *x* уменьшается от единицы до нуля, то получается следующая таблица:

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$y = \frac{1}{x}$	1	2	3	4	...

ɔгласно нашей терминологии,

.

ıедующий пример показывает, что для нахождения ıедела иногда нужно проявить некоторую сообразительность. Найдем предел

.

ıесь и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности, поэтому сразу неясно, к чему стремится дробь. Однако, если выполнить простейшее преобразование (разделить почленно), то все станет ясно:

ɜйствительно, если *x* увеличивается, то дробь уменьшается и стремится к нулю, а, следовательно, разность стремится к единице. Итак, рассматриваемый предел равен единице.

це большую изобретательность нужно проявить, рассматривая предел

.

десь сложность состоит в том, что при $x = 1$ и числитель и знаменатель обращаются в нуль. Поэтому нельзя найти предел, просто подставив вместо x единицу (как в первом примере). Но заметим, что, поскольку многочлен, стоящий в числителе, обращается в нуль при $x = 1$, то это число будет его корнем. Второй корень равен двум, так что

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, и рассматриваемая функция запишется теперь следующим образом:

, .

экратив на $x - 1$, получим функцию $g(x) = x - 2$, где x может принимать уже любые значения.

афиком функции $y = x - 2$ будет, как мы уже знаем, прямая. А т.к. во всех точках, кроме $x = 1$, выполняется тождество $f(x) = g(x)$, то и для заданной функции $f(x)$ графиком также будет прямая, но без точки ($x = 1$, $y = -1$):

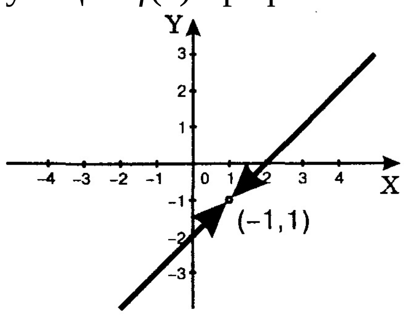

Рис. 28

оэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = 1 - 2 = -1.$$

ез доказательства приведем

Правила вычисления пределов

*Предел суммы нескольких функций равен сумме пределов этих функций.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+7}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3} + \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^3} + \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^3} =$$

Например, $$= \lim_{x\to\infty}1 + \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^3} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

десь, а также в п. 2. подразумевается, что все рассматриваемые пределы существуют.

Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1\cdot1\cdot1=1.$$

этих функций. Например,

ычисление сложных пределов — занятие весьма непростое, и для каждого из них приходится придумывать свой способ доказательства. Мы рассмотрим только два самых важных, которые называются *замечательными пределами.*

Первый замечательный предел: .

Второй замечательный предел: .

тобы доказать второе из этих равенств, вспомним, прежде всего, что предел не зависит от выбора последовательности значений переменного *x*, стремящегося к бесконечности. Составим эту последовательность из натуральных чисел 1, 2, 3, ... и найдем соответствующие значения функции

$$f(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$

$$f(2)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$f(x)$ = :

еперь воспользуемся формулой бинома Ньютона (см. с. 56):

$$(a+b)^n=a^n+n\cdot a^{n-1}b+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^n.$$

одставляя сюда *a* = 1 и *b* = , мы получим следующее:

$$f(n) = 2 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \frac{1}{4!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}. \qquad (1)$$

ıждая из дробей , , ... меньше единицы. Поэтому, если в последней сумме эти дроби заменить единицами, то получим число, большее *f*(*n*):

$$f(n) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \qquad (2)$$

метим, что правая часть этого неравенства есть в точности сумма первых *n* слагаемых того самого ряда, с помощью которого мы определили в гл. I неперово число: $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

эотому, устремляя в неравенстве (2) *n* к бесконечности, мы получим:*

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \le e. \qquad (3)$$

Ͻбратите внимание, что из *строгого* неравенства (2) в результате предельного перехода получилось *нестрогое* неравенство (3). Это следствие одной из теорем теории пределов: если *f(x)* < *g(x)* то .

ернемся теперь снова к сумме (1). В ней все слагаемые — числа положительные, поэтому, если часть последних слагаемых отбросить и оставить только *k* первых, то сумма уменьшится:

$$2 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} < f(n). \qquad (4)$$

тремим в этом неравенстве *n* к бесконечности. Так как каждая из дробей , , ... стремится при этом к единице, то в результате получится такое неравенство: $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \le \lim_{n\to\infty} f(n).$

з наших рассуждений вытекает, что *k* — число слагаемых слева — может быть любым, поэтому неравенство сохранится, если *k* устремить к бесконечности! Но тогда слева снова получится бесконечный ряд, т.е. неперово число *e*. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$e \le \lim_{n\to\infty} f(n). \qquad (5)$$

з неравенств (3) и (5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = e,$$

о и требовалось доказать.

ервый замечательный предел получается из геометрических соображений. Рассмотрим окружность единичного радиуса и вспомним, что по определению (см. рис. 29) $|AM| = \sin x$, $|BN| = \operatorname{tg} x$, а длина дуги AN в радианах равна x. Для определенности мы считаем, что $> x > 0$. В случае, если $x < 0$, рассуждения будут аналогичными.

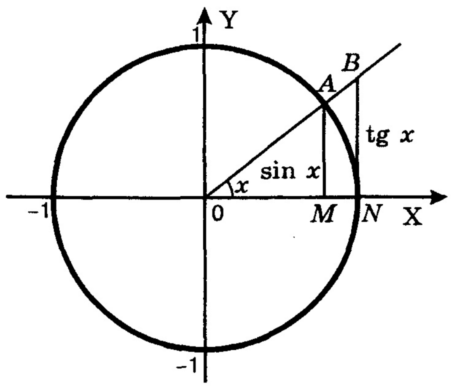

Рис. 29

ссмотрим очевидное неравенство $|AM| < |AN|$. Так как длина хорды AN меньше длины дуги AN, то $\sin x\ x$. Разделив на x, получим

$$\frac{\sin x}{x} \le 1.$$

гсюда

$$\lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x} \le 1.$$

лее заметим, что площадь сектора OAN меньше площади треугольника OBN. Это приводит к неравенству $R^2x\ R^2 \operatorname{tg} x$ или $x < \operatorname{tg} x$ (равенство достигается при $x = 0$). Разделив на x, получим

$$1 \le \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}.$$

перь устремим x к нулю. Так как предел произведения равен произведению пределов, то

$$1 \le \lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to x}\frac{1}{\cos x}.$$

)

$$\lim_{x\to x}\cos x = 1,$$

этому последнее неравенство перепишется так:

$$1 \le \lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x}.$$

равнивая с неравенством (6), приходим к единственному возможному варианту:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1,$$

о и требовалось доказать.

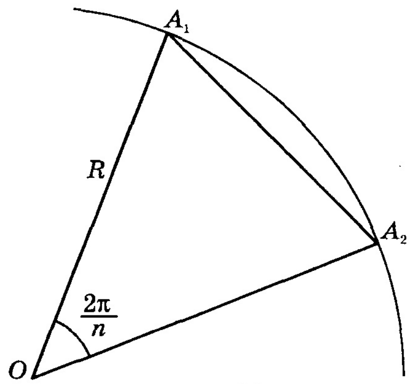

Рис. 30

эльзуясь первым замечательным пределом, выведем формулу для вычисления площади круга. Впишем в круг радиуса R правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$ и найдем его площадь S_n. Как видно из рисунка, $S_n = nS$, где S— площадь треугольника OA_1A_2 . Но

$$S=\frac{1}{2}|OA_1|\cdot|OA_2|\,\sin\angle A_1OA_2=\tfrac{1}{2}R^2\sin\tfrac{2\pi}{n}.$$

эотому

$$S_n=n\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

ющадью S круга называется предел последовательности S_n. Пользуясь первым замечательным пределом, получаем:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=$$

$$=\pi R^2\lim_{\substack{n\to\infty\\ \frac{2\pi}{n}\to 0}}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right)=\pi R^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найдите следующие пределы:

ıжное замечание. Теория пределов позволяет уточнить понятие бесконечной десятичной дроби (см. гл. I, §1), рассматривая ее как *предел последовательности десятичных приближений.* Например, число является пределом последовательности 0.3, 0.33, 0.333, ..., а число есть предел последовательности 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... (см. там же).

§2. Производная

аиболее естественно к понятию производной мы приходим из кинематических соображений.

апомним, что скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно, вычисляется по формуле

.

ли тело движется прямолинейно, но не равномерно, то скорость в каждый момент времени, вообще говоря, разная. Скорость тела в момент времени t называют *мгновенной скоростью* в точке t и обозначают $v(t)$.

редположим теперь, что к моменту времени t тело прошло путь $s(t)$, а к моменту времени $t + h$ (т.е. еще через промежуток времени h) — путь $s(t + h)$. Тогда за время h оно прошло путь $s(t + h) – s(t)$ и средняя скорость на этом участке будет

.

редположим теперь, что промежуток h уменьшается и стремится к нулю. Тогда и путь, пройденный за это время, также стремится к нулю, а средняя скорость $v_{ср}$ за промежуток времени h стремится к скорости тела в момент t. Используя определение предела, можно записать: .

а формула является строгим определением мгновенной скорости и одновременно дает способ для ее вычисления. Предел $v(t)$ существует при естественном допущении, что в момент времени t не было никаких катаклизмов: поезд не сошел с рельсов, не было столкновения или резкого торможения, не изменился внезапно коэффициент трения, поезд не утащила летающая тарелка и т.п.

ример 1. При равномерном движении пройденный путь пропорционален времени, т.е. $s(t) = ct$, где c — постоянное число. Используя предыдущую формулу, вычислим мгновенную скорость в момент времени t:

$$v = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c(t+h)-ct}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ch}{h} = c\,.$$

рмула для пути теперь запишется известным образом:

$$s = vt.$$

ример 2. До Галилея считалось, что все тела падают с постоянной скоростью. Проверить это на практике было сложно. Галилей высказал предположение, что все тела падают равноускоренно, т.е. при свободном падении путь пропорционален квадрату времени: $s = ct^2$.

айдем скорость в момент времени t:

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{c(t+h)^2 - ct^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c(t^2 2th + h^2) - ct^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(2tc + ch) = 2ct.$$

случае свободного падения тела величина 2*c* найдена опытным путем. Она называется ускорением свободного падения и обозначается буквой *g*. Приближенно .

перь откажемся от физической терминологии и перейдем к стандартным обозначениям. Вместо «путь *s(t)*» будем говорить «функция *f(x)*», а вместо «скорость» говорить «*производная функции f(x) в точке x*». Будем записывать функцию, как обычно, $y = f(x)$, а производную этой функции в точке *x* будем обозначать . Итак, по определению, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

из примеров 1 и 2 получаем:

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x.$$

айдем производные от некоторых известных функций.

Производная от постоянной функции равна нулю, т.к., если функция не меняется, то ее приращение равно нулю: $f(x + h) - f(x) = 0$.

Производная от степенной функции $y = x^n$, n **N**. Согласно определению производной

$$(x_n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

о формуле бинома Ньютона (см. §1)

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

ычтем отсюда x^n, поделим почленно на h и запишем предел суммы как сумму пределов: $(x^n)' = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \lim_{h\to 0}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + \lim_{h\to 0} h^{n-1}.$

се пределы, кроме первого, равны нулю, поэтому остается только

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

о правило применимо и для отрицательных степеней:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Производная от синуса.

ользуясь определением производной, известной тригонометрической формулой «разность синусов» и свойствами предела, получаем:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

зрвый предел равен единице (первый замечательный предел). Второй, используя непрерывность косинуса (см. с. 113), найдем так: $\lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{0}{2}\right) = \cos x.$

гак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

налогично доказывается, что

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Производная от показательной функции $y = a^x$ вычисляется по формуле: $(a^x)' = a^x \ln a.$

апомним, что ln a log$_e$ a, где e — неперово число). При $a = e$ получим

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$

Производная от логарифмической функции $y = \log_a x$ вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}.$$

частности, при $a = e$ получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

ɔи вычислении производных пользуются следующими правилами, которые выводятся с помощью правил вычисления пределов (см. гл. VI, §1):*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Іодразумевается, что все рассматриваемые производные существуют.

ɔоизводная от сложной функции *f(u(x))* вычисляется по формуле

$$f(u(x))' = f'(u)u'(x).$$

апример,

$$((2x-1)^2)' = (u^2)'(2x-1)' = 2u(2x)' = (2x-1)2 =$$
$$= (2x-1);$$
$$(\sin 2x)' = (\sin u)'(2x)' = (\cos u)2 = 2\cos 2x;$$
$$(e^{x^2})' = (e^u)'(x^2)' = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

ɔнятие производной имеет широкие приложения. Как мы уже знаем, производная от пути по времени — это скорость. Но понятие скорости возникает не только при движении. Скорость — важнейшая характеристика многих физических, химических, физиологических и других процессов, происходящих в природе, в человеке, на различных производствах и т.д. И всегда скорость представляет собой производную от некоторой функции.

роизводная от скорости называется *ускорением*, она характеризует «скорость изменения скорости». При равноускоренном движении ускорение постоянно, при равномерном оно равно нулю. Если же движение (процесс) описывается некоторой произвольной функцией, то ускорение, вообще говоря, не постоянно и представляет собой столь же важную характеристику, как и скорость.

ругое важное приложение производной — задачи на нахождение наибольших и наименьших (экстремальных) значений. Оно основано на следующем простом факте: если функция принимает в некоторой точке экстремальное значение, и производная в этой точке существует, то она (т.е. производная) равна нулю.

ример. В тюрьме города Дрюкова собрались строить железную камеру для содержания особо опасных преступников. Какое наименьшее количество железа нужно для этой цели, если по санитарным нормам высота камеры должна быть не менее 2,5 м, а ее площадь — не менее 6 м^2?

шение. Количество железа пропорционально площади поверхности камеры, которая, как и обыкновенная комната, имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длину камеры через *a*, а ширину через *b*. Тогда пол и потолок имеют площадь *ab* каждый, две боковые стены по 2,5*a*, две другие — по 2,5*b*. Общая площадь получается $S = 2ab + 5a + 5b$. При этом, согласно санитарным нормам, $ab = 6$. Отсюда выразим *b* и подставим в выражение для 5: $S = 2 \cdot 6 + \left(a + \frac{6}{a}\right) = 12 + 5\left(a + \frac{6}{a}\right).$

так, мы учли все данные, но величину а еще можно выбирать произвольно, т.е. она является переменной величиной. Ее нужно выбрать так, чтобы значение *S* получилось наименьшим. Согласно теории, для минимизации функции *S*(*a*) следует приравнять нулю производную *S*'(*a*). Пользуясь правилами вычисления производных, находим: $S' = 0 + 5\left(a' + \left(\frac{6}{a}\right)'\right) = 5\left(1 - \frac{6}{a^2}\right).$

з уравнения

$$1 - \frac{6}{a^2} = 0$$

ходим, что *a* = . При этом значении *a* площадь будет наименьшей. Она равна *S* = 12 + 10 12 + 10 x 2,45 = 36,5.

ть и другие, не менее важные, приложения производной. Например, в геометрии часто используется тот факт, что прозводная от функции *y* = *f(x)* в точке *x* = *a* равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции

$f(x)$ в точке $x = a$: $y' = \text{tg}$ (см. рис. 31).

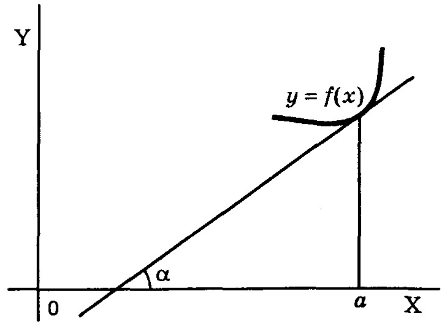

Рис. 31

§3. Интеграл

ɥна из самых распространенных практических задач — вычисление длин, площадей, объемов и т.д. Если фигура простая (отрезок прямой, окружность, треугольник, параллелограмм, правильная пирамида и т.д.), то можно воспользоваться простейшими формулами, которые были известны еще математикам древности. В случае же, если фигура достаточно сложная, простыми формулами уже не обойтись. Тогда применяют *интегральное исчисление.*

зличают *определенный* и *неопределенный* интегралы. Любой из вас, прочитавший предыдущий параграф и уже научившийся находить производную от заданной функции, несомненно спросил себя: а как найти функцию, если известна ее производная? Процедура нахождения производной по заданной функции называется *дифференцированием,* а обратная процедура, позволяющая находить по заданной производной исходную функцию, называется *интегрированием.* Результат интегрирования называется *первообразной функцией.* Так как производная от постоянной равна нулю, то

$$(F(x) + c)' = F'(x),$$

е c — любое действительное число. Поэтому, если для заданной функции $f(x)$ существует одна первоообразная $F(x)$, то их существует бесконечно много: $F(x) + c$. Совокупность всех первообразных заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и для его записи используют весьма специфическое обозначение: $\int f(x)dx$.

ɪпример,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\text{, т.к. } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c\text{, т.к. } (\sin x + c)' = (\sin x)' = \cos x;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c\text{, т.к. } (-\cos x + c)' = (\sin x)' = \sin x;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c\text{, т.к. } (\ln x + c)' = \frac{1}{x};$$

$$\int e^x dx = e^x + c\text{, т.к. } (e^x + c)' = (e^x)' = e^x.$$

›исутствующая всюду постоянная с называется *постоянной интегрирования.*

понятию определенного интеграла мы приходим при вычислении длины, площади, объема и т.д. Проиллюстрируем это на простейшем случае — вычислении площади под кривой.

’сть $y = f(x)$ — некоторая непрерывная функция (см. гл. VI, §1), заданная на промежутке $[a,b]$. Обозначим через S площадь между графиком этой функции и осью X (рис. 32).

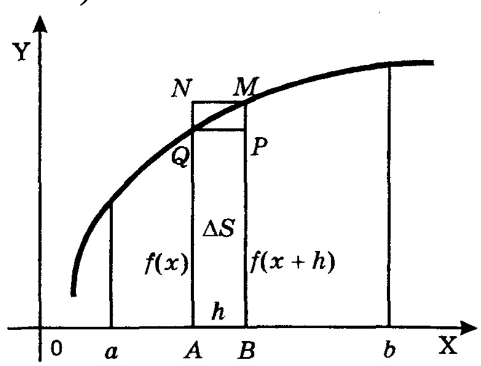

Рис. 32

’обы найти S, разобьем отрезок $[a,b]$ на маленькие равные отрезки длиной h и обозначим через S ту часть искомой площади, которая находится над отрезком AB (на рисунке она заштрихована). На рисунке видно, что верхняя граница заштрихованной фигуры находится между отрезками MN и PQ, которые ограничивают прямоугольники $ABMN$ и $ABPQ$. Поэтому площадь заштрихованной фигуры заключена между площадями этих прямоугольников: $S_{ABPQ} \le \triangle S \le S_{ABMN}$.

ік как $AQ = f(x)$, $BM = f(x + h)$, то $S_{ABPQ} = f(x)h$, $S_{ABMN} = f(x + h)h$ и предыдущие неравенства принимают вид

$$f(x)h \le \triangle S \le (x + h)h.$$

налогичные неравенства запишем для каждого из отрезков длины h, на которые разбит отрезок $[a,b]$, а затем все такие неравенства сложим. В результате получим неравенства

$$S_1 \le S \le S_2,$$

е через S обозначена сумма всех фигур типа S_{ABPN}, т.е. искомая площадь;

буквой S_1 обозначена суммарная площадь всех прямоугольников типа *ABPQ,* а через S_2 — общая площадь всех прямоугольников типа *ABMN.*

еличины S_1 и S_2 являются функциями от переменной *h.* Если *h* неограниченно уменьшать (h 0), то S_1 и S_2 будут меняться, причем S_2 будет уменьшаться, а S_1 — увеличиваться. Обе суммы имеют своим общим пределом число *S* — площадь рассматриваемой фигуры.

так, площадь получается как предел (или , который называется *определенным интегралом* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

язь между неопределенным и определенным интегралами устанавливается формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

е через *F(x)* обозначена первообразная функции *f(x).* Этой формулой и заканчивается процедура вычисления площади.

Примеры.

Найдем площадь под параболой $y = x^2$, 0 *x* l. Здесь $a = 0$, $b = 1$, поэтому

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Найдем площадь под гиперболой *у* = , 1 *x* 2.

меем:

$$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Найдем площадь под графиком экспоненты $y = e^x$, *x* 0. Имеем:

$$S = \int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^0 = e^0 - \lim_{x \to -\infty} e^x = 1 - 0 = 1.$$

заключение приведем пример неэлементарной функции, которая имеет важные и многочисленные приложения.

второй главе мы рассматривали *случайные величины,* т.е. такие переменные величины, значения которых зависят от случая. Например, число дорожных происшествий на улицах города в течение суток; число новорожденных за месяц; число заявлений, поступивших в отделение милиции; скорость молекулы газа при определенной температуре; число метеоритов, падающих на Землю, и т.д. Сейчас мы рассмотрим еще одну величину, которая называется *случайной ошибкой.*

Пример

В течение часа проведено 10 измерений уровня радиации одним и тем же прибором (в микрорентгенах в час): 12,0 11,5 11,7 12,2 12,1 10,8 11,6 10,7 12,0 11,4. Результаты измерений получились различными вследствие того, что и сам прибор, и человеческий глаз не являются идеальными орудиями наблюдения. Погрешность не может быть меньше толщины стрелки прибора; стрелка может вибрировать; угол, под которым мы смотрим на стрелку, также меняется. Кроме того, влияние оказывают атмосферные условия, настроение наблюдателя и т.п. Конечно, мы считаем, что исключены всякого рода систематические ошибки, связанные, например, с неисправностью прибора.

отчете обычно показывают среднее арифметическое всех наблюдений. В нашем примере

(12 + 11,5 + 11,7 + 12,2 + 12,1 + 10,8 + 10 + 11,6 + 10,7 +12 + 11,4 + 11,6) = 11,6.

для решения многих экологических проблем важно уметь оценить, насколько найденное среднее отличается от истинного значения радиации, которое нам неизвестно (ведь в нашем распоряжении имеются только показания приборов!). Как быть?

счастью, математики умеют отвечать на этот вопрос. Назовем *случайной ошибкой* разность между средним значением и истинным значением радиации. Так как истинное значение нам неизвестно, то и случайная ошибка тоже неизвестна. Многолетние наблюдения в различных экспериментах показали, что если число опытов достаточно велико, то случайные ошибки подчиняются некоторым общим закономерностям. Для их описания используется, как правило, так называемая интегральная функция Лапласа: $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$

от интеграл не выражается через элементарные функции. Но его приближенные значения табулированы (см. Приложение на с. 219).

помощью таблицы значений функции $\Phi(a)$ легко вычислить, например, вероятность того, что случайная ошибка не превосходит заданной величины h. Обозначим через $P(h)$ вероятность того, что истинное значение наблюдаемой величины отличается от найденного среднего значения не более чем на h. Величину $P(h)$ находят по следующей формуле:

$$P(h) = 2\Phi(a), \quad a = \frac{h\sqrt{n-1}}{S}. \qquad (7)$$

есь n — число измерений, а S — среднее квадратическое отклонение полученных значений. В нашем примере n = 10,

$$D = \frac{1}{10}(0{,}16 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}36 + 0{,}25 + 0{,}64 + 0 +$$

$$+ 0{,}81 + 0{,}16 + 0{,}04) = 0{,}224, \quad S = \sqrt{D} = 0{,}494$$

м. гл. II, формулы (5), (7)]. Пусть h = 0,3, тогда

$$a = \frac{3}{10}\frac{3}{0{,}494} = 1{,}83.$$

ользуясь теперь формулой (7) и Приложением, находим:

$$P(0{,}1) = 2\Phi(1{,}83) = 2 \cdot 0{,}466 \approx 0{,}93.$$

ким образом, с вероятностью 0,93 истинное значение величины радиации заключено в промежутке от 11,6 – 0,3 = 11,3 до 11,6 + 0,3 = 11,9.

ік понимать полученный результат? Допустим, что радиационный фон в данной местности измеряли параллельно несколько бригад. Их результаты будут, вообще говоря, различными: у каждой бригады получится свое среднее значение . Можно гарантировать, что примерно 93% найденных средних отклоняется от истинного значения не более чем на 0,3.

ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ

роводится измерение уровня загрязненности атмосферы в центре города. Получены следующие значения индекса загрязнения: 27 29 23 30 31 25 30 29 24 29 31 28 28 24 29 26 30 29 28 25 28 30 29 27 25 28 27 32 31 28.

айдите среднее значение индекса загрязнения и вероятность того, что оно отличается от истинного значения меньше, чем на 2.

§4. Статистическая проверка гипотез

ри обработке статистического материала всегда возникает вопрос: насколько точно полученные результаты отражают реальную ситуацию? Напомним, что статистическому обследованию подвергается не вся совокупность объектов (генеральная совокупность), а только ее часть (выборка). Поэтому любое суждение о генеральной совокупности, сделанное на основании выборки, является приближенным, или, лучше сказать, предположительным. Такие предположения называются *статистическими гипотезами.*

оставленный выше вопрос можно сформулировать так: насколько можно доверять статистической гипотезе? Покажем, как на этот вопрос отвечает теория вероятностей.

Пример

В городском управлении внутренних дел обработали данные о карманных кражах в общественном транспорте в течение года. Среднее число краж составило 12,1 в день. В то же время, среднее число краж за ноябрь оказалось 11,9 при среднем квадратическом отклонении S = 0,64. Можно ли считать, что данные за ноябрь занижены по сравнению с данными за год?

усть гипотеза состоит в том, что разница между средними несущественна, т.е. она зависит, в основном, от каких-то случайных факторов, влиянием которых можно пренебречь. Влияние этих факторов мы оценим количественно величиной 5%. По другому можно сказать, что уровень нашего доверия к гипотезе составляет 95%. Пользуясь терминологией теории вероятностей, мы скажем, что *доверительная вероятность р равна* 0,95.

ам нужно сравнить отклонение средних *а* = 12,1 – 11,9 = 0,2 с так называемым *критическим отклонением k*, которое находят из равенства:

$$k = \frac{St}{\sqrt{n}}, \quad \Phi(t) = \frac{p}{2},$$

е **Ф,** как и выше — функция Лапласа. В нашем примере = 0,475, *n* — число наблюдений в ноябре — равно числу дней, т.е. *n* = 30.

ак видно из таблицы, Ф(2) = 0,4772 0,475, следовательно, приближенно можно считать, что *t* = 2.

ак как *S* = 0,64, = 5,48, то

$$k = \frac{0{,}64 \cdot 2}{5{,}48} = 0{,}23.$$

ритическое отклонение получилось больше, чем отклонение средних — 0,2. Следовательно, гипотеза принимается, т.е. при уровне доверия 95% данные за ноябрь можно считать не заниженными.

римечание. Если число наблюдений *n* меньше тридцати, то вместо функции Лапласа Ф пользуются другой функцией, которая дает более точные результаты.

ы привели очень простой пример. На самом деле, на практике приходится проверять и более сложные гипотезы. Для этого разработаны специальные математические методы, один из которых мы только что рассмотрели.

Глава VII МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННЫЙ МИР

Математика — это учение о природе в самом чистом его виде. Математика для ученого — то же самое, что скальпель для анатома: необходимейший инструмент, без которого невозможно проникновение в суть вещей...

(профессор Ханстин, XIX в.)

§1. Математика и культура

ы постараемся ответить на вопрос: какое место занимает математика в мировой культуре и какова ее роль в современном мире?

ультурой (в широком смысле) называют совокупность всех материальных и духовных ценностей, накопленных человечеством за определенную историческую эпоху. Говорят также о культуре данной цивилизации:

шумерской, египетской, китайской, греко-римской, европейской. И какой бы исторический отрезок мы ни взяли, какими бы географическими рамками ни ограничились, там всегда присутствует математика. Это и понятно: людям всегда надо было считать, измерять, производить всевозможные вычисления чтобы строить, торговать, делать календарные расчеты, делить урожай, собирать налоги и т.д. Поэтому математика зародилась значительно раньше других наук.

ысокоразвитую математику ученые обнаруживают в египетских папирусах и вавилонских клинописных текстах пятитысячелетней давности; за 500 лет до новой эры начался расцвет математики в древней Греции, давшей миру Пифагора, Евклида, Архимеда и многих других замечательных ученых и философов; китайские математики уже за 200 лет до н.э. достигли удивительных успехов, а в их математических книгах XIII в. обнаружены некоторые методы решения уравнений, переоткрытые в XIX в. В средние века бурно развилась индийская и арабская математика. Например, десятичная позиционная система, которой мы сейчас пользуемся для записи чисел, — изобретение индийских математиков VI века.

звитие математики стимулировали прежде всего экономические факторы. Чем активнее человек вторгался в природу и развивал производство, тем больше он нуждался в математике. За несколько тысяч лет математика сделала колоссальный шаг вперед: от счета в пределах десятка до ее современного состояния — фантастической сложности и невообразимой разветвленности. Благодаря усилиям математиков, прежде всего двух последних столетий, только в современной «чистой» математике различают около сотни крупнейших областей, каждая из которых подразделяется на несколько десятков направлений. Кроме того, есть прикладная математика (мы сейчас не будем объяснять смысл этого термина), кибернетика, информатика, вычислительная математика, программирование.

последние 50 лет развилась и вычислительная техника, появились электронно-вычислительные машины, с помощью которых успешно решают как прикладные, так и чисто математические задачи. А персональные ЭВМ занимают в жизни современного человека такое же важное место, как, например, автомобиль.

агодаря науке производство (и прежде всего — развитие технологий) за последние два века достигло небывалых успехов. В нашем веке население большинства стран живет в таком комфорте, которого не могли себе даже вообразить современники Бетховена и Гете. Поэтому постепенно наука — а под этим термином стали понимать прежде всего точные науки — заняла в умах людей и общественном мнении важное место. В итоге в XX в.

произошло то, чего раньше не было и в помине — государства, корпорации и даже частные лица стали финансировать научные исследования. Так произошло *преувеличение роли точных наук*, и в первую очередь, конечно, математики, на которой все эти науки основаны. Возникло (даже в среде специалистов!) представление о всемогуществе математических методов; а поскольку математический язык весьма сложен и специфичен, то в умах обывателей математика стала ассоциироваться с чем-то вроде магии.

этя авторы этой книги по профессии математики, они не разделяют точку зрения, согласно которой «в каждой науке столько истины, сколько в ней математики». Существуют науки, уровень развития которых еще не позволяет эффективно применять математику. Но это не умаляет роли других, нематематических методов, которые есть в каждой науке, и с помощью которых добываются прекрасные результаты. Дело не в том, какими методами пользуется ученый, математическими или другими; ценность полученных им результатов зависит в первую очередь от его профессионализма и честности.

эстаточно прочитать сочинения великих русских историков С. В. Соловьева и В. О. Ключевского, чтобы понять, что история — это настоящая наука, хотя в ней математические методы почти не применяются. А плачевное состояние советской историографии вовсе не результат отсутствия в ней математических методов, а результат давления идеологии. И если современное российское право имеет существенные пробелы, то виноваты в этом не настоящие ученые правоведы, а та же идеология, долгое засилие таких псевдоученых как Вышинский с его принципом презумпции виновности и другими «находками»; к этому можно добавить еще и «телефонное право», долго заменявшее все законы, и, наконец, исторические традиции: ведь на Руси испокон веку мнение начальника значило больше, чем закон.

ɥнако вне всякого сомнения, грамотное и аккуратное применение математических методов способно принести пользу любой науке. Сложность состоит прежде всего в том, чтобы сформулировать на математическом языке, т.е. описать в математических терминах, ту задачу, которая интересует биолога, психолога, экономиста, юриста, филолога. К сожалению, среди гуманитариев еще очень мало специалистов, достаточно хорошо владеющих современными математическими методами. Поэтому постановка математической задачи в нематематической области — это, как правило, продукт совместной деятельности двух специалистов, один из которых — математик. При этом эффективность их совместной работы существенно повышается, если и другой хотя бы немного знаком с математикой.

то же время не следует, как мы уже отмечали, полагать, что математика — панацея от всех бед, и что ее применение в данной науке способно решить все проблемы. Это, конечно, не так. Возьмем, например, такую животрепещущую социальную проблему, как рост преступности. Ее решение нужно искать прежде всего на пути совершенствования общественного устройства и улучшения нравственного состояния общества. Роль математики сводится к тому, чтобы дать, по возможности, более точную статистическую оценку уровня криминогенности, количественно оценить различные тенденции в этом социальном явлении, сделать достоверные прогнозы, а на основе последних — составить программу действий, спланировать соответствующие превентивные и профилактические меры. Более того, накопив опыт работы в данном регионе и сформировав достаточно полный банк данных, можно построить математические модели различных процессов, интересующих правоохранительные органы. С помощью подобных моделей можно осуществлять уже стратегическое планирование.

§2. Немного о профессии математика

ак становятся математиками?

нтерес к числам, к счету, к сложным играм, требующим напряжения ума, проявляется уже с детства. Многим детям интеллектуальные забавы доставляют столько же радости, сколько другому ребенку — игра в мяч или мороженое. При надлежащем воспитании этот интерес развивается и возникает *потребность* в умственной деятельности, требующей логического мышления, применения точных расчетов, поиска закономерностей. Реализовать такую потребность ума человек может в разных сферах деятельности, но в наиболее чистом виде — в математике.

це в школе ученик постепенно развивает свою способность к *абстрактному мышлению*, причем не только на уроках математики, но и на уроках физики, химии, биологии. Ведь формулируя очередной закон природы, учитель как бы переводит ученика на новый уровень абстрактного мышления. Если ученик всерьез начинает интересоваться качественным содержанием того или иного закона — вполне вероятно, что он станет физиком, химиком, биологом, технологом, инженером и т.д., т.е. посвятит себя естественным наукам или их приложениям. Но иногда ученика завораживает магия чисел и формул, красота геометрических построений, мощь и универсальность математических методов, сочетание в них идеальной чистоты с идеальной строгостью — тогда он становится математиком.

ак думает математик?

евозможно коротко ответить на вопрос, что отличает математическое мышление или математический склад ума. Для этого нужно глубоко проанализировать процесс математического познания, понять, как математик приходит к открытию. Желающих получить исчерпывающий ответ мы отсылаем к двум замечательным книгам: А. Пункаре «О науке» и Г. Пойа «Математическое открытие».

тиль мышления прежде всего характеризуется языком, которым пользуется наука.

атематик пользуется специальным языком — языком абстрактных символов. Очищенные от конкретного содержания, символы становятся универсальными и в этом их сила. Но в этом и их слабость! Нематематика, склонного к конкретному мышлению, математические абстракции и специальные знаки повергают в ужас. В своем страхе он фетишизирует символику и полагает, что, выучив значки, он постигнет и математику. В этом корни обывательского страха перед математикой и известного в педагогике явления, называемого «зубрежкой».

атематический стиль мышления формируется у того, кто использует математические методы. Их отличает логическая строгость, универсальность, сочетание индуктивного и дедуктивного подхода, нацеленность на поиск закономерностей, четкость формулировок и определений, использование точных количественных оценок... Именно благодаря этим качествам происходит возрастание роли математики в других науках. Роль математики в естественных науках (в частности, в биологии) и технике общеизвестна. Наш век знаменателен тем, что математические методы начинают использовать в экономике, экологии, медицине, управленческой деятельности и гуманитарных науках — лингвистике, социологии, психологии... Математику начали преподавать на гуманитарных факультетах не случайно. Общество осознало, что математика не только важная составляющая общечеловеческой культуры, но и необходимый инструмент познания в любой отрасли человеческой деятельности.

це одно существенное отличие математического стиля мышления состоит в том, что математик мыслит логическими категориями, а нематематик — образами. Попросите, например, филолога определить, что такое «поэтический образ», а математика — что такое функция, и Вы поймете разницу в стиле мышления. Наконец, математики, как никто другой, умеют обобщать свои наблюдения — это тоже отличительная черта математического мышления. По этой причине многие математики становятся хорошими философами, ибо обобщения и составляют предмет изучения философии.

§3. От Евклида до Лобачевского
(история неевклидовой геометрии)

жруг изобретателей новых ценностей вращается мир — неслышно вращается он.

Ницше. «Так говорил Заращустра»

стория неевклидовой геометрии — самый замечательный пример развития Математической Идеи. Для нас эта история интересна вдвойне, т.к. ее главный участник — гениальный русский математик Николай Иванович Лобачевский.

началась эта история примерно 2300 лет назад, когда греческий математик Евклид написал книгу под названием «Начала». В ней он систематизировал все имевшиеся к тому времени сведения по геометрии и изложил их с таким непревзойденным педагогическим мастерством, что на протяжении тысячелетий «Начала» были лучшим учебником по геометрии.*

Не устарела эта книга и сейчас. По существу, все современные школьные учебники идейно и структурно копируют «Начала».

ким же образом Евклид сумел изложить геометрию так просто и с таким изяществом, что покорил целые поколения, а по числу изданий и читаемости его книга сравнима только с Библией?

клид предложил метод, который теперь называется *аксиоматическим* и широко применяется в математике и других науках. Суть его состоит в том, что при изложении некоторой теории в самом начале формулируется ряд утверждений, называемых *аксиомами,* истинность которых считается несомненной. (Про такие утверждения еще говорят, что они «принимаются без доказательства».) Аксиомы должны быть достаточно простыми и соответствовать нашему опыту. А дальнейшее развитие теории состоит в доказательстве теорем, вытекающих только из заданных аксиом.

истема аксиом Евклида на протяжении более 2000 лет совершенствовалась многими авторами. В настоящее время существует много различных редакций системы аксиом евклидовой геометрии. Вот одна из них.

ксиомы евклидовой геометрии на плоскости

ервая группа: аксиомы связи

Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.

На каждой прямой имеются по крайней мере две различные точки.

Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

торая группа: аксиомы порядка

Если точка *B* лежит между точками *A* и *C*, то *B* лежит между *C* и *A*.

Из трех различных точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Всякая прямая разбивает плоскость на две части таким образом, что для любого отрезка на плоскости выполняется следующее: если концы отрезка принадлежат одной и той же части, то прямая не пересекает этот отрезок; если же концы отрезка принадлежат разным частям, то прямая его пересекает.

ретья группа: аксиомы движения

Каждое движение сохраняет принадлежность точки прямой.

Каждое движение сохраняет порядок точек на прямой.

Композиция двух движений также является движением.

Для каждого движения существует обратное движение.

Если некоторое движение оставляет на месте луч и его начало, то оно оставляет на месте каждую точку этого луча.

Какую бы пару точек мы ни взяли, существует движение, которое переставляет их местами.

Какую бы пару лучей с общим началом мы ни взяли, существует движение, которое переставляет их местами.

етвертая группа: аксиома непрерывности (Дедекинда)

усть все точки прямой разбиты на два непустых класса так, что каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Тогда либо в первом классе существует точка, следующая за всеми остальными точками первого класса, либо во втором классе существует точка, предшествующая всем точкам второго класса.

ятая группа: аксиома параллельности (пятый постулат Евклида)

а плоскости через точку *M*, не лежащую на прямой *a*, можно провести одну и только одну прямую, параллельную прямой *a*.

ксиома параллельности — самое знаменитое математическое предложение в истории. Ее обсуждение на протяжении 2000 лет завершилось гениальным открытием Лобачевского и привело к открытию неевклидовых геометрий, возникновению новых областей в математике и новым взглядам на пространство и время.

очему же так получилось? Дело в том, что, начиная со времен Евклида, многие математики не воспринимали аксиому параллельности именно как аксиому, а стремились ее доказать, потому что она казалась сложнее остальных аксиом. Позже появился другой мотив. Утверждение, содержащееся в пятом постулате, стало казаться настолько соответствующим действительности и человеческому опыту, что никто из математиков до Лобачевского (кроме великого Гаусса) не сомневался в существовании доказательства.

2000 лет было предложено очень много «доказательств», но все они имели один и тот же порок: каждый автор, сам того не замечая, обязательно использовал в своих рассуждениях ту самую аксиому параллельности, которую стремился доказать! В математике это называется порочным кругом. Ясно, что подобные рассуждения доказательством не являются.

иколай Лобачевский, как и многие его предшественники и современники, тоже увлекся доказательством пятого постулата. После нескольких неудачных попыток он решил применить доказательство «от противного». Для этого Лобачевский заменил аксиому параллельности Евклида на противоположную: на плоскости через точку М, не лежащую на прямой а, проходит более одной прямой, параллельной данной прямой а, оставив остальные аксиомы Евклида без изменения. Затем он стал доказывать с помощью новой системы аксиом различные теоремы в надежде получить противоречие. Если бы на некотором этапе рассуждений таковое оказалось, то это означало бы, что аксиома параллельности Лобачевского неверна, а следовательно, верна только аксиома Евклида. Но, доказав несколько десятков теорем, Лобачевский никакого противоречия не получил. И тогда он понял, что с математической точки зрения его система аксиом имеет такое же право на существование как и система аксиом Евклида. Так родилась неевклидова геометрия. Датой рождения считается 1826 год, когда Лобачевский доложил результаты своих исследований на заседании математического факультета Казанского университета.

зменение всего лишь одной аксиомы привело к удивительным фактам. В новой, неевклидовой геометрии

мма углов любого треугольника оказалась меньше 180°, причем эта сумма зависела от площади *S* треугольника: .

есь *k* — некоторая постоянная, определяемая выбором масштаба. Из этой формулы видно, что площадь любого треугольника не может быть более k^2.

лее, оказалось, что в геометрии Лобачевского нет подобных фигур! Например, получалась такая теорема: если у двух треугольников углы равны, то эти треугольники равны. Этот удивительный факт объясняется тем, что теория подобия основана на понятии параллельности. Отменяя аксиому параллельности Евклида, мы отменяем и подобие.

оме параллельных и пересекающихся прямых, на плоскости Лобачевского существуют *расходящиеся* или *сверхпараллельные* прямые; помимо обычных окружностей, есть окружности, центр которых находится в бесконечности, и т.д.

бачевский понимал, что, открыв новую геометрию, он должен найти ответ на некоторые вопросы. Важнейший из них такой: как новая геометрия соотносится с реальным миром? Лобачевский был убежден, что его геометрия — не абстрактная математическая теория, не только плод его ума, а что она отражает свойства реального пространства. Он считал, что во Вселенной действует именно его геометрия, но люди этого не замечают, т.к. различие между евклидовой и новой геометрией проявляется только при измерении очень больших расстояний. Если же измерять небольшие фигуры, то результаты, полученные с помощью формул старой и новой геометрии, отличаются настолько мало, что это различие заметить практически невозможно. Точнее: чем меньше измеряемые фигуры, тем геометрия Лобачевского ближе к геометрии Евклида.

тобы проверить эту гипотезу, Лобачевский решил найти сумму углов треугольника, две вершины которого находятся в противоположных концах земной орбиты, а третья — на звезде Сириус. Если бы сумма углов оказалась меньше 180°, то гипотеза Лобачевского получила бы подтверждение.

роведя предварительные вычисления, Лобачевский установил, что если сумма углов в этом треугольнике и окажется меньше чем 180°, то не более чем на 4 миллионных секунды! (Секунда — 1/3600 часть градуса.) Поэтому практические измерения выполнить невозможно, т.к. ни один из астрономических приборов не обладал (и до сих пор не обладает) требуемой точностью.

ругая важная проблема заключалась в необходимости выяснить, не содержит ли система аксиом новой геометрии каких-либо внутренних противоречий? Ведь никто не может доказать *все* теоремы, поэтому нужно как-то гарантировать, что пользуясь аксиомами, мы никогда не получим взаимоисключающих результатов. Лобачевский много работал над этой проблемой, но она оказалась настолько глубокой и сложной, что завершить ее удалось только через несколько десятилетий усилиями многих замечательных математиков.

овая геометрия не получила признания при жизни ее творца. Она получила известность только после 1868 г., когда появилась ее первая *модель*. Модель некоторой геометрии представляет собой совокупность математических объектов, называемых «точками» и «прямыми», для которых выполняются аксиомы этой геометрии.

одель евклидовой геометрии построить очень просто, для этого достаточно вспомнить, что такое декартовы координаты на плоскости. Назовем «точкой» всякую упорядоченную пару чисел *(x,y),* а «прямой» — множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $Ax + By + C = 0$. Можно проверить, что для таких «прямых» и «точек» выполняются все перечисленные выше аксиомы евклидовой геометрии.

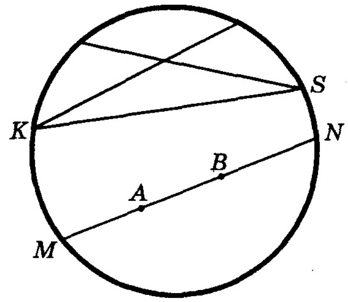

Рис. 33

одель Клейна плоскости Лобачевского строится внутри некоторого круга *K*. «Точками» называются обычные точки, находящиеся внутри круга *K*, а прямыми — хорды окружности *S*, ограничивающей круг *K* (см. рис. 33). Параллельные прямые изображаются хордами, пересекающимися на окружности *S;* непересекающиеся хорды — это сверхпараллельные (расходящиеся) прямые. Можно показать, что на этой модели выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского, т.е. все, кроме последней, аксиомы евклидовой геометрии и сформулированная выше аксиома параллельности Лобачевского.

сстояние (в смысле геометрии Лобачевского) между точками *A* и *B* вычисляется по следующей формуле

$$|AB| = k\ln\left(\frac{MB}{BN} : \frac{MA}{AN}\right).$$

налогичную формулу можно записать и для углов.

другой модели (Пуанкаре) «точками» плоскости Лобачевского будут точки верхней полуплоскости ($x > 0$), прямыми — лучи, перпендикулярные оси *X*, а также полуокружности, опирающиеся на ось *X* (см. рис. 34).

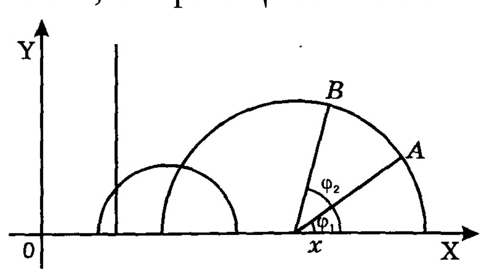

Рис. 34

сстояние (в смысле геометрии Лобачевского) между точками *A* и *B* вычисляется по формуле

$$|AB| = k \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}\right).$$

ія вычисления углов специальная формула не нужна: на модели Пуанкаре углы в смысле геометрии Лобачевского — это обычные углы.

:ть и другие модели геометрии Лобачевского.

/ществование моделей доказывает, что система аксиом Лобачевского является *непротиворечивой*. Так решается одна из важнейших проблем, над которой в последние годы жизни работал сам Лобачевский.

 другой стороны, наличие моделей, или как еще говорят, *реализации* геометрий Евклида и Лобачевского, закрывает проблему 2000-летней давности: можно ли *доказать* аксиому параллельности, т.е. вывести ее из других аксиом? Теперь ясно, что нельзя, потому что эта аксиома *не зависит от остальных аксиом*. Независимость вытекает из того факта, что после замены аксиомы параллельности Евклида на аксиому параллельности Лобачевского мы вновь получаем непротиворечивую систему аксиом.

ереоценить значение открытия Лобачевского невозможно. Никакой другой математический результат не имел столько значительных последствий. Благодаря открытию геометрии Лобачевского возникли новые важнейшие области математики: основания геометрии, основания математики, математическая логика. Математики поняли силу аксиоматического метода и стали его широко применять во всех разделах математики и даже в физике. Далее, поскольку возник новый математический объект — система аксиом — появились и специальные методы его исследования, так называемая метаматематика. Бурно развилась теория алгоритмов, тесно связанная с математическими основами функционирования электронно-вычислительных устройств. В итоге было подвергнуто анализу все здание математики.

цея Лобачевского, что наш мир только в «малом» подчиняется законам евклидовой геометрии, а в целом является неевклидовым, стала доминирующей идеей в науке с конца XIX века. Один из основных выводов теории относительности как раз и заключается в том, что пространство искривлено, т.е. не является евклидовым.

:тория пятого постулата показывает, как конкретная математическая идея, пройдя тысячелетия, как бы связала различные эпохи и стала одним из тех стержней, около которых вращается мир. Гениальные умы и великие мастера вращают наш мир, создавая настоящие ценности, и среди них математика — одна из звезд первой величины.

ı одно из замечательных открытий в математике не остается без приложений. Совершенную теорию конических сечений* создал еще греческий математик Аполлоний за 200 лет до н.э. Первое же практическое приложение этой теории было дано только в начале XVII в. величайшим астрономом Кеплером, который сформулировал один из своих законов так: *все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.***

)то эллипсы, гиперболы и параболы, которые получаются как линии пересечения кругового конуса с различными плоскостями.

Напомним, что *эллипсом* называется кривая, все точки которой обладают одним и тем же свойством: сумма расстояний от каждой точки эллипса до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, т.е. одна и та же для всех точек эллипса.

ıким образом, теория конических сечений ждала своего приложения 1800 лет.

ɔгда Лобачевский открыл свою геометрию, многие его современники, в том числе даже такой выдающийся математик, как Остроградский, считали неевклидову геометрию не более чем подозрительной забавой. Но уже через 50 лет появилось много неевклидовых геометрий, а через 75 лет Эйнштейн сформулировал принципы теории относительности, и с этого момента неевклидовы геометрии стали рабочим инструментом физиков.

це меньше времени прошло от рождения математической логики, которая вначале считалась сугубо формальной наукой, до того момента, когда вдруг выяснилось, что развитые ею методы — основа для создания будущих ЭВМ.

таких примеров немало. Все они показывают, что на великом дереве математики зреет может быть и не так много плодов, но каждый из них, созрев, продвигает человечество на шаг вперед.

Глава VIII МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

основе математики лежит понятие множества. Множеством называют всякую совокупность каких-либо предметов.* Предметы, из которых состоит множество, называют его элементами. Если, например, в Твери 145 юристов, то можно сказать, что множество всех юристов города состоит из 145 элементов. Говорят о множестве студентов в аудитории, множестве ног таракана, множестве всех озер Тверской области, множестве книг в библиотеке и т.д.

; то время как в русском языке слово «множество» означает «много».

математике рассматриваются числовые множества, множества, состоящие из точек, прямых, векторов, многочленов, функций. Они обозначаются специальными символами. Например, множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел (о последних см. наст. гл., §4) обозначают символами **N, Z, Q, R** и **C** соответственно.

ли элемент о принадлежит множеству *M*, то пишут *A M*. Например, 5 *N*, *R*. Если все элементы множества *B* принадлежат также множеству *A*, то говорят, что множество *B* является подмножеством множества *A*. Это записывается так: В А. Говорят также «*B* содержится в *A*» или «*B* является частью *A*».

ножество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым, множеством* и обозначается символом . По определению считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

§1. Кольца и поля

атематика, как и всякая другая наука, развивается путем постоянного обобщения и углубления уже имеющихся результатов и фактов. Каждое очередное замечательное открытие заставляет переосмысливать все накопленное к этому моменту. Открытие неевклидовой геометрии, например, привело математиков к осознанию необходимости строгого обоснования основных математических понятий, в том числе и тех, которыми они уже пользовались несколько столетий. Этот процесс начался примерно со второй половины XIX в. Одной из первых фундаментальных работ в этом направлении стало исследование аксиом геометрии, проведенное Давидом Гильбертом, одним из величайших математиков конца XIX — первой половины XX в.

цея Гильберта состояла в том, чтобы максимально формализовать основные математические определения. Под формализацией понимают замену интуитивного понятия строгим, смысл которого раскрывается в соответствующей системе аксиом. Например, словами «точка» и «прямая» в системе аксиом евклидовой геометрии (см. гл. VIII, §2) обозначаются не обычные точки и прямые, с которыми мы привыкли иметь дело в школе и дома, а элементы каких-то абстрактных множеств, природа которых нам безразлична, и от которых требуется только одно: чтобы они подчинялись заданной системе аксиом. С подобными множествами мы уже имели дело, когда рассматривали модели геометрии Лобачевского. Там «прямыми» назывались хорды окружности (модель Клейна), лучи и полуокружности (модель Пуанкаре).

омимо математической стройности ценность формального определения состоит еще и в том, что оно выявляет общие свойства совершенно, казалось бы, различных математических объектов. Например, как мы отмечали в гл. I, числовые множества **N, Z, Q, R** имеют одинаковые алгебраические свойства: их элементы складывают, вычитают, умножают и делят по одним и тем же правилам:

$$\begin{array}{ll} 1)\ a + b = b + a, & 5)\ a(b + c) = ab + ac, \\ 2)\ (a + b) + c = a + (b + c), & 6)\ ab = ba, \qquad\qquad (1) \\ 3)\ a + 0 = a, & 7)\ (ab)c = a(bc). \\ 4)\ a + (-a) = 0, & \end{array}$$

о по этим же правилам производятся операции и с а) многочленами; б) со всеми элементарными функциями; в) с рядами (бесконечными суммами). Как мы увидим, есть и другие, более сложные множества, для которых справедливы свойства (1). Таким образом, в свойствах (1) отражены некоторые общие свойства указанных множеств. Любое множество с такими свойствами называется *кольцом.**

'очнее, коммутативным и ассоциативным кольцом.

рмальное определение кольца следующее: это некоторое множество, на котором заданы две функции, одна из которых называется *сложением*, а вторая — *умножением;* сложение и умножение должны подчиняться правилам (1), которые называются *аксиомами кольца.**

:войства 6) и 7) иногда не включают в систему аксиом кольца.

ксиомы 1), 2) и 5), 6), 7) представляют собой тождества, которые должны выполняться для любых элементов *a*, *b* и *c* из кольца.

ксиома 3) означает, что в кольце должен существовать особый элемент, называемый *нулем*, для которого равенство 3) выполняется при любом *a*.

ксиома 4) утверждает, что для каждого элемента *a* из кольца найдется (в том же кольце!) *противоположный ему элемент –a,* причем равенство 4) можно рассматривать как уравнение, из которого и определяется этот элемент *–a*.

УПРАЖНЕНИЯ

Покажите, что кольцом является а) множество четных чисел; б) множество чисел, кратных трем; в) множество чисел, кратных четырем, и т.д.

Будет ли кольцом множество всех положительных рациональных чисел?

формальном определении кольца операции сложения и умножения рассматриваются как функции. Такие функции в этом курсе нам еще не встречались. Здесь сумма $a + b$ рассматривается как функция двух переменных *a* и *b,* т.е. слагаемых; произведение $a \cdot b$ — также как функция двух переменных *a* и *b,* т.е. сомножителей. Таким образом, и независимые переменные (a и b) и значения этих функций (сумма и произведение) являются не числами, а *элементами кольца.*

к видно из системы аксиом (1), операция деления в кольце, вообще говоря, отсутствует. Кольца, в которых можно делить на любой элемент, кроме нуля, называются *полями.* Формальное определение поля получается добавлением к аксиомам (1) еще одной аксиомы, обеспечивающей возможность деления. Попробуйте сформулировать ее самостоятельно.

заключение рассмотрим еще два важных примера колец.

Докажем, что относительно обычных операций сложения и умножения числа вида $a + b$ с рациональными a и b образуют поле.

бозначим рассматриваемое множество чисел через P. Прежде всего нужно показать, что *множество P замкнуто относительно операций сложения и умножения,* т.е. что сложение и умножение можно рассматривать как функции со значениями во множестве P. Иными словами, нужно проверить, что сумма и произведение любых двух чисел из множества P также принадлежат множеству P, т.е. снова будут числами вида $a + b$.

зяв пару чисел $a + b$ и $c + d$, где a, b, c, d **Q,** получаем:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2};$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

к как a, b, c, d — это рациональные числа (дроби), то и числа, которые получились в скобках, также будут дробями. Это мы и хотели показать.

перь докажем, что операция деления также не выводит нас из рассматриваемого множества. В самом деле,

$$\frac{(a + b\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \left(\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\right)\sqrt{2}.$$

скобках стоят рациональные числа, следовательно, результат деления двух любых чисел из множества P представляет собой число также из множества P. Итак, числа вида $a + b$ образуют поле, что и требовалось доказать.

идумайте еще один похожий пример. Подумайте также, почему знаменатель $c^2 - 2d^2$ не равен нулю? Ответ можно найти в гл. I, §2.

Все целые числа разделим на шесть частей, которые обозначим P_0, P_1,..., P_5 и будем называть *классами вычетов по модулю* 6 или просто *классами.*

определению, класс P_0 состоит из чисел, кратных шести, т.е. 0, ±6, ±12, ±18, ... Произвольное число из этого класса записывается в виде $6k$, где k

— произвольное целое число.

іасс P_1 состоит из чисел, которые при делении на 6 дают в остатке единицу. Это числа .... –11, –5, 1, 7, 13, 19, ... Произвольное число из этого класса записывается в виде $6k + 1$.

іасс P_2 состоит из чисел, которые при делении на 6 дают в остатке два. Это числа ..., –10, –4, 2, 8, 14, 20, ... Произвольное число из этого класса записывается в виде $6k + 2$.

так далее. Наконец, класс P_5 состоит из чисел, которые при делении на 6 дают в остатке пять. Это числа ..., –7, –1, 5, 11, 17, 23, ... Произвольное число из этого класса записывается в виде $6k + 5$.

іределим сложение классов формулой

$$P_k + P_l = P_{k+l}, \quad \text{если } k + l < 6, \text{ и}$$

$$P_k + P_l = P_{k+l-6}, \quad \text{если } k + I \ 6.$$

іпример $P_2 + P_0 = P_2$,$P_3 + P_4 = P_1$.

:пользуя тот же принцип, определим умножение классов. Положим $P_kP_l = P_m$, где число m есть остаток от деления числа kl на шесть. Например, $P_1P_4 = P_4$, $P_2P_5 = P_4$, а $P_3P_4 = P_0$ т.к. 3 • 4 = 12 делится на 6 без остатка.

:рно следующее утверждение:

іассы, вычетов по модулю шесть образуют кольцо относительно введенных операций сложения и умножения, т.е. для них выполняются аксиомы кольца [см. (1)]:

$$\begin{aligned} &P_k + P_l = P_l + P_k, && P_k(P_l + P_m) = P_kP_l + P_kP_m, \\ &(P_k + P_l) + P_m = && P_kP_l = P_lP_k, \\ &\qquad = P_k + (P_l + P_m), && P_k(P_lP_m) = (P_kP_l)P_m. \\ &P_k + P_0 = P_k, && \\ &P_k + P_{6-k} = P_0, && \end{aligned}$$

ɔказательство этого утверждения состоит в проверке всех аксиом. Так как оно несложное, мы не приводим его, а предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

гак, мы построили кольцо всего из шести элементов (оно обозначается $\mathbf{Z_6}$), в то время как все перечисленные ранее кольца — числовые, кольцо многочленов и т.д., содержат *бесконечно много элементов.* Аналогичным образом можно построить кольцо **Zm** классов вычетов по любому модулю *m*, содержащее всего *m* элементов.

ɔзникает естественный вопрос: являются ли кольца вычетов полями? Иными словами, можно ли ввести операцию деления классов? Попробуем, например, разделить P_2 на P_3 кольце $\mathbf{Z_6}$. Пусть $P_2 : P_3 = P_x$, тогда $P_2 = P_3P_x$.

Но, согласно определению,

$$P_3P_0 = P_0, \quad P_3P_1 = P_3, \quad P_3P_2 = P_0,$$
$$P_3P_3 = P_3, \quad P_3P_4 = P_0, \quad P_3P_5 = P_3.$$

гак, при любом *x* имеем $P_3 P_x P_2$, а это и означает, что частного $P_2 : P_3$ не существует. Следовательно, кольцо $\mathbf{Z_6}$ не является полем.

другой стороны, таким же способом можно показать, что, например, кольца $\mathbf{Z_3}$, $\mathbf{Z_5}$ и $\mathbf{Z_7}$ будут полями. Общий результат формулируется так: кольцо $\mathbf{Z_m}$ является полем тогда и только тогда, когда *m* — простое число.

ольца и поля вычетов играют в математике важную роль, особенно в теории чисел. С их помощью, например, находят *целочисленные решения* (x,y) уравнений вида $ax + by = c$, коэффициентами которых являются также целые числа.

§2. Векторы и векторные пространства

ссматривая, как развивалось то или иное математическое понятие, мы учимся понимать роль и значение всей математики. Наряду с кольцами и полями, одним из важнейших понятий в математике, физике и технике является *вектор.* Эволюция этого понятия — от *направленного отрезка* до сложнейших *векторных пространств* — история интересная и поучительная.

ервоначально вектором называли направленный отрезок, прикрепленный к какой-либо точке. С помощью направленных отрезков удобно иллюстрировать физические величины, которые характеризуются не только величиной, но и направлением: силу, скорость, напряженность электрического поля и т.д.

екторы, прикрепленные к одной точке, можно складывать по правилу параллелограмма. С физической точки зрения сумма двух или более векторов представляет собой равнодействующую сил, действующих на точку (рис. 35).

екторы, прикрепленные к одной точке, можно не только складывать, но и вычитать, умножать на числа. Разностью двух векторов и называется вектор — , определяемый равенством + *(–)* = . Произведением вектора на число *k* называется вектор = *k* , прикрепленный к той же точке, что и вектор ; длина вектора определяется равенством | | = |*k*| • | |, а направление совпадает с направлением вектора ||, если *k* число положительное, и противоположно вектору , если *k* — число отрицательное (рис. 35). При этом, каковы бы ни были векторы , , и числа *k*, *I*, всегда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\bar a + \bar b = \bar b + \bar a, && 1 \cdot \bar a = \bar a, \\ &(\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + (\bar b + \bar c), && k(l\bar a) = (kl)\bar a, \\ &\bar a + \bar 0 = \bar a, && (k + l)\bar a = k\bar a + l\bar a, \\ &\bar a + (-\bar a) = \bar 0, && k(\bar a + \bar b) = k\bar a + k\bar b. \end{aligned} \qquad (2)$$

атематиков, которые рассматривают векторы вне их связи с физическим содержанием, не удовлетворяло, что нельзя складывать векторы, прикрепленные к разным точкам. Выход нашелся в том, чтобы сделать векторы свободными от точки прикрепления и разрешить им передвигаться параллельно исходному положению. Иными словами, *свободный вектор* можно представлять себе в виде совокупности всевозможных направленных отрезков, параллельных между собой, имеющих одну и ту же длину и одно и то же направление. Такие отрезки называют *эквивалентными.*

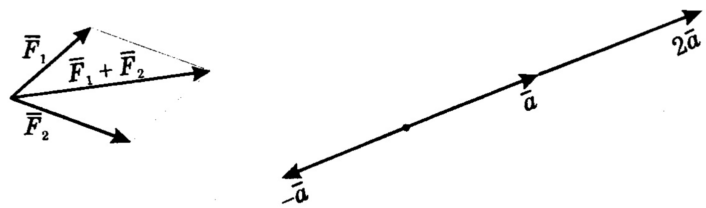

Рис. 35

зободные векторы просто задавать с помощью координат. Напомним, что *координатами вектора — направленного отрезка* на плоскости называются его проекции на координатные оси X и Y (см. рис. 36). Очевидно, что все эквивалентные направленные отрезки имеют одинаковые координаты. Поэтому последние можно считать координатами соответствующего свободного вектора.

пространстве направленный отрезок имеет три координаты: проекции на координатные оси X, Y и Z. Следовательно, свободный вектор в пространстве имеет также три координаты.

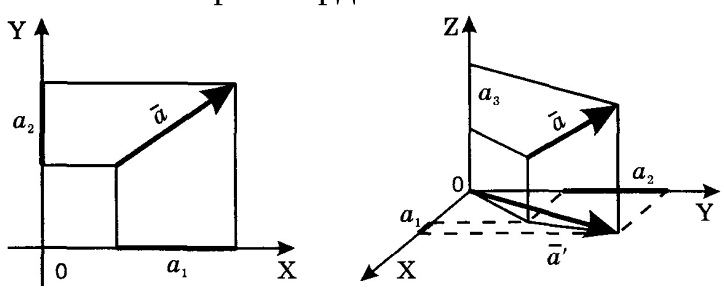

Рис. 36

гак, теперь вектор можно заменить эквивалентным объектом — совокупностью его координат. Вектор на плоскости — это пара чисел *(a_1,a_2)*, вектор в пространстве — тройка чисел *(a_1, a_2, a_3)*. Сложение векторов и умножение их на числа теперь осуществляется также просто. Чтобы сложить два вектора, нужно сложить их соответствующие координаты, а чтобы умножить вектор на число, нужно умножить на это число его координаты. Например, (1,2,–3) + (–4,6,4) = (–3,8,1), 2 • (1,2,–3) = (2,4,–6).

кая точка зрения на векторы оказалась исключительно плодотворной. Под определение вектора сразу попало много физических и математических объектов. Например, всякое элементарное событие, происходящее в пространстве в точке с координатами *(x,y,z)* в момент времени *t,* можно рассматривать как четырехмерный вектор *(x,y,z,t)*. Так мы приходим к *пространству событий* — одному из основных понятий современной физики. Другой пример. Всякий технологический процесс характеризуется набором различных параметров, которые фиксируются приборами, показывающими время, скорость процесса, давление, вязкость и т.п. Допустим, что таких параметров 10. Тогда состояние процесса определяется набором из десяти чисел, т.е. десятимерным вектором.

оличество координат вектора называется *размерностью*. Векторы одной и той же размерности можно складывать и умножать на числа по тем же правилам, что двумерные и трехмерные. И при любой размерности будут выполняться свойства (2). Таким образом, мы приходим к наиболее общему аксиоматическому определению векторного пространства: Векторным пространством называется всякое множество, для элементов которого определена операция сложения и определено умножение элементов на числа таким образом, что выполняются свойства (2).

вободный вектор называют еще *параллельным векторным полем.* Термин «*векторное поле*» возник в физике, и его смысл вполне соответствует значению этого слова в обычном языке. Мы представляем себе поле как некоторый участок земли, засеянный, скажем, пшеницей. Теперь представим себе, что колос пшеницы — это вектор, и что колосья (векторы) растут в каждой точке участка. Это и будет векторное поле, причем не обязательно параллельное. Параллельное поле получается в случае, когда все «колоски» параллельны и имеют одинаковую длину.

ножество примеров векторных полей мы находим в физике: электрические и магнитные поля, поле тяготения. Поток жидкости или газа в трубе порождает векторное поле скоростей: в каждой точке потока определен вектор скорости.

атематики иногда рассматривают векторное поле как функцию, которая каждой точке пространства сопоставляет некоторый вектор, как бы прикрепленный к этой точке. Векторные поля представляют собой один из важнейших объектов изучения в современной физике и математике.

§3. Группы

трудно заметить, что система аксиом кольца (1) и система аксиом векторного пространства (2) имеют некоторую общую часть. Три свойства операции сложения: ассоциативность: *(a + b) + c = a + (b + c),* наличие нейтрального элемента: *a* + 0 = *a,* существование противоположных элементов: *a* + *(-a)* = 0 (3) справедливы для любого кольца и любого векторного пространства. Приведем еще примеры математических объектов, обладающих подобными свойствами.

Запишем по порядку числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Теперь перепутаем их каким-либо образом: 2, 3, 5, 1, 6, 4. Результат нашей деятельности запишем в виде таблицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

а таблица задает некоторую функцию, если считать, что верхний ряд — значения независимого переменного *x,* а нижний — соответствующие значения зависимого переменного *y.* Такая функция называется *подстановкой* или перестановкой из шести элементов и действует вполне понятным образом: единицу переводит в двойку, двойку — в тройку, тройку — в пятерку, четверку — в единицу, пятерку — в шестерку а шестерку — в четверку. Всего подстановок из шести элементов будет 6! = 1 • 2 • 3 • 4 • 5 • 6 = 720 штук (см. гл. III, §3).

зультат последовательного действия двух перестановок тоже будет перестановкой. Запись

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

казывает, что в результате последовательного действия перестановок

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

лучилась перестановка

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

самом деле, первая из них переводит единицу в двойку, а вторая переводит двойку в четверку. Следовательно, в результате совместных усилий они переводят единицу в четверку. Остальное аналогично.

зультат последовательного действия двух функций называется их *композицией* или *сложной функцией.** Но по отношению к перестановкам допускается некоторая вольность речи. Говорят, что перестановка *S* является *произведением* перестановок S_1 и S_2.

равните с определением сложной функции, приведенном в гл. V, §5.

и любые перестановки S_1, S_2 и S_3 можно перемножить либо так: , либо так:

. Но результат получится один и тот же, поскольку в обоих случаях перестановки S_1, S_2 и S_3 действуют *последовательно и в одном и том же порядке.* Поэтому можно записать, что

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3. \qquad \textbf{(4)}$$

-перь заметим, что умножение *тождественен перестановки*

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

любую другую перестановку *S* дает следующее:

$$S_0 \circ S = S \circ S_0 = S. \qquad \textbf{(5)}$$

-аконец, для каждой перестановки *S* можно найти ей *обратную,* которая обозначается S^{-1} и действует так: если *S* переводит число *k* в число *l*, то S^{-1} переводит число *l* в число *k.* Например, для перестановки обратной будет перестановка . Из определения обратной перестановки немедленно вытекает, что

(6)

-ли в равенствах (4)-(6) заменить символ о на + и вместо S^{-1} записать $-S$, то эти равенства совпадут с равенствами (3).

-но, что все сказанное относится и к подстановкам из любого числа элементов.

Следующий пример — геометрический. Мы будем рассматривать *множество всех движений на евклидовой плоскости E. Движением* называется всякая функция *D,* переводящая точки плоскости *E* в точки той же плоскости *E,* и сохраняющая длины отрезков. Последнее означает, что если *D(A) = B,* т.е. функция *D* переводит точку *A* в точку *B,* и *D*(*C*) = *E,* то длина отрезка *AC* равна длине отрезка *BE.*

-тсюда, в частности, следует, что любое движение является взаимно однозначным преобразованием:* для всякой точки *B* существует единственная точка *A,* такая, что *D(A) = B.* Действительно, если бы движение *D* переводило в точку *B* две различные точки A_1 и A_2, то отрезок нулевой длины *BB* перешел бы в отрезок A_1A_2, имеющий ненулевую длину.

-ак, впрочем, и всякая подстановка.

-движениям относятся *параллельные переносы, повороты и симметрии.*

-роизвольный *параллельный перенос T* задается с помощью некоторого вектора . Вектор определяет в каждой точке *A* направленный отрезок *AB.* Тогда по определению *T(A) = B.* Следовательно, параллельных переносов на плоскости столько же, сколько векторов.

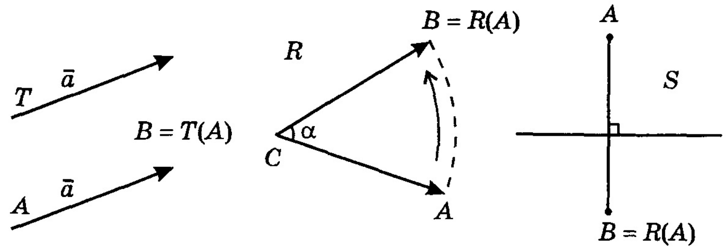

Рис. 37

роизвольный поворот *R* задается точкой *C*, около которой происходит вращение, и углом , на который каждая точка плоскости поворачивается около точки *C*. Если точка *A* после поворота около точки *C* на угол перешла в точку *B*, то по определению *B(A)* = *B* (рис. 37). Если поворот происходит против часовой стрелки, то угол считается положительным, если по часовой стрелке — отрицательным. По определению *R*(*C*) = *C*.

имметрия *S* (осевая симметрия)* относительно некоторой прямой *p* переводит точку *A* в точку *B*, симметричную относительно прямой *p*, (см. рис. 37). Точки прямой *p* функция S оставляет на своих местах.

ак и для подстановок, для любых двух движений D_1 и D_2 можно определить их композицию D_1 D_2 как результат последовательного действия: .

ри этом, в силу тех же обстоятельств, что и выше, для любых трех движений выполняется равенство

,

алогичное равенству (4).

огласно определению, *тождественная функция I (I(A) = A)* также является движением. Очевидно, что для нее выполняется равенство , аналогичное равенству (5).

аконец, для каждого движения *D* существует ему обратное D^{-1}, которое определяется естественным образом: если *D* переводит точку *A* в точку *B*, то D^{-1} переводит точку *B* в точку *A*. Согласно этому определению, , т.е. выполняется равенство, аналогичное равенству (6).

ожно доказать, что любое движение будет либо параллельным переносом, либо поворотом, либо симметрией, либо некоторой их композицией. Таким образом, мы описали *все* движения.

ы указали несколько важных математических объектов различной природы и выделили у них нечто общее, а именно

ждый из объектов представляет собой некоторое множество, на котором задана операция (например, сложения, композиции и т.д.); свойства этой операции описываются аксиомами (3).

акие множества называются *группами*.

соответствии с этим определением,

южество целых, (рациональных, действительных) чисел является группой относительно операции сложения;

южество рациональных (действительных) чисел *без нуля* является группой относительно операции умножения; множество всех подстановок из n элементов образует группу относительно операции композиции (умножения). В этой группе $n!$ элементов, она называется *симметрической группой* и обозначается S_n; множество всех движений на евклидовой плоскости образует группу относительно операции композиции.

ы рассмотрели лишь некоторые наиболее простые, но важные группы. Разумеется, есть и другие группы, причем их так много, что задача классификации групп не решена до сих пор.

цея группы — одна из величайших идей в математике. Она возникла в работе французского математика XIX в. Эвариста Галуа. К настоящему времени теория групп развита необычайно глубоко, и трудно указать такой раздел математики, где бы она ни принесла весомые результаты. Более того, группы хорошо работают, например, в химии, кристаллографии, а современную физику вообще невозможно представить без теории групп.

§4. Комплексные числа

ножество R действительных чисел «ведет себя идеально» по отношению ко всем арифметическим операциям в том смысле, что при сложении, вычитании, умножении и делении двух действительных чисел снова получается действительное число. Однако квадратные корни можно извлекать только из положительных действительных чисел. Этот факт создает большие неудобства, в частности, при решении алгебраических уравнений. Вы знаете, например, что квадратное уравнение имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант является неотрицательным. Таким образом, одни уравнения имеют два корня, а другие — ни одного. Аналогично обстоит дело и с уравнениями других степеней. Например, уравнение $x^3 = 1$ имеет только один действительный корень $x = 1$, а уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$ — три корня: 1, 2, –3.

› уже в XVI в. математики поняли, каким образом можно записать решения любого квадратного уравнения, даже с отрицательным дискриминантом. История началась с того, что в 1545 г. итальянский математик Кардано опубликовал формулу для вычисления корней кубического уравнения. Однако в некоторых случаях эта формула давала странный результат.

Например, корень –3 уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$ с помощью формулы Кардано записывается таким образом:

$$\sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}}. \qquad (7)$$

олучалось, что это выражение имеет смысл несмотря на то, что содержит квадратный корень из отрицательного числа! Объяснение нашел другой итальянский математик XVI в. Рафаэль Бомбелли. В 1572 г. он опубликовал книгу «Алгебра», в которой изложил теорию *комплексных чисел.* Мы расскажем об основных идеях этой теории, используя современную математическую терминологию.

бозначим выражение буквой i,

,

назовем его *мнимой единицей.* Мнимая единица не является действительным числом, но мы распространим на нее все алгебраические свойства действительных чисел. Будем считать, по определению, что мнимую единицу можно умножать на действительные числа и прибавлять к действительным числам. *Таким образом, мы. расширили поле действительных чисел, добавив к нему новый элемент i.* В результате появились другие новые элементы, которые записывают в виде $a + bi$ и называют *комплексными числами.* Комплексное число $a + bi$ получается, если мнимую единицу i умножить на действительное число b и прибавить к результату действительное число a. Если $b = 0$, то комплексное число является действительным. Следовательно, действительные числа составляют часть комплексных чисел. Положим также, по определению, что

.

мплексные числа будем складывать и умножать по следующим правилам:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

метим, что правая часть второго равенства получается как результат почленного перемножения и приведения подобных членов с учетом равенства $i^2 = -1$. Например,

$$(2 + 3i)(6 - i) = 12 - 2i + 18i - 3i^2 = (12 + 3) + (18 - 2)i = 15 + 16i.$$

я каждого комплексного числа можно найти ему обратное. Например,

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{(4 + 9 + 0 \cdot i)} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

ерации сложения и умножения комплексных чисел подчиняются аксиомам (1), откуда следует, что множество всех комплексных чисел образует *поле.* Поскольку оно содержит все действительные числа, то говорят, что *поле комплексных чисел получено расширением поля действительных чисел.*

помощью комплексных чисел можно записать корни любого квадратного уравнения (это впервые сделал Бомбелли). Например, уравнение $x^2 = -1$ имеет корни i и $-i$, т.к. $(\pm i)^2 = -1$; корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$ записываются следующим образом: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

перь мы можем объяснить, почему сумма (7) будет действительным числом. Первый из двух кубических корней представляет собой комплексное число , второй (проверьте это возведением в куб!). Их сумма равна –3.

отя комплексные числа были открыты в XVI в., по-настоящему их роль поняли значительно позже, в начале XIX в. Этому предшествовал ряд замечательных открытий в математике. Вот некоторые из них.

конце XVIII в. Гаусс дал строгое доказательство так называемой основной теоремы алгебры.

сновная Теорема Алгебры: *Всякое алгебраическое уравнение степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней.**

Поэтому о поле комплексных чисел говорят, что оно является *алгебраически замкнутым.*

оганн Бернулли и Леонард Эйлер открыли формулу

$e^{i} = \cos + i \sin$, из которой при = получается удивительное соотношение

= –1, связывающее мнимую единицу i с тремя замечательными числами e, и 1.

аконец, ряд математиков, в том числе и Гаусс, начали представлять комплексные числа геометрически, как точки плоскости. При этом комплексному числу $a + bi$ соответствует точка с координатами (a,b).

омплексные числа применяются во многих разделах математики, физики, механики и т.д. Вот несколько примеров из истории развития авиации. В начале XX в. века русский ученый Н. Е. Жуковский, которого называют отцом авиации, в своих теоретических разработках нашел некоторые виды сложных траекторий полета самолета, которые впоследствии были названы фигурами высшего пилотажа. Вскоре после этого одну из таких фигур выполнил известный летчик П. Н. Нестеров. В честь его она так и называется: петля Нестерова.

ругой русский ученый М. В. Келдыш (впоследствии Президент Академии наук СССР) решил проблему *флаттера* (внезапная вибрация самолета, приводящая к его разрушению во время полета), проблему *шимми* (разру-шение колес при посадке самолета). Оба ученых пользовались в своих расчетах методами комплексного анализа.

§5. Алгебры Буля

лгебры Буля названы так по имени открывшего их математика Джона Буля (середина XIX в.). Их эффективно применяют в математической логике, теории вероятностей и других разделах математики; с их помощью описывают работу различных управляющих систем — релейно-контактных и электронных схем, логических сетей, схем функциональных элементов и т.п.; используют в математической кибернетике — науке об управлении, созданной в середине XX в. Норбертом Винером.

ссмотрим некоторые простые задачи, приводящие к алгебрам Буля.

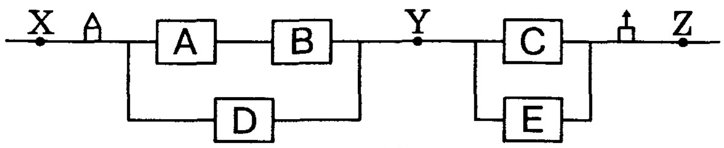

Рис. 38

ример 1. На автомобильной дороге есть 3 опасных участка, A, B и C, которые после дождя могут стать непроходимыми (рис. 38). Кроме того, в тех местах часто бывают густые туманы и другие неприятности. Эти участки можно обойти по другой дороге, но и там есть столь же опасные участки D и E.

ведения о состоянии указанных участков систематически поступают к дежурному ГАИ, который в любой момент должен быть готов ответить на вопрос: можно проехать по трассе или нет? Задача состоит в том, чтобы сконструировать логическое устройство, которое поможет быстро дать правильный ответ.

бозначим через *A* сообщение о состоянии участка A, через *B* — сообщение о состоянии участка B и т.д. Сообщения могут быть двух типов (принимают два значения): *И* — дорога в нормальном состоянии и *Л* — дорога непроходима. Пусть произведение *AB* обозначает сообщение, которое характеризует состояние дороги на обоих участках A и B. Если участки A и B проходимы, то проходим и суммарный участок XY (см. рис. 39). Поэтому *AB* принимает значение *И* только в том случае, когда оба сообщения, *A* и *B*, принимают значение *И*. Во всех остальных случаях сообщение *AB* принимает значение *Л*. Короче говоря, мы можем определить произведение *AB с* помощью следующей таблицы:

A	*B*	*AB*
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

(8)

ким образом мы ввели понятие *произведения двух сообщений.*

лее, от Y до Z можно добраться двумя путями, через участок C или участок E. Поэтому вопрос, который нас интересует, можно сформулировать так: можно ли проехать *хотя бы по одному* из этих участков? Пусть сумма $C + E$ обозначает некоторое сообщение, которое характеризует возможность проезда от Y до Z. Именно, $C + E$ принимает значение *И* (путь открыт!) в том случае, когда пригоден для проезда хотя бы один из участков C или D, т.е. одно из сообщений *C* или *E* принимает значение *И).* Итак, мы определяем сумму $C + E$ следующей таблицей:

C	E	$C + E$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

(9)

спользуя эти понятия, мы можем теперь записать сообщение *S*, которое принимает значение *И*, если проезд от X до Z возможен, и значение *Л* в противном случае. Оно имеет вид: $S=(AB+ D)(C + E)$. (10)

опустим, дежурный получил сообщения, имеющие соответствующие значения:

Сообщение	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Значение	**И**	**Л**	**Л**	**И**	**И**

одставив их в формулу (10), он с помощью таблиц (8) и (9) вычислил значение сообщения *S: (ИЛ + И) (Л + И) = (Л + И)И = ИИ = И.* Путь открыт.

самом деле, дежурному вовсе не обязательно все время пользоваться формулой (10). Легко реализовать простейшее техническое приспособление, которое будет работать автоматически. Представьте себе, что на рис. 38 изображена электрическая цепь, которая может быть разомкнута на участках A, B, C, D, E. В обычном режиме цепь замкнута, по ней идет ток и в конечной точке Z горит лампочка. Это означает, что проезд возможен.

случае, если, например, с участка A приходит сигнал *Л* (участок непроходим), то автоматически размыкается электрическая цепь на участке A. Но лампочка продолжает гореть, т.к. в цепи есть ток (проезд еще возможен). Как только лампочка погасла — проезда нет.

ы привели простой пример. В рассматриваемой ситуации дежурный вполне мог обойтись и без столь глубокого логического анализа. Однако подобный анализ совершенно необходим, если мы намереваемся управлять сложными системами, например, дорожной сетью большого города.

атематическую основу наших рассуждений составляют таблицы (8) и (9).

Они определяют операции умножения и сложения на множестве объектов *A, B, C, ...*, каждый из которых может принимать два значения — *И* или *Л*. Такие множества (вместе с указанными операциями) называются *алгебрами Буля*. Точное определение алгебры Буля таково: 1) это множество элементов *A, B, C, ...*, каждый из которых может принимать два значения *И* или *Л*; 2) элементы можно умножать и складывать по формулам (8) и (9); 3) для каждого элемента *A* найдется такой элемент , который принимает противоположное значение:

A	$\bar{A}$
И	*Л*
Л	*И*

)иведем еще некоторые примеры алгебр Буля. Случайные события, рассмотренные в гл. IV, образуют алгебру Буля относительно введенных для них операций сложения и умножения. В математической логике рассматриваются алгебры Буля, элементами которых являются *высказывания*. Каждое высказывание может быть либо истинным (т.е. принимать значение *И)*, либо ложным (т.е. принимать значение *Л*). Высказывание, противоположное высказыванию *A*, обозначается через .*

:овокупность всех подмножеств данного множества образует алгебру Буля относительно операций объединения и пересечения множеств.

)имер 2. Во время допроса каждый из четырех подозреваемых сделал следователю три заявления.

ілет: я не виновен; Туза я не знаю; Серый знает, кто это сделал.

зат: это сделал не я; с Серым я не знаком; это сделал Туз.

із: я не виновен; это сделал Серый; Хват лжет, это сделал не я.

:рый: я не виновен; это сделал Валет; Хват может за меня поручиться.

)и перекрестном допросе каждый из подозреваемых признал, что из трех сделанных им заявлений два верных и одно неверное. Может ли следователь определить преступника на основании полученной информации?

)оанализируем высказывания, сделанные в ходе допроса. Для этого формализуем наши рассуждения.

)бозначим высказывания подозреваемых B_1, B_2, B_3, X_1, X_2, X_3 и т.д. Наша цель — установить, какие из них являются истинными, а какие — ложными. Запись X_1 = *И,* например, будет далее обозначать, что первое высказывание Хвата истинно.

)ежде всего заметим, что первое и третье высказывания Туза логически связаны между собой и, по существу, представляют собой одно и то же утверждение «я не виноват». Поэтому они либо оба истинны, либо оба ложны. Но т.к. из трех высказываний Туза ложное только одно, то остается единственный вариант: оба высказывания, первое и третье, являются истинными. Следовательно, можно записать $T_1 = И$, $T_2 = Л$, $T_3 = И$.

перь ясно, что третье высказывание Хвата (преступник — Туз) является ложным. Поэтому остальные два истинны. Итак, $X_1 = И$, $X_2 = И$, $X_3 = Л$.

скольку высказывание T_2 ложно, то Серый не виновен. Значит, $C_1 = И$. Кроме того, высказывание C_3 ложно, т.к. истинно X_2. Следовательно, $C_2 = И$. Но это означает, что преступник — Валет, т.е. $B_1 = Л$, $B_2 = И$, $B_3 = И$.

 существу, подобный логический анализ проводит всякий опытный следователь. Однако в реальных делах часто бывает весьма большое число участников (свидетелей, подозреваемых и т.д.); следовательно, приходится анализировать большое число высказываний. В таких случаях результаты представляют в виде таблиц, диаграмм, схем и т.п. Так, результаты наших рассуждений можно оформить в следующей таблице:

	1	2	3
В	Л	И	И
Х	И	И	Л
Т	И	Л	И
С	И	И	Л

ы последовательно заполняли третью, вторую, четвертую и первую строки.

я анализа большого числа данных обычно используют компьютеры, которые способны перебрать практически любое число вариантов. Процедура перебора осуществляется с помощью формул алгебры Буля. Для каждого из вариантов машина проверяет, выполняются ли заданные связи между высказываниями, которые записываются на языке алгебры Буля. В рассмотренной нами задаче число различных вариантов заполнения таблицы равно 81 (докажите это, используя правило умножения из гл. III), а связи между высказываниями таковы: $T_1 = T_3$, $X_3 =$, $= C_1$,$C_2 =$.

апомним, что через обозначается высказывание, противоположное высказыванию *А*.) В заключение отметим, что, с одной стороны, алгебры Буля представляют собой теоретическую (логическую) основу для расчета различных электронно-вычислительных схем, т.к. любая электрическая цепь может находиться в одном из двух состояний: либо она пропускает ток, либо нет. Это и позволяет считать цепи элементами алгебры Буля со значениями *И* или *Л*. *С* другой стороны, с помощью ЭВМ можно эффективно анализировать различные ситуации, подобные описанным выше.

Глава IX О ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

§1. Математика помогает принять решение

:якое целенаправленное действие человека предваряется некоторым умственным усилием, размышлением, результатом которого является принятие решения. Принятие решений — одно из важнейших занятий человека на протяжении всей его жизни.*

Іас не интересуют рефлекторные, спонтанные действия, которые человек производит не размышляя, например, при внезапном падении, под влиянием сильных чувств, сильного голода, во время длительной работы на конвейере и т.п.

іждый день мы принимаем множество различных решений, от самых простых до весьма сложных. Какую одеть рубашку? Что купить на обед? В какой вуз поступить? Какому сотруднику поручить работу? Такие решения мы принимаем на основании личного опыта и здравого смысла. Однако в сложных ситуациях этого недостаточно, и для принятия ответственных решений приходится использовать специальные методы и расчеты. Допустим, например, что Вы отвечаете за организацию работы большого отдела, или за проведение операции по поимке группы особо опасных преступников. Чтобы спланировать такую операцию, нужно принять много ответственных решений, учесть множество факторов: определить число сотрудников и групп, участвующих в операции, спланировать их действия, обеспечить связь, учесть географические условия, погоду и многое другое. От правильности Ваших решений будет зависеть жизнь многих людей, поэтому, помимо интуиции и опыта, Вы должны использовать и тщательный расчет. Во многих случаях здесь помогают специальные математические методы, моделирующие ту или иную ситуацию.

обая *целенаправленная* человеческая деятельность сопровождается принятием решений, число которых может быть очень большим. Решения приходится принимать в неопределенных или конфликтных ситуациях, в условиях риска и т.д. Прежде всего это относится к планированию сложных систем, которые возникают в экономике, экологии, социальной сфере. Примерами сложных систем являются крупные индустриальные производства, системы национальной безопасности, транспортные системы, космические программы, страховые компании, государственные социальные программы и т.д. Практически во всех задачах, связанных с планированием, мы не можем заранее точно предсказать результат и не в состоянии учесть все последствия. Более того, часто практически невозможно собрать и переработать всю необходимую информацию, основываясь только на личном опыте и интуиции. Поэтому при планировании неизбежно применение математических методов и ЭВМ. В каждой области человеческой деятельности выработаны свои методы, помогающие принять правильное решение. Но, хотя экономисты, юристы, управленцы, военные и т.д. принимают решения каждый в своей сфере деятельности, методы и критерии, которыми они руководствуются при принятии и обосновании решений, по существу, одни и те же. Эти методы и составляют предмет *теории принятия решений.*

роцесс принятия решения можно условно разбить на части: определение цели и критериев, выбор принципа оптимальности, построение моделей, разработка методов поиска оптимального решения, экспертиза моделей, планирование, выбор приемлемых альтернативных вариантов и их сравнение, нахождение линии оптимального поведения в рамках выбранного варианта, определение потребностей, распределение интеллектуальных и материальных ресурсов и т.д. При анализе той или иной ситуации выбирают соответствующий критерий оценки, который называют *показателем эффективности* или *целевой функцией.* Это может быть, например, средняя прибыль предприятия, количество сбитых самолетов, время безотказной работы двигателя, но также и вероятность получения заданной средней прибыли, вероятность обнаружения самолета, вероятность выхода из строя двигателя в течение определенного промежутка времени. Принимаемое решение должно быть таковым, чтобы показатель эффективности был как можно лучше.

ентральное место при принятии решения занимает выбор наилучшего или оптимального варианта. Здесь весьма эффективно используют математические методы. Один из наиболее эффективных методов состоит в том, что строится математическая модель рассматриваемой ситуации или рассматриваемого объекта. Математическая модель может представлять собой алгебраическое уравнение, систему уравнений или неравенств, числовую таблицу, график, дифференциальное уравнение, набор вероятностей каких-либо событий и т.д. Построение модели, адекватно отражающей объект, — дело непростое и требует специальных знаний и хорошей математической подготовки.

ормальная ситуация состоит в том, что *лицо, принимающее решение* (сокращенно ЛПР; это может быть руководитель предприятия, командир подразделения, бизнесмен, начальник УВД, простой гражданин) верит в науку и понимает, что нужно использовать научные методы. ЛПР делает заказ на исследование ситуации группе ученых (аналитиков). Он же определяет критерии оценки, которых может быть несколько. Таким образом, выбор критериев может априорно оказаться субъективным. Более того, критерии могут оказаться противоречивыми. Например, руководитель предприятия может ориентироваться не только на получение максимальной прибыли, но и на социальный аспект, рассматривая в качестве одного из критериев число рабочих на предприятии, число молодых рабочих и т.п.

группе аналитиков, исследующих ситуацию, должны быть не только математики, но и психологи, юристы, специалисты, исследующие и составляющие правила рационального выбора. Как выглядит результат работы экспертов-аналитиков? Они могут выделить наилучший вариант решения; предложить несколько его вариантов, упорядочив их по какому-либо критерию или по совокупности критериев; в случае, если рассматривается решение в часто повторяющейся ситуации, то может быть предложено типовое правило выбора наилучшего решения. Если принимающий решение хорошо ориентируется в проблеме, то он будет уверенно использовать набор различных вариантов решения в каждой из возникающих ситуаций. Для выбора решения ему нужно лишь помочь организовать процесс сбора, подготовки и систематизации информации. Но часто возникает ситуация, когда ЛПР не ориентируется во всех тонкостях процесса, например, когда речь идет о выборе проекта какой-либо сложной технической системы (операционная система Windows, космический летательный аппарат и т.п.). Тогда у него должно быть некое решающее правило, помогающее ему принять решение. Это правило помогает выработать теория принятия решений. Эксперименты показали, что в задачах принятия решений возможности человека ограничены из-за ограниченной емкости его кратковременной памяти. Поэтому часто решение принимается после продолжительного диалога между ЭВМ и человеком. Создание человеко-машинных или диалоговых процедур — самостоятельная сложная задача, которая входит составной частью в теорию принятия решений. Новые возможности ЭВМ позволили создать так называемые системы поддержки принятия решений, т.е. человеко-машинные системы, помогающие ЛПР. Эти системы содержат базы знаний об исследуемой области, набор ситуаций и рекомендуемых к ним вариантов решения, опыт других ЛПР в этой области, модели и решающие правила и т.п.

метим, наконец, что качество принятого решения зависит от качества образования ЛПР, его склонности к риску, от качества экспертов и аналитиков, от организации и условий их работы и т.п.

помните!

ıкакой, даже самый тщательный выбор решения не гарантирует успех навечно. Через определенный период времени каждое решение надо пересматривать. Научные методы лишь помогают принять решение. Никакая ЭВМ не сможет принять решение вместо человека и взять на себя ответственность за последствия этого решения.

§2. Извлечение из теории игр

ак мы уже отмечали, математические методы позволяют во многих ситуациях найти оптимальное решение. Число таких математических методов довольно велико, и многие из них весьма сложны. В этой книге мы продемонстрируем лишь некоторые из них, причем в самых простых ситуациях. Тем не менее, внимательный читатель, не имеющий предубеждения к математике, сможет почерпнуть много полезного и применить эти методы в своей работе.

асто решения приходится принимать в конфликтной ситуации, когда сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих разные цели. Такие ситуации возникают очень часто: военная сфера, конкуренция в экономике, спортивные состязания, судебная процедура и т.д. Математическая теория, анализирующая конфликтные ситуации, называется теорией игр. Игрой называется модель конфликтной ситуации. Покажем на простом примере, как строится и работает такая модель.

оенная» игра

нас имеется два вида вооружения — A_1 (зенитки) и A_2 (ракеты типа «земля-воздух»); у противника — два типа самолетов $Б_1$ и $Б_2$. Ход противника состоит в том, что он выбирает один из своих самолетов и посылает его бомбить нашу базу. Следовательно, у него 2 хода — $Б_1$ и $Б_2$. Наш ответный ход состоит в том, что мы выбираем один из видов вооружения и пытаемся сбить самолет. Следовательно, у нас тоже 2 хода — A_1 и A_2. Эту ситуацию можно смоделировать игрой 2 2, в которой 2 игрока — мы (игрок A) и противник (игрок $Б$). Прежде всего установим правила игры. Это означает, что нужно назначить *платежи*, т.е. указать, сколько каждый игрок выигрывает или проигрывает, сделав тот или иной ход.* Обычно указывают выигрыши игрока A. Выигрышем может быть какая-то сумма денег, число баллов, вероятность попадания в цель и т.д. В нашем случае возьмем в качестве платежей вероятности поражения самолетов. Пусть оружие A_1 поражает самолеты $Б_1$ и $Б_2$ с вероятностями 0,5 и 0,6, а оружие A_2 — с вероятностями 0,6 и 0,7 соответственно. Составим *платежную матрицу,* т.е. таблицу, в которой укажем выигрыши первого игрока:

	$Б_1$	$Б_2$
A_1	0,5	0,6
A_2	0,6	0,7

Мы рассматриваем так называемую антогонистическую игру, в которой проигрыш одного игрока равен выигрышу другого.

авная идея теории игр состоит в том, что игрок *А* считает своего противника не глупее себя, поэтому при каждом своем ходе он рассчитывает получить хотя бы наименьший выигрыш. Наименьший выигрыш при первом ходе игрока *А* — это наименьшее число в первой строке матрицы, т.е. 0,5. Обозначим это число $_1$. Наименьший выигрыш игрока *А* при втором ходе будет $_2$ = 0,6, т.е. наименьшее число во второй строке платежной матрицы. Но из двух ходов игрок *А* должен сделать тот, при котором его наименьший выигрыш будет больше, т.е. 0,6. Обозначим это число через . В то же время второй игрок должен действовать так, чтобы его наибольший проигрыш был как можно меньше. Наибольший проигрыш игрока *Б* при первом ходе будет $_1$ = 0,6 (наибольшее число в первом столбце); при втором ходе — $_2$ = 0,7 (наибольшее число во втором столбце). Следовательно, игрок Б должен сделать первый ход, тогда его проигрыш будет не более = 0,6. Запишем эти числа в таблицу:

	$Б_1$	$Б_2$	
A_1	0,5	0,6	$\alpha_1 = 0,5$
A_2	0,6	0,7	$\alpha_2 = 0,6$ $\alpha = 0,6$
	$\beta_1 = 0,6$	$\beta_2 = 0,7$	
	$\beta = 0,6$		

еличина называется *нижней ценой игры.* или *максимином,* величина — *верхней ценой игры* или *минимаксом.* Итак, *оптимальная стратегия* игрока *А* — сделать ход A_2, а *оптимальная стратегия* игрока *Б* — сделать ход $Б_1$. В этом случае наименьший выигрыш игрока *А* будет максимальным — 0,6, а наибольший проигрыш игрока Б — минимальным, т.е. тоже 0,6. Легко проверить, что если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то и другому тоже невыгодно отклоняться от нее. В рассмотренной игре получилось так, что = . В этом случае говорят, что игра имеет *седловую точку в чистых стратегиях* (у нас она 0,6). Как мы видим, в игре с седловой точкой оптимальные стратегии игроков описываются весьма просто. При этом существенно то, что при повторении игры при тех же условиях игроки должны делать те же самые ходы.

следующем примере выбор оптимальной стратегии более сложен.

гра «Поиск»

ети играют в «преступника» и «милиционера». Игрок *А* прячется, *Б* ищет. Игрок *А* имеет два места, $П_1$ и $П_2$, где он может спрятаться. Игрок *Б* знает, где они находятся. Каждый из них может по своему усмотрению выбрать то или иное место (один — чтобы спрятаться, другой — чтобы найти). Таким образом, каждый игрок имеет по два хода.

рок А:

рвый ход (A_1) — спрятаться в $П_1$, второй ход (A_2) — спрятаться в $П_2$.

рок Б:

рвый ход ($Б_1$) — искать в $П_1$, второй ход ($Б_2$) — искать в $П_2$.

перь назначим платежи. Если *Б* нашел *А* в первом или втором убежище, то *А* платит ему 1 руб., т.е. выигрыш игрока *А* равен –1. Если Б не находит *А*, то он платит игроку *А* 1 руб. Поэтому платежная матрица, состоящая из выигрышей игрока *А*, выглядит так:

	$Б_1$	$Б_2$
A_1	–1	1
A_2	1	–1

айдем как и выше, числа и . Получается следующая таблица:

	$Б_1$	$Б_2$	
A_1	–1	1	$\alpha_1 = -1$
A_2	1	–1	$\alpha_2 = -1$ $\alpha = -1$
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	
	$\beta = 1$		

ссмотрим два принципиально разных случая.

Играют один раз. Тогда, поскольку $_1$ = $_2$ = , игроку *А* совершенно безразлично, какой шаг делать, A_1 или A_2. В любом случае его минимальный выигрыш не меньше –1. То же самое можно сказать и о поведении игрока *Б*: как бы он не ходил, его максимальный проигрыш не больше 1.

Игра повторяется многократно. Тогда игрок *А* не может делать все время один и тот же ход, иначе его противник разгадает стратегию и начнет выигрывать. Следовательно, игрок *А* должен чередовать свои ходы. Но если он будет чередовать их в каком-то определенном порядке, то противник через некоторое время разгадает его тактику и опять начнет выигрывать. Поэтому игрок *А* должен вести себя как можно более непредсказуемо, т.е. выбирать каждый последующий ход каким-то случайным образом. Это можно делать с помощью монеты (орел-решка) или игральной кости (чет-нечет).

рассмотренной только что игре ходы каждого игрока имеют одинаковую цену, т.е. равноправны. Следовательно, нет никаких оснований предпочесть один ход (например, A_1) другому (A_2). Именно поэтому игрок определяет свою стратегию с помощью монеты или игральной кости.

едующая игра показывает, как выбрать стратегию в еще более сложной ситуации.

ра «Коммерсант»

ɔммерсант торгует темными очками и зонтиками, поэтому его успех зависит от погоды. В хорошую погоду он продает в день 1000 очков и 100 зонтиков, в пасмурную — 500 зонтиков. Зонтики он покупает по 50 центов, продает по одному доллару; очки покупает по 20 центов, продает по 50 центов. Коммерсант каждый день закупает товар на 250 долл., а на другой день старается продать его полностью (оставшийся товар пропадает). Он не доверяет метеосводкам и считает, что господь бог назначает хорошую или плохую погоду с помощью монеты (орел-решка). Проблема состоит в том, чтобы сделать закупку оптимальным образом.

ıписанную ситуацию можно рассматривать как игру с двумя игроками, причем вторым игроком является природа (или погода). Это игра 2 2, т.к. у каждого из игроков есть два хода.

игрока *А* (коммерсанта): первый ход *($А_1$)* — закупка в расчете на дождь, второй ход *($А_2$)* — закупка в расчете на ясную погоду.

игрока *Б* (природа): первый ход *($Б_1$)* — дождь, второй ход ($Б_2$) — ясная погода.

качестве платежей естественно взять выигрыш игрока *А*, т.е. прибыль коммерсанта. В расчете на дождь он на все 250 долл. закупает только зонтики (500 штук). Если будет дождь, то он продаст все зонтики и получит прибыль 250 долл. Если же будет ясная погода, то ему удасться продать только 100 зонтиков на 100 долл., т.е. он понесет убыток в 150 долл. Можно считать, что в этом случае его прибыль отрицательная, т.е. –150 долл.

расчете на ясную погоду коммерсант закупает на 250 долл. 1000 пар очков и 100 зонтов. В ясную погоду он все это продаст за 600 долл., т.е. получит 350 долл. прибыли. Но в дождь он сумеет продать из всего этого товара только 100 зонтов на 100 долл., т.е. понесет убыток в 150 долл. (или получит –150 долл. прибыли).

атрица игры выглядит следующим образом:

	Дождь $Б_1$	Ясно $Б_2$	
Закупка в расчете на дождь A_1	250	–150	$\alpha_1 = -150$
Закупка в расчете на «ясно» A_2	–150	350	$\alpha_2 = -150$ $\alpha = -150$
	$\beta_1 = 250$ $\beta = 250$	$\beta_1 = 350$	

ы видим, что , т.е. седловой точки нет. Следовательно, игрок *А* не может выбрать определенную стратегию и должен ходы чередовать. Далее заметим, что т.к. все числа $_1$, $_2$, $_1$, $_2$ различны, то ходы неравноправны. Поэтому возникает вопрос: в какой пропорции их сочетать, чтобы получить оптимальную стратегию?

ория игр дает следующее правило для определения искомой пропорции. Разность платежей, записанных в первой строке равна 400; разность платежей, записанных во второй строке, равна 500; отношение этих чисел равно 4:5, поэтому первый и второй ходы следует применять в пропорции 5:4, т.е. из каждых девяти ходов должно быть 5 первых и 4 вторых. Используя понятие частоты, введенное в гл. II, §1, мы можем сказать, что относительная частота первого хода 5/9, а второго — 4/9. Это означает, что коммерсант должен вложить 5/9 своего капитала (138,88 долл.) в товары для дождливого дня (только зонтики) и 4/9 капитала (111,12 долл.) в товары для ясного дня. Среди последних, согласно условию задачи, пятую часть — 22,22 долл. — занимают зонтики. Итак, зонтиков следует закупить на 161,1 долл., очков — на 88,9 долл.

о же получит коммерсант в результате применения этой оптимальной стратегии? Теория игр дает ответ и на этот вопрос. Найдем так называемую цену игры: 250 + (–150) = 72,22$, которая представляет собой среднее арифметическое платежей, стоящих в первом столбце [см. формулу (4) из §1 гл. II]. Следовательно, применяя найденную оптимальную стратегию, коммерсант будет получать устойчивую среднюю прибыль в 72,22 долл.

Замечания.

В теории игр рассматриваются игры с любым числом ходов, с несколькими игроками, с несколькими платежными матрицами, с коалициями игроков, с различными правилами игры, многошаговые, динамические, иерархические игры и т.д.

Существуют формулы, по которым, зная возможные стратегии игроков и матрицы платежей, можно найти цену игры и оптимальные стратегии для каждого игрока. В играх с большим объемом вычислений используют ЭВМ.

Считается, что каждый игрок не знает о планах другого. В случае, если игроки заранее договариваются между собой о выигрыше (как некоторые футбольные клубы), то применять математические методы для выбора оптимальной стратегии в такой игре бессмысленно.

Задачи для самостоятельного решения

Полк должен атаковать и захватить одно из двух оборонительных сооружений противника. Противник может успешно оборонять лишь одно из этих сооружений, но не оба сразу. Известно, что одно из сооружений в 3 раза важнее второго. Каковы оптимальные стратегии противников?

Скупой пассажир размышляет, купить ему билет или нет? Если он покупает билет, но контролера нет, то он теряет 1 руб. В случае, если он покупает билет и контролер его проверяет, то получается игра «вничью». За безбилетный проезд пассажир платит 10 руб. плюс стоимость проезда. В случае удачного проезда без билета пассажир считает, что получил 1 руб. прибыли. Найдите оптимальные стратегии для пассажира и контролера и цену игры.

§3. Метод собственного вектора

атематические методы позволяют эффективно анализировать весьма сложные и большие системы, модели которых состоят из нескольких уровней. Например, известная модель мировой динамики Форрестера и Медоуза рассматривает ресурсы, население, уровень жизни, капиталовложения, загрязнение среды. Анализ состояния окружающей среды приводит к модели, уровнями которой могут быть: 1) типы загрязнителей SO_2, NO_4, CO_2, CO, стоки вод, твердые отходы, земля), 2) способы очистки, 3) очистительные устройства. Изучение вопроса об общем благосостоянии страны целесообразно проводить по таким уровням: 1) экономика, оборона, здравоохранение; 2) отрасли промышленности; 3) ресурсы; 4) демография. Уровни располагаются по их значимости, т.е. образуют *иерархию.* Анализ таких *иерархических систем,* сводится прежде всего к тому, чтобы для каждого уровня выбрать *приоритеты* и в соответствии с ними расположить объекты этого уровня. Основная цель анализа: выяснить, насколько влияют факторы самого низкого уровня на общую цель. Покажем на конкретном примере, как это делают *методом собственного вектора.* Этот метод позволяет расположить рассматриваемые объекты по степени их значимости путем попарного сравнения по различным независимым признакам.

дача «Конкурс»

а должность юриста крупного предприятия претендуют трое (обозначим их *А, В, С).* Директор предприятия в большом затруднении, т.к. среди претендентов нет такого, кто превосходил бы остальных по всем параметрам. Один имеет больший опыт, зато другой имеет лучшее образование и опубликовал несколько научных работ; третий известен своей исключительной ответственностью и добросовестностью и т.д. Как выбрать *наилучшего по совокупности качеств?* Тут директор вспомнил, что в институте экологии и права, где он учился, им преподавали математику, и, в частности, рассказывали о применении математических методов в теории принятия решений. Покопавшись в своих архивах, директор нашел лекции по математике и решил воспользоваться методом собственных векторов, применяемом при изучении иерархических систем.

)-первых, он выбрал 3 основных критерия, по которым будут сравниваться кандидаты: профессионализм и опыт (критерий K_1), ответственность и добросовестность (K_2), организаторские способности (K_3). По такому важному критерию как честность и порядочность претендентов сравнить было невозможно — у всех троих в характеристиках было написано по этому поводу практически одно и то же. Первая задача состояла в том, чтобы расположить эти критерии в порядке важности. Вторая задача состояла в том, чтобы сравнить кандидатов между собой по каждому из этих критериев, приписав каждому из них определенный балл.

<u>:ап первый:</u> сравнение критериев.

:ходя из своего жизненного и профессионального опыта, директор полагал, что критерий K_1 важнее, чем критерии K_2 и K_3, причем, если сравнивать их количественно, в баллах, то $K_1 : K_2 \sim 5 : 4$, $K_1 : K_3 \sim 5 : 3$. При этом, если, сравнивать последние два качества между собой, то они примерно равноценны, т.е. можно считать, что $K_2 : K_3 \sim 1 : 1$. Далее директор составил матрицу K размером 3 3, т.е. таблицу с тремя строками и тремя столбцами, куда занес отношения указанных баллов:

K:

	K_1	K_2	K_3
K_1	1	5/4	5/3
K_2	4/5	1	1
K_3	3/5	1	1

ісло, стоящее на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, обычно обозначают a_{ij}. Поэтому у нас $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 1$, $a_{12} = 5/4$, $a_{13} = 5/3$, $a_{23} = 1$, и т.д. Заметьте, что числа a_{ij} и a_{ji} являются взаимно обратными.

:е дальнейшие вычисления будем проводить вместе с директором приближенно, округляя до сотых долей, причем нам понадобятся только числа $a_{12} = 1{,}25$; $a_{13} = 1{,}67$ и $a_{23} = 1$.

)ежде всего находят так называемое *главное собственное число* матрицы K по формуле

$$\lambda = \left(\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}}\right)^{1/3} + \left(\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)^{1/3} + 1. \qquad (1)$$

)льзуясь калькулятором, получаем:

$$\lambda = \left(\frac{1{,}67}{1{,}25 \cdot 1}\right)^{1/3} + \left(\frac{1{,}25 \cdot 1}{1{,}67}\right)^{1/3} + 1 = 1{,}10 + 0{,}91 + 1 = 3{,}01.$$

:перь находим координаты ${}_1$, ${}_2$ и ${}_3$ так называемого *главного собственного вектора матрицы K* по формулам

$$\omega_1 = \frac{\Delta}{D},\ \omega_2 = \frac{(\lambda-1)a_{23} + a_{13}/a_{12}}{D},\ \omega_3 = \frac{(\lambda-1)^2 - 1}{D},\ (2)$$

е

$$\Delta = a_{12}a_{23} + a_{13}(\lambda - 1), \qquad (3)$$

$$D = a_{12}a_{23} + a_{13}a_{23}(\lambda - 1) + a_{13}/a_{12}(\lambda - 1)^2 - 1. \quad (4)$$

эдставляя сюда наши значения a_{12} = 1,25; a_{13} = 1,67; a_{23} = 1, последовательно получаем:

$$\Delta = 1{,}25 \cdot 1 + 1{,}67 \cdot 2{,}01 = 1{,}25 + 3{,}35 = 4{,}60;$$

$$D = 1{,}25 + 1{,}67 \cdot 2{,}01 + 1{,}56 \cdot 0{,}8 \cdot (2{,}01)^2 - 1 = $$
$$= 4{,}60 + 1{,}33 \cdot 4{,}04 = 4{,}60 + 5{,}39 - 1 = 8{,}99;$$

$$\omega_1 = \frac{4{,}60}{8{,}99} = 0{,}51;\ \omega_2 = \frac{2{,}01 + 1{,}33}{8{,}99} = 0{,}37;$$

$$\omega_3 = \frac{2{,}01^2 - 1}{8{,}99} = 0{,}34.$$

ѵперь собственный вектор ($_1$, $_2$, $_3$*)* нужно *нормировать*, т.е. каждую координату разделить на сумму всех координат. Имеем:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0{,}51 + 0{,}37 + 0{,}34 = 1{,}22;$$

$$\frac{\omega_1}{1{,}22} = \frac{0{,}51}{1{,}22} = 0{,}42;\ \frac{\omega_2}{1{,}22} = \frac{0{,}37}{1{,}22} = 0{,}30;$$

$$\frac{\omega_3}{1{,}22} = \frac{0{,}34}{1{,}22} = 0{,}28.$$

ʼмма полученных чисел равна единице. Обозначим вектор, координатами которого являются эти числа, также буквой : $\vec{\omega}(0{,}42;\ 0{,}30;\ 0{,}28)$.

ːот вектор называется *вектором приоритетов.* Согласно теории, качества K_1, K_2 и K_3 можно расположить по приоритету с баллами 0,42; 0,30 и 0,28 соответственно.

ːап второй: сравнение претендентов по качеству K_1. Из имеющихся у него документов (характеристик, рекомендаций, отзывов, научных публикаций) директор сумел сравнить между собой каждую пару претендентов по качеству K_1. У него получилось $A : B$ ~ 1 : 2 (т.е. у B балл в 2 раза выше, чем у A), $A : C$ ~ 1 : 3, $B : C$ ~ 2 : 1. Поэтому матрица K_1 попарных сравнений получилась такая

K_2:

	A	B	C
A	1	1/2	1/3
B	2	1	2
C	3	1/2	1

ɜ нее видно, что a_{12} = 0,5, a_{13} = 0,33, a_{23} = 2. Подставляя эти числа в формулы (1)-(4), как и в предыдущем случае находим:

$$\lambda = \left(\frac{0,33}{0,5\cdot 2}\right)^{1/3} + \left(\frac{0,5\cdot 2}{0,33}\right)^{1/3} + 1 = 0,69 + 1,44 + 1 = 3,13;$$

$$\Delta = 0,5\cdot 2 + 0,33\cdot 2,13 = 1,71;$$

$$D = 1 + 0,33\cdot 2\cdot 2,13 + 0,33\cdot 2\cdot 2,13^2 - 1 = 4,44;$$

$$\omega_1 = \frac{1,71}{4,44} = 0,39;\quad \omega_2 = \frac{2,13\cdot 2 + 0,33\cdot 2}{4,44} = \frac{4,93}{4,44} = 1,11;$$

$$\omega_3 = \frac{2,13^2 - 1}{4,44} = \frac{3,54}{4,44} = 0,80;$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2,30;$$

$$\frac{\omega_1}{2,30} = 0,17;\quad \frac{\omega_2}{2,30} = 0,48;\quad \frac{\omega_3}{2,30} = 0,35.$$

гак, в этом случае вектор приоритетов будет (0,17; 0,48; 0,35), т.е., если сравнивать, претендентов по качеству K_1, то они получают баллы 0,17, 0,48 и 0,35 соответственно.

тап третий: сравнение претендентов по качеству K_2: Как было видно из документов, каждые двое из претендентов работали некоторое время в одной и той же фирме и вели примерно одинаковые дела. Просмотрев последние и оценив качество исполнения, директор получил следующие отношения при попарном сравнении по критерию K_2: $A : B \sim 3 : 2$, $A : C \sim 1 : 1$, $B : C \sim 3 : 4$. Запишем матрицу K_2 попарных сравнений:

K_2:

	A	B	C
A	1	3/2	1
B	2/3	1	3/4
C	1	4/3	1

$$\lambda = \left(\frac{1}{1,5\cdot 0,75}\right)^{1/3} + \left(\frac{1,5\cdot 0,75}{1}\right)^{1/3} + 1 = 3,00;$$

меем: $a_{12} = 1,5$, $a_{13} = 1$, $a_{23} = 0,75$,

$$\Delta = 1,5\cdot 0,75 + 1\cdot 2 = 3,125;$$

$$D = 1,125 + 0,75\cdot 2 + 0,67\cdot 2^2 - 1 = 4,295;$$

$$\omega_1 = \frac{3,125}{4,295} = 0,73;\quad \omega_2 = \frac{2\cdot 0,75 + 0,67}{4,295} = \frac{4,93}{4,44} = 0,51;$$

$$\omega_3 = \frac{4-1}{4,295} = 0,70;$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1,94;$$

$$\frac{\omega_1}{1,94} = 0,38;\quad \frac{\omega_2}{1,94} = 0,26;\quad \frac{\omega_3}{1,94} = 0,36.$$

ектор приоритетов будет (0,38; 0,26; 0,36), так что по качеству K_2 претенденты получают баллы 0,38, 0,26 и 0,36 соответственно.

ап четвертый: сравнение по качеству K_3. Поскольку никто из претендентов прежде не находился на руководящей работе, то директор, исходя из весьма туманных соображений и своей интуиции, смог только оценить вероятность того, что тот или иной претендент станет хорошим руководителем. Получились вероятности 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Таким образом, удалось обойтись без попарного сравнения. Разделив каждое из указанных чисел на их сумму 0,8 + 0,7 + 0,6 = 2,1, находим вектор приоритетов: (0,38; 0,33; 0,29).

ап пятый: получение окончательно результата. Согласно теории, окончательное распределение мест получается следующим образом. Составим из векторов , и матрицу 3 3, записав их координаты в столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}38 & 0{,}38 \\ 0{,}48 & 0{,}26 & 0{,}33 \\ 0{,}35 & 0{,}36 & 0{,}29 \end{pmatrix}$$

тем умножим эту матрицу на матрицу-столбец

$$\begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}30 \\ 0{,}28 \end{pmatrix},$$

ставленную из координат вектора . По правилу умножения матриц,

$$\begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}38 & 0{,}38 \\ 0{,}48 & 0{,}26 & 0{,}33 \\ 0{,}35 & 0{,}36 & 0{,}29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}30 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}17 \cdot 0{,}42 + 0{,}38 \cdot 0{,}30 + 0{,}38 \cdot 0{,}28 \\ 0{,}48 \cdot 0{,}42 + 0{,}26 \cdot 0{,}30 + 0{,}33 \cdot 0{,}28 \\ 0{,}35 \cdot 0{,}42 + 0{,}36 \cdot 0{,}30 + 0{,}29 \cdot 0{,}28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}071 + 0{,}114 + 0{,}106 \\ 0{,}202 + 0{,}078 + 0{,}092 \\ 0{,}147 + 0{,}108 + 0{,}081 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}291 \\ 0{,}372 \\ 0{,}336 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}29 \\ 0{,}37 \\ 0{,}34 \end{pmatrix}.$$

так, окончательное распределение мест следующее:

етендент *A* набрал 0,29 балла, претендент *B* — 0,37 балла, претендент *C* — 0,34 балла. Метод собственного вектора отдал предпочтение претенденту *B*.

едупреждение: не попадайте под гипнотическое воздействие чисел! Несмотря на объективность математических методов, полученный результат нельзя рассматривать как истину в последней инстанции. Хотя бы потому, что выбор исходного материала (т.е. чисел a_{12}, a_{13} и a_{23}, входящих в матрицы K_1, K_2, K_3), был в значительной степени субъективным. Поэтому и претендент *C*, имеющий примерно такой же балл, как и *B*, также имеет шанс на успех, в особенности, если он не курит или согласен на меньшую зарплату.

Замечания

Описанным методом можно сравнивать любое число кандидатов и по любому числу критериев, однако при большом их числе придется пользоваться другими формулами, приведенными, например, в книге Т. Саати «Принятие решений».

Вычислительные трудности, разумеется, можно переложить на ЭВМ.

Мы сознательно упростили ситуацию, опустив некоторые тонкости, связанные с оценкой метода. О них также можно прочитать в книге Т. Саати.

Еще раз отметим, в чем сила описанного метода. Сравнить каждые два объекта между собой по одному критерию довольно просто, и это дает возможность сравнительно легко заполнить матрицу попарных сравнений. Но затем, с помощью несложных вычислений, мы находим ответ уже на довольно трудный вопрос: какой из рассматриваемых объектов превосходит остальные по совокупности всех критериев.

етод собственного вектора можно применять для анализа самых разнообразных проблем, о которых шла речь в начале параграфа. Например, автор упомянутой выше книги проанализировал этим методом рост терроризма для агентства по контролю над вооружениями и разоружением в Вашингтоне.

качестве самостоятельной задачи попробуйте оценить претендентов на должность мэра Вашего города, выбрав критерии по своему усмотрению.

Глава X ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ифагор Самосский родился в период с 530 до 510 г. до н.э. Хотя мы привыкли считать Пифагора прежде всего математиком, для своих современников он был прежде всего религиозным пророком, «выдающимся софистом», как называл его историк Геродот, а некоторые почитали Пифагора как святого.

эту эпоху греческая математика только зарождалась, и главным ее источником ученые считают математику древнего Египта и Вавилона. Косвенно этот исторический факт подтверждается тем, что между египетской, вавилонской и греческой математикой того периода имеется много точек соприкосновения.

ифагор был одним из первых, благодаря кому достижения математики предшествующих цивилизаций проникли в древнюю Элладу. По преданию, Пифагор много путешествовал, провел 22 года в Египте и 12 лет в

Вавилоне, где он постигал тайны математики, музыки и астрономии. Вернувшись на родину, он основал философскую школу религиозного толка, объединившую группу философов софистов, которые занимались геометрией, арифметикой, астрономией и музыкой (так называемый «квадривий»). Пифагорейцы, как и другие философы, хотели постигнуть гармонию мира, т.е. познать законы природы. Но в отличие от философов других направлений, они полагали, что та логическая гармония, которая имеется в математике, существует неспроста, а отражает свойства мироздания. Поэтому пифагорейцы искали законы природы в свойствах чисел и геометрических фигур и для них математика имела прежде всего мистическое значение. (По-видимому, в душу Пифагора глубоко проникли тот мистицизм и та таинственность, которыми египетские жрецы окружали науку, ревниво оберегая ее от непосвященных.) Пифагорейцы сделали мало математических открытий. Многое из того, что им приписывается, было известно до них. В частности, известную нам теорему о сумме квадратов катетов прямоугольного треугольника они приписывали Пифагору, хотя доказано, что ее знали уже вавилонские математики. Наиболее существенным достижением пифагорейцев было открытие иррациональных чисел, которые они представляли в виде несоизмеримых отрезков. Например, диагональ квадрата со стороной единица равна корню из двух, т.е. эти отрезки — сторона и диагональ — несоизмеримы. Скорее всего, пифагорейцам было известно то доказательство иррациональности числа , которое приведено на с. 17.

ифагорейцы вели активную преподавательскую деятельность (их устав запрещал брать плату за уроки!), и во многом благодаря им математика заняла впоследствии в Греции столь значительное место. Последователи пифагорейцев (неопифагорейцы) сделали уже значительные математические открытия.

вклид жил, по-видимому, во времена царя Птолемея I. Точные даты его рождения и смерти неизвестны, предполагают, что он родился в период с 365 по 335, а умер в период с 300 по 275 г. до н.э. Птолемей I был одним из полководцев Александра Македонского и после смерти великого завоевателя получил в управление Египет. Греческая цивилизация проникла в Египет и его новая столица Александрия стала одним из научных центров мира. Известно, что Евклид был профессиональным ученым. Самое известное и выдающееся его произведение «Начала» состоит из тринадцати книг. В них Евклид мастерски изложил все имеющиеся к тому времени сведения по геометрии, добавив многие недостающие теоремы и доказательства. «Изложение Евклида построено в виде строгих логических выводов из системы определений, постулатов и аксиом. В первых четырех книгах рассматривается геометрия на плоскости. Исходя из наиболее простых свойств линий и углов, мы приходим здесь к равенству треугольников, равенству площадей, теореме Пифагора, построению квадрата, равновеликого заданному прямоугольнику, к золотому сечению, кругу и правильным многоугольникам...» ([15], с. 69).

эедание гласит, что Евклид так ответил царю Птолемею, пожелавшему изучить геометрию: «К геометрии нет царской дороги».

эхимед (287-212 гг. до н.э.) был самым выдающимся математиком и механиком древности. Он жил в Сиракузах и был советником царя Герона. Об Архимеде осталось много сведений, прежде всего в произведениях писателей древности — Плутарха, Полибия, Цицерона, Витрувия и др. Имея в виду необычную для того времени склонность Архимеда к практическим делам, Плутарх пишет: «Хотя эти изобретения заслужили ему репутацию сверхчеловеческой проницательности, он не снизошел до того, чтобы оставить какое-либо сочинение, написанное по таким вопросам, а, считая низким и недостойным делом механику и искусство любого рода, если оно имеет целью пользу и выгоду, все свои честолюбивые притязания он основывал на тех умозрениях, красота и тонкость которых не запятнаны какой-либо примесью обычных житейских нужд».

то же время интересной является и характеристика Архимеда, данная современным историком И. Н. Веселовским: «Если придерживаться фактов, то Архимед и начал свою научную деятельность как механик, и закончил ее как механик, и в математических его произведениях механика является могучим средством для получения математических результатов, да и сами эти результаты не являются бесплодно висящими в воздухе, а применяются для обоснования математических теорий».

сновные математические результаты Архимеда связаны с вычислением площадей и объемов различных фигур. Он нашел с помощью правильного 96-угольника (!) очень хорошее приближение для числа . В его трактате «О плавающих телах» находится названная его именем известная теорема о потере веса телами, погруженными в жидкость. Математикам хорошо известна так называемая аксиома Архимеда, гласящая, что отрезок любой длины можно измерить сколь угодно маленьким отрезком.

дним из самых удивительных и значительных изобретений Архимеда в астрономии был построенный им планетарий. Это была полая вращающаяся сфера, внутри которой находился механизм, приводящий в движение макеты Луны, Солнца и пяти планет. Вот свидетельство

Цицерона, видевшего это устройство: «Как только Галл привел сферу в движение, стало видно, как с каждым оборотом Луна поднималась над земным горизонтом вслед за Солнцем, как это бывает каждый день на небе; а тогда можно было видеть, как затмевалось Солнце, а Луна попадала в теневой конус Земли, когда Солнце как раз напротив...» ([14], с. 293).

а могильной плите Архимеда изображен цилиндр с вписанным в него шаром, а эпитафия гласит об одном из самых замечательных открытий Архимеда: объемы этих тел относятся как 3:2.

поллоний Пергский (приблизительно 260-170 гг. до н.э.) был третьим (после Евклида и Архимеда) великим математиком эпохи эллинизма. Его основной труд — «О кониках» — представляет собой трактат из восьми книг о конических сечениях. Напомним, что это эллипсы, гиперболы и параболы (см. сноску на с. 108). Аполлоний настолько подробно исследовал их свойства, что в следующие 18 веков (до Декарта) ничего существенно нового в этом направлении получено не было.

поллоний намного опередил свое время. Его результаты о кривых второго порядка нашли применение в законах движения планет Кеплера (XVII в.). Аполлоний умел, например, при помощи только циркуля и линейки строить окружность, касающуюся трех заданных окружностей. Эта непростая задача (она так и называется: задача Аполлония) до сих пор входит в программу подготовки студентов — будущих учителей математики. Он ввел термины «гипербола», «парабола», «асимптота», которыми мы пользуемся и сейчас. Как и Архимед, он внес существенный вклад в практику вычислений.

ратосфен Киренский жил приблизительно в 276— 194 гг. до н.э., т.е. был современником Архимеда. Он был знаменит как математик, географ, филолог, историк и поэт. Он составил карту мира в предположении, что Земля — шар. Эратосфен считается основателем хронологии, т.е. науки о точном определении исторических дат. Он вычислил наклон эклиптики, расстояния от Земли до Солнца и Луны, длину экватора.

амым большим открытием Эратосфена в арифметике было его знаменитое «решето» (решето Эратосфена), позволяющее выделять простые числа (см. гл. I, § 1). Он нашел также простое механическое решение знаменитой задачи древности об удвоении куба,* т.е. о построении куба с объемом в два раза больше данного. Большую историческую ценность представляет собой дошедшая до нас стихотворная эпиграмма Эратосфена, посвященная этой задаче. В ней он сравнивает свое решение с другими, принадлежащими знаменитым математикам древности: * Так называемая делийская задача.

:ли бы, друг, ты замыслил большое из малого сделать,
уб сотворить ли двойной, иль перестроить объем,
о возможно — и сени расширить, и яму просторней
ыроешь и водоем влагой наполнишь двойной.
эт мой прибор: меж линеек две средние сразу отыщешь,
ежду краями других ты их отметишь концы.
ужды тебе уж не будет в премудром цилиндре Архита,
конусе не для тебя высек триаду Менехм.
с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо,
иркулем вооружась, тонкий изгиб находить.
цвинув отважно линейки, легко мириады построить
редних желанных твоих, с меньшей из данных начав.
настлив ты, царь Птолемей, — ты дал вечно юному
іну
вноблаженному дар сладкий для Муз и царей.*
вс, бог Вселенной!
грядущем пусть с милостью той же он примет
кипетр от царской руки — и да свершится сие.
т же, кто жертву во храме великом увидит, да скажет:
· Дар этот Эратосфен людям, измыслив, принес.

Эратосфен был воспитателем наследника престола — сына царя Птолемея и главой всемирно знаменитой Александрийской библиотеки.

рансуа Виет (1540-1603) — «отец алгебры» — был по образованию юристом и служил при дворе короля Генриха IV. Интерес к математике возник у Виета вследствие его увлечения астрономией. Он усовершенствовал теорию алгебраических (в частности, кубических) уравнений, открыл связь между корнями уравнения и его коэффициентами (формулы Виета). Виет одним из первых начал использовать буквенные обозначения. Он вычислил число с девятью точными знаками, улучшив результат Архимеда, и показал, что

ɔо Виета известна такая история. В 1593 г. один бельгийский математик предложил желающим найти корни уравнения

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + ... - 3795x^3 + 45x = A$$

— некоторое вещественное число).* Виет нашел 23 положительных решения этого уравнения, заметив, что его «страшная» левая часть представляет собой некоторую тригонометрическую формулу.

акого рода публичные вызовы были характерны для той эпохи.

время войны Франции с Испанией, Виет нашел ключ к шифру, который употребляли испанцы, и более того, сумел найти средство следить за последующими изменениями этого шифра.

отландскому лорду **Джону Неперу** (1550-1617) мы обязаны открытием логарифмов. Число *е* назвали неперовым числом в общем-то случайно.

оганн Кеплер (1571-1630) — один из величайших астрономов XVII в., совершивших революцию в науке. Он впервые сформулировал законы движения планет около Солнца, которые потом обосновал Ньютон с помощью своей теории тяготения.

облемы новой астрономии были связаны с большими вычислениями, что заставило Кеплера много заниматься математикой. Его важнейшие математические открытия содержатся в книге «Стереометрия винных бочек», в которой он вычислял объемы тел вращения. По существу, Кеплер использовал идею предельного перехода, рассматривая, например, площадь круга как сумму площадей большого числа маленьких треугольников с вершинами в центре круга. Книга получила широкое распространение, т.к. была написана на доступном для широкого круга читателей языке.

еплер никогда не скрывал, что он приверженец идей Николая Коперника, поэтому католическая церковь его постоянно преследовала. С 1600-го года Кеплер переехал в Прагу, где впоследствии император Рудольф Второй назначил его своим придворным математиком.

о дало Кеплеру возможность спокойно работать до самой смерти.

ворянин из французского города Турени **Рене Декарт** (1596—1650) служил в армии и имел много времени для философских размышлений и занятий математикой. Семнадцатый век был веком великих открытий в естествознании, и в это время математика, служившая основой физики и механики, становится самой авторитетной и почитаемой наукой — становится царицей наук. Логическая стройность математики давала повод к поиску логики в строении Вселенной, к поиску общих рациональных методов в науке. Заслуга Декарта как математика прежде всего в том, что он применил в геометрии хорошо развитые к этому времени алгебраические методы. Свои идеи Декарт изложил в книге «Геометрия», которая была опубликована в 1637 г.

ьер Ферма (1601-1665) известен нашим современникам как выдающийся математик. С его именем связаны две знаменитые теоремы из теории чисел («малая теорема Ферма» и «великая теорема Ферма»), принцип Ферма в оптике; вместе с *Декартом* его считают основоположником координатного метода в геометрии; в переписке Ферма с известным ученым того времени *Блезом Паскалем* (1623-1662) возникли первые теоремы теории вероятностей. Но немногие знают, что по образованию Ферма был юристом и практически всю жизнь проработал в этом качестве советником парламента в Тулузе (Франция). Математикой он занимался на досуге и доказательств, как правило, не писал. После его смерти на полях «Арифметики» Диофанта (III в. н.э.) была найдена его запись о том, что им найдено «поистине удивительное доказательство» известной проблемы из теории чисел: уравнение

$$x^n + y^n = z^n,$$

е n — натуральное число, не имеет целых положительных решений при $n > 2$. Но ни доказательство самого Ферма, ни какое-либо иное доказательство этого утверждения не найдено до сих пор.

саак Ньютон (1643-1727) — один из величайших математиков в истории человечества — родился в Линкольншире (Англия), в семье землевладельца. Он учился в Кембридже, где позже стал профессором. В 1696 г. он занял весьма высокий и ответственный пост начальника монетного двора.

ьютон первым открыл производные, названные им флюксиями. Последние появились в его книге «Математические принципы натуральной философии», где он (также впервые) изложил открытый им Закон Всемирного Тяготения. Из него Ньютон вывел законы движения планет, открытые Кеплером, объяснил явление приливов, сделал ряд других важных открытий. Кроме того, Ньютон придумал способ приближенного решения алгебраических уравнений и классифицировал кривые третьего порядка на плоскости.

ьютон был крайне требователен к своим результатам и публиковал их через много лет после открытия.

ттфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) был необычайно разносторонним и талантливым ученым. Юрист по образованию, он с большим успехом занимался также философией, математикой, историей, теологией, биологией, геологией, лингвистикой, состоял на дипломатической службе при дворе Майнцского курфюрста. К тому же Лейбниц был талантливым изобретателем. Он придумал одну из первых счетных машин, сконструировал ветряной двигатель для откачивания воды из шахт. Его счетная машина выполняла все действия арифметики, извлекала квадратные и кубические корни. Лейбниц совершенствовал свою машину в течение всей жизни, так что в некотором смысле его можно считать основоположником машинной математики.

) с наибольшей силой способности Лейбница проявились в математике. Чуть позже Ньютона он открыл дифференциальное исчисление, причем в более общей форме и почти в современной терминологии. Лейбниц ввел много математических обозначений и придумал много новых терминов, которыми мы пользуемся до сих пор: *dx* и *dy*, знак интеграла, термины «функция», «координаты», «дифференциальное и интегральное исчисление», «дифференциальное уравнение», «абсцисса», «ордината», «координата», «алгоритм». Он записал в современной форме правила дифференцирования, ввел логическую символику и т.д.

эйбниц родился в Лейпциге, большую часть жизни прожил в Ганновере, исполняя должность библиотекаря и историографа при дворе ганноверского герцога, и был очень верующим человеком.

эонард Эйлер (1707-1783) — величайший ученый XVIII в., оставивший яркий след почти во всех областях математики, механики, физики, астрономии, навигации и т.д. Ему принадлежит более 850 научных работ, многие из которых посвящены труднейшим проблемам математики и ее приложений. В 19-летнем возрасте его пригласили работать в Петербургскую академию наук, где он проработал большую часть своей жизни. Он оказал существенное влияние на формирование математической школы и развитие математического образования в России. Известно, что Эйлер поддержал молодого Ломоносова во время его конфликта с академиками.

последние годы жизни от напряженной работы Эйлер потерял зрение, но продолжал работать столь же целеустремленно и плодотворно. За несколько дней до смерти он занимался расчетом полета аэростата, который в то время казался чудом.

ьер Симон Лаплас (1749-1827) родился в семье небогатого землевладельца. Он получил очень хорошее образование, прекрасно знал древние языки, литературу и искусство. Но мы знаем его как выдающегося математика и физика. Ему принадлежат фундаментальные результаты в математике, математической физике и небесной механике, он справедливо считается одним из основоположников теории вероятностей. Лаплас занимался теорией теплопроводности, теорией капиллярности и электродинамикой; доказал, что кольцо Сатурна не может быть сплошным; разработал теорию движения спутников Юпитера; предложил новый метод вычисления орбит небесных тел и т.д.

обопытно, что Лаплас придавал мало значения политике и религии. Хотя он учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев, однако богословием не занимался, а увлекшись математикой, вообще стал атеистом. Он ладил как с Наполеоном, так и с Людовиком XVIII, принимая знаки уважения от обоих. Основные результаты своих исследований Лаплас опубликовал в двух книгах: «Небесная механика» и «Аналитическая теория вероятностей».

арл Фридрих Гаусс (1777-1855) — «король математиков» — считается величайшим математиком всех времен и народов. Он получил выдающиеся результаты в теории чисел, алгебре, дифференциальной и неевклидовой геометрии, астрономии и геодезии, электродинамике и теории магнетизма. Вот слова Феликса Клейна, одного из самых больших знатоков научного наследия Гаусса: «Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, смотрящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины поднимаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь».

арл Фридрих Гаусс родился в Брауншвейге. Его математические способности проявились уже в третьем классе: прямо на уроке он подсчитал сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, едва только учитель кончил диктовать эту задачу. Сам Гаусс говорил, что он научился считать раньше, чем говорить. По словам Феликса Клейна, любовь Гаусса к счету сформировала его как математика: «Он непрерывно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами, например, над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличается всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, каким навряд ли обладал кто-либо до или после него. Путем наблюдения над своими числами, стало быть, индуктивным, "экспериментальным" путем он уже рано постигает общие соотношения и законы».

ы не можем перечислить здесь все математические открытия Гаусса. Расскажем об одном из них. Еще математикам древней Греции было известно, что при помощи только циркуля и линейки можно строить правильные многоугольники с тремя, пятью и пятнадцатью сторонами, а также такие, которые получаются из перечисленных выше удвоением числа сторон: правильные шестиугольники, десятиугольники, двенадцатиугольники, и т.д. И с тех пор ничего принципиально нового в этой области до Гаусса сделано не было. В 1796 г. Гаусс доказал, что если n есть простое число вида +1, то правильный n-угольник можно построить с помощью только циркуля и линейки. В частности, при k = 2 получается n = 17, при k = 3 — простое число 257.

усс прекрасно знал классические языки и в молодости колебался, чем ему заняться — математикой или филологией. Вместе с известным физиком Вебером они изобрели электромагнитный телеграф. Гаусс знал о существовании неевклидовой геометрии еще до того, как познакомился с работой Лобачевского. Гаусс вел дневник, из которого (после его смерти) узнали, что он открыл в математике гораздо больше, чем опубликовал.

усс был очень замкнутым человеком. Всю свою жизнь он проработал в Геттингенском университете (в том самом, в котором учился) в качестве профессора и директора астрономической обсерватории.

иколая Ивановича Лобачевского (1792-1856) английский математик Клиффорд назвал «Коперником геометрии». Действительно, открытие Лобачевским неевклидовой геометрии совершило такую же революцию в науке и человеческом сознании как и открытие *Николаем Коперником* (1473-1543) гелиоцентрической системы мира.

древних времен люди полагали, что Земля является центром мироздания, и что около Земли вращаются и Солнце и все другие планеты. Коперник был первым из ученых, кто смелостью своего гения разрушил эту привычную схему. Лобачевский же был первым из людей, кто преодолел стереотип «евклидова мышления», понял, что существуют другие геометрии, и сумел доказать это. С философской точки зрения оба великих открытия — Коперника и Лобачевского — ознаменовали вступление человечества в новую эпоху, когда всеобщее признание начала получать идея единства мира.

ɔбачевский родился в 1792 г. в Нижнем Новгороде. Его происхождение до сих пор является загадкой для историков, но точно известно, что в 1802 г. он поступил в Казанскую гимназию, а через пять лет — в только что открытый Казанский университет.

это время туда приехали профессора из-за границы, в том числе и Бартельс, с которым начинал изучать математику молодой Гаусс! Бартельс вскоре заметил необыкновенные математические способности Лобачевского и стал его научным руководителем. Благодаря своему наставнику, живой и необычайно изобретательный по части различных проказ Лобачевский успешно закончил университет и остался в нем преподавать. С 1816 г. Лобачевский уже профессор, а с 1820 — декан физико-математического факультета.

ιаренность Лобачевского проявилась не только в математике. Он занимался механикой, физикой, астрономией, много времени уделял воспитанию юношества. Лобачевский был талантливым педагогом. В его речи «О важнейших предметах воспитания», произнесенной в 1828 г. (через год после вступления в должность ректора Казанского университета), есть такие слова: «Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем... Будем же дорожить жизнью, пока она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в истории, истинные понятия о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которая дозволяет нам торжествовать над ужасом смерти».

ιм Лобачевский твердо придерживался тех принципов, которые проповедовал. Его честность и прямота, исключительно добросовестное отношение ко всему, за что бы он ни взялся, снискали ему абсолютный авторитет среди преподавателей и студентов. За 20 лет руководства университетом, Лобачевский сделал для него необычайно много. И сейчас геометрическая школа Казанского университета является одной из самых известных у нас в стране и за рубежом.

ихаил Васильевич Остроградский (1801-1862) был одним из крупнейших русских математиков XIX в. В отличие от Лобачевского, работы которого не получили признания при жизни их автора, имя Остроградского было хорошо известно не только в России. Он был избран академиком Российской, Американской, Римской и Туринской академий, членом-корреспондентом Парижской Академии наук. С десяти лет он мечтал стать военным, и только случайно попал в Харьковский университет. Математический талант Остроградского обнаружился уже на втором курсе, а на третьем он блестяще сдал экстерном выпускные экзамены. Однако и тогда в университетах были влиятельные люди, для которых всякий талантливый и независимый человек — бельмо в глазу. Они сумели лишить Остроградского диплома, обвинив его в вольнодумстве. С 1822 по 1828 г. Остроградский учился в Париже, слушая лекции самых известных ученых: Ампера, Коши, Лапласа, Пуассона, Фурье. Вернувшись в Россию, он начал преподавать в Главном педагогическом институте (Петербург) и уже в 1830 г. получил звание академика.

:троградский получил выдающиеся результаты в математике и механике;

занимался баллистикой, теорией вероятностей, различными задачами математической физики: распространением волн на поверхности жидкости, распространением тепла, теорией удара, уравнениями движения упругого тела. Каждому математику и физику известна полученная им важнейшая формула кратного интегрирования, с помощью которой *n*-кратный интеграл сводится к (*n* – 1)-кратному.

ыдающийся математик и блестящий лектор, Остроградский оказал огромное влияние на развитие математической школы в России, на преподавание математики в российских университетах.

зарист Галуа (1811-1832) — самая романтическая и самая трагическая личность в истории математики. Он погиб на дуэли, когда ему был 21 год, и по преданию, свое главное открытие сделал в последнюю ночь перед этим роковым событием. Он открыл то, что сейчас называют теорией групп. Из его результатов следовало, в частности, решение одной из самых важных математических проблем, а именно, доказательство того, что не существует общей формулы для решения уравнений выше четвертой степени. Теперь этот раздел математики так и называют: теория Галуа.

изнь не баловала Эвариста: он дважды не мог поступить в Политехническую школу, был уволен из Нормальной школы,* после участия в революции 1830 г. несколько месяцев просидел в тюрьме. Статьи, посланные им в журнал, пропали и не были опубликованы. Он зарабатывал преподаванием математики и, естественно, жил весьма скромно.

звестные высшие учебные заведения во Франции.

его, замечательных открытиях математический мир узнал лишь в 1846 г., когда впервые была опубликована одна из его работ. Теперь во всех учебниках Галуа вполне заслуженно называют гением, звездой первой величины. Как жаль, что он жил так недолго!

афнутий Львович Чебышев (1821-1894) был ведущим математиком России во второй половине девятнадцатого столетия. Он родился в селе Окатове Калужской губернии. В 1841 г. окончил Московский университет и затем преподавал в нем до 1849 г. С этого времени и до конца своей жизни Чебышев работал в Петербургском университете. Пафнутий Львович Чебышев принадлежал к тому замечательному типу ученых, которые не отдают всю свою жизнь какой-нибудь одной проблеме, а оставляют яркий след в различных областях науки. Чебышев получил выдающиеся результаты в теории вероятностей, создал теорию наилучшего приближения функций многочленами, а о его гениальных выводах в задаче распределения простых чисел один математик того времени сказал, что дальнейшее продвижение в этом вопросе сможет получить тот, кто умнее Чебышева во столько раз, во сколько сам Чебышев умнее обыкновенного человека.

ебышев известен как непревзойденный конструктор различных механизмов; их он сделал более сорока и около восьмидесяти усовершенствовал. Он первый изобрел арифмометр непрерывного действия; впервые, после изобретения Уаттом кривошипно-шатунного механизма, преобразующего в паровой машине вращательное движение в поступательное, Чебышев показал, как усовершенствовать этот механизм.

бота Чебышева «О кройке платьев» до сих пор является образцом практического применения геометрии. А в работе «О построении географических карт» он полностью решает задачу о построении карты данной страны с наименьшим искажением масштаба, и находит, что карту европейской части России можно сделать с искажением не более 2%, а не 4-5%, как делалось в то время.

ебышев был избран членом двух самых престижных академий — Российской и Парижской. Он оставил после себя многочисленных учеников, многие из которых стали выдающимися математиками и принесли славу Российской науке.

еликс Клейн (1849-1925) известен прежде всего как автор так называемой «Эрлангенской программы» — лекции, которую он произнес при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета в 1872 г. Клейн одним из первых понял, какое важное значение для всей математики имеет теория групп, которая тогда только начала развиваться. Он понял, что группы возникают во многих областях математики, и это, с одной стороны, дает возможность сравнивать различные области математики между собой, а с другой стороны — объединяет их в одно целое, в единую математику.

сновная идея Эрлангенской программы Клейна состоит в том, что группы можно применить для классификации различных геометрий. Например, евклидова геометрия, как известно, изучает свойства фигур, сохраняющиеся при движениях. Все движения образуют группу относительно операции композиции. Поэтому евклидову геометрию (на плоскости) можно описать так: на плоскости действует группа движений, а те свойства фигур, которые сохраняются при всех этих движениях, и составляют предмет изучения евклидовой геометрии. Если в этом определении заменить группу движений на какую-либо другую группу, то получим и другую геометрию. Так получаются все классические геометрии — евклидова, аффинная, проективная, геометрия Лобачевского и другие.

Таким образом, каждая геометрия порождает свою группу, а каждая группа — свою геометрию.

іейн применил группы и в других разделах математики, в частности, в теории дифференциальных уравнений. Объединяющая роль теории групп в математике сказалась и на мировом математическом сообществе. В Геттингенский университет в то время съезжались ученые всех стран, он стал ведущим центром математических исследований. Блестящие и богатые идеями лекции Клейна пользовались большой популярностью, их размножали на стеклографе и они распространялись по всем университетам мира.

нри Пуанкаре (1854-1912) считается величайшим математиком второй половины XIX в. Его научное наследие составляют более чем 500 книг и научных статей, посвященных различным разделам математики, теоретической физике, небесной механике, философии науки. Он разработал новые методы практически во всех разделах математики. Никто из современников Пуанкаре не мог так глубоко проникнуть в столь большое количество областей науки. Благодаря его гению возникли новые математические дисциплины. Его работоспособность была фантастической. Каждый год он читал лекции по новому предмету, писал популярные книги по математике, которые имели огромный успех и были переведены на многие языки.*

Іа русском языке см.: Пуанкаре А. О науке. М., 1983.

дился Пуанкаре в городе Нанси, его отец был профессором медицины. Еще будучи учеником лицея, Анри занимает первое место на математических конкурсах в 1872 и 1873 гг. Окончив Политехническую школу — наиболее престижное высшее учебное заведение во Франции и горный институт, он начинает преподавать сначала в Кане, затем в Парижском университете. Анри Пуанкаре был членом более чем 35 академий мира, о нем написано много книг. Его научное наследие, идеи и открытые им математические методы до сих пор представляют колоссальную ценность для науки.

авид Гильберт (1862-1943) был вторым, наряду с Пуанкаре, величайшим математиком девятнадцатого — двадцатого века. Как и Пуанкаре, он оставил яркий след во многих областях математики, решил ряд сложнейших задач. В своей знаменитой книге «Основания геометрии» он проанализировал систему аксиом евклидовой геометрии и по существу впервые сформулировал требования, которым должна удовлетворять любая аксиоматическая система. Можно сказать, что с этой книги началась новая наука, которая теперь называется «Основания математики» и играет важную роль. В 1900 г. на Международном конгрессе математиков Гильберт сформулировал 23 задачи (так называемые Проблемы Гильберта), которые считал наиболее важными для математики будущего. Некоторые из этих проблем уже решены, в том числе и российскими математиками.

ольшую часть своей жизни Гильберт преподавал в Геттингенском университете, который благодаря его гению и педагогическому мастерству стал одним из ведущих математических центров мира. Одна из книг Гильберта «Наглядная геометрия», написанная им в соавторстве с С. Фон-Коссеном, до сих пор является одним из лучших учебников по геометрии.

ьберт Эйнштейн (1879-1955), самый знаменитый ученый XX в., родился в г. Ульме (Германия). Окончив политехникум в Цюрихе, он сначала работал учителем, затем служащим федерального патентного бюро в Берне. Начиная с 1911 г., Эйнштейн преподает в Цюрихском, Пражском и Берлинском университетах, а после 1932 г., вследствие усиления фашизма в Германии, он был вынужден переехать в Принстон (США).

авной заслугой Эйнштейна является, как известно, открытие *специальной и общей теории относительности*, которая изменила взгляды ученых на пространство, время и тяготение, помогла создать общую карти- • ну физического мира, существенно продвинула вперед науку, прежде всего — физику.

нштейн получил выдающиеся результаты в различных разделах физики. За работы в области теоретической физики и открытие фотоэффекта ему присудили в 1921 г. Нобелевскую премию. Он создал квантовую теорию света, внес существенный вклад в теорию броуновского движения и т.д.

боты Эйнштейна имеют и глубокое философское значение. Осмысление в целом той картины мира, которую дает нам теория относительности, продолжается до сих пор.

нштейн был выдающимся пацифистом, активным участником антифашисткого движения.

орберт Винер (1894-1964) — американский ученый, «отец кибернетики», один из самых известных математиков нашего века. Исследуя аналогии между процессами, происходящими, с одной стороны, в электрических и электронных системах, а с другой — в живых организмах, он создал новую науку —науку об управлении, которую назвал кибернетикой (1948). Широко известны его книги «Бывший вундеркинд», «Я — математик», «Кибернетика и общество». Он знал 10 языков, но его отец (выходец из России) знал их 30!

дрей Николаевич Колмогоров (1903-1990) — выдающийся советский математик, внесший весомый вклад во многие разделы математики, в особенности, в теорию функций и теорию вероятностей. Им написано 230 научных работ, значительная часть которых носит прикладной характер (теория стрельбы, статистические методы контроля массовой продукции, теория передачи информации по каналам связи и т.д.) В 32 года Колмогоров стал доктором физико-математических наук, в 36 лет — академиком. Его заслуги в математике неоднократно отмечались международными премиями, он награжден семью орденами Ленина, орденом Красного Знамени и медалями. У Колмогорова было много учеников, ставших впоследствии известными математиками. Он активно участвовал в совершенствовании школьного образования в стране, является автором замечательных учебников по математике.

Приложение

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,80	0,2881	1,60	0,4452	2,40	0,4918
0,10	0,0398	0,90	0,3159	1,70	0,4554	2,50	0,4938
0,20	0,0793	1,00	0,3413	1,80	0,4641	2,60	0,4953
0,30	0,1179	1,10	0,3643	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,40	0,1554	1,20	0,3849	2,00	0,4772	2,80	0,4974
0,50	0,1915	1,30	0,4032	2,10	0,4821	2,90	0,4981
0,60	0,2257	1,40	0,4192	2,20	0,4861	3,00	0,49865
0,70	0,2580	1,50	0,4332	2,30	0,4893	4,00	0,499968

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Продолжение прил.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Литература

Болтянский В. Г., Ефремович В. А. *Очерк основных идей топологии //*

Математическое просвещение. 1957. № 2; 1958. № 3, 4; 1961. № 6. (К гл. VIII).

Ван-дер-Варден Б. Л. *Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* М.: Физ.-мат. ГИЗ, 1959. (К гл. X).

Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. *Алгебра и математический анализ.* М.: Просвещение, 1994. (К гл. III-VI).

Вильямс Дж. Д. *Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр.* М., 1960. (К гл. IX).

Гарднер М. *Теория относительности для миллионов.* М.: Атомиздат, 1979. (К гл. VII).

Гладкий А. В. *Арифметика.* М.: Изд-во РГГУ, 1992. (К гл. I).

Гмурман В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Высш. шк., 1972. (К гл. II, IV).

Гнеденко Б. В. *Математика и математическое образование в современном мире.* М., 1985. (К гл. VII).

Гнеденко Б. В. *Очерки по истории математики в России.* М.; Л., 1946. (К гл. X).

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. *Элементарное введение в теорию вероятностей.* М.: Наука, 1964. (К гл. IV).

Грешилов А. А. *Как принять наилучшее решение в реальных условиях.* М.: Радио и связь, 1991. (К гл. IX).

Лаптев Б. Л. *Николай Иванович Лобачевский.* Казань: Изд-во Казан, ун-та, 1976. (К гл. VII, X).

Математика в современном мире. М.: Мир, 1967. (К гл. VII).

Пойа Г. *Математическое открытие.* М.: Наука, 1976. (К гл. VII).

Пуанкаре А. *О науке.* М.: Наука, 1983. (К гл. VII).

Румшиский Л. З. *Математическая обработка результатов эксперимента.* М.: Наука, 1971. (К гл. II).

Саати Т. *Принятие решений. Метод анализа иерархий.* М., 1993. (К гл. IX).

Стройк Д. Я. *Краткий курс истории математики.* М.: Наука, 1978. (К гл. X).

Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. *Элементы высшей математики для школьников.* М.: Наука, 1987. (К гл. III-VI, VIII).

Фрид Э. *Элементарное введение в абстрактную алгебру.* М.: Мир, 1979. (К гл. VIII).

Хинчин А. Я. *Педагогические статьи.* М.: изд. АПН, 1963. С. 128-160. (К гл. VII).

Хлебопрос Р. Г., Охонин В. А., Фет А. И. *Природа и общество.*

Математическое моделирование катастроф. М., 1998.
. *Хрестоматия по истории математики* / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977. (К гл. X).

ıебное издание
ıхомиров Николай Борисович, Шелехов Александр Михайлович
АТЕМАТИКА:
ıебный курс для юристов
зд. лиц. ЛР № 064893 от 24.12.96
одписано к печати 01.12.99. Формат 60x90'/^. Бумага газетная.
рнитура школьная. Печать офсетная. Тираж 5 000 экз. Заказ № 1641
здательство «Юрайт»
неральный директор *В.Ю. Ильин*
ководитель издательства *А. В. Лустов*
авный редактор *Г.Л. Гуртова*
5037, Москва, городок им. Баумана, д. 3, корп. 4, стр. 10.
л.: (095) 742-72-12. E-mail: urait@aha.ru/
ome Page: www/aha/ru/~urait
абрика офсетной печати, г. Обнинск, ул. Королева, 6