Г. Штейнгауз

МАТЕМАТИКА – ПОСРЕДНИК МЕЖДУ ДУХОМ И МАТЕРИЕЙ

БИНОМ

МАТЕМАТИКА — ПОСРЕДНИК МЕЖДУ ДУХОМ И МАТЕРИЕЙ

HUGO STEINHAUS

MIĘDZY DUCHEM A MATERIĄ POŚREDNICZY MATEMATYKA

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
Warszawa – Wrocław 2000

Г. Штейнгауз

МАТЕМАТИКА – ПОСРЕДНИК МЕЖДУ ДУХОМ И МАТЕРИЕЙ

2-Е ИЗДАНИЕ (ЭЛЕКТРОННОЕ)

Перевод с польского
Б. И. Копылова

под редакцией
А. В. Хачояна

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 51-7
ББК 22.1
Ш88

Штейнгауз Г. Д.

Ш88 Математика — посредник между духом и материей [Электронный ресурс] / Г. Д. Штейнгауз ; пер. с польск. — 2-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 354 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-1353-2

Книга представляет собой сборник статей и выступлений автора, посвященных истории развития отдельных разделов математики и их приложениям к биологии, медицине, геологии, судебной практике, экономике и другим областям. Объединяющим моментом являются глубокие методологические рассуждения автора о природе математики и ее взаимодействии с другими науками. Приведены малоизвестные факты из биографий выдающихся ученых-математиков.

Для преподавателей математики, студентов и всех интересующихся историей этой науки и ее приложениями к различным сферам народного хозяйства и к научным исследованиям.

УДК 51-7
ББК 22.1

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Математика — посредник между духом и материей / Г. Д. Штейнгауз ; пер. с польск. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 351 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-1353-2

Предисловие

Эта книга, вышедшая в свет благодаря инициативе издательства «БИНОМ. Лаборатория знаний», принадлежит к ряду других, пока немногочисленных изданий, возрождающих замечательную отечественную традицию — традицию регулярных переводов зарубежной литературы, популяризирующей математику. К числу шедевров этого жанра относятся «Наглядная геометрия» Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена, «Что такое математика» Р. Куранта и Г. Роббинса, «Математика и правдоподобные рассуждения» Д. Пойа. В классику входят и предыдущие две книги Г. Штейнгауза, изданные в СССР: «Математический калейдоскоп» и «100 задач».

Особо следует выделить первое издание «Калейдоскопа» (1947 г.), в котором удалось воспроизвести все остроумные находки, которыми автор справедливо гордился. Академик А. Н. Колмогоров, автор предисловия к первой книге Штейнгауза, высоко ценил как общий замысел «Калейдоскопа», посвященного «нематематическим» задачам, решаемым с помощью математики, так и полиграфическое исполнение.

Гуго Штейнгауз (1887–1972 гг.) — крупный математик, один из родоначальников замечательной польской математической школы, выпускник Геттингенского университета в легендарные времена Ф. Клейна и Д. Гильберта.

Несомненно, написание фрагментов истории математики в Польше было одной из задач автора. Воспоминания о С. Банахе, Л. Лихтенштейне, З. Янишевском, автобиография самого Г. Штейнгауза, вошедшие в сборник, содержат множество ярких событий, фактов, идей. Обращает на себя внимание и гражданская ответственность ученого за состояние науки в его родной стране.

Другая задача книги — популярное изложение тем, входящих в сферу научных интересов автора: «Теория вероятностей как инструмент исследования в естествознании и в производстве», «Об установлении отцовства», изящная работа «О треугольниках» и т. д.

Но главная роль иная: это глубокие методологические и философские размышления о природе математики и, в первую очередь, о соотношении математики и действительности, о взаимодействии математики и других наук, математики и производства. Редкий математический дар, наблюдательность и остроумие, громадный опыт и неизменный интерес к так называемой «прикладной математике» позволили Г. Штейнгаузу всегда оставаться в поле конкретных задач, не впадая в чрезмерно абстрактную общность рассуждений.

Примечательна оригинальная классификация «математик», предложенная Г. Штейнгаузом (с. 49–50): «Таким образом, одной из целей математики является открытие и доказательство новых утверждений. Математику, которая занимается именно этим, назовем логической математикой или математикой α. … Математику, которая занимается решением задач, назовем математикой β или вычислительной математикой (речь идет о задачах типа школьных, т. е. о задачах с ясной постановкой и очевидно существующем решением — *А. А.*)... На основе того факта, что утверждения чистой математики можно применять и к другим наукам, возникла математика γ, которую называют прикладной. При этом мы должны научиться выполнять ряд вычислений. Как проще и лучше осуществлять стандартные вычислительные операции — этому учит практическая математика, которую можно назвать математикой δ». А далее формулируется основная проблема: «Какое значение в жизни имеют математики α и δ?».

Сам Г. Штейнгауз, прекрасно знающий математику α, несомненно относится к приверженцам математики γ. Об этом, в частности, свидетельствует его темпераметная полемика с Л. Шварцем (на самом деле с обобщенным оппонентом с известным именем Николя Бурбаки), которая содержится в статье «О математической строгости».

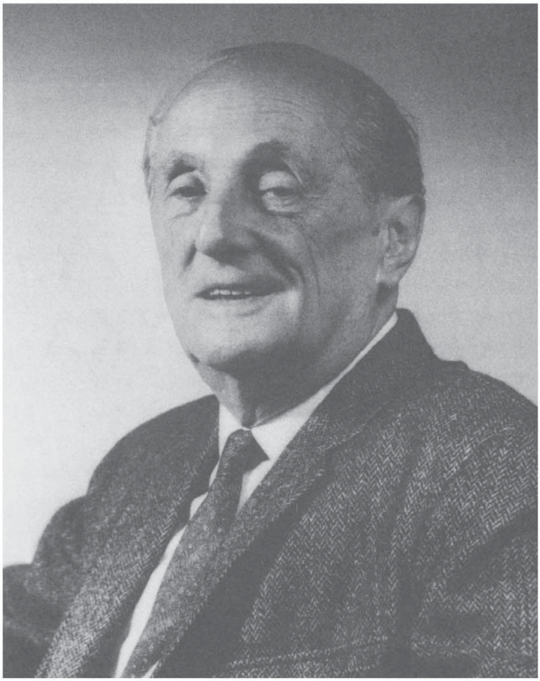
Автор нисколько не преуменьшает сложность решения задач «прикладной математики»: приводятся немногочисленные удачные примеры (среди нематематиков Г. Штейнгауз знал двух человек, успешно применяющих математику) и многочисленные неудачные примеры сотрудничества математиков и нематематиков. На конкретных примерах рассматривается тот стиль мышления, которым должны владеть математики, способные к решению сложных задач, возникающих в реальной действительности.

Книга содержит немало замечаний, относящихся к преподаванию математики. Примечательна мысль, высказанная в 1963 г.: «Сопоставляя наши обычаи с научной атмосферой Запада, мы можем констатировать наше преимущество в навыках коллективной работы, благодаря чему нам удается, несмотря на многочисленные трудности (к которым относятся низкое материальное и кадровое обеспечение, недостаток жилья и постоянная катастрофа, именуемая реформой школьного образования) претендовать на более высокое место в науке, чем то, которое соответствует нашему реальному жизненному уровню». Мысль актуальна и поныне, и не только в Польше.

Книга сочетает глубину мысли с доступностью изложения, остроумием и замечательным литературным языком, что в большой степени является заслугой переводчика.

Пересказ и длительный комментарий к этой книге Г. Штейнгауза — занятие неблагодарное, имеющее единственный смысл: привлечь внимание читателя. Погрузившись в чтение, читатель несомненно получит редкое удовольствие от ярких идей, соображений, образов. Удовольствие от заочного общения с мудрым человеком, человеком большой внутренней свободы — замечательным математиком, педагогом, популяризатором Гуго Штейнгаузом.

Член-корреспондент
Российской академии образования
Александр Абрамов



Автобиография[1]

Перевод с польского Ю. А. Данилова

У меня два имени: Гуго Дионисий Штейнгауз; я родился в Ясле 14 января 1887 года и там же окончил в 1905 году классическую государственную гимназию. В 1906 году изучал во Львове философию у Твардовского и математику у Юзефа Пуцыны. Случайно встреченный мною Станислав Джоллес, профессор геометрии Политехнического института в Шарлоттенбурге, посоветовал мне перевестись в Геттинген; осенью1906 года мне удалось осуществить его совет, а в 1911 году я получил в Геттингене докторскую степень. В Геттингене я прежде всего слушал лекции Гильберта и Клейна; там же тогда читали лекции Рунге, Цермело, Минковский, Э. Ландау, Вейль и многие другие математики; польская колония была многочисленна и пользовалась коллегиальной помощью братьев Дзевульских, Эдварда Лота, Розенблюма, Антония Ломницкого, Ф. Кемпиньского, Казимежа Янцена, Яна Кроо, Леона Хвистка, Влодзимежа Стожека, Зигмунда Янишевского, Стефана Мазуркевича и других, а также познаниями Банахиевича и Серпиньского, тогда уже известных, хотя и молодых ученых. После недолгого пребывания в Мюнхене и Париже я вернулся в Польшу. После защиты диссертации «*Neue Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips*» (Новые приложения принципа Дирихле) я занялся обобщением понятия границы, предложенного Отто Тёплицем на его семинаре, — мне удалось

---

[1] Опубликовано в «Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego», Seria II: Wiadomości Matematyczne XVII (1973). Перевод печатается с разрешения.

показать, что не существует универсального метода линейного суммирования. По возвращении в Польшу я занялся тригонометрическими и степенными рядами и написал несколько заметок по этому предмету. В первой из них (*Sur une série trigonométrique divergente* (Об одном расходящемся тригонометрическом ряде)) я привел пример всюду расходящегося тригонометрического ряда с членами, стремящимися к нулю; в пятой заметке (Bull. Crac. 1913) я использовал этот ряд для решения проблемы Лузина и Серпиньского — нашел, что заданный ими степенной ряд сходится на некоторой дуге единичной окружности на комплексной плоскости, а в остальной ее части расходится. Диссертационная работа также была посвящена рядам Фурье. До Первой мировой войны я жил в Ясле и Кракове, во время войны (до 1917 года) — в Кракове и Вене; недолго служил в армии и был участником нескольких сражений в составе 1-го артиллерийского полка Польских легионов. В 1917 году был допущен к чтению лекций во Львове, женился и переехал из Кракова во Львов, где работал в качестве «технического сотрудника» в Центре восстановления края. Там написал в 1918 году первую в Польше работу о функциональных операциях, дав канонический вид линейного функционала в пространстве L (т. е. в пространстве функций, интегрируемых по Лебегу (*Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeitschr. 5 (1919), pp. 186–221 (Аддитивные и непрерывные функциональные операции)). В течение некоторого времени — с конца Первой мировой войны до заключения мирного договора — работал в Ясле под руководством незабвенного инженера Александра Детциуса в качестве математика на фирме Waterkeyn, обслуживавшей газопровод, протянутый через «окна» в ясельско-крошненьскую впадину. В 1920 году вернулся во Львов, где был назначен экстраординарным профессором (ординарным профессором я стал в 1923 году). В том же году в журнале «*Fundamenta Matematykae*» вышла моя первая работа по теории вероятностей (*Les probabilités dénomerables et leur rapport à la théorie de la mesure* (О несчетных вероятностях и их отношении к теории меры)). То были один из первых шагов в направлении математизации теории вероятностей путем введения в теорию вероятностей понятия меры и первая работа, в которой встречаются числовые ряды вида $\sum \pm a_n$, где члены a_n заданы, а знаки + и – распределены случайно. Хотя Ясло разрушено, я мог бы показать место на улице Костюшко, где во время прогулки я воочию увидел эту задачу и постиг ее смысл. В 1925 году я опубликовал в студенческой ежедневной газете работу «*Definicie potrzebne do theorii gier i pościgu*» (Определения, необходимые для теории игр и погони) — это первая работа, в которой речь идет о погоне как об игре в смысле современной теории игр. Понятие «минимакс», фундаментальное в теории игр, одним из первых ввел Эмиль Борель, о чем я не знал, но работа Бореля также долгое время оставалась незамеченной — ныне моя статья была издана как исторический курьез в США на английском языке в ежеквартальном журнале «*Navy Logistics Quaterly*». В 1927 году мое сотрудничество с Банахом привело к появлению работы «*...le principe de la condensation des singularités*» (... принцип сгущения особых точек) (Fund. Math. 9), который в свое время был высказан Ханкелем в качестве эвристической догадки. Уже при редактировании работы нам оказал помощь Ст. Сакс, который впоследствии углубил этот принцип, введя в него понятие категории так, что это стало существенным достижением Польши в области функциональных операций. В 1929 году мне удалось уточнить и обосновать тезис Бореля о степенных рядах со случайными коэффициентами в случае, когда модули коэффициентов $c_n = r_n e^{i\varphi}$, или r_n — фиксированные величины, а фазы — случайные (Math. Zeitschr. 31 (1929) «*Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*» (О вероятности того, что граница круга сходимости степенного ряда есть его естественный предел)); недавно Рылл-Нардзевский доказал тезис Бореля во всей его общности.

Десятилетие 1930–1940 гг. характеризуется следующей тематикой: независимые функции, проблема измерения длины, сотрудничество с медиками, «*Kalejdoskop Matematyczny*» (Математический калейдоскоп), квадратичный тариф.

Независимые функции — еще один шаг к математизации теории вероятностей. Когда я сообщил их определение моему ученику Марку Кацу из креминецкого лицея, он нашел аналитический критерий независимости функций — это была первая работа серии под общим названием «*Sur les fonctions indépendantes*» (О независимых функциях — речь идет о стохастической независимости, т. е. такой, которая соответствует независимости случайных величин в теории вероятностей). К таким работам (хотя и вне серии) можно отнести мою работу о кривой Пеано (Commentarii Math. Helvetici 9, 1936–1937), заполняющей квадрат: непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, которыми описывается обычная классическая кривая Пеано, статистически независимы, — этот результат оказался неожиданным для выдающегося советского математика Хинчина, который знал современное понятие независимости (введенное Колмогоровым в работе, которая до нас не дошла). Шестая работа серии (Studia Math. 9 (1940)) содержала решение задачи о движении облака частиц в ограниченном сосуде, отражающихся от стенок по классическому закону при условии, что внутренние силы равны нулю. Может показаться, что в этом случае реализуются законы, которые обычно находят с помощью теории вероятностей — но в этой задаче законы движения частиц оказалось возможным найти без обращения к теории вероятностей — путем выбора эффективных начальных условий, что позволяет следить за движением каждой частицы в отдельности так, что эта модель реализует одновременно детерминистский и вероятностный характер движения облака материальных точек.

Проблема измерения длины встала передо мной, когда моей дочери дали в школе задание измерить по карте длину Вислы. Эта задача весьма поучительна для родителей. Проще всего ее решить с помощью квадратной сетки, наложенной на физическую карту с наклоном к краям карты под углом 30°, — работу с этой задачей я поместил в *Czasopiśme Geograficznym* (Географическом журнале) (3, 1931) и в *Polskim Przeglądzie Kartograficznym* (Польском картографическом обозрении) (37, 1932). Ныне эта задача видится иначе: эмпирические линии неспрямляемы (т. е. не имеют длины) — поэтому измерение длины польской береговой линии дает результаты, отличающиеся на несколько процентов. Те длины, которые указывает практик (например, на железнодорожном билете), относятся скорее к определению оси железнодорожной колеи, заданной математически, а не к реальному железнодорожному пути...

Контакт с медициной возник благодаря Францишеку Гройеру — я написал вместе с ним работу о «патергометрии» туберкулеза у детей (Lwowskie Towarzystwo Naukowe, 1935, XV, 2) (Львовское научное общество). Эта совместная с медиками работа навела меня на проблему локализации инородных тел, выявленных при рентгенологическом обследовании пациентов — ее я решил в 1938 году, когда увидел, как в витринном стекле отражаются снежинки, лежащие на рукаве моего пальто: движением плеча их можно было поместить в точности на поверхность шляпы за окном или на 3 мм ниже шляпы и т. д.; первая публикация — заметка в парижских *Comptes Rendus*, 206, 1938. «Интровизор» был запатентован в 1938 году — он позволяет извлекать в обычном свете, не прибегая к рентгеновской трубке, невидимое чужеродное тело, оперируя так, как если бы тело пациента было прозрачным; тем самым интровизор позволял устранить опасность рентгеновского излучения для больного и для хирурга.

На десятилетие 1930–1940 гг. приходится книга «*Theorie der Orthogonalreihen*» (Теория ортогональных рядов), написанная в соавторстве со Стефаном Качмажем (серия «*Monographie Matematyczne*» (Математические монографии), 1936). Перед Второй мировой войной был издан «*Kalejdoskop Matematyczny*» (Математический калейдоскоп) — в 1938 году издательством «Książnica-Atlas» одновременно на польском и английском языках, мне довелось дождаться новых изданий на польском языке (PZWS, 1954, 1956), американского издания (Oxford Univ. Press), а также изданий на русском (М.: Гостехиздат, 1949), венгерском, чешском, немецком, японском языках — подготавливается к печати издание на французском языке. Издание 1938 года содержало в каждом экземпляре модель платонова двенадцатигранника (додекаэдра) из картона в виде плоской развертки — стоило раскрыть книгу, как модель автоматически приобретала вид додекаэдра; найти эту конструкцию стоило мне одной бессонной ночи, когда советы инженеров и художников оказались ложными. Книжка «Математический калейдоскоп» имела целью визуализацию математики; для этого она содержала много гравюр и фотографий. Трудности, возникшие в связи с иллюстрациями, были значительными — чтобы получить фотографию 4 мыльных пузырей, потребовались 2 недели обучения хитрой науке выстраивания мыльных пузырей на ковре. Желая купить искусственную муху для иллюстрации кратчайших путей на поверхности куба, я зашел в магазин игрушек и амулетов, но мушки в продаже не было; вместо мушки продавец предложил мне приобрести миниатюрного слоника. Я сказал ему: «Вы лучший продавец в мире: Вы реализовали известную прибаутку и сделали из мухи слона!»

Идея квадратичного тарифа возникла, когда инженер Детциус предложил мне задачу тарификации, возникающую в связи с оплатой счетов за потребление электроэнергии. Первая работа (*Der Quadratleistungstarif,* Schweizerischer Elektrotechnischer Verein, 1939) содержала проект специального счетчика; автор проекта, инженер Розенцвейг, выступал в качестве соавтора — позднее он погиб от рук немецких убийц.

Неоднократно упоминавшийся выше журнал «*Studia Mathematica*» был основан мной и Банахом в 1928 году. Первый том вышел в 1929 году во Львове — ныне этот журнал «дошел» уже до XIX тома. Он посвящен функциональным операциям, и его можно считать органом так называемой львовской школы функционального анализа. До войны в *Studia* публиковались работы на французском, немецком, английском и итальянском языках, впоследствии место итальянского языка занял русский язык.

Вторая мировая война застала меня с женой, дочерью и зятем над Прутом в Камне Добоша. Мы вернулись во Львов. Там вскоре начал действовать университет; помимо прежних сил математика приобрела эмигрантов из немецкой оккупации (Сакс, Кнастер, Войдыславский, Марчевский и др.). Меня назначили профессором на кафедре высшего анализа и научным сотрудником Киевской Академии наук. Неопределенность ситуации парализовала научную деятельность, однако вышел IX том журнала *Studia Mathematica*, который был подготовлен ранее. После падения Парижа неопределенность сменилась тревогой, а после вторжения немцев в Париж с конца июня 1941 года тревога уступила место трагедии. 4 июля я покинул свою квартиру на Кадетской улице, 14 и до 26 ноября вместе с женой пользовался жилищем моей сестры в доме профессора Фулиньского. Благодаря профессору Буланде (бывшему ректору Львовского университета) и пани Морской-Кнастровой мне и моей жене удалось найти безопасное жилье на Осичине — около Рудна, что близ Зимней Воды под Львовом на вилле Витольда Отто, бывшего заведующего финансовым отделом Львовского университета. Там я начал писать свои воспоминания и продолжаю их записывать; я пишу чернилами в обычных тетрадях и к настоящему времени уже заполнил почти 1600 страниц. В гимназии я был отличником, но по чистописанию имел неудовлетворительную оценку — физическое сопротивление пера затрудняло писание в переносном смысле; стремясь избежать усилия при письме, я старался писать сжато, что привело к росту моего интереса к вопросам языка. Уже в аттестате зрелости наилучшую оценку я имел по польскому языку; польская колония в Геттингене, ощущавшая провинционализм своего разнородного состава, тоже многому меня научила, а обязанности редактора журнала «*Studia*» (прочитавшего по 4 раза каждую букву четырехязычного журнала) сделали из меня ищейку, вынюхивавшую ошибки и неправильно расставленные запятые, как пес трюфели... С 26 ноября 1941 года до 26 августа 1945 года я жил под именем Гжегожа Крохмального, крестьянина из окрестности Пшемысла, метрику которого раздобыл для меня поэт Тадеуш Холлендер; его самого двумя годами позже расстреляли немцы на Павяке. Научная работа в тот период ограничивалась записыванием замыслов и проб. 13 июля 1942 года мы оба переехали в Бердехов около Строжа. Там вместе с моим шурином, инженером, мы занялись тайным обучением в достаточно широком масштабе — нашими учениками были сыновья крестьян и железнодорожников. В Бердехове мне удалось в 1945 году после поражения немцев подготовить две работы: «O zagadnieniu taryfy elektrycznej» (Об обосновании тарифа на электроэнергию) и «O polowieniu bryl przez plaszczyzny» (О делении геометрических тел пополам плоскостью). Первая работа вышла в 1947 году как первая публикация Вроцлавского научного общества, а затем в других вариантах в «Przegląd Elektrotechnyczny» (Электротехническое обозрение) (24, 1948) и в «Hutnik» (Металлург) (9–10, 1949), и вызвала интерес в Польше, Венгрии, Палестине, Франции (Электричество Франции) и в Западной Германии — электронные предприятия во Вроцлаве решили сконструировать счетчик для квадратичного тарифа. Вторая работа (о делении пополам геометрических тел) была опубликована в *Fund. Math*. 33 (1945); ее результат, известный как «теорема о сандвиче», гласит, что любой бутерброд можно разделить пополам плоским сечением так, чтобы хлеб, сыр и ветчина оказались разделенными поровну (поэтому на поверхности земного шара можно провести такую окружность, которая делила бы пополам сушу, море и население).

Мое пребывание в Бердехове закончилось, когда Ст. Кульчиньский поручил мне организовать во Вроцлаве Отделение математики, физики и химии. С того времени я жил во Вроцлаве. В этот период — с осени 1945 года по настоящее время — я стал особенно интересоваться приложениями математики. Причинами этой эволюции в равной мере стали и то обстоятельство, что Отделение математики, физики и химии принадлежало к обеим высшим школам (Политехническому институту и Университету), и организация во Вроцлаве Отдела естественнонаучных и экономических приложений Государственного института математики. Еще в Бердехове я задал себе вопрос, допускает ли принцип справедливого дележа для двух участников («один делит, другой выбирает») обобщение на большее число участников дележа; я нашел искомый «прагматичный способ дележа» для трех участников (а моя дочь нашла другой вариант дележа для трех участников), но Банах и Кнастер (которым я написал во Львов) нашли решение для произвольного n. Об этом результате мы доложили в 1947 году на Статистическом конгрессе в Вашингтоне (*The Problem of Fair Division* (Проблема справедливого дележа), Econometrica, 1948, pp. 101–104), а также Г. Штейнгауз и Б. Кнастер, *Sur la division pragmatique* (О прагматичном дележе), Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1946).

Принцип прагматичного дележа может оказаться полезным при решении некоторых международных территориальных споров. За работу «*Elementary inequalities between the expected values of current estimates of variance*» (Элементарные неравенства между ожидаемыми значениями текущих оценок дисперсии) (Coloq. Math. 1 (1948)), подготовленную в Бердехове, я получил награду Польской Академии наук. Во Вроцлаве я построил с помощью слесаря модель интровизора, которую в случае необходимости можно было использовать на практике. В 1947 году я стал советником Польского Комитета по стандартизации, и в этом качестве принял участие в создании стандарта статистического контроля качества; этот стандарт был опубликован в феврале 1951 года под знаком PN/N-03001, авторы проекта — Я. Одерфельд, Г. Штейнгауз и К. Вишневский. В 1950 году я опубликовал (*Studia i prace statystyczne* 2) замысел одной статистической оценки.

Главные направления моей научной работы во Вроцлаве: А) правила Байеса; Б) установление отцовства; В) случайные числа; Г) приложения топологии в обычной геометрии; Д) математизация теории вероятностей; Е) дидактика; Ж) другие направления.

А) В томе I журнала «*Zastosowania Matematyki*» (Приложения математики), основанного мной с помощью д-ра Я. Одерфельда, находятся работы «*Podstawy kontroli statystycznej*» и «*Prawdopodobieństwo, wiarogodność i możliwość*» («Основы статистического контроля» и «Вероятность, достоверность и возможность»). В первой работе показано, что в случае отбора товара на основе проб так называемая гипотеза Байеса (*H*) однородного *априори* распределения качества не более обоснованна, чем другие гипотезы, и что используемый в Америке так называемый перспективный способ представляет собой лишь кажущееся избавление от *априорных гипотез*. Во второй работе анализируется общий факт, замеченный Я. Одерфельдом в статистическом контроле качества, а именно вероятность практических рекомендаций, следующих из гипотезы Байеса, по отношению к тем рекомендациям, которые дает перспективный способ — эта работа носит принципиальный характер, имеет философское значение; ее английское издание под названием «*Probability, verisimilitude, credibility*» ныне готовится к печати редакцией журнала «*Annals of Math. Statistics*» в Чикаго.

Б) О группах крови и проблемах установления отцовства я узнал от Л. Гиршфельда, которому многим обязан. Гиршфельд обнаружил, что число исключений отцовства в материалах о взыскании алиментов гораздо ниже, чем было бы, если бы карточки, содержащие определения группы крови (A, B, O) мужчин-ответчиков, были извлечены из папок в медицинских учреждениях, доставлены курьерами в суды и были наугад присоединены к другим материалам по делам о взыскании алиментов. Однако он не учитывал, что на основании сведений о группе крови можно вычислить вероятность того, что ответчик *априори*, т. е. до судебного процесса, является отцом: в Польше эта вероятность составляет 70%. Из этого вытекает возможность (чрезвычайно редкая в естествознании) вычисления вероятности отцовства *апостериори*, т. е. после определения групп крови ответчика, матери и ребенка. Моя работа была доложена в 1952 году на заседании Вроцлавского научного общества, Отделения общественных наук, 15 марта. Я опубликовал ее на английском языке в трудах Вроцлавского научного общества и на польском языке в журнале «Zastosowania Mat.» (том I, тетрадь 2, 1954). Благодаря этой работе, ныне можно определить вероятность отцовства ответчика даже в том случае, когда не удается исключить отцовство на основе групп крови. Можно также оценить число ложных заключений об отцовстве — в послевоенные годы до 1954 года они составляли 12–17%, и только самое большее 5% приходилось на долю судебных ошибок. Мой бывший ученик и нынешний коллега Юзеф Лукашевич показал (Zast. Mat., II 4, 1956), что результат определения отцовства не зависит всецело от генетических гипотез и даже от определения биологического отцовства. В 1958 году появилось (Prace Wrocl. Tow. Nauk. A, № 63) мое предложение об изменении основ установления отцовства и назначения алиментов — польская версия: *Ruch Prawniczy i Ekonom*. (Движение правовое и эконом.), том XX/III.

В) Для выборки случайных проб в промышленности, торговле, сельском хозяйстве и т. д. требуются таблицы случайных чисел, а эти таблицы до того времени сами были случайными. Я составил проект таблицы случайных чисел, свободной от указанного дефекта. Ее издал Институт математики Польской Академии наук (ПАН). Таблица значилась под номером ZM II 1956. Главный статистический институт издал мои «Железные числа» (*Liczby żelazne*) — каждая часть этой таблицы состоит из равномерно распределенных четырехзначных чисел. Этой таблицей «Железные числа» пользовались до большого польского издания, подготовленного Комиссией по антропометрии ПАН. В основу этой таблицы легло мое наблюдение, согласно которому при откладывании на окружности циркулем произвольной дуги, устанавливаемой в каждом исследовании, окружность оказывается разделенной на дуги только трех категорий по длине. Доказательство этого утверждения недавно дал в своей докторской диссертации г-н Сверчковский.

Г) В *Fund. Math*. 41 (1955) топология отнесена к геометрии выпуклых тел: оказывается, например, что произвольно выбранная точка внутри тела есть центр тяжести некоторого плоского сечения данного тела. Идеей использования топологии мы обязаны Х. Ауэрбаху. К тому же периоду относится совместная работа с Куратовским, а также некоторая гипотеза, доказанная Косиньским.

Д) В тот период мной выполнена работа «*Sur les fonctions indépendantes*» в журнале «*Studia Math*.» 13 (1953), посвященная той же модели, что и работа VI из той же серии (см. выше); в той работе (эффективно!) вычислены колебания центра массы 6 миллионов точечных частиц, а в этой оценено равнораспределение тех же точечных частиц. К этой же группе можно также отнести работу «Zagadnienie nieodwracalności» (Проблема необратимости) (Kosmos B, 1955), которую я доложил в Спале на Съезде физиков. В 1957 г. я опубликовал в журнале «*Ann. of Math. Statistics*» (28, 3, pp. 638–648) работу «*The problem of estimation*» (Проблема оценивания). Эта работа стоила мне (буквально!) немало здоровья! Она дает решение проблемы статистического оценивания с помощью новой теории игр (человека с дьяволом — природой). Х. Рубин нашел решение этой проблемы раньше, но не опубликовал; моя работа охватывает случаи, не рассмотренные Рубином. Предложенная мной модель была применена два года назад при оценке производительности работников PAFAWAG.

Е) Моя дидактическая деятельность в университете охватила курсы математического анализа, аналитической геометрии, вариационного исчисления, основ геометрии, элементарной математики и математики для студентов естественнонаучных специальностей, теоретической механики, теории меры и интеграла Лебега, теории рядов Фурье, ортогональных рядов, аналитических функций, теории вероятностей, теории независимых функций, математической географии, математики для медиков, теорий разностных и интегральных уравнений. Вот уже 12 лет я провожу семинар по приложениям математики — 20 сентября 1960 г. состоялось 386-е заседание этого семинара, его целью является применение математики к решению актуальных проблем из области наук естественных, медицинских и общественных. Более 100 человек из математического клана ставили на заседаниях семинара задачи и выступали с докладами. С возникновением Института математики ПАН семинар принадлежит Отделу естественнонаучных и экономических приложений этого института. С одобрения Ст. Скжешевского, высказанного им на Съезде математиков в 1948 г., я занялся составлением элементарных задач для журнала «Matematyka», выходящего раз в два месяца и предназначенного для учителей. Так возникла книжка «*Sto zadań*» (*Сто задач*), выпущенная издательством PWN в 1958 году. Она была опубликована в русском переводе[2], а ныне подготавливается издание ее переводов на английский и японский языки. К дидактике и популяризации следует отнести упомянутый выше «Математический калейдоскоп», а также такие публикации, как «*Rola matematyky*» (Роль математики) — текст моего выступления на конференции под тем же названием (Kosmos B, IV, 2, 1958), «*Wspólpraca różnych nauk*» (Сотрудничество различных наук) (Nauka Polska IV, 16, 1956), «*Matematyka wczoraj i dziś*» (Математика вчера и сегодня) (Kosmos B, V, 18, 1959) и различные популярные выступления по радио и телевидению.

Ж) К этому направлению относятся упомянутые выше философское эссе «*Wnioskowanie indukcyjne*» (Индуктивное умозаключение) (Myśl Filozoficzna V, 25, 1956), статья о прогнозировании (Zast. Matematyki III, 1, 1956) или статья «*O ścisłości matemastycznej*» (О математической строгости) (Matematyka XI, 3, 1958). В первой работе проблема естественной индукции сводится к эволюции рода человеческого, во второй работе трактуется зависимость прогноза от потребителя, в третьей работе критикуются взгляды Л. Шварца на математику. Здесь уместно также вспомнить две работы, которые не были бы написаны без помощи моих учеников (ныне — коллег): о некотором парадоксе в при-

---

[2] Г. Штейнгауз. Сто задач. — М.: Физматлит, 1976.

кладной теории вероятностей (Г. Штейнгауз и Ст. Трибула, Bull. Acad. Polon. III, VII, 2, 1958) и пуассоновских процессах (Г. Штейнгауз и К. Урбаник, Math. Zeitschr., том, посвященный Лихтенштейну). Первая работа обращает внимание на парадокс, возникающий при статистическом сравнении трех разновидностей схожего товара: может случиться, что случайное попарное сравнение штук товара дает систематически в 60% сравнений результат «А лучше, чем В», в 60% сравнений — результат «В лучше, чем С» и в 60% сравнений — результат «С лучше, чем В». Написать 70% вместо 60% невозможно. Граница лежит около 0,618 (золотое сечение!). Вторая работа показывает, каким образом известный физикам пуассоновский процесс можно описать эффективно, полностью исключая вмешательство случая. — Общее число работ: около 140.

Моя формальная карьера протекала следующим образом:

Я — профессор Вроцлавского университета по кафедре прикладной математики, глава Отдела естественнонаучных и экономических приложений Математического института ПАН, действительный член ПАН. Член Математического комитета ПАН, Научного совета Математического института ПАН, член Психометрического комитета ПАН, член Антропометрической комиссии ПАН, председатель Вроцлавского научного общества (избран после двухлетнего перерыва в третий раз). Научные награды: Польской Академии наук, I государственная премия в 1951 году, две премии Польского математического общества (1947, 1951 гг.), научная премия ректора университета (30. X. 1959). Научная премия города Вроцлава (29. IV. 1960), премия журнала «*Problemy*» (Задачи), почетный доктор Вроцлавского университета.

Основатель и первый редактор журнала «*Studia Mathematica*», а также главный редактор журнала «*Zastosowania Matematyki*». Вхожу в состав редакции серии «*Colloquium Mathematicum i Monografii Mat.*»

Награды: Офицерский крест ордена Возрождения Польши, Командорский крест того же ордена со звездой, Знамя Труда I класса.

Имена моих бывших учеников и сотрудников, коллег и других лиц, без которых мои научные достижения были бы более скромными: Стефан Банах, Марк Кац, Х. Ауэрбах, Ю. Шаудер, В. Серпиньский, Збигнев Ломницкий, Ал. Райхман, З. Янишевский, К. Янцен, Станислав Улам, А. Зигмунд, Б. Кнастер, К. Куратовский, Ч. Рылл-Нардзевский, Э. Марчевский, Ю. Перкал, Ю. Лукашевич, Ст. Трибула, Казимеж Урбаник, Ян Одерфельд, Александр Детциус, Х. Фаст, А. Гётц, Ст. Хартман, А. Зяба, Ст. Дробот, Д. Блекуэлл, Отто Тёплиц, Эдмунд Ландау, Л. Гиршфельд, Х. Коваржик, Ян Мицельский и другие.

Дополнение к автобиографическим материалам профессора Штейнгауза

Проф. Штейнгауз вышел на пенсию 30. XI. 1960 года. 16. XI. 1963 года профессор Штейнгауз получил степень почетного доктора (*doktorat honoris causa*) Университета им. Адама Мицкевича в Познани, а 22.XI.1965 года — степень почетного доктора Вроцлавского университета, и 27.V.1961 года — степень почетного доктора Медицинской Академии во Вроцлаве.

В 1968 году был избран почетным членом Польского математического общества.

Профессор Штейнгауз умер во Вроцлаве 25 февраля 1972 года.

Математика вчера и сегодня[1]

Ваше Превосходительство, господа министры, глубокоуважаемые слушатели! Традиция требует торжественно отмечать начало учебного года, и одним из мероприятий является публичная лекция. Я присутствовал на многих таких торжествах, но мне никогда не доводилось слушать на них выступление математика, ибо обычно эта почетная функция доверялась гуманитариям (чаще всего философам или историкам, преимущественно историкам литературы), изредка выпадала юристам, иногда биологам или врачам или даже физикам, но никогда — математикам. Поэтому, когда Его Превосходительство поручил мне прочитать публичную лекцию по случаю начала этого учебного года, нашего четырнадцатого года во Вроцлаве, я сказал себе, что ведь я давно имел на это право. Поэтому я выбрал название, которое должно понравиться гуманитариям, или хотя бы историкам. Увы, признаю это с сожалением, сам я не историк и, возможно, никогда бы не осмелился говорить в этом актовом зале о вчерашней математике, если бы летом не встретил за границей молодого зоолога, польского стипендиата, который задал мне следующий простой вопрос: «Почему все современные теоремы не были доказаны еще в древности?».

Сначала я даже не понял смысла этого вопроса, однако после короткого обмена мнениями загадка разъяснилась. Молодой человек считал принципиальной разницей между биологией и математикой тот очевидный факт, что в биологии все время появляются и применяются новые методы и инструменты. Новым орудием

---

[1] Matematyka wczoraj i dziś — Лекция, прочитанная 6 октября 1958 г. по случаю начала 1958/59 учебного года во Вроцлавском университете.

исследований стали микроскоп (когда его сконструировали физики), микротом (когда его позволила изготовить точная механика) и красящие вещества (когда их открыли химики). Молодой биолог понимал, что математика не может рассчитывать на такую внешнюю помощь (которая в биологии являлась главным двигателем прогресса) и удивлялся тому, что в течение тысячелетий математика не исчерпала всех возможностей, заключенных в античных концепциях, другими словами, не превратилась в мертвую область знаний, подобную грамматике некоего древнего языка.

Я хотел бы сегодня ответить на этот вопрос, который косвенно затрагивает название лекции, однако все же боюсь, что поставил себе слишком трудную задачу: лекция о математике, адресованная публике, среди которой математики составляют меньшинство, не может рассчитывать на резонанс аудитории. Гуманитарии всегда находятся в гораздо лучшей ситуации хотя бы потому, что они говорят общедоступным языком и о понятиях, имеющих конкретные модели… (до какой степени люди не знакомы с математическими моделями, я убедился из передачи одной радиостанции, пользующейся хорошей репутацией: в студии экзаменовали молодого ремесленника, и он не знал, сколько граней имеет куб, на что всеведущий экзаменатор доброжелательно сообщил ему и всему земному шару, что их 8…).

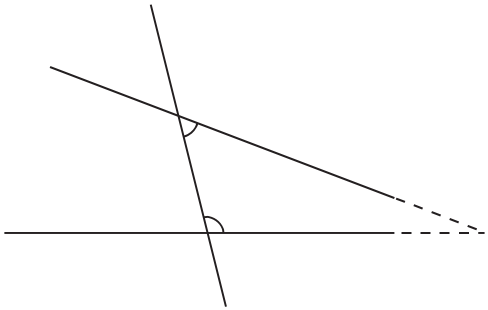
Впрочем, роль математика всегда неблагодарна, не только тогда, когда ему приходится выступать публично. Дело не в том, что математика трудна и непонятна, а в том, что она чужда и непонятна для широкой общественности. Физик или химик гораздо скорее может рассчитывать на отклик общества. Во Вроцлаве есть улица Врублевского и если кто-то спросит, чем этот краковский ученый заслужил уважение общества, то на это можно ответить, что именно он первым в мире получил жидкий воздух, что это открытие практически применяется в современных холодильниках (где нагревание аммиака вызывает понижение температуры). Любой человек с улицы (возможно, даже не знающий, какие пути привели от эксперимента Врублевского к этим парадоксальным следствиям законов термодинамики и к устройству современных холодильников) может понять, о чем идет речь, и что улица справедливо названа именем этого физика. Иначе обстоит дело с улицей Банаха. За исключением немногочисленных специалистов, никто в мире и Польше не знает, чем знаменит Банах, и если бы кто-то из прохожих на этой улице даже спросил бы экспертов-математиков, то они не нашли бы подходящих слов для ответа по существу.

Представим себе, что этот прохожий — журналист, и что он решил пополнить свою картотеку вырезками из польских и иностранных газет с разнообразной полезной информацией (не пренебрегая, как подобает истинному журналисту, даже сплетнями и слухами), позволяющей кратчайшим путем получить ответ на вопрос — кто и почему имеет право называться математиком. Ячейка «Математика» в его картотеке заполнилась бы очень быстро, где оказались бы и официальные сведения о том, что в текущем году все польские университеты принимали кандидатов на отделения математики без всяких ограничений, тогда как другие отделения ограничили число поступающих количеством мест. Там оказалась бы вырезка из ежемесячника KOSMOS, где сообщалось о письме, направленном из Кракова учащимися одной из общеобразовательных школ на имя члена Государственного Совета Ежи Завейского с просьбой посодействовать отмене преподавания в школах математики, поскольку (по мнению этих учащихся) математика ни для чего не нужна. А, возможно, там окажется и комплект лондонского еженедельника «Observer», где публикуются все объявления заводов, ищущих математиков, — их можно найти почти в каждом номере и подумать, что в Англии не хватает математиков, коль скоро объявления обещают им прекрасные условия. В связи с этим можно поинтересоваться подобными объявлениями в нашей прессе и… не встретить ни одного. Однако в приложении к Trybuna Ludu можно найти цитату из «*Traktat*» Котарбиньского о «хорошей работе» и прочитать следующее суждение: «…современные тенденции развития промышленности придают большое значение совершенствованию способностей действующих субъектов в направлении все большей интеллектуализации и преобладания знаний и скорости мышления над точностью управления механизмами». Прочитав эту ученую формулировку, следует задуматься о том, имеем ли мы достаточное число математиков? Желая глубже исследовать эту проблему, мы начнем листать американские информационные ежемесячники и найдем в *American Mathematical Monthly* (64, 1957, с. 557–566) статью о практической стороне математики. Автор статьи, Р. Ю. Гаскелл говорит, что практическая сторона дела существенно зависит от общественного мнения о том, для чего существуют математика и математики. «К счастью, — пишет Гаскелл, — математика глубоко проникает на рынки сбыта, но, тем не менее, повсеместно распространено неверное представление о том, что такое математика и что она может. Более того, у некоторых людей вырабатывается интенсивное, агрессивное и заразительное невежество… Можно найти таких, которые думают, что математикам легче, чем кому-либо, помнить, что происходит при игре в бридж, а другие не видят разницы между математиком и бухгалтером. Инженеры и некоторые специалисты отождествляют математику с формулами, диаграммами, графическими схемами и вычислительными машинами…».

На этом пути наш исследователь может случайно натолкнуться на характеристику Стефана Банаха, помещенную вскоре после его смерти (в 1946 г.) в *Bulletin of the American Mathematical Society* (52, с. 600–603). В этой очень краткой (но, одновременно, очень меткой и интересной) характеристике мало предложений, непонятных для дилетанта, но именно они отвечают на вопрос, почему на сегодняшний день в каждом ежемесячнике, посвященном актуальным математическим проблемам, можно найти имя Банаха. Причина заключается в том, что так называемое «банахово пространство» стало общепринятой универсальной концепцией, на основе которой постоянно появляются всё новые работы. Неутомимый журналист начнет искать персональные сведения и заинтересуется авторами некрологов об этом львовском математике. Если ему повезет, он доберется до статьи-некролога, опубликованной в одной из американских газет (озаглавленной «Ученый, признанный слишком поздно»), автором которой является Станислав Улам, ученик Банаха. Закончив политехнический факультет Львовского университета, Улам получил степень доктора, но коллекционера вырезок гораздо больше заинтересует информация из другой американской газеты (предоставленная Сенату США сенатором Клинтоном П. Андерсоном, председателем комиссии по изучению полетов в межпланетном пространстве) о том, что именно Улам (а не Эдвард Теллер, как считалось раньше) первым предложил создать водородную бомбу. Те немногие жители Львова, которые помнили, как Банах с Уламом целыми часами беседовали друг с другом в львовских кафе (наскоро поясняя свои слова загадочными символами, нарисованными карандашом на крышке столика), наверняка не предполагали, что один из собеседников 10 лет спустя возьмет на себя ответственность за то, что первая попытка осуществить цепную реакцию в крупных масштабах может закончиться буквально ничем. Вероятно, ни случайные свидетели этих бесед, ни сами собеседники не могли предвидеть такого развития событий. О чем мог тогда разговаривать Банах со своим учеником? Возможно, о теореме Банаха–Тарского, которая позволяет разделить шар на несколько частей так, чтобы из них можно было сложить шар большего размера, чем исходный. Этой математической теореме пока не нашлось никакого применения (возможно, она никогда не найдет применения) и она вызывает возражения у каждого физика. Однако на основе евклидовой геометрии можно вывести и другие парадоксальные логические умозаключения, ничем не отличающихся от тех, которыми математики пользовались в течение многих веков...

Это снова заставляет вспомнить об интерпретации биолога, которую можно сформулировать в форме почти нелепого вопроса: «Почему Евклид не знал теоремы Банаха–Тарского?».

Евклид является первым математиком в самом широком смысле этого слова. Он создал геометрию, т. е. ту элементарную геометрию, которую греческие учителя преподавали детям римских патрициев и которую в английских школах до недавнего времени называли просто «Евклид». Именно ее всем нам вбивали в голову и именно ее отмены сегодня добиваются краковские ученики от Ежи Завейского. В связи с этим, стоит заглянуть в оригиналы книг Евклида с должным уважением, ибо они были написаны за 300 лет до Рождества Христова в Александрии, которая в то время была центром эллинистической культуры. По-гречески название этих книг звучит как «Stoicheia», что переводчики на латынь воспроизвели как «Elementa» (в переводе на русский язык — «Начала Евклида». — М.-Л.: Гостехиздат, 1948–1950). Книги начинаются с определений и аксиом, которые делятся на две группы. Первая из них охватывает «koinai ennoeiai» (т. е. знакомые всем свойства и отношения, не вызывающие сомнений — эта группа напоминает основные положения современной теории множеств), а вторая начинается с императива «aitestho», соответствующего современным оборотам «следует принять» или «примем, что». Следовательно, их следует считать постулатами, а их введение демонстрирует, что Евклид понимал роль соглашений (и даже их необходимость) в основах геометрии. Пятнадцать книг содержат несколько сотен теорем, каждая из которых является логическим следствием определений и аксиом, и каждая из них сопровождается доказательством. Однако совершенство евклидовой системы проявилось только в современной математике, а история этого открытия поистине захватывающая. Еще древним ученым (а среди них и великому Птолемею из Александрии, отцу астрономии) не нравился евклидов постулат о параллельных: две прямые на плоскости пересекаются третьей, с которой образуют углы, сумма которых меньше половины полного угла, лежащего по обе стороны от пересекающей линии. Считается, что этот постулат, который позже получил название XI аксиомы, в то время был слишком сложным и обрекал «Elementa» на то, чтобы они не представлялись очевидной истиной. Делались также попытки вывести этот постулат из остальных аксиом, но дотошные читатели всегда обнаруживали ошибки в этих попытках, которые чаще всего заключались в выводе XI аксиомы благодаря интуитивному введению какой-то новой аксиомы, равнозначной этому постулату. Эти бесплодные попытки продолжались вплоть до XIX века, но только около 1825 г. этой недоступной вершины геометрии



удалось достичь независимо друг от друга трем гениальным людям. Это были Гаусс, Бойяи (младший) и Лобачевский.

Семья Бойяи происходила из Трансильвании, и оттуда Каспар Бойяи де Бойя переехал в Венгрию, в Марош-Вашархели. Его сын Вольфганг был необычайно способным ребенком. В XVII веке трансильванская аристократия имела обычай посылать своих сыновей для получения образования в Германию, и благодаря помощи трансильванских баронов обнищавший Каспар послал своего сына в Геттинген. Вольфгангу был 21 год, когда там он познакомился с Гауссом, который был на два года моложе. Когда однажды мать Гаусса спросила Вольфганга, кем станет ее сын, Карл Фридрих, Вольфганг без раздумий ответил: величайшим европейским математиком… Гаусс и Бойяи уже тогда занимались XI аксиомой.

Несколько лет спустя Гаусс вернулся в Брунсвик, где погрузился в работу, которая позволила ему получить прозвище «короля математиков» и (кроме разных областей математики) охватывала многие области науки: механику, теорию электричества, астрономию и геодезию. Но эта работа не принесла ему никакой материальной выгоды и вызвала недовольство всей семьи. Его коллега Бойяи должен был вернуться в Марош-Вашархели и ради заработка стал профессором математики в местном университете, а потом и его ректором. Дружба с королем математиков продолжалась, но XI аксиома оставалась загадкой для Вольфганга Бойяи, который постоянно делал попытки доказать ее и столь же постоянно опровергал их. В 1804 году он послал Гауссу свою последнюю версию под названием «Геттингенская теория параллельных» с просьбой к нему высказать свое мнение. Гаусс неожиданно быстро ответил ему в дружеском тоне и обстоятельно, что он сам хотел бы развязать этот гордиев узел, но все его усилия оканчиваются безрезультатно. Содержащееся в «Геттингенской теории параллельных» доказательство Гаусс считал неудовлетворительным и указывал, в чем состоит ошибка (хотя сегодня подробно излагать суть упрека Гаусса не сто́ит). Гаусс считал, что Бойяи использовал то же самое рассуждение, согласно которому Зенон Элеатский заключил, что быстрый Ахиллес никогда не догонит медленную черепаху.

У Вольфганга был сын по имени Ян, и из его писем Гауссу мы знаем, что, заканчивая школу в Марош-Вашархели, 15-летний Ян уже знал дифференциальное и интегральное исчисления и решал задачи из аналитической механики. В 10 лет он играл первую скрипку в классических квартетах и сам сочинял произведения; он также был прекрасным латинистом, как и его отец. Мечтой молодого Бойяи было остаться дома и посвятить себя математике, но недостаток денег, последствия непрактичности и различных неудач отца в хозяйственных делах вынудили Яна обратиться за помощью. И снова такую помощь ему оказал один из богатых трансильванских друзей семьи, обещая в течение 4 лет оплачивать обучение молодого человека в Военно-инженерной академии в Вене и все связанные с этим расходы. Когда Ян закончил академию в звании подпоручика, это был уже отличный офицер. Высокий брюнет с темноголубыми глазами, искусный наездник, лучший математик в академии, непобедимый мастер фехтования, срубавший железные крюки саблей дамасской стали, он был постоянной заботой отца, который в своих письмах предостерегал его от дуэлей и увлечения женщинами. Но еще больше он предостерегал его от попыток обосновать XI аксиому. Вот выдержка из письма, датированного 1820 годом: «Не вступай на эту дорогу, я знаю ее всю до самого конца — я тоже шел по ней и днем и ночью, на ней угасли все радости моей жизни — молю Бога, оставь в покое науку о параллельных…». И несколькими строками ниже: «…я хотел пожертвовать собой ради истины, был готов стать мучеником, только чтобы вручить роду человеческому геометрию, избавленную от этого белого пятна…». И далее: «Здесь кроется корень всех моих позднейших ошибок и неудач…». И наконец: «Здесь находятся Геркулесовы столбы, не иди ни на шаг дальше, ибо погибнешь…».

Так ответил отец на письмо Яна, который весной 1820 г. сообщил ему из Вены о своих попытках обосновать XI аксиому, но запреты еще больше разожгли амбиции молодого офицера, который решил исследовать проблему любой ценой. В 1823 г. он пишет на четвертушке бумаги: «…я нашел нечто такое, что сам удивляюсь…но пока не могу сказать ничего, кроме того, что это открывает новый, совершенно иной мир». Когда Ян в 1825 г.

навестил отца в Марош-Вашархели, открытие абсолютной геометрии (так он ее назвал) было уже совершено, но затем появились разочарования. Первым было то, что отец не мог понять, что существует бесконечно много разных геометрий, когда опровергается XI аксиома, и что вопрос об истинности или ложности этой аксиомы не имеет смысла, ибо и она и ее отрицание вместе с остальными аксиомами образуют систему, свободную от противоречий. Когда в 1830 г. Яна перевели из его первого гарнизона в Темешваре во Львов, он решил при посредничестве отца отдать свою работу для оценки Гауссу, однако рукопись пропала, и до Геттингена в 1832 г. дошла лишь другая, улучшенная ее версия. Гаусс ответил, что работа согласуется с его собственными размышлениями, которые занимали его в течение последних 30 лет, и он рад, что сын его старого приятеля его опередил. В письме другому своему приятелю он называет Яна гением первой величины и признает, что его собственные идеи были далеки от той зрелости, которой достиг младший Бойяи. Однако это не удовлетворило безграничных амбиций Яна, который даже не поверил, что Гаусс пишет правду, и стал подозревать, что его собственный отец обманным путем выдал приятелю секреты новой геометрии. Это нелепое подозрение отдалило Яна от обоих людей, понимавших важность этой проблемы, а никто другой из окружения молодого Бойяи не мог их в этом заменить. Ян стал затворником, росли его претензии ко всем, особенно к отцу, которого он даже вызвал на дуэль. В служебной характеристике, данной его войсковым начальством, записано: «…в 1832 г. за некую брошюрку получил благодарность от советника королевского двора Гаусса, одного из величайших математиков…пригоден к должности профессора математики...». И далее: «скуп на слова, раздражителен, вспыльчив, избегает общества офицеров, в инженерной службе не проявляет усердия, заядлый шахматист…».

В 1833 г. Яна отправили на пенсию; его дальнейшая судьба – это история одинокого человека, поссорившегося с семьей и окружающими. Из блестящего офицера он превратился в разорившегося чудака, деклассированного дворянина и скандалиста, на которого указывали пальцем, и только скрипка и математика спасали его от окончательного падения. Когда в 1860 г. он умер в Трансильвании, никто там и не узнал, что ушел из жизни один из величайших мыслителей.

Когда идет речь о вчерашней и сегодняшней математике, то Вольфганга Бойяи следует считать представителем вчерашней, а его сына — сегодняшней математики, так же как и Лобачевского, который одновременно с Гауссом и Бойяи-младшим открыл неевклидову геометрию. Незнание на Западе русского языка было причиной того, что работы Лобачевского, написанные в Казани, слишком поздно дошли до Германии и дальше. В чем смысл неевклидовой геометрии? Она не доказывает ни то, что в плоскости через точку, не лежащую на прямой, проходит только одна параллельная ей, ни то, что таких параллельных больше одной. Именно Ян Бойяи в своем дополнении к сочинению «Tentamen» Вольфганга Бойяи доказал, что утверждение о единственности параллельной, равно как о множественности параллельных, согласуется с остальными аксиомами Евклида, и что Евклид был прав, поместив XI аксиому среди постулатов. Если бы этот постулат был опущен, получилась бы так называемая пангеометрия, а если его заменить утверждением о множестве параллельных, то получилась бы неевклидова геометрия Бойяи–Лобачевского. Двигаясь по этому пути дальше, современная математическая логика в лице Гёделя пришла к выводу, что это противоречие (которое Вольфганг Бойяи называл белым пятном, упущением Создателя всего сущего) является особенностью любой системы аксиом: ни одна система аксиом не является полной, ибо в каждой из них можно сконструировать неразрешаемое суждение.

Почему открытие иных геометрий, которые и сегодня неизвестны даже высокообразованным людям (если только они не являются математиками), следует считать решающим этапом в истории науки? Разве можно придавать значение таким открытиям, которые только с трудом можно объяснить, и то лишь незначительному проценту высокообразованных людей? Дело в том, что элементарная геометрия, положения которой установил Евклид (ее изучают в общеобразовательных школах и она доступна большей части молодежи), прекрасно подходит для описания твердых тел и объяснения простейших оптических явлений. В ее основе лежит опыт многих поколений и приобретенные на заре человечества знания о поведении таких тел, а аксиомы Евклида являются лишь изложением знаний о пространстве, полученных с помощью зрения и осязания. Это и есть главная причина, по которой другие геометрии долго считались невероятным вымыслом ученых с целью запутать и затемнить простые и ясные вещи.

Среди не понявших новую геометрию оказался даже австрийский физик и философ Эрнст Мах, который в последнем десятилетии XIX века изложил свою критику понятий и утверждений физики. Именно Мах первым поставил вопрос о том, что смысл утверждений физики сводится к наблюдениям, а язык физики должен быть таким, чтобы каждое суждение можно было подтвердить или опровергнуть экспериментально. На целое поколение раньше Маха Бернхард Риман в Геттингене далеко продвинул неевклидову геометрию и верил в возможность такой физики, для которой старой геометрии недостаточно. Несомненно, Альберт Эйнштейн был последователем Римана и Маха. Влияние Маха обнаруживается в отказе от абсолютного времени, т. е. такого времени, которое нельзя определить экспериментально, а влияние Римана проявилось в позднейшем труде Эйнштейна и в его готовности принять неевклидову геометрию, если она облегчит формулировку понятий на языке новой физики. Как известно, так называемая специальная теория относительности объяснила эксперимент Альберта Майкельсона, который показал, что вращение Земли вокруг Солнца не влияет на оптические явления, наблюдаемые в системе зеркал и линз, связанных с Землей. Этот эксперимент нанес удар по концепции абсолютного пространства. Эта теория относительности, которой ныне исполнилось 50 лет, в физике произвела такую же революцию, которую совершили Бойяи и Лобачевский в геометрии. А какая польза от нее для широких кругов общественности? Почти никакой, если не считать некоторых изменений в фразеологии, например, журналисты стали охотнее смешивать представления о времени и пространстве. Например, стало возможным писать «на протяжении последних лет» (такой своеобразный оборот был использован в отношении одного недавно умершего ученого, который, хотя и не был математиком, однако завоевал право на почетный титул лауреата премии имени Бойяи). Не только в общеобразовательной школе, но даже в университетском курсе физики трудно донести до студентов основы теории относительности.

Многие пути ведут из вчера в сегодня, и мы наметили всего лишь набросок одного из них — от Евклида через Яна Бойяи к современной физике. Среди многочисленных читателей Евклида, возможно, наиболее любознательным был Блез Паскаль. Воспитание сделало его великим человеком, подобно тому, как это было с Тауринусом, Бойяи-младшим и Стюартом Миллем. Кажется, он еще ребенком самостоятельно дошел до нескольких евклидовых теорем, за что и получил в подарок «Elementa». Это в его сочинениях мы находим альтернативу «esprit de géometrie — esprit de finesse» (дух геометрии — дух проницательности), которая подчеркивает различие духа математического и духа гуманитарного, хотя сам он был примером сочетания их в одной личности.

В молодости Паскаль некоторое время входил в компанию игроков. В 1654 г. он написал одному из своих бывших друзей письмо об игре в кости, в котором изложил основы вычисления вероятности благоприятного исхода в азартных играх. Этот расчет приобрел наибольшее значение только тогда, когда его стали использовать в иной модели, совершенно не связанной с игрой в кости. Такой моделью является множество материальных частиц, а именно так представляли себе газ Дж. Клерк Максвелл, Людвиг Больцман и Мариан Смолуховский. В течение полувека, завершившегося Первой мировой войной, эти трое ученых создали так называемую кинетическую теорию материи. Положения теории вероятностей, примененные к хаосу миллиардов невидимых материальных частиц, дали те законы, которые физики значительно раньше сформулировали как свойства газов, но получали их без помощи математики, из непосредственного наблюдения газа, заключенного в сосуде и подвергаемого сжатию или нагреванию. В чем же было дело? Просто в применении термодинамики к механике, в демонстрации того, что механика, которая так прекрасно предсказывает движение одной гигантской планеты, столь же хорошо может предсказать траектории целого роя частиц в замкнутом объеме. Как бы то ни было, а математика доказывает, что классическая механика Ньютона является универсальной. Известно, что эта механика позволяет предсказать траекторию снаряда по его начальному положению и начальной скорости, но такая информация о каждой частице газа недоступна. Мы не можем вычислить траекторию каждой отдельной молекулы из миллиарда других, но даже если бы и могли, все равно не сумели бы вывести из этого никакого закона физики, просто воспользовавшись теорией вероятностей для вычисления средних скоростей молекул или их полного импульса при сжатии газа поршнем в цилиндре. Этого можно добиться лишь благодаря так называемому закону больших чисел, и расплачиваемся мы за это преклонением перед неким божком, который из-за зеленого игрового столика пересел за письменный стол физика-теоретика. Этим божком является так называемый «случай». За последние 30 лет оказалось, что можно попытаться исключить этот неопределенный случай и очень далеко продвинуть математические основы теории вероятностей. Быть может, даже удастся (к радости ортодоксальных детерминистов) полностью исключить теорию вероятностей из классической физики, однако в квантовой физике она сохранит преобладающее значение. Во всяком случае, это исключение является заботой математиков, и они должны объяснить, почему это недостижимо (если дело обстоит именно так).

От того же Паскаля тянется еще одна линия, ведущая к созданию вычислительных машин. Паскаль даже построил первую такую машину, но она была просто интересной игрушкой, которая никогда не использовалась на практике. Слабой (в буквальном смысле этого слова) ее стороной были шестеренки, так как в то время механики еще не умели придавать зубцам требуемый геометрический профиль. В машине использовали примитивные колышки-«пальцы», вмонтированные в торец круга, которые легко ломались при быстрых оборотах. Лишь после того как технологи научились вытачивать зубья циклоидального профиля, удалось построить вычислительную машину, пригодную для практического применения — сегодня это очень широко распространенное устройство (арифмометр). Но тут неожиданно подоспела помощь со стороны электронной техники. Электронная лампа в машине просто играет роль контакта, который пропускает ток или прерывает его. Никакой обыкновенный контакт не может изменять свое состояние миллионы раз в минуту, а электронная лампа может, так как инерционность электронов ничтожно мала по сравнению с наилучшими механическими элементами. Для чего необходима такая скорость? Вряд ли она необходима для решения таких вычислительных задач, которые изо дня в день выполняются в строительных конторах или в банках. Скорость вычислений важна в задачах с громоздкими вычислениями, простейшим примером которых выступает построение баллистических таблиц. Нетрудно подсчитать, где будет находиться орудийный снаряд через 1/100 секунды после выстрела, и какую он будет иметь скорость с учетом сопротивления ветра, так как эти параметры определяются четырьмя числами. Используя еще раз эти же формулы, можно по этим четырем числам найти другие четыре, которые дадут положение и скорость снаряда через следующие 1/100 секунды и т. д. Повторяя эти операции несколько тысяч раз, можно представить себе всю траекторию снаряда. Поскольку траектория меняется в зависимости от угла подъема ствола орудия, необходимо вычислить сотни траекторий, чтобы получить полную таблицу. Именно для решения таких задач необходима быстродействующая машина, которая способна за несколько часов выполнить все операции, благодаря быстродействию ламп и непрерывной передаче исходных данных на вход машины по электрическим проводам.

В чем заключается роль математика, имеющего в распоряжении такую машину? Его хлебом насущным является быстрое кодирование таких задач, которое заключается в шифровании команд путем пробивания отверстий в перфокарте, ибо машина понимает только такой шифр. Самые новые машины вообще стали универсальными, и недавно у математиков появились задачи иного типа. Например, потребовалось составить для машины инструкции, позволяющие ей играть в шахматы против человека, и эту задачу удалось решить, хотя и не до конца (о чем я скажу еще несколько слов позднее). Какая проблематика возникает на основе новых возможностей, видно из памятной записки, еще не опубликованной и подготовленной группой математиков по заданию фирмы IBM, производящей новейшие вычислительные машины. Документ содержит несколько идей и предложений, которые я, впрочем, не цитирую дословно. Авторы утверждают, что до сих пор быстродействующие машины используются исключительно для решения задач математической физики или техники, причем производительность машины полностью определяется закодированными инструкциями и последовательностью их исполнения. Известно, что человек использует иной подход и способен изменять план действий в процессе работы. В памятной записке предлагается новый способ, представляющий собой нечто среднее. Вместо того чтобы предоставить машине действовать самостоятельно, ее можно было бы объединить с человеком, который во время работы видит промежуточные результаты, вмешивается в последующие действия и даже изменяет алгоритм решения задачи. Такое взаимодействие называется «синергетикой» — примером может служить взаимодействие водителя с автомобилем, когда человек получает информацию о положении на дороге, и на основе этих данных, например, изменяет скорость, уменьшая ее там, где предстоит поворот или где он видит нужный номер дома… При игре в шахматы с машиной можно позволить ей выступить в качестве советника, который время от времени исследует последствия нескольких ходов, а затем позволяет человеку играть дальше. Один из авторов памятной записки посвятил меня недавно в идею будущих машин, поведение которых в некоторых ситуациях будет детерминированным (как до сих пор), а в других — вероятностным (т. е. отдельные лампы будут изменять свое состояние случайным образом). Машины такого типа можно было бы использовать для исследования явлений, которые частично протекают в соответствии с законами классической физики, а частично в соответствии с теорией вероятностей — такие ситуации часто встречаются на практике (например, в строительных конструкциях, элементы которых подвержены случайным изменениям).

Новейшие машины являются примером того, как техника оказала существенное влияние на развитие математики, и в первую очередь в направлении математического мышления. Но есть одно исключение, напоминающее то, что в биологии является правилом: это внешняя помощь, помощь аппаратуры. Основная черта математики в том, что она развивается автономно, и на вопрос нашего зоолога мы должны ответить, что прогресс математики выглядит совсем иначе, нежели прогресс естественных или гуманитарных наук. Ее развитие идет ввысь, подобно совершенствованию живого организма. Вне всякого сравнения в ней отчетливее, чем в других дисциплинах, проявляется происхождение человека. В настоящее время на земле одновременно живут люди, которые по уровню знания математики принадлежат к эпохе древнеегипетских пирамид (такие люди составляют значительное большинство), небольшой процент дорос до уровня средневековья, а до XVIII века едва ли дошел один человек из тысячи. По-видимому, первобытный человек не может стать математиком за счет только эволюции, так как чрезвычайно короткий процесс развития (определяемый биогенетическими законами) не позволяет получить изменения мозга, которые превращают неандертальца в Паскаля. Все новые и новые поколения людей должны пройти тернистым путем, который невозможно сократить, так что, как говорили в древности, «в математике нет королевской дороги». Образно говоря, дистанция между авангардом и огромной массой странников увеличивается, процессия растягивается и лидеры, идущие впереди, становятся все более одинокими. Они исчезают из виду, о них мало кто знает, о них рассказывают фантастические истории. Некоторые люди в процессии вообще перестают верить в их существование.

Вернемся к картотеке. В предназначенном для учителей журнале *L'École du Grand Paris* выдающийся французский математик Лоран Шварц опубликовал статью о тенденциях современной математики. По мнению автора: «математика — наука наиболее абстрактная и одновременно наиболее независимая от внешнего мира и от текущей жизни, но с другой стороны — это предмет, который практически ничего не может рассказать нематематикам о современной математике». Иными словами, профессор Сорбонны констатирует, что практически не имеет смысла читать лекции, подобные настоящей,… и он почти прав. Но его первый тезис является лишь подготовкой к следующему, суть которого в абсолютной произвольности выбора проблем, и этот тезис я считаю значительно опаснее первого, ибо автономия науки заключается в *свободе* выбора, а не в его произвольности. Бурный прогресс всех отраслей знаний (который скорее заслуживает названия мутации, чем эволюции) и, что не менее важно, изменения в мире материальной культуры полностью доказали фиктивность веры в то, что каждая математическая теория когда-нибудь для чего-нибудь пригодится, хотя здесь бывают и приятные неожиданности. Современный математик Норберт Винер заметил, что математическая теория управления имеет фундаментальное значение для физиологии, ибо живой организм подобен нынешним саморегулирующимся автоматам. Эту доктрину он назвал кибернетикой, а ее главный принцип — обратной связью. Обратная связь заключается в непрерывном измерении отклонения между направлением движения и поставленной целью и в использовании этого отклонения управляющим устройством для автоматической и непрерывной корректировки движения. Применим этот принцип к шествию авангарда процессии математиков сквозь историю – здесь обратная связь требует знания конечной цели, которую никогда нельзя упускать из виду. Но цель всего шествия не может указать отдельно взятая личность, которая свободна только в выборе дороги к цели…

Как я уже говорил, практическое значение математики зависит от того, каково мнение общественности о математике и математиках. Жаль, что никто до сих пор не проводил соответствующих опросов, ибо их результаты были бы сенсационными. Люди, близкие к техническим наукам, знают о роли классической математики в инженерном деле и машиностроении, но считают ее второстепенной; к такой точке зрения их склоняет назначение математических справочников. Их очень удивляет, когда, например, кто-то говорит, что вроцлавское общество технической математики решило проблему оболочек и куполов, представив их оптимальную форму для каждого контура. Удивление возникает потому, что эмпирики не понимают категорических суждений такого рода. Более того, нематематик чувствует себя особенно задетым за живое, когда кто-то делает из его предпосылок заключение, превышающее его воображение. Математики этим занимаются профессионально и добиваются признания вопреки мнению дилетантов. Распространено мнение, что в промышленности, горном деле, средствах связи, торговле и денежном обороте иногда возникают трудности вычислительного характера, но нет никаких математических проблем. Занять должность математика на какой-нибудь фабрике у нас невозможно, потому что никакой директор никогда не слышал о чем-либо подобном (речь идет об образованных директорах, а не о таких, которые заставляют математика составлять платежные ведомости). Разумный директор спросит себя: что должен математик делать целый день на фабрике? Ответ на это мы находим в цитированной ранее работе Котарбиньского, где говорится, что хороший организатор должен не действовать, а только наблюдать за всем происходящим (польская поговорка гласит, что «от хозяйского глаза скотина жиреет», и это можно отнести как к живому коню или ослу, так и к механическому!). Например, перед математиком на текстильном предприятии можно поставить скромную задачу, которую он смог бы решить после года бездельничанья на фабриках: установить оптимальный выпуск продукции. Такая задача вполне достойна математика, ибо даже распределение 10 работников между 10 разнородными автоматами, обеспечивающее максимальную производительность, не является шаблонной вычислительной задачей. Не следует, однако, возмущаться по поводу директоров или руководителей более высокого ранга, ибо даже Генри Форд-старший считал математику совершенно ненужным балластом в техническом образовании. Меня скорее удивляет не Форд, а естествоиспытатель (ученик Бенедикта Дыбовского и Нусбаума-Хиларовича), который на заседании Краковской академии по поводу серологической экспертизы (для объективной оценки доли ошибочных решений в делах по установлению отцовства) воскликнул: «чутье и вера говорят мне больше, чем стекла прибора и глаз умника!».

Итак, каково же будущее польских математиков? Я говорю о математиках творческих и самостоятельных, ибо иным место в общеобразовательных школах. Выдающиеся по таланту математики (из упоминавшегося выше авангарда) занимают прекрасные должности в высшей школе, в университетах и политехнических институтах, в промышленности и в различного рода производстве… Но где? В Соединенных Штатах, куда мы уже давно поставляем наших выпускников. Там также многие директора не верят в необходимость математики, но и спрос на должности математика не так уж велик, поскольку американская молодежь предпочитает конкурировать в других областях. Польские математики имеют высокий курс на заморской бирже труда. Наше государство обучает их, не скупясь на слова благодарности, однако не находит для них надлежащей роли. Должны ли мы их экспортировать или предлагать в качестве рекламного продукта с надписью «не для продажи»? Действительно, наша техническая отсталость затрудняет осознание значения современной математики и, следовательно, уменьшает роль математиков, но без математики мы не преодолеем техническое отставание. Если мы хотим догнать других, то должны надеть сапоги-скороходы, а их имеет на складе только современная (но никак не вчерашняя!) математика.

Неприязнь к практике у ученых и неприязнь к теории у практиков ведет к накапливанию математических результатов в тщетной надежде, что мы используем эти интеллектуальные запасы в будущем или другие страны используют их сейчас. Но другие страны уже сегодня сетуют на недостаток литературы по математике! Один из участников прошедшего недавно Международного Конгресса в Эдинбурге, который неоднократно демонстрировал умение предвидения и универсальной ориентации, пишет, что математика явно отстает от фантастического развития физики, астрономии, а также биологии и технологии. Итак, мы должны помнить, что безграничное ожидание, когда появятся потребители науки, не является разумной тактикой. В странах, которые осознали необходимость применения математики, мы видим особый интерес к проблемам преподавания математики. К этим странам относятся Италия, Бельгия и Югославия, по их примеру и Франция сейчас задумалась о реформировании образования с тем, чтобы математика дошла до гораздо большей части молодежи, чем ныне. Ответственные круги отдают себе отчет в том, что без математики нельзя выдержать соревнования с теми странами, где математика в почете. С другой стороны, история и опыт отчетливо указывают на то, что бóльшая часть молодежи либо вообще не понимает математики, либо понимает, но не находит в ней ничего интересного, а у нас подумывают даже о введении обучения математике для лиц, не имеющих призвания к педагогике.

Я не верю, что какие-либо новые дидактические приемы могут радикально увеличить долю понимающих математику в школе. Подводя итоги экспериментам педагогов, мы оказываемся перед дилеммой: либо уступить требованиям краковских школьников и отменить математику (кроме простой арифметики и элементов планиметрии), либо поступить так, как учит природа, которая разбрасывает тысячи зерен, хотя лишь несколько из них упадут на плодородную почву. И из этих нескольких зерен позже вырастут Паскаль, Гаусс и Бойяи…

Что такое математика и на чем основан ее прогресс?[1]

Немодный ныне Уайлд сказал, что каждый называет своей специальностью то, в чем он меньше всего понимает. Смысл этого парадокса, пожалуй, сводится к следующему утверждению: подобно тому, как рыба, по всей вероятности, не отдает себе отчет в том, что такое вода и каковы ее свойства (точно так же юрист редко задумывается над сущностью законов, а биолог не волнуется по поводу определения жизни), так и математик не часто думает и говорит о том, что такое математика. Такие вопросы возникают только при контакте с нематематиками, так как рыба, вероятно, лишь выпрыгнув из воды, замечает ее поверхность, ее границы и ее специфические свойства. Например, очень трудно определить, что такое химия. Сказать, что она изучает состав материальных тел, будет явно недостаточно, ибо перед этим необходимо определить, что мы понимаем под «материей» (при этом, именно химия и физика дают нам средства для выработки понятия материи). Несмотря на то, что химия уже в прошлом столетии была достаточно развита, знание ее основ очень редко становилось предметом интереса профессиональных химиков — импульс для таких исследований дала современная физика. Точно так же импульс к занятиям основами математики дало наше столетие — он поступил со стороны математиков, интересующихся

[1] Статьей «Czem jest matematyka i na czem polega jej postęp?» проф. Штейнгауз открывает серию популярных математических лекций, прочитанных зимой 1926–27 гг. перед профессорами Университета и Политехнического института во Львове. Ввиду того, что между математикой и естествознанием укрепляется все более тесная связь, нам кажется очень важным познакомить естествоиспытателей с актуальными проблемами математики. *Редакция «Kosmos».*

логикой, и логиков с математическим образованием, которые и занялись основами и определением математики.

Слово «логик» здесь означает вовсе не человека, мыслящего логически, а специалиста, занимающегося механизмами мышления, определения, умозаключения и аргументации. Речь идет о чисто формальном механизме, позволяющем ему из одних суждений выводить другие (независимо от их сущности). Довольно давно было установлено, что математика является такой системой логически связанных суждений, и уже Лейбниц в начале XVIII века отдавал себе в этом отчет. Тем труднее в популярной лекции представить, что такое математика и что лежит в основе ее прогресса. Свободные математические суждения не только не дают надлежащего представления о безграничности и важности этой науки, но и не позволяют должным образом оценить огромных усилий поколений, необходимых для постановки математических проблем и для преодоления трудностей, встречающихся на путях, ведущих к их решению. Роль популяризатора математики осложняется дополнительно и тем, что этой науке настолько редко уделяется внимание в обычных лекциях, что даже сама техника популярного разговора о математике не определена должным образом.

Математика подобна башне, фундамент которой был заложен много веков назад и в которой все еще достраивается верхний этаж. Чтобы оценить общий ход строительства, надо подняться на самый верхний этаж по очень крутой лестнице с множеством ступеней. Роль популяризатора состоит в том, чтобы втащить слушателя в лифт и довезти к вершине, откуда он не увидит ни промежуточных этажей, ни веками украшавшихся комнат, но сможет убедиться, что здание очень высокое и продолжает расти.

Вместо попыток одним предложением определить, что такое математика, мы постараемся «показать» ее, причем не только из-за трудности дать общее определение, но также и потому, что, как нам кажется, иногда за математику принимают нечто, чем она наверняка не является.

Существует некий сатирический взгляд на математику, точнее даже два таких взгляда. О них часто можно услышать в вагоне или в салоне или прочитать в книгах и журналах. Многие весельчаки во время непринужденной беседы могут рассказать забавные вещи о математике. Например, считается, что математики — это люди, для которых наибольшее удовольствие представляет умножение в уме 10-значных чисел на 12-значные, запоминание страниц из таблицы логарифмов или просто коллекционирование необычных чисел. Для разнообразия можно рассказывать и прямо противоположные истории о том, как математики плохо вычисляют (например, анекдот о том, что первый встречный лавочник способен задать жару математику, рассчитав в уме сложный процент, пока математик листал таблицы логарифмов, чтобы не ошибиться в вычислениях).

Естественно, реальная жизнь совершенно не соответствует этим рассказам. Математики обычно не являются хорошими «счетчиками» или счетоводами, но считают не хуже других средне образованных людей. Они, как правило, не имеют склонности и не обладают большим опытом в вычислительной работе. Вычислительная работа (связанная обычно с чисто арифметическими операциями) вообще играет в математике весьма малую роль, что бы ни думали об этом необразованные люди. Напротив, в прикладной математике (например, в астрономических задачах) вычислительной работы очень много, и именно астрономы являются примером людей, обладающих обширными знаниями математики и умеющих считать значительно лучше самых квалифицированных бухгалтеров. Астрономия нуждается в объемных вычислениях не потому, что небесные тела находятся на удаленных расстояниях, а потому, что их движение относительно Земли является весьма сложным — расчет траектории ближайшего спутника Земли, Луны требует гораздо больше вычислений, чем расчет траекторий самых отдаленных звезд.

Но иногда действительно появляются люди, которые способны выполнять арифметические действия над многозначными числами быстрее, чем вычислительные машины. О таких феноменах часто пишут психологические журналы, и многие из вас знают фамилии Иноди, Диаманди или Рюкле. Эти люди вовсе не являются математиками в обычном понимании, хотя и могли бы быть ими (о чем свидетельствует пример Рюкле, доктора математики). Чаще всего они не имеют математического образования и редко когда обладают математическими способностями. С одним из них мне довелось иметь продолжительную беседу, и я был поражен абсолютным отсутствием математических способностей: он не мог понять вещей, которые доступны почти всем ученикам старших классов средней школы, обладающим рядовыми способностями.

Ввиду того, что математики не занимаются вычислениями, а ведь, пожалуй, они должны ими заниматься по необходимости (иногда это является матерью смекалки), среди наиболее сознательных неучей возникла третья, полусерьезно трактуемая шутка, связанная с нелепым объяснением работы математиков (типа: они доказывают, что $2 \times 2 = 5$).

Самая глубокая причина этих недоразумений заключается в форме математических сочинений. Их текст постоянно переплетается с формулами, которые порой заполняют целые страницы и состоят из букв и непонятных знаков. Математика многим представляется таинственной наукой. Для чего предназначены эти непонятные символы и знаки? Очевидно, что из этих букв, больших и малых, латинских и греческих, должна вытекать какая-то новая скрытая истина, но она должна отличаться от банальных утверждений типа $2 \times 2 = 4$ (ибо люди давно это знают без всяких значков). Отсюда и возникает мысль, что такие усилия и тексты должны привести к чему-то парадоксальному или невозможному, подобному эликсиру жизни, философскому камню или вечному двигателю — одним словом, к «$2 \times 2 = 5$».

То, что уже в средней школе изучают математику, в которой вводятся символы $a, b, c, \ldots, x, y, z$, не изменяет этой точки зрения, поскольку большинство учеников не видит смысла и значения этих символов. Люди не понимают этих символов, потому что в практической жизни они пользуются не буквами, а конкретными числами (2, 3, 5, 6.5 и т. д.). Но существуют и исключения: например, если штаб армии планирует наступление и ждет для этого прибытия тяжелых орудий (известно, что они обязательно поступят, но неизвестно точно когда), то можно подготовить детальный план всей операции и отдать приказ, что пехотная дивизия выступает в час x, полевая артиллерия начинает действовать в x ч

45 мин, а тяжелые орудия — в $x + 1$ ч. Такой приказ можно довести до нижестоящих командиров, не указывая конкретное значение символа x, а последние могут потребовать у командования армией разъяснений по поводу способа выполнения приказов и получить их до того, пока одна короткая депеша не сообщит им наконец точный смысл символа (x = 31 августа, 4 ч 30 мин). Этот пример демонстрирует, что в некоторых случаях символ необходим и что его не может заменить конкретное число. Именно так математики и употребляют символы: они не пишут чисел до тех пор, пока числа являются лишь ненужными подробностями, не имеющими ничего общего с сутью дела.

Какой интерес представляют для нас эти символы или числа? Ни об одном из них в отдельности ничего интересного сказать нельзя, но между выражениями, образованными из них различными способами, возникает огромное множество порой очень удивительных и интересных зависимостей. Выберем один из множества примеров: возьмем произвольные числа a, b, c, d, e, f и образуем из них произведения $a \times d$, $b \times e$, $c \times f$, которые, для краткости, будем обозначать ad, be, cf.

Далее, найдем их сумму $(ad + be + cf)$, возведем ее в квадрат

$$(ad + be + cf)^2,$$

а полученное таким способом число обозначим через l.

Теперь образуем квадраты тех же самых шести чисел a, b, c, d, e, f, т. е. a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2, образуем из них две суммы:

$$a^2 + b^2 + c^2, \quad d^2 + e^2 + f^2$$

и перемножим:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \times (d^2 + e^2 + f^2).$$

Полученное таким способом число обозначим через m. Так вот, относительно этих чисел можно смело утверждать, что число l всегда (т. е. при любых конкретных значениях a, b, c, d, e, f) будет меньше или равно числу m. Например, для набора чисел ($a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$, $e = 4$, $f = 1$) мы получим:

$$a \times d = 3, \quad b \times e = 8, \quad c \times f = 1,$$

$$ad + be + cf = 3 + 8 + 1 = 12,$$

$$(ad + be + cf)^2 = 144,$$

т. е. $l = 144$. Для нахождения числа m вычислим требуемые значения:

$$a^2 = 1,\ b^2 = 4,\ c^2 = 1,\ d^2 = 9,\ e^2 = 16,\ f^2 = 1,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 1 = 6,$$

$$d^2 + e^2 + f^2 = 9 + 16 + 1 = 26,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) \times (d^2 + e^2 + f^2) = 6 \times 26 = 156.$$

Таким образом, $m = 156$, что очевидно больше 144. Мы можем для проверки подставить в качестве чисел a, b, c, d, e, f любые другие конкретные значения, но высказанное выше утверждение остается справедливым. Математически этот факт записывается кратко в виде

$$(ad + be + cf)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2)$$

и называется неравенством Лагранжа. Без использования буквенных обозначений его было бы очень трудно выразить и записать.

В качестве еще одного примера рассмотрим два положительных и различных числа p и q. Разделим сперва p на q, потом q на p и сложим полученные результаты. Можно утверждать, что сумма всегда будет больше числа 2, что соответствует буквенной записи:

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} > 2.$$

Таким образом, например, имеем $3/4 + 4/3 = 25/12 = 2\,{}^1/_{12}$, $2/3 + 3/2 = 13/6 = 2\,{}^1/_6$ и т. д., что всегда дает число, большее 2.

Одной из задач математики является именно доказательство таких утверждений. Однако доказательство не основывается на попытках, и его нельзя заменить даже тысячами подстановок в качестве чисел p и q все новых *конкретных* чисел. Доказательство требует вывести *общий* случай неравенства $p/q + q/p > 2$, исходя из принципиальных свойств чисел. Когда это удается сделать, полученное суждение $p/q + q/p > 2$ называют математическим утверждением, и с этого момента наступает уверенность, что никакая попытка не сможет опровергнуть это суждение.

Таким образом, одной из целей математики является открытие и доказательство новых утверждений. Математику, которая занимается именно этим, назовем логической, или математикой «α». Школа, как известно, в меньшей степени интересуется математикой α, так как она не требует от учеников открытия новых утверждений, а всего лишь добивается от ученика умения выбрать из известных ему утверждений те, которые легче всего приведут к решению конкретной задачи. Математику, которая занимается решением задач, назовем математикой «β», или вычислительной математикой. На первый взгляд может показаться, что неравенство Лагранжа — это математическая шарада, лишенная всякого значения. Однако оно имеет значение не только в математиках α или β, поскольку его, например, часто используют естествоиспытатели, когда хотят выразить зависимость двух явлений друг от друга. Числа l и m могут быть *равны*, если две серии чисел a, b, c и d, e, f пропорциональны (например, когда $a = 2d$, $b = 2e$, $c = 2f$). Предположим, что мы, например, каждый час измеряем в данном месте атмосферное давление и температуру (соответственно, мы обозначаем через a, b, c,… значения давления, а через d, e, f, ... — значения температуры). Если мы затем образуем из полученных значений числа l и m, то их отношение позволит судить о степени взаимозависимости этих двух величин. Равенство $l = m$ будет означать сильную зависимость температуры от давления, малость отношения l/m (например, $^1/_2$) будет указывать на слабую зависимость этих параметров, а близость отношения l/m к нулю будет доказательством того, что исследуемые величины независимы. Число l/m называется **коэффициентом корреляции**.

На основе того факта, что утверждения чистой математики можно применять и к другим наукам, возникла математика «γ», которую называют прикладной. При этом, если мы действительно захотим исследовать две последовательности наблюдений с использованием коэффициента корреляции, то мы должны научиться выполнять целый ряд вычислений. Как проще и лучше осуществлять стандартные вычислительные операции — этому учит практическая математика, которую можно назвать математикой «δ». Например, в случае исследования зависимости давления от температуры гораздо удобнее отсчитывать атмосферное давление не от нуля, а, скажем, от 700 мм рт. ст. (т. е. считать давление 705 мм за 5 мм и т. д., что значительно упростит вычисления). Примерно так выглядят правила практической математики.

Неполный, односторонний взгляд на сущность математики заключается в том, что огромное большинство людей никогда не имеют дела с математикой, иной нежели «δ». Огромное большинство образованных людей не встречаются с математикой, отличной от «β» и «δ». Поэтому зададим себе вопрос: какое значение в жизни имеет математика «α» и «γ»?

Здесь достаточно привести один пример: в XVII веке Декарт открыл аналитическую геометрию, позволившую его последователям заняться так называемой проблемой касательных, т. е. задачей определения положения прямой, касающейся данной кривой линии. Из этой проблемы выросло дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница и Ньютона, что позволило Ньютону проверить, применима ли его теория взаимного притяжения тел к движению планет. Согласие этого движения с теорией убедило физиков в справедливости принципов ньютоновской механики, а применение этой механики к земным физическим явлениям положило начало современной физике. Все это стало основой современной техники, которая (главным образом благодаря небывалому совершенствованию средств коммуникации и замене ручного производства машинным) повлекла за собой изменение материальной культуры, изменила распределение благ, что в результате привело к социальному расслоению, образованию новых классов, новых политических систем, взглядов и нравов. Историк упрекнет нас за эти рассуждения и скажет, что к столь далеко идущим последствиям привело не что иное, как открытие новых континентов, но эти открытия (например, географические открытия венецианцев) не имели бы особого значения без существенного прогресса навигационного искусства, который был бы невозможен без развития астрономии и оптики, т. е. без наук, неразрывно связанных с математикой.

Вы спросите, как конкретно математика связана с физикой? Что общего могут иметь между собой законы, которым подчиняются числа, и законы, которым подчиняется материя? Так вот, законы физики устанавливают связь между некоторыми величинами, которые доступны наблюдению и измерению. Измерение этих величин дает определенные числа, т. е. фактически мы получаем зависимости между числами. Математика учит, какие связи между числами возникают из этих первичных зависимостей, и тем самым позволяет из наблюдаемых законов физики выводить (уже без наблюдения) новые законы, а затем и предсказывать новые явления. Наблюдение учит, что если в замкнутом сосуде изменять объем газа, например, сжимая его с помощью поршня, то давление изменяется так, что произведение объема на давление будет оставаться постоянным. Если до изменения объем был равен v_0, давление — p_0, а после изменения — соответственно v и p, то $v \times p = v_0 \times p_0$. Это утверждение называется законом Бойля. Из зависимости $vp = v_0p_0$ можно вычислить, какое давление необходимо приложить для превращения данного газа в жидкость, если известно только то, во сколько раз плотность жидкости больше плотности газа. В действительности дело осложняется тем, что на данный процесс также оказывает влияние температура, но и это влияние тоже можно учесть математически. Зависимость $vp = v_0p_0$ сама по себе является не математическим утверждением (как, например, предложенное выше неравенство Лагранжа), а лишь законом физики, записанным в математической символике.

До сих пор все наши примеры имели тот недостаток, что они не выходили за пределы четырех арифметических действий, а арифметика — это самая элементарная часть математики. Однако нам придется выйти за рамки элементарной математики уже при решении некоторых весьма простых с виду задач, например, при рассмотрении свойств окружности. Чему равна длина окружности? Из школы мы знаем, что она в 3.1415926… раз больше диаметра, но этот факт сам по себе мало интересен. Для его проверки требуется измерить длину окружности, что невозможно осуществить жесткой деревянной линейкой, и это приводит нас к проблеме измерения длины кривых линий. Очевидно, что измеряя дугу кривой линии в дециметрах, мы совершим меньшую ошибку, чем при использовании метра, а еще лучше было бы измерять ее в сантиметрах и т. д. Как же, однако, определить истинную длину? Можно брать все меньшие меры длины и получать все большие числа (в метрах), например, 1.9, 1.99, 1.999… Но ни одно из них нельзя будет считать истинной длиной дуги — назовем таковой целое число, которое больше каждого из полученных (например, 2). Определения такого рода относятся уже к сфере высшей математики. Она учит также тому, как найти и точно вычислить число 3.1415926…, называемое лудольфовым числом[2] (π). Эйлер, например, предложил следующую формулу:

$$\pi = \sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots}\,.$$

Для математика «α» наиболее любопытным будет факт (доказанный Линдеманом из Мюнхена), что число π никогда не может являться решением уравнения с целыми коэффициентами. Поэтому, записав довольно замысловатое уравнение

$$10x^7 - 24x^6 + 100x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 15x - 365 = 0,$$

можно заранее сказать, что число π не является его решением. Из этого вытекает невозможность точного измерения длины окружности и площади круга с помощью циркуля и линейки — так называемая «невозможность квадратуры круга».

Даже самые простейшие явления имеют свой математический аспект, и более глубокое их исследование порой приводит к трудным и важным задачам. Картографам издавна известно, что для раскраски карт на шаре достаточно 4 цветов. Иными словами, если нужно, чтобы на глобусе каждая страна имела иной цвет, нежели соседняя с ней страна (или море — если страна приморская), то для этого достаточно использовать четыре краски (при этом не требуется, чтобы страны, граничащие только в отдельных точках, имели разный цвет). Доказать это до сих пор никому не удалось, однако вместо этого доказано, что на поверхности тора (т. е. замк-

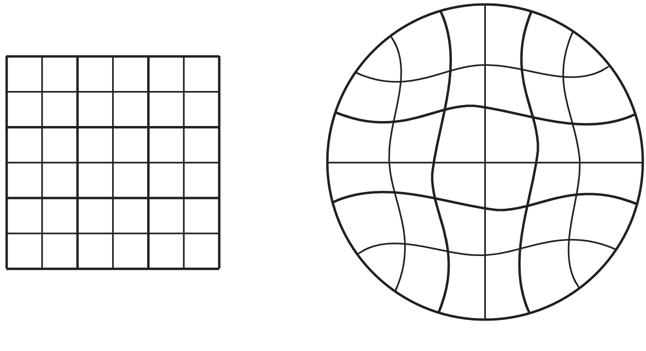
---

[2] Лудольф ван Цейлен (1540–1610) — нидерландский математик, вычисливший π с 32 десятичными знаками. — *Прим. перев.*

нутой трубы) любое распределение стран требует не более 7 цветов. Отсюда сразу возникает вопрос о принципиальном отличии шара от тора. С виду этот вопрос кажется наивным, ибо они имеют совершенно разную поверхность, и нетрудно дать их геометрические описания, которые также будут различными. Но речь идет не об этом. Ведь каждому известно, что если говорить о раскраске карт, то безразлично, является ли глобус точным шаром, или он сплющен, или лишь местами изогнут. Здесь речь идет о каких-то других «неточных формах» и различиях. Возьмем, например, бутылку. Когда-то она была большой каплей горячего стекла, висящей на конце трубки-воздуходувки работника стекольного завода, из которой он мог тогда выдуть как пузатую бутылку, так и вазу для цветов. Но без отрыва капли от трубки он не смог бы изготовить бутылку с двумя горлышками. Способ описания и определения формы, при котором отождествляется все, что с помощью «растяжения» можно получить из одного и того же исходного состояния, называется *топологией*. Для топологии плоский круг и бутылка — это одно и то же. Ведь из круга путем вытягивания его краев можно получить вазу, а из вазы путем вытягивания горлышка — бутылку. Бутылка отличается от шара тем, что ее можно разрезать, проведя сечение от одной точки края горлышка до другой, тогда как шар таким способом разрезать не удается. Чтобы разрезать шар, нужно будет начать и закончить сечение в одной и той же точке, что позволит изготовить две бутылки. Такая операция называется «замкнутым сечением», но ее выполнение на торе не приведет к распаду тора на две части. Для распада тора необходимо провести два замкнутых сечения.

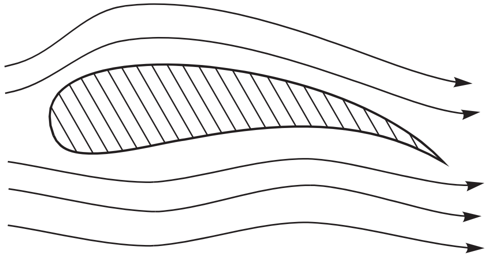
Некоторым достаточно изложить только основы такой теории форм, чтобы они смогли самостоятельно ее развить и вникнуть в ее проблемы, у других же возникнет вопрос — а для чего вообще нужна топология. Сразу можно видеть, что различные топологические формы также принципиально отличаются и с физической точки зрения. Это различие не является количественным — очевидно, что, например, в шаре жидкость не может находиться без разрыва непрерывности так, чтобы все ее частицы постоянно находились в движении, тогда как в торе подобная циркуляция возможна. Голландский математик Брауэр доказал, что если по поверхности шара бегают частички без разрыва непрерывности, то всегда хотя бы одна из них находится в покое. Для гидродинамики и для науки об электричестве эти рассуждения имеют большое практическое значение, особенно когда распределение тока в электрической сети зависит от ее топологии, так как до сих пор определение оптимальных размеров сети наталкивается не столько на вычислительные трудности, сколько на чисто математические.

Размышления о картографии с иной точки зрения приводят к другим интересным математическим теориям. Можно ли для некоторой страны изготовить карту таким образом, чтобы граница страны выглядела как окружность? Предположим, что страна представлена на плоскости и что мы хотим составить карту так, чтобы соотношение (масштаб) длины на карте и в действительности в каждой точке не зависело от направления (и, следовательно, чтобы изменение масштаба в направлении север-юг и в направлении восток-запад было одним и тем же), но в то же время допускается, чтобы это соотношение было различным в разных точках карты. При этом малые области не подвергнутся деформации, но вся карта изменит истинную форму — а мы хотели бы, чтобы граница страны выглядела на карте в виде окружности. Эту задачу поставил и решил Бернхард Риман, создатель топологии, столетие со дня рождения которого отмечалось недавно. Принадлежащий к следующему поколению берлинский ученый Г. А. Шварц вычислил, как выглядела бы кругообразная карта квадрата. Рисунок показывает, как выглядели бы на кругообразной карте параллели и меридианы страны в виде квадрата.



Если теорема Римана относится к логической математике, то расчеты Шварца относятся к математике «β».

И снова на первый взгляд может показаться, что изготовление кругообразных карт квадратных стран является напрасной тратой времени и энергии. Между тем оказалось, что если нарисовать на плоскости линии течения жидкости (невязкой и несжимаемой), а затем составить карту этой сети линий так, чтобы малые участки не подвергались деформации, то изображения этих линий на карте будут снова линиями, вдоль которых жидкость может течь при указанных условиях. Это и есть прикладная математика. Для практического использования предложенных выше преобразований Киргхоф и Рэлей предложили методы, которые оказались полезными в современном авиастроении и позволили, например, описать обтекание крыла самолета набегающим потоком воздуха.

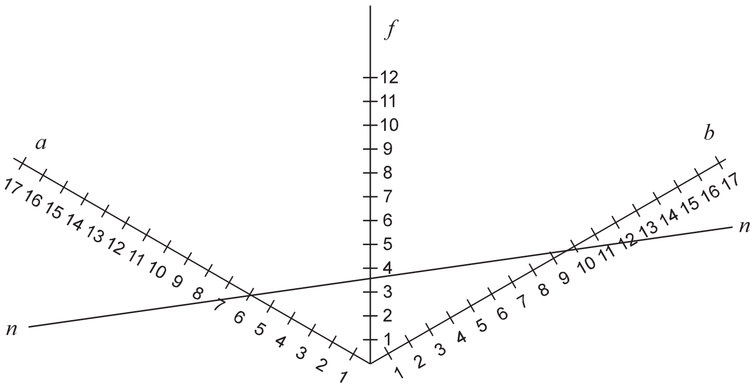


Для решения этой задачи необходимо представленное на рисунке поперечное сечение заменить кругом, иначе говоря — найти линии течения для случая, когда воздух наталкивается на брус круглого сечения. Вычисления здесь выполняются гораздо легче, чем при определении линий течения сразу для обычного крыла, имеющего всегда достаточно сложную форму. Нарисовав линии течения воздуха, наталкивающегося на брус, мы можем получить карту плоской области, лежащей за сечением крыла (незаштрихованной области), так чтобы граница этой области, определяемая поперечным сечением крыла, выглядела на карте в виде круга. Изображенные перед этим на карте линии течения воздуха являются образами истинных линий, которые теперь можно (зная связь между областью и картой) нарисовать в области снаружи крыла. Здесь мы имеем, как и во всей аэродинамике, пример прикладной математики, а если бы мы действительно для данного крыла определили линии течения воздуха и затем вычислили силу его давления, то это был бы прекрасный пример практической математики. Все это относится уже к области высшей математики. Поучительным примером прикладной математики является геометрическая оптика. Опыт показывает, что лучи света в каждом оптическом приборе распространяются так, чтобы время их движения от одной точки до другой было по возможности наименьшим. На этом основании можно применить геометрию к построению оптических приборов и предсказать правила распространения в них лучей света. Можно даже заранее определить, как надо шлифовать стекла и зеркала, чтобы получить требуемый эффект. Для линзы (с фокусным расстоянием f) геометрическая оптика позволяет получить следующую простую формулу:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

где a — расстояние от предмета до линзы, а b — расстояние до изображения. Эта формула очень проста и позволяет легко вычислять f по известным значениям a и b. Однако, если кому-то на предприятии, изготовляющем линзы, необходимо несколько десятков раз производить такие вычисления, то ему следует прибегнуть к методикам прикладной математики. Дело в том, что любую из трех величин f, a и b *(при двух известных) можно найти без вычислений, пользуясь тремя простыми шкалами, расположенными под углом 60°* друг к другу. Если приложить к таким шкалам нить, проходящую через две заданные точки (как показано на рисунке), то по заданным числам a и b (или f) можно сразу определить f (или, соответственно, b). Графические приемы подобного рода являются заслугой современного французского математика д’Окань.

Нескольких таких примеров математического мышления достаточно для того, чтобы показать, хотя бы в самых общих чертах, чем является математика. В них также скрывается часть ответов на вопрос, развивается ли математика, и если да — то на чем основан этот прогресс. Возвращаясь к шутке о математиках, доказывающих нелепости типа «2 × 2 = 5», можно сказать, что ее истоки лежат в следующем, довольно распространенном мне-



нии: наука, в которой нет разногласий, не может развиваться. Законы и истины математики утвердились в течение тысячелетий (действительно, трудно оспорить, что законы арифметики были установлены уже много веков назад), но в отсутствие полемики нет научных дискуссий или спорных вопросов, а без этого науке нечего исследовать и она не имеет внутренних стимулов для развития. На самом деле такое мнение ошибочно, так как в математике существует некоторая отчетливо выраженная граница между тем, что известно, и тем, что неизвестно. Например, известно, что число $2^{2^{12}}+1$ не является неделимым, ибо можно доказать, что оно делится без остатка на 3. В то же время неизвестно, делится ли число $2^{2^{12}}+1$ на какое-то другое, или нет. Если завтра кто-то докажет, что это число делится (например, на 257), он совершит решительный переворот в арифметике. Но ни сегодня, ни завтра не будет никакой дискуссии по поводу того, является ли число $2^{2^{12}}+1$ делимым, или нет. Сегодня никто из математиков не выскажется за делимость этого числа или против этого (такое мнение он должен был бы назвать не научным тезисом, а не поддающимся доказательству предположением). Откуда же тогда берется настойчивое мнение о необходимости полемики? Его источник — в естественных науках, где оперируют экспериментальными данными. Чтобы доказать прямолинейность распространения света (при любых переходах между двумя точками), были проведены тысячи экспериментов в разных условиях, которые всегда давали именно этот, положительный результат. Но при этом не были обнаружены некоторые иные факты (например, возникновение интерференционных полос), для регистрации которых нужны были более совершенные приборы и более точные наблюдения, что стало возможным только в новое время, после Ньютона. После этого на противоположную чашу весов начал ложиться один факт за другим, и оказалось, что луч света при определенных условиях может искривляться. В истории физики был момент, когда таких фактов было немного, и тогда, естественно, возникла и стала возможной полемика (сторонники прямолинейного распространения света сомневались в точности новых наблюдений, объясняли появление полос иным способом и т. п.), но в конечном счете число опытов с отрицательными результатами оказалось настолько большим, что чаша весов перевесила.

Ничего подобного не может произойти в математике. Здесь не накапливаются факты, здесь нет естественной индукции. Достаточно одного аргумента, чтобы утверждение было верным, а если же аргументов не хватает, то ничего не значат тысячи доводов в защиту утверждения. Если кто-нибудь попробует делить число $2^{2^{12}}+1$ на все числа от 2 до 10 000 и докажет, что ни одно из них не умещается без остатка в числе $2^{2^{12}}+1$, то это еще не будет говорить о том, что $2^{2^{12}}+1$ есть число «простое», т. е. **вообще** не делится ни на одно число.

О прогрессе в области арифметики я не говорил, потому что этот вопрос подробно излагается в специальной лекции проф. Рузевича.

Что касается алгебраических уравнений, то наиболее поразительного успеха здесь достигли в начале XIX века Руффини, Абель и Галуа, доказавшие, что уравнение 5-го порядка не может быть решено в общем виде (как это свойственно уравнениям низших порядков) даже с помощью формул, требующих выполнения 4-х арифметических действий и извлечения корня в соответствующей последовательности. Здесь надо сказать несколько слов о роли и природе негативных утверждений. Когда профан узнает, что не существует конструктивного способа деления любого угла на три равные части, это вызывает у него принципиальные сомнения. Он может вспомнить, например, что невозможность полета с помощью механических средств неоднократно доказывалась самыми серьезными учеными, до тех пор, пока несогласный с их доводами изобретатель не взлетел на первом аэроплане. Но такая аналогия совершенно неуместна, ибо (как я говорил чуть выше) утверждения физики основаны на индуктивных умозаключениях, которые могут быть опровергнуты новыми фактами и факторами. В авиации таким новым фактором стал легкий бензиновый мотор. Зато утверждение о невозможности трисекции угла является логическим следствием аксиом евклидовой геометрии. Разумеется, оно относится к построениям, выполняемым с помощью жестких циркулей и линеек, или даже с помощью любых других инструментов, свойства которых ограничены аксиомами Евклида.

В физике может возникать целый класс новых задач. Погружая в мыльную пену согнутую в кольцо проволоку, мы получим на ней мыльную пленку. Физика свидетельствует о том, что образующаяся на кольце поверхность имеет минимально возможную площадь. Желание математически описать это явление и обосновать образование поверхности с наименьшей площадью приводит нас к так называемым «дифференциальным уравнениям в частных производных», представляющим большой интерес для математической физики. Этими «минимальными» поверхностями занимались уже цитированные Риман и Шварц, а также многие их последователи (вплоть до настоящего времени), но никто из них не смог доказать наличие минимальной площади для всех форм. Сомнение такого рода вначале представляется нелепым: во-первых, минимальная поверхность существует (поскольку ее реально образует мыльная пленка), а во-вторых, из всех поверхностей, натянутых на один контур, одна должна быть наименьшей. Оба аргумента не являются достаточными для современной математики. Доказательство, основанное на физическом эксперименте, является спорным и подлежит критике. Аргумент, базирующийся на том, что среди всех поверхностей одна является наименьшей, содержит скрытую ошибку (подмеченную еще Вейерштрассом в 70-х годах XIX века), связанную с тем, что не всегда из данного множества чисел одно является наименьшим. Например, среди *кривых*, соединяющих две точки A и B, нет кратчайшей, ибо кратчайшим расстоянием между этими точками является отрезок прямой AB, не относящийся к *кривым* линиям. Поэтому современная математика в большинстве случаев пытается прежде всего доказать существование решения, и только после этого принимается за вычисление этого решения. Иногда оказывается, что решения не существует — и не в том смысле, что оно не может существовать, а просто потому, что мы не умеем его найти.

Без систематического, многолетнего обучения трудно углубиться в этот лес задач и решений, однако можно надеяться, что приведенные рассуждения облегчат понимание того, на чем основан тот математический метод, который (будучи насквозь логичным) преобладает над логикой бесконечного разнообразия понятий, теорем и задач.

О математической строгости

В номере 5 (49) *Matematyka* за 1957 г. на стр. 13–18 появился перевод статьи, опубликованной в мае 1957 г. в журнале *L'École du Grand Paris*. Автором оригинала является профессор Сорбонны Лоран Шварц, а перевод озаглавлен «*Tendencje matematyki współczesnej*» (Тенденции современной математики). Мы обращаемся сегодня к читателям *Matematyka*, которые благодаря этому переводу имели возможность познакомиться с взглядами парижского математика, потому что считаем эти взгляды односторонними и вызывающими серьезные возражения. Я боюсь, что большинство польских математиков разделяют эти взгляды, и поэтому мое молчание могло бы выглядеть как одобрение идей Шварца.

Автор статьи является выдающимся ученым, о чем в известной мере свидетельствует его адрес. Сорбонна, Коллеж де Франс, Политехническое училище и другие крупнейшие парижские учебные заведения имеют прекрасные математические традиции и помнят о них. В номере 6 (50) *Matematyka* (стр. 12–24) Казимеж Войцеховский пишет о великих математиках после Ньютона, среди которых много французов. Даламбер, Лагранж, Лаплас и Коши — эти четверо (последний из которых умер в 1857 г.) вместе с плеядой других упрочили традиции французской математики, которые затем (после короткой депрессии во время правления Наполеона III) подхватили Эрмит, Дарбу, Пуанкаре, Борель, Адамар и Лебег. Эти два поколения соединили настоящее с прошлым, так что при каждом назначении на должность какой-либо из парижских кафедр ученый мир Франции невольно должен сравнивать новых кандидатов с этими гениями нашей науки.

Сравнения напрашиваются и у нас, читателей статьи о «тенденциях современной математики», но по иным причинам. Дело в том, что автор во вступлении сразу же заявляет, что «сегодня математика стала независимой наукой и, как кажется, окончательно отказалась от подходов, похожих на методы экспериментальной физики, которые были свойственны ей до недавних пор». С другой стороны, перед соответствующим текстом, предшествующим изложению материала, мы читаем, что «математика — это наиболее абстрактная наука и одновременно наиболее независимая от внешнего мира и текущей жизни, а поэтому практически невозможно рассказывать нематематикам о современной математике…».

Доверившись тезисам профессора Шварца, можно прийти к заключению, что только современная математика полностью заслуживает этого названия, вчерашняя — наполовину, а математиков, портреты которых украшают последний выпуск ежегодника *Matematyka* (1957 г.), откровенно следует лишить этого звания (подобно тому, как нельзя алхимиков называть химиками, а астрологов — астрономами). Действительно ли дело обстоит именно так? Не подвергается ли автор самообману (характерному для многих специалистов, особенно в области точных наук), который называется отсутствием исторической перспективы и основан на преувеличении современности по сравнению с прошлым? Большинство читателей *Matematyka* занимаются обучением элементарной математике, так что если они будут пользоваться современными методами (которые, по мнению профессора Шварца, и делают из этого предмета истинную математику), то она не станет понятнее их ученикам, так как последние не являются математиками и, следовательно, «им практически невозможно» объяснить истинную математику. Если же они учат математике на примерах и полагаются на интуицию и на опыт, то сами перестают быть математиками и становятся учителями физики. Что же касается того, что экспериментальная физика и другие подобные науки принципиально отличаются от математики, то в этом каждый согласится с уважаемым автором статьи. Действительно, если кто-то выведет теорему Пифагора путем измерения катетов прямоугольного треугольника с помощью линейки и (после большого числа таких измерений) начнет утверждать, что сумма квадратов катетов дает квадрат гипотенузы с погрешностью 0.3%, то это и означает, что он занимался экспериментальной физикой (как в отношении метода, так и результата). Но наш автор рассуждает не об этом, а доказывает, что существовавшая с древности и до наших дней геометрия всего лишь считается точным методом, но не является таковым, поскольку геометры всегда пытались найти правду о геометрических объектах по некоторым наглядным свойствам этих объектов. А ведь еще греческие гении Пифагор, Платон и Евклид решительно отклонили попытки экспериментального поиска геометрической истины, которую они считали в высшей степени объективной, в противоположность всему, что говорят о мире наши ощущения, подвластные иллюзиям и ежеминутно показывающие каждому все новый образ этого мира… Впрочем, что может быть лучшим «алиби» в этом споре, нежели факт, что никто из этих мнимых «физиков-экспериментаторов» не открыл ничего в физике? Таким образом, мы должны задаться вопросом, что же в их дедуктивном методе поразило профессора Шварца.

Желая понять, о какой строгости идет речь, обратимся к той эпохе, которую автор считает наиболее критичной, а именно к последним годам XIX века. До 1892 года считалось очевидным, что плоская замкнутая и непересекающаяся кривая делит плоскость на две области так, что всякая непрерывная дуга, соединяющая точку, лежащую в одной из этих областей, с точкой в другой области, должна пересекать эту кривую. Лишь в 1892 г. Камилл Жордан (профессор Политехнического училища и, следовательно, также парижский математик) заметил, что это свойство замкнутых кривых является особым утверждением и поэтому нуждается в доказательстве. Его собственное доказательство, однако, содержало изъян, и только в 1902 г. Веблен внес дополнения в рассуждения Жордана. Для профессора Шварца предшественники Жордана, которые не задумываясь писали «пусть C — произвольная замкнутая кривая, а V — область внутри кривой C», не были математиками (поскольку они непосредственно из очевидных свойств обычной замкнутой кривой делали вывод о существовании области V), но зато математиком был именно Веблен.

То, что Шварц называет строгостью, пожалуй, берет начало от Гильберта, который запретил усматривать в геометрических понятиях (таких как «точка» или «прямая», а также в отношениях типа «точка *P* лежит на прямой») какой-либо смысл кроме того, который четко сформулирован в аксиомах и определениях. Начиная с работы Гильберта *Grundlagen der Geometrie* (Основы геометрии), стало анахронизмом связывать с названиями «точка», «прямая», «плоскость» и т. п. некие свойства, которые пытаются охарактеризовать рисунок или пространственное воображение, а нарушители этого запрета, по-видимому, «перестали быть математиками в современном значении этого слова». Но у Гильберта были предшественники. Уже в середине XIX века, т. е. за 50 лет до появления *Основ геометрии* Гильберта, Риман исследовал гипотезы, на которых основана геометрия, в сочинениях, содержащих зародыши релятивистской теории пространства и времени, т. е. мысли, явно высказанные лишь в начале нашего столетия Альбертом Эйнштейном. В открытии неевклидовой геометрии Римана на четверть века опередили Лобачевский и Бойяи-младший, а из писем Гаусса вытекает, что эти идеи не были чужды и ему. Желая понять существование разных геометрий, следует смириться с предположением о наличии разных аксиоматических систем, каждая из которых сама не определена точно, но и не совместима с иными системами. Если бы предшественники Гильберта были уверены лишь в существовании «истинного» геометрического пространства и не задумывались о свойствах точек, прямых и плоскостей этого пространства (и о том, что эти свойства необходимо изучать, а не вводить безапелляционно посредством декретов, называемых аксиомами и лишенных материального значения!), то они бы никогда не открыли геометрий, отличных от евклидовой.

Предоставим слово профессору Шварцу! На стр. 14 цитируемой статьи он ясно формулирует, о чем идет речь: «…математик вначале обязан принять некоторое количество аксиом, в известной степени представляющих правила игры, которыми он будет пользоваться; из этих аксиом математик выводит теоремы, которые доказывает строгим методом. Так, шахматист сначала устанавливает правила игры, весьма произвольные и не поддающиеся доказательству, и, только приняв их, может правильно разыграть партию…». Разве так поступал Евклид, праотец всех геометров? В *Истории точных наук* (W. C. Dampier, *History of Science*, Cambridge, 1949, с. 40) читаем: «Евклид из Александрии (около 300 лет до Р. Х.) собрал, развил и систематизировал существующие знания (геометрические). Из немногих аксиом, признанных очевидными свойствами пространства, он на логических основаниях вывел необыкновенный ряд теорем способом, который до новейших времен остался единственным признанным методом». И неудивительно, что до конца XIX века в английских школах элементарную геометрию называли просто «Евклид». В начале своей книги александрийский мудрец установил «правила игры» и последовательно придерживался их: почему же он в глазах профессора Шварца не заслужил милости и права называться математиком? Прочитаем еще раз мнение сэра Уильяма Дампира о произведении Евклида: «…Из немногих аксиом, **признанных очевидными свойствами пространства**…» — далее не читаем, поскольку этих нескольких слов достаточно для дисквалификации одного из величайших ученых. Евклид верил, что идеальным прямым и точкам, о которых говорится в его аксиомах, отвечает нечто реальное. Если бы он знал, что ему дозволено подбирать, изменять, создавать и перечеркивать аксиомы, то он, вероятно, бросил бы науку как забаву, недостойную философа, — но на свое счастье он не дожил до эпохи Бельтрами и Гильберта. Точно так же и Коперник испытал бы моральный крах, если бы дождался эксперимента Майкельсона[1], результат которого заставил бы его признать, что Земля не вращается вокруг Солнца. Такие парадоксы, по-видимому, подстерегают каждого, кто пренебрегает основами исторической перспективы. Геометрия в переводе с греческого означает «измерение земли», и это первоначальное значение выражения далеко от всякой игры, даже от игры в шахматы или от игры в математические доказательства.

[1] Альберт Майкельсон экспериментально доказал, что движение Земли вокруг Солнца нельзя подтвердить путем сравнения скорости света в направлении этого движения со скоростью в противоположном направлении. — *Прим. автора.*

Но математика не ограничивается только геометрией. Евклид доказал, что существует бесконечно много простых чисел. Никто в этом утверждении не сомневается, и по сегодняшний день можно пользоваться оригинальным доказательством Евклида. Профессор Шварц, вероятно, упрекнул бы это доказательство в том, что в нем проявляется замаскированная математическая индукция, но неосознание этой аксиомы никогда никого не привело к ошибочным суждениям. Незнание системы аксиом, определяющих круг натуральных чисел, не повредило ни древним, ни Ферма, но такую систему представил Дж. Пеано только в конце XIX века. Знаменитые исследователи теории чисел Дирихле и Гаусс не могли доказать, что $a + b = b + a$ для всех натуральных a и b (поскольку не знали ни этой системы, ни какой-либо другой). Для них закон перестановки мест слагаемых был естественным свойством конечных множеств, и это никак не сказалось на их всемирно-исторических работах. Итак, что же представляет собой строгость, ставшая как бы философским камнем современной математики? Не будем пренебрежительно относиться к строгости! Сколько раз легкомысленное игнорирование сомнительных деталей в конструкции доказательств математиком, полагающимся на интуицию, приводило к совершенно ошибочным результатам! Сколь часто легкие на вид дополнительные звенья логической цепи не удается ничем заменить, если ложным является исходный тезис! Умение формулировать истинные утверждения прежде, чем найдутся их доказательства, является исключительной привилегией самых крупных представителей нашего цеха, но и они не злоупотребляют этим правом, а подвергают свои предположения неоднократной и тщательной проверке.

Математическая строгость, как ее понимает профессор Шварц, несомненно, является достижением нашего времени и подобна тем открытиям, которыми гордятся другие науки, например биология (и, в частности, ее ветвь, называемая биохимией). В качестве примера можно привести следующие факты. Происходящие в живом организме химические превращения давно считались специфическими, принципиально отличными от тех, которые происходят в неживой материи. Хотя уже 130 лет назад были получены синтетический этиловый спирт (Хеннелл) и мочевина (Вёлер), однако огромная химическая сложность живых существ в сравнении со скудностью явлений, которые можно осуществить *in vitro* (т. е. в пробирке, заполненной стерильным веществом), вплоть до XX века поддерживала веру в дуализм химии. Сейчас трудно определить день и час, когда эта вера уступила место убеждению, что есть только одна химия, ибо на протяжении сотен лет появлялись философии, провозглашавшие единство материи. Так было и со становлением математики, но здесь эволюция началась уже в древности. Греческая математика в отношении строгости была недосягаема вплоть до XIX века. Известные открытия второй половины XVII века, положившие начало так называемой высшей математике, отнюдь не сводились к установлению основных положений и освобождению методов от неточностей. Никто не ощущал такой потребности, так как в унаследованной от древних греков элементарной математике не встречал никаких противоречий. Последователи Евклида (Декарт, Лейбниц, Ньютон, Гюйгенс, а также братья Ян и Якоб Бернулли) своими гениальными идеями были обязаны знаниям, почерпнутым из книги, которая лежала открытой перед каждым. Название этой книги — ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬ, но ее язык понимали только избранные. Именно склонный к строгой логике Лейбниц ввел опасную для математики нестрогость через понятие дифференциалов или бесконечно малых чисел. Парадоксы, связанные с этими числами (а также с нахождением сумм бесконечных рядов), перестали беспокоить ученых только во второй половине XIX века. Ньютон не был озабочен проблемой строгости при создании дифференциального и интегрального исчислений. Он и его последователи получили результаты огромной важности в области дифференциальной геометрии, анализа, а также механики твердых и жидких тел, однако все эти ученые не заботились об упрочении основных положений математики (подобно тому, как первооткрыватели неизвестных ранее континентов не задумывались над подбором названий). Своим ученикам, которые не могли понять основ исчисления бесконечно малых, Лагранж говорил: «Смело вперед — разберетесь позже!» Его собственные попытки создания нового исчисления были неудачными, но уже Коши умел абсолютно правильно оперировать понятиями границы и сходимости, а Риман ввел определенный интеграл и современное понятие функции (определяемой каким-либо упорядоченным набором чисел y и x) и порвал с неясной концепцией «формулы». Сегодня кажется чрезвычайно удивительным, что эти ученые (великие и в созидании, и в критике) совершенно не ощущали потребности строгого определения понятия вещественного числа. Вскоре после Римана засверкал Вейерштрасс (которого и до наших дней никто не превзошел в строгости), и именно он первым доказал, что непрерывная функция, которая нигде не обращается в нуль, везде должна иметь один и тот же знак. Но лишь в 1888 году Дедекинд предложил современную теорию вещественных чисел. Сегодня эти открытия толкуются в обратной последовательности: от работ Дедекинда через теорему Вейерштрасса до интеграла Римана и равномерной сходимости Коши. Каким образом историк математики может установить тот переломный момент, когда математика вдруг и сразу перестала быть чем-то «вроде экспериментальной физики» и превратилась в игру по установленным правилам, смысл которых доступен только узкому кругу посвященных?

Посвященным известен источник строгости, на котором видна надпись БУРБАКИ. Это собирательный псевдоним нескольких французских математиков, которые разрабатывают математический анализ с таких систематических позиций, чтобы он удовлетворял требованиям современной строгости, на которые указывает нам профессор Шварц в статье о тенденциях современной математики. Этот светский орден с достойной восхищения настойчивостью и последовательностью в течение многих лет подкладывает под здание современной математики кирпичик по кирпичику… и такое мнение не является стилистическим недосмотром: здание стоит, а они день за днем кладут его фундамент! И это неудивительно — так происходит с каждой наукой; только тогда, когда готово уже несколько этажей и когда они уже обитаемы, архитекторы начинают думать о фундаментах. Сегодня многие исследователи ссылаются на изданные книги Николя Бурбаки. Один из них недавно пожаловался мне, что поиск чего-либо в этом кодексе является очень тяжелым, так как требует отступлений от текста и проверки определений, которые совершенно не соответствуют терминологии, принятой в классическом анализе. Нет сомнения, что г-н Николя доживет до момента, когда его книги войдут под крыши даже самых малых математических хат и вовсе не потому, что я доверяю его знаниям и настойчивости, а в большей степени потому, что верю в здравые основы классического анализа, раз они так долго выстояли без фундамента… Но профессор Шварц не ограничивается требованием полной и четкой кодификации математики. Он кроме того провозглашает постулат творческой свободы: каждая система аксиом хороша, каждая определяет свою игру — надо только выбрать для себя представляющую интерес игру и разыгрывать увлекательную партию, и тогда вы будете настоящим математиком! Сравнение математики с шахматами, которое профессор Шварц употребляет в поддержку своего тезиса, таит опасность для него самого хотя бы потому, что в соответствии с его тезисом оно не является ни сравнением, ни риторической аналогией, а всего лишь достоверным примером. Действительно, правила игры в шахматы не являются точно определенной системой аксиом, и каждый эндшпиль (например, пятиходовку) можно рассматривать как математическую проблему (в смысле проф. Шварца), а ее решение — как доказательство утверждения, что данная позиция действительно пятиходовка. Решение означает фактически, что для белых существует способ игры, при котором (независимо от поведения черных) на пятом ходу существует ход, ведущий к выигрышу, и не существует способа игры для черных, который (независимо от поведения белых) позволил бы черным продолжить игру до их пятого хода. Справедливость этого определения заставила бы считать всех составителей шахматных окончаний талантливыми математиками в понимании профессора Шварца. Как известно, математической теории шахмат нельзя отказать ни в эстетических качествах, ни в одобрении в историческом плане, как, впрочем, нельзя оспаривать, что эта игра весьма интересна и имеет довольно много приверженцев во всем мире. Ее строгость безупречна, и никто никогда не пытался утверждать, что в каждом начальном положении король и ладья имеют гарантированное преимущество против одного короля согласно очевидным свойствам фигур (т. е. согласно их форме и материалу) и, следовательно, здесь нет никакого следа «экспериментальной физики». Недостатком шахмат можно считать лишь то, что о них можно говорить или шутить среди людей, даже не знакомых с этой игрой и не видящих в ней ничего эзотерического, однако и этот недостаток может обернуться преимуществом для профессора Шварца (если он считает невразумительность естественной особенностью математики, то мне не хочется его в этом упрекать). Но каждый знает, что научная ценность красивейшего окончания шахматной партии — это ничто по сравнению с простейшей теоремой элементарной геометрии, потому что игра под названием геометрия старше человека с окружающим его миром, и каждая победа в этой игре имеет непреходящее значение для рода человеческого.

Недавно вторым изданием вышел первый том превосходной книги У. Феллера (*Introduction to Probability*, vol. I, 2nd ed., New York, 1957)[2]. Вот что мы читаем буквально во втором предложении этого *Введения в теорию вероятностей*: «В каждой области надо стараться различать три аспекта теории: (а) формальную логическую сущность, (б) интуитивную основу и (в) применение». Мне кажется, что последователи профессора Шварца сводят математику только к одному из этих трех аспектов, а именно к логической сущности. При специализации каждый предмет имеет отдельного эксперта — в вопросах строгости экспертами являются логики. Тот, кто имел дело с современными логиками, знает, что они стараются отличать то, что можно высказать на языке, термины которого определены через систему аксиом, от высказываний о самой этой системе. Эти суждения не принадлежат исходной системе, и относящаяся к ней теория не несет за нее ответственность. Поэтому и наши взгляды на геометрию, и мысли о ней проф. Шварца находятся вне границ геометрии и не требуют математического обоснования или одобрения. К предметам, находящимся вне данной системы (т. е. вне формализованной математической теории), прежде всего следует отнести тот предмет теории, о котором система ничего не говорит. Г-н Л. Шварц не интересуется предметом математики, а еще

[2] Имеется перевод на русский язык: В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — *Прим. перев.*

менее — ее интуитивной основой и применением, которые Феллер считает равноправными с формальной конструкцией математических теорий. Историческое развитие математики подтверждает первенство предмета: прямые, точки и плоскости существовали и до геометрии, но это не те прямые, точки и плоскости, о которых размышлял Гильберт, а реальные вещи (те, которые учитель показывает ученикам как ребра, углы и грани модели из дерева или стекла). Именно они являются предметом геометрии и имеют примат перед теорией, точно так же, как розы перед ботаникой и звезды перед астрономией. Интуитивной основой геометрии является естественное знание об этих моделях, частично полученное в раннем детстве путем непосредственного контакта с ними или подобными им вещами, а частично унаследованное, т. е. врожденное. Благодаря этому теория, т. е. евклидова геометрия, применима к геодезии, проведению границ и ориентации на суше и на море (здесь указаны только старейшие применения). Современная геометрия способна создавать иные теории, последовательные и непротиворечивые, но далекие от интуитивной основы, а также от всяких применений (разве что мы назовем применениями факт использования этих теорий в других, столь же искусственных теориях). Передо мной лежит проспект немецкого издательства Springer, рекомендующий книгу японского математика Фумитомо Маеда — из предисловия вытекает, что он создал бесконечномерную геометрию, аналогичную обычной проекционной геометрии, но лишенную прямых и точек. Я вовсе не думаю ограничивать математику: если легко играть в шахматы, то трудно запретить заниматься геометрией, в которой нет точек и прямых. Иногда такие теории имеют эстетическую ценность, но г-н Шварц прав в том, что невозможно растолковать их кому-либо, кто не принадлежит к небольшой группе посвященных.

Совсем по-другому, однако, появляются открытия непреходящего значения. Как появилась топология? Листинг (1847 г.) заметил, что резиновая трубка с тонкими стенками отличается от тонкого квадратного куска резины существеннее, чем этот кусок от кружка, потому что квадратный кусок можно растянуть и получить круг, но при попытке сделать квадрат из трубки нам пришлось бы разрезать ее по длине. Это наблюдение положило начало новой классификации геометрических тел. Идя по этому пути, Листинг (1858 г.) обнаружил новые объекты или предметы, до того остававшиеся незамеченными, например, так называемую ленту Мёбиуса[3]. Он ввязался в эти исследования, но ему даже не пришло в голову, что он обязан начать с системы аксиом этой новой геометрии. Топология стала полезной задолго до того, когда ее «придумали»: например, в науке о движении планет она позволила доказать существование замкнутых орбит, что до того было неразрешенной задачей. Одновременно Риман сумел наглядно доказать некоторые явления в теории функций комплексного переменного, которые трудно было понять без изготовления бумажных моделей, состоящих из нарезанных карточек и сшитых крест-накрест вдоль разреза. Многозначные функции, такие как $\sqrt{z}$, были известны раньше, чем эти бумажные поверхности Римана, но только спустя несколько десятилетий после его смерти Г. Вейль предпринял попытку строгого определения этих поверхностей.

А как поступает автор статьи о тенденциях современной математики, когда сам ищет что-то новое? В математических кругах он получил признание за теорию распределений, которая позволила обобщить понятие производной и, следовательно, обобщить в физике понятия плотности массы и скорости движения. Это стало существенным достижением, например, для описания движения частиц суспензии (так называемое броуновское движение, по имени Р. Броуна). В принятой ранее теории такие частицы двигались по траекториям, каждый отрезок которых был бесконечно длинным, хотя частица и проходила его за конечное время. Это не позволяло рассматривать скорость частиц в обычном смысле, но недавно молодой польский математик Урбаник показал, как можно объяснить этот парадокс с помощью распределений Шварца. Из этого примера видно, что сам профессор Шварц (как и каждый истинный математик) умеет ставить перед собой естественные вопросы (т. е. вопросы, которые задает природа или которые нам оставили в насле-

3 Мёбиус открыл ее одновременно с Листингом.

дство великие предшественники), а не пытается играть в какую-то довольно замысловатую игру неизвестно против кого…

Роль строгости в современных математических исследованиях можно сравнить с асептикой в хирургии. Хотя сегодня ни один хирург не захочет оперировать иначе, было бы смешно утверждать, что якобы раньше (т. е. до того, как благодаря открытию Пастера была обнаружена причина высокой смертности пациентов) вообще не было мастеров скальпеля, достойных этого звания. Поскольку асептика не является прерогативой хирурга, а, подобно строгости в математике, есть только одна из гарантий успеха, то сама цель процедуры и ее характер определяются иными взглядами, далекими от асептики, а забота о ней поручается сегодня оператору обслуживающего персонала.

Очень многие математики обращаются к критерию эстетичности: эта теория красива — и это основание, чтобы ею заниматься! Красивым, однако, является понятное и достаточно распространенное (чтобы оно могло быть применено к известным, а не *ad hoc*, т. е. специально сотворенным примерам), а вместе с тем не обыденное до тривиальности. Чувство меры имеет естественное объяснение, продиктованное природой, поскольку именно природа подсказала Евклиду его геометрию. Нетрудно привести и другие примеры — что может быть более естественным, чем созданная Понселе проекционная геометрия! Но красивы не только эти теории — никто не отрицает красоты теории Галуа, которая разрешила проблему решения алгебраических уравнений. Она возникла на основе тщетных усилий решить уравнение пятой степени теми способами, которые были достаточными в случае уравнений низших степеней. Такие уравнения появились очень давно в результате возвращения к многочленам, которые в свою очередь возникли как естественный продукт арифметических действий… Разумеется, я не ссылаюсь ни на несуществующий абсолютный критерий красоты, ни также на какую-либо объективную концепцию «природы», а хочу только напомнить, что субъективные критерии, выработанные на основе этих понятий, сильнее влияют на ход математических исследований, чем принцип безупречной строгости.

Эти примеры связаны с темой дискуссии, так как они напоминают нам, что математика никогда не дается готовой, что отдельные ее направления растут и развиваются, а другие отмирают. Математика является органичным продуктом народов и сообществ, а не только творением индивидуального каприза, в соответствии с советом «установить произвольные правила игры, а затем играть, соблюдая эти правила». Грех профессора Шварца состоит не только в том, о чем я уже говорил, но и в том, о чем я умолчал. Дело в том, что математика является таким же органичным творением, как речь, ремесло, музыка или земледелие (аналогия простирается настолько далеко, что историк О. Шпенглер без колебаний приписал каждой культуре свою математику, как если бы это была отдельная наука…). Органичные творения появляются в соответствии с биогенетическим законом Геккеля, т. е. эволюция индивидуума переходит в эволюцию вида. Отсюда вытекает невозможность обучения математике по работам Николя Бурбаки, потому что ученики лишены способности познания той математики, которая представляет собой «нечто вроде экспериментальной физики», и поэтому преподаватели обязаны указывать одной рукой в уже пройденное прошлое, а другой — в еще неизвестное будущее…

Взгляды профессора Шварца не новы. Моему поколению они известны уже полвека, и они нанесли большой вред. Многие польские математики поверили в то, что строгость является философским камнем математики только потому, что ни физика, ни естественные науки не могут мечтать о такой строгости, и презрительно отстранились от этих наук, в результате чего философский камень превратился в камень преткновения и это вызвало взаимные обиды и оскорбления. Широкая общественность вскоре узнала от обиженных и оскорбленных, что математика, которой занимаются известные польские ученые, ни для чего не нужна, а «обладатели камня» вообще на это не реагировали …

Впрочем, за границей ситуация была и остается не лучше, если Р. Ю. Гаскелл в 1957 г. (*American Mathematical Monthly*, vol. 64, № 8, pp. 557–566) так пишет о математике в ее практическом применении: «К счастью, некоторая часть математики доходит до потребителей, но и без этого столь распространено невежество по поводу того, что представляют собой математики и что они умеют делать. Это невежество не только распространено, но у некоторых отдельных людей оно находит интенсивное, агрессивное и провоцирующее выражение...». В отношении наших невежд я могу только подтвердить эти слова. Даже те, кто равнодушно относятся к нашей науке, знают о ней немногим больше, чем дети. Одни убеждены, что математики — это увлеченные вычислители, которые заучивают наизусть таблицы логарифмов и состязаются в этом с машинами (современные вычислительные машины вскоре сделают это бесполезным). Другие думают, что математика является «философией» и даже чем-то вроде числовой кабалистики, которая благодаря понятию бесконечности покрыта туманом мистицизма и утратила всякий контакт с арифметикой бухгалтеров и торговцев (т. е. с тем, что, по их мнению, имеет хоть какой-то практический смысл). Если взгляды профессора Шварца получат распространение, появится невежда нового типа — ему будет казаться, что математика чем-то похожа на пасьянс.

Разумеется, по меньшей мере часть ответственности за эти совершенно ложные тезисы несут сами математики, причем не математики прошлого, а действующие и общепризнанные. В этом скорее повинны не учителя, а авторы школьных программ и учебников, хотя и их вину уменьшает то обстоятельство, что чрезвычайно трудно найти примеры применения математики на ступени, доступной школьной молодежи. Эта трудность вызвана тем, что учебники и задачники отталкиваются от искусственных примеров, шарад и головоломок, что также дискредитирует математику в глазах наиболее образованной части школьной молодежи. Поэтому следует выразить благодарность журналу *Matematyka* за то, что он опубликовал перевод статьи г-на Л. Шварца и вынудил своих читателей переосмыслить вопросы, которые эта статья поднимает.

Индуктивное умозаключение

...Я еще никогда не встречал ни такой сильной рыбы, ни такой, которая поступала бы так своеобразно. Быть может, она настолько умная, что умеет прыгать. Она могла бы прикончить меня, если бы внезапно прыгнула или набросилась. Но, видимо, ее уже не раз брали на крючок, и она знает, что именно так должна бороться. Она не может знать, что перед ней только один человек и что этот человек — старик...

(Э. Хемингуэй. *Старик и море*.)

Эта статья не претендует на то, чтобы называться философским произведением, так как она не содержит сложных рассуждений, а довольствуется лишь описанием фактического положения, сложившегося в XX веке вокруг проблемы естественнонаучной индукции. Любая не опирающаяся на факты философия быстро приобретает привкус фидеизма, и поэтому, возможно, читателям *Myśli Filozoficznej* (Философская мысль) будет интересно узнать, как должны точные науки относиться к некоторым связанным с этим понятиям, например, к индукции.

Сразу же устраним двусмысленность заголовка, обусловленную тем, что в математике уже используется понятие, называемое полной или математической индукцией, дедуктивный характер которого не вызывает сомнений. В очень упрощенной форме оно подразумевает, что если какой-либо наследственный признак принадлежит родоначальнику, то он будет принадлежать также и всем поколениям потомков. Но не об этом правиле (которое необходимо скорее логикам, нежели философам) я буду вести речь.

1. *Естественная индукция или обобщение.* Откуда мы знаем, что железо, доведенное до белого каления, обжигает? Из опыта: до сих пор каждый, кто пробовал взять в руки раскаленную добела железную болванку, обжигался — и если я это сделаю, то тоже обожгусь… Однако в систематизированной схоластиками аристотелевой логике нет никакого правила, которое санкционировало бы приведенное выше рассуждение. Впрочем, и современная логика не запрещает появления факира, который сможет без последствий голыми руками схватить раскаленную добела болванку. Это бессилие логики совершенно не препятствует использованию в науке и в жизни неполной индукции: мы пользуемся ею чаще, чем всеми принципами формальной логики, вместе взятыми…

Очевидно, никто бы не огорчился отсутствием логической гарантии, если бы принцип индукции был несомненным. Недавно получило огласку дело о лекарстве доктора Салка против детского паралича (полиомиелита). Проблема состоит в том, что испытанное на многих тысячах детей с благоприятным исходом средство иногда (в нескольких десятках случаев) при превентивном использовании приводило к фатальным результатам, вызывая увечья или смерть. В связи с этим в некоторых странах Северной Америки это средство было запрещено использовать, что, естественно, вызывает (у математиков и практиков) вопрос о том, каким должно быть число положительных результатов испытаний, чтобы к этому случаю можно было применить принцип обобщения.

Все, о чем мы до сих пор говорили, страдает недостатком строгости, и поэтому нам следует попытаться немного уточнить рассматриваемую задачу, поставив ее в следующей форме. Пусть эксперимент (или наблюдение) повторяется n раз таким образом, что каждый опыт не зависит от всех предыдущих. Пусть среди результатов было m положительных (т. е. m раз произошло событие A) и $(n - m)$ отрицательных (т. е. $n - m$ раз произошло событие *не*-A). Что можно предположить по поводу очередного опыта?

В такой постановке проблема индукции приобретает привычную математическую форму, имеющую бесчисленное количество вариантов. Естествоиспытатели и врачи, инженеры и торговцы, учащиеся, экономисты и статистики, а также простые люди сознательно или бессознательно ежедневно решают эту задачу. Для краткости будем описывать результат серии экспериментов символом $m//n$, хотя можно было бы и возразить против использования такого символа, поскольку он не отражает последовательность положительных и отрицательных результатов. Если мы желаем исходить из предпосылки независимости опытов так, чтобы была безразлична их очередность во времени, то можно даже представить, что имеется n лаборантов, и все они одновременно проводят одинаковый эксперимент. Число m может быть равно 0, 1, 2,…, n, но особый интерес представляют крайние результаты ($m = 0$ и $m = n$). Между ними нет принципиальной разницы, так как если мы присвоим событию *не*-А имя В, то эксперименты, относящиеся к событию В, дадут тот же самый результат (естественно, с заменой результата $0//n$ на $n//n$). Третий случай ($0 < m < n$) выделить труднее, потому что серия экспериментов с результатом 10//10 может предшествовать серии с 0//10, вследствие чего (если оба эти результата принять к сведению как крайние, т. е. типичные для принципа обобщения) нельзя игнорировать тот факт, что обе серии вместе порождают новую серию с результатом 10//20.

К сожалению, мы слишком слабо знаем историю философии, чтобы предположить, что Гиппократ и эпикурейцы догадывались о неполной индукции, однако допускаем, что сформулированные выше замечания уже лежали в радиусе действия тогдашней науки. С другой стороны, несомненно, что теория индукции вплоть до наших дней оставалась бы только собранием элементарных и выхолощенных трюизмов (более или менее педантично разработанных), если бы на ее основе не возникла новая ветвь математики.

2. *Теория вероятностей.* Первым математическую задачу, касающуюся игр со случайным исходом, поставил Лука Пачоли (в 1487 г.), но потребовался гений Паскаля, чтобы создать доктрину, называемую сегодня теорией вероятностей. Именно Паскаль триста лет назад написал Ферма письмо (29 июля 1654 г.) об игре в кости, и эту дату можно считать днем рождения теории вероятностей. Новое исчисление, несомненно, ведет свое происхожде-

ние из практики азартных игр: настойчивость шулеров выработала у них умение оценивать шансы, вытекающие из правил игры. Классический метод вычисления вероятности сложился в конце XVII века, а в 1795 г. он уже был предметом курса Лапласа в École Normale. Сегодня эта дисциплина обоснована не хуже других и (подобно другим разделам математики) ее тоже можно сформулировать настолько абстрактно, что трудно догадаться, о чем идет речь. Но уже Паскалю была известна шкала шансов, на которой 0 означал вероятность невозможного исхода, 1 — вероятность несомненно положительного исхода, а $^1/_2$ — вероятность равновозможного исхода, примером которого является выпадение орла или решки в момент остановки идеально симметричной монеты, приведенной во вращение вокруг диаметра в вертикальной плоскости. Обе стороны (орел и решка) с точки зрения гравитационного поля находятся в одинаковой ситуации, так что вероятность выпадения, например, орла равна $^1/_2$ (из чего сразу следует, что вероятность выпадения двух орлов при одновременном вращении двух монет составляет $^1/_4$).

Шкала шансов охватывает все числа от 0 до 1. В 1713 г. Якоб Бернулли открыл «закон больших чисел», который в современной формулировке гласит, что в бесконечно длинной серии бросаний монеты частота выпадения орлов будет равна $^1/_2$. Более того, по всей видимости, это будет выполняться с вероятностью 1 (так как в бесконечно длинных играх «вероятность 1» не эквивалентна несомненности). Если бы монета была некачественной, то орлы появились бы с иной частотой p ($p \neq {}^1/_2$); это было бы доказательством того, что p — вероятность выпадения орла при одном бросании. Существуют теории, в которых частота по определению является вероятностью единичного случая, но в настоящее время вероятность вводится аксиоматически (по примеру геометрии), и тогда закон больших чисел становится теоремой, которую нужно и можно доказать. Вопрос о связи закона больших чисел с действительностью на самом деле ничем не отличается, например, от вопроса, относится ли теорема Пифагора к прямоугольному треугольнику, вырезанному из жести, но для нас важно лишь знать, что на основе теории вероятностей можно построить теорию индуктивного умозаключения.

Применение теории вероятностей к индуктивному умозаключению основывалось на двух посылках. Первая из них — отказ от вывода в категоричной форме (типа «если на безлюдной улице мы десять раз подряд встретили мужчину, то следующий встречный тоже несомненно будет мужчиной») и принятие заключения в иной форме («если мы десять раз подряд встретили мужчину, то вероятность того, что очередной встречный будет мужчиной, равна 92%»). Здесь речь идет не о том, что 92% — это действительно вычисленное значение, а о том, что окончательным выводом может быть число, отличное от 100% (а также от 0%). Другая идея сводится к заимствованию модели теории игр с вероятностным исходом и выводу на этом основании индуктивного умозаключения-суждения, подобного оценке шанса в игре. Если мы 10 раз подряд вынимаем из урны белый шар и делаем ставку в один злотый, что одиннадцатый шар тоже будет белым, то какой ставки мы должны потребовать от партнера, чтобы игра была справедливой? Для этого мы должны научиться вычислять вероятность извлечения белого шара в описываемой ситуации. Лаплас воспользовался для этого формулой $p = (n + 1)/(n + 2)$, где p есть вероятность того, что после серии из n успешных исходов следующая попытка тоже будет успешной. Он даже без колебаний использовал эту формулу для вычисления вероятности того, что завтра утром снова взойдет солнце.

К ответу на поднятые вопросы нам поможет приблизиться другой пример. Представим себе, что получен некоторый медицинский препарат (назовем его H), который необходимо исследовать для использования с новой целью (например, в качестве заменителя определенного гормона, имеющего важное терапевтическое значение). Исследование заключается в том, что мыши получают растворенный в воде препарат H, после чего (спустя определенное время) этих мышей изучают на предмет появления у них конкретного симптома, вызываемого настоящим гормоном. Каждую таблетку H, вызывающую эти симптомы и изготовленную описанным способом, мы будем называть «доброкачественной», а *эффективностью* препарата H в целом мы назовем долю f доброкачественных таблеток во всей их произведенной партии. Министерство здравоохранения дает разрешение на использование препарата Н в качестве гормона при условии, если фирма-производитель докажет, что его эффективность превышает 95%. Чему равна вероятность того, что требование министерства выполнено, если проведенный на 100 мышах эксперимент дал 97% положительных результатов? Ответ кажется очевидным: эксперимент дал 97% успешных результатов, министерство требует 95% и, следовательно, его условие ($f > 95\%$) выполнено. Правило, согласно которому доля в пробной партии сравнивается с долей в популяции (т. е., как в описанном эксперименте $f = m/n$), все еще распространено, но даже практики, например врачи, перестают ему доверять, если n является малым (например, 5), а m в точности равно n. Если бы, например, какой-то новый операционный метод был применен только к пяти пациентам, никто не припишет ему 100%-ную надежность, хотя у всех пяти операция прошла успешно.

Обратим внимание на определение эффективности. В описанном случае мы можем рассматривать препарат Н как асимметричную монету (внутренние изъяны которой неизвестны), выбор пробной таблетки — как бросание монеты, ее доброкачественность — как выпадение орла, а f — как вероятность выпадения орла именно у этой монеты. Таким путем фармацевтическая задача сводится к проблематике, известной уже предшественникам Лапласа, в курсе которого (цитированном выше) мы можем найти подобные задачи, касающиеся урн с белыми и черными шарами. Классических решений здесь, однако, недостаточно, и английский пастор Томас Байес уже в 1764 г. задался вопросом, где же лежит трудность. По мнению Байеса, задача разрешима, если еще до эксперимента мы располагаем некоторой информацией, и неразрешима, когда такой информации нет. Эта информация имеет название «*априорная* вероятность». Ниже я приведу единственный известный мне пример, в котором такая информация доступна.

3. *Судебное установление отцовства.* Для упрощения предположим, что эксперт, приглашенный в суд, располагает только одной сывороткой, которая позволяет определить, имеет ли исследуемый субъект группу крови С или нет. Отсутствие этой

группы крови у обоих родителей приводит, согласно абсолютному правилу наследственности, к отсутствию ее у потомка, так что наличие группы C у ребенка матери, не имеющей этой группы, категорически исключает отцовство каждого мужчины, не имеющего группы C. Если, однако, мужчина, являющийся ответчиком перед матерью, имеет группу C, то задача перестает быть банальной: какова же тогда вероятность, что он является отцом ребенка, по поводу которого внесен иск? Желая в этом случае использовать теорию Байеса, мы до экспертизы должны знать вероятность того, что ответчик является отцом ребенка, по поводу которого судом затребовано заключение такого рода, т. е. именно «*априорную* вероятность». Иными словами, нам надо знать, сколько всего вероятных отцов среди ответчиков. Это удалось доказать совсем недавно с помощью весьма простого статистического приема: исследования групп крови показывают, с какой частотой *c* появляется группа крови C во всем польском населении, и из скольких тысяч судебных экспертиз можно вы́читать, какова частота группы C среди мужчин, являющихся ответчиками по иску в отношении детей, имеющих эту группу крови. Как показал Л. Гиршфельд[1], эта вероятность достаточно высока, и из сравнения двух частот вытекает, что в Польше 70% ответчиков по делам об установлении отцовства соответствуют доказательной истине. Следовательно, в послевоенной Польше величина 0.7 и есть *априорная* вероятность того факта, которому суд должен придать законную силу или отклонить его. Если бы судья имел в распоряжении исключительно эту информацию и желал игнорировать показания сторон и все прочие аргументы, то он обязан был бы всегда принимать сторону ответчика. Серологическое исследование групп крови трех лиц, участвующих в игре, является источником *новой*, отдельной информации, а модель Байеса учит, как дополнительное привлечение этого факта позволяет определить так называемую *апостериорную* вероятность истинности довода ответчика. В случае исключения факта отцовства (о чем шла речь выше) эта вероятность уменьшается с 0.7 до нуля и вычисления оказыва-

[1] См. J. Łukaszewicz: *O dochodzeniu ojcostwa. Zastosowania Matematyki*, 1956, с. 349–379.

ются ненужными, в противном случае она даже может вырасти до 99 % в зависимости от частоты c, которая известна для основных групп крови. Формула Байеса в этой задаче принимает следующий вид:

$$P = \frac{p}{p + (1 - p)c} \quad \text{(в Польше } p = 0.7\text{)}, \qquad (1)$$

где P — искомая *апостериорная* вероятность, а p — *априорная* вероятность (в Польше она равна 0.7 а, например, в Копенгагене 0.5)[2].

Несмотря на то, что Людвиг Гиршфельд уже имел в руках ключ к решению рассматриваемой задачи, он не воспользовался им 22 ноября 1951 г., излагая результаты своих исследований на заседании медицинского отделения Вроцлавского научного общества. На этом заседании выясняли, что и как определяет серология и какие количественные заключения она может предоставить суду в случаях, когда исключить отцовство не удается (тогда это можно было сделать только в одном случае из десяти). Тогда же участники обратили внимание на то, что представленное число вовсе не является вероятностью и его нельзя так называть, в результате чего завязалась дискуссия, которую через 10 минут председательствующий прервал словами: «… речь здесь идет только о терминологии…». Был ли он прав?

Да, поскольку в то время никто не знал, как вычисляется искомая вероятность. Спустя год, однако, стало известно, что формулу Байеса можно использовать в качестве «ключа Гиршфельда», хотя только в отношении небольшого числа лиц. Еще и сегодня большинство серологов и антропологов *в мире* не умеют пользоваться этим ключом (вследствие чего даже некоторые французские математические публикации текущего года являются неактуальными). Однако мы вправе спросить, что и как вычисляли раньше ученики Гиршфельда и он сам?

В логике известно правило противоположности:

---

2 L. Hirszfeld: *Wege und Ausblicke der Blutgruppenforschung für die Feststellung der Vaterschaft. Schweizerische Zeitschrift für Allgemeine Pathologie und Bakteriologie*, 1952, № 15, s. 257–280.

Суждение «A включает B» эквивалентно суждению «*не*-B включает *не*-A», из чего следует вывод:

(R) Если *не*-A с вероятностью 90% включает *не*-B, то B с вероятностью 90% включает A.

Этим правилом ранее почти повсеместно пользовались при определении вероятности отцовства на основании экспертизы. Выглядит это так: группа крови C появляется у польского населения с частотой 10%. Суждение «ответчик X является отцом ребенка женщины-истца» обозначим через A, а суждение «X имеет группу крови C» обозначим через B. Тогда правило, предшествующее выводу (R), звучит теперь так: «Если X не является отцом ребенка истицы, то с вероятностью 90% он не имеет группы крови C». В действительности это означает, что X выбран случайно, без биологической связи с ребенком, среди всех мужчин, которые в 90% случаев не имеют группы крови C. Вывод (R) гласит, что (в связи со сказанным) справедливо также и следующее утверждение: «Если X имеет группу крови C, то с вероятностью 90% он является отцом ребенка истицы». Вместо формулы (1) мы, следовательно, имеем

$$P = 1 - c. \tag{2}$$

Именно такой вывод следует из того, что X имеет группу крови C. Нелепость такой дедукции легко можно проиллюстрировать следующим примером. Эксперт исследовал мать, мужчину-ответчика и ребенка, но вероятность вычислил только из двух предпосылок: 1) X имеет группу крови C; 2) Группа C имеется у 10% населения. При этом эксперт вообще не использовал группы крови матери и ребенка (они не участвуют в дедукции), вследствие чего можно было бы для той же самой цели использовать любой другой редкий признак. Например, можно было бы исходить из того, что ответчик имеет имя Геральд — так как это имя появляется в Польше с частотой 1:10 000, то, стало быть, ответчик является отцом с вероятностью 99.99%… Где скрывается ошибка? Она заключена в выводе (R), который *вообще не вытекает из правила противоположности.* Как могло получиться, что такая ошибка осталась незамеченной? Она обнаружилась бы сразу, если бы адвокат ответчика использовал в качестве аргумента имя ответчика. Проблема возникает из-за того, что определенный факт (ребенок имеет группу крови C, а мать ее не имеет и, следовательно, ответчик удовлетворяет необходимому условию установления отцовства, т. е. имеет нужную группу крови) воздействует и даже ошеломляет человека, читающего экспертизу, который не отдает себе отчета в том, что является жертвой софизма и не замечает, что умозаключение фактически обходится совершенно без генетического аргумента.

4. *Статистическая проверка.* Как же тогда следовало поступить, чтобы не подвергнуться упреку в нелогичности? Маргарет Венингер предлагает следующий выход[3]: принять в формуле (1) априорную вероятность равной $^1/_2$ (допустим, что автор не знает, что использует формулу Байеса и не догадывается, что априорная вероятность может быть иной), что приводит к следующей формуле:

$$P = \frac{1/2}{1/2 + c/2} = \frac{1}{1+c}\,. \tag{3}$$

Этот результат можно было бы обосновать постулатом судебной беспристрастности: судья обязан (пока не имеет никаких аргументов *pro* и *contra*) спорящих истца и ответчика считать одинаково правыми, т. е. приписать их утверждениям одинаковую справедливость (по 50% каждой стороне), что, кстати, в общем случае советовал делать и сам Байес. Разумеется, сегодня мы знаем, что априорная вероятность правоты ответчика в Польше равна 0.7. Мы знаем также, что формула (3) абсолютно верна в Копенгагене. Наконец, легко убедиться, что формулы (1), (2) и (3) дают почти одинаковые значения *P*, если группа крови C является редкой.

Логично спросить, а можно ли вообще называть некоторые методы худшими или лучшими, и какой смысл имеют такие определения? Почему мы считаем, что определяемый формулой (1) метод лучше других, упомянутых здесь? Ответ на это дает при-

[3] M. Weninger. *Zur zahlenmässigen Erfassung der Ähnlichkeit im naturwissenschaftlichen Verwandtsnachweis. Mitt. d. Österr. Ges. f. Anthropologie, Ethnologie u. Prähistorie,* т. 78/9, Вена 1944, с. 33–58.

нцип статистической проверки — так мы будем называть интерпретацию формул с помощью закона больших чисел. Представим себе судью, который в случаях, когда эксперт обнаружил группу крови С у ответчика и у ребенка (но не у истицы!), всегда будет признавать иск справедливым. Решения такого судьи (если количество дел подобного рода будет неограниченно расти) будут соответствовать истине с частотой P, которая вычисляется по формуле (1). Другие способы вычисления P не обладают таким свойством, поэтому мы называем их худшими. Для читателя может быть более интересной другая формулировка этого принципа: если бы судьи умели принимать безошибочные решения, соответствующие истине, то в делах об установлении отцовства они выносили бы 70% решений в пользу истца — мы по-прежнему имеем в виду неограниченное количество процессов. Статистические данные 900 процессов показывают, что число таких решений составляло 82%, из чего следует вывод, что законодательство, процедура и ориентация судов совместно образуют аппарат, который в делах такого типа по большей части стоит на стороне женщины. Таким образом, умозаключение на основе статистики имеет реальный смысл и даже открывает факты, до которых иным способом добраться было бы невозможно[4].

5. *Сравнительный аргумент*; *доверительность.* Вернемся к препарату Н, так как мы еще не ответили на вопрос министерства здравоохранения, обладает ли он (в качестве гормона) эффективностью не менее 95%. Ответ должен вытекать из эксперимента, результат которого был равен 97//100. Вопрос имеет альтернативный характер, но ответ должен быть категоричным (как и приговор судьи). При этом эксперт (пример п. 3) не дает категорического ответа, а ограничивается мнением: «да, с вероятностью P», которую можно вычислить с помощью формулы (1), а ее можно использовать только зная априорную вероятность (о чем в данном случае нельзя и мечтать). Ранее мы имели совокупность, составленную из всех ответчиков по делам об алиментах в Польше за 10 лет, и ключ Гиршфельда, здесь же нам потребовалось бы

[4] См. цит. ранее Łukaszewicz.

провести оценку по совокупности препаратов. Такую оценку довольно трудно представить, но даже если бы ее и удалось сделать, совокупность была бы слишком неоднородной для получения на ее основе какой-либо статистической информации. В качестве суррогата был придуман так называемый сравнительный аргумент, создателями которого являются Р. Э. Фишер и К. Пирсон. На примере препарата Н эта уловка выглядит так: рассчитывается вероятность того, что препарат с эффективностью 95% даст в 101 опыте самое большее 97 положительных результатов. Несложные вычисления показывают, что искомая вероятность равна 94.8%. В результате, вместо ответа на свой вопрос, министерство здравоохранения получает ответ на *другой*, но приверженцы сравнительного аргумента считают, что число 94.8% можно представить как гарантию требуемой эффективности препарата. Можно обнаружить аналогию между сравнительным аргументом и формулой (3), основанной на беспристрастности судьи, но в юридическом примере мы можем доказать ошибочность формулы (поскольку там мы имели дело с совокупностью разбирательств), а здесь нам не хватает совокупности препаратов. Введению такой совокупности препятствуют даже не технические, а *sit venia verbo* (с позволения сказать) философские, а точнее, даже эпистемологические трудности.

Можно, однако, отважиться и предложить такие формулировки, которые были бы доступны статистической проверке (хотя бы только теоретической, но принципиально возможной), одну из которых нашел Ежи Нейман[5]. Ее также, впрочем, можно считать и уловкой, ибо она обходит стороной основную проблему. В соответствии с этой теорией, эффективность в рассматриваемом случае заключается между величинами 93.6% и 100% «с доверительностью 95%». При этом выражение «доверительность 95%» здесь означает построение формулы расчета таким образом, что среди полученных с ее помощью ответов 95% будут достоверными (иными словами, в среднем один раз из двадцати эффективность будет находиться вне интервала, гарантированного этой формулой). В нашем случае «доверительный интервал»

---

5 J. Neyman: *On the problem of confidence intervals. Annals of Mathematical Statistics*, 1935, № 6, p. 111.

равен (93.6%–100%), а если бы эксперимент дал результат, например, 90%, то доверительный интервал был бы равен (84%–96%). Выше мы говорили, что министерство здравоохранения интересует именно и только интервал (95%–100%). Метод Неймана, однако, каждый раз дает в качестве ответа иной интервал, но поддерживает риск постоянно на уровне 5%. Таким образом, хотя министерство задает точный интервал и интересуется риском, ответ по заданному риску каждый раз соответствует другому интервалу.

Очевидно, что на поставленные вопросы было бы желательно получать ответы в форме «да, с риском r_j» (индекс j означает номер экспертизы), т. е. мы хотели бы, чтобы в некотором смысле последовательность чисел r_j соответствовала частоте неправильных ответов…, но, к сожалению, эти пожелания остаются невыполнимыми, и сомнительно, что их вообще удастся выполнить.

На практике из тупика удается выйти за счет введения двух границ вместо одной, т. е. установить, например, что лекарство с эффективностью 97% и выше является «хорошим», а лекарство с эффективностью 91% и ниже — «плохим». К таким определениям можно подобрать приемлемый рецепт или «план», применение которого позволяет в среднем отвергнуть не больше одного хорошего препарата из двадцати хороших, но и пропустить в среднем не больше одного плохого препарата из двадцати плохих. В рассматриваемом примере таким планом будет предписание исследовать 160 подопытных животных и апробировать лекарство, которое дает менее 9 отрицательных результатов, а остальные лекарства — исключить из применения. Кажется, что это решает практические проблемы, но оптимизм умеряет следующее соображение: действительно, определенный выше план позволяет выявить при контроле плохой препарат (в целом), но он вовсе не гарантирует, что прошедший контроль препарат будет в целом хорошим. Ситуация станет понятнее, если представить себе, что речь идет о препарате H, который производит только одна фабрика. Препарат является «плохим» с эффективностью 91%, т. е. в среднем каждая двадцатая упаковка пройдет контроль и поступит в аптеки, а из них найдется и такая, которая будет содержать таблетки H, являющиеся плохими.

6. *Степень достоверности*. В биологии задачи, подобные описанным выше, появляются в разных модификациях, одна из которых обычно заключается в сравнении двух методов (например, двух способов обработки земли, двух инсектицидов и т. д.). Аналогично, в технике, в производстве промышленной продукции и многих других областях часто требуется определить лучший из двух методов (или, возвращаясь к нашему примеру, выяснить, какой из препаратов Н, производимых двумя фирмами, является лучшим). При такой постановке вопроса надлежит определить *lege artis statisticae* (по всем правилам искусства статистики) риск ошибки, который выше был равен 5%. При этом возникает вопрос о степени предполагаемого риска. На жаргоне статистики это значит, что речь идет о «достоверности» событий. Если считается, что из двух инсектицидов А «достоверно» лучше В, то это означает, что сравнительный аргумент определил А лучшим с риском ошибки 5% (иногда говорят также, что А лучше В с достоверностью 95%). В других отраслях считается удовлетворительной достоверность 90% и т. п., так как в каждой сфере применений существует и установлена специфическая степень достоверности. В сущности здесь повторяется мучительный вопрос о соответствующем количестве опытов при индукции. Почему в разных сферах человеческой деятельности это число устанавливается по-разному? Ответ сводится к тому, что степень достоверности зависит от последствий правильного определения «H_1 лучше, чем H_2». Если такое определение не связано ни с какими последствиями, то установить степень достоверности невозможно. В медицине определение «эффективность препарата Н превышает 95%» приводит к разрешению его применения в лечебной практике. В противном случае его применение исключается, т. е. можно совершить ошибку в двух случаях: допустив к применению препарат с низкой эффективностью или запретив применение препарата с достаточно высокой эффективностью. В обоих случаях наносится вред, который трудно выразить чисто экономически (как оценить вред от прописывания вместо необходимого гормона бесполезных таблеток Н и связанного с этим нарушения процесса лечения?). Кроме вреда от ошибки следует учитывать и ущерб, связанный с затратами на исследование таблеток, которые растут

с количеством анализов. Даже если кому-то удастся определить степень вреда f (в денежном выражении), вызванного выпуском в оборот миллиона таблеток с эффективностью s, как функцию $f(s)$ этой эффективности, то необходимо найти и функцию $g(s)$, определяющую вред от недопущения в оборот этого миллиона. После этого перед исследователем возникает следующая математическая задача: необходимо разработать правила, согласно которым можно определить число n пробных таблеток и наибольшее количество m экспериментов с отрицательным результатом, при которых партия препарата Н еще получает одобрение, но одновременно можно и минимизировать ожидаемый ущерб от затрат на исследования. Здесь скрывается немало трудностей, но нам сейчас хочется сказать то, что проблема индукции является принципиально разрешимой, если увязать ее с продвижением, обусловленным результатами экспериментов. Собственно говоря, рассматриваемая задача не имеет решения в форме констатации факта «партия препарата Н пригодна для использования» (так как такой вывод был бы отягощен первородным грехом неполной индукции!). Конечный результат должен сводиться к приказу «распространить партию препарата!», несмотря на то, что мы не имеем общего и точного определения эффективности данной партии. Остаются только эксперимент и приказание, зависящее от его результатов. Такой подход ничего не говорит о вероятности (в виде некоторой дроби), а просто создает механизм, связывающий эксперимент с реальной жизнью и прогрессом. Оптимальность подхода определяется с вероятностью 1 (в смысле закона больших чисел), т. е. с такой вероятностью мы обещаем послушному исполнителю, что никто не сумеет уменьшить средние затраты, связанные с исследованиями и возможным ошибочным решением.

Мы дошли до главного тезиса. Проблему индукции можно решить только тогда, когда мы откажемся от вопроса, обжигает ли раскаленное добела железо, а вместо него спросим, может ли это случиться, если взять его в руки. Это не является лишь иной формой данного вопроса, что и доказал Муций Сцевола.

7. *Природная индукция*. Не только люди, но и животные (главным образом высшие млекопитающие) умеют принимать решения и действовать по индукции, как если бы они обучались

на собственном опыте. Даже низшие организмы регистрируют импульсы, приходящие от органов чувств в центральный нервный аппарат (у высших организмов это мозг), который при достаточно высокой частоте импульсов подвергается изменениям и начинает реагировать на них по-новому, изменяя существующие рефлексы или создавая новые. Одним словом, существует теория условных рефлексов, основой которой является природная или биологическая индукция. Здесь философская проблема была решена на низшей ступени эволюции без сознательного рассуждения, и (что хуже всего для философов) — была решена правильно. Если бы количество опытов, необходимых организму для закрепления реакции, не совпадало с общими интересами биологического вида, то такой вид перестал бы существовать. Если число таких опытов мало, то некоторые представители вида погибали бы, не достигнув половой зрелости, от слишком быстрого обучения (строго говоря, по причине излишнего доверия получаемому опыту). С другой стороны, если бы число *n* механизмов, закрепляющих опыт («память»), было слишком большим, то погибали бы также и те особи, которые обучались бы слишком быстро и закрепляли свои рефлексы уже при малых *n* (их погубила бы склонность принимать преждевременные решения). Тот факт, что некий вид существует, является биологическим доказательством установления путем индукции соответствующего значения *n* в ходе индивидуальной и видовой эволюции. Раз вид существует, *ergo* (следовательно) он приспособился к окружающей среде и удачно решил проблему индукции (т. е. решил ее так, что внешний мир не опровергнул этих неосознанных вычислений). Этот биологический критерий, однако, неприменим в тех случаях, когда вопрос выживания не имеет значения для особи и для вида, т. е. когда речь идет об абстрактных, чистых суждениях и об их истинности. В таких ситуациях утрачивает силу не только биологический критерий, но и неясна цель самой математики.

Возможно, читателя заинтересует, что пишет английский невролог д-р У. Грэй Уолтер в статье *The imitation of mentality* (*Nature*, 14 апреля 1956 г., vol. 177, № 4511): «Основная концепция, на которую опирается описание мышления посредством ассоциации, состоит в том, что разум полагается скорее на статистический или вероятностный анализ эксперимента, чем на логический или детерминистский… Эта концепция вовсе не так далека, как казалось бы, от действительной проблемы мозга и его функции; способность к обучению есть характерная особенность мозга, а гипотеза, что обучающийся мозг постоянно просматривает мир опытов в погоне за подлинной статистической информацией, подсовывает нам новый, экспериментальный подход к проблеме, подобно тому, как обучаются животные… Все это выглядит, как если бы животные (домашние или иные) вели себя во время обучения подобно статистическим автоматам, настроенным на принятие в качестве уровня истинности шанса более чем 1000:1 против гипотезы случайной ассоциации. Следовательно, если в основе обучения лежит определение истинности, то большинство животных являются значительно большими скептиками, чем профессиональные статистики, которые обычно считают соотношение шансов 100:1 против случайности *индикатором* истинности…»

Эта выдержка, возможно, станет понятнее на фоне статьи *Computers and automata*, автором которой является один из создателей математической теории информации К. Э. Шеннон (статья появилась в *Proceedings of the I. R. A.,* 1953, vol. 41, pp. 1235–1241, а затем была перепечатана в виде монографии № 2150 сборника технических публикаций компании *Bell Telephone System*). В статье сообщается, что Д. У. Хагельбергер создал обучающуюся электронную машину, предназначенную для игры «в угадывание» против живого партнера. В игре машина должна угадать, какой стороной (орел или решка) положил партнер монету, т. е. живой человек кладет монету под ладонь, а затем нажимает стартовую кнопку. Машина старается отгадать и высвечивает на матовом экране одну из двух надписей «Орел» — «Решка». Благодаря надписи человек узнает, отгадала машина или нет. Поскольку машина не может это определить сама (ибо не видит монету), то партнер сообщает ей об этом, передвигая ручку ответа из нейтрального положения в одно из двух крайних, обозначенных надписями «Орел» — «Решка». Таким образом, машина действует по тем же правилам, что и партнер № 2 в игре между двумя людьми. При этом она исходит из накапливаемого опыта. Например, живой партнер может иметь привычку или тенденцию, выиграв два раза подряд на орла, на третий раз класть монету вверх решкой. До тех пор, пока машина не обнаружит этой тенденции, она будет полагаться на случай, но после выявления тенденции она станет ее учитывать. Оказалось, что машина Хагельбергера выигрывает у человека в 55–60% партий, поскольку человек не умеет отказываться от привычек, а еще труднее ему перехитрить машину, неожиданно изменив систему игры на противоположную. Самое удивительное — это то, что человек мог бы с легкостью сравнять счет с машиной, если бы просто бросал монету, не заботясь о том, как она упадет. Но обыкновенный живой игрок с пренебрежением относится к искусственному партнеру, так как полагает, что автомат имеет ограниченное число возможностей и должен играть стереотипно, но в конечном счете, стараясь «раскусить» машину и ее систему, человек бессознательно информирует ее о своем автоматизме и… проигрывает. Для той же самой игры была создана машина иной конструкции, которая была менее сложной, но легче обучалась и быстрее запоминала. Теоретически можно было бы предвидеть, что получится, если мы прикажем машинам играть друг против друга, но соответствующие вычисления оказались слишком запутанными. Поэтому был организован публичный матч (с механическим арбитром, который нажимал стартовые кнопки и извещал стороны о каждом результате), и через несколько часов оказалось, что более простая машина выигрывает у противника в соотношении 55:45. Поединок машин Хагельберга — это модель борьбы между двумя организмами, один из которых быстрее закрепляет и стирает рефлексы, а второй (более осторожный) труднее их вырабатывает, зато дольше сохраняет. Победа более простой машины доказывает, что ее индуктивное умозаключение («… мой противник три раза подряд выставил решку — $O_P O_P P_O P_P P_P$, значит так поступит и в очередной раз…») лучше соответствует окружающей среде (для нее таковой является другая машина), а, следовательно, и правильнее умозаключений противника.

Интересно, что машины не используют принципа случайного выбора, когда играют друг против друга, хотя и имеют средства для применения такой тактики. Этот принцип был бы выгоден для менее понятливой машины, которая без него проиграла бы, получив 50% очков. Почему так? Машины не используют современную теорию игр, а поступают эмпирически. Первая машина случайным образом выбирает первый ход; пусть это будет решка. Противник также случайным образом выбирает ответ и ошибается. Предположим, что первая, быстрее обучающаяся машина M_1 считает выбор орла другой машиной M_2 ее предпочтением, и сама следующим ходом выбирает решку. Машина M_2, получив два раза информацию РР, посчитает это доказательством того, что M_1, выиграв раз на решке, повторит ее и воспользуется этой информацией в ближайшем случае — таким образом, отдельные ошибочные действия превращаются в систему… Это напоминает явление взаимодействия ротора и статора при запуске электрического генератора.

8. *Прогноз*. Что такое наилучший прогноз? Мы желаем знать, какая будет завтра в полдень температура на улице в тени на основе уже имеющейся информации. В данном случае мы называем информацией комплекс наблюдений в соответствии с принятой метеорологической теорией. Благодаря этой информации метеоролог может, например, сообщить нам вероятность того, что завтра в полдень температура будет ниже α градусов. Вероятность p является функцией $p(\alpha)$, которую на основе информации можно определить для каждого α. Предсказания относятся не только к погоде, но и ко многим другим объектам (например, к расписанию движения поездов). Объявление о том, что обычный поезд № 682 отправится в 13.43, является предсказанием. Управление железной дороги располагает информацией, т. е. перечнем истинных времен отправления данного поезда за месяц (представляющим собой фактически реализованное расписание). Если бы по этой информации просто вычисляли среднее (так называемое ожидаемое) время отправления и представляли его в качестве прогноза, то в расписании следовало бы вместо 13.43 написать 13.57, так как в среднем поезд отправляется на 14 минут позже. Почему же публике не сообщают именно среднее время?

Простое рассуждение показывает, что если бы ущерб, нанесенный пассажиру, был пропорционален квадрату $(c-d)^2$ разности между временем c его появления на перроне и временем d фактического отправления, то следовало бы сообщать об отправлении в 13.57, поскольку таким образом вред, причиняемый публике, пользующейся поездом № 682, сводится к минимуму. Известно, однако, что такая гипотеза является нелепой, поэтому объявляется 13.43, т. е. время, *ранее* которого руководителям движения под угрозой дисциплинарных наказаний запрещено отправлять поезд. Как известно, иногда пассажир опаздывает из-за того, что его часы отстают (а ему кажется, что он пришел вовремя), и учитывая это обстоятельство, раньше в некоторых странах часы пристанционных ресторанов переводили на одну минуту вперед. Так — хотя и без математического анализа — управления железными дорогами решали задачу наилучшего прогноза. Один прогноз они давали пассажирам, изучающим расписание дома, а другой — сидящим в железнодорожном ресторане. Кому же они сообщали прогноз 13.57? Они сообщали его министерству, заинтересованному в исследовании пунктуальности железнодорожного движения и использовании этих данных для определения средних возможностей движения. Кто-то мог бы назвать эти прогнозы «истинными», что было бы неверным: истинных прогнозов не бывает — из одной и той же информации для двух потребителей вытекают разные прогнозы, которые отличаются способом использования информации, а в результате и разные последствия в смысле нанесенного ущерба.

9. *Оценка и теория игр.* Прогноз представляет собой разновидность так называемой оценки, которая невозможна, если отсутствует практическая цель. Если же такая цель существует, то оценка становится возможной благодаря наличию информации. Информация также подпадает под понятие предварительного описания, так как она является источником априорных вероятностей, и в п. 2 мы уже сетовали на редкость ситуаций, в которых мы располагаем этими вероятностями. Индукция должна обходиться без них. Вернемся к этому вопросу.

Не подлежит сомнению, что азартные игры положили начало теории вероятностей, а она дала теоретическую основу не только играм, но разрослась в теорию чрезвычайно важного философского и практического значения — достаточно хотя бы вспомнить кинетическую теорию материи, т. е. статистическую физику. Но неполных 30 лет тому назад появилась другая, современная теория игр, в которой главное место заняли новые и довольно своеобразные понятия. Эту всеобщую доктрину можно было бы назвать наукой борьбы и соревнования, или, если угодно, теорией состязаний. Примером задачи из теории игр является окончание шахматной партии: полное ее решение (если это, например, пятиходовка) демонстрирует, как в каждой ситуации должны поступать белые, чтобы самое позднее на пятом ходу объявить мат, а также — как в каждой ситуации должны поступать черные, чтобы не проиграть раньше. Возможно, еще интереснее задача о преследовании, на примере которой можно проиллюстрировать принцип «минимакса», характерный для современной теории игр. Предположим, что речь идет о гонке кораблей, в которой догоняющий корабль обладает большей скоростью. Задача преследования состоит в выработке оптимальной тактики для его капитана, т. е. тактики, которая гарантирует, что он перехватит противника самое позднее через 5 часов. Другая часть задачи состоит в выработке оптимальной тактики для противника, гарантирующей, что его не догонят раньше. Название «минимакс» возникло вследствие того, что *время* от начала маневров до конца есть функция $F(T_S, T_U)$ тактики T_S преследователя и тактики T_U убегающего, а решение основано на подборе для каждой T_S такой T_U, которая придает функции F максимальное значение. Поскольку это значение зависит только от T_S, мы обозначим его через $M(T_S)$, а затем станем подбирать T_S так, чтобы функция F приняла минимальное значение. В этом случае T_S будет являться наилучшей тактикой преследователя и гарантирует ему достижение цели за время, не превышающее 5 часов. Если мы изменим последовательность этих операций, то найдем наилучшую тактику для убегающего, которая гарантирует ему по меньшей мере 5 часов свободы. Если обе стороны будут использовать свои наилучшие тактики, то маневры продлятся ровно 5 часов. Здесь мы видим аналогию с шахматами — там тоже существует основной вариант, требующий 5 ходов. Обе игры, преследование и шахматное окончание, мы называем «замкнутыми». Но намного интереснее «открытая» игра, в которой не существует двух антагонистических тактик, отвечающих интересам каждой стороны (такими примерами изобилует война, главным образом в области стратегии, а не тактики). Пусть, например, сторона W умеет производить два вида танков, A и B, а сторона Z — тоже два, C и D, и из предыдущего опыта на полях сражений известно, что 70% встреч AC выигрывает A, 60% встреч CB выигрывает C, 85% встреч BD выигрывает B, а 65% встреч DA выигрывает D. В этой ситуации ни W, ни Z не могут определить, какой тип выбрать для производства — наилучшего типа не существует, т. к. нет взаимно наилучшей пары и нет игры «острие на острие» или основного варианта. Принцип «минимакса» здесь помочь не может, так как, применяя его, ни одна из сторон не продвинется до границ своих возможностей. Однако оказывается, что эту открытую игру удается свести к замкнутой, если стороны откажутся от поиска наилучшего типа, а вместо этого перейдут к «смешанной стратегии», т. е. на производство обоих типов (A и B, а также C и D в некоторых пропорциях), и тогда метод «минимакса» позволяет определить требуемые пропорции. В данном примере для W лучше всего будет производить 37.5% танков A и 62.5% танков B — никакое другое решение не гарантирует этой стороне лучших результатов, причем это соотношение возникает независимо от решения противника. Существование наилучшей взаимной смешанной стратегии доказал Дж. фон Нейман[6], однако здесь нас интересует не общее доказательство, а применение рассмотренного метода для задач оценки.

Желая из оценки сделать игру, следует представить себе партнеров и определить правила игры. Если мы хотим в соответствии с формальным требованием исследовать эффективность препарата H на дюжине мышей, то одним партнером является биолог, а другим — комплекс бесчисленных факторов, от которых зависит эффективность препарата (к ним относятся также индивидуальные особенности мышей). Поскольку «черт его знает, какова эффективность на самом деле», мы можем назвать этот комплекс факторов «чертом», вследствие чего первым правилом игры является право черта назначить препарату такую эффективность, какую он захочет. Второе правило — это право биолога на

[6] См., например, J. C. C. McKinsey: *Introduction to the Theory of Games*. New York, 1952. McGraw-Hill Book Co., X + 371 p.

умозаключение по дюжине опытов. Третье — это штраф за ошибку, который платит черту биолог при ошибке, т. е. когда считает, что эффективность равна p', если на самом деле она равна p. Считая, что этот штраф равен $(p - p')^2$ (согласно классической теории ошибок), мы вновь приходим к открытой игре и поэтому можем воспользоваться теорией фон Неймана. Согласно этой теории, наилучшая тактика биолога при результате $m//n$ выражается оценкой

$$p' = \frac{m + 1/2\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} \quad \text{(в нашем случае } n = 12\text{)}, \qquad (4)$$

зато черт выигрывает по большей части тогда, когда пользуется смешанной тактикой, основанной на некотором утонченном способе придания каждой таблетке разной эффективности. Формулу (4) получил в 1950 г. американский математик Г. Рубин[7]. Сводя задачу оценки к игре, мы должны отметить следующие интересные особенности:

1. Биолог обходится без знания тактики черта и даже без знания «априорных вероятностей».

2. Правило (4) является наилучшим; всякое другое увеличивает средний квадрат ошибки.

3. Правило (4) обеспечивает независимость биолога от внешних факторов, так как средний квадрат его ошибки всегда равен

$$\frac{1}{2(\sqrt{n} + 1)} \quad \text{(т. е. в нашем примере 11.2 \%).}$$

4. Правило (4) является строгим; оно избавляет биолога от необходимости постоянного изменения расчетной формулы — такая возможность появляется в иных ситуациях при использовании метода «минимакса» и заставляет изменять суждения, хотя результат эксперимента и не изменился. В таких ситуациях человек (в отличие от биологической среды) может делать однознач-

---

[7] См. J. L. Hodges and E. L. Lehmann: *Some problems in minimax point estimation. Annals of Mathematical Statistics* 21, 1950, pp. 182–197, а также H. Steinhaus: *The problem of estimation.* [*Annals of Mathematical Statistics* 28, 1957, pp. 633–648. — *Прим. ред. польского издания.*]

ные выводы. Без формулы (4) мы постоянно сталкивались бы с индетерминизмом *суждения*, причем в его наиболее фатальной разновидности.

10. *Обсуждение метода п. 9*. Очевидно, что этот метод является еще одним примером необходимости связи (на общих основаниях) индукции с практическими результатами индуктивного заключения. Возможно, что формула (4) несколько упрощает задачу за счет введения штрафа $(p - p')^2$, который, по-видимому, было бы лучше определить через ущерб, нанесенный пациенту запуском в обращение нейтрального препарата или уничтожением активного препарата. Мы можем привести и более наглядный пример. Пусть, например, фабрика одежды хочет на основании небольшого количества измерений установить типы рабочих комбинезонов: производитель хочет выпускать 12 «размеров», и из 500 измеренных работников размер L подходит для 30 человек. Оценка доли L в продукции должна учитывать, что не нашедший применения комбинезон означает потерю рабочего времени и материала, а потребитель, не нашедший соответствующего комбинезона и заказавший его у частного портного, теряет разницу в цене. Штраф, который платит общество, и оценка доли L в этих случаях, конечно, имеют различный характер, но в обеих ситуациях речь идет об игре, оптимально обеспечивающей общие интересы.

Кроме того, подход теории игр в целом вызывает и иные возражения. В частности, его упрекают в том, что он как бы позволяет «придать» черту слишком много умственных способностей и фальши, в соответствии с известной фразой «природа не желает, чтобы мы заблуждались». Этот упрек можно было бы не принимать во внимание, потому что черт, по-видимому, вообще ничего не желает (в отличие от нас!), и эта его характерная особенность не оставляет нам (а мы очень хотим чего-то!) ничего лучшего, чем метод «минимакса», чтобы проиграть как можно меньше. Недостатком метода считают и то, что в нем игнорируется любая априорная информация, которая ведь (хотя бы частично) обычно является доступной.

Еще более наглядным примером может служить исследование групп крови. Предположим, что путешественник исследовал 50 эскимосов, принадлежащих к некоторому роду, и обнаружил среди них шесть человек с группой крови Rh–. Для оценки частоты появления Rh– у всего рода можно воспользоваться формулой (4). Кроме этого, можно изучить информацию, полученную другими исследователями, которые не добрались до этого рода, но брали ранее пробы крови у нескольких сотен эскимосов из других местностей (предположим, что они обнаружили при этом, например, в среднем 15% людей с группой крови Rh–). С точки зрения объективных критиков, следовало бы принять во внимание и эту информацию или хотя бы тот факт, что ни в одной популяции до сих пор не встречалось более 35% группы Rh–. С учетом этих данных оценка путешественника (которая равнялась 16.7%) уменьшилась бы. С другой стороны, задача исследователя состоит не в цитировании чужих результатов, а в получении независимых данных (ведь его спрашивают не о том, что обнаружили другие где-то еще, а о том, что он сам смог зарегистрировать в доступных ему пределах). Поэтому критика выглядит несправедливой. Ну, и все мы (и это не только мое мнение) заблуждаемся, когда не желаем или не позволяем обвинять природу в наличии дьявольских свойств. Мы приписываем ей эти свойства не потому, что имеем на это основания, а потому, что обычно ничего о ней не знаем. Впрочем, если мы даже что-то и знаем, то, как было только что показано, не можем извлечь из этого пользу.

Заслуживает внимания также следующий упрек: обсуждаемая нами игра заставляет статистиков угадывать p и зависимость штрафа от разности между p' и действительным значением p, что не является ответом на поставленный в п. 1 вопрос: «какой исход можно предсказать в ближайшем опыте по результату $m//n$?». Такой вопрос придает проблеме эмпирическую основу, на которой и должна базироваться игра, и, следовательно, в ней не следует вообще ничего говорить об истинном, скрытом значении p. Игру такого типа можно создать (сконструировать) только вводя штраф, зависящий от разности между значением p', которое дает статистика, и результатом ближайшего опыта (этот результат мы будем обозначать через 1 при выпадении орла и через 0 — при выпадении решки). Предлагаем читателям самим найти примеры, в которых проявляется разница между описанной ранее игрой и предлагаемой сейчас.

По поводу применения теории игр можно сделать еще один упрек, связанный с автоматами Хагельбергера. В сущности, эти автоматы используют не современную теорию игр, а похожи скорее на шулеров-психологов в дурацких фильмах, которые следят за каждым вздрагиванием мускулов на лице партнера, за каждым его движением и каждым взглядом. Таких демонических психологов вне экрана не существует, однако машины не только реализуют эти мечты авторов и читателей криминальных повестей, но даже добиваются большего, благодаря феноменальной памяти — она верна, устойчива и всегда в готовности. Машины действительно играют с каждым партнером по-разному, в чем живой человек не может с ними сравняться. Заслуживающий особого внимания парадокс заключается в том, что человек может применять математическую теорию игр, но биологическую игру (основанную на приспособляемости к окружающей среде) может осуществлять только машина, ибо только она может в течение немногих минут пройти путь эволюции, на который живым организмам требуются миллионы лет. Конечно, за эту привилегию автоматы расплачиваются тем, что могут выучиться только конкретным играм (например, в «подкидного дурака»). Мы уже говорили о преследовании, и в свете этих замечаний появляется новая возможность — создание машины, которая использует психологическую теорию состязания и таким образом предугадывает курс противника на основе опыта.

Попробуем обобщить пройденный путь, не останавливаясь на сложностях, пробуждая у внимательного читателя сомнение и не усыпляя его подробностями. В индуктивном умозаключении вывод имеет форму предпосылки, которая в строгом виде гласит: «если до сего времени эффективность лекарства была равна 90%, то оно всегда будет эффективно в 90% случаев». Известно, что такая формулировка порочна, и ее тщательный анализ приводит к уподоблению вывода схеме выбора. Эта схема сама является идеализацией понятия случая (случайного события), а ее использование требует определения априорных вероятностей. На примере задачи определения отцовства мы показали, что иногда эту трудность удается устранить, однако следует вспомнить, что при этом мы ссылались на частоту *c* группы крови C у популяции таким образом, как если бы эта константа *c* была известна. Однако реально величина *c* определяется без исследования всей популяции, а лишь на основе проверки всего нескольких тысяч людей. В отношении всей популяции затем делается индуктивный вывод, а мы вынуждены приписывать вероятность (долю) в пробной партии популяции в целом, совершая ошибку, решительно осужденную в тексте. Такое поведение можно оправдать только ссылкой на то, что ошибка «не играет роли», если пробная партия достаточно велика. Можно доказать, что влияние априорных вероятностей на величину апостериорной вероятности уменьшается по мере увеличения количества экспериментов. Ригорист упрекнет нас в том, что мы пользуемся *petito principii*, т. е. аргументом, основанным на выводе из положения, которое само еще требует доказательства (ибо вся проблема индукции сводится именно к определению числа необходимых экспериментов). Мы можем утешить критика лишь соображением, что все применения теории на практике также представляют собой замкнутый круг — ведь прецизионная аппаратура есть продукт других, менее совершенных средств. Остается призвать на помощь закон больших чисел, который позволяет нам определить некоторые события с вероятностью почти равной 1, но эти события не являются достоверными. Это препятствие тоже удается преодолеть (известно, что в физике можно приписывать некоторым явлениям вероятность 1, не опасаясь вступить в конфликт с действительностью). К сожалению, пока еще не создана последовательная теория чудес, т. е. явлений с нулевой вероятностью, но над такой теорией следует подумать. Чаще всего мы имеем дело с небольшим числом экспериментов и не знаем априорного распределения вероятностей, и тогда задачу необходимо свести к игре (более или менее искусственной), в которой на первый план выходит роль ставки. Ставку можно определить, зная интересы участвующих сторон. Например, примем судью за представителя общества и будем считать, что ошибочный приговор наносит социальный вред, который в случае установления отцовства можно выразить в деньгах, а именно в сумме K, взимаемой в пользу ребенка. Общество несет убыток K как в том случае, когда приговор обременяет ответчика взиманием денег в пользу чужого ребенка, так и тогда, когда это бремя перекладывается с отца на мать. Мнение суда можно и следует так увязать с экспертизой, чтобы ожидаемый общественный вред был минимальным. Ученый, который хочет получить полное решение задачи путем индукции, не сможет этого сделать в случае чисто теоретической, т. е. не связанной с жизнью задачи. С другой стороны, организмы, приобретающие условные рефлексы и через это изменяющие свое поведение при повторении импульсов, не делают выводов в логическом смысле, а являются лишь моделями индуктивного умозаключения. Это сравнение показывает надлежащее место индуктивного поведения, которое основано на сочетании наблюдения с действием. У организмов такое сочетание автоматизировано, не требует умозаключений и касается только «естественных» действий. Человек же способен наблюдать факты, лишенные естественного значения. Предположения ученого относительно повторения этих фактов нельзя понять ни в одной научно обоснованной теории, пока им не будет придано значение в смысле выгоды и убытка, выраженных в экономических единицах. Однако если такие связи найдутся, умозаключение в виде высказывания станет ненужным, а путь от наблюдения до действия можно будет сократить, минуя высказывание. Точнее, вместо умозаключения «эксперимент дал $m//n$, в связи с этим ближайший опыт даст положительный результат, а, следовательно, мы должны принять решение D» появится императивная форма: «эксперимент дал результат $m//n$, следует принять решение D». Результатом являются правила действия. Устранение промежуточного звена является не стилистической, а методической экономией, избавляющей нас от утверждения, которое само нуждается в доказательстве. Это не освобождает нас, пишущих об индукции и, следовательно, занимающихся метаиндукцией, от доказательства справедливости императивной формы: если удалось свести конкретную проблему к игре, средний убыток живого партнера (советниками которого мы являемся) будет по возможности наименьшим. Впрочем, и это положение имеет лишь фигуральное значение, так как оно относится к игре, продолжающейся бесконечно долго.

Это может огорчить приверженцев «законов» природы, однако им можно напомнить, что даже если такие абсолютно обязательные законы существуют (и даже если они принадлежат к числу уже открытых), то из этого вовсе не следует, что индуктивный метод позволит отличить их от тех, которые завтра будут опровергнуты. Это безусловно следует учитывать, говоря исключительно о сфере действия этого метода.

Все эти выводы требуют еще одного уточнения. Статистика учит и требует, чтобы выбор объектов эксперимента был случайным (например, для испытания лекарства нужно по жребию отобрать 12 пациентов, которым его назначить). Поэтому нам легко поставить в вину, что наше поведение основано на иррациональном элементе, которым является жеребьевка (попугай, вытягивающий номерки из корзинки, — решающий фактор нашего поведения), и выглядит как подражание древним римлянам, у которых вопросы войны и мира решались при помощи гадания по полету птиц. Этот упрек можно отвести с помощью примеров из физики, в которых удалось исключить понятие «случая», и современных успехов в разработке рациональных способов отбора.

Таким образом, анализ индуктивного умозаключения оставляет на дне реторты две первоначальные субстанции, которые не удается разложить нашими средствами: одна из них — это интерес потребителя, другая — подстановка бесконечно большого количества принимаемых решений и соответствующих каждому реальному действию выгод и убытков… Такая подстановка напоминает этическую максиму Канта, хотя в ней и не усматривается непосредственная связь с этикой… Теория индукции оказывается в действительности связанной с бытием личности и общества гораздо глубже, чем гласит соответствующая этой связи избитая фраза.

Беседа
(немного историческая)

В истории математики XIX века есть переломная дата, когда было сформулировано определение непрерывной функции. Проблема непрерывности, разумеется, терзала еще древних ученых, поскольку была навязана им геометрией и кинематикой, но удивительным капризом эволюции математических понятий сегодня кажется тот факт, что дифференциальное и интегральное исчисление на целое столетие опередило то определение непрерывной функции, которое используется современной математикой. Общепризнанным автором этого определения считается Коши, благодаря работам, выполненным в 1821, 1823 и 1829 годах. Переломным моментом, однако, следует считать не одну из этих дат, а 1817 год, когда в Праге была опубликована статья под заголовком «*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleihung liege*». Именно эту работу современные исследователи эволюции основ дифференциального исчисления считают началом той математической строгости, которая на целое поколение позже воцарилась в европейских научных центрах благодаря влиянию Вейерштрасса. Автором статьи был Бернгард Больцано, философ и математик. Его отец происходил из северной Италии, а сам он всю жизнь провел в Праге — предикат «из Богемии», упоминаемый в английской энциклопедии, трудно признать за принадлежность к чешской национальности, тем более, что Больцано писал только по-немецки... Поэтому, может, его следует считать австрийцем?

Больцано опередил свою эпоху также как автор примера функции, везде непрерывной, но, однако, не имеющей производной ни в одной точке. Обычно первенство этого открытия приписывают Вейерштрассу (в первой половине XIX века мало кто знал Больцано, который не имел академических званий и не публиковал свои работы в *Crelle's Journal*), и лишь через 50 лет Г. Ханкель вытащил на свет преданное забвению имя Больцано. Сегодня одна из центральных пражских улиц носит его имя, но почти ничего не говорит прохожим. В Польше об этих исторических фактах знал Самуэль Дикштейн, который в 1899 г. опубликовал материалы к вопросу об истории принципов исчисления бесконечно малых. Заглавие статьи от 1817 г., приведенное выше в оригинальной версии, содержит сокращенный текст теоремы: *Если непрерывная функция принимает на одном конце интервала непрерывности отрицательное значение, а на другом — положительное, то в какой-то точке этого интервала она должна принимать нулевое значение.* В своей статье Больцано дал полное доказательство этой теоремы, благодаря строгому определению непрерывности, которое он сам и сформулировал. Мне очень трудно понять, почему некоторые польские математики говорят, что функция, которая пробегает в некотором интервале все значения между крайними значениями, *обладает свойствами Дарбу*, поскольку Гастон Дарбу родился много лет спустя после опубликования пражской статьи и только в конце XIX века обнародовал работу, в которой доказал, что производная $f'(x)$ произвольной дифференцируемой функции также имеет свойство принимать промежуточные значения… разумеется приведя во вступлении классическое определение непрерывной функции как общеизвестное. Ввиду этого можно изложить содержание работы Дарбу как открытие, что производная тоже обладает *свойством Больцано*, который первым строго доказал его для непрерывных функций — не забудем, однако, что интуитивное представление о справедливости положения, содержащегося в заглавии пражской статьи, имели все выдающиеся математики XVIII века.

Из теоремы Больцано легко вытекают различные следствия, например, такое: *Если две функции* $f(x)$, $g(x)$ *являются непрерывными на* $[a, b]$ *и удовлетворяют условиям* $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$, *то на* $[a, b]$ *существует такая точка* c, *что* $f(c) = g(c)$. Я хочу здесь привести следующий вариант этой теоремы:

Теорема I. Предпосылка: *Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; функция $g(x)$ является неубывающей на $[a, b]$; $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$.* Утверждение: *На $[a, b]$ существует такая точка c, что $f(c) = g(c)$, и, более того, можно ее выбрать так, чтобы функция $g(x)$ была непрерывной в c.*

Как видим, теорема I является модификацией следствия, приведенного несколькими строками выше: вместо непрерывности $g(x)$ в ней выступает монотонность.

Доказательство.

1) Ввиду того, что $f(b) - g(b) > 0$, а также с учетом непрерывности $f(x)$ в b, существуют такие положительные h, меньшие чем $b - a$, что во всем интервале $[b - h, b]$ выполняется $f(x) - g(b) \geq 0$; если учесть, что $g(b)$ есть максимальное значение функции g на $[a, b]$, последнее неравенство дает $f(x) \geq g(x)$ на интервале $[b - h, b]$.

2) Из предпосылки известно, что неравенство $f(x) \geq g(x)$ не выполняется при $x = a$; из 1) следует, что оно выполняется на $[b - h, b]$. В связи с этим можно точки x интервала $[a, b]$ поделить на два множества: Z_1 объединяет такие x, что неравенство $f \geq g$ выполняется везде от x до b; Z_2 объединяет остальные точки интервала $[a, b]$. Известно, что точка $b - h$ принадлежит Z_1, а точка a — Z_2; ясно также, что все точки множества Z_1 лежат справа от всех точек множества Z_2. Существуют такие положительные k, что для всех x из интервала $[a, a + k]$ справедливо неравенство $f(x) < g(x)$ — это следует из предпосылки теоремы I путем рассуждений, подобных 1). Из этого вытекает существование такой точки c внутри $[a, b]$, что все x справа от c принадлежат Z_1, а все x слева от c принадлежат Z_2. Теперь необходимо исследовать, удовлетворяет ли определенная таким образом точка c требованиям теоремы I.

3) Рассмотрим три существующие возможности: α) функция $g(x)$ непрерывна в точке c; β) функция $g(x)$ не является непрерывной в c и $g(c) = g(c + 0)$; γ) функция $g(x)$ не является непрерывной в c и $g(c) < g(c + 0)$. В случае α разность $d(x) = f(x) - g(x)$ непрерывна в c, неотрицательна справа от c и неположительна слева от c, из чего следует $d(c) = 0$ и $f(c) = g(c)$. В случае β выполняется

$g(c-0) < g(c)$, но тогда $d(x)$ правосторонне непрерывна в c, и, следовательно, $d(c) \geq 0$. Поскольку $g(c-0) < g(c)$, то $g(x) < f(c)$ для $x < c$, и, следовательно, $d(x) > 0$ в интервале $[c-j, c]$ при достаточно малом положительном j. Из этого вытекает неравенство $d(x) \geq 0$ в интервале $[c-j, b]$, которое противоречит определению точки c. В случае γ мы имеем $g(c) < g(c+0) \leq f(c+0) = f(c)$, и, следовательно, $d(c) > 0$, что (учитывая первый пункт доказательства) приводит к включению точки $c-j$ в группу Z_1 и противоречию с определением точки c. Возможным оказывается только случай α (поскольку только при этом выполняется утверждение теоремы I), что и требовалось доказать.

Воспользуемся теоремой I для решения задачи определения числа точек, являющихся узлами решетки в круге. Имеется в виду круг с уравнением $u^2 + v^2 = n$, т. е. круг, центр которого находится в начале прямоугольных координат с осями u, v и радиус которого $r = \sqrt{n}$ есть произвольное положительное число; *узлами решетки* мы называем точки с целыми значениями координат u, v. Мы хотим доказать, что *существует такая последовательность кругов с радиусами* r_m, *что* $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = \infty$ *и что для каждого круга этой последовательности число охватываемых им узлов решетки равно его площади.*

Обозначим через $L(n)$ число узлов решетки, охватываемых кругом $u^2 + v^2 = n$. Элементарный вывод (его можно найти, например, в *Теории чисел* Серпиньского, изд. 1, 1950, с. 86) приводит к формуле

$$L(n) = 1 + 4\sum_{k=0}^{E\sqrt{n}} \sqrt{n-k^2}, \tag{1}$$

где запись Eq означает наибольшее целое число, не превышающее q. В элементарной теории чисел известно так называемое «тождество Лиувилля» (см. § 6 цитированной книги, с. 399–400), которое позволяет преобразовать правую часть выражения (1) и придать ему вид

$$L(n) = 1 + 4\left\{E\frac{n}{1} - E\frac{n}{3} + E\frac{n}{5} \cdots \pm \cdots\right\}, \tag{2}$$

причем сумма в правой части (2) только с виду кажется бесконечной, поскольку $E\dfrac{n}{k}=0$ для $k > n$. Рассмотрим числа n вида $1\cdot3\cdot5\ldots(2m+1)$, где m — натуральное число, и рассмотрим соотношение (2) отдельно для четных и нечетных значений m. В обоих случаях вместо (2) можно записать

$$L(n)=1+4n\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{n}\right\}, \tag{3}$$

причем для четного m последний член имеет знак +, а для нечетного знак –. Выражение в фигурных скобках в (3) представляет собой частичную сумму ряда Лейбница, а полная сумма всего ряда равна $\pi/4$. Поэтому

$$\begin{aligned}&L(n) > 1 + n\pi \text{ для четного } m \text{ (случай **а**)},\\ &L(n) < 1 + n\pi \text{ для нечетного } m \text{ (случай **б**)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Мы видим, что в случае **а** число узлов решетки, охватываемых кругом, больше его площади, и это относится ко всем кругам с радиусами $1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1)$, где s — произвольное натуральное число.

В случае **б** мы воспользуемся выражением (2) и заменим в нем n на $n' = n + 1/3$, из чего следует $n = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1)(4s+3)$. Очевидно, что $L(n') = L(n)$, так как добавление 1/3 к n не изменяет значение правой части в (2), но площадь круга увеличивается на величину $(n' - n)\pi = \pi/3 > 1$. Из этого сразу следует соотношение $L(n') = L(n) < 1 + n\pi < n'\pi$.

Подытоживая полученные результаты, отметим, что для $x = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+1)$ имеет место неравенство $L(x) > x\pi$, а для $x = 1\cdot3\cdot5\ldots(4s+3) + 1/3$ — неравенство $L(x) < x\pi$ (где s — произвольное натуральное число). Функция πx представляет собой площадь круга с радиусом $\sqrt{x}$, из чего очевидно, что функция $f(x)$ является непрерывной в интервале $0 \le x < \infty$, а значит и в интервале $[a, b]$, где

$$a = 1\cdot3\cdot5\cdots(4s+1),\quad b = 1/3 + 1\cdot3\cdot5\cdots(4s+3). \tag{5}$$

Функция $L(x)$ представляет собой число узлов решетки, находящихся в круге с радиусом $\sqrt{x}$ (причем сюда включаются и точки, лежащие на границе круга), так что эта функция является неубывающей в интервале $[0, \infty)$, а значит, и в интервале $[a, b]$. Обозначив ее через $g(x)$, можно записать неравенства $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Поскольку определенные таким образом функции f и g, а также определяемый уравнением (5) интервал $[a, b]$, удовлетворяют условиям теоремы I, то должно удовлетворяться и ее утверждение: между a и b существует точка c, в которой $f = g$ и в которой функция $g(x)$ непрерывна. Иначе говоря:

Теорема II. Предпосылка: *Дано натуральное число s*. Утверждение: *В интервале* $[a, b]$, *определяемом* (5), *существует такое число c, что круг с радиусом* $\sqrt{c}$ *охватывает столько узлов решетки, сколько составляет его площадь.*

Эту теорему можно было бы оспорить на том основании, что причисление лежащих на границе круга точек к точкам, лежащим внутри круга, является чрезвычайно искусственным приемом. Однако это возражение отпадает в силу того, что равенство «площадь = число узлов решетки» никогда не может выполняться на окружности $u^2 + v^2 = r^2$, проходящей через какой-либо узел решетки. Действительно, в этом случае мы имеем r^2 — целое число, т. е. площадь составляет $r^2\pi$ — число иррациональное (а число узлов решетки может быть только целым).

Назовем *особыми* такие радиусы r, при которых площадь круга $u^2 + v^2 = r^2$ равна числу узлов решетки, лежащих внутри круга. Особые радиусы можно упорядочить по величине и получить последовательность r_m, причем можно доказать, что для этой последовательности $\lim r_m = \infty$. Доказательство основывается на том, что радиусы окружностей, проходящих через узлы решетки, образуют последовательность, возрастающую до бесконечности, а уравнение такой окружности можно представить в виде $u^2 + v^2 = n = u_0^2 + v_0^2$, где u_0, v_0 — точка, являющаяся узлом решетки. Поскольку n должно быть целым числом, то эти окружности (назовем их *узловыми*) можно упорядочить по n. Узловая окружность соответствует не каждому целому n, а только $n = 0, 1, 4, \ldots$ (и всем другим n вида q^2, если q — целое число), из чего следует, что узловые окружности представляют собой частичную последовательность другой (бесконечной) последовательности окружностей с радиусами $\sqrt{n}$, где n — нуль либо натуральное число ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Если мы хотим доказать, что последовательность особых радиусов r_m стремится к бесконечности, то необходимо воспользоваться уже доказанным в теореме II фактом, в соответствии с которым в каждом интервале $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$ (см. (5)) лежит особый радиус, а также учесть, что в кольце, образованном двумя соседними узловыми окружностями, находится самое большее одна *особая окружность*, или окружность с особым радиусом. Это следует из того, что в кольце нет узловых точек и что, как мы уже знаем, особые окружности никогда не являются узловыми. Следовательно, если бы в кольце были две разные особые окружности, то бо́льшая из них охватывала столько узловых точек, сколько и меньшая, а площади соответствующих кругов были бы различными, что противоречит определению особых окружностей. Очень коротко полученный результат можно выразить следующим утверждением: особые окружности можно упорядочить по возрастанию, а их множество перечислимо. Так как для каждого натурального s имеется особый радиус r_m, больший чем $4s + 1$, то $\lim r_m = \infty$ для каждого упорядочения множества особых радиусов.

Теорема III. *Если круг с центром в точке $u = 0$, $v = 0$ непрерывно увеличивать так, чтобы его радиус стремился к бесконечности, то мы все время будем встречать особые окружности, т. е. такие, которые заключают внутри столько узловых точек, сколько площади занимают ограниченные этими окружностями круги.*

Доказательство теоремы III предшествует ее формулировке. Автор старался получить эту теорему элементарным путем. Великий английский математик Г. Г. Харди (1877–1947) занимался проблемой узловых точек (1924–25) и получил с помощью теории функций Бесселя формулу для разности $L(n) - n$, из которой путем ее оценки можно вывести нашу теорему III. С другой стороны, ясно, что доказательство, намеченное формулами (1) и (2), а также (3)–(4)–(5), короче и легче дороги к цели, определяемой текстом теоремы III.

Нетрудно показать, что число узловых точек в *центральном* круге (т. е. в таком, центр которого находится в узловой точке) всегда равно $4k + 1$ и ввиду этого в такой круг никогда не попадает 7 узловых точек. Однако можно легко доказать также, что круг с площадью, равной 7, можно так расположить на решетке, чтобы в него попало ровно 7 узловых точек — в этом утверждении вместо 7 можно также использовать произвольное натуральное число.

В этой беседе мы затронули занимательную и непростую задачу: всегда ли между двумя следующими непосредственно друг за другом узловыми окружностями находится особая окружность?

О треугольниках

В школьной планиметрии треугольники классифицируются по виду (равнобедренные, равностронние, остроугольные, тупоугольные и т. д.). Целью данной статьи является наглядное представление этой классификации.

Мы будем рассматривать треугольники, расположенные на плоскости, и их перемещения именно по данной плоскости. Поскольку классификация будет относиться к форме, а не к величине, то мы ограничимся треугольниками с периметром, равным 1 (если это условие не оговорено особо). Все рассматриваемые треугольники можно разделить на классы по конгруэнтности (т. е., говоря о треугольнике со сторонами 1/3, 1/4 и 5/12, мы будем иметь в виду не конкретный треугольник с такими сторонами, а целый класс, образованный им и всеми конгруэнтными ему треугольниками). В соответствии с принятым в элементарной планиметрии мы не будем считать конгруэнтными такие два треугольника, которые нельзя совместить движением на плоскости (иначе говоря, надвинуть друг на друга), хотя они и являются симметричными (т. е. их можно сместить только перемещением в пространстве).

Ниже приводятся условия, которым должна удовлетворять тройка действительных чисел (x, y, z), необходимые для того, чтобы ее можно было считать тройкой длин сторон треугольника. Каждому треугольнику соответствует некая тройка чисел, но не каждая тройка дает треугольник.

Пусть тройка (x, y, z) состоит из самых разных чисел и пусть возможно построение треугольника, стороны которого x, y, z следуют друг за другом так, как расположены цифры I, V и IX на циферблате часов — условимся понимать (x, y, z) как символ именно этого треугольника. Поэтому символ (1/3, 1/4, 5/12) означает то же самое, что и символ (1/4, 5/12, 1/3), но отличается, например, от символа (1/4, 1/3, 5/12). Последний в нашем обозначении относится к треугольнику, симметричному (1/3, 1/4, 5/12), а эти треугольники не являются конгруэнтными. Если два треугольника симметричны, но не конгруэнтны (как в приведенном примере), то их обозначают так, чтобы последовательность сторон (в порядке уменьшения их величины) соответствовала обходу по цифрам I, V, IX на циферблате. В одном случае треугольники будут соответствовать порядку чтения символов (x, y, z), а в другом случае — нет, и мы будем треугольники первого типа называть правоориентированными, а второго типа — левоориентированными.

Теперь запишем условия, которым должны удовлетворять символы (x, y, z):

$$0 \le x, \qquad 0 \le y, \qquad 0 \le z, \tag{1}$$

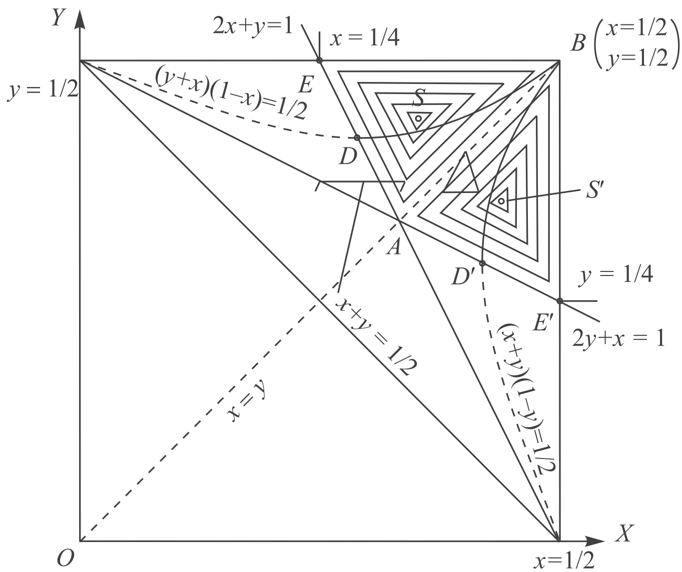
$$y + z \ge x, \qquad z + x \ge y, \qquad x + y \ge z, \tag{2}$$

$$x + y + z = 1. \tag{3}$$

Ниже мы будем говорить исключительно о тройках (x, y, z), удовлетворяющих условиям (1)–(3), и каждый геометрический эквивалент такой тройки будем считать треугольником, интерпретируя символ (x, y, z) описанным выше образом. Это позволяет нам получить полный обзор видов треугольников в планиметрии, так как тройки (x, y, z) дают нам все треугольники с единичным периметром, включая сюда и треугольники предельного или вырожденного вида.

Введем теперь вспомогательную плоскость, или плоскость рисунка в осях OX и OY. На этой плоскости каждый треугольник (x, y, z) получает образ (x, y), т. е. точку с координатами (x, y). По этому образу можно восстановить исходный треугольник (x, y, z), т. к. из (3) мы имеем $z = 1 - x - y$, что позволяет определить z по известным величинам x и y.

Из (1)–(3) следует, что образы треугольников заполняют треугольную область T с вершинами (0, 1/2), (1/2, 1/2), (1/2, 0). Центр тяжести A этой области (для краткости ниже мы будем дальше на-



зывать его просто центром) имеет координаты (1/3, 1/3), так что точка A, следовательно, является образом треугольника (1/3, 1/3, 1/3), поскольку величину z мы можем вычислить из условия (3), как было сказано выше. Поэтому A является образом равностороннего треугольника.

Образы равнобедренных треугольников лежат на прямых, отвечающих условиям $y = z$, $z = x$ или $x = y$, так что, в соответствии с условием (3), уравнения этих прямых на вспомогательной плоскости имеют вид:

$$2y + x = 1, \qquad 2x + y = 1, \qquad x = y. \tag{4}$$

Прямые (4) делят область T на 6 треугольников. Два из них объединяются в дельтоид Δ с диагональю AB, в котором точка B имеет координаты (1/2, 1/2) и является образом треугольника (1/2, 1/2, 0). Этот треугольник является одновременно вырожденным (с двумя прямыми углами), равнобедренным (с основанием в виде точки) и прямоугольным. Две другие вершины дельтоида Δ (E и E') являются двумя разными образами одного вырожденного треугольника (1/4, 1/2, 1/4), который также является равнобедренным с нулевыми углами при основаниях.

Отрезок AB состоит из образов равнобедренных треугольников и делит область внутри дельтоида Δ на две треугольные части (AEB и $AE'B$), первая из которых содержит образы левоориентированных, а вторая — правоориентированных треугольников. Точки отрезка AE (и AE') соответствуют равнобедренным треугольникам с углом при вершине не менее 60°, имеющим минимум (60°) в точке A и максимум (180°) в E (и E'). Отрезки EB (и $E'B$) состоят из образов вырожденных треугольников, т. е. таких, вершины которых лежат на одной прямой (треугольников с нулевой площадью).

Заметим, что вспомогательный треугольник T является вертикальной проекцией на вспомогательную плоскость треугольника R, расположенного в пространстве. Мы можем восстановить в точке O ось OZ перпендикулярно плоскости OXY и поставить в соответствие удовлетворяющим условиям (1)–(3) тройкам (x, y, z) обычные точки (x, y, z) декартова пространства XYZ. Полученные точки заполнят равносторонний треугольник R, который образуется путем пересечения плоскости $x + y + z = 1$ (на которой он лежит) с плоскостями $y + z = 1/2$, $z + x = 1/2$ и $x + y = 1/2$. Треугольник R можно разделить на три прямоугольных дельтоида, проведя из его центра перпендикуляры к его сторонам, причем дельтоид Δ является вертикальной проекцией на вспомогательную плоскость одного из этих трех дельтоидов.

Это рассуждение демонстрирует равноправие дельтоидов, образующих треугольник R, что соответствует эквивалентности осей X, Y, Z, а также равноправию чисел x, y, z при условиях (1)–(3). Из этого также следует, что в каждом дельтоиде находятся образы всех возможных треугольников, вследствие чего (возвращаясь к рисунку) можно утверждать, что в Δ находятся образы всех треугольников.

Как мы уже знаем, на сторонах EB и $E'B$ лежат образы всех вырожденных треугольников, причем симметричным относительно диагонали AB точкам соответствуют одни и те же вырожденные треугольники (напомним только, что среди них нельзя отличить левоориентированные треугольники от правоориентированных) .

Образы равнобедренных треугольников находятся на AB, AE и AE', и вновь каждой паре точек (одна из которых лежит на AE, а другая на AE', симметрично относительно диагонали AB) соответствует один и тот же равнобедренный треугольник, без отличия в ориентации.

Прямоугольные треугольники должны удовлетворять, по крайней мере, одному из условий:

$$y^2 + z^2 = x^2, \qquad z^2 + x^2 = y^2, \qquad x^2 + y^2 = z^2. \tag{5}$$

Исключая переменную z из (3) и (5), получим три уравнения:

$$(1 - x)(1 - y) = 1/2, \quad (y + x)(1 - x) = 1/2, \quad (x + y)(1 - y) = 1/2, \tag{6}$$

каждое из которых соответствует гиперболе в плоскости рисунка. При этом гипербола $(1 - x)(1 - y) = 1/2$ нигде не пересекает дельтоид Δ, а две другие симметричны относительно AB (одна из них пересекает EA в точке D, другая — $E'A$ в точке D'; каждая из точек D и D' является образом одного и того же равнобедренного и прямоугольного треугольника). Часть дельтоида Δ, заключенная между гиперболами, соответствует остроугольным треугольникам, остальная часть — тупоугольным.

Таким образом, дельтоид Δ является как бы картой различных треугольников, а вернее, различных треугольных форм, ибо каждой форме соответствует какая-либо точка или две точки, принадлежащие дельтоиду. Это соответствие обладает свойством непрерывности, если малым изменениям формы (т. е. малым изменениям чисел x, y, z) соответствуют малые смещения точек-образов на карте. Однако соответствие не является однозначным, так как некоторые формы имеют на карте два образа. Для устранения этого недостатка мы должны склеить края дельтоида AEB и $AE'B$ таким образом, чтобы из каждой пары точек (расположенных на краях симметрично относительно AB) сделать одну (однако при этом внутренняя область треугольника AEB должна впредь оставаться отличной от внутренней области треугольника $AE'B$). Бумажная модель определенного таким способом преобразования получается путем склеивания по бокам двух прилегающих треугольников, наложенных друг на друга. Если бы модель была резиновой, то мы могли бы ее натянуть на шар; поэтому говорят, что такое образование гомоморфно со сферой (или шарообразной поверхностью).

Таким способом мы можем получить однозначную и непрерывную карту всех треугольных образований, где точка E дельтоида располагается на северном полюсе глобуса, точка A — на южном. Дуги гипербол (6) лежат на экваторе, точка B находится на географической долготе 0°, точка D (и D') — на долготе 180°, а весь край $AEBE'A$ дельтоида находится на гринвичском меридиане (полном, т. е. состоящем из всех точек с географической долготой 0°, с долготой 180° и обоих полюсов). На такой карте-глобусе северное полушарие соответствует тупоугольным треугольникам (а южное — остроугольным), восточное — левоориентированным (а западное — правоориентированным), экватор — прямоугольным, а главный меридиан — равнобедренным и вырожденным (последним соответствует европейская четверть этого меридиана).

Как известно, каждая точка на сфере имеет свой антипод (т. е. наиболее удаленную от нее точку), так что можно легко определить соотношение «точка Q является антиподом точки P» и записывать это соотношение сокращенно в виде PrQ. Это соотношение (связь) является взаимным (*инволютивным*), т. к. из PrQ вытекает QrP, в чем читатель без труда может убедиться сам. Более того, если мы имеем PrQ, то всегда $P \neq Q$. Связь PrQ является непрерывной, то есть такой, что если точки P и P' (с антиподами Q и Q') расположены близко, то Q также находится близко к Q'. Разместив образы треугольных форм на сферическом глобусе, мы установили *антиподизм* в множестве этих форм, т. е. взаимную и непрерывную связь, обладающую дополнительно свойством, что никакая форма не связана сама с собой. Однако это принципиальное решение проблемы антиподизма треугольных форм на сфере является на практике неудобным, так как сферическая модель приводит к сложным вычислениям, когда реально заданному треугольнику надо поставить в соответствие точку на глобусе (например, в прикладных задачах). Поэтому мы вернемся к рассмотрению дельтоида и покажем, как можно установить антиподизм непосредственно на этой модели (который, вообще говоря, не будет согласован с антиподизмом, обнаруживаемым с помощью карты на глобусе).

Внутренность треугольника ABE (с центром S) можно заполнить подобными ему треугольниками, расположенными подобно (т. е. так, чтобы каждая их сторона была параллельна соответствующей стороне треугольника ABE). Более того, заполнение можно осуществить даже так, чтобы все эти треугольники t имели общий центр в точке S. Сам треугольник ABE мы тоже причислим к множеству треугольников t, а точку S можно считать треугольником t с нулевыми сторонами, так как треугольники t находятся на вспомогательной плоскости, и к ним не относятся требования (1)–(3). Каждая точка P, расположенная внутри или на сторонах треугольника ABE, находится на каком-либо из треугольников t и только на одном из них. Прямую PS продолжим до другого пересечения с этим треугольником t и получим точку Q , причем в случае $P = S$ будем считать точку S за искомое пересечение, и тогда $Q = P$. Обозначим через Q' точку, симметричную Q относительно прямой AB, тогда каждой точке P однозначно будет соответствовать некоторая точка Q', и это соответствие будет непрерывным. Как мы знаем, каждая точка Z дельтоида Δ является образом некоторого треугольника (точнее говоря, некоторой треугольной формы), который мы обозначим через «Z». Далее поставим в соответствие каждому треугольнику «P» некоторый треугольник «Q'», а именно так, чтобы точке P соответствовала (в описанном выше смысле) точка Q', т. е. получим некоторый антиподизм множества треугольных форм. Прежде всего, необходимо доказать, что треугольник «P» всегда отличен от треугольника «Q'». Для точек P, лежащих внутри области ABE (или ABE') это очевидно, т. к. тогда Q' лежит внутри области ABE' (или ABE), а следовательно, существует антиподизм между лево- и правоориентированными треугольниками. Если P находится на границе вспомогательного треугольника ABE (или ABE'), то Q находится на границе ABE (или ABE'), следовательно «Q'» будет идентичен «Q», и поэтому антиподом треугольника «P» будет «Q». Но точки P и Q различны и расположены на границах одного и того же вспомогательного треугольника (ABE или ABE'). Следовательно, они являются образами разных треугольников «P» и «Q», что и требовалось доказать.

Далее покажем, что если точка P соответствует Q', то точке Q' соответствует P. Это вытекает из общей симметрии относительно AB: действительно, достаточно обозначить символом P' точку, симметричную P, символом t' — треугольник (в плоскости рисунка), симметричный t, и символом S' — точку, симметричную S, чтобы убедиться, что построение точки, соответствующей Q', приводит от P' к P.

В заключение заметим, что полученное соответствие треугольных форм является непрерывным. Очевидно, что соответствие между формой «P» и ее образом P является непрерывным, в чем мы убедились из построения карты Δ. Соответствие $P \to Q'$ также является непрерывным, а в силу однозначности непрерывным также является соответствие между Q' и «Q'». Из непрерывности трех соответствий «P» $\to P \to Q' \to$ «Q'» следует и непрерывность соответствия «P» $\to$ «Q'». Таким образом, мы доказали, что оно обладает и двумя другими особенностями антиподизма (а именно, взаимностью и тем, что ни одна форма не соответствует сама себе).

Какой треугольник является антиподом равностороннего? Точке A соответствует середина C отрезка EB, имеющая координаты $x = 3/8$, $y = 1/2$, следовательно, $z = 1/8$. Искомый антипод имеет вырожденную форму (3/8, 1/2, 1/8), поскольку является отрезком, поделенным в отношении 3:4:1.

Полученный антиподизм не является единственно возможным, но, по-видимому, является простейшим. Предоставляем читателю возможность найти более простой с помощью рисунка.

Желая избавиться от условия (3), мы можем вместо одной сферы с радиусом 1 (на которой находятся, как было показано, образы треугольников с периметром, равным 1) использовать все сферы, концентрические с первой. Каждый треугольник с периметром s в качестве образа имеет точку на сфере с радиусом s. Мы поместим ее на радиусе, проведенном из общего центра M к образу треугольника, подобного данному и удовлетворяющего условию (3), причем этот образ лежит на исходной сфере. Так мы получим образы всех треугольников (точка M будет образом треугольника со сторонами 0, 0, 0), и их множество заполнит все трехмерное пространство. Напомним, что это образы всех треугольников, лежащих на основной плоскости, причем в соответствии с предварительным выводом треугольники одного класса отождествляются, а треугольники разной ориентации отличаются друг от друга (однако в предлагаемом построении теряет силу условие, исключающее учет размеров треугольников). Таким образом, оказывается, что множество всех разных плоских треугольников (т. е. попарно не подобных) удается однозначно и непрерывно отразить на трехмерное пространство. Введение антиподизма вынуждает отказаться от точки M, т. е. от треугольника, выродженного в точку.

Наше последнее замечание касается иного определения треугольной формы, имея в виду определение подобия через равенство соответствующих углов в подобных треугольниках. Такое определение отождествляет все формы, которые на рисунке имеют образы на отрезке EB или $E'B$, за исключением формы, имеющей образ в точке B, что делает невозможным использование приведенного выше рисунка для аналогичных исследований при новом определении. Эту задачу, как и доказательство возможности введения антиподизма форм при новом определении, мы оставляем читателям.

Об играх
(в свободном изложении)

В первом десятилетии текущего века, будучи студентом в Геттингене, я много слышал о Феликсе Клейне, о котором с восхищением говорили как о великом математике, но одновременно подвергали критике его доказательство существования решений уравнения потенциала. Клейн считал распределение электричества в металлическом проводнике убедительным аргументом в пользу существования таких решений. Большинство математиков избегают приемов такого рода, однако они играли и будут играть значительную роль в развитии нашей науки. Предлагаемый ниже отчет о моем соприкосновении с теорией игр не претендует на полную строгость (которой я в целом придерживаюсь), и поэтому его не следует рассматривать как лекцию, предназначенную для лиц, профессионально занимающихся математикой.

1. Существуют два определения непрерывности, первое из которых принадлежит Коши, а второе приписывается Гейне. Мы назовем их, соответственно, *К*-непрерывностью и *Г*-непрерывностью. Функция $f(x)$, определенная на интервале $(-1, +1)$ при условии $f(0) = 0$, является *К*-непрерывной в точке 0 тогда и только тогда, когда для каждого натурального числа n существует натуральное число $m(n)$ такое, что из $|x| < 1/m$ следует $|f(x)| < 1/n$. Она является *Г*-непрерывной в точке 0 тогда и только тогда, когда $|x_m| < 1$ для всех натуральных m и из

$$\lim_{m\to\infty} x_m = 0 \quad \text{следует} \quad \lim_{m\to\infty} f(x_m) = 0.$$

Пусть K означает, что f является K-непрерывной в 0, $Г$ — что она $Г$-непрерывна в 0. Доказательство импликации $K \Rightarrow Г$ является простым. Обратное утверждение, что $Г$ включает K, удается доказать с помощью рассуждения, основанного на аксиоме выбора (аксиоме Цермело), которую мы обозначим через AZ. Некоторые математики не любят аксиому AZ, однако пользуются ею на лекциях при доказательстве того, что $Г \Rightarrow K$.

Отнесемся к этой проблеме так, как если бы мы занимались делом, представленным в суд. Судебный исполнитель спрашивает, все ли согласны с утверждением $Г \Rightarrow K$, и если никто не начинает дискуссии, то суд постановляет считать импликацию $Г \Rightarrow K$ справедливой и объявляет $Г \Rightarrow K$ доказанной путем *consensus ingeniorum* (несмотря на то, что суду не было представлено никакого формального доказательства). В противном случае возникает юридический спор между г-ном A (который внес дело в суд, и убежден, что импликация $Г \Rightarrow K$ истинна) и его оппонентом, г-ном B.

— Я знаю, — говорит г-н B, — что $Г \Rightarrow K$ можно доказать, если мы примем аксиому AZ, но я не признаю доказательств, опирающихся на правила, отвергаемые некоторыми выдающимися математиками.

— Я разделяю мнение г-на B об аксиоме AZ, — отвечает г-н A, — однако полагаю, что $Г \Rightarrow K$, и если никому не удастся определить $Г$-непрерывную в точке 0 функцию $f(x)$, которая не является K-непрерывной в 0, то пусть высокий суд вынесет вердикт $Г \Rightarrow K$.

Далее судья призывает г-на B определить $f(x)$ в соответствии с требованиями г-на A. Предположим, г-н B утверждает, что имеет пример такой функции и обозначает ее условно через $g(x)$. Отсутствие K-непрерывности этой функции в 0 влечет за собой существование такого натурального числа N, что каждый интервал $I_m = (-1/m,\ 1/m)$ содержит такие x_m, что $|\,g(x_m)\,| \geq 1/\,N$ для произвольного натурального m. Г-н B должен привести такое число N и делает это. Г-н A в свою очередь рискует предположить, что $|\,g(x_m)\,| \geq 1/N$ для всех x в I_1 (если бы это предположение оправдалось, г-н B оказался бы в неприятном положении). Однако этого не происходит, так как г-н B указывает некоторую точку x_1 в I_1 и триумфально заявляет: $g(x_1) \geq 1/N$. Г-н A не знает определения $g(x)$, но признает это утверждение справедливым. Поскольку *onus probandi* (бремя доказательства) ложится на него, ему не остается ничего иного, как искать счастья в I_2. Г-н B тотчас же парирует эту попытку, выбрав x_2 в I_2 и утверждая, что $|\,g(x_2)\,| \geq 1/N$. Г-н A вновь не может этого опровергнуть. В этот момент судья прерывает игру и обращается к г-ну B со следующим вопросом: «Уверен ли он, что всегда справится с определенным им N?» («всегда» в данном случае означает «в каждом интервале I_m»). Прежде чем г-н B успевает ответить, г-н A прерывает расследование следующей репликой:

— Высокий суд, что бы ни говорил г-н B, его дело проиграно! Если он скажет «нет», то откажется от своего примера $g(x)$, а если он скажет «да», его ответ будет равносилен утверждению, что существует бесконечная последовательность $\{x_m\}$, $x_m \in I_m$, такая, что $g(x_m) \geq 1/N$ для каждого m, что противоречит Γ-непрерывности $g(x)$ в $x = 0$. Из этого следует, что $g(x)$, не обладая Γ-непрерывностью в 0, не может быть контрпримером для $\Gamma \Rightarrow K$.

Стратегия г-на A основана на следующем приеме: г-н B подвергнет сомнению доказательство импликации $\Gamma \Rightarrow K$, если г-н A будет пытаться доказать ее с помощью AZ (т. е. аксиомы выбора), поэтому г-н A просит г-на B привести контрпример для $\Gamma \Rightarrow K$, не интересуясь даже определением используемой для этого функции $g(x)$. Г-н A указывает, что если г-н B имеет в распоряжении хорошо определенную функцию $g(x)$, которая Γ-непрерывна, но не является K-непрерывной, то он может запутаться в противоречии. В 1923 г. я познакомился в Штейне близ Кёльна с О. Тёплицем и рассказал ему, что не уверен в доказательствах, основанных на аксиоме Цермело. Он спросил, а не пытался ли я найти контрпримеры против теорем, доказанных с помощью этой аксиомы? Я честно ответил: «Нет!».

Идея обращения к суду в таком вопросе, как эквивалентность двух определений непрерывности, может показаться необычной для большинства математиков, но не для тех из них, кто интересуется теорией игр, так как судебная процедура часто напоминает игру по установленным правилам. Несколько лет назад я рассказал о деле «*A* против *B*» известному геометру Э. Чеху, который тогда гостил в Польше, и такой подход ему не понравился. Однако когда я встретился с ним через пару лет снова (к сожалению, это стало его последним посещением Польши), он вернулся к теме «судебной» математики и сказал, что считает ее правильной. За прошедшее время, сказал он, аргументы спорящих сторон поколебали мою прежнюю уверенность.

Доктор Ян Мицельский, прочитав приведенный выше абзац, сказал мне, что считает судебное разбирательство «*A* против *B*» серьезным аргументом (в пользу цермеловой аксиомы выбора) в силу следующих рассуждений: «Г-н *A* считает, что Цермело прав. Г-н *B* приводит контрпример и утверждает, что знает такое семейство F множеств X, что ни одно из множеств X, принадлежащих F, не является пустым, и что не существует функции $f(X)$, определенной для каждого X, принадлежащего F, удовлетворяющей условию $f(X) \in X$ для каждого $X \in F$. Поскольку г-н *B* заявляет, что ни одно из множеств X, принадлежащих F, не является пустым, то он сможет найти x в X для каждого X из F — а если не сможет, то значит он проиграл свое дело. Если он подтвердит, что сумеет это сделать, то мы будем иметь дело с функцией f, охарактеризованной выше, а это противоречит его первоначальному утверждению о семействе F, а следовательно, он терпит поражение».

2. Рассказ о двух противниках, представивших суду свои предельно различные взгляды на некоторую математическую проблему, не является неудачной шуткой, как могло бы показаться читателям части 1. В прикладной математике имеются задачи, которые можно представить как игры, а их решения представляют наилучшую стратегию фиктивных (а иногда реальных) партнеров. Поскольку спор, разрешаемый в судебном зале в соответствии с правилами юридической процедуры, тоже представляет собой некоторую игру, нет никакого повода считать математику и судопроизводство независимыми и несвязанными областями деятельности. Речь идет о применении игр в чистой математике (см. [6]), и конечно, говоря об играх, мы должны иметь в виду их современную теорию.

Первым важным достижением этой теории была лекция, прочитанная Цермело на пятом Международном математическом конгрессе в 1912 г. [1]. Полученный в ней результат относится к решению задач в играх типа шахмат. Для пояснения ситуации в этих играх, представим себе N шахматных досок и N пар шахматистов, принимающих участие в игре. Предположим, что каждый из партнеров играет безупречно, т. е. всегда выбирает наиболее верный ход. Тогда все результаты будут одинаковы, т. е. либо белые выиграют на N досках, либо все N игр закончатся вничью. Утверждение Цермело справедливо для всех игр, имеющих следующие свойства, общие с шахматами: (*а*) чередование ходов; (*б*) конечное число ходов; (*в*) полная информация. Свойство (*а*) означает, что сначала ход делают белые, потом черные, потом опять белые и т. д. Свойство (*б*) означает, что существует такое число M, что игра с бóльшим количеством ходов невозможна, т. е. все игры продолжаются до определенного результата, получаемого через n ходов, причем всегда $n \leq M$. Свойство (*в*) означает, что не существует никаких иных обстоятельств, влияющих на результат, за исключением последовательных ходов обоих партнеров и исходной позиции, известной им; все ходы делаются открыто.

Результаты Цермело не получили должной оценки и признания из-за начала Первой мировой войны. После войны следующий шаг в этом направлении сделал Эмиль Борель [2], который и ввел в математику понятие «минимакс», но его работы не были должным образом оценены во Франции и не дошли до польских математиков. Я со своей стороны интересовался теорией преследования, и моя работа 1925 года на эту тему была переведена на английский язык в 1960 году [3]. В ней я поставил перед собой задачу найти наилучшую стратегию в игре более древней, чем человеческая цивилизация, а именно — в игре с преследованием и убеганием. В самой простой форме эта игра сводится к тому, что партнер A стремится поймать партнера B за кратчайшее время, тогда как B старается как можно дольше пользоваться свободой.

Рассмотрим упрощенную версию этой игры, когда A и B все время движутся с постоянными скоростями a и b (естественно, что $a > b$). Положения партнеров являются функциями времени $A(t)$ и $B(t)$, где t — время, прошедшее с начального момента $t = 0$, а начальное расстояние между ними, т. е. отрезок $A(0)B(0)$ имеет длину d. Задачей A является выбор функции $\alpha(A, B)$, где α — угол между направлением на восток и траекторией движения A. Эту функцию мы назовем стратегией игрока A. Аналогично, для игрока B определим β как угол между направлением на восток и траекторией движения B, и будем называть это стратегией $\beta(A, B)$. Очевидно, что наилучшей стратегией для A является та, при которой α есть угол между направлением на восток и вектором $A(t)B(t)$. Это означает, что если A выберет свою траекторию в соответствии с вышеприведенным правилом, то ему всегда будет удаваться опережать B, и общее время погони T будет равно или меньше величины $d/(a - b)$. Соответственно, если B всегда будет двигаться так, чтобы A оставался сзади, то время T будет равно или больше $d/(a - b)$. Описанная модель представляет собой простейшую форму задачи «минимакс» для частного случая игры «преследование и убегание», которую можно выразить общим соотношением:

$$\min_{\alpha}\max_{\beta} T(\alpha(A,B),\beta(A,B)) \geq \max_{\beta}\min_{\alpha} T(\alpha(A,B),\beta(A,B)). \qquad (1)$$

Доказать (1) довольно просто. Очевидно, что действительное время T, вытекающее из произвольного выбора стратегий α и β, определяется левой и правой сторонами неравенства (1). Я еще тогда полагал, что знак $\geq$ в (1) с успехом можно было бы заменить знаком равенства. В 1925 г. мне не была известна работа Цермело, несмотря на то, что она была опубликована в 1913 г., поэтому я не мог сформулировать рассматриваемую задачу в более общем виде. Обобщение в данном случае означает развитие теории преследования на ограниченной плоскости или на произвольной поверхности, такой, как эллипсоид или тор. Два доказательства соотношения (1) со знаком равенства, имеющие силу для общей теории преследования и убегания, можно найти в работах [10] и [11]. Дж. фон Нейман также отдавал себе отчет в важности принципа «минимакс» (см. [4]), однако трудно понять, почему в его публикациях отсутствуют цитаты из лекции Цермело. Попробуем теперь описать полученный результат в иной постановке задачи.

Пусть партнер A имеет n кошельков $A_1, A_2, \ldots, A_n$, содержащих разные жетоны, каждый из которых обозначен некоторым символом (например, a_n), а партнер B обладает n кошельками B_1, $B_2, \ldots, B_n$ с жетонами, также обозначенными символами (например, b_n). При этом партнерам A и B известно содержимое всех $2n$ кошельков. Партнер A вынимает жетон из A_1 и кладет его на стол. Партнер B видит символ a_1 жетона, находящегося на столе, и вынимает из B_1 жетон, который кладет рядом с a_1. Партнер A наблюдает символ жетона b_1 и вынимает следующий жетон из A_2 и т. д. Игра заканчивается в тот момент, когда B положит на стол жетон из B_n. Образованная таким способом последовательность $a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n$ дает «слово». По правилам, известным A и B, определяется дихотомическое деление «словаря» S, т. е. множества всех слов: $S = \mathsf{A} + \mathsf{B}$, $\mathsf{AB} = 0$. Если полученное в результате игры слово принадлежит к A, то побеждает A, а если к B, то побеждает B. Утверждение Цермело относится к играм описанного выше типа. Оно говорит, что либо существует такая стратегия для A, которая гарантирует выигрыш A независимо от ходов B, либо существует аналогичная стратегия для B. Тем самым оно подтверждает принципиальную бесплодность игр подобного типа в случае двух партнеров, располагающих полной информацией, относящейся к игре. Примером может служить игра «волки и овцы» [14], когда игроки знают, что выиграет овца, если будет вести себя в соответствии с определенной стратегией, которая обеим сторонам известна; ходы волка не влияют на его конечную судьбу. В шахматах такой ситуации быть не может, так как даже гроссмейстерам далеко до обладания полной информацией — они играют в шахматы как дети в волка и овцу. Тем не менее, утверждение Цермело применимо и к игре в шахматы, несмотря на то, что обычно невозможно предсказать итоговый результат игры. Мы не знаем, чего ожидать (выигрыша белых, выигрыша черных или ничьей), но самые разные результаты, достигаемые мастерами высокого класса, доказывают сложность этой игры.

Д-р Ян Мицельский несколько лет назад нашел следующую формулировку утверждения Цермело, являющуюся одновременно его доказательством:

$$\sim\left\{\bigvee_{a_1\in A_1}\bigwedge_{b_1\in B_1}\ldots\bigvee_{a_n\in A_n}\bigwedge_{b_n\in B_n}(a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n)\in \mathsf{A}\right\}$$
$$\Rightarrow\left\{\bigwedge_{a_1\in A_1}\bigvee_{b_1\in B_1}\ldots\bigwedge_{a_n\in A_n}\bigvee_{b_n\in B_n}(a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n)\notin \mathsf{A}\right\}. \tag{2}$$

Выражение (2) является одним из многих, связанных с именем А. де Моргана [5], и относится к формальной логике. Его формулировка не содержит букв B и S — вместо того, чтобы писать, что слово принадлежит B, автор пишет, что оно не принадлежит A.

3. Между выражениями (1) и (2) до сих пор существует брешь, для устранения которой нам следует поразмышлять над обыкновенной шахматной задачей, типа публикуемых в периодических изданиях. Обычно задача изображается в виде шахматной доски с искусственно расставленными белыми и черными фигурами. Под словом «искусственно» здесь подразумевается, что такая позиция могла бы возникнуть во время настоящей игры, но чаще всего ее выдумывает автор. Большинство таких задач содержат обращение к читателю: «Белые начинают и выигрывают в k ходов», где k — это 2, 3 или 4 хода (лишь изредка $k > 4$, поэтому мы просто положим $k = 4$). Проблема состоит в выборе такой стратегии для белых, которая гарантирует им выигрыш за четыре хода, и одновременно такой стратегии для черных, которая гарантирует, что они не проиграют в течение трех первых ходов *БЧБЧБЧ*. Таким образом, независимо от расстановки фигур существует число k (конечное), обладающее следующим свойством:

«Существует стратегия для белых, которая гарантирует им выигрыш самое позднее на их k-м ходу, а также существует стратегия для черных, которая делает невозможным выигрыш белых раньше их k-го хода». Предложение «k есть стоимость игры, определяемая расстановкой фигур» означает именно то свойство, которое приведено выше в кавычках. Эквивалентом k в игре с преследованием и убеганием является наименьшее время T погони, т. е. время, определяемое наилучшей стратегией для A.

Чтобы усмотреть полную аналогию между шахматами и преследованием, мы должны себе представить произвольные исходные позиции в обеих играх. При преследовании одного корабля другим мы имеем дело с произвольными исходными позициями, в то время как в классической игре в шахматы исходная позиция устанавливается раз и навсегда международными правилами. Шахматные задачи не всегда являются эквивалентом преследования именно потому, что они допускают произвольные исходные позиции. Следует подчеркнуть, что в обеих играх существуют так называемые «решения» — это название означает ход событий, произошедших в результате использования обоими партнерами стратегии «минимакс». Они однозначно указывают, каким ходом следует отвечать на ход противника — чаще всего без доказательства, что «основной вариант» является вариантом «минимакс».

Еще одна разница между (1) и (2) состоит в том, что выражение (2) нельзя усилить, тогда как (1) допускает возможность усиления путем замены знака $\geq$ знаком $=$. Я уже упоминал, что при написании статьи [3] не знал о лекции Цермело [1]. Игры со знаком $=$ в (1) я назвал «замкнутыми», а со знаком $>$ — «открытыми», и нечеткость общих представлений заставляла меня думать, что игра «преследование и убегание» является замкнутой. Работа Ч. Рылл-Нардзевского [10], цитированная в части 2, основана на цермеловском утверждении (2). Автор считает непрерывную игру в погоню предельным случаем замкнутых дискретных игр в соответствии с утверждением (2). Он также использует то обстоятельство, что процедура «минимакс» определена упрощенно, как в части 3, т. е. когда партнер A не рассматривает своего противника B как человека (мыслящего категориями типа «стратегия»), а просто изучает все возможные функции $B = f(t)$, описывающие траекторию движения B, где t есть время.

Если $\alpha(A, B)$ есть множество всех стратегий игрока A, определенных в части 2, то необходимое для перехвата противника время T становится функционалом $T\,[(\alpha(A, B), f(t)]$, в отношении которого A использует операцию «минимакс»:

$$\min_{\alpha(A,B)} \max_{f(t)} T(\alpha(A,B), f(t))$$

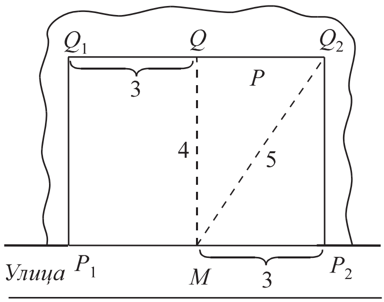
вместо операции min α max β из (1). Таким способом находится наилучшая стратегия для A, и разумеется, B может использовать аналогичный метод. Состязание приводит к тому же самому решению, что и в случае (1), но является более приемлемым с логической точки зрения. Понятие стратегии является более изысканным, чем для траектории в задаче преследования, а полученное новое выражение показывает, что оно в общем случае не исключает случай игрока, который выбирает траекторию своего движения случайным образом.

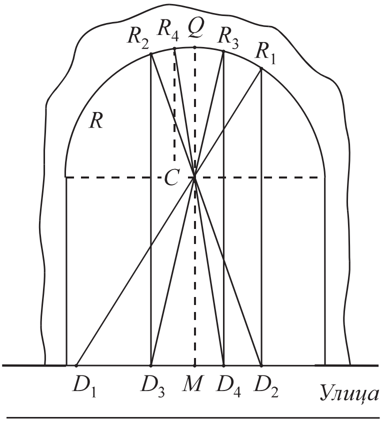
Разницу между открытыми и замкнутыми играми проще объяснить на примере погони собаки за кроликом, показанной на рисунках (см. с. 132). В прямоугольном огороде кролик может выбрать произвольное место, а собака может находиться в произвольном месте у забора, отделяющего огород от улицы, но не может покинуть улицу. Собака D стремится максимально уменьшить расстояние DR, отделяющее ее от кролика, тогда как кролик хотел бы увеличить DR так, чтобы находиться возможно дальше от собаки. Игра, представляющая результат двух диаметрально противоположных тенденций, имеет две разные математические модели.

Модель 1. Участникам D и R показали план местности, чтобы они могли одновременно выбрать место, которое им лучше всего подходит. После этого судья обозначает эти места на своей карте и указывает их партнерам. D и R обязаны занять свои позиции на реальном поле сражения. Эта модель определяет игру без точной информации. Ясно (см. левый рис.), что собака может уменьшить расстояние DR так, чтобы было $DR \leq 5$, выбрав на тротуаре место M в середине забора. Очевидно также, что какой-либо выбор $D \neq M$ включает возможность того, что будет $DR > 5$. Таким образом, 5 есть стоимость игры для собаки. Иначе дело обстоит для кролика: он всегда рискует встретиться с собакой, глядя на нее с расстояния 4 метра. Неравенство $5 > 4$ показывает, что игра является открытой. Выбор $D \neq M$ несомненно является лучшим решением для собаки. А что мы можем посоветовать кролику? Наша теория не дает ему никаких возможностей принять выигрышное решение, так как кролик всегда рискует попасть в положение $DR = 4$, поскольку никогда не может быть $DR < 4$[1]. Существует,

[1] Автор предполагает, что кролик отказывается от выбора места внутри прямоугольного огорода и имеет в виду только положения на стороне Q_1Q_2, противоположной забору P_1P_2. — *Прим. ред. польского издания*.

однако, настоятельная причина, чтобы кролик R выбрал один из углов $Q_{1,2}$. Подход «минимакс» основан на пессимистической предпосылке, что противник выберет для себя наиболее выгодный ход, что не дает кролику никакого шанса. Однако, в соответствии с расширенным пониманием правила, ситуация изменяется и выглядит следующим образом: предположим, что кролик знает о том, что собака D использует принцип «минимакс» (это подсказывает, что D выберет место M) и, соответственно, кролик R обязан занять угол Q_1 или Q_2. Такой подход при новом понимании правила делает игру замкнутой, и $5 = Q_2M$ становится стоимостью игры для обоих игроков.





Модель 2. А что будет, если собака и кролик попробуют развлечься в измененной игре с полной информацией, т. е. в случае, когда ареной состязания будет являться огород, как показано на левом рисунке? В этом случае игра превращается в бесконечную погоню, при которой собака D будет бегать вдоль улицы, а кролик R вдоль стороны Q_1Q_2. Если исходное положение задано в виде $D = P_1$, $R = Q_2$, то развитие событий будет следующим:

1. DP_1P_2 ; RQ_2Q_1,
2. DP_2P_1 ; RQ_1Q_2, третий ход = 1, четвертый ход = 2 и т. д.

Дело обстоит совсем иначе, если огород имеет скругленную границу с одной стороны. В этом случае модель 1 допускает решение «минимакс», в соответствии с которым R выбирает точку Q посредине скругленной стороны, а D выбирает точку M. Стоимостью игры является расстояние $MQ = 7$, одинаковое для D и R. Предположим, что в модели 2 первым положением собаки D будет D_1 , тогда наилучшим выбором для кролика R очевидно станет положение R_1. Собака же, в свою очередь, выбирает положение D_2 и т. д. Нетрудно доказать, что такая игра является бесконечной. Тем не менее, поочередные положения D_n, R_n образуют сходящиеся последовательности :

$$\lim D_n = M, \qquad \lim R_n = Q.$$

Хотя $n \to \infty$, пределы M и Q будут достигнуты за конечное время, если и D и R передвигаются с постоянной скоростью.

Одним из важных достижений Дж. фон Неймана в теории игр является утверждение о замыкании открытых игр [4]. Версия этого утверждения исходит из предположения д-ра Рылл-Нардзевского, что имеются две команды игроков, руководимых капитанами, которые управляют решениями своих коллективов. Простейшим примером является игра в орла и решку. Ясно, что если эта игра ведется между двумя противниками, то она является открытой — никакая стратегия не предотвратит потери монеты игроком A, что станет наихудшим результатом; ситуация для B та же самая. Если же A имеет в распоряжении команду из двух игроков A_1 и A_2 (одновременно играющих против B), он может приказать A_1 поставить на орла, а A_2 — на решку, так что при любом выборе B общий результат A:B будет 0:0; таким образом, 0 есть стоимость игры как для A, так и для B. Недостаток этого примера в том, что игра в орла и решку относится к играм без полной информации, однако он объясняет идею фон Неймана замыкания открытых игр при помощи изменяемых стратегий. При этом интересно, что последовательность стратегий становится суперстратегией, т. е. теория «минимакса» применяется к итоговому результату, превращая «суперигру» в игру замкнутого типа.

4. Сразу после опубликования [3] С. Банах и Ст. Мазур решили исследовать бесконечные игры, чтобы проверить, применимо ли правило «минимакса» (2) к переменным играм такого типа с полной информацией. В 1925 г. они обнаружили такие игры, опровергнув тем самым мое предположение, что все переменные

игры с полной информацией являются замкнутыми. Вот простейший пример бесконечной игры между двумя игроками A и B: интервал [0, 1] делится на два множества точек A и B. Игроки A и B знают, к какому множеству, A или B, принадлежит каждая точка x в интервале [0, 1]. Их задачей является записывать на полоске бумаги попеременно цифры a_1, b_1, a_2, b_2,... и до бесконечности[2], причем каждый из них отмечает про себя цифру сразу же после появления ее на полоске. Символ $0.a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n$, прочитанный как развернутое двоичное число, определяет точку x в [0, 1]. Если $x \in \mathsf{A}$, выигрывает A, если $x \in \mathsf{B}$, выигрывает B.

Как могут происходить реально эти бесконечные игры? Партнеры могут представлять свою стратегию на двух бумажных карточках третейскому судье, который и оценивает каждое сообщение x на основе всей доступной ему информации, т. е. относит это сообщение к одному из классов (A или B), и в зависимости от этого решает, кто из игроков выиграл. В некоторых случаях задача третейского судьи будет чрезвычайно трудной, а если рассматривать ее теоретически, она в каждом случае будет представлять собой хорошо обусловленную сформулированную математическую задачу. Правила, которых должны придерживаться A и B, достаточно просты: партнер A первым решает, что записать в качестве a_1 (0 или 1), и записывает это на карточке. Затем он должен дать определение функции $c(k)$, стоимостями которой являются 0 или 1 для произвольного натурального числа k. Третейский судья трактует это определение как обязательство стороны A записывать цифры $c(k)$ всегда в виде a_{n+1}, начиная с момента, когда последовательность $a_1\ldots b_n$ (считываемая как развернутое двоичное число) достигает k. Партнер B должен определить $d(k)$, и его поведение во всем подобно поведению A. Разница состоит лишь в том, что вместо $c(k)$ он записывает на своей карточке $d(k)$. При таком поведении партнеров отсутствует эквивалент выбора a_1.

Значение приведенных банальных рассуждений в том, что они доказывают возможность на самом деле разыгрывать бесконечные игры за конечное время.

---

[2] Можно записывать только цифры двоичной системы, т. е. только 0 или 1. — *Прим. ред. польского издания*.

Пример. A = множество измеримых точек в [0, 1], B = множество неизмеримых точек в [0, 1]. Игрок *B* может обеспечить себе выигрыш, используя стратегию, которую читатель легко может угадать. С другой стороны, как показано в работе [9], если A и B являются двумя полностью несовершенными множествами, то выигрышной стратегии ни для *A*, ни для *B* не существует.

У меня был соблазн распространить выражение (2) на случай $n = \infty$, чтобы показать, что бесконечные переменные игры между двумя игроками являются замкнутыми, но Ян Мицельский обратил мое внимание на скрытые противоречия в расширениях подобного рода. Тот факт, что аксиома Цермело вызывает дискуссию при рассмотрении всех примеров, типа исходящих от Банаха–Мазура, является критическим моментом для рассмотрения этой задачи, так как аксиома предназначается для определения множеств A, B. Известно, что *AZ* приводит к таким последствиям, как разбиение шара на пять частей, которые затем можно сложить таким образом, что получается новый шар с объемом в два раза больше. Большинство ученых считают этот результат очередным парадоксом. Существует и другая оговорка: можно ли говорить о полной информации для *A* и *B*, если ее невозможно установить, и имеют ли партнеры в виду одно и то же множество, когда говорят об A? Такая невозможность скрывается в каждом множестве, для которого единственной метрикой происхождения является *AZ*. При этих условиях весьма сомнительно, что люди когда-нибудь будут играть в какую-либо игру *BM* (Банаха– Мазура).

Все эти размышления заставили меня усомниться в справедливости аксиомы выбора. Минуло шестьдесят лет с тех пор, когда она была обнародована, и некоторые размышления, подобные приведенным в первой части этой статьи, убедили меня, что полностью негативный подход в отношении *AZ* таит много опасностей. Все это побудило меня заменить *AZ* следующей «аксиомой определенности» (*AD*):

Все переменные игры между двумя игроками с полной информацией являются замкнутыми.

Основная трудность, с которой я столкнулся, заключалась в том, что распространение (2) на бесконечные игры дает в качестве следствия *AZ*; с другой стороны, *AZ* приводит к *BM*-играм, т. е. открытым бесконечным играм, которые мы не хотим признавать. Отсюда берет начало мое сотрудничество с Я. Мицельским, которое включало такие эпизоды, как две телеграммы (Беркли – Закопане), которыми мы обменялись летом 1961 г.: «Аксиома мертва», но днем позже — «Аксиома все еще жива!». Заметка обоих авторов [7], представленная 14.X.1961 г. А. Мостовским, содержит формальное определение *AD*. Эта формулировка обобщает утверждение Цермело о шахматах на все бесконечные игры и утверждает, что бесконечные игры также являются замкнутыми. Выражение (*A*) на стр. 3 работы [7] можно считать обобщением (2), т. е. новым выражением типа *A* де Моргана. Однако было бы нелепостью делать это *verbatim* (дословно): классические формулы применяются к общим множествам (конечным или бесконечным) лишь при условии, что число используемых кванторов конечно, тогда как в нашем случае (*A*) мы имеем дело с ω кванторов. Если допустить появление общих квантифицированных множеств, то мы получим ложное утверждение. Для наших целей достаточно было бы рассмотреть простейший вид бесконечных игр, описанных в части 4, и сформулировать *AD* следующим образом: либо существуют цифра a_1 и функция $c(k)$ такие, что *A* выигрывает независимо от вида функции $d(k)$, либо существует функция $d(k)$ такая, что *B* выигрывает независимо от выбора a_1 и функции $c(k)$.

Аксиома *AD* и ее следствие были исследованы Я. Мицельским в работе [9], где он подтвердил эквивалентность определений непрерывности по Коши и по Гейне. Этот факт удается установить на основе обычной системы аксиом (т. е. аксиом Цермело–Френкеля–Сколема) с добавлением *AD*, но без *AZ*, так что полученную систему можно обозначить аббревиатурой *ZFSAD*. Следствием *ZFSAD* является отсутствие существования такого кардинального числа $\mathfrak{m}$, что $\aleph_0 < \ < 2^{\aleph_0}$. Я. Мицельский и С. Сверчковский показали в [8], что *ZFSAD* влечет за собой измеримость в смысле Лебега каждого подмножества действительной прямой. Таким образом, наша аксиома *AD* уничтожает многие результаты, полученные с помощью *AZ*. Одним из них является разбиение шара Банаха–Тарского: части шара, полученные в результате такого разбиения, не имеют никакого объема в смысле Лебега, что противоречит *ZFSAD*. Зато *AD* приводит к положительным результатам в случае таких свойств, как свойство Байре и ряд других, упомянутых мною выше. Мицельский в [9] пишет, что гипотеза о непротиворечивости *ZFSAD* не идет вразрез с современным состоянием математики (я привожу здесь его мнение, поскольку наше сотрудничество первоначально было основано на противоречии во мнениях, именно он в этом вопросе являлся пессимистом). Эта осторожность была весьма обоснованной, поскольку К. Гёдель доказал, что *AZ* не противоречит *ZFS*. Этот результат скрывает в себе возможность того, что *AZ* окажется в будущем утверждением, согласующимся с *ZFS*, а вследствие этого *AD* — ложным. Впрочем, сейчас угроза возникновения такой ситуации существенно ослабла, так как П. Дж. Коэн недавно доказал [12], что *AZ* не зависит от *ZFS*. Что же касается вопроса, приводит ли *AD* к укреплению математики, я бы ответил утвердительно: в современной теории вероятностей часто возникает необходимость доказательства измеримости множеств и функций, и было бы полезно избавиться от необходимости искать доказательства подобного рода.

5. Большинство людей интересуются скорее играми с элементом случайности, а не играми с полной информацией. Простейшим примером случайных игр является игра в орла и решку. Игрок *A* кладет злотый на стол и закрывает его рукой, затем игрок *B* кладет свой злотый, а игрок *A* поднимает руку. Если две монеты оказываются вверх одной и той же стороной (неважно, орлом или решкой), игрок *B* забирает обе, в противном случае — они оказываются в кармане *A*. Стоимость этой игры равна –1 злотый для *A* и +1 злотый для *B*, и, следовательно, разность составляет 2 злотых — эта игра является открытой. Дело обстоит совсем иначе, если игра состоит из бесконечной последовательности описываемых выше событий. Действительно, пусть g_n означает итоговый выигрыш *A* после *n* первых пари, который, однако, ему не выпла-

чивается. Все выигрыши отмечаются в книге, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g_n}{n}$ есть сумма, которая должна быть выплачена участником B игроку A. При определенных стратегиях этот предел существует. Оба игрока поступят умнее всего, если не будут придавать значения тому, какой стороной вверх они кладут злотый на стол, так как могучий закон больших чисел гарантирует, что предел будет равен 0. Таким образом, бесконечная по длительности игра является замкнутой, а ее стоимость равна 0 как для A, так и для B. Этот пример является простейшим частным случаем общего закона, открытого Дж. фон Нейманом [4]: открытые игры превращаются в замкнутые в результате последовательного повторения розыгрышей. Д-р Рылл-Нардзевский заметил, что вместо бесконечного повторения одной игры, можно было бы организовать турнир с одновременно играющими n парами, где n — большое целое число. Будем считать, что A — капитан n игроков A_k ($k = 1, 2,\ldots, n$), а B — капитан n игроков B_k. Таким образом, имеются n игровых полей F_k , причем каждая из пар A_k, B_k имеет свое собственное игровое поле F_k и на каждом из этих полей действуют одни и те же правила игры. Капитан A назначает стратегии своим игрокам A_k , но эти стратегии различны для разных игровых полей (капитан B, возглавляющий команду $\{B_k\}$, поступает аналогичным образом). Предположим, что ставка s равна $1/n$ для каждого поля F_k и что игра на каждом поле является открытой, g_n — разность, а A и B — соответственно казначеи клубов, которые они представляют. Нардзевский показал, что в смысле «минимакс» существует наилучшая стратегия для A и наилучшая для B (в том же самом значении), такая, что разность между стоимостью игры соответственно для A и B остается очень малой для больших n. Это превращает игру в замкнутую при $n \to \infty$, хотя $g_n > 0$ для любого конечного n. Игры, содержащие элемент случайности, можно также рассматривать с иной точки зрения: чтобы сделать их замкнутыми, мы можем принять во внимание ожидаемый выигрыш вместо случайного (источник [3] содержит упоминание о подходе такого рода). В свое время большой популярностью пользовалась игра между двумя лицами под названием *баккара*, при которой банкомет вслепую вынимает из колоды карту, а затем то же самое делает его противник P. Затем каждый смотрит на свою карту (не показывая ее противнику), после этого игрок P либо добирает карту (если желает), либо отказывается это сделать — эту вторую карту он должен показать банкомету B. В свою очередь B либо берет следующую карту, либо нет. После этого оба игрока показывают друг другу карты и сравнивают очки. Ни одна карта не имеет стоимости более 9 очков. Если сумма очков на какой-либо из пар карт равна s и $s > 9$, то эта пара сразу оценивается как $s - 9$. Перед началом игры обозначается ставка, и выигрывает тот из игроков, который набирает больше очков. Нетрудно найти приблизительно наилучшую стратегию P_1 для игрока P. Пусть B_1 — наилучшая стратегия для игрока B против игрока, использующего P_1. Зная эту относительно наилучшую стратегию B_1, можно найти P_2, которая будет относительно наилучшей стратегией для P. Переходя к B_2, мы установим, что $B_2 = B_1$, следовательно, P_3 является идентичной P_2. Таким образом, комбинация (P_2, B_2) является наилучшей стратегией в абсолютном смысле, т. е. в силу общего правила, говорящего, что две стратегии, из которых одна является наилучшей относительно остальных, описывается стратегией «минимакс». Комбинация (P_2, B_2) становится решением «минимакс» карточной игры *баккара* между двумя лицами, и этот вывод (который, кстати, никогда не был опубликован) является иллюстрацией общего закона о сведении открытых игр к вероятностным, установленного Дж. фон Нейманом [4]. Закон гласит, что вследствие неполной информации каждая отдельная игра в баккара является открытой, повторение же игр делает всю их серию замкнутой игрой. Решение (P_2, B_2) показывает, что игра не является честной: для банкомета ожидаемый выигрыш положителен, так как повторение игр в пределе приводит к нечестной игре, согласно его предвидению.

6. Заканчивая эту статью об играх, признаюсь, что я не знаю, противоречит ли аксиома *AD* теории множеств *ZFS* , однако за ее признание говорят следующие доводы.

Эта аксиома упрощает математику, удаляя те из следствий *AZ*, которые всегда приводили в смущение многих серьезных ученых. С другой стороны, *AD* не является поводом для отмены теорем, считающихся большинством математиков основными инструментами современной науки, и которые традиционно доказываются с помощью *AZ*. Новая аксиома *AD* перенимает задачи аксиомы *AZ*, сохраняя важность этих утверждений. Ради точности признаюсь, что я не уверен, относится ли сказанное ко всем приведенным утверждениям.

Достоинством *AZ* является ее интуитивная ясность и легкость понимания. Аксиома *AD* заставляет усомниться в том, что замкнутость бесконечных игр является их явным признаком. С другой стороны, *AZ* влечет за собой ряд интуитивно вовсе не очевидных следствий.

Д-р А. Мостовский выдвигает следующее возражение против *AD*: утверждение *AD* не сформулировал бы ни один логик, которому присущ способ мышления азартных игроков. Позволю себе заметить, что вся теория вероятностей основана на аналогичном способе мышления, и поэтому вплоть до Первой мировой войны теорию вероятностей вообще не причисляли к математике (но теперь она, безусловно, составляет важную часть математической науки). Такая эволюция объясняет, почему *AD* относится к математике: *AD* имеет отношение к науке об играх, последняя относится к математике, таким образом *AD* является частью математики. Не исключено, что в будущем мы дождемся появления утверждений, абсолютно равноценных *AD* и столь же ясных с формальной точки зрения, как и большинство правил теории множеств *ZFS*.

В процессе написания этой работы я воспользовался критическими замечаниями д-ра Яна Мицельского, чью помощь я вспоминаю с благодарностью.

Гуго Штейнгауз

Литература

[1] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels,* Proc. of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 2 (1912) 501–504.

[2] E. Borel, *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche,* C. R. Acad. Sci. Paris, 173 (1921) 1304–1308. *Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs, Théorie des Probabilité,* Paris 1924, pp. 202–224.

[3] H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu.* Myśl Akademicka 1, Lwów 1925,13–14. (Naval Res. Legist. Quart. 7 (1960) 105–107.)

[4] J. v. Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann., 100 (1928) 295–320.

[5] A. de Morgan, *Formal Logic or the Calculus of Inference necessary and probable,* 1847.

[6] A. Ehrenfeucht, *An application of games to the completeness problem for formalized theories,* Fund. Math., 49 (1961) 129–141.

[7] Jan Mycielski and H. Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice,* Bull. Acad., Pol. Sci., Sér. Sci. Math., Astr., Phys., 10 (1962) 1–3.

[8] Jan Mycielski and S. Świerczkowski, *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness,* Fund. Math., 54 (1964) 67–71.

[9] Jan Mycielski, *On the axiom of determinateness,* Fund. Math., 53 (1964) 205–224.

[10] C. Ryll-Nardzewski, *Theory of pursuit and evasion. Advances in Game Theory,* Princeton Univ. Press, Princeton N. J. 1964, 113–126.

[11] Jan Mycielski, *Continuous games with perfect information,* ibid., 103–112.

[12] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis,* I, Proc. Nat. Acad. Sci., 50 (1963) 1143–1148; II, ibidem, 51 (1964) 105–110.

[13] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, *John v. Neumanns' work in the theory of games,* Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958) 100–122.

[14] Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations,* George Allen and Unwin, London 1955, pp. 309–310.

Пути прикладной математики[1]

Я не собираюсь браться за такую трудную задачу, как определение прикладной математики, название которой связано с самыми разными науками (геодезия, теория судостроения, теория вероятностей, номография, баллистика, статика или основы кристаллографии). Прикладную математику обычно путают с приложениями математики, но это замечание не облегчает мою задачу. Леон Лихтенштейн, крупный математик, который в течение многих лет работал на предприятиях Сименса в качестве инженера-теоретика (впрочем, он лично считал эту работу небесной карой), говорил, что «прикладной математики не существует вообще, есть только математика». Он с большим успехом применял математику к теории форм планет, так что этим мнением не стоит пренебрегать.

Известно, что недостаток общепринятых взглядов создает обилие особых точек зрения. Я хочу воспользоваться этой привилегией, говоря о путях прикладной математики, и поэтому прошу трактовать мои вольные суждения и комментарии лишь в качестве выражения личных тенденций, пристрастий и неприязни.

Я отдаю себе отчет, что в Польше нет школы прикладной математики, которую можно было бы сравнить по числу людей и работ со школой теории множеств и топологии или даже с той группой польских математиков, которые занимаются теорией функций и анализом. Эта ситуация является плохой с точки зрения практических потребностей, но она хороша для тех, кто хотел бы создать школу прикладной математики, поскольку ее можно бу-

---

[1] Содержание доклада, сделанного на пленарном заседании съезда польских математиков в Варшаве в сентябре 1948 г. Однако эта статья (*Drogi matematyki stosowanej*) весьма существенно отличается от доклада.

дет создать такой, какой мы желаем ее видеть (именно это я имел в виду, говоря о тенденциях). Я вспоминаю, как Зигмунд Янишевский, создавая свои *Fundamenta Matematicae*, говорил: «Занятия теорией множеств (в Польше) имеют большое преимущество, поскольку, желая что-то сотворить в классической математике, нам надо будет сначала подняться до мирового уровня». Во многих классических областях нам уготована второстепенная роль, но в теории множеств мы имеем одинаковые стартовые позиции: удовольствие от создания новых понятий дало мощный импульс нашим молодым математикам. В свое время теория множеств была новой областью, и Янишевский имел основания так говорить, что и доказала история тех 30 лет, которые прошли с момента формулирования его программы.

Задумаемся о похожей ситуации с прикладной математикой. Сегодня в мире нет великих школ прикладной математики, которые можно было бы сравнить с такими центрами математической мысли, как Париж, Геттинген и Берлин конца XIX и начала XX века до Первой мировой войны. Существует, правда, английская «середина», как я называю школу статистики, которая возникла из исследований Р. Э. Фишера и его учеников, а затем переместилась в Америку (не без сильного влияния Ежи Сплавы-Неймана) и попала там на почву, подготовленную математиками, работающими в промышленности и коммерции. В Англии эта школа преимущественно занималась генетикой и научно-исследовательскими работами в области сельского хозяйства, а в Америке она обратилась к экономическим проблемам и к статистическому контролю промышленной продукции. Кроме этого, в обеих этих странах проявляется большой интерес к теории и практике вычислительных машин, в особенности электронных. Я рискну утверждать, что *прикладная математика во всем мире находится в зачаточном состоянии*. Очевидно, против этого можно возразить, что сейчас выходит множество журналов, в название которых входит словосочетание «прикладная математика». Кроме того, количество статей по геометрической оптике, гидравлике, теории упругости, статистике или по кинетической теории материи (и многому другому, имеющему отношение к прикладной математике) уступает только числу работ в области чистой математики. Но подавляющее большинство этих работ относится к прошедшему времени, т. е. они являются новыми лишь по результатам, а их методика и научный стиль — давно устарели. В чем заключается основная разница между старой и новой (или даже будущей) прикладной математикой? Она сводится к *способам взаимодействия с другими научными дисциплинами*!

В молодости нас учили, что сотрудничество математика с естествоиспытателем должно развиваться примерно по следующей схеме: естествоиспытатель встречается с математической задачей в виде алгебраического или дифференциального уравнения и приносит ее математику, который решает задачу и отдает в руки естествоиспытателю готовое решение в виде формул. При этом математик не обязан беспокоиться о том, откуда появилась задача и для чего предназначено ее решение. Он вовсе не обязан также заглядывать в протоколы, где зафиксированы результаты экспериментов. Убеждение, что специализация наук продвинулась так далеко, что люди только одного и того же круга знаний могут понимать друг друга, заранее обрекало такие попытки взаимодействия на неудачу. Нам говорили также, что в естественных науках нет ни точных определений, ни доказанных утверждений, что вызвало пренебрежительное отношение к этим наукам у математиков нашего поколения. Нам советовали принять фактическое положение вещей, представленное естествоиспытателем в виде системы аксиом, переложив всю ответственность на него: разумеется, мы не можем ошибаться, а если наши формулы не применимы к действительности, то виновата в этом не математика, а исключительно естествоиспытатель (или даже сама действительность!).

Такой подход, в целом, редко приводил к положительным результатам и даже вызывал у большинства естествоиспытателей убеждение в невозможности плодотворного сотрудничества с математиками. У математиков этот подход вызывал чувство, что естественные науки являются набором вольно трактуемых эмпирических фактов, а так называемые законы природы — умозаключениями, основанными на естественной индукции, не заслуживающими права называться научными истинами. Эта система взглядов неоднократно имела забавные проявления.

Помню, как молодой доцент спросил крупного польского математика, что необходимо включить в курс математики для естественников, на что тот посоветовал включить в этот курс некоторые менее важные разделы из теории рядов, на которые сам профессор не нашел времени в курсе анализа для математиков.

Когда я в Польском математическом обществе делал сообщение о *географических индексах*, то на заседание не пришли даже те географы, с которыми я много лет разговаривал об этих индексах. Позднее выяснилось, что секретарь отделения (молодой и способный математик), не уведомил Географическое общество, поскольку был уверен, что географические индексы представляют собой математическое понятие, а сообщение не будет иметь ничего общего с географией. Со студенческих лет я также помню лекции по философии в Геттингене, где один старый профессор привел пример того, как наблюдение может способствовать возникновению математических утверждений. По его мнению, математик, увидев на дороге след телеги, может задуматься о том, что колея представляет собой красивую кривую, которую следует изучить математически! Стало быть, еще в 1907 году славным геттингенским математикам не были известны лучшие примеры математических размышлений, на которые наводит природа. Тогда же мне пришлось слышать разговор между актуарием, который приехал из Кракова в Геттинген, чтобы познакомиться у Лексиса со статистическими методами, и свежеиспеченным доктором математики из Львова. Первый восхищался всемогуществом математики, которая описывает точными законами такие явления, как смертность или прирост населения (казалось бы основанные на чистой случайности), на что второй с раздражением отвечал, что эти законы являются не математическими, а природными, и что математика не несет за них ответственности (так что, если завтра эти законы окажутся обманчивыми, то математиков это совершенно не тронет). Страховой служащий не отступал и продолжал славословить математику, что довело беседу до личных оскорблений. Особенно интересно, что молодой доктор математики был естествоиспытателем-любителем (а также сыном и братом известных естествоиспытателей), но ему в голову не пришло спутать законы человеческие (т. е. природные) с законами божественными (т. е. математическими). Разговоры между математиками и естествоиспытателями часто бывают исключительно трудными и часто заканчиваются недоразумениями, даже когда собеседники имеют одинаковые цели.

В душе математика, как и каждого человека, сохраняются разные верования и пристрастия, неприязнь и поклонение, предрассудки и склонности. Самым сильным из этих ощущений и наиболее заслуживающим уважения является восприятие красоты математики. Не каждому дано видеть красоту гор, не каждый очаровывается видом моря и не каждому что-то говорят ночные звезды. Еще труднее объяснить, в чем заключается красота функции комплексной переменной или так называемой синтетической геометрии. Существуют даже такие математики, которые считают все ее практические применения святотатством. З. Янишевский говорил, что он занимается математикой не потому, что она может быть полезной при строительстве домов, и я ему верю (он чистый математик и убежден, что это дома строятся для того, чтобы математикам было где жить). Вера в абсолютную ценность математики связана с верой в существование таких математических объектов, как числа, функции, точки, множества или поверхности. Это удивительная религия, и в этом она подобна большинству других религий с гораздо большим числом адептов, которые верят, что некие сверхъестественные создания наделены особым видом существования, с позиций которого обычное существование является чем-то иллюзорным и преходящим. Божества прожорливы — поэтому для математика *pur sang* (чистокровного) идеальный шар не только существует, но и поглощает все обыкновенные шары, так что ни Луна, ни мыльный пузырь не являются шарами (что, впрочем, математики готовы моментально доказать). *Такая точка зрения представляет опасность не только для прикладной математики, но она является разрушительной и для всех остальных естественных наук.* Эту идеалистическую точку зрения обычно связывают с именем знаменитого древнегреческого мыслителя Платона, объединявшего культ философии с культом геометрии. Платоновская точка зрения не препятствует большинству математиков презирать философию (это значительно более поздняя традиция позитивизма), так что математик склонен считать бессмыслицей любую философию, за исключением математической логики. Эта доктрина произрастает из некоторой специфической философской точки зрения и имеет многочисленных сторонников именно в кругах ученых, далеких от практики. Можно сказать, что такие математики верят в разных призраков, ду́хов или в ужасы, которые мешают им вступить на путь прикладной математики.

Как должно выглядеть взаимодействие математики с другими дисциплинами? Лучше всего это можно выяснить, сравнивая сотрудничество ученых и правительств в истории двух мировых войн. В обеих войнах генеральные штабы взаимодействовали с гражданскими экспертами (при этом военные были «естествоиспытателями», а ученые-эксперты выступали в роли «математиков»). Во время Первой мировой войны взаимодействие обеих групп складывалось именно по той схеме, которую я назвал устаревшей: экспертов не посвящали в детали (т. е. не объясняли, для чего нужен тот или иной аппарат, а просто требовали сконструировать его). В первые годы Второй мировой войны, которые стали полосой катастроф для Британии, сотрудничество с самого начало носило разумный характер (т. е. эксперты допускались к обсуждению разработки, смысла и важности задач), на что оказались неспособны немцы с их преобладающей военной мощью. Таким образом, можно постулировать, что начинать сотрудничество надо не тогда, когда задача уже поставлена, а значительно раньше. Впрочем, существуют и такие задачи, которые естествоиспытателями не признаются математическими. Например, в географии оперируют понятием *горного хребта*, но до сих пор ни один географ не требовал от математиков дать точное определение этого термина. Как-то один математик спросил об этом географа и получил элементарный ответ: каждый найдет на карте горный хребет, поскольку это просто водораздел. Но после непродолжительной беседы оказалось, что географы используют понятие хребта не только для *изогипсов*, но также и для других так называемых *изоритмов* (например, для *изотерм*, при обозначении климатических границ), когда не рассматриваются реки и ручьи, окружающие водораздел. Желая понять (и убедить) географа, достаточно произвольно нарисовать систему изоритмов и спросить, чем он сам руководствуется, вычерчивая линию хребта. После нескольких таких попыток географ поймет, что необходимо выработать соответствующее определение, а математик уяснит для себя, чтó географ называет горным хребтом. Однажды некий выдающийся бактериолог навестил математика и представил ему свой способ вычисления вероятности того, что между матерью и плодом будет существовать различие в группе крови, обозначенной символом Rh. Математик с большим трудом следил за его рассуждениями, поскольку вся проблематика была для него совершенно новой, и ежеминутно задавал наивные вопросы. Через некоторое время бактериолог заявил, что он решил радикально изменить свой способ вычисления, так как «разговор с человеком, который понимает, что ему говорят, так стимулировал его собственные мысли, что он обнаружил вещи, которые сам раньше не замечал!». Очевидно, новый способ был лучше, но его нашел не математик, а сам биолог, что и являет собой пример сотрудничества.

Приведу другой пример, который свидетельствует о роли научного стиля разных эпох в эволюции решений одной и той же задачи. Существует очень важная практическая задача: определение объема древесных стволов при помощи вычислений на основе измерения только диаметра и высоты дерева. В справочниках по *дендрометрии* приведено много формул для вычисления объема, представляющих собой образцы прежнего стиля прикладной математики. Можно представить, как появились эти формулы: ученые рассматривали ствол просто как *параболоид вращения*, *нейлоид, трактрисоид* или еще более сложную фигуру. По-видимому, когда лесники заметили, что ствол совсем не похож на усеченный конус или параболоид, математики предложили им еще более прекрасные геометрические тела (к сожалению, формулы, подходящие для этих тел, невозможно использовать в настоящем лесу). Затем наступил долгий перерыв, при котором математики, вероятно, пришли к выводу, что древесные стволы не сто́ят того, чтобы ими занимались серьезные геометры, а лесники — что природа не хочет, чтобы ее исследовали математики. Последняя фраза достойна быть занесенной в словарь банальностей, так как ее в разных вариантах можно услышать из уст биологов, врачей и даже *mutatis mutandis* (с необходимыми изменениями) из уст юристов и экономистов. Как выглядела бы та же самая задача в свете программы, которую я здесь хочу предложить? Прежде всего математик должен был бы подвергнуть сомнению упрек лесников, что все применявшиеся до сих пор формулы являются плохими. Одна из них, основанная только на измерении диаметра в середине высоты, чрезвычайно проста. Насколько я знаю, никто не показал, что она является наилучшей, и очень часто она дает значительную ошибку. Из этого был сделан вывод, что она плохая. Так вот, плохая формула может быть наилучшей, и обязанностью математиков было обратить на это внимание лесников. Они должны были также объяснить лесникам, что введенный коэффициент $\pi/4$ не является какой-то святыней, так что если какой-нибудь другой коэффициент дает лучшие результаты, то можно его смело использовать. Некоторые таксаторы вычисляют кубатуру древесины с помощью коэффициента $\pi/4$, а потом добавляют 2% (т. е. вместо $\pi/4$ пишут 0.8), но это просто ненужная работа. В конце концов, они должны были разработать наилучший план пробных измерений, по которым можно было бы получить наилучшую формулу, основанную на измерении только одного диаметра, — наилучшую в статистическом смысле. Ибо суть дела заключается в том, что задача касается не одного дерева, а их множества. Сегодня все это кажется чрезвычайно простым и естественным, но не было таковым 100 и даже 50 лет назад. Даже поверхностные исследования указывают на то, что идя по намеченной дороге, можно улучшить считавшиеся до сих пор выдающимися способы измерения, не выходя за рамки простоты. Можно поставить вопрос еще радикальнее: можно вообще отказаться от формул и составить наилучшие таблицы для определения кубатуры, основанные на измерении диаметра на оптимальной высоте. В сущности, в рассматриваемой задаче речь идет не о коэффициентах и формулах, а об объеме, который является эмпирической функцией двух переменных, причем одну из них следует получить на основе статистических данных.

В связи с историей определения кубатуры становится ясной роль, которую сыграл математический анализ. Эта классическая ветвь математики дала столько плодов в XVIII и XIX веках, что многие и сегодня не желают замечать ее другие ветви, расположенные ниже. Например, теория дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) оказалась полезной для развития математической физики, но нельзя забывать, что ее классические задачи первоначально были сформулированы именно в физических терминах. Рихард Курант (ныне профессор в Нью-Йорке) в свое время прочитал лекцию о практической задаче, которая привела к дифференциальному уравнению. Он подвергнул это уравнение всем методам анализа (как говорится, выстрелил по нему из всех орудий), но уравнение «уступило» лишь немного: так далек путь от теории до применений. Кто-то может сказать, что иных методов у нас нет, но я укажу, по меньшей мере, два из них. О первом я уже говорил: мы можем вернуться к «доматематической» фазе и сформулировать задачу по-иному. Второй путь заключается в использовании современных средств, таких, как электронные машины. Не следует думать, что создание таких машин представляет собой только инженерную задачу. Сегодня такая техника становится привычной и надежной, так что подобно астроному (который может заказать набор линз для телескопа, не будучи сам шлифовальщиком стекла), математик может заказать электронную машину, указав тип и количество основных операций и число их повторений. Поэтому создание таких машин относится к области прикладной математики, но проблема, поставленная Курантом, этим не решается. По его мнению, уравнение следует считать решенным, если найден ответ, например в виде интеграла сложной формы, где искомая функция и независимая переменная были бы связаны, например, посредством эллиптических функций. С точки зрения чистой математики, такое решение было бы полным и изящным, но в связи с обсуждаемыми проблемами такой интеграл вообще не следовало бы рассматривать в качестве решения (даже приближенного, если он не позволяет найти значение функции ни в одной точке). Загипнотизированному традиционной терминологией математику наиболее важным представляется существование такого интеграла и его теоретические особенности. Он считает это действительным решением, а его изящество называет (подобно китайцу) каллиграфической красотой формул.

Г. Г. Харди, недавно умерший крупный английский математик и незаурядная личность, в своей *Апологии математика* написал: «Мои исследования никогда не имели никаких применений, они не пригодились ни для убийства людей, ни для порабощения народов». Великие математики всех времен выражали уверенность, что развитие математики оправдывается красотой результатов и потребностью познания истины. Эта потребность считалась бескорыстной, так что математики часто с пафосом отвергали критерий практической полезности своей науки. Возможно, здесь играет роль еще и то, что математика обладает ничем не ограниченной свободой выбора тематики и методов, а также не нуждается в лабораториях и значительных денежных средствах. Это позволяет представлять математику в виде какого-то идеального острова, на котором живут ее приверженцы, получая награды из рук своей королевы в виде прочных и бессмертных истин. Тот же самый Харди в свое время составил шкалу ценности современных математиков, на которой самый слабый из его учеников получил 1 балл, а Альберт Эйнштейн — 100. Харди просто оценивал каждого по степени сложности доказанных им теорем. Такой спортивный способ классификации до сих пор распространен в мире математиков, но для прикладной математики он просто вреден, так как здесь речь идет не об утонченности распутывания узлов, а об их разрезании. Чем проще математические методы, применяемые для извлечения практической выгоды, тем лучше. *Поразительно, сколько неиспользованных возможностей скрывается в элементарных математических зависимостях. Ведь речь идет о том, как увидеть естественный смысл таких зависимостей, а не о том, как запутать математические проблемы, которые изначально были понятными и само собой разумеющимися.*

В географии есть задача о концентрации и рассредоточении населенных пунктов. Всю страну можно разделить на n квадратных ячеек, если в ней всего n населенных пунктов, затем сосчитать a_i населенных пунктов в каждой ячейке ($i = 1, 2, \ldots, n$) и образовать выражение, имеющее вид $-1 + \sum a_i^2/n$. При случайном размещении населенных пунктов это выражение близко к единице. Если оно заметно больше единицы, то существует причина для слияния таких пунктов, а если меньше единицы, то есть какая-то причина для их рассредоточения. Очевидно, что этот же простой способ позволяет также определить, является ли (и в какой степени) распределение произвольных точек (например, зернышек эмульсии на фотопленке) результатом действия сил притяжения или отталкивания. Каждый математик знаком с этой формулой, а описываемое ею понятие дисперсии известно каждому студенту, изучавшему статистику. Проблема заключается в том, что географы не знали или не сообразили, что речь идет о дисперсии и, пытаясь решить задачу распределения населенных пунктов, ввели по договоренности между собой непонятное по сути дела представление о «нормальной» удаленности населенных пунктов друг от друга. Математик сразу заметит, что так называемая нормальная удаленность не может быть определена как абсолютная константа, так как это всего лишь средняя удаленность, зато предложенная нами формула является простейшим способом определения отклонения удаленности от ее среднего значения. Единственная математическая находка при этом — выбор величины ячейки: вместо общепринятой величины (например, 1 км^2) вводится ячейка, отвечающая условию «столько ячеек, сколько населенных пунктов».

Часто приверженцам чистой математики приходится убеждать в полезности математики профанов, главным образом таких, от которых зависит выделение денег на науку[2]. При этом они часто предпочитают работать над какой-либо проблемой чистой ма-

---

[2] От редакции польского издания: Польская Народная Республика ежегодно вкладывает много миллионов злотых в развитие математических наук, а математика у нас относится к щедро дотируемым наукам. Автор статьи, несомненно, столь же далек от подозрения широких кругов в недостатке щедрости, как и от выступления против субсидирования чистой математики.

тематики, не рассчитывая на практическое применение результатов. Обычно такие руководители ссылаются на то, что созданный математический аппарат когда-нибудь найдет применение (подобно тому, как риманова геометрия пригодилась для теории относительности или теория интегральных уравнений — для спектрального анализа). Такие аргументы представляются совершенно наивными. Достаточно сосчитать, сколько математических работ появилось в прошлом в таком-то году и сколько их результатов в том же году нашло применение, и мы увидим, что долг этого оптимистического пророка перед поверившими ему профанами несравненно больше. Если даже появляются работы, связанные с применением высоких математических теорий в практических задачах, то рентабельность усилий (измеряемая экономическим эффектом) обычно оказывается ничтожной — я уже упоминал о том, что формула еще не является ответом на вопрос техника или естествоиспытателя.

Наконец, нам известен еще один эксперимент, который осуществила сама история. Наполеон I, великий поклонник математики, основал в Париже высшую школу *École Polytechnique*, в которой будущие инженеры, администраторы, а в первую очередь штабные офицеры должны были приобретать теоретические знания по математике, химии и другим фундаментальным предметам. В этой школе преподавали известнейшие математики, например Камилл Жордан и Жак Адамар. Считалось, что анализ и высшая геометрия дают выпускнику квалификацию, необходимую для всех руководящих должностей в армии, в администрации и в промышленности. Но этим надеждам не суждено было оправдаться, так как воспитание *политехников* на многотомных курсах анализа лишало их связи с действительностью. Школа выпустила много блестящих математиков, но не нашла своего места в современности и в чем-то даже дискредитировала прикладную математику, исходя из необоснованной уверенности, что «все когда-нибудь может пригодиться».

Единственным способом изучения прикладной математики является знакомство с чистой математикой, и уже это является достаточным обоснованием для обучения чистой математике, если кому-то такие обоснования необходимы[3].

Эти горькие высказывания в адрес математиков не означают, что их оппоненты правы. Обычно все сетуют на недостаток математической подготовки у естествоиспытателей, но не это является их основным недостатком. В гораздо большей степени у естествоиспытателей ощущается недостаток логической подготовки, так как постоянное пребывание в рабочем состоянии и привыкание к механическому повторению определенных лабораторных действий (что, впрочем, безусловно необходимо при получении экспериментальных данных) создают тип *узкого специалиста*. Эта ограниченность является наиболее болезненным недостатком, и уже из нее вырастает чувство отвращения к классической культуре, презрительное отношение к философии, распространенное убеждение, что мышление — это пустая трата времени. У этих поденщиков от науки изменяется даже язык. Интересно, что они любят называть себя научными сотрудниками (и, может, имеют на это какое-то право). Ведь был же назван «научным сотрудником» в одном из номеров журнала *Wszechświat* сам Исаак Ньютон!

Генри Форд имел свои взгляды на школьные программы и был убежден, что история, философия и математика (кроме четырех арифметических действий) ни для чего не нужны и даже вредны. Они на самом деле не нужны, чтобы быть работником у Форда (или даже самим Фордом), но нельзя забывать, что ни одна существенная деталь автомобиля Форда не была изобретена на его заводе. Поэтому я считаю Форда покровителем всех узких специалистов, которые приступают к делу лишь тогда, когда вся мыслительная работа проделана другими людьми. Для воспроизведения лишь одной и той же модели в количестве трех миллионов нужны совсем иные способности, нематематические. А вот во время войны теоретики часто оказывались лучше практиков, когда речь шла о решении совершенно новых задач, не имеющих прецедентов.

---

[3] Автор считал бы идеальной такую ситуацию, при которой средства в прикладную математику вкладывают те, кому она необходима, но образовавшуюся от этого прибыль направляют на развитие чистой математики.

Математика переоценена и одновременно недооценена. Математики переоценивают ее достижения, а все остальные недооценивают ее возможности. Несколько лет назад в журнале *Pediatrija Polska* появилась полемическая статья, направленная против одного из профессоров педиатрии, который использовал математику в своих исследованиях детского туберкулеза. Между прочим, в статье говорилось, что математику нельзя применять к человеческому организму, поскольку (по выражению автора) организм якобы является «многомерным», а современная математика одномерна. Отсюда делается вывод, что только «многомерная, открытая математика» (я снова цитирую полемиста), созданная Лукасевичем и Лесневским, когда-нибудь будет востребована медициной. Самое любопытное заключается в том, что именно сам нападавший на педиатра первым ввел в практику двухпараметрическую оценку реакции кожи на туберкулин и, таким образом, использовал концепцию многомерности — до него эту реакцию оценивали с помощью одного показателя, что критика совершенно не поразило. Цитирование Лукасевича всего лишь доказывает, что автор статьи перепутал трехзначную логику с «многомерной математикой», хотя трудно понять смысл этого термина. Еще труднее понять упрек в «одномерности», поскольку математика оперирует многомерными пространствами, причем даже с бесконечным числом измерений. А ведь к этому моменту библиография по данному вопросу уже содержала сотни позиций и ссылок, и автор, вероятнее всего, не отдавал себе отчета в том, что умозаключение по кривой температуры о течении болезни уже относится к прикладной математике. Автор (узкий специалист) впервые в жизни при чтении какой-то (и явно, не математической) книги узнал о многих других работах по медицине, связанных с приложениями математики к медицине. В том же номере журнала появилась еще одна статья, посвященная тому же вопросу, в которой педиатра упрекали в том, что из формулы $a = b$ следует вывод $\log a = \log b$ (очевидно упрекавший знал, что такое логарифм, но не умел рассуждать). Вот к чему приводит узкая специализация.

Путь к новым математическим идеям, действительно полезным для медиков, вовсе не должен быть связан с «многомерной математикой». Иногда следовало бы именно уменьшить число параметров. Например, если больничная статистика приводит данные о смертности, наблюдаемой при некоторой болезни, выбирая их из n случаев, то рядом с дробью p, обозначающей эту смертность, следует записывать также «среднюю ошибку» $\sqrt{pq/n}$, где $q = 1 - p$.

Врач, знакомящийся с этой статистикой, получает информацию двух видов: первая определяет смертность от болезни (показатель p), вторая связана с числом статистических данных и определяет достоверность первой (средняя ошибка $\sqrt{pq/n}$). Очевидно, что оба показателя основаны на одних и тех же наблюдениях и что второй вычислен теоретически по формуле Бернулли, но подлинным выступает лишь первый показатель, так как с ростом числа наблюдений n будет расти и показатель p. Это изменение не слишком существенно, и в конце концов его разброс станет ничтожно малым, после чего мы и получим истинный показатель смертности (одновременно средняя ошибка уменьшится практически до нуля). Очевидно, что роль второй информации здесь является второстепенной. Совсем иначе выглядит дело, если мы исследуем уменьшение числа лейкоцитов в крови больных, которым назначался пенициллин. Это снижение графически представляет ломаную линию, тенденция изменения которой может иметь возрастающий либо убывающий характер. Основной информацией является снижение s, а вторичной вновь является «средняя ошибка» b, определяющая отклонение линии от постоянного направления. При этом определяющим фактором для прогноза является частное $t = s/b$. Обе информации мы можем объединить в этом одном числе t, ибо только оно интересует практикующего врача. Если бы мы точно так же поступили со статистикой смертности, то получили бы частное, которое при увеличении числа наблюдений стремится к бесконечности. Математическая ценность и интерпретация этого факта была бы в сущности убогой, так как он всего лишь следует из того, что смертность отлична от нуля. Зато при других исследованиях (например, при изучении уровня гранулоцитов) вторая информация вовсе не является «ошибкой» первой: именно она является «истинной» и в совокупности с первой дает показатель, определяющий характер явления. Эту очень простую идею, вероятно, можно использовать не только в вышеприведенном примере.

То, что математическое образование не является самым главным в научной работе, доказывает жизнь и деятельность Р. Э. Фишера. Этот выдающийся английский генетик самостоятельно обдумал и изучил математические проблемы, возникающие в естественных науках при планировании и интерпретации статистических экспериментов. Написанная им книга была непонятна естествоиспытателям (так как в ней вводились новые и сложные понятия и методы). С другой стороны она была жестоко раскритикована математиками, как неясная и ошибочная (поскольку автор являлся математиком-самоучкой и не располагал ни терминологией, ни стилем, к которым приучали нас учебники, написанные людьми математического круга). Несмотря на это, книга *Statistical Methods for Research Workers*, благодаря содержащимся в ней математическим и методологическим мыслям, пробила окружающую стену предубеждений и выдержала 10 изданий, последнее из которых (1946 г.) было переиздано в том же году. Книга Фишера для математической статистики сделала больше, чем все учебники по этому предмету, появившиеся в тот период. Ее ценность заключается не в каких-то запутанных математических доказательствах или сложных формулах, а в правильной трактовке сущности задач. Понятие *вариации* (так ученики Фишера называют квадрат дисперсии) было, пожалуй, известно и до него, но совершенно элементарный метод, заключающийся в разложении этой вариации на части, *analysis of variance*, является заслугой Фишера. В сельскохозяйственных и многих других экспериментах этот метод имеет огромное значение.

Эра простоты не прошла. Элементарная математика может много сделать не только в естественных науках, но и в технике. Если высшая математика даже и нужна, то ее не должно быть слишком много, что можно проиллюстрировать следующим примером. В Польше существует школа линейных функциональных операций (Банах, Сакс, Мазур, Орлич и другие), безусловно относящаяся к чистой математике. Однако достаточно заметить, что понятие нормы (одно из обычно используемых в этой теории, с которого и начинается новая ветвь науки о функциональных пространствах) может быть непосредственно применено к задаче определения тарифа на электроэнергию, и это позволяет направить дискуссию о тарификации на новый путь. В общеизвестных концепциях скрываются неисчерпаемые возможности, а трудность состоит в том, что на свете мало инженеров-электриков, которые слышали о нормах функций. Впрочем, возможно, еще меньшее число чистых математиков догадываются о том, что вопрос о тарифе на электроэнергию сводится не к тому, должна ли она быть дешевой или дорогой.

Я бы хотел привести еще один пример самой простой математики, для которой достаточно сведений из общеобразовательной школы. Мальчишкам известно, что двое могут поделить между собой орехи по принципу «один делит, другой выбирает». Этот способ можно обобщить на нескольких партнеров, а также на случай, когда партнеры в неравных частях присутствуют в массе, которую необходимо разделить. Здесь только следует заметить, что задача справедливого в юридическом смысле раздела является математической, однако юрист не смог бы этого сообразить. Ему помешало бы убеждение, что в математике нет места иной концепции равенства, кроме равенства чисел (если масса складывается из штук) или половин (если масса, например, представляет собой участок земли). Юристу трудно понять, что математические суждения можно считать субъективными, и что расхождение суждений не затрудняет, а облегчает справедливое деление, хотя именно эти результаты математического мышления широко используются в обычных житейских ситуациях. Каждый из нас знает, что сущность открытия не имеет ничего общего с формулами высшей математики.

В некоторых случаях решение элементарной на вид задачи действительно бывает связано с высшей математикой, но, подобно выбору маршрута в альпинизме, можно найти и другие, более короткие пути к вершине. Даже если эти другие пути можно упрекнуть в отсутствии строгости, с ними следует считаться, чтобы не сбиться с пути. Теория вероятностей изобилует такими путями.

Но достаточно примеров, и пора перейти к выводам. Вот наши тезисы: *Прикладная математика находится в начальной стадии развития, и сегодня ей еще можно придать произвольное направление. Здесь существует огромная свобода, но надо только отдавать себе отчет в том, что математика не является набором готовых сведений, а представляет собой скорее школу мышления. Естественные, технические и общественные науки не являются лишь реестром наблюдений и экспериментов. Сотрудничество — вот суть прикладной математики. Прикладной математики как готовой доктрины не существует, и она формируется при соприкосновении математической мысли с окружающим миром, но только тогда, когда и математический дух, и природная материя находятся в состоянии развития. Надо также сознавать, что наука не только описывает действительность, но также и создает новую действительность. В этих вопросах следует каждый раз занимать активную позицию, не ожидая появления задачи, а выдвигая ее. Результаты прикладной математики в таком ее понимании могут превзойти самые смелые ожидания.*

Проблема необратимости[1]

«Может показаться дерзостью, когда кто-то попытается выдвинуть новые аргументы относительно проблемы, по которой более 80 лет продолжалась страстная полемика, причем по разные стороны стояли или предлагали противоположные решения знаменитые физики и математики — Больцман, Лошмидт, Цермело, А. Пуанкаре, Эренфест, Эйнштейн, Дж. фон Нейман, Макс Борн…, называю только тех, кто сразу приходит на ум.» Так пишет Эрвин Шрёдингер в статье *Irreversibility* (Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 53, section A, стр. 189–195, Дублин, 1950). Шрёдингер продолжает: «По моему мнению, в этом случае (как и в ряде других) появившаяся в 1925/26 году «новая доктрина» скорее затемнила, чем осветила умы…». В своей статье он предлагает некоторый новый способ спасения принципа необратимости, а «новой доктриной» называет теорию квантов. Шрёдингер выступает здесь против Борна, который от этой теории ожидает спасения спорного принципа (Макс Борн, *Natural Philosophy of Cause and Chance,* Оксфорд, 1949).

Автор настоящей статьи цитирует Шрёдингера, потому что проблему необратимости все еще можно считать актуальной, даже в рамках старой физики (т. е. физики до открытия квантов), и Шрёдингер именно на классической основе хочет защитить принцип необратимости.

Когда Дж. К. Максвелл и Л. Больцман создали кинетическую теорию газообразного состояния материи, они, возможно, не сознавали ту высокую «цену», которой пришлось оплатить про-

---

[1] Доклад *Zagadnienie nieodwracalności*, сделанный на конференции физиков в Спале в сентябре 1954 г. Настоящий текст расширен за счет ответов автора на вопросы и возражения, возникшие в процессе дискуссии.

гресс в объяснении термодинамических явлений. Прогрессом я здесь называю осуществленное ими разрушение стены, отделяющей термодинамику от классической механики, в результате чего сбылась старая мечта атомистов. Мечта заключалась в сведении явлений в сплошной материи к игре частиц, представляемых в виде упругих миниатюрных мячиков или шариков, подчиняющихся законам той механики, которую французы XVIII века называли рациональной (чтобы еще раз подчеркнуть сходство ее законов с рациональным рассуждением). Под высокой ценой я подразумеваю последовавший за этим отказ от фантастического проекта Лапласа — предсказывать будущие состояния мира по существующему, интегрируя системы дифференциальных уравнений движения, как это делают астрономы, предсказывающие будущие положения планет. Отказ был необходим, поскольку количество частиц в одном литре воздуха (при давлении 1 атм и температуре 0°) так велико, что одно составление уравнений, описывающих поведение воздуха в литровом сосуде, потребовало бы целых озер чернил. Создатели кинетической теории пошли иным путем — они расширили сферу действия статистики, которая до того использовала теорию вероятностей для описания массовых явлений в человеческих популяциях, и охватили ею «популяции», образованные из молекул. Таким образом, кинетическая теория материи свела термодинамику к механике, но не к рациональной механике. Однако никто в то время не осмелился выдвинуть против кинетической теории принцип индетерминизма. Это объясняется тем, что во времена Максвелла и Больцмана (и даже уже при жизни Смолуховского) теории вероятностей не хватало мощных основ (которые были заложены только после Первой мировой войны). Естественно, что недоразумения и противоречия не заставили себя долго ждать.

В феноменологической термодинамике важную роль играет принцип возрастания энтропии с течением времени. Он является обобщением и точным выражением многих важных экспериментальных наблюдений и явлений (например, более холодное тело не может передать тепло более теплому; после открытия отверстия в перегородке, отделяющей половину заполненного воздухом сосуда от пустой половины, происходит выравнивание давлений во всем объеме и т. п.). Э. Цермело упрекнул этот принцип в несоответствии с так называемой квазиэргодической теоремой, которую впервые сформулировал А. Пуанкаре, а позднее строго доказал К. Каратеодори, воспользовавшись теорией меры Лебега. Теорема гласит, что изолированные механические системы должны (спустя достаточно продолжительное время) стремиться к начальному состоянию, и этим свойством не обладают только начальные состояния. Лошмидт заметил, что каждой механической системе можно поставить в соответствие другую, движение которой демонстрирует киносъемка движения первой системы при прокручивании ленты в обратном направлении. Наблюдаемая при этом картина согласуется с законами механики, в связи с чем становится невозможным объяснить принцип возрастания энтропии, который ведь не позволяет определить, правильно ли была установлена лента или нет.

Сегодня нелегко обнаружить в работах Больцмана или Смолуховского аргументы, которыми они отражали обвинения Лошмидта и Цермело. Проф. Вейссенхофф считает, например, что Больцман не вполне отдавал себе отчет в ситуации, и что Смолуховский никогда не был на стороне наивных приверженцев принципа необратимости.

Как примиряли ученые той эпохи теорему о возрастании энтропии с законами классической механики, которой неизвестно отличие времени, текущего «вперед», от времени, текущего «назад»? Я не могу ответить на этот вопрос категорически, однако можно предположить, что понятие так называемого хаоса считалось (возможно, не вполне сознательно) средством спасения. Основатели кинетической теории полагали, что условием применения теории вероятностей к движению молекул является хаотичность этого движения, причем, с другой стороны, огромное число молекул и их высокая скорость в сочетании с частыми столкновениями именно и создают этот желательный хаос. Из этого делался вывод, что законы классической механики (важные для каждой молекулы в отдельности) утрачивают силу для *коллектива* молекул. Поведение коллектива начинает определяться статистическими законами, которые в действительности уже не относятся к отдельным частицам, но зато позволяют говорить о поведении некоторых средних величин (например, давления на стенки сосуда, температуры газа и т. д.).

Вера в то, что божественное желание примирить механику со статистикой будет выслушано природой, облегчала возникшую тогда неопределенность понятия «статистических законов».

Изучим игру случая на модели Шрёдингера, которая как прекрасный дидактический прием должна войти в набор школьных реквизитов. Представим себе, что в левой половине замкнутого сосуда находятся сто одинаковых и хаотически двигающихся шариков (пронумерованных от 1 до 100), а в перегородке, являющейся плоскостью симметрии сосуда и отделяющей левую половину от правой, есть отверстие, через которое эти шарики могут проскакивать, но только поодиночке.

Так называемое «колесо счастья» (вариант рулетки) имеет 100 одинаковых секторов, пронумерованных от 1 до 100. Представим себе, что шарики подчиняются законам случая и что именно такое «колесо счастья» диктует им эти законы. В некоторый момент мы приводим колесо во вращение, и если оно остановится на номере n, то шарик с номером n перескакивает через отверстие в другую половину сосуда. Таким образом, если первым, например, выпадет номер 17, то шарик с номером 17 перескочит из левой половины в правую, если же в следующий раз колесо остановится на 39, то из левой половины в правую перескочит шарик с номером 39. В учебнике теоретической физики К. Шефера можно найти диаграмму, показывающую ход эксперимента, проводимого по указанным здесь правилам. Ось времени является горизонтальной, перескоки шариков следуют друг за другом в каждую единицу времени, а по вертикали откладывается количество шариков, находящихся в данный момент в левой половине. На диаграмме отчетливо видно, как начальная сотня уменьшается, сначала быстро, а затем (по мере того как число шариков в левой части приближается к 50) все медленнее. В дальнейшем состояние левой половины (а затем и правой) незначительно колеблется около числа 50. Это школьный эксперимент, который подтверждает и одновременно объясняет принцип возрастания энтропии на изолированной модели, ибо только о таких мы можем говорить в настоящей статье.

Присмотримся ближе к этой красивой игрушке. Если в левой половине находится только 70 шариков, и, следовательно, в правой 30, то вероятность, что колесо укажет номер одного из шариков, находящихся в левой половине, равна 70/100, а то, что оно укажет номер одного из правых шариков, соответственно 30/100. Таким образом, вероятность p, что после состояния 70:30 наступит состояние 69:31, равна 70/100, а то, что наступит состояние 71:29, соответственно 30:100, т. е. значительно меньше. Это кажется доказательством возрастания энтропии, но такое доказательство является ошибочным, так как, например, для наблюдения события $70 \to 69$ необходимо, чтобы сначала в левой половине было 70 шариков, а потом 69. Фактически речь идет о переходе из состояния 70:30 к состоянию 69:31. Обе половины сосуда эквивалентны, поэтому вероятность состояния 70:30 равна $P = \binom{100}{70}(1/2)^{100}$, вероятность же перехода $70 \to 69$ (когда состояние 70:30 уже существовало), или так называемая условная вероятность, равна, как мы уже знаем, $p = 70/100$. Известное правило теории вероятностей дает вероятность Π того, что мы будем наблюдать переход $70 \to 69$:

$$\Pi = P \cdot p = \binom{100}{70}(1/2)^{100} \cdot \frac{70}{100}. \qquad (1)$$

Вычисляя аналогичным образом вероятность противоположного события, т. е. перехода $69 \to 70$, мы получим:

$$\Pi' = P' \cdot p' = \binom{100}{69}(1/2)^{100} \cdot \frac{31}{100}. \qquad (1')$$

Можно легко показать, что $\binom{100}{70} \cdot 70 = \binom{100}{69} \cdot 31$, т. е. $\Pi = \Pi'$, и следовательно, мы с одинаковой частотой будем наблюдать как событие $70 \to 69$, так и событие $69 \to 70$ (которое и соответствует первому, если прокручивать киноленту в обратном направлении). Из этого следует, что наблюдение переходов не позволит отличить правильное направление от неправильного и, значит, не позволит и определить направления времени статистическим способом. Вычисление также показывает, что начальное состояние 100:0 с вероятностью 1 будет повторяться бесконечно много раз.

Против такой интерпретации модели Шрёдингера можно выдвинуть следующие возражения. 1) Откуда мы взяли формулу, определяющую P? Эта формула была бы обоснованной, если бы мы 100 раз подряд голосовали орлом-решкой, куда следует поместить шарик номер 1, шарик номер 2,…, шарик номер 100. Между тем, описание модели этого вовсе не предусматривает: задается лишь начальное состояние сосуда (100:0), а следующие возникают в результате перехода шариков. 2) Модель Шрёдингера не отвечает тем статистическим законам, которым подчиняется сплошная среда материи, поскольку тогда необходимо было бы ввести в рассмотрение бесконечно много материальных точек, или (хотя бы из желания сохранить идеи кинетической теории, которая порывает с непрерывностью) следовало бы ограничиться перечислением бесконечного множества материальных точек. 3) Модель имеет только формальное сходство с истинным ходом событий в сосуде, заполненном молекулами, так как основана исключительно на гипотезе, что все молекулы имеют одинаковую вероятность того, что им выпадет ближайший переход.

Возражение 1) является серьезным, и мы вернемся к нему позднее. Возражение 2) подвергает сомнению не только саму модель Шрёдингера, но и всю классическую кинетическую теорию, которая не может порвать с конечными множествами молекул (как известно, эта теория в каждом конкретном процессе эффективно представляет исчислимость этих множеств). В данной статье рассматривается кажущееся противоречие между классической кинетической теорией и законами рациональной механики, и поэтому мы не можем менять основы этих доктрин. Несомненно, однако, что мы обязаны заняться рассмотрением возражений 1) и 3), для чего мы построим другую, собственную модель, на примере которой и обсудим те же вопросы, но сделаем нашу дедукцию независимой от искусственного характера модели Шрёдингера. Возможно, это позволит нам справиться как с возражениями 1) и 3), так и с многими другими, которые можно было бы выдвинуть в адрес старой модели.

Новой моделью будет ящик (коробочка) кубической формы объемом в один литр с неподвижными стенками, где мы разместим некоторое число молекул (например, 6 000 000) в определенных местах (например, на горизонтальном отрезке посредине левой стенки) и на одинаковых расстояниях друг от друга. Молекулы будут представлять собой материальные точки, пронумерованные в порядке возрастания (в начальном положении) от передней стенки до задней. Каждой молекуле мы придадим эффективную начальную скорость, являющуюся функцией от ее номера. Предполагая, что между молекулами действуют классические законы абсолютно упругого столкновения, мы сможем указать место, где в произвольно заданный момент времени находится частица с произвольно заданным номером. В конкретном примере (приведенном в одной из цитированных ниже работ) вычисления, связанные с решением этой задачи, потребуют не более четверти часа и будут элементарными. На этой модели можно доказать, что распределение частиц в точности соответствует предсказаниям кинетической теории, оперирующей классической теорией вероятностей, хотя в описании модели совершенно отсутствует предпосылка хаотичности, а формулы, описывающие движение молекул, не имеют ничего общего с теорией вероятностей. Более конкретно, это означает, что разделив коробочку на левую и правую половины (без материальной перегородки), мы сможем определить, насколько часто в левой половине будет находиться, по крайней мере, на 5% больше молекул, чем в правой. «Насколько часто» означает ту часть времени, в течение которой будет выполняться это превышение $\geq 5\%$, а часть времени следует понимать как предел при $T \to \infty$ выражения $(1/2T) \times$ [сумму длительностей интервалов времени на отрезке $(-T, T)$, в течение которых выполняется превышение $\geq 5\%$]. Заменив в этом и подобных утверждениях термин «часть времени» на «вероятность», мы получим утверждение о поведении модели, которая с помощью теории вероятностей поддерживала бы классическую кинетическую теорию, исходя из предпосылки о хаосе. При этом в нашей новой терминологии ничего не говорится о вероятности, но утверждения доказываются достаточно лаконично, а выводимые формулы совпадают с результатами классической теории. Из них можно получить все выводы кинетической теории, если принять следующее определение: вероятность того, что в произвольно выбранный момент времени наблюдатель зафиксирует состояние S, равна частоте появления состояния S (которая определяется как доля времени, в течение которой имеет место это состояние). В частности, мы получим формулу $P = \binom{N}{r}(1/2)^N$, определяющую относительную частоту состояния $(N - r):r$. Однако полученная информация будет значительно более точной, например, можно определить относительную частоту того состояния, при котором в каждом из тысячи см^3, составляющих объем сосуда, будет не менее 5940 и не более 6060 частиц.

Каким образом это можно доказать? Запишем через три функции времени $x_n(t)$, $y_n(t)$ и $z_n(t)$ координаты n-й молекулы в момент t, что нетрудно сделать, просто расположив оси x, y, z вдоль ребер ящика. Разумеется, в этих формулах фигурируют и заранее заданные составляющие ξ_n, η_n и ζ_n, соответствующие начальной скорости n-й молекулы. Предполагается, что эти составляющие арифметически независимы, т. е. уравнение

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n\xi_n + b_n\eta_n + c_n\zeta_n) = 0 \qquad (2)$$

с целыми коэффициентами a_n, b_n, c_n выполняется только при задании нулевых значений всем a, b, c. В этом случае можно доказать независимость системы из $3N$ функций, описывающих движение всей совокупности N частиц. Свойство независимости (точнее стохастической независимости) для двух функций $f(t)$, $g(t)$ определяется соотношением

$$|\underset{t}{E}(f(t) < a, g(t) < b)| = |\underset{t}{E}(f(t) < a)| \cdot |\underset{t}{E}(g(t) < b)|, \qquad (3)$$

которое должно выполняться для всех чисел a и b, где $E(W)$ означает частоту состояния, выраженного условием W. Математическая запись $\underset{t}{E}(W)$ означает множество значений t, при которых выполняется W, а E обозначает *относительную* меру множества E на интервале $(-\infty, \infty)$. Взаимная независимость $3N$ функций системы, требуемая в нашей задаче, выражается формулой типа

(3), в которой везде используются произведения не двух, а трех сомножителей. Независимость действительно имеет место, что можно доказать с помощью критерия М. Каца (см. Studia Mathematica VI (1936), стр. 46–58) из теории независимых функций, предполагая арифметическую независимость начальных скоростей, которую мы уже оговорили выше. Дальнейшие рассуждения подобны тем, которые можно найти в учебниках по теории вероятностей и которые отличаются только интерпретацией.

Переходя к более детальному обсуждению нашего метода, необходимо отметить характерные свойства нашей модели: α) ее свойства вытекают из уравнений движения молекул (в смысле рациональной механики) путем полной математической индукции; β) вывод этих свойств сделан без помощи теории вероятностей; γ) модель является полностью детерминированной в смысле Лапласа; δ) модель позволяет получить все те характеристики, которые классическая кинетическая теория пыталась вывести с помощью теории вероятностей (безотчетно отказавшись от принципа детерминизма в физике). Наконец, мы утверждаем, что эта модель является изолированной, а следовательно, ограниченной в пространстве и не подверженной внешним силам.

Этих свойств достаточно, чтобы опровергнуть кажущееся противоречие между кинетической теорией и ньютоновским детерминизмом, а также указать на ошибочность принципа необратимости, хотя бы только в отношении изолированных систем. Действительно, частота событий, состоящих в том, что все молекулы находятся в левой половине сосуда, равна $(1/2)^{6\,000\,000}$, из чего следует, что общее время нахождения в этом состоянии является бесконечно большим, что явно противоречит принципу необратимости.

Сейчас самое время предоставить слово оппоненту, который выдвигает следующие обвинения:

(а) Полностью ли проведено доказательство? (б) Каков физический смысл предположения о независимости начальных скоростей? (в) Какие ограничения наложены на значения начальных положений? (г) На чем основан аргумент, что молекулы бесконечное число раз будут собираться в левой половине сосуда?

(д) Не связаны ли приведенные нами свойства модели с кубической формой сосуда, т. е. не являются ли они исключением для реального мира, в котором такие идеальные формы никогда не встречаются?

Легче всего дать ответ на первый вопрос. Доказательство можно найти в работе, опубликованной в 1953 г. (XIII том Studia Mathematica, стр. 1–17) под заголовком *Sur les fonctions indépendantes* (X), которая является третьей в серии статей о поведении множества точек в сосуде кубической формы. Первая из статей (Studia Math. IX, 1948, стр. 1–20) посвящена описанию поведения центра массы множества точек при допущениях, идентичных принятым в нашей модели. Из нее следует, что осцилляция центра массы относительно центра куба подчиняется закону Гаусса–Лапласа из теории вероятностей (если придать этому закону определенную выше частотную интерпретацию). Вторую работу (S. M. XII, 1951, стр. 170–180) Эгервари и Туран написали для опровержения одного возражения, не фигурировавшего в приведенном выше перечне (а)–(д). Этому же посвящена также третья статья (хотя она не появилась бы, если бы венгерские математики своевременно опубликовали свою работу). Рассматриваемая в них проблема связана с тем, что частота событий, определенная в обеих моих работах, не изменится, если произвольным способом изменить движение модели на любом конечном интервале времени (например, охватывающем миллиард лет). Это означает, что мы можем не дождаться наблюдения даже таких состояний модели, которые (по нашим же вычислениям!) должны появляться с частотой 99%. Упомянутые венгерские математики также смогли оценить время ожидания конкретного события (например, выравнивания числа молекул в обеих половинах сосуда) с ошибкой менее 5%. Мы еще вернемся к этому вопросу, но сейчас заметим, что данная проблема весьма характерна и для классической кинетической теории, где 99%-я вероятность, определенная для какого-либо состояния, также не гарантирует, что мы когда-нибудь в жизни его увидим.

В вопросе (б), относящемся к физическому смыслу предположения о независимости начальных скоростей, скрывается следующее обвинение: условие независимости, определяемое неразрешимостью (2), может выполняться для какого-то набора скоростей, но не выполняться для другого, близкого набора. Поскольку физические наблюдения никогда не являются абсолютно точными, то независимость никогда не удастся подтвердить. На это я отвечу, что условие независимости почти всегда выполняется в пространстве ($\xi_1,\ldots, \zeta_N$), а это значит, что множество точек того пространства, которое соответствует зависимым начальным скоростям, имеет нулевую (по Лебегу) меру, и следовательно, вероятность появления такого начального состояния равна нулю. Ввиду этого именно с физической точки зрения было бы правильным принять, что независимость имеет место всегда. Если бы, однако, этот аргумент вызывал сомнения, то мы должны были задуматься над созданием модели, учитывающей взаимную зависимость начальных скоростей. Примером этого является набор точек с горизонтальными начальными скоростями. Очевидно, что тогда число молекул в левой половине куба является неизменным, и выравнивания не наступит, если его не было вначале — таким образом, в данном случае принцип необратимости не действует. Правда, этот пример зависимости (2) является простейшим, но нет никаких оснований предполагать, что связь начальных скоростей зависимостью (2) в иных случаях сохранит необратимость.

Эгервари и Туран от обвинения (б) защитились иначе: в их работе начальные скорости также связаны некоторыми условиями, но эти условия выражены с помощью неравенств, а, значит, путем наблюдений можно подтвердить, что в конкретном физическом примере они выполняются. Выполняются же эти условия только в некоторой части пространства ($\xi_1,\ldots, \zeta_N$) начальных скоростей.

Ответ на вопрос (в) заключается в том, что начальные положения являются произвольными в предположении, что столкновения невозможны. Если же мы не хотим делать такое предположение, то должны исключить определенные начальные положения, что приведет к исключению некоторых точек в $6N$-мерном фазовом пространстве ($x_1,\ldots, z_N,; \xi_1,\ldots, \zeta_N$), совокупность которых в этом пространстве образует множество с нулевой мерой. Как заметили Эгервари и Туран, можно обойтись без этого ущемления общности начального состояния, если допустить, что в момент соударения материальных точек происходит изменение векторов скорости. Это ослабляет условие определенности движения, но мы можем все же еще использовать предшествующие вычисления для определения положения k-й молекулы в момент t. Действительно, в вычисленном месте в указанный момент оказывается молекула, но это не обязательно будет молекула с тем же номером k.

Вопрос (г) касается отдельных координат $\{x_n\}$ молекул. Одной лишь арифметической независимости скоростей ξ_n достаточно для доказательства того, что относительная частота события, определяемого одновременным выполнением N неравенств $0 < x_n < 1/2$ ($n = 1, 2,\ldots, N$), равна $1/2^N$. Из этого следует, что никогда вся масса газа не перестанет возвращаться в левую половину сосуда, в связи с чем возникает вопрос о том, можно ли считать нашу модель эквивалентом игрушки в виде колеса счастья или рулетки? Введем, например, запрет на одновременное прохождение двух молекул сразу через плоскость $x = 1/2$, делящую куб пополам. В этом случае мы можем говорить о последовательности событий $Z_1, Z_2,\ldots, Z_k,\ldots$, заключающихся в поочередных переходах через эту плоскость. Математическая формулировка этой проблемы сводится к тому, соответствует ли в последовательности $\{Z\}$ частота переходов слева направо игрушке Шрёдингера? Точнее говоря: если бы в сосуде находилось 100 молекул, то была бы частота события $70 \to 69$ в последовательности $\{Z\}$ равна вероятности Π, определяемой выражением (1)?

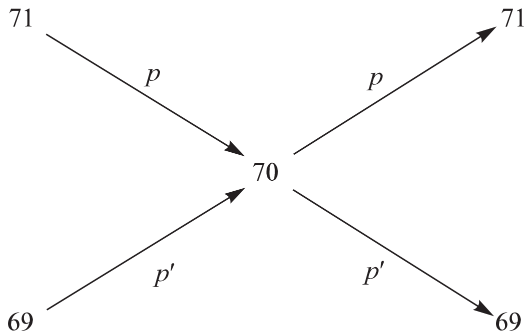
Положительный ответ позволил бы сразу опровергнуть все возражения 1) – 3) в адрес модели Шрёдингера. К сожалению, ответ является отрицательным, что легко видеть на примере 100 молекул, одна из которых (например, молекула номер 37) имеет горизонтальную составляющую скорости в тысячи раз большую, чем остальные молекулы. В этом случае в каждом состоянии сосуда чаще всего будет происходить переход этой молекулы из одной половины в другую. Следовательно, переход будет происходить не из той половины, где больше частиц, а (что самое важное для нашей модели) из той, в которой находится частица под номером 37. Замена модели Шрёдингера на механическую, таким образом, не является прямой, и неизвестно, осуществима ли она вообще. Следовательно, наиболее востребованной оказывается новая модель.

Перейдем к вопросу (д). Кубическая форма сосуда существенна, и к ней можно было бы свести, например, параллелепипед, но оппоненты, пожалуй, имеют в виду не это. Представим себе сферический сосуд, содержащий N молекул с такими начальными положениями и скоростями, что ни одна прямая, проведенная через начальное положение молекулы в направлении ее начальной скорости, не проходит через центр сферы. Вообще говоря, это предположение выполнимо (в фазовом пространстве положений и скоростей множество точек, не удовлетворяющих этому условию, имеет нулевую меру), из чего немедленно следует, что существует сфера (концентрическая с исходной), внутрь которой никогда не попадет ни одна молекула. Поэтому в данной системе никогда не возникнет близкое к равномерному распределение, что означает нарушение принципа возрастания энтропии. Другие геометрические формы (например, тетраэдр) также порождают большие математические трудности. Даже в кубе, разделенном пополам материальной мембраной ($x = {}^1/_2$) с отверстием (например, квадратным), рассмотрение поведения газа требует серьезных математических средств, и пока не удалось доказать, что множество точек в таком сосуде подчиняется тем же статистическим законам, которые мы ввели для исходного куба.

Основное обвинение сводится к тому, что куб представляет собой идеальную геометрическую форму, не существующую в природе. С другой стороны, в природе нет также точечных и абсолютно упругих молекул. Таким образом, идеализация реальности в нашей модели не отличается от общепринятой в классической механике (а за ней и в теоретической физике на разных этапах ее развития). В дискуссии по поводу возрастания энтропии ни одна из сторон *pro* и *contra* этого обвинения не оказалась пока победителем. Отсутствие идеальности (или свойство неидеальности) имеет негативный характер, и неизвестно, что из него вытекает, так что у нас нет никаких оснований предполагать, что рассмотрение сосудов со стенками неправильной формы и молекул с конечными размерами, сталкивающихся не по центру, будет приводить к необратимости в поведении систем.

Подытоживая полученные результаты, можно утверждать, что существует некая модель, определенная присущим классической механике способом, движение которой предопределено не только принципиально, но и эффективно, и которая (как и другие модели подобного рода) не позволяет по наблюдению ее движения указать направление течения времени. Однако при описании движения центра массы и распределения частиц модель ведет себя в соответствии с теми утверждениями, которые кинетическая теория выводит из теории вероятностей. В связи с этим возникает совершенно «нейтральный вопрос» о том, существуют ли иные модели, поведение которых имеет существенно иной характер? Пример рассмотренной выше системы опровергает обманчивое представление о том, что якобы в кинетической теории скрываются секреты, позволяющие теоретически защитить принцип необратимости. Наша модель не выходит за рамки формул этой теории, но является совершенно иной по построению. Все другие механические модели, созданные до сих пор, ведут себя подобно модели в виде куба либо иначе (но в последнем случае все они вступают в противоречие с принципом необратимости). На теоретическом обосновании этого общего явления должны быть сосредоточены усилия математиков. Наш вывод не является повторением замечания Лошмидта, а представляет собой общее суждение, касающееся статистической механики.

Иногда приведенную выше модель, как и модель Шрёдингера, критикуют за то, что в ней выполняется неравенство $p > p'$ для вероятностей p и p', определенных выражениями (1) и (1′). Возражение связано со следующим обстоятельством. Ограничиваясь в нашей модели, например, состояниями 70:30 и изучая частоты переходов $70 \to 69$ и $70 \to 71$, мы обнаружим, что первые происходят чаще. Из этого мы делаем вывод, что более «поздние» состояния действительно являются более поздними, и считаем, что таким образом мы можем определить направление течения времени (если же наблюдение даст обратный результат, то и заключение будет обратным). Подобное рассуждение, однако, основано на софизме, так как вычисления соответствуют следующей ситуации:



Вероятность того, что состояние 71 предшествует 70, равна p (точно так же, как вероятность того, что состояние 69 предшествует 70, равна p'), из чего следует, что второй наблюдатель, который смотрит фильм в обратном направлении (относительно первого), пользуясь тем же критерием, также будет считать намотку ленты (и последовательность событий) правильной. Другими словами, независимо от способа намотки ленты, переход $70 \to 69$ всегда будет наблюдаться чаще, чем переход $70 \to 71$.

Последний аргумент *contra* исходит от практиков. Если с помощью поршня сжать газ в левой половине цилиндра, а потом резко вернуть поршень в исходное положение, то газ немедленно заполнит весь цилиндр. Процесс является необратимым, так как газ сам никогда не может скопиться в левой половине.

Скажем проще: экспериментаторы предлагают описывать переход от неравновесного распределения к равновесному просто положением стрелок часов (минутная стрелка относится к неравновесным состояниям, часовая к равновесным). Но суть аргумента заключается в том, что экспериментатор считает сжатие подготовкой и только после этого «поднимает занавес» и начинает наблюдать и описывать явления. Если же мы начнем наблюдения с самого начала, то увидим следующую последовательность распределений: «равномерно — неравномерно — равномерно», и введенное правило дает две стрелки, направленные противоположно. В сущности, экспериментатор в момент ввода поршня в цилиндр сам стал одной из частей физической системы, а потом отделился от нее и велел нам наблюдать другую часть, что явно нарушает постулат об изолированности системы. Когда экспериментатор говорит, что можно начинать наблюдение в произвольный момент (игнорируя все, что было до этого), он делает *petitio principii* (с латинского: аргумент, основанный на выводе из положения, которое само еще требует доказательства). Само право игнорирования прошлого уже подразумевает возможность как-то выделить перед экспериментом ту половину «временнóй полуоси», которой соответствует прошлое. Однако если кто-то умеет отличать ее от «полуоси будущего», то он может вообще обойтись без эксперимента! Таким образом, этот аргумент не имеет ничего общего с экспериментом. В действительности ни у кого не возникает трудности с определением направления времени в повседневной жизни, но это определение основано на биологическом различии между новорожденным и покойником, а не на исследовании механизмов.

Можно спросить, какое в связи с этим практическое значение имеет принцип необратимости. Могут ли инженеры утверждать, что сталь, вытекающая из доменной печи, остынет, и на чем основана их уверенность? Ответ сводится к тому, что далекие от равновесия состояния являются очень редкими (как показывает и наша кубическая модель) как в прошлом, так и в будущем. Поэтому мы можем смело не только предсказать, что вытекающая сталь остынет, но даже и то, что она будет такой же холодной, как окружающая среда (этой формулировкой я обязан проф. Марчевскому). При этом нельзя забывать, что все сказанное относится лишь к моделям и механизмам, изолированным в пространстве (но неизолированным во времени!). Пространственная изоляция запрещает человеку вмешиваться в эксперимент и, следовательно, объединять данный механизм с другими (хотя бы на момент), а неизолированность во времени означает запрещение обрезать временную ось, т. е. наблюдение должно распространяться в обе стороны времени.

Вернемся к работе Шрёдингера, с цитирования которой началась наша статья. Автор предлагает следующий аргумент в защиту необратимости. Предметом наблюдения являются две системы U_1 и U_2 , которые являются неизолированными в моменты времени t, предшествующие a и следующие за b, но изолированными в моменты времени между a и b. Обозначим энтропии системы U_1

в моменты a, b через E_{1a} и E_{1b} (аналогично через E_{2a} и E_{2b} обозначим энтропии системы U_2 в те же моменты). Принцип энтропии по Шрёдингеру гласит, что разности $(E_{1b} - E_{1a})$ и $(E_{2b} - E_{2a})$ всегда имеют один и тот же знак. Если они обе положительны, то момент b наступает позже a, а если обе отрицательны, то b предшествует a. К сожалению, автор настоящей статьи не понимает содержащегося в цитированной работе доказательства.

В заключение я хотел бы поблагодарить всех тех участников конференции физиков в Спале в сентябре 1954 г., которые в различных дискуссиях позволили мне сформулировать, а часто и уяснить для самого себя разнообразные аспекты предмета настоящей статьи.

Теория вероятностей как инструмент исследований в естествознании и производстве[1]

I. Введение

В XX веке теория вероятностей повторила судьбу геометрии XIX века. К тому времени, когда Д. Гильберт в своей работе Grundlagen der Geometrie придавал окончательную логическую форму открытиям Гаусса, Лобачевского и Бойяи-младшего (а позднее, Бельтрами, Паша, Клейна и Пуанкаре), теория вероятностей была обоснована ничуть не лучше, чем при Лапласе. В ее рамках теоремы чистой математики, приближенные формулы, эмпирические правила и вольно трактуемые статистические данные объединялись в нечто, что скорее заслуживало название умения, чем математической науки. Перед Первой мировой войной никто не знал, можно ли теорию ошибок (давно используемую в геодезии, астрономии и физике) обосновать математически или она также является лишь средством описания экспериментов и наблюдений, хотя математические познания таких создателей этой теории, как Гаусс, Бессель и Хелмерт, были весьма глубоки.

Перед Первой мировой войной никто также не отдавал себе отчета и в том, что утверждения теории вероятностей являются истинными, а не правдоподобными. Формулировка закона боль-

---

1 Статья *Rachunek prawdopodobieństwa jako narzędzie badań w przyrodoznawstwie i produkcji*, написанная в сотрудничестве с Т. Чеховским, М. Фишем, О. Ланге, Я. Одерфельдом и В. Садовским, была представлена в виде доклада на VIII Съезде польских математиков в Варшаве 9 сентября 1953 г., печатается по материалам, предоставленным оргкомитетом Съезда.

ших чисел в учебнике Э. Чубера (наиболее полном и самом популярном у немецкоязычных читателей) имела смысл какого-то неопровержимого закона, хотя автор, подобно всем современным ему специалистам в этой области, умел доказывать только простейший закон вероятности (закон Бернулли). Для игры в орла и решку сильный закон больших чисел равносилен теореме Бореля о двоичных формах, которая появилась на несколько лет раньше упомянутого учебника, но и сам Борель этой эквивалентности не заметил. Подобно всем остальным, он тогда полагал, что теория вероятностей представляет собой доктрину о весьма своеобразных объектах, а свойства двоичных форм относятся только к обычным действительным числам. Смысл сильного закона больших чисел первым осознал Кантелли, который и доказал его в 1916 году. В 1917 г. независимо от него то же самое осуществил С. Мазуркевич, один из трех создателей варшавской математической школы (из-за войны он не знал о публикации Кантелли).

Таким образом, процесс развития теории вероятностей докатился до Польши только после Первой мировой войны. До этого учебник Госевского, включающий обстоятельную библиографию, олицетворял у нас ту же самую эпоху, что и Чубер в Германии. Из наиболее самобытных основоположников теории вероятностей в Польше следует упомянуть В. Борткевича и М. Смолуховского. Борткевич постоянно проживал в Берлине и был мало известен в нашей стране, но именно он первым указал на применения закона Пуассона, который он назвал законом малых чисел. Общеизвестно, что Смолуховский значительно продвинул идеи Максвелла и Больцмана (кинетическую теорию материи) на основе теории вероятностей и применил ее к броуновскому движению, опалесценции и другим задачам оптики и термодинамики. Он занимался также парадоксами этой теории, известными по именам Цермело и Лошмидта.

Пребывание Смолуховского в течение нескольких лет во Львове, конечно, оказало влияние на местных математиков, но лишь после войны в Fundamenta Mathematicae (в IV томе, 1922 г.) появились две работы по теории вероятностей. Автор первой из них, А. Ломницкий предлагает определение вероятности с помощью интеграла Лебега и пытается придать понятию независимости случайных величин математический характер. Автор другой работы, Г. Штейнгауз впервые вводит ряды случайных величин и понижает аксиоматику конечной последовательности бросания монеты (орел-решка) до аксиоматики меры Лебега. Характерно, что ни один из этих авторов в то время не был знаком с работой Кантелли, хотя во второй работе сильный закон больших чисел доказан более строго, чем было известно. Вскоре, однако, обе работы были превзойдены двумя представителями московской школы: А. Хинчин доказал и опубликовал в Fundamenta Mathematicae теорему о повторном логарифме, т. е. привел наиболее строгую формулировку закона больших чисел применительно к альтернативе орел-решка, а А. Колмогоров опубликовал фундаментальную работу об основах теории вероятностей, в которой была приведена программа математизации теории вероятностей.

Эти исторические воспоминания имеют целью показать роль польской математики и разъяснить текущее состояние теории вероятностей и ее практических приложений в нашей стране. Несколько раз случалось, что на короткое время самые современные идеи этой науки расцветали именно у нас, но дело никогда не доходило до создания сильной школы по двум причинам. Прежде всего, притягательная сила варшавской школы вовлекала в свою орбиту значительную часть молодых математиков и делала их безразличными ко всему, что не относилось к теории множеств. Второй причиной позднее стала неясная политическая ситуация в стране, которая в 1939 году обернулась трагедией. В Варшаве параллельно с С. Мазуркевичем теорией вероятностей занимался только А. Райхман. Во Львове Ломницкий-младший и С. Улам опубликовали в парижских Comptes Rendus заметку о вероятности применительно к оценке продуктов, которая имела значение для математического обоснования теории вероятностей, а начиная с работы М. Каца в Studia Mathematica стала публиковаться серия статей о независимых функциях. Позднее А. Зигмунд и Ю. Марцинкевич привели вариант закона повторного логарифма, который стал сенсационным ввиду своей парадоксальности. В Варшаве и Пулавах развернулась статистическая школа Е. Сплавы-Неймана. Перед войной эмигрировали М. Кац, С. Улам и Ломницкий-младший, а также

Е. Сплава-Нейман и его ученик В. Козакевич; где-то в начале войны погиб Ю. Марцинкевич; от рук гестапо погибли Ломницкий-старший и А. Райхман. После войны в стране осталась только горстка математиков, и сегодня можно по пальцам пересчитать тех, кто владеет теорией вероятностей и ее практическими приложениями.

Тем временем строительство нашего государства поставило перед нами задачи, превышающие возможности этой небольшой горстки людей. Диспропорция между их возможностями и необъятностью задач делает нереальной любую программу математических исследований, относящуюся ко всей области вероятностной проблематики.

Ниже мы кратко представим современное состояние теории вероятностей и ее важнейших применений, направление их развития, а также постоянно расширяющийся круг математических средств, используемых теорией вероятностей и ее приложениями. Особое внимание мы обратим на достижения польских математиков и постараемся выявить все предложения, касающиеся задач, стоящих перед ними в области теории вероятностей. Мы также остановимся на том, что надо сделать для подготовки специалистов, которым можно было бы доверить не только обучение молодежи, но и внедрение известных статистических методов в промышленность, торговлю, естественные науки и медицину. Наиболее трудными являются вопросы подготовки людей к решению конкретных практических задач, не подпадающих под типовые схемы, а также преодоление недоверия, которое традиционно питают к математикам практики и руководители, привыкшие к эмпирическому подходу. Таким людям знахарство (под знахарством мы подразумеваем некритическое рутинное мышление) порой представляется более уместным, чем разумное поведение.

II. Теория независимых функций и их применение в механике и физике

К теоретическим достижениям польской науки можно отнести теорию независимых функций, в особенности теорию степенных рядов со случайными коэффициентами. Можно отметить первую правильную формулировку теоремы Бореля о таких рядах (Math. Zeitschrift, 31, 1929), а позднее и окончательное подтверждение Ч. Рылл-Нардзевским (в XIII томе Studia Math., 1953) гипотезы Блекуэлла, что позволило получить полное решение задачи Бореля в случае независимости коэффициентов. Большую роль в развитии теории вероятностей именно в этом направлении сыграло знание и использование меры и интеграла Лебега, чем мы обязаны В. Серпиньскому, С. Банаху, А. Тарскому и С. Саксу. Поэтому задачи из теории эргодических и стохастических процессов попали на подготовленную почву, о чем свидетельствуют многочисленные результаты, полученные в последние годы Э. Марчевским, Ч. Рылл-Нардзевским, С. Хартманом, К. Урбаником и другими. Однако задачи, связанные с понятием реализации случайной последовательности, на этом не заканчиваются. У Мизеса это понятие еще является математически нестрогим, у нас же такой последовательности было дано строгое определение (см. работу о независимых функциях в XI томе Studia Mathematica, 1950). Из этого определения следует, что примером реализации является последовательность цифр двоичного представления абсолютно нормального числа, приведенная значительно раньше В. Серпиньским.

Введение случайных функций позволяет трактовать случайные величины в качестве функций вспомогательной переменной *t*, а затем показать, что в физике могут существовать функции времени *t*, придающие течению процессов независимость в стохастическом смысле, т. е. в смысле Колмогорова. Эти результаты удалось получить благодаря тому, что у нас было конкретизировано понятие независимости, констатирующее, например, что взаимно независимыми являются две функции Пеано, определяющие кривую, заполняющую квадрат, и что независимыми являются (в пределе, стремящемся к бесконечности) гармонические функции с несовпадающими периодами. Это обстоятельство ведет к новой интерпретации теории вероятностей, поскольку считая вспомогательной переменной время *t*, можно теперь применять теоремы теории вероятностей к некоторым механическим моделям, полностью лишив их случайного характера. Наглядным примером может служить модель кубической коробки, в которой множество материальных точек отражается от стенок в соответствии с классическим законом равенства углов при отражении. Результаты, которые эта модель позволяет получать относительно взаимодействия частиц и движения центра массы, полностью совпадают с расчетами по теории вероятностей, но их вывод имеет совершенно иной характер. В то время как классическое решение задачи основано на постулатах (которые невозможно доказать ни в математике, ни в механике), в новой модели используются только математический анализ и свойства движения в отсутствие внешних сил, а вместо вероятностей событий вычисляются частоты их появления во времени.

Кроме того, эта модель демонстрирует соответствие детерминистской механики (для каждой частицы с эффективно определенной траекторией) таким статистическим явлениям, как положение центра массы и т. п. Важность этого результата состоит в том, что ранее непротиворечивость таких аспектов описания принималась на веру без доказательства. Полученные результаты можно найти в X, XII и XIII томах Studia Math. В X и XIII томах приведены работы Г. Штейнгауза, а в XII — статья венгерских математиков Э. Эгервари и П. Турана, основанная на другой методике и появившаяся под влиянием первой из упомянутых, позволяющая оценить время, необходимое для приближения газа к равномерному распределению по объему. Идя по этому пути, можно надеяться на отказ в будущем от специальной формы резервуара и получение когда-нибудь без применения теории вероятностей всего того, чем гордится кинетическая теория материи XIX и начала XX веков. Однако даже описанная специальная модель достаточна, чтобы показать справедливость обвинений Лошмидта и Цермело и продемонстрировать, что классический способ обоснования второго закона термодинамики с помощью теории вероятностей является ошибочным. Уточнение модели, о которой шла речь, должно охватывать также пространственные (т. е. не точечные) частицы.

Рассмотренный пример приводит и к задаче турбулентности, или вихревого движения жидкости. В теории турбулентности уравнения Навье–Стокса соответствуют законам Гей-Люссака и Ван-дер-Ваальса классической (т. е. феноменологической) термодинамики, и следовательно, в ней также необходимо сделать те два шага, которые были осуществлены в теории газов за XIX и XX века. Я подразумеваю создание стохастической теории турбулентности, основанной на случайном поведении частиц жидкости, а затем (по образу и подобию того, что удалось сделать в частном случае с множеством частиц газа) отказ в теории от вероятностных концепций. Такая задача является несравненно более сложной, поскольку в жидкости частицы находятся гораздо ближе друг к другу, чем в газе (вследствие чего их размерами нельзя пренебрегать), и модель газа в виде идеальных точечных частиц становится нереалистической и неэффективной.

III. Классические задачи теории вероятностей

Уже во введении к этой статье мы в общих чертах обрисовали развитие проблематики, связанной с законами больших чисел. Современное состояние этой проблемы включает две основные теоремы Колмогорова о сильном законе больших чисел и его же теорему о повторном логарифме, обобщающую результаты А. Хинчина. До сих пор известны только достаточные условия для применения сильного закона больших чисел, однако эти условия не являются необходимыми, известные же до сих пор необходимые условия не являются достаточными. Проблематика законов больших чисел составляет фрагмент общей теории предельных распределений сумм случайных переменных, к наиболее старым результатам которой относятся теоремы Муавра–Лапласа и Пуассона о границах биномиального распределения, а также законы больших чисел Бернулли и Пуассона. В этих теоремах речь идет о предельном распределении стандартизированных сумм независимых случайных величин, в которых каждая может с известной вероятностью принимать два значения. Предельными распределениями здесь соответственно являются: нормальное, Пуассона и унимодальное.

Долгие годы многие математики размышляли над проблемой нахождения необходимых и достаточных условий того, чтобы последовательность распределений стандартизированных сумм случайных величин сходилась к распределению Гаусса при увеличении числа слагаемых до бесконечности. Решение этой задачи облегчило введение в теорию вероятностей характеристических функций, однако было ясно, что класс возможных предельных распределений сумм случайных величин не ограничивается нормальным, пуассоновским и унимодальным распределениями. Более того, во многих задачах (например, физических) получаются распределения с бесконечной дисперсией. К тому же возник вопрос о возможных предельных распределениях сумм, нормированных не стандартным методом.

Проблема предельных распределений сумм случайных величин, таким образом, требовала новой, общей формулировки. Эта проблема была решена А. Хинчиным, который ввел так называемые двойные суммы вида

$$\xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

в которых слагаемые ξ_{nk} являются независимыми, однако могут изменяться вместе с n, причем отдельные слагаемые ξ_{nk} играют все меньшую роль при возрастании их числа до бесконечности (ξ_{nk} является бесконечно малым). Стандартизированные суммы, рассматриваемые ранее в центральных предельных теоремах, а также средние арифметические в законах больших чисел представляют особый случай сумм вида (1). Общая формулировка задачи сводится к:

(А) нахождению класса возможных предельных распределений сумм (1),

(Б) нахождению необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять распределения переменных ξ_{nk} для того, чтобы последовательность распределений сумм (1) сходилась к данному распределению.

Поставленные задачи были решены с помощью введения в теорию понятия о бесконечно делимых переменных, т. е. переменных, которые для произвольного натурального n могут быть представлены в виде суммы n независимых случайных величин с одинаковыми распределениями (частным случаем бесконечно делимых являются нормальная и пуассоновская случайные величины). При этом следует заметить, что согласно теореме Крамера, если нормальная случайная величина является композицией конечного числа величин, то эти величины имеют нормальное распределение. Аналогичную теорему для пуассоновских величин доказал Д. Райков.

Теория распределений бесконечно делимых, возникшая на основе исследования однородных стохастических процессов, оказала глубокое влияние на теорию предельных распределений сумм независимых случайных величин. Основную роль в ней играет теорема Гнеденко, позволяющая исследовать предельные распределения сумм независимых случайных величин с помощью границ соответствующей последовательности распределений бесконечно делимых случайных величин.

Задача (А) была решена А. Хинчиным, который нашел, что класс предельных распределений сумм (1), в которых слагаемые ξ_{nk} являются бесконечно малыми, совпадает с классом распределений бесконечно делимых переменных. На основе упомянутой теоремы Гнеденко были получены необходимые и достаточные условия сходимости последовательности распределений сумм (1) к данному распределению. Упомянутая теорема Линдеберга–Феллера вытекает из вышеприведенных теорем в качестве непосредственного следствия.

Ограничиваясь нарастающими суммами, т. е. суммами вида

$$\zeta_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \right) / B_n - A_n, \tag{2}$$

П. Леви нашел класс всех возможных предельных распределений, так называемый класс L. Как показали А. Хинчин и П. Леви, если все ξ_k в (2) имеют одинаковое распределение, то единственно возможными распределениями сумм (2) являются устойчивые распределения, т. е. такие, для которых сумма двух произвольных независимых линейных функций случайной переменной с устойчивым распределением представляет собой линейную функцию переменной с таким же распределением.

Следует заметить, что нормальное распределение является единственным устойчивым распределением с конечной дисперсией, что и объясняет доминирующую роль этого распределения в приложениях теории вероятностей. Кроме этого, известны еще два устойчивых распределения: одним из них является распределение Коши, другим — предельное распределение, которое получается при «блуждающем движении» молекулы по прямой линии.

Несмотря на то, что описанная теория предельных распределений сумм является весьма продвинутой и развитой, здесь все же имеются и нерешенные задачи. В частности, дальнейшее исследование устойчивых распределений с целью эффективного их определения имеет не только теоретическое значение, но и полезно для практических приложений.

Из новейших исследований в области предельных распределений сумм отметим следующие:

1. Результат А. Реньи, который нашел необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность сумм независимых целочисленных случайных величин сходилась к распределению суммы независимых величин Пуассона.

2. Результат М. Фиша, который нашел класс всех возможных предельных распределений сумм независимых r-мерных случайных величин с одинаковым распределением. Оказалось, что кроме равномерного распределения к этому классу принадлежат только нормальное распределение, распределение Пуассона, а также композиция двух последних, включающая самое большее $r - 1$ слагаемых.

Отдельную проблему в области предельных распределений сумм представляет уточнение предельных теорем путем указания точности асимптотических формул, что имеет существенное значение для применения результатов теории предельных распределений сумм. Из наиболее важных результатов здесь следует упомянуть теоремы Ляпунова–Крамера и Эссена, касающиеся точности асимптотических формул в интегральной и локальной предельных теоремах.

О степени актуальности этой проблематики может свидетельствовать то, что в последнее десятилетие появились две работы С. Бернштейна и У. Феллера, уточняющие теорему Муавра–Лапласа.

Более широкого интереса эта проблематика в Польше до сих пор не пробудила. Некоторых результатов добился М. Фиш.

Фундаментальными работами в области предельных распределений сумм зависимых случайных величин считаются работы С. Бернштейна. Этой же проблемой применительно к эквивалентным (в смысле Кантелли) зависимым переменным занималась Г. Милицер-Гружевска. Как с теоретической, так и с практической точки зрения было бы желательно расширение исследований кроме сумм независимых и зависимых случайных величин также и на их функции.

IV. Стохастические процессы

За последние двадцать лет истории теории вероятностей не только были созданы математические основы (А. Колмогоров) и проведены богатые результатами исследования по предельным распределениям сумм случайных величин, но также возникла новая ветвь теории вероятностей под названием «стохастические процессы». В этой области (теоретические основы которой заложил А. Колмогоров) теория вероятностей в невиданных ранее масштабах заимствует много полезного из понятий и аналитического аппарата других математических дисциплин (главным образом теории дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, теории рядов Фурье, а также функционального анализа), выдвигая одновременно новые с теоретической точки зрения задачи. Теория стохастических процессов ведет свое происхождение из двух источников, одним были рассуждения Башелье о непрерывных вероятностях, другим — работа А. Маркова о случайных событиях, связанных в цепь.

В практических применениях стохастические процессы оказываются очень хорошими теоретическими моделями для исследования динамических систем в тех случаях, когда состояние системы не определяется однозначно с помощью имеющейся о ней информации согласно значениям параметров, а может быть определено только с некоторой вероятностью для каждого из возможных состояний. Понятия системы и ее состояния для определенных значений параметров на основе стохастических процессов можно трактовать очень широко (в качестве параметра могут выступать, например, амплитуда телеграфного сигнала, число занятых линий телефонной станции, число особей исследуемой популяции, сумма задолженности в страховых компаниях и т. д.). Поэтому теория стохастических процессов широко используется и изучается во всех случаях, когда к исследуемым системам принципиально не применимы методы классического детерминизма, например в квантовой и статистической механике.

Для описания состояний исследуемой системы используется понятие случайной функции $f(t)$, значениями которой являются случайные переменные, а стало быть, абстрактные функции (функционалы), определенные на абстрактном множестве Ω (множестве элементарных событий). Со многих точек зрения случайную функцию удобно рассматривать как функцию $f(t, \omega)$ двух переменных, определенную на $T \times \Omega$, где T — множество значений t. Приняв t за случайную величину, являющуюся аргументом случайной функции, и задав значение ω, мы получим функцию переменной t, называемую реализацией процесса. Согласно Слуцкому, все значения случайной функции можно полностью охарактеризовать n-мерным распределением случайной переменной $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты которой соответствуют произвольным моментам времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Несмотря на это, теория случайных функций, существовавшая до сих пор, определяет случайные функции в некотором смысле фрагментарно, связывая их с определенными типами исследуемых явлений. Таким образом, в теории стационарных процессов (в самом широком смысле) А. Хинчин делает заключение о свойствах случайных функций, исходя из условий, удовлетворяющих первым двум моментам распределения случайной функции. А процессом Маркова называется такой процесс, у которого вероятность будущих состояний однозначно определяется состоянием в данный момент, подобно тому, как это имеет место в классической механике.

Принимая также во внимание определения Н. Винера и П. Леви, отправной точкой считают стохастическое уравнение, а также аналитическое определение с помощью рядов Фурье с коэффициентами, являющимися случайными переменными. Тесно связывая их с упоминавшимися ранее исследованиями Г. Штейнгауза, следует подчеркнуть, что не всегда все свойства случайной функции с очевидностью вытекают только из определения. Например, до сих пор неизвестно, всегда ли определение случайной функции через стохастическое уравнение дает информацию о ее корреляционной функции, т. е. об ожидаемом значении произведения $f(t, \omega) \cdot \overline{f(s, \omega)}$. Эта проблема связана с недавними исследованиями П. Леви. С другой стороны, стационарные на основе корреляционной теории функции могут не быть стационарными в смысле определения Слуцкого.

Основную роль в теории стационарных процессов играет корреляционная функция. Теория стационарных процессов, опирающаяся исключительно на первые моменты и на корреляционную функцию, носит название корреляционной теории, создателями которой являются А. Хинчин, А. Колмогоров и Н. Винер. На основе корреляционной теории решены задачи экстраполяции и фильтрации. Экстраполяция заключается в таком предсказании значений случайной функции на всей прямой t (на основании знания ее значений в некотором множестве точек), чтобы средний квадрат ошибки предсказания был минимально возможным. Задача экстраполяции имеет простую геометрическую интерпретацию в гильбертовом пространстве. Фильтрация также заключается в предсказании значений случайной функции в условиях, когда ее наблюдаемые значения сопровождаются помехами. Классическим применением теории фильтрации является очищение сигнала от шумов в телекоммуникации.

Особую важность для теории имеет тот факт, что корреляционная функция оказалась положительно определенной, вследствие чего преобразование Фурье позволило связать корреляционную функцию с функцией распределения средней мощности сигнала по частотам. Ценность этого результата в том, что на основании эргодической теоремы (применимой к стационарным процессам) корреляционную функцию можно определить экспериментально по произвольной реализации сигнала. Корреляционная теория стационарных процессов в большей части является теорией преобразования Фурье, обобщенной в том смысле, что она применяется не только к функциям с числовыми значениями, но и к случайным функциям.

В более широком смысле стационарный процесс может быть интерпретирован как кривая, расположенная на шаре в гильбертовом пространстве, а затем как группа унитарных операторов. Методы функционального анализа нашли применение к стационарным процессам в исследованиях А. Колмогорова, Кархунена, а в последние годы и в работах Гренандера, связанных с проверкой статистических гипотез в стохастических процессах.

Отдельную область применений стационарных процессов представляет собой проблема корреляции временны́х последовательностей (называемых в статистике также «временны́ми рядами»). В этой области работы Г. Вольда сделали возможным правильное математическое понимание оценки коэффициентов регрессии и проверку гипотез, относящихся к этим коэффициентам. В связи с этим следует вспомнить об аппарате стохастических дифференциальных уравнений, предназначенных для описания стохастических процессов, реализации которых представляют собой случайные временные последовательности.

Важным классом случайных функций являются разностные процессы, т. е. такие, для которых приращения $f(t) - f(u)$ в неперекрывающихся интервалах (t, u) являются независимыми. К разностным процессам, в частности, относятся пуассоновский процесс и броуновское движение (т. е. стохастические процессы, в которых распределения приращений являются пуассоновским и нормальным, соответственно). В последнем процессе вероятность можно понимать как меру Винера в пространстве непрерывных функций (в пространстве реализаций).

Процессы типа Маркова составляют наиболее широкий класс разностных процессов. Для марковских процессов выполняется известное уравнение, связанное с именами А. Маркова, М. Смолуховского, А. Эйнштейна, Чепмэна и А. Колмогорова. Это уравнение часто принимается за определение процесса Маркова (так, например, у Колмогорова). Возникает вопрос, каждый ли процесс, удовлетворяющий этому уравнению (и, кроме того, возможно удовлетворяющий некоторым условиям регулярности), действительно соответствует процессу Маркова в приведенном выше смысле.

Процессы Маркова находят применение в таких областях, как нагрузка телефонной сети, радиоактивный распад, космическое излучение, а также в исследованиях развития биологических популяций, в процессах диффузии и броуновском движении. Специальным случаем процессов Маркова являются так называемые ветвящиеся процессы, описывающие распад некоторых объектов на большее число элементов. Эти процессы находят применение при исследовании цепных химических реакций, а также радиоактивного распада.

Аналитический аппарат, применяемый для изучения марковских процессов, представляет собой системы линейных дифференциальных уравнений, уравнения параболического типа, а также уравнения дифференциально-интегрального вида, больше нигде не встречающиеся. В исследованиях некоторых авторов появляются функциональные уравнения, например, Б. Гаррис использует уравнение типа Кёнига, а А. Реньи в своих исследованиях независимых приращений отказывается от аппарата теории дифференциальных уравнений и использует функциональные уравнения. Перенос понятий и метода функционального анализа на марковские процессы можно найти в книге Э. Хилле Functional analysis and semigroups (Нью-Йорк, 1948). В практических применениях теории вероятностей часто встречаются задачи, приводящие к стохастическим процессам, не являющимся марковскими, некоторые из которых имеют вид $z(t) = f\,[x(t)]$, где $x(t)$ — процесс Маркова. Исследованием таких типов немарковских процессов занимался А. Реньи, который констатировал, что в принципе все процессы данного вида можно свести к процессам Маркова, причем для некоторых классов немарковских процессов подобное сведение позволяет изучать их различные свойства, например свойство эргодичности.

В Польше Группа действительных функций Государственного математического института[2] приступила к систематической работе над стохастическими процессами в январе 1951 г. и проводит ее в основном на симпозиуме во Вроцлаве, которым руководят Э. Марчевский и Г. Штейнгауз. Первоначальная тематика касалась однородных разностных процессов, в основном пуассо-

[2] После создания Польской Академии Наук (ПАН) Государственный математический институт был преобразован в Математический институт ПАН. — *Прим. ред. польского издания*.

новского процесса и броуновского движения, а главной целью работы было решение двух принципиальных задач:

1. Упрощение теорем о распределениях путем отказа от различных аналитических предпосылок или замены их другими.

2. Разработка доказательств существования вероятности, которых нет ни в одном учебнике.

Для процесса Пуассона удалось изучить оба этих вопроса, а также получить новые результаты.

Прежде всего, удалось доказать, что если функция $f(t)$ неотрицательной переменной удовлетворяет условиям

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} f(0)=0,\ f(t)=0,1,2,\ldots, \\ f(t) \text{ является неубывающей и имеет единичные скачки,} \end{cases}$$

то для однородного разностного процесса, определенного множеством функций, удовлетворяющих условиям (S), приращения во времени имеют распределение Пуассона с математическим ожиданием, пропорциональным t. Э. Марчевский заметил, что вышеприведенное утверждение остается справедливым, если вместо приращений в интервале длиной t использовать приращение — или сумму скачков — в произвольном борелевском множестве с мерой t. Этот метод оперирования произвольными подмножествами временной оси вместо интервалов оказался очень полезным, и именно на этом пути Ч. Рылл-Нардзевский получил результаты, аналогичные вышеприведенному утверждению, но без предположения об однородности процессов.

Для броуновского движения поставленные задачи были решены С. Хартманом и Ч. Рылл-Нардзевским, однако в этой области не было получено новых теорем, а были сформулированы только доказательства, которые трудно было бы найти в литературе.

Дальнейшие работы относились к связям между теорией стохастических процессов и эргодической теорией, подчеркнутым Крамером. Придерживаясь линии вопросов Г. Штейнгауза, Ч. Рылл-Нардзевский сформулировал и доказал эргодическую теорему применительно к броуновскому движению, а К. Урбаник — эргодическую теорему для однородных процессов «рождения и смерти», а также получил другие результаты, которые сам представил на съезде польских математиков.

Группа математической статистики Государственного математического института занималась проблемой статистической оценки параметров, а также проверкой статистических гипотез в процессах Маркова. В этой области некоторые предварительные результаты были получены О. Ланге. Данная проблематика заслуживает внимания и нуждается в дальнейших исследованиях.

V. Математическая статистика

Математическая статистика как отдельная и строгая дисциплина математики начала развиваться относительно недавно. В самых ранних работах в этой области была представлена часть описанного во введении конгломерата теорем теории вероятностей, приближенных формул, эмпирических наблюдений и интуитивных правил поведения. Сравнительно недавно началась работа над строгой формулировкой задач, а также над уточнением предмета исследований математической статистики, в основном благодаря трудам Е. Неймана и А. Вальда.

Исследования велись прежде всего в трех направлениях:

1) теория оценивания;

2) теория проверки статистических гипотез;

3) направление, сформировавшееся значительно позже, которое можно было бы назвать теорией *статистических испытаний* (*design of experiments*, *планирование эксперимента*).

Опишем кратко состояние каждого из этих трех разделов статистики, указав на перспективы их развития.

1. Теория оценивания. В теории оценивания речь идет о создании методов, позволяющих произвести оценивание одного или большего количества параметров, которые участвуют в распределении случайных переменных, являющихся предметом наблюдения. Первые решения, относящиеся к оцениванию неизвестных параметров, были основаны на известной теореме Байеса и на так называемом постулате Байеса. Предполагалось, что неизвестный параметр, подлежащий оцениванию, является случайной переменной с известным *a priori* распределением, а в случае неизвестного распределения обычно исходили из постулата Байеса, считая распределение оцениваемого параметра равномерным. Байесовское решение задачи оценивания столкнулось с серьезной критикой из-за того, что на практике оцениваемый параметр либо является постоянной величиной, либо (если это случайная величина) его распределение неизвестно, так что при данных условиях использование постулата Байеса ничем не оправдано.

Основы современной теории оценивания заложил Е. Нейман, создатель распространенной ныне теории *доверительных интервалов* (*confidence intervals*). Эта теория является достаточно общей, так как оцениваемый параметр может быть как постоянной величиной, так и случайной, причем в последнем случае знание ее распределения не обязательно. Следует подчеркнуть, что теория Неймана в противоположность аналогичной теории Фишера (*интервалы доверия — fiducial intervals*) имеет ясный логический смысл и частотную интерпретацию. Эта и другие теории Неймана (о которых речь будет идти ниже) свободны от всяких субъективных концепций понятия вероятности, чего нельзя сказать о теориях Фишера. В работах Неймана можно заметить влияние российской школы вероятностей, из которой вышел Нейман, являющийся учеником С. Бернштейна. Желательно, чтобы польские математики занялись вплотную исследованием взаимного отношения теорий Неймана и Фишера.

В процессе практической работы по статистическому контролю качества Я. Одерфельд обратил внимание на тесную связь достоверности (в смысле Фишера) с вероятностью, определяемой из постулата и теоремы Байеса. Позднее Г. Штейнгауз назвал эту вероятность «возможностью» и показал, что при правильном определении достоверность и возможность совпадают. Кроме того, он показал, что каждый из двух методов *a priori* основан на собственной гипотезе об априорном распределении, причем обе гипотезы одинаково искусственны. Наконец, Г. Штейнгауз обратил внимание на то, что существует частотная проверка положений Байеса, не требующая предположений о распределении, т. е. реабилитировал теорию Байеса.

В последнее время начаты исследования в области непараметрического оценивания, когда речь идет об оценке неизвестного распределения или его плотности. В частности, исследуются «доверительные интервалы», которые с заданной вероятностью содержат истинное распределение наблюдаемых случайных переменных. Один из первых результатов в этой области был получен в 1933 г. А. Колмогоровым, который нашел вероятность, с которой эмпирическое распределение заключено в некотором доверительном интервале. Впоследствии исследования в этой области проводили также Н. Смирнов, А. Вальд и Я. Вольфовиц, но полученные результаты пока еще очень незначительны, и хотелось бы, чтобы исследования в этом направлении были продолжены.

2. Теория проверки статистических гипотез. Основной задачей в теории проверки статистических гипотез является разработка критерия, т. е. правил поведения, позволяющих на основе наблюдаемых значений случайных переменных решить, следует ли принять или отвергнуть проверяемую гипотезу. Долгое время создание соответствующих критериев основывалось на чисто интуитивных предпосылках, и не существовало общей и строгой теории проверки статистических гипотез.

Современную теорию проверки статистических гипотез создал Е. Нейман совместно с Э. Пирсоном. Нейман доказал, что нельзя создать теории проверки без рассмотрения множества возможных гипотез, а его главная идея состояла в том, что в *пространстве опытов* (т. е. в пространстве возможных результатов статистических наблюдений) находится некоторая область, называемая *критической*. Если наблюдаемая точка в многомерном пространстве опытов принадлежит этой области, то гипотеза отвергается, в противном случае — принимается. Критическая область строится так, чтобы она была подобна пространству опытов, т. е. чтобы вероятность отклонения гипотезы (если она в действительности истинна) была меньше наперед заданного числа.

В число критических областей входит и та, для которой вероятность принятия гипотезы (если она в действительности ошибочна) была бы по возможности наименьшей. Такая область называется *областью наибольшей мощности*. Теория Неймана и Пирсона предлагает систему теорем, позволяющих получить решение как при наличии критических областей с указанными свойствами, так и при их отсутствии. Эта теория, однако, имеет серьезное ограничение, так как она применима только к так называемым *параметрическим гипотезам*, т. е. содержащим некоторое предположение относительно одного или нескольких параметров, в то время как сам вид распределения считается известным.

В области параметрических критериев в Польше начата работа над применением критериев, основанных на предельном распределении отношения разности двух случайных величин к их сумме (М. Фиш и Я. Одерфельд).

Лишь сравнительно недавно начались самые серьезные исследования в области проверки непараметрических гипотез. Справедливости ради следует отметить, что уже достаточно давно существовало несколько непараметрических критериев (например, известный критерий χ^2), однако все они не были достаточно обоснованы теоретически. Здесь стоит вспомнить о двух важных непараметрических критериях — так называемых критериях Колмогорова и Смирнова, основанных на двух предельных теоремах этих авторов.

Следует упомянуть также об интересном применении к математической статистике теории стохастических процессов, при котором Дуб и Донскер использовали доказательства упомянутых предельных теорем Колмогорова и Смирнова. Первоначально доказательства этих теорем были очень сложными, но Дуб привел эвристическое доказательство (основанное на элементарном процессе Гаусса), которое затем подтвердил Донскер. Тем самым был создан мост между математической статистикой и теорией стохастических процессов, и желательно, чтобы польские математики заинтересовались этой проблематикой. Возможно, что метод Дуба и Донскера позволит решить задачу о мощности λ-критерия Колмогорова и Смирнова.

Систематические исследования, ведущие к созданию общей теории проверки статистических гипотез, начал Р. Э. Фишер, предложивший метод, основанный на перестановке наблюдений, который сделал возможным построение подобных областей и для непараметрических гипотез. В развитии этого метода приняли участие А. Шеффе, Э. Лехманн и К. Штейн. В ходе этих исследований при довольно слабых допущениях было доказано, что метод перестановки наблюдений является единственным, позволяющим построение критических областей. В этом направлении начаты также исследования эффективности непараметрических критериев, из которых можно отметить результаты Ф. Мэсси, а также В. Хёффдинга, который исследовал эффективность непараметрических критериев, построенных на основе метода перестановки наблюдений в случае, когда число наблюдений стремится к бесконечности.

По-видимому, это направление исследований интересно и важно не только с теоретической точки зрения, но имеет также и большое практическое значение, так как мы часто встречаемся с ситуациями, когда вид функции распределения наблюдаемой случайной величины неизвестен. До сих пор в таких ситуациях приходилось отказываться от применения статистических критериев, а тем самым — от использования математической статистики вообще. Теория проверки непараметрических гипотез, таким образом, позволяет значительно расширить круг явлений, доступных статистическому исследованию.

В связи с этими исследованиями укажем на проблему k проб ($k \geq 2$), взятых из разных популяций с неизвестными распределениями. Здесь речь идет не только о проверке какой-то конкретной гипотезы, а о решении, позволяющем из многих возможных гипотез (относительно этих k популяций) отобрать единственно верное. В последнее время исследования в этом направлении предприняты Ф. Мостеллером, У. Крускалом и другими. Некоторые результаты в этой области получил В. Садовский, в частности при решении задачи, имеющей наибольшее число вариантов для рассматриваемых k популяций. Это направление исследований также имеет практическое значение.

3. Теория статистических испытаний. Третьим разделом статистики является так называемая теория статистических испытаний, которая выросла на почве применений статистики, главным образом в сельскохозяйственных экспериментах.

Существенную роль в применении статистики играет сама схема испытаний, так как (в зависимости от схемы испытаний) при одном и том же числе наблюдений можно получить меньшее или большее количество «информации». Систематические исследования в этом направлении были начаты Р. Э. Фишером и Е. Нейманом. Важные результаты здесь получили также С. Барбацкий, С. Колодзейчик и К. Ивашкевич.

В течение последних десяти лет развивалась очень продуктивная теория, называемая последовательным анализом. В классической статистике число наблюдений, на основе которых делается статистическое умозаключение, определяется заранее перед началом испытаний. Новый, совершенно иной подход предложил А. Вальд, введя так называемый последовательный анализ (по-видимому, его правильнее было бы назвать последовательным методом), характерной особенностью которого является то, что число наблюдений не является постоянным и заранее заданным, а представляет собой случайную величину. Проверка статистических гипотез производится согласно этому методу последовательно, в несколько этапов. На каждом этапе всегда возможны три решения:

а) принять проверяемую гипотезу,

б) отклонить гипотезу,

в) сделать дополнительные наблюдения.

Такой процесс оказывается намного более эффективным, чем классический. При заранее заданных вероятностях отклонения достоверной гипотезы (ошибка первого рода) и принятия ошибочной гипотезы (ошибка второго рода) число наблюдений, требуемых при классическом методе, обычно в два раза больше, чем при последовательном методе.

Последовательный анализ находится в постоянном развитии, главным образом благодаря работам М. Гиршика, Я. Вольфовица и других. Г. Штейнгауз заметил, что теория Байеса дает более естественное понимание последовательного анализа, нежели подход Вальда и его школы.

Последовательный метод оказался особенно полезным в применении к теории оценивания. Серьезным недостатком, значительно снижающим практическое значение неймановской теории доверительных интервалов, выступает то обстоятельство, что в этой теории величина интервалов доверия (в большинстве встречающихся на практике ситуаций) является случайной величиной. Практически это означает, что до испытаний никогда не известно, какой будет величина полученного интервала, с помощью которого оценивается неизвестный параметр. Оказывается, что этот недостаток можно устранить, если считать число наблюдений случайной величиной. Решение этой задачи получил К. Штейн, а его результаты позже были обобщены А. Вальдом. В целом можно сказать, что связанные с последовательным методом исследования имеют важное теоретическое и практическое значение, и поэтому эти исследования, особенно в области статистического контроля качества, следует продолжить. В частности, необходимо развивать работы, относящиеся к применению последовательного анализа к теории оценивания, где существует еще много нерешенных вопросов. Кроме того, представляется, что стоило бы предпринять попытки применения последовательного метода к проверке непараметрических гипотез. Некоторая схема лотереи последовательного типа, приемлемая в исследованиях репрезентативного метода, обсуждалась в работах М. Фиша.

4. Общая теория статистических функций решения. Исключительно важным направлением исследований является созданная А. Вальдом теория статистических функций решения, объединяющая все традиционные разделы статистики в единое целое. Она охватывает все разделы математической статистики. Кроме того, в свете этой теории становится совершенно ясным своеобразие математической статистики, отличающее ее от других математических дисциплин, особенно от теории вероятностей, что имеет большое методологическое значение.

Каждая задача принятия статистического решения возникает на основе рассмотрения некоторого конечного или бесконечного множества наблюдаемых случайных величин. Эти взаимосвязанные или независимые величины распределены каким-то образом, и об их распределении известно только то, что оно является элементом некоторого класса распределений, который в каждой конкретной ситуации считается заданным. Задача состоит в том, чтобы, имея множество решений, потенциально возможных по причине неизвестного распределения, принять одно из них. Решение данного типа носит название окончательного решения в отличие от решений, относящихся к методу проведения испытаний, т. е. методу наблюдения значений случайных величин. В каждом конкретном случае пространство возможных решений заранее задано; оно является суммой двух пространств (пространства окончательных решений и пространства решений), относящихся к методу проведения испытаний. Функция решений образуется так, чтобы ее значениями являлись элементы пространства возможных решений, а аргументами — точки в пространстве испытаний. Вся задача сводится к построению такой функции решений, которая обладала бы соответствующими свойствами. Для нахождения наилучшей из функций решения А. Вальд ввел два вспомогательных понятия: функцию веса и функцию риска.

В своем нынешнем состоянии теория функций решения состоит из нескольких теорем, определяющих условия существования функций решения, что уже позволяет эффективно получать решения конкретных статистических задач, так что и в этой области мы сейчас имеем некоторые результаты (полученные в основном А. Вальдом и Я. Вольфовицем). Работы, имеющие целью получение эффективных решений статистических задач на основе теории функций решения, продолжаются, хотя полученные результаты пока еще имеют только теоретическое значение.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что развитие математической статистики во всех указанных выше направлениях должно привести к важным практическим применениям.

О применениях математической статистики в польской промышленности и технике речь будет идти чуть ниже, а сейчас мы напомним о ее использовании в демографических задачах и сельскохозяйственных экспериментах. В обеих этих областях польская статистика имеет определенные достижения. Так, например, материалы всеобщей переписи населения в 1950 г. были обработаны репрезентативным методом, что позволило получить важнейшие результаты за несколько месяцев. Точно так же мы имеем интересные результаты и в сельскохозяйственных экспериментах, однако в целом эти области математической статистики используются слабо, что отрицательно сказывается как на практике, так и на развитии самой теории математической статистики.

VI. Применения в промышленности

1. Общие проблемы. Особое применение математическая статистика имеет в промышленной сфере, где ключевой проблемой является проверка статистических гипотез. Известно много универсальных и специальных критериев (иногда весьма изобретательных), существуют также описанные выше общие теории, однако сделанного явно недостаточно для ответа на два главных вопроса, диктуемых практикой: 1) какой должна быть величина пробной партии? 2) какой уровень истинности следует выбирать в конкретных ситуациях?

Оба этих вопроса тесно связаны друг с другом, так как величина пробной партии зависит от принятого уровня истинности и обратно.

Ни на один из этих вопросов математик не может осмысленно ответить без учета экономических факторов. Лишь введение таких факторов позволяет дать конкретный ответ на первый вопрос, а вместо ответа на второй вопрос математик может предложить только правило поведения, сформулированное в понятных и доступных для практика терминах. Поясним это, взяв для примера два крайних случая проверки продуктов. Если проверка не требует затрат, то можно и нужно отказаться от статистических методов и проверять полностью все продукты. Если же проверка стоит слишком дорого, то надо отказаться от исследований. Все практические случаи лежат между этими крайностями, и в каждом из них практик задается вопросом о величине пробной партии и о правилах поведения. Для ответа на второй вопрос необходимо сперва уточнить, какую сумму мы можем заплатить за исследования, какова цель этих исследований, и какова цена последствий, которые повлечет за собой решение, основанное на ошибочном результате исследований.

Постулат наименьшего общего экономического ущерба, введенный Г. Штейнгаузом, позволяет установить величину пробной партии и задать правила поведения, совершенно не используя безапелляционные уровни истинности. Следует, однако, отметить, что оценка этого ущерба представляет собой очень сложную задачу, так как среди экономистов нет согласия по принципиальным вопросам. Некоторые из них даже могут посоветовать оставить определение величины пробной партии (а к этому и сводится в данном случае главная задача математики) на усмотрение практиков. Конечно, такое решение является наихудшим, вследствие чего практики обычно обращаются к математикам, чтобы те дали заключение, являются ли их привычные действия обоснованными. С. Дробот выдвинул чрезвычайно оригинальную и удачную идею, позволяющую развязать этот гордиев узел, применяя измерительный анализ к статистическому контролю качества. Основным результатом его статьи (написанной в соавторстве с М. Вармусом и опубликованной во втором томе «Zastosowania Matematyki») является формула, определяющая величину пробной партии. В формуле, помимо таких переменных, как общее число экземпляров, стоимость одного экземпляра, цена испытания одного экземпляра и т. д. (которые обычно непосредственно известны), фигурируют и другие переменные, а что касается значений последних, то известно, какие предварительные статистические исследования и эмпирические данные необходимы для их определения. Практический эффект заключается в том, что принятие численности пробной партии для одной группы товаров означает то же самое и для всех остальных. Чрезвычайная важность проблемы и универсальность метода дает нам право надеяться, что систематическое проведение в жизнь идеи Дробота не только оживит польскую статистику, но будет способствовать упрочению нашей научной позиции в полном значении этого слова.

Имеются многочисленные примеры применения последовательного анализа к испытанию продукции. Некоторые работы прикладного характера, выполненные в Комиссии статистического контроля качества Польского Комитета по стандартизации, продолжаются в Математическом институте Польской Академии наук.

Интересным направлением математической статистики является выработка заключения на основании естественного или искусственного упорядочения элементов в пробной партии. Первый случай возникает, например, при текущем испытании продукции, когда заключение о стабильности продукции делается на основании комплекса измерений, выполненных в хронологической последовательности. Важным применением этого являются контрольные карты, предложенные Шухартом и используемые в настоящее время в промышленности почти всех стран. Под давлением практических потребностей математические методы претерпели здесь некоторую вульгаризацию, что стимулирует возобновление теоретических исследований.

Второй пример, помимо всего прочего, имеет отношение к распределению элементов пробной партии, упорядоченных в порядке возрастания, или к их линейным комбинациям. В этом направлении интересные результаты были получены С. Романовским и другими авторами.

Определенные работы в обоих направлениях проводятся сейчас в Институте математики ПАН.

Во всех промышленных применениях математической статистики постоянно необходима помощь классической математики и, в особенности, анализа.

Необычно плодотворным оказалось применение измерительного анализа к статистическому контролю качества. Упомянутые выше работы Дробота и Вармуса позволили по-новому подойти к решению задачи о величине пробной партии и с новой стороны осветили роль статистического эксперимента.

Представляется, что ценную помощь математической статистике в вопросах однородности популяции смогут оказать таксономические методы (Объединенная группа применений Математического института ПАН).

Большое значение для применения вероятностных теорий имеют численные методы математики, разрабатываемые в нескольких группах Математического института. В качестве примера упомянем применение в этой области последовательностей Ренара (Я. Одерфельд).

Отчетливо вырисовывается тесный контакт между вероятностными теориями и техническими науками, в частности, наукой о сопротивлении материалов. Сдвиги в этом направлении можно обнаружить также и в нашей стране (в довоенный период можно отметить работы В. Вержбицкого, а в последние годы — В. Мошиньского, В. Погоржельского и Я. Одерфельда).

Для промышленных применений вероятностных теорий в нашей стране крайне необходима отсутствующая пока помощь экономистов, без которой невозможно эффективно решить такие фундаментальные проблемы, как определение величины пробной партии и безопасности конструкций.

2. Некоторые применения. Из многих промышленных применений математической статистики отметим только несколько, ограничиваясь теми, которые разрабатываются у нас в стране и представляются нам особенно важными.

А. Горное дело. К задачам, почти совсем не затронутым математически, относится проблема пробных бурений в горнодобывающей промышленности. Она заключается в поиске и оценке месторождений угля, цинка, олова, нефти и т. д. и, стало быть, имеет первостепенное экономическое значение. Эта проблема распадается на комплексы задач. Первый из них — размещение пробных буровых установок, второй — извлечение информации из образца породы, полученного при бурении. Большинство геологов не полностью отдают себе отчет, что кроме морфологического существует и математический аспект задачи. Отсюда следует, что чрезвычайно трудно абстрагироваться от экспериментов, которые складываются на основе знаний геолога-практика, что облегчает поиск подходящего пути в каждой отдельно взятой местности, но затрудняет создание ясно определенного метода исследований, который можно было бы довести до сведения других. Первым шагом математика является статистическое изучение покрытых буровыми скважинами площадей и определение корреляции между толщиной пласта месторождения в двух точках (на расстоянии d друг от друга) для нахождения тех пар точек, для которых корреляция $f(d)$ окажется убывающей функцией переменной d. Определив эти функции, мы сможем предложить способ определения объема месторождений по данным, полученным из буровых скважин. Эта, отнюдь не простая, задача чрезвычайно интересна с математической точки зрения. Кроме теоретических трудностей здесь появляется и проблема нахождения простых схем, позволяющих доверить вычисления вспомогательным силам и не требующих кропотливых расчетов. После решения этой задачи можно будет думать о проблеме планирования размещения буровых скважин. Заметим, что здесь могут и должны найти применение как принцип наименьшего экономического ущерба, так и измерительный анализ.

Б. Прочность конструкций. Как заметил В. Вержбицкий, безопасность строительных конструкций подпадает под теорию вероятностей, так как прочность их отдельных элементов является случайной величиной. Так, например, прочность стержня на разрыв очевидно является случайной величиной, поскольку серийно производимые стержни (с номинально одинаковым сечением и из одного материала) имеют индивидуальные отличия. Поэтому их прочность на разрыв тоже различна, и для этой случайной величины известны математическое ожидание и дисперсия.

С другой стороны, случайной величиной является и нагрузка, которой будет подвергаться элемент конструкции, причем по двум причинам. Первая причина связана с неизбежными неточностями при изготовлении (за счет чего, например, в ферме могут возникнуть внутренние напряжения), а вторая, даже более важная, связана с изменением рабочих нагрузок во времени. Например, плуг может вспахивать мягкую или каменистую почву, рама автомобиля за полчаса езды по местности подвергается многим тысячам ударов разной амплитуды и частоты, нагрузка на кровлю крыши зависит от скорости ветра и т. д. Из этого следует, что жизнеспособность конструкции есть случайная величина, так что определенную долговечность конструкции можно гарантировать лишь с некоторой вероятностью, которую следует аргументированно обосновывать, а не использовать аналогии из далеких областей (например, из астрономии или геодезии).

Многообещающим представляется исключение произвола с помощью постулата наименьшего ущерба, представляющего собой комбинированный математически-технически-экономический метод. Здесь мы снова только лишь определяем программу и обозначаем цели, для реализации которых требуется длительное время. Необходимо много голов для размышлений и формулировки определений. Очевидно, что в этой области общее применение найдут задачи со многими случайными величинами, что снова наводит на мысль об использовании измерительного анализа.

В. Статистический контроль качества. Эта область применения математической статистики, открытая 30 лет назад Шухартом и выросшая в отдельную дисциплину, стала известной у нас всего шесть лет назад, однако уже представлена в лекционных курсах высших учебных заведений и достаточно развита исследовательскими работами Г. Штейнгауза и его учеников.

После достаточно детальной разработки методов статистического отбора готовых продуктов в виде отдельных экземпляров (таких как болты, металлоизделия, очки и т. д.), в ближайшие годы предусматриваются исследования по отбору бесформенных тел или продуктов (таких как цемент, бензин, уголь и т. д.). При этом в полной мере должны проявиться сложности задачи о величине пробной партии, о чем упоминалось выше, и, по-видимому, в решении найдет применение последовательный анализ. Просматривается также возможность применения ретроспективных методов, принимающих во внимание предшествующие промышленные испытания.

Две проблемы, а именно, оценка точности лабораторных исследований и исследование предметов со многими качественными особенностями, требуют быстрого развития теории в области решения задач со многими случайными переменными, о которых речь шла выше.

Одной из наиболее актуальных задач представляется внедрение в промышленность предварительного статистического контроля, т. е. контроля, осуществляемого в процессе производства продукции. Цель состоит в выборе средств производства для обеспечения планируемого уровня качества и надзоре за практическим постоянством этого качества. Для этого вновь необходимо найти свободное от произвола решение трудной задачи определения величины пробных партий и частоты их отбора, используя по мере возможности и необходимости измерительный анализ и теорию структуры пробной партии.

Необходимо продолжить работы в области товарооборота, исходя из постулата наименьшего экономического ущерба.

Методы сравнения новых товаров, нового оборудования и новых методов должны быть основаны на простых и эффективных тестах (возможно последовательного типа) и служить дальнейшему техническому прогрессу.

Особого внимания заслуживает задача исследования товаров, не поддающихся штучному измерению, которой много времени посвятил Г. Штейнгауз. Исследование штучных товаров имеет обширную библиографию, а теория и практические методы этой ветви статистики уже охватывают все ситуации, с которыми обычно встречаются инженер, продавец, браковщик или контролер. Иначе обстоит дело с не поддающимися штучному измерению товарами (такими как уголь, руда, цемент, нефть, бензин, карбид и др.), которые обычно исследуются лабораторно. Например, для изучения теплотворности угля обычно измельчают в порошок несколько сотен кусков угля из дневной выработки шахты, а затем щепотку этого порошка сжигают в калориметре. Такой подход, однако, не отвечает на вопрос о практической полезности товара, так как потребителю важно знать не только значение конкретного физического параметра (каким является, в данном случае, теплотворность), а практическую полезность товара или продукта в целом. Эту полезность нельзя определить по одному признаку и даже по комплексу измеренных признаков, поэтому у нас возникла идея исследовать такие товары с помощью штучных образцов из материала, представленного сплошной массой. Например, в случае с нефтью, предназначенной для использования в кондукторских фонарях, ею заполняют 20 случайно выбранных фонарей и определяют стоимость цистерны нефти в соответствии с тем, сколько фонарей сохраняло заданную яркость 15 свечей в течение по меньшей мере 6 часов. Благодаря этому можно не только использовать теорию статистического контроля качества штучных товаров, но и избавиться от трудного (и не отвечающего на вопросы потребителя) лабораторного исследования нескольких признаков. В этом случае может возникнуть сомнение относительно предмета, принятого за критерий, поскольку фонари ведь могут быть с изъяном и т. д. … Кроме того, фонари надо испытывать одним и тем же способом, анализируя их яркость. На первый взгляд здесь возникает замкнутый круг, но, как известно, математика умеет ехать на этом круге-колесе: такую этимологию имеет термин «последовательные приближения». Этот захватывающий процесс мышления до сих пор не настолько основательно разработан, как и большинство идей, находящихся в архивах Комиссии статистического контроля качества Польского комитета по стандартизации.

VII. Применения к естественным наукам, медицине и сельскому хозяйству

В области естественных наук в Польше можно отметить следующие достижения, полученные с помощью математической статистики. Первое из них связано с исследованием снижения уровня гранулоцитов по мере выздоровления пациентов (которым назначался пенициллин, но это не существенно), имеющих симптомы нагноения. Это снижение обычно бывает замаскировано колебаниями, но его можно определить так же, как определяется коэффициент регрессии двух переменных, в качестве которых выступают время и уровень гранулоцитов. В рассматриваемом случае колебания гранулоцитов играют роль ошибки этого коэффициента, а открытие заключается в том, что поведение организма является не ошибочным, а просто симптомом, который тоже следует учитывать. Коэффициент регрессии делится на кажущуюся ошибку, и пациенты классифицируются по этому частному, т. е. по истинному снижению гранулоцитов, а не по их наблюдаемому уровню. Это открытие пока использовано только в одной работе, медицинская часть которой принадлежит Щеклику.

Другим интересным приемом является связь понятия дендритов с теорией вероятностей. Она возникает из задачи о звездных цепочках. Если на звездной карте неба каждую звезду соединить прямыми с ближайшими, то можно построить так называемые дендритные структуры, имеющие конечные точки разных типов (переходные или парные, точки разветвления или тройные, четверные, пятерные и т. д.). Распределение плотности этих точек характеризует тенденцию объединения звезд в цепочки, при котором парных точек будет больше, чем было бы при их случайном размещении. Но вычисление положения звезд при случайном размещении является очень сложным, поэтому С. Зубрицкий решил создать карту искусственных звезд, взяв их координаты из таблицы случайных чисел и построив дендриты, что оказалось гораздо проще. Сравнение обоих дендритов показало, что они имеют одну и ту же плотность точек каждого типа. Астрономические выводы из этого наблюдения можно найти в работе В. Зонна, которая находится в печати. Намечаются и другие применения.

Третьим применением теории вероятностей является установление отцовства. Как известно, законы наследования групп крови таковы, что иногда позволяют абсолютно исключить отцовство мужчины-ответчика (при серологическом исследовании вместе с матерью и ребенком), а в остальных случаях — увеличить или уменьшить вероятность отцовства. Экспертизы преимущественно дают вероятность *a posteriori*, но почти постоянно возникающая при этом ошибка обусловлена незнанием вероятности *a priori* (либо ее полагают равной 1/2, либо принимают ложное положение «если *R* включает *S* с вероятностью *p*, то не-*S* включает не-*R* с вероятностью *p*»).

Используя наблюдения Л. Гиршфельда и материалы двух тысяч судебных экспертиз, удалось вычислить вероятность *a priori* отцовства мужчин-ответчиков (в данный момент она составляет 72%), что позволяет сегодня правильно представить вероятность отцовства при экспертизах.

Произведено также сравнение статистики с судебными решениями. Оказывается, что суды как правило отклоняют иски о признании отцовства, а поскольку случаев исключения отцовства около 10%, то в оставшихся 90% находится 72% отцов. Из этих 90% суды освобождают от ответственности только 5%; впрочем, даже если бы они никогда не ошибались, то осталось бы 18% – 5% = 13% приговоров, унижающих ответчиков. Юристы неоднократно возражали против заключений на основании теории вероятностей, склоняясь к принципу индивидуального подхода к каждому делу. Статистика, которую мы привели, свидетельствует, что суды поступают как раз наоборот и принимают решения преимущественно в соответствии с теорией вероятностей. При этом они опираются обычно на экспертизу (т. е. на доказанную или предполагаемую объективную истину) и часто просто не умеют осуществлять конкретную оценку в индивидуальных случаях.

Четвертым достижением, которым мы обязаны Ю. Лукашевичу и А. Келусу, является изучение С. Бернштейном наследования групп крови A, B, O, AB, а также M и N. Исследования были проведены на 86 популяциях, а результаты сравнивались с теми, которые соответствуют не действительным, а случайно выбранным популяциям. Результаты будут опубликованы в «Zastosowania Matematyki» и поэтому мы их здесь не приводим.

Характерная особенность этих исследований — все они являются оригинальными, а не повторением уже выполненных (раньше и лучше) зарубежных работ. Поэтому каждое из этих исследований может иметь продолжение, и уже сегодня мы можем прогнозировать длительное развитие в указанных направлениях.

Среди наук, которые могли бы извлечь немало пользы из теории вероятностей, почетное место занимает география. Математическая география включает в себя раздел, трактующий астрономические факты, важные для физической географии, временно́й и пространственной ориентации, а также для математической картографии, относящейся к отображению земного эллипсоида на плоскости карты. Зато в ней нет разделов о математическом понимании формы, определении границ, показателей крутизны, вертикальных колебаний, рельефа местности, геометрического показателя эрозии или коэффициентов распределения (рассредоточения и концентрации) географических пунктов, т. е. городов и других образований. Попытки правильного определения указанных параметров часто вызывают возражения не только со стороны приверженцев описательной, порой даже литературной трактовки науки о Земле, но также и со стороны так называемых антиформалистов. В обоих случаях психологическая основа одинакова и сводится к боязни критериев, позволяющих объективно оценивать факты.

Наукой, которая по необходимости долго обходилась без вмешательства математики, является метеорология. Метеорологические обсерватории собирали наблюдения и регистрировали показания приборов до тех пор, пока объем собранного материала не стал превышать возможности вычислений без помощи машин. К тому же бóльшая часть информации не использовалась, в то время как поступали все новые и новые данные. Однако уже сегодня можно себе представить машину для составления метеорологических прогнозов, причем она не обязательно должна быть электронной, и ее функции не должны ограничиваться только метеорологией. Идея создания машины для медицинской диагностики сегодня уже не кажется слишком смелой. По сути такая машина является устройством, регистрирующим материал наблюдений таким образом, чтобы из него можно было выбрать все записи, относящиеся к случаям, аналогичным данному по симптомам, и, одновременно, устройством, рассчитывающим долю благоприятных исходов болезни среди первоначально выбранных случаев (что должно обеспечивать разумный прогноз). Вопрос терапии весьма сложен, но вовсе не безнадежен. С другой стороны, уже сегодня очевидно безнадежным представляется чтение врачебной казуистики, насчитывающей миллионы позиций.

VIII. Приборы, таблицы, упрощения вычислений

Очень многие вероятностные задачи (именно из тех, которые выдвигает практика) требуют чрезвычайно сложных вычислений, однако среди них преобладают такие, в которых можно было бы пользоваться выборкой данных для соответствующих расчетных популяций, при условии, что такая выборка будет беспристрастной и многократно повторяемой. Прибор, предназначенный для этой цели, должен был бы уметь создавать расчетную популяцию, очень быстро осуществлять многократный выбор и, наконец, регистрировать результаты выбора. При современном состоянии техники сконструировать такую машину невозможно, но Ч. Райский уже разработал предварительный проект машины для быстрой эмпирической проверки планов приемки продукции. Машина сама создает генеральную популяцию с погрешностью, которую можно установить заранее. Исходным элементом для создания генеральной популяции является некоторый род электронного вращающегося диска. Источник радиоактивного излучения с помощью счетчика Гейгера–Мюллера формирует случайную последовательность цифр, удовлетворяющую строгим требованиям, относящимся к равенству как частоты появления цифр, так и частоты образованных этими цифрами чисел. Таким способом мы получим электронный промышленный прибор с погрешностью, заданной с шагом 1%. Если, например, мы используем символы 04, 05, 06 для обозначения бракованных экземпляров продукции, то погрешность составит 3%. На этом мы прервем техническое описание и лишь отметим, что в итоге машина формирует множество чисел, информирующее нас, сколько раз (например, при 1000 применений) она приказала отклонить партию, сколько раз принять, и как долго продолжалось каждое из 1000 испытаний при погрешности партии 3% и при определенном плане испытаний. Таким способом мы можем исследовать стоимость рассмотрения планов и издержки их использования без кропотливого математико-вероятностного анализа.

Однако иногда в наших условиях простые приспособления являются более важными, нежели разнообразные многофункциональные приборы. Таким приспособлением, например, является так называемая вероятностная бумага, на которой благодаря искажению масштаба вертикальной оси кривая нормального распределения имеет вид прямой линии. Нет ничего проще, чем изготовить соответствующее клише и напечатать такую бумагу. Другим приспособлением, имеющим большое практическое значение, является сконструированный Г. Штейнгаузом дисперсиометр, модель которого уже существует — это просто пластина из жести, изогнутая под прямым углом и снабженная масштабными линейками с соответствующими делениями. Пластина кладется на доску с вбитым гвоздиком, который направляет ее движение вдоль пластины, а при каждом перемещении второй стационарной точкой является булавка, которая втыкается в соответствии с отклонениями, полученными при наблюдении, после чего вынимается. Приспособление дает величину стандартного отклонения, и при нескольких десятках наблюдений его применение является совершенно оправданным. Поскольку стандартное отклонение имеет большое значение при оценке однородности продукции, такой дисперсиометр, благодаря простоте его изготовления и легкости применения, может оказаться очень полезным устройством в заводской и фабричной практике. Не будем также забывать, что врачи и естествоиспытатели неоднократно вынуждены определять дисперсию, а зачастую не делают этого лишь потому, что их отпугивают вычисления.

Заслуживают упоминания автоматические приборы. Этим термином мы обозначаем устройства для специальных целей, которые сочетают измерения и вычисления. В области статистического контроля качества этим занимался Я. Одерфельд. Один из проектов, например, предусматривает одновременное измерение нескольких десятков пружин, причем результат сразу же получается в виде среднего арифметического значения и отклонений от него, минуя индивидуальные измерения и всевозможные вычисления.

К этому же разделу относятся случайные числа. Вскоре Математическим институтом ПАН будет издана «*Tablica liczb przetasowanych*» (Таблица перемешанных чисел) (она уже появилась в «Rozprawy Matematyczny», № 6, 1954 — *прим. ред. польского издания*), содержащая все четырехзначные числа (каждое один и только один раз), причем все они основательно перемешаны. Она отличается от известных таблиц случайных чисел не только тем, что охватывает интервал от 0000 до 9999, но также и тем, что составлена не по принципу случайного выбора, т. е. не имеет физическую природу и не основана на статистических записях. Числа перемешаны именно математическим способом, с использованием некоторого аналога эргодического принципа, то есть машина повторяет некоторый процесс, а затем попросту подвергает числа определенной перестановке, но таким образом, что в конце концов соседние числа в таблице появляются, каждое вслед за предыдущим, лишь через несколько сотен итераций. Созданную таким образом таблицу можно трактовать и как таблицу тасованных чисел, и как таблицу случайных чисел. Второй способ основан на чтении по вертикали блоков, составленных из строк. Заметим, что в самой концепции таблицы случайных чисел скрывается парадокс: она перестает быть случайной, когда напечатана, но была бы таковой, если бы содержалась в машине, которая сама выбирает числа. Постулат, требующий от таблицы, чтобы она была свободна от любой закономерности в расположении чисел, невозможно сформулировать математически и ему трудно приписать какой-то определенный смысл. Практически, случайной считается такая последовательность чисел, которая не проявляет никакой простой закономерности, например такой как чередование чисел четных и нечетных. Иногда кажется довольно странным, что так называемые случайные числа играют такую роль в практических задачах. Возможно, более глубокий анализ понятия случайности когда-нибудь избавит всех математиков от манипуляций с коллективами чисел или от магических фокусов с вытягиванием номерков дрессированным попугаем, так как трудно поверить в то, что, например, при отборе железобетонных свай этот попугай будет наилучшим советчиком. Нам представляется, что тасованные числа являются первым шагом на этом пути.

IX. Дидактика и обучение

Что касается обучения теории вероятностей, то дело начинает хромать там, где нужно переходить к ее применениям. Как следует обучать людей самых разных специальностей (техников, естествоиспытателей и врачей) применениям теории вероятностей в этих областях знаний? Автор данной статьи не верит в то, что можно преподавать прикладную математику вообще, но считает, что обычную математику можно преподавать с особым упором на возможности ее практического применения.

В 1952 году в Варшаве, а теперь и во Вроцлавском университете в рамках математических курсов при подготовке магистров было введено изучение применений статистики. Кроме того, в Главной школе планирования и статистики в Варшаве открывается магистерская специализация в области математической статистики и ее применений. Я считаю излишним выдвигать далеко идущие требования к кафедрам, институтам и дотируемым образовательным учреждениям. Импульс развития должен придти из каких-то других мест, где действительно будут применяться теория вероятностей и математическая статистика.

Людям советуют ходить к врачам и не ходить к математикам. А ходили бы они к врачам, если бы последние читали бы только лекции по медицине? Ходили бы они к врачам, если бы не было больниц, клиник и аптек, если бы существовали только профессора медицины или преподаватели гигиены, но никто не умел бы обследовать больного и выписать ему лекарство? Все наше начальное и высшее математическое образование будет бесполезным до тех пор, пока на каждой фабрике, в каждой конторе, каждом ведомстве, банке или в управлении железной дорогой не будут работать математики-практики. Эти специалисты должны давать математические советы, т. е. уметь лечить «математические болезни». Подобно врачу, математик-практик должен лечить своих пациентов (людей, жалующихся на математическое недомогание), а не требовать, чтобы они сами себе ставили диагноз.

Выступление в дискуссии на конференции «Статистика как метод познания»[1]

Более четверти века сотрудничая с естествоиспытателями и врачами, я вижу, как из года в год растет понимание роли математических методов в соответствующих сферах. Но с другой стороны, нельзя не заметить и другие явления, из которых сильнее всего меня беспокоит недостаток постоянной связи между страной естествоиспытателей и островом, населенным математиками. Даже в тех редких случаях, когда туристу-естествоиспытателю удается высадиться на этот остров, никто из островитян не позаботится, пожалуй, чтобы путешественник поскорее попал по нужному адресу, так что путешественник обычно входит в первую понравившуюся ему избу. Иногда ему везет, а чаще всего — нет, ибо не каждый, кто называет себя математиком, является им в том значении, которое отвечает потребностям естествоиспытателя. Случается также, что разочарованный турист возвращается домой с убеждением, что на острове живут одни глухонемые. Как у математиков (особенно глухонемых), так и у естествоиспытателей сложилось мнение, что во всем повинен недостаток математического образования у естествоиспытателей, причем у последних это часто перерождается в раздражающий комплекс неполноценности, который делает невозможным или, по меньшей мере, затрудняет сотрудничество. При сотрудничестве с естествоиспы-

[1] Профессор Штейнгауз не смог лично участвовать в конференции «Statystyka jako metoda poznawcza», организованной в Варшаве в 1954 г. Свое выступление в письменном изложении он направил участникам конференции. — *Прим. ред. польского издания*.

тателями математиков мало интересует, знают ли они математику чуть больше или чуть меньше рядового адвоката, писателя или железнодорожного служащего, но нас приводит в отчаяние, когда естествоиспытатель не отличает факты от гипотез, умозаключения от предположений и определения от утверждений. Такая путаница наблюдается даже при обсуждении фактов, подмеченных им самим, или его собственных заявлений. Поразительно часто мы, математики, должны повторять декларации, представляющиеся нам очевидными, и почти всегда эти декларации упираются в «железобетонную стену» в мозгах именно тех «скромных» естествоиспытателей, которые постоянно твердят, что они совсем не знают математику. Скромность, однако, не мешает им втолковывать нам самые нелепые идеи, типа того, что «в математике один плюс один всегда равно двум, а в медицине не всегда один плюс один будет два». Я хотел бы здесь недвусмысленно констатировать, что считаю такое суждение полным нонсенсом, который свидетельствует лишь о следующих фактах: 1) высказывающий его (вопреки упомянутой скромности) почему-то полагает, что знает определение математики; 2) он не знает, чем является математика; 3) он не знает методологии собственной науки; 4) указанные заблуждения 1), 2) и 3) связаны не с тем, что этот естествоиспытатель не изучал высшую математику, а с тем, что в результате повторения в течение всей жизни некоторых рутинных действий он совершенно разучился мыслить. В какой степени живая природа следует равенству $1 + 1 = 2$, говорят хотя бы законы сохранения энергии и массы, которым любые живые организмы подчиняются так же точно, как и неодушевленная материя.

По прочтении программы варшавской конференции у меня возникли некоторые подозрения и сомнения, возможно, необоснованные или преувеличенные. Составители программы, по-видимому, считают, что некоторую часть молодых математиков следует выучить на хороших статистиков, а некоторых естествоиспытателей следует пропустить через мельницу курсов и экзаменов по математике, после чего все остальное сложится само собой. Я позволю себе высказать иное мнение. Неотъемлемой частью обучения каждого студента-медика является клиническая практика, и нельзя себе представить врача, которому болезни и их лечение известны только по книгам и лекциям. Как для астрономии самым важным являются звезды (а для ботаники розы), так и для статистики самым важным являются ее применения. Реальная проблематика теории вероятностей изобилует изящными задачами, и некоторые ученые способны оценить это изящество и готовы без остатка посвятить себя этим задачам, но это лишь увеличивает опасность, что ученики известных вероятностников сами станут прекрасными теоретиками статистики, от которых естественные и медицинские науки «не дождутся детей». Разве не сообщали газеты, как ни в чем не бывало, что некто X является величайшим на свете теоретиком в области прикладной математики? Возвращаясь к сравнению со студентом-медиком, мы должны считать практику существенной частью подготовки студента к его будущей роли математического консультанта естествоиспытателей, а следовательно, к участию в таких работах, с которыми ему самому когда-либо придется столкнуться. На самом деле нет никакой «чистой» статистики, а есть только математическая доктрина (называемая теорией вероятностей) и есть естественные науки. Статистиками следует называть тех специалистов, которые хотят и умеют применять теорию вероятностей к этим наукам, а определение «чистый статистик» можно оставить тем, кто не желает быть ни математиком, ни естествоиспытателем.

Не будем отрицать необходимости дополнительного образования естествоиспытателей и медиков в математическом направлении. Эта необходимость возникла не только в Польше, но и за рубежом, в результате чего и появились учебники, адаптированные к потребностям естествоиспытателей или медиков. Прекрасным примером является книга Хилла «Principles of Medical Statistics» (Лондон, «The Lancet», 1937), которая выйдет в переводе на польский язык. На всего лишь 163 страницах этой книги врач найдет все, что ему нужно из статистики, причем материал изложен ясно, без ошибок и элементарно на основе реальных примеров, взятых из врачебной практики. Если бы существовали подобные книги для химиков, биологов и географов, их также стоило бы перевести.

Почему, спрашивается, мы должны переводить чужие книги вместо того, чтобы самим писать их, если польская математика является всемирно известной? Однажды я спросил одного прекрасного математика, обремененного в университете лекциями для естественников, какие разделы математики он включает в свой курс. Он ответил, что придерживается программы, составленной естествоиспытателями, и для него явилось откровением мое мнение, что ни один естествоиспытатель не может составить такую программу. Пару лет спустя я по официальным каналам достал такую программу, действительно, оказавшуюся очень забавной (смешнее выглядел бы, пожалуй, только курс физиологии, написанный математиком). Вероятность того, что кто-то одновременно является математиком и естествоиспытателем и что такой человек захочет и сумеет написать учебник, настолько мала, что таких специалистов следует специально разыскивать по всей планете, чтобы встретить такой редкий случай. Поэтому надо внимательно следить за иностранной литературой, тем более, что хотя весь математический багаж естествоиспытателя должен уместиться в одной небольшой книге, эта книга не может быть одной и той же и для врачей, и для географов. Лекция является всего лишь суррогатом, и без хорошего учебника ее чтение нельзя будет доверить кому-либо, кто не имеет опыта сотрудничества с естествоиспытателями, что, повторяю, является исключительно редким случаем.

Ни лекции, ни книги не устраняют препятствий, возникающих при подготовке научной публикации по проблемам применения статистики. Вообразим, например, следующую ситуацию: некий врач заметил, что туберкулез вызывает превышение над нормой определенного вида белых кровяных телец, вычислил среднее значение этих изменений по результатам нескольких десятков наблюдений и опубликовал эти данные в печати. Критик, который, к сожалению, был немного знаком со статистикой, указал автору, что его результат неубедителен, потому что среднее превышение не доходит до двух сигм (σ) и составляет всего 1.9 σ. Расхождение является несущественным, но критик безапелляционно верил в правило двух сигм и не хотел прощать автору ни капельки расхождений. Автор не мог защититься и обратился за помощью к статистикам. Даже специалисты по статистике в данном случае поддались внушению, и им потребовалась пара дней на то, чтобы сориентироваться и сообразить, что в данном случае вычисление среднего значения вообще не имело смысла, так как утверждение относилось не к среднему пациенту, а к каждому в отдельности (оно означало, что туберкулез почти всегда повышает функцию телец Ypsylon). Справедливость вывода вытекала из статистики и по существу нарушала самые жесткие требования. Мораль такова: любая ситуация (состоящая в наблюдениях, их описании и регистрации численных значений) не имеет научного содержания, если она не сопровождается логическим анализом утверждения автора, и (вопреки распространенному мнению) именно в этом направлении должно быть ориентировано вмешательство математика.

Иногда полученные в результате наблюдений данные можно оформить в виде математических выражений, но это требует от естествоиспытателя большого объема вычислений, а от читателя — приличного знания математики. В одном конкретном случае я спросил, зачем нужна такая мучительная процедура, и получил ответ, что так поступает Р. Э. Фишер (которого я лично считаю великим статистиком), но поскольку в этом случае речь шла о плодовитости свиней, я и по сей день не знаю, зачем надо было украшать эту задачу математическими формулами, содержащими меньше информации, чем сами наблюдения. Еще более загадочным было то, что предлагаемые формулы не могли использоваться ни для интерполяции, ни для экстраполяции результатов наблюдений.

Я считаю, что в любую статью не следует вносить ни одной таблицы, ни одной формулы, ни одного вычисления до того, пока автор не выяснит для себя (и не объяснит читателям), какую теоретическую и практическую пользу получит естествоиспытатель от всех этих вычислений, таблиц и формул!

Статистическое оценивание как метод приемки товаров массового производства

Несмотря на то, что исследования, относящиеся к методам статистического оценивания, продолжаются, а их история охватывает всего несколько месяцев, я решил довести этот очерк до сведения широкого круга лиц, интересующихся промышленной статистикой, до того как текущий материал будет преобразован в стандарты. Поскольку я и сам до сего времени несу ответственность за описанные здесь методы, я заинтересован в предоставлении их на суд критики. Несомненно, Польский комитет по стандартизации, быть сотрудником которого я считаю за честь, разделяет это мнение.

Повсеместно используемые планы выборочного исследования штучных товаров предусматривают альтернативную классификацию каждого экземпляра по принципу *хороший–плохой* и альтернативное решение относительно каждой партии по принципу *принять–отклонить*. В простейшем случае план определяется числами m и n (что указывается символом $m//n$), где число n — количество экземпляров в пробной партии, а m — то наибольшее количество плохих экземпляров в этой партии, при котором еще возможно решение «принять». Таким образом, план 3//50 означает следующее правило: случайным образом выбрать 50 экземпляров из партии, испытать их и принять партию, если среди них обнаружено 0, 1, 2 или 3 плохих экземпляра, или же отклонить партию, если обнаружено 4, 5, 6,… или 50 плохих экземпляров. Планы типа $m//n$ являются результатом математической теории, которая обусловлена четырьмя принятыми по договоренности параметрами, обозначенными буквами w_1, w_2, β_1, β_2. Параметры w_i — верхний и нижний уровни дефектности партии (дефектностью партии мы называем долю плохих экземпляров в ней). Верхняя погрешность w_1 такова, что приемщик соглашается только в виде исключения принять партию, если погрешность выше этого значения, нижняя же погрешность w_2 такова, что поставщик может решиться на доставку партии с погрешностью значительно ниже данной только в виде исключения. Смысл слов «в виде исключения» определяется параметром β. Задание параметра $\beta = 95\%$ ($\beta_1 = \beta_2 = 0.95$, как это обычно делается) означает, что мы с вероятностью 95% защищаем приемщика от принятия партии с погрешностью w_1 и с такой же вероятностью (95%) защищаем поставщика от поставки партии с погрешностью w_2.

Естественно, возникает вопрос об обоснованности введения этих параметров. Обычно почти во всех стандартах параметр β принимается равным 90% или 95%. Это значение не основано ни на каких рассуждениях; пожалуй, и так ясно, что если можно принять 90% или 95%, то нет серьезных оснований возражать против порога в 93%. Хуже обстоит ситуация с оценкой, когда некачественный товар может нанести большой вред (например, если он может испортить дорогостоящую машину), так что риск в 5% может быть слишком велик. Смиримся с этой трудностью и признаем раз и навсегда авторитет большинства стандартов, основанных на $\beta = 95\%$. Требуется определить параметры w_i. Эксперименты и компромисс позволяют приближенно установить границу погрешности, выше которой товар уже является нежелательным, а также другую границу, ниже которой условия производства не позволяют преуспеть поставщику. Таким образом, не без сомнений и оговорок мы определим четыре параметра (w_1, w_2, β_1, β_2), а уже затем задачей математика будет установление плана $m//n$. Такая задача решена и, например, в проекте польского стандарта PN/N-03001, среди прочих, мы найдем план 3//60 со значениями $w_1 = 12.92\%$ и $w_2 = 2.28\%$. Кроме этих планов, называемых единичными, в статистическом контроле известны многоступенчатые и последовательные планы, о которых здесь мы лишь скажем, что и они требуют задания четырех параметров.

Первым упреком, который следует предъявить описанному методу (который мы назовем классическим), является его непонятность для практиков. Эту непонятность нельзя объяснить недостатком математической подготовки — напротив, практики более математиков склонны к признанию испытанных способов. Но ни те, ни другие не сумеют однозначно определить необходимые параметры. Метод имеет и другой, более серьезный недостаток: классические планы совершенно не учитывают ни численность партии, ни затраты на исследование отобранных экземпляров. Правда, существуют общепринятые таблицы, которые количество отобранных для исследования экземпляров ставят в зависимость от численности партии, но они не только не имеют каких-либо теоретических обоснований, но и сводят на нет все усилия по разъяснению сущности четырех параметров. Проблема заключается в том, что при задании $\beta = 95\%$ увеличение n приводит к сближению параметров w_i. Поэтому, если мы в дальнейшем зададим значения w_i на основании опыта, то уже не сможем учесть численность партии согласно общепринятой таблице, а если захотим учесть эту численность (т. е. рассчитать по таблице n), то должны будем отказаться от полюбившихся эмпирических значений w_1 и w_2.

Этот второй упрек можно было бы не принимать во внимание в тех частых случаях, когда численность партии не имеет значения. Многие стандарты придерживаются данного принципа, однако легко показать, что он является ложным. План 3//60 хорош для приемщика партии из 1000 апельсинов, но захочет ли этот приемщик по результатам проверки 60 апельсинов разрешить принять корабельный груз, состоящий из 2000 тонн апельсинов? Здравый рассудок повелевает в данном случае исследовать пробную партию из нескольких тысяч апельсинов, причем затраты на это ничтожны по сравнению с риском, который представляет ошибка при таких больших перевозках. Ясно также, что основную роль играет не численность партии, а ее стоимость: если партия — это куча песка, состоящая из миллионов песчинок, то не окупится исследование под микроскопом даже

60 песчинок, а при закупке партии из ста локомотивов стоит исследовать каждый из них.

Придерживаясь обычных стандартов, мы должны были бы при приемке кучи размолотого известняка подвергнуть проверке тысячи гранул, неся при этом затраты, в тысячи раз превышающие стоимость известняка, а при закупке ста локомотивов исследовать только несколько из них, т. е. допустить риск, в сотни раз превышающий стоимость исследования всех локомотивов. Здравый смысл подсказывает нам, что разумнее принять известняк «на глаз» (сведя стоимость исследований к нулю), но тщательно проверить все локомотивы (сведя к нулю риск ошибки).

Из сказанного очевидно, что численность пробной партии, наилучшим образом отвечающая цели исследований, должна зависеть от того, чем мы рискуем при ошибке, т. е. в простейшем случае — от стоимости партии и от затрат на исследование одного экземпляра. Поскольку обычно применяемые стандарты не предусматривают такой зависимости, ее следует оставить на усмотрение исследователя.

Помимо указанных недостатков классического метода, существуют и другие. Например, он приводит к расхождению на основе правила Байеса, которое ставит эксперта-статистика между Сциллой принципиальной ошибки (которая ему угрожает, если он примет *a priori* равномерное распределение качества товара) и Харибдой предполагаемого метода (не позволяющего ему определить, какие риски допускает приемщик, используя план $m//n$). Кроме этого, принятие альтернативного решения ставит перед плановым хозяйством вопрос утилизации отклоненного товара. Действительно, отказ от товара будет означать, что мы завалим некачественной продукцией склады магазинов, фабрик, железнодорожных центров и вокзалов. Товар можно отклонить фиктивно или формально (а на самом деле принять), но тогда следует подвергнуть поставщика судебным тяжбам с вышестоящими властями. Ясно, что первое решение соответствует классическому методу, но влечет за собой экономические убытки, которыми нельзя пренебрегать, второе же заменяет статистический контроль регистрацией испытаний, дорогостоящих и лишенных тех выгод, которые сулит классический метод, т. е. гарантии для обеих сторон.

Из этого введения, пожалуй, достаточно ясно, насколько важно внедрить в практику метод, который был бы свободен от перечисленных недостатков классического метода и, кроме того, был бы понятным и легким в применении, т. е. заслуживал бы воплощения в жизнь. Именно таким является метод статистической оценки, имеющий и другие преимущества, о которых будет сказано ниже.

§ 1. Принцип статистического оценивания

Проще всего представить новый метод на примере оценки товаров, обладающих свойством аддитивности, т. е. когда стоимость партии складывается из суммы стоимостей отдельных экземпляров. Так, например, шахта или город, закупающий партию электроламп для освещения улиц, может считать стоимость партии равной сумме стоимостей отдельных ламп, причем каждую лампу можно оценить в соответствии с ее мощностью (в ватт-часах) и затратами на хранение, установку и извлечение из патрона. Если x_i есть стоимость i-й лампы ($i = 1, 2, \ldots, N$), а партия состоит из N ламп, то стоимость партии равна $W = \sum_{i=1}^{N} x_i$. Представим себе, что мы выбираем из партии n ламп и подвергаем их последовательному испытанию в лаборатории, записывая стоимости x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Среднее из этих чисел, $\bar{x}_n = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ мы принимаем за среднюю стоимость лампы во всей партии и на этом основании оцениваем стоимость партии как $N \cdot \bar{x}_n$. Эта процедура составляет суть договора, и поставщик должен отдать партию, а получатель принять ее за оплату Z, где

$$Z = N \cdot \bar{x}_n. \tag{1}$$

На самом деле Z зависит от случая, так как лампы отбираются для испытаний произвольным образом и Z может оказаться отличной от истинной стоимости W, однако игра в соответствии с условиями договора является справедливой, если

$$E(Z) = W, \tag{2}$$

т. е. если математическое ожидание оплаты равно истинной стоимости. Выражение (2) есть следствие элементарной теоремы, гласящей, что математическое ожидание суммы случайных переменных равно сумме их математических ожиданий, а математическое ожидание случайной переменной, умноженной на константу c, равно произведению константы c на математическое ожидание этой переменной.

Однако легко заметить, что описанная игра может быть очень рискованной. Например, если $n = 2$, а $N = 1\,000\,000$, то это означает, что партию из миллиона ламп мы оцениваем по испытанию двух штук. Нам следует быть очень осторожными и в случае $n = 100$, $N = 500$, т. е. когда партию из 500 ламп мы оцениваем по результатам испытаний ста штук. Кардинальный вопрос в таких ситуациях состоит в разумном определении числа n.

§ 2. Постулат минимального экономического ущерба

Абсолютная разность $|Z - W|$ является мерой экономического ущерба, возникшего по причине неправильной оценки. Ущерб возникает как в случаях, когда поставщик получил за товар мало ($Z < W$), так и тогда, когда он получил много ($Z > W$). В обоих случаях происходит неэквивалентный обмен товара на наличные деньги. Помимо этого, возрастает и ущерб за счет затрат на сами испытания, так как эта деятельность не создает ценностей. Общая стоимость испытаний равна

$$K + n \cdot k, \tag{3}$$

где K — предварительные затраты, не зависящие от n (подготовка образцов для испытаний и персонала), а k — стоимость испытаний одного экземпляра после отчислений на подготовку.

Постулат минимального экономического ущерба требует сведéния к минимуму суммы ущерба от неправильной оценки и стоимости испытаний. Поскольку разность $|Z - W|$ есть случайная переменная, то вместо нее следует использовать ее математическое ожидание $E\,|Z - W|$. Необходимо, чтобы ожидаемый экономический ущерб был минимален:

$$S = E\,|Z - W| + K + nk = \min, \tag{4}$$

причем это условие должно выполняться за счет соответствующего выбора числа n, поскольку это единственное остающееся варьируемым число. Все другие величины, такие как стоимость экземпляров, устанавливаются по соглашению и становятся известными до начала испытаний (а также указываются в договоре), либо являются константами (K, k).

§ 3. Принцип минимакса

Решение задачи минимизации S, т. е. суммы вида (4), было бы легче при известном распределении случайной переменной x в партии, потому что тогда в $|Z - W|$ фигурировали бы выражения, образованные из переменных с известными распределениями и мы могли бы вычислить математическое ожидание $E\,|Z - W|$. Впрочем, тогда отпала бы необходимость в самих испытаниях, потому что была бы известна W, т. е. истинная стоимость партии, и не потребовалось бы никакой статистической оценки. С другой стороны, если мы ничего не знаем о распределении x, то задача становится неразрешимой. Однако обычно в реальных ситуациях известны лишь некоторые свойства распределения: например, в случае с лампами известно, что ни одна из них не имеет стоимость ниже a и выше b. Будем пока считать n заданным и попытаемся найти максимум выражения $E\,|Z - W|$. Легко убедиться, что

$$E|Z-W| = N/n \cdot E|(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x})|, \tag{5}$$

где $\bar{x}$ означает $E(x)$, т. е. среднее значение x для всей партии. Можно также показать, что

$$E(x_i - \bar{x}) = 0 \text{ для каждого } i, \text{ а также } \max(x_i - \bar{x}) - \min(x_i - \bar{x}) = b - a. \tag{6}$$

Обозначив разность $x_i - \bar{x}$ через y_i, мы должны определить наибольшее возможное значение $E|y_i|$, если известно, что $E(y_i) = 0$ для каждого i, а интервал изменения переменной y_i равен $b - a = d$. Легко убедиться, что этот максимум достигается, если каждая из независимых друг от друга переменных y_i принимает только крайние значения $\pm(b - a)/2$, каждое с частотой 50%. Вычислим $E|y_i|$ при этих условиях:

$$E|y_i| = (b - a)/2 = d/2. \tag{7}$$

Легко показать также, что при тех же условиях получается и наибольшее возможное среднее отклонение σ, которое определяется выражением

$$\sigma^2 = E(y_i^2) - E^2(y_i), \tag{8}$$

а если $y_i = \pm d/2$ и $E(y_i) = 0$, то из (8) сразу получаем

$$\sigma = d/2. \tag{9}$$

Тогда выражение (5) можно переписать в виде

$$E|Z - W| = N/\sqrt{n} \cdot E\left|\sum_{i=1}^{n} y_i \Big/ \sqrt{n}\right|. \tag{10}$$

Согласно теореме Муавра–Лапласа, распределение случайной величины Σ, фигурирующей в (10), при увеличении n стремится к нормальному с равным нулю математическим ожиданием и средним отклонением σ, если σ является средним отклонением каждой из переменных y. В связи с этим для достаточно больших n выражение $E|\Sigma|$ в (10) можно с учетом (9) записать в виде

$$\sigma\sqrt{2/\pi} = d/2 \cdot \sqrt{2/\pi} = d \cdot 0.399. \tag{11}$$

Тогда, округляя 0.399 до 0.4, получим

$$E|Z - W| = 0.4 \cdot Nd/\sqrt{n}. \tag{12}$$

Это максимальное значение ожидаемого ущерба от неправильной оценки (его не следует понимать как максимальное значение ущерба!). Выражение для S (4) при этом принимает максимальное значение

$$S_{\max} = 0.4 \cdot Nd/\sqrt{n} + K + nk, \tag{13}$$

которое нам и предстоит минимизировать соответствующим выбором n. Условие минимума мы получим, взяв производную от правой стороны (13) и приравняв ее нулю:

$$-\,0.2 \cdot N \cdot d \cdot n^{-3/2} + k = 0, \tag{14}$$

и, следовательно,

$$n = (Nd/5k)^{2/3}. \tag{15}$$

Для практика метод оценивания сводится к двум формулам, (1) и (15). Сначала вычисляется численность пробной партии по формуле (15), а затем случайным образом отбираются n экземпляров, определяется стоимость каждого из них, находится среднее значение $\bar{x}_n$ и по формуле (1) принимается партия за оплату Z.

Принцип минимакса может вызвать у читателей определенное затруднение. Для иллюстрации можно воспользоваться примером игры в шахматы: я имею несколько ходов на выбор, и на каждый из них противник имеет несколько ответов. В связи с этим, на каждый из моих возможных ходов найдется такой ответ, который дает противнику **максимальный** шанс, а поэтому я выбираю такой ход, которому соответствует **минимальный** шанс, т. е. наименьший из этих максимумов.

§ 4. Обсуждение предыдущего результата

Заметим, что формула (15) не содержит K, т. е. численность пробной партии не зависит от затрат на подготовку к испытаниям. Если исключить эти затраты, то ожидаемый ущерб (13) будет состоять из двух слагаемых, первое из которых равно $0.4 \cdot Nd/\sqrt{n}$ и представляет собой ожидаемый ущерб от неправильной оценки, а второе равно nk и является текущей стоимостью испытаний. Подставляя в эти выражения n из формулы (15), мы получим сумму в виде

$$2\cdot(Nd/5)^{2/3}\cdot k^{1/3} + (Nd/5)^{2/3}\cdot k^{1/3} = 3(D/5)^{2/3}\cdot k^{1/3}, \tag{16}$$

где первое слагаемое в два раза больше второго, из чего следует практическое правило: текущая стоимость испытаний равна половине ожидаемого ущерба от неправильной оценки (D означает произведение Nd).

Может случиться, что формула (15) даст для n дробное значение. Однако поскольку мы используем приближение (основанное на теореме Муавра–Лапласа), которое на практике является достаточно точным только для $n > 25$, то не только дробный результат для n, но и значение $n < 25$ лежат за пределами применимости метода. Это вовсе не означает, что метод оценивания не включает эти случаи (которые имеют место, когда d является малым, т. е.

когда известно, что товар однородный, а k является большим, т. е. испытания являются дорогостоящими). В этих ситуациях точное определение n представляет собой очень трудную математическую задачу, однако они возникают чрезвычайно редко.

Может также случиться, что формула (15) даст для n значение, превышающее N (что бывает, когда известно, что партия является неоднородной, а затраты на испытания невелики). Однако и в этом случае теория остается применимой: численность пробной партии может превышать всю партию товара, так как вывод основан на предположении, что испытание не изменяет состава партии и ее экземпляры, а каждый экземпляр после испытания и оценки возвращается в партию. На практике поступают иначе, о чем будет сказано в § 7.

Заметим также, что выражение $Nd = D$ представляет собой диапазон стоимости партии, т. е. разность между ее наибольшей и наименьшей возможной стоимостью. Формулу (15) можно записать в виде

$$n = (D/5k)^{2/3}, \tag{17}$$

из чего видно, что численность пробной партии зависит только от отношения диапазона стоимости партии к текущей стоимости испытаний одного экземпляра.

§ 5. Средний разброс и метод дюжин

Формула (15) требует знания диапазона d, и ее применение становится невыгодным в тех случаях, когда лишь немногие экземпляры в партии имеют крайние стоимости. Если известен, хотя бы приближенно, средний разброс стоимости в партии, то можно использовать другую формулу. Средний разброс определяется как $E\,|\,x - E(x)|$, поэтому в терминах § 3 средний разброс a случайной переменной x равен

$$a = E|\,x_i - E(x_i)| = E|y_i| \text{ для каждого } i = 1, 2,\ldots, n. \tag{18}$$

Если среднее отклонение случайной величины x_i (а стало быть, и y_i) равно σ, а распределение этой величины (а, значит, и переменной y_i) является нормальным, то

$$a = \sigma \cdot \sqrt{2/\pi}, \quad \sigma = a \cdot \sqrt{\pi/2}. \tag{19}$$

Используя теорему Муавра–Лапласа из § 3, найдем для случайной переменной S среднее отклонение σ, или $a \cdot \sqrt{\pi/2}$. Поскольку Σ также является нормально распределенной переменной с нулевым математическим ожиданием, то $E|\Sigma|$ представляет собой средний разброс этой переменной, который можно вычислить по среднему отклонению (19), умножив последнее на $\sqrt{2/\pi}$. Это дает

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} y_i / n\right| = a \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{2/\pi} = a. \qquad (20)$$

Формулы (10) и (20) приводят к соотношению

$$E|Z - W| = Na/\sqrt{n}, \qquad (21)$$

откуда, так же как и (15) из (12), следует

$$n = (Na/2k)^{2/3}. \qquad (22)$$

Этот метод предполагает нормальное распределение случайной величины x. Обычно это условие не выполняется, однако эту трудность можно обойти с помощью «метода дюжин»; используется то обстоятельство, что сумма 10, 12 или большего числа независимых случайных величин с одним и тем же распределением в приближении имеет нормальное распределение. Таким образом, достаточно, например, принять дюжину электроламп за один экземпляр и получить из наблюдения средний разброс стоимости дюжин. Формула (22) дает нам число n **дюжин** ламп, необходимых для испытаний и оценки (попросту путем задания стоимости одного экземпляра). Следует помнить, что в этом методе a есть средний разброс стоимости **дюжины**, вследствие чего, очевидно, число N будет в 12 раз меньше, а k (стоимость испытаний дюжины) в 12 раз больше, чем для одного экземпляра. Простые вычисления приводят к такому правилу: в формуле (22) можно сохранить значения символов n, N и k, а a рассматривать не как средний разброс стоимости отдельных экземпляров, а как $a = a'/\sqrt{12}$, где a' — средний разброс стоимости дюжин (если бы a' было средним разбросом стоимости десятков, то надо было бы считать $a = a'/\sqrt{10}$).

§ 6. Последовательные приближения

Преимуществом формулы (15) перед формулой (22) является то, что параметр d обычно известен, а слабая сторона этой формулы в том, что затраты на испытания превышают потребности, так как допускается возможность наихудшего распределения. Формула (22) не имеет этого недостатка, но редко используется непосредственно, поскольку параметр a неизвестен. Ниже мы покажем, как можно обойти это препятствие. Для этого в формуле (22) надо временно принять в качестве a некоторое значение a_0 и вычислить для n временное значение n_0. Далее мы вместо n_0 отберем для испытаний лишь r экземпляров (например, возьмем $r = n_0/2$) и вычислим средний разброс стоимости экземпляров этой партии, т. е. величину

$$a_1 = 1/r \cdot \sum_{i=1}^{r} |x_i - \bar{x}_r|, \quad \text{где } \bar{x}_r = 1/r \cdot \sum_{i=1}^{r} x_i. \tag{23}$$

Полученное значение a_1 мы подставим в (22) вместо a и получим некоторое значение n_1. Если n_1 меньше r, то останавливаемся на уже отобранной и испытанной партии; если n_1 близко к n_0, то мы добираем еще $n_1 - r$ экземпляров и основываем оценку на совокупной пробной партии из n_1 экземпляров. Если же n_1 значительно больше n_0, то мы принимаем n_1 в качестве временного n и поступаем, как выше (т. е. добираем к r столько экземпляров, чтобы увеличить пробную партию в n_1/ n_0 раз и т. д.). Через пару шагов приближение заканчивается, так как n_j будет близко к n_{j-1} или меньше численности уже отобранной и испытанной партии. Поскольку здесь не идет речь о точности отдельных шагов, которые не являются конечными, то использование формулы (22) не будет утомительным. Заметим, что эту формулу можно превратить в номограмму, так как в некоторых случаях (в частности, когда величина k для одного и того же вида товара в течение длительного времени остается неизменной) формулу (22) можно представить с помощью трех параллельных логарифмических шкал. Определение разброса a_j требует только простых вычислений вида (23).

Пример. Партия состоит из 100 000 электроламп. В зависимости от силы света и продолжительности свечения она по соглашению делится на четыре класса со стоимостями 500 злотых, 300 злотых, 100 злотых и –50 злотых (отрицательная цена относится к лампам, которые перегорают так быстро, что являются непригодными и вызывают бесполезные затраты у приемщика). Испытание одного экземпляра обходится в 275 злотых, так что мы имеем $d = 500 - (-50) = 550$, $N = 100\,000$, $k = 275$, $D = Nd = 55\,000\,000$; формула (17) дает временное значение $n_0 = (55 \cdot 10^6/5 \cdot 275)^{2/3} = (40\,000)^{2/3} = 1170$. Выберем случайным образом 450 ламп и разделим их на 50 групп по 9 экземпляров. Лабораторные испытания определили, к какому классу относится каждая лампа, и отсюда следует стоимость каждой группы. Результаты оказались таковы:

1 группа имеет стоимость	4 500 злотых	всего 4 500 злотых
5 групп имеют стоимость по	4 000 злотых	всего 20 000 злотых
13 групп имеют стоимость по	3 500 злотых	всего 45 500 злотых
17 групп имеют стоимость по	3 000 злотых	всего 51 000 злотых
4 группы имеют стоимость по	2 500 злотых	всего 10 000 злотых
10 групп имеют стоимость по	2 000 злотых	всего 20 000 злотых
50 групп		151 000 злотых

Средняя стоимость группы равна 151 000 : 50 = 3 020 злотых, а средний разброс составляет

$$1/50\{1(4\,500 - 3\,020) + 5(4\,000 - 3\,020) + 13(3\,500 - 3\,020) + \\ + 17(3\,020 - 3\,000) + 4(3\,020 - 2\,500) + 10(3\,020 - 2\,000)\} = 501.$$

В соответствии с последним правилом из § 5 это значение следует разделить на $\sqrt{9} = 3$, что дает $a_1 = 501 : 3 = 167$. По формуле (22) сразу находим n_1:

$$n_1 = (100\,000 \cdot 167/2 \cdot 275)^{2/3} = 973.$$

Это число близко к 1170, а поскольку мы уже испытали 450 экземпляров, нам следует испытать еще 523, чтобы довести численность пробной партии до 973 экземпляров. Если новые экземпляры будут иметь общую стоимость 165 000 злотых, то средняя стоимость одной лампы составит 316 000 : 973 = 324.8 злотых. Партия будет принята за 32 480 000 злотых.

В этом примере мы не использовали временное значение a_0. Описанный в данном параграфе метод ничего не говорит о выборе значения a_0, поэтому мы применяли формулы (15) и (17), основанные на диапазоне d. Однако при следующей поставке электроламп с той же фабрики мы могли бы в качестве a_0 взять число 167, полученное как a_1 для текущей поставки, что соответствует следующему практическому правилу: значение a_m (или последнее значение a для принятых партий) может служить в качестве a_0 при определении численности пробной партии для очередной поставки.

Подчеркнем, что некоторая неопределенность при отыскании n не является существенным недостатком нового метода, так как речь идет только о среднем числе экземпляров, и поэтому не существенно — будет ли это среднее равно 1170 или 973. Не будем забывать и о том, что в классическом методе численность пробной партии тоже является достаточно неопределенной и колеблется в более широком диапазоне, а пробная партия там определяет радикальное решение о принятии или отклонении товара.

§ 7. Малые партии

До сих пор мы не учитывали тот факт, что отбор образцов для испытаний изменяет всю партию по двум причинам: 1) полное или частичное уничтожение образцов при испытаниях, 2) уменьшение численности партии за счет невозвращения в нее испытанных образцов. Первое обстоятельство увеличивает стоимость испытаний, что можно учесть при определении коэффициента k, но при возврате образцов в партию изменяется ее стоимость, что нарушает справедливость выводов § 3 и последующих. Невозврат уменьшает численность неиспытанной части партии (однако это выгодно, так как уменьшает ожидаемый ущерб от неправильной оценки), так что некоторое усложнение вычислений оказывается экономически обоснованным и согласуется с представлением практика. Модификация процесса оценки окупается при малых партиях, т. е. когда n является большой частью N.

В этом случае вместо (13) мы будем иметь

$$S_{\max} = 0.4\cdot(N-n)d/\sqrt{n} + K + nk, \tag{24}$$

а вместо (14)

$$-0.2\cdot Nd\cdot n^{-3/2} - 0.2\cdot d\cdot n^{-1/2} + k = 0, \tag{25}$$

или

$$Nd/5\cdot n^{-3/2} = k', \text{ где } k' = k - d/5\sqrt{n}$$

и

$$n = (Nd/5k')^{2/3}, \text{ где } k' = k - d/5\sqrt{n}. \qquad (26)$$

Аналогично, вместо (22) мы получим

$$n = (Na/2k')^{2/3}, \text{ где } k' = k - a/2\sqrt{n}. \qquad (27)$$

Пример. Повторим предыдущий пример (из § 6). По испытаниям 450 электроламп мы получили $a_1 = 167$ и $n_1 = 973$. Используем эти значения в качестве a и n в **правой** части формул (27). Это дает

$$k' = 275 - 167/2\sqrt{973} = 272.33 \quad \text{и} \quad n = (100\,000\cdot 167/544.66)^{2/3} = 980.$$

Увеличение пробной партии с 973 до 980 экземпляров особой роли не играет. В результате испытаний мы получим среднюю стоимость, например 325 злотых. Испытанные экземпляры (поскольку они не подверглись уничтожению) закупаются приемщиком по цене, соответствующей их истинной стоимости, зато остаток партии (т. е. 99 020 экземпляров) — по цене 325 злотых, т. е. за 32 180 000 злотых. Если учесть стоимость не уничтоженных пробных экземпляров, то получим сумму оплаты, отличающуюся от найденной ранее.

В данном случае численность пробной партии составляет около 1% от всей партии. На практике обнаружилось, что в таких случаях отпадает необходимость внесения поправок в изложенный метод, так как не следует забывать, что неточность определения n (обусловленная незнанием закона распределения) при этом гораздо больше выигрыша от поправок. Следовательно, достаточно было бы взять пробную партию из 973 экземпляров и по результату их испытаний оценить только оставшуюся часть всей партии, т. е. 99 027 экземпляров, а за 973 испытанных экземпляра заплатить согласно их истинной стоимости.

А каким был бы результат для партии из 100 экземпляров? Формула (17) в этом случае дает значение $n_0 = 12$, а поправка (26) приводит к результату

$$k' = k - d/5\sqrt{n} = 275 - 550/5\sqrt{12} = 243.25,$$

$$n_1 = (Nd/5k')^{2/3} = (100\cdot 550/5\cdot 243.25)^{2/3} = 12.7 \approx 13.$$

Увеличение численности пробной партии с 12 до 13 экземпляров соответствует изменению на 8% и может иметь практическое значение (в предыдущем примере численность пробной партии увеличилась только на 8 промилле).

Хотелось бы обратить внимание на следующий парадокс: в случае невозврата пробных экземпляров в партию требуемая численность пробной партии возрастает, хотя, как известно, эта методика дает более точную информацию. На первый взгляд представляется, что для получения одного и того же ущерба при невозврате было бы достаточно меньшей пробной партии. Загадка объясняется тем, что при невозврате меньший ущерб можно получить не только даже при той же самой пробной партии, но и еще меньший при большей пробной партии, так как при невозврате мы получаем полную информацию о значительной части партии, благодаря чему справедливее оплачивается само испытание.

§ 8. Упрощение метода оценивания

В типичных случаях приемки товаров, характерных для большей части хозяйственной деятельности, методы оценивания можно свести к простейшим вычислениям, доступным для каждого выпускника общеобразовательной школы.

Формула (17) $n = (D/5k)^{2/3}$ определяет численность пробной партии в предположении, что D есть разность между наибольшей и наименьшей возможными стоимостями партии, а k — текущие затраты на испытание одного экземпляра. Выше было показано, что эта формула может быть получена на основании метода минимакса в предположении наибольшего среднего разброса (т. е. соответствует случаю, когда в партии находится по 50% экземпляров с наибольшей и наименьшей стоимостями).

Если d есть разность наибольшей и наименьшей стоимости двух экземпляров и в партии нет экземпляров с промежуточной стоимостью, то среднее отклонение (стандартное) стоимости одного экземпляра равно $d \cdot \sqrt{w(1-w)}$, где w — погрешность партии, т. е. доля экземпляров с наименьшей стоимостью. Для среднего разброса средней стоимости одного экземпляра пробной партии, состоящей из n образцов, получим выражение

$$\sqrt{2/\pi} \cdot d \cdot \sqrt{w(1-w)/n} = 0.8 \cdot d\sqrt{w(1-w)/n},$$

а затем $E|Z-W| = 0.8 \cdot D \cdot \sqrt{w(1-w)/n}$ (см. формулу (12) из § 3).

Как ранее (15) и (17), на этот раз получим формулу

$$n = (2D\sqrt{w(1-w)}/5k)^{2/3}. \tag{28}$$

При каком w значение n, полученное в соответствии с (28), будет в два раза меньше значения n_{max}, полученного по формуле (17)? Это произойдет при выполнении условия

$$(2\sqrt{w(1-w)})^{2/3} = 1/2,$$

или $w(1 - w) = 1/32$, откуда $w = 2.33\%$ или $w = 97.67\%$.

Из этого следует, что если мы хотим уменьшить n_{max} *наполовину*, то должны будем обратиться к очень однородным партиям (т. е. таким, качество которых выше 97.67% или ниже 2.33%). С менее однородными партиями никогда не следует опасаться, что партия с численностью $n_{min} = n_{max}/2$ будет считаться *большой*. Ввиду того что пробная партия с численностью n_{max} никогда не считается *малой*, для оценки альтернативных партий можно всегда пользоваться следующей таблицей:

D/k	100	200	500	1000	2000	5000	10000	15000	…
n_{max}	7	12	22	34	54	100	160	208	
$n_{ср}$	5	9	17	25	40	75	120	156	
n_{min}	3	6	11	17	27	50	80	104	

В первой строке приведены отношения D/k; во второй — значения n_{max}, вычисленные по формуле (17); в последней строке — $n_{min} = n_{max}/2$, а между ними — средние значения n, равные $(n_{max} + n_{min})/2$.

Эта табличка позволяет осуществлять следующую процедуру оценивания, при которой все вычисления не выходят за рамки умножения и деления. Выбираем пробную партию с численностью n_{min} и по результатам ее испытаний оцениваем всю исходную партию. Дополняем пробную партию до численности $n_{ср}$ и еще раз оцениваем всю партию. Разность оценок дает информацию, полученную при испытании ($n_{ср} - n_{min}$) экземпляров. Если затраты на это испытание превышают стоимость информации, то испытания прекращаются, в противном случае — добираем еще столько экземпляров, чтобы затраты на их испытание в сумме с предыдущими сравнялись со стоимостью информации (однако суммарная численность пробных партий не должна превышать $n_{\max}$). Окончательная оценка исходной партии дается на основании испытаний совокупной пробной партии.

Пример. Партия коробок для папирос содержит 10 000 экземпляров, качественная коробка согласно договору стоит 5 злотых, затраты на проверку коробки составляют 10 злотых, некачественная коробка не имеет стоимости. Для этой партии $D/k = 50\,000 : 10 = 5\,000$, а конкретное значение $n_{\min} = 50$ мы найдем из приведенной выше таблицы в колонке под обозначением 5 000. Отберем в пробную партию 50 коробок и обнаружим одну некачественную коробку, что соответствует оценке в 49 000 злотых. Добираем еще 25 экземпляров и не обнаруживаем среди них некачественных. Поэтому новая оценка составляет $50\,000 \cdot 74/75 = 49\,333$ злотых. Разность стоимости равна 333 злотых, а стоимость этой информации составляет $25 \cdot 10 = 250$ злотых; поэтому нам позволено отпустить еще 83 злотых для испытаний, т. е. испытать еще 8 коробок. Предположим, что среди них мы тоже не находим некачественного экземпляра. Таким образом, мы проверили в совокупности $(50 + 25 + 8) = 83$ экземпляра, среди которых нашелся только один некачественный. Окончательная оценка составляет $50\,000 \cdot 82/83 = 48\,397$ злотых (для особенно любознательных отметим, что поправка оценки в 64 злотых не компенсирует затрат в 80 злотых на испытание оставшихся 8 коробок).

§ 9. Заключение

Метод статистического оценивания сводится к совершенно естественному правилу оплаты за партию товара — в соответствии со средней стоимостью пробного экземпляра, а численность пробной партии определяется исходя из постулата минимального экономического ущерба (что можно сделать без всяких предположений относительно неизвестной партии). Численность пробной партии можно уменьшить, используя некоторую информацию, которую можно получить в процессе испытаний (метод последовательных приближений). Можно показать, что метод статистической оценки является наилучшим с экономической точки зрения, при условии, что речь идет не об интересе сторон, а об интересе государственной экономики. При использовании метода последовательных приближений численность пробной партии подвержена некоторым колебаниям, однако их значение второстепенно, так как они незначительно влияют на оценку. Выражение (16) в сумме с K определяет ожидаемый экономический ущерб от испытаний — этот ущерб неизбежен и должен быть предусмотрен в плановом хозяйстве. Для практических целей формулы для определения численности n можно представить в виде простых номограмм, применение которых не должно вызывать споров, так как для договаривающихся сторон эта численность не является критичной. В наиболее часто встречающихся случаях оценку можно упростить, воспользовавшись табличкой из § 8, избавляющей применяющего стандарт от всех действий, выходящих за рамки трех простых правил арифметики. Одна эта табличка заменяет все планы классического статистического контроля, а сам принцип оценивания имеет важное преимущество перед классической альтернативой «принять – отклонить», которая на практике ведет либо к спорам, либо к компромиссу, весьма далекому от математического смысла статистического контроля. Можно, однако, распространить метод минимального ущерба на альтернативное решение в случае товаров, допускающих отбраковку. Последняя ситуация не была освещена в тексте статьи и требует особого рассмотрения.

Сведения из теории вероятностей, необходимые для понимания текста, можно найти в любом учебнике, например, в книгах Гливенко и Хоэля.

Об установлении отцовства[1]

Предметом настоящей работы является установление судом отцовства в случаях, когда суд приглашает эксперта и получает от него заключение, основанное на серологическом исследовании крови матери, ребенка и мужчины, вызванного в качестве ответчика. Речь идет о разъяснении экспертиз с помощью теории вероятностей и придании им надлежащей формы, а также об указании на не использованные ранее возможности, скрытые в материалах серологических экспертиз и судебных решений.

1. Юридическая проблема. Как наши давнишние уставы, так и Польский семейный кодекс от 27 июня 1950 г. предусматривают установление отцовства в судебном порядке. В Статье 47, § 1 данного кодекса говорится: «При отсутствии добровольного признания, как ребенок, так и мать могут потребовать судебного установления отцовства». Эта формулировка по умолчанию принимает принцип «*mater semper certa est*» (мать всегда достоверно известна), хотя имеют место и другие случаи установления отцовства, которых мы здесь не будем касаться. Будем обозначать через $F(X)$ факт, что мужчина X, ответчик перед матерью M и ребенком D, действительно является отцом ребенка D. Требование судебного установления отцовства обычно имеет целью обязать ответчика выплачивать средства на содержание ребенка или гарантировать ему права наследования, однако гражданский кодекс предусматривает четкое отделение в иске требования установления $F(X)$ от дальнейших требований, основанных на допущении

---

[1] Работа *O dochodzeniu ojcostwa*, представленная Гуго Штейнгаузом на заседании Отделения общественных наук Вроцлавского научного общества 15 марта 1952 г.

F(*X*). Кроме того, в формулировке приговора должно присутствовать *primo loco* (на первом месте) заключение *F*(*X*) либо не-*F*(*X*), а последствия этого заключения — *secundo loco* (на втором месте) (см. Статью 337 Польского гражданского кодекса от 25 августа 1950 г.). Тем самым как в иске, так и в приговоре факт *F*(*X*) является четко изолированным.

Цитированная выше Статья 47 семейного кодекса в § 2 констатирует: «Существует предположение, что отцом является тот, кто имел общение с матерью ребенка в период от трехсотого до стовосьмидесятого дня перед его рождением». Сторона, выступающая в качестве истца, обязана доказать, что ответчик *X* действительно имел общение с *M* в период от 300-го до 180-го дня перед рождением *D*; без этого доказательства иск отклоняется. Однако если суд признает доказательство, — обозначим его основание через *E*(*X*) — то возникнет *praesumptio iuris* (презумпция права) против ответчика *X*, и судья вынесет решение *F*(*X*) на основании *E*(*X*), если только *X* не докажет не-*F*(*X*). К доказательным средствам гражданский кодекс относит также мнения сведущих людей или экспертов, которых суд приглашает на заседание после того, как выслушает предложения сторон по поводу выбора экспертов и их количественного состава (Статья 293 §§ 1 и 2 гражданского кодекса от 25 августа 1950 г.).

Из вышеприведенных замечаний видно, что: 1) до экспертизы в процессе дело доходит только после доказательства истицей *E*(*X*), против которого *X* выдвигает обоснование не-*F*(*X*), впрочем, не противоречащее *E*(*X*); 2) экспертиза имеет целью разрешение альтернативы *F*(*X*) — не-*F*(*X*) на стадии, определенной в п. 1; 3) решение, которое не обязательно соответствует выводам экспертизы, получает отдельную формулировку в судебном постановлении. Обратим также внимание на то, что если ограничиться только теми судебными разбирательствами, в которых дело дошло до экспертизы, то мы должны исключить как те случаи, в которых не удалось доказать *E*(*X*), так и те, в которых *E*(*X*) действительно доказать удалось, но ответчик не поддержал аргумент не-*F*(*X*). В последнем случае утверждение *F*(*X*) может быть поддержано в юридическом смысле (хотя оно и не соответствует фактической истине), но мы обойдем это противоречие, ограничившись только изучением дел, потребовавших экспертизы; в силу этого факт $F(X)$, о котором говорится в дискуссии сторон и судебном постановлении, идентичен факту $F(X)$, о котором говорится в заключении экспертизы.

2. Группы крови. Теория групп крови появилась в начале текущего столетия. Одним из создателей этой теории является польский ученый Людвиг Гиршфельд, автор многочисленных публикаций на эту тему. Некоторые из них предназначены для широкого круга читателей и посвящены вопросам установления отцовства. В них освещается биологическая подоплека задачи и показывается на конкретных примерах связь между теорией групп крови и юридической проблемой[2]. Сначала К. Ландштайнер открыл некоторые свойства человеческой крови, по которым все люди делятся на группы, описываемые сегодня символами O, A, B, AB. Он же совместно с Левином позже обнаружил другие свойства, ведущие к делению на группы M, N и MN. Во время последней войны было открыто свойство Rh, явившееся основой новой классификации. Три упомянутых здесь классификационных признака являются взаимно статистически независимыми. Присутствие в крови элементов, обозначенных приведенными выше символами, или их отсутствие можно объективно установить с помощью соответствующих сывороток, вызывающих или не вызывающих (после смешивания с кровью исследуемого человека) явление агглютинации, в зависимости от того, какую группу крови имеет исследуемый и тот, от кого взята сыворотка. Более подробную информацию об этих явлениях можно найти в упомянутых работах Гиршфельда.

Уже первые исследования групп крови обнаружили, что свойства крови являются наследуемыми. Дунгерн и Гиршфельд, Ландштайнер с Левином, а также Ф. Бернштайн сформулировали законы наследования групп крови, которые подтверждаются огромным экспериментальным материалом. Количественно механизм наследования групп крови строго подчиняется моделям отбора классической теории вероятностей по схеме Менделя.

---

[2] L. Hirszfeld. *Dochodzenie ojcostwa w świetle nauki o grupach krw*i. Вроцлав, 1948.

Серологическая экспертиза по существу основывается на законах наследования групп крови, а в данной работе мы безоговорочно примем как теоретические предпосылки эксперта-биолога, так и его наблюдения.

3. Серологическое исключение отцовства. Применение науки о группах крови к определению отцовства основано на законах наследования групп крови. Так, например, каждое из свойств A, B, M, N, Rh+ имеет ту особенность, что не может присутствовать у ребенка, если его нет в крови ни у матери, ни у отца. Под *свойством* мы здесь понимаем присутствие элемента, обозначенного соответствующей буквой, которое можно обнаружить с помощью необходимой сыворотки. Тогда мы говорим, что свойство имеет тип Z. Если серологическое исследование показывает отсутствие какого-либо свойства C типа Z у матери ребенка *D* и у ответчика *X* и наличие этого же свойства у *D*, то тем самым доказывается факт не-*F*(*X*), и тогда мы говорим, что с помощью свойства C удалось исключить отцовство *X*. В экспертизе при этом дается категорическая формулировка «*X* не является отцом ребенка *D*». На практике ситуация становится очень сложной, если, как это обычно бывает, кровь *M*, *D* и *X* исследуется сразу на наличие нескольких свойств. Для ясности принципиального вывода мы здесь опустим детали, относящиеся именно к таким случаям, содержащиеся в приведенной ниже (п. 9) таблице результатов судебных экспертиз. Приглашая эксперта, суд предполагает, что этот специалист располагает необходимыми сыворотками и умеет профессионально пользоваться ими. Ввиду идентичности факта не-*F*(*X*), категорически установленного экспертом, и юридического факта не-*F*(*X*), который мы пояснили в п. 1, судебное решение должно содержать определение не-*F*(*X*), и действительно суды придерживаются такого принципа на практике, хотя закон их к этому не принуждает. Может случиться, что исключить отцовство с помощью свойства C не удастся, что включает два случая: 1) *M* имеет свойство C или *D* его не имеет — тогда предпосылки, необходимые для исключения, отсутствуют, так что заранее известно, что исследование *X* не исключает его отцовства; 2) *M* не имеет C, *D* его имеет, вследствие чего исследование *X* позволяет надеяться на исключение, но при исследовании у него обнаруживается С. При использовании свойства иного типа, нежели Z, возникают ситуации, аналогичные как 1) так и 2), и тогда эксперт принимает к рассмотрению другие свойства, но каждый раз может потерпеть неудачу, как в случаях 1) или 2). Исчерпав все возможности своих лабораторных исследований, эксперт делает заключение типа: «исследование *не* исключает отцовство ответчика X; т. е. X *может* быть отцом ребенка D, но из серологических исследований не вытекает, что он действительно *является* отцом D». Определение или исключение отцовства при такой формулировке очевидно не является точным, и статистика также показывает, что менее 10% экспертиз (около 9.1%) приводят к исключению отцовства, а более 90% не высказываются категорично ни за $F(X)$, ни за не-$F(X)$. Можно полагать, что так и должно быть, ибо иски в большинстве случаев, по-видимому, указывают на действительного отца. Оставим пока в стороне статистику и займемся другим вопросом: какую информацию дает судьям отрицательный результат экспертизы? Укрепляет ли неудавшееся исключение отцовства мнение *a contrario* (обратное), о котором говорит кодекс, или его необходимо заменить на вероятность, и можно ли вероятность факта $F(X)$ выразить количественно? Ответ на этот вопрос — одна из задач данной работы.

4. Серологическое установление отцовства. Если в популяции, состоящей из n индивидов, свойство С имеют m человек, то отношение $f = m/n$ называется *частотой свойства* С в данной популяции. Частота разных свойств крови достаточно точно известна из записей гематологических институтов, а их оценка облегчается тем обстоятельством, что эти свойства являются скрытыми и независимыми от внешних признаков, так что почти каждый коллектив, составленный из людей, отобранных в какой-либо стране (например в Польше) по отличным от групп крови критериям, представляет собой репрезентативную партию. В частности, такой пробной партией является коллектив мужчин-ответчиков по делу об установлении отцовства. Параметр f одновременно является вероятностью обнаружения свойства С у индивида, наугад выбранного из всей популяции.

Рассмотрим результаты экспертизы некоторого свойства C типа Z, проявляющегося достаточно редко (например, с частотой 5%), т. е. при условии:

$$M \text{ не имеет C}, \ \ D \text{ имеет C}, \qquad (1)$$

$$X \text{ имеет C} \ \ (f = 0.05). \qquad (2)$$

Очевидно, что признаки (1) и (2) не дают оснований для исключения отцовства X. Возникает вопрос: если у мужчины, фигурирующего в иске, обнаруживается эта редкая группа крови, наличие которой у него необходимо, чтобы он мог быть отцом ребенка D (имеющего эту группу, хотя мать ее не имеет), то подкрепляет ли это предположение, что $F(X)$ является истиной? На этот вопрос неопытный эксперт будет склонен ответить: «В связи с (1) и (2) вероятность $F(X)$ равна 95%», что является очевидной ошибкой, так как если в Польше сейчас около 7 миллионов взрослых мужчин, то из них 350 000 имеют группу крови C (5% от 7 000 000 — это 350 000). Формально (с точки зрения науки о группах крови) каждый из них в равной степени может быть отцом ребенка D от матери M — вероятность, что им является именно ответчик X, ничтожно мала (равна 1/350 000). До исследования M, D и X вероятность факта $F(X)$ была равна 1/7 000 000 (в 20 раз меньше, чем до результатов (1) и (2) серологической экспертизы), но и эта величина *была и будет* столь малой, что судья вообще не должен принимать это во внимание.

Неопытный эксперт скажет: «Отцом ребенка D может быть только кто-то, кто имеет группу крови C. Это редкая группа, ее имеет лишь каждый двадцатый человек, а X именно ее и имеет». Само по себе это верно, но, к сожалению, не отвечает на вопрос судьи: «Какова вероятность, что имеет место факт $F(X)$?». У не знакомого с теорией вероятностей человека может сложиться мнение, что высказывание эксперта — всего лишь изложенное другим языком суждение «вероятность $F(X)$ равна 95%», которое мы осудим как ошибочное.

Наше рассуждение, безусловно, не понравится практику, поскольку противоречит его представлению, что обнаружение группы C у X, *именно* у ответчика X, является обстоятельством, которое нельзя отбросить, особенно потому, что группа C редкая.

Это не доказательство, а всего лишь совет (*indicium*, как говорят юристы), но практик имеет свои соображения. Наше вычисление основано на вымышленном предположении, что X выбран наугад из всех взрослых мужчин в Польше, и тогда, действительно, до экспертизы вероятность $F(X)$ будет равна 1/7 000 000, а с учетом результатов (1) и (2) составит 1/350 000. Эти вычисления, однако, совершенно не учитывают того, что X является ответчиком по иску и что уже до экспертизы существовало предположение о возможности его отцовства, так что вероятность факта $F(X)$ уже к моменту приглашения эксперта была довольно высока. Весьма интересно, что так называемую вероятность *a priori* можно вычислить совершенно точно, но почему-то данное обстоятельство никогда до сих пор не учитывалось. Проведем эти вычисления, воспользовавшись материалом 1515 судебных экспертиз, собранных профессором Гиршфельдом.

5. Вероятность *a priori* факта $F(X)$. Предположим, что для некоторой группы C типа Z, частота которой в популяции равна f, выполняется условие (1), и только те X, которые удовлетворяют условию (2), принимаются во внимание как возможные отцы ребенка D матери M.

Предположим, что именно такая ситуация встретилась n раз в судебных разбирательствах с привлечением экспертизы. Сколько исключений отцовства можно ожидать среди этих n случаев? Пусть p — полная, без исключений доля тех предполагаемых отцов X, которые действительно являются отцами. Оставшаяся доля $(1 - p)$ относится к предполагаемым отцам, которые на самом деле не являются отцами, и может рассматриваться как пробная партия численностью $(1 - p)n$, выбранная наугад из всей популяции, так как между их группами крови и группами предъявляющей иск пары MD нет никакой связи. Вероятность, что X, принадлежащий к такой популяции, в результате исследований на группу C будет исключен, равна $1 - f$, а поскольку численность пробной партии равна $(1 - p)n$, то ожидаемое количество исключений отцовства среди этих n дел равно $n(1 - f)(1 - p)$. Материал 1515 дел состоит из 15 классов, и в каждом из них результат исследования M и D определяет нам множество возможных отцов и его частоту f_i в популяции; численность n_i каждой группы также известна. Ожидаемое число исключений в i-й группе равно $n_i(1 - f_i)\ (1 - p_i)$, а ожидаемое число исключений во всех 1515 делах равно

$$\sum n_i(1 - f_i)(1 - p) = (1 - p) \sum n_i(1 - f_i). \quad (3)$$

Число рассматриваемых дел достаточно велико (1515), вследствие чего, согласно закону больших чисел, отношение (3) к истинному числу g удавшихся исключений, в связи с большим количеством дел (1515) близко к единице, что дает приближенное равенство

$$(1 - p) \sum n_i(1 - f_i) = g,$$

из которого мы сразу находим p:

$$p = 1 - \frac{g}{\sum n_i (1 - f_i)}. \quad (4)$$

В правой части (4) фигурируют числа, известные эксперту из статистики, поэтому данное выражение позволяет определить искомое значение p или долю предполагаемых отцов X, которые действительно являются отцами. Разумеется, p одновременно является вероятностью *a priori* факта $F(X)$, относящегося к какому-либо ответчику X, по делу которого было доказано $E(X)$ и назначена экспертиза. Эту вероятность *a priori* следует отличать от вероятности *a posteriori* (т. е. от вероятности факта $F(X)$ после экспертизы), к определению которой мы приступим чуть ниже.

Значение p, вычисленное по формуле (4) для 1515 судебных экспертиз на основании материалов, полученных мною из отделения микробиологии медицинской академии во Вроцлаве, составляет 71.3%[3] со средней ошибкой около 2%. Это значение было известно проф. Гиршфельду, который назвал его *мерой правдивости* женщин. В его вычислениях этот параметр возник

---

[3] 2.VIII. 1952 г. дописано:
В тексте, представленном 15 марта 1952 г., фигурировало значение 71.1%, основанное на предварительных вычислениях. Перед отправкой статьи в печать вычисления были пересмотрены, а материал дополнен новыми экспертизами, что дало для p значение 71.3%. Видно, что разница в несколько сотен экспертиз не оказывает существенного влияния на результат.

как побочный продукт и никогда до сих пор не определялся точно и не использовался при установлении отцовства.

6. Вероятность *a posteriori* факта *F*(*X*). Знание величины p, которое для каждой популяции можно получить из материалов судебных экспертиз с помощью формулы (4), позволяет правильно решить труднейшую задачу об установлении отцовства (существовавшие подходы мы подвергли критике в п. 4). Как было отмечено в конце п. 3, серологические экспертизы в 9 случаях из 10 допускают оба факта, $F(X)$ и не-$F(X)$, либо вообще не определяя вероятности факта $F(X)$, либо определяя ее неподходящим образом. Благодаря знанию p мы можем извлечь из арсенала классической теории вероятностей заржавевшее оружие, называемое *правилом Байеса*, и по результатам экспертизы определить вероятность P факта $F(X)$.

Правило Байеса говорит, как найти вероятность *a posteriori* P по вероятностям *a priori* и так называемым *условным вероятностям*. Покажем это на примере группы C типа Z в ситуации (1) из п. 4, приводя в скобках конкретные значения.

Прежде всего, выпишем последовательно все используемые вероятности: вероятность *a priori* факта $F(X)$ равна p (= 71.3%); вероятность *a priori* факта не-$F(X)$ равна $1 - p = g$ (= 28.7%); условная вероятность того, что если $F(X)$, то X имеет группу C, равна r (= 100%); условная вероятность того, что если не-$F(X)$, то X имеет группу C, равна f (= 5%); вероятность того, что при выполнении условий (1) и (2) справедливо $F(X)$, равна P, где

$$P = \frac{pr}{pr + gf},$$

или

$$P = \frac{pr}{p + f - pf} \qquad (= 98\ \%). \tag{5}$$

Формулу (5) можно использовать в общем случае; например, в нее сразу можно подставить вместо p значение 0.713, что имело место в Польше в 1952 г. Также для каждой группы C типа Z известна ее частота f, и остается подставить это значение в правую часть формулы (5).

7. Значение и использование формул (4) и (5). Судья, принявший иск с требованием признания отцовства $F(X)$ и получивший от X ответ «не-$F(X)$», обязан придать обоим фактам одинаковую вероятность, т. е. по 50% факту $F(X)$ и факту не-$F(X)$. Такое поведение суда диктуется постулатом беспристрастности, который мы в данный момент не будем принимать во внимание. Если же сторона, выдвигающая иск, выполняет условие, которое в соответствии с § 2 Статьи 47 Польского семейного кодекса от 27.VI.1950 г. создает предположение $F(X)$, а ответчик настаивает на факте не-$F(X)$, то становится актуальной серологическая экспертиза. На этот момент (т. е. на момент приглашения эксперта, но до проведения экспертизы) чаша весов склоняется в сторону истицы, показывая на шкале вероятности значение p, которое (как мы знаем из п. 5) в Польше равно 71.3%. Иными словами, такова к этому моменту вероятность факта $F(X)$, т. е. по формуле (4) мы можем вычислить среднее значение того, что кодекс называет *предположением*, используя термин, который на юридическом языке является аналогом вероятности. Таким образом, доказательство факта $E(X)$ увеличивает вероятность $F(X)$ с 50% до 71.3%. Если при серологической экспертизе у ребенка будет обнаружена группа С типа Z, но ее не окажется у матери и у ответчика X, то отцовство X будет исключено и вероятность факта $F(X)$ станет равной нулю (образно говоря, стрелка весов покажет на 0). Однако если у D будет обнаружена группа С, у M ее не окажется, а серологическая экспертиза обнаружит ее также у ответчика X, и если С является единственной группой, учитываемой при экспертизе, то должна использоваться формула (5), которая дает вероятность P факта $F(X)$. Если, например, частота f группы С равна 5%, то $P = 98\%$ и стрелка весов сместится почти до 100%. Заметим, кстати, что если M и D имеют группу С, то ее наличие у X смещает стрелку сразу с 71.3% в сторону, благоприятную для истца, а обратный факт — в противоположную сторону, но мы не будем описывать способы вычисления вероятности, а ограничимся лишь характерными примерами.

У каждого юриста, а особенно у юриста-практика, в этом пункте рассмотрения могут возникнуть разные сомнения, которые мы по очереди рассмотрим.

1) Можно ли достаточно высокую (например, даже 99-процентную) вероятность считать основанием для признания факта $F(X)$? Не должно ли оно уступить непредвзятой оценке судьи, который, непосредственно вникнув в суть дела, в поведение сторон и свидетелей и в важность иных доводов (отличных от результатов серологической экспертизы), благодаря своему опыту и знанию мира и людей пришел к выводу, что имеет место факт не-$F(X)$?

На этот вопрос я отвечу так: вычисленное значение P вовсе не заставляет судью ни на основании гражданского кодекса, ни по результатам исследований принимать решение $F(X)$. Оно дает только количественную оценку некоторых фактов, с которыми судья *не* будет считаться, если ему известны другие, очевидно свидетельствующие об ином, но должен считаться с вычислениями в тех случаях, когда дело представляется ему неясным. Напомним, что для назначения экспертизы суд должен был иметь какие-то основания. Правда, наш оппонент может сослаться на то, что суд ожидает категорической экспертизы (т. е. исключающей, а не вероятностной), но ведь в повседневной практике он принимает некатегорические доводы, примером чего являются показания свидетелей.

2) Даже если принять высокое значение P как достаточное основание для решения $F(X)$, можно ли обременять ответчика экономическими и иными последствиями такого решения? Не должна ли хотя бы малая вероятность факта не-$F(X)$ удержать судью от вынесения решения $F(X)$? Нет! Если судье недостаточно 99% уверенности для отягощения ответчика затратами на воспитание ребенка, то он должен будет удовлетвориться одним процентом уверенности и переложить эти затраты на мать или третье лицо (*tertium non datur,* третьего не дано), поскольку формулировка решения должна содержать только $F(X)$ или не-$F(X)$, и судья не может уклониться от решения.

3) Соответствует ли установление отцовства в смысле объективной истины, полученной в результате серологической экспертизы, истине в юридическом смысле? Ведь судья принимает за правду те факты, по которым у сторон нет расхождения в мнениях, совершенно не вдаваясь в их объективную истинность.

Мне кажется, что этот упрек основан на смешении требований сторон (которые судья обязан признать справедливыми, если они не являются противоречивыми и не затрагивают интересов третьих лиц) с такими требованиями, как иск о признании отцовства. Даже тогда, когда ответчик не возражает, судья не может дать заключение вопреки своему убеждению, что факт $F(X)$ является объективно ложным, поскольку признание $F(X)$ влечет за собой последствия для третьих лиц (например, оно исключает возможность брака между сыном D матери M и дочерью ответчика X и другой матери M'). Но даже тогда, когда судья не разделяет этот взгляд автора, можно идентифицировать оба представления об отцовстве в выводах этого исследования — из таких дел получены статистические данные и к ним мы хотим применить результаты наших исследований. Ясно, что при согласии сторон дело не доходит до экспертизы, и этот редкий случай не повлияет на статистику и без учета наших советов в конце п. 1.

4) Не совершаем ли мы принципиальной ошибки, применяя к конкретному делу заключения, извлеченные из всей массы судебных разбирательств? Не является ли это принуждением судов к исправлению статистики: «до сих пор мы обязали выплачивать алименты слишком мало людей — так что в ближайшем квартале мы должны обязать к этому всех ответчиков!».

Мы не совершаем такой ошибки, поскольку наша статистика охватывает не все судебные решения, а только сами экспертизы, и из них выводит инструкцию для экспертов, имеющую вид формулы (5). Судья получает правильное значение P, а использование этой величины относится к его профессиональной деятельности.

5) Можно ли считать значение p, определяемое формулой (4), раз и навсегда установленной константой? Не изменяется ли оно с течением времени?

Параметр p характеризует общество в целом, и при изменении экономических и бытовых условий он подвержен изменению, но это изменение является медленным, так что нам достаточно получить значение p на год проведения переписи населения.

8. Объективность судебных определений и исключений отцовства. Займемся теперь иной стороной проблемы. Знание величины p дает объективную информацию о том, сколько среди ответчиков действительных отцов. Значение p получено на основании статистических данных относительно групп крови у M, D и X, участвовавших в 1515 судебных разбирательствах, и статистических данных по тем же группам крови во всей популяции, без учета других данных, в частности без учета судебных решений по этим делам. В связи с этим мы попытаемся получить новую информацию, вытекающую из предшествующих результатов, когда доберемся до судебных папок с документами и вычислим долю p' решений $F(X)$ среди всех приговоров по тем самым 1515 делам.

Разность $p - p'$ может оказаться значительной или незначительной, мерой чего является средняя ошибка этой разности, которую легко вычислить. Мы будем считать ее значительной, если она в несколько раз превышает эту ошибку. Значительная положительная разность будет доказательством предпочтительного вынесения решений в пользу ответчика, а значительная отрицательная разность — доказательством вынесения решений в пользу истцов. Незначительность разности устраняет как упрек в систематическом покровительстве ответчиков, так и упрек в обратном поведении, но она еще не является доказательством справедливости решений или их соответствия объективной истине. Но и этот вопрос доступен математическому исследованию. Собранная проф. Гиршфельдом статистика по 1515 делам поделена на 15 классов, где каждому классу соответствует отличное от других множество возможных отцов (см. п. 5). Мы можем вычислить «математическое ожидание числа отцов» отдельно для каждого класса и сравнить его с числом признаний факта $F(X)$, относящихся к тому же классу. Так, например, в классе № 2, куда относятся 128 дел[4], в которых M имеет группу крови MN, а D имеет группы MN и O, множество возможных отцов образовано имеющими

[4] Ниже в следующих строках внесены изменения в соответствии с исправлением, помещенным в 4 отдельном выпуске 1-го тома *Zastosowania Matematyki* (1954), с. 354. — *Прим. ред. польского издания*.

группы O, A и B. Частота этого множества $f_2 = 0.91$, и в этом классе мы имеем 5 исключений отцовства. В оставшихся 123 случаях вероятность P факта $F(X)$ в соответствии с формулой (5) равна 0.732, а ожидаемое число действительных отцов $0.732 \cdot 123 = 90$. Таким способом мы вычисляем ожидаемое число отцов в каждом классе, а затем сравниваем его с помощью критерия хи-квадрат с числом решений, признающих факт $F(X)$. Этот тест определяет, достоверна ли и в какой степени гипотеза о том, что в указанных 1515 случаях судебные решения по делу об отцовстве соответствуют объективной истине.

Хотелось бы обратить внимание читателя на это совершенно новое применение науки о группах крови, которое является одним из главных итогов данной работы: объективное исследование справедливости судебных решений.

Поскольку Фемида до сих пор не прибегала к практике серологических исследований, мы обязаны посвятить этому вопросу еще несколько слов, а также прокомментировать и некоторые другие вопросы нашей работы.

9. Дополнения и заключение. а) Было бы ошибкой думать, будто описанное в п. 8 исследование справедливости судебных решений основывалось на подтверждении в каждом отдельном случае соответствия между формулировкой решения и результатами экспертизы, так как такого соответствия вообще не требуется. Более того, наш метод не исключает возможности того, что множество решений судьи, который часто устанавливает факт $F(X)$ для малого P и обратный (не-$F(X)$) для большого P, соответствует сдаче экзамена на отлично. Подобный результат будет доказательством того, что опыт и интуиция судьи существенным образом исправляют данные экспертизы, но ситуация допускает и прямо противоположную возможность. Теоретически можно определить (используя параметр p и частоты групп крови в популяции) предельное значение G так, чтобы доля экспертиз, в которых $P \geq G$, была равна p. Тогда можно было бы представить себе мыслящий автомат, который в каждом деле, где экспертиза дала $P \geq G$, оглашал решение $F(X)$ (и соответственно решал не-$F(X)$

в остальных делах). Сравнительно легко, с помощью критерия хи-квадрат, можно численно выразить несправедливость этого автомата и сравнить ее с аналогичным образом полученной несправедливостью действительных судебных решений. В принципе, нельзя заранее отрицать возможность того, что автомат окажется лучше живого судьи, что означало бы, что различные предубеждения и мыслительные привычки судей (статистически) часто не позволяют им правильно оценить фактическое положение, и лишь экспертиза дает позитивную информацию. В данный момент мы далеки от таких выводов, но они вполне реальны, если анкета, разосланная в суды отделением микробиологии Медицинской академии во Вроцлаве, позволит нам получить тексты судебных решений[5].

б) Ниже в таблице приводятся данные из 1515 послевоенных судебных дел по материалам отделения микробиологии Медицинской академии во Вроцлаве. Дела разделены на упомянутые 15 классов с разными частотами f_i возможного отцовста. Помимо эффективных исключений отцовства N_i (их сумма составляет полное число исключений g), в столбце V можно найти необходимые для определения p произведения $n_i(1-f_i)$, а в столбце VI — ожидаемое число исключений $\overline{N}=n_i(1-f_i)(1-p)$. Разности чисел в столбцах IV и VI, возведенные в квадрат и деленные на числа в столбце VI, приведены в столбце VII, а их сумма χ^2 равна 19.73.

Критерий χ^2 дает вероятность 0.10 случайного превышения найденного значения χ^2 (что, кстати, соответствует достаточно большой вероятности), поэтому все вычисления можно было считать подтверждением гипотезы, что доля действительных отцов равна p и не зависит от гематологического класса, а следовательно, является характеристическим параметром популяции подсудных мужчин X. Этот вывод можно считать комментарием к заключительной части п. 5.

---

[5] Дописано 3.XI.1953 г.: Результаты этой анкеты являются предметом работы Ю. Лукашевича (в процессе подготовки). [От редакции польского издания: эта работа была опубликована в 1956 г. в *Zastosowania Matematyki*, т. 2, вып. 4, с. 349–378].

Таблица

Данные 1515 послевоенных экспертиз из материалов Отделения микробиологии Медицинской академии во Вроцлаве

I	II	III	IV	V	VI	VII
№ класса i	Частота невозможных отцов $1-f$	Число экспертиз n	Число исключений N	$n(1-f)$	Ожидаемое число исключений $\overline{N} = n_i(1-f_i)(1-p)$	$\frac{(N_i - \overline{N})^2}{\overline{N}}$
1	0	173	—	—	—	—
2	0.09	128	5	11.5	3.3	0.88
3	0.16	286	17	45.9	13.1	1.16
4	0.23	197	17	45.3	13.0	1.23
5	0.33	195	11	64.4	18.5	3.04
6	0.36	8	—	2.9	0.8	0.80
7	0.42	148	12	62.2	17.9	1.94
8	0.44	13	4	5.7	1.6	3.60
9	0.53	62	11	32.9	9.4	0.27
10	0.57	7	1	4.0	1.1	0.01
11	0.61	79	15	48.2	13.8	0.10
12	0.70	62	10	43.4	12.5	0.50
13	0.72	32	12	23.0	6.6	4.42
14	0.79	73	11	55.5	15.9	1.51
15	0.82	52	14	42.6	12.2	0.27
Всего		1515	140	487.4	139.7	19.73

$$1 - p = \frac{\sum N_i}{\sum n_i (1 - f_i)} = \frac{140}{487.4} = 0.287; \quad p = 0.713.$$

Число степеней свободы 15 – 2 = 13. $P13\ (\chi^2 > 19.7) = 0.10$.

в) Сделанные в п. б) выводы представляют интерес и для иных коллективов, в отношении которых описанная выше таблица может рассматриваться как статистическое исследование пробной партии, например, для каждого множества послевоенных дел о взыскании алиментов, в которых применялась серологическая экспертиза. Мы ограничились лишь статистикой последних лет в Польше, но теория важна и для других стран (конечно, для каждой страны и для каждого периода времени параметр p надо определять отдельно). Гиршфельд заметил, что, например, в Копенгагене p значительно меньше, чем в Польше, и равно довоенному значению в районе вольного города Гданьска.

г) Для практической работы экспертов важно, что каждая экспертиза должна содержать значение P, или вероятность факта $F(X)$. В случае исключения $P = 0$, и этот результат всегда бывает *explicite* (ясно) подтвержден в экспертизе как категорическое исключение отцовства ответчика. Хуже, если исключение не удается. В п. 4 мы обратили внимание на ошибочную или неудовлетворительную формулировку результата экспертизы в этих частых случаях, поскольку они охватывают 90% всех дел. В п. 6 мы привели способ определения P с помощью формулы (5), но только для группы крови C типа Z и условий (1) и (2). Напомним, однако, что P можно вычислить во всех возможных случаях, даже тогда, когда и M и D имеют группу C, ибо наличие группы C у X повышает вероятность P по сравнению с p, а ее отсутствие — понижает P относительно p. Результат исследования D и X также позволяет определить P даже в том случае, когда, например, M уже умерла. В этой работе мы не приводим формул, необходимых для охвата всех ситуаций, поскольку они еще не известны специалистам-серологам, и нашей обязанностью является опубликовать их в ближайшем будущем. Можно подчеркнуть, что эксперты все внимание сосредоточили на проблеме исключения отцовства, тем самым отодвинув вопрос об установлении отцовства на второй план и сделав неактуальным вычисление P. Подобная ориентация привела к признанию понятия о группах крови, на основании чего можно определить вероятность исключения отцовства у наугад выбранного мужчины. По моему мнению, наиболее существенным является понятие *коэффициента полезности комплекса* групп крови, и я предлагаю именно так называть ожидаемую долю t правильных судебных решений, когда для $P \geq G$ признается факт $F(X)$, а для $P < G$ — факт не-$F(X)$, причем G подбирается так, чтобы t было максимальным.

д) Можно предугадать скептическое отношение мира юристов ко всей этой проблеме. Даже если бы оказалось, что машина сможет решать дела справедливее живых судей, для практики это ничего не значило бы, поскольку каждый судья самого себя может считать непогрешимым, а всех остальных — ответственными за компрометирующую статистику. Но у законодателей может возникнуть и иная точка зрения, поэтому, если окажется, что изменение законов и процедур приведет к увеличению числа справедливых решений, то это станет ценным указанием для законодателей данной страны, а также и других стран.

е) В конце укажем на источник ошибки, о которой говорилось в п. 4. Из логики известно, что суждения «Если R, то S» и «Если не-S, то не-R» являются эквивалентными. Из этого следует и равенство вероятностей суждений «Если R, то S» и «Если не-S, то не-R». Однако при этом возникает ложное представление, что суждение «Если R, то с вероятностью 5% имеет место не-S» также эквивалентно суждению «Если не-S, то с вероятностью 5% имеет место не-R». Такая формулировка неверна и она ответственна за грубые ошибки в определении P. Предоставляем читателям самостоятельно объяснить этот парадокс, возникающий, впрочем, при всех судебных доказательствах *ex indicius*.

Выражаю благодарность профессору Гиршфельду за терпеливое объяснение мне основ науки о группах крови и за предоставление мне своих работ до их публикации, профессору Гвяздоморскому — за объяснение мне юридических основ расследования дел об отцовстве и моему товарищу по работе в Объединенной группе применений Польского математического института, магистру Ю. Лукашевичу — за помощь при обработке статистического материала и при редактировании текста[6]. Выражаю также признательность Отделению общественных наук Вроцлавского научного общества за согласие предоставить ему работы автора из другого отделения.

Математический институт ПАН

(*Работа поступила 22.9.1952 г.*)

6 Эта работа потребовала критического обзора 2000 экспертиз.

Взаимодействие наук на примере роли математики во вроцлавской научной среде[1]

В книге, посвященной участию Вроцлава в восстановлении польской науки в Нижней Силезии, изданной Вроцлавским научным обществом и написанной председателем этого общества Станиславом Кульчинским, целый раздел посвящен достижениям вроцлавской математики. Это освобождает меня от обязанностей хроникера, состоящих в регистрации тем, званий, результатов и фамилий, но одновременно возлагает на меня другую задачу, превышающую мои возможности. А именно, я должен написать о той особенной части вроцлавского коллектива ученых, которая символизирует собой сотрудничество разных наук. Поэтому, возможно, сперва следовало бы попытаться набросать основы учебника коллективной работы, по которому можно было бы понять, каковы цели и средства этого сотрудничества, как организуются и претворяются в жизнь объединенные исследования, как выбираются люди и проблемы, как планируются, контролируются и (что, конечно, является наихудшим!) протоколируются исследования. Я боюсь, что при этом обнаружилось бы мое незнание действующей терминологии, и я могу спутать коллективность с комплексностью или загадочные проблемы с проблемными задачами.

---

[1] Статья *Współpraca nauk na przykładzie roli matematyki w środowisku wrocławskim* основана на тексте лекции, прочитанной 21 мая 1955 г. на научной сессии Университета им. Б. Берута, организованной Вроцлавским научным обществом во время «Дней десятилетия».

Эверс однажды написал сказочку об удивительных насекомых — сороконожках, в которой кто-то из злобных завистников спросил сороконожку: «Как ты ходишь, сороконогое божество? Как ты запоминаешь, насколько 17-я левая нога опережает 19-ю правую, и что делает 47-я правая, когда отдыхают 12-я и 40-я левые?». Сороконожка задумалась, оцепенела и замерла. Она больше не могла сделать ни шагу, поскольку с ужасом осознала, что вообще не знает, как она ходит! Поэтому я не собираюсь писать учебник ходьбы для сороконожек и оставляю эту привлекательную, но трудную тему специалистам по управлению всяким движением (в том числе и движением науки) и позволю себе уклониться в пространстве и во времени от названия этой статьи.

Желая понять роль математики среди всех наук, нельзя ограничиваться только одним центром и одним *decennium* (десятилетием). Сущность нашей науки остается непознанной, и мало кто сможет сказать, на чем она основана. Даже среди самих математиков лишь немногие отдают себе в этом отчет, поскольку рыба, погруженная в воду, знает о ней меньше, чем человек, который видит реку не только тогда, когда плывет по ней или стоит на берегу. Математика скорее всего является универсальным методом и в своем роде единственным. Это не единственная дорога к творчеству, поскольку ремесло, искусство пластики и речи, а также музыка идут своими собственными путями. Хотя мы и гордимся этим городом и этим десятилетием, мы хорошо знаем, что математика придумана не в Польше, а о ее практических применениях не было и речи вплоть до окончания Второй мировой войны. Чем мы можем похвалиться? Если кем-то и следует восхищаться, то именно теми настоящими революционерами, которые в 1794 г. основали в Париже Политехническую школу, которая до сих пор является высшим военным учебным заведением с упором на теоретическое образование, главным образом по математике. Известный немецкий геометр Феликс Клейн (мой геттингенский профессор) в своих очерках по истории математики XIX века целому разделу дал заглавие *École Polytechnique*. Задача этой школы заключалась в подготовке офицерских кадров для революционной армии; когда революция окончилась, школа поставляла офицеров армии Наполеона. С самого начала она превратилась в блестящий математический центр, и употребляемое в Польше название «политехника» применительно к высшим инженерным учебным заведениям является красноречивым свидетельством влияния французского примера. Почти все европейские государства восприняли французскую традицию, так как еще и сегодня она проявляется в воинских званиях и названиях военных подразделений и видов оружия. В этой школе позже учился наполеоновский офицер Понселе, основоположник проективной геометрии, а ее профессором являлся великий Монж, который нацеливал политехническое обучение прежде всего на геометрию. Если до недавних пор в наших политехнических учебных заведениях преувеличенный упор делался на начертательную геометрию, то это и было чаще всего несознанной данью Монжу и Понселе. Последний по возвращении из плена стал специалистом по фортификации, благодаря чему начертательная геометрия получила статус военной тайны. Монж некоторое время являлся военно-морским министром, участвовал в походе на Египет и организовал крупномасштабное производство пороха. Феликс Клейн, грустно при этом вздыхая, говорил: «Когда во Франции была эпоха математиков и инженеров, у нас (т. е. в Германии перед Первой мировой войной) было время юристов». Математика тогда служила военным целям. Раньше она использовалась в навигации, позднее (в век пара и механики) — при создании машин, так что ее современные применения не должны нас удивлять. Ведь французский культ математики (вместе с французским рационализмом) пришел в Польшу в век Просвещения, что отчетливо прослеживается у Мицкевича, бывшего студента физико-математического факультета в Вильно. В эпоху варшавского позитивизма Прус в своих повестях и рассказах воздает почести этой науке, и даже Сенкевич иногда выглядит огарком этой свечи. В качестве одного из литературных персонажей (Селим Мирза) он представил друга своей юности, Абданка Абакановича, ставшего цюрихским инженером и изобретателем интеграфа. Для обоих писателей инженер и математик — это почти синонимы, но Прусу импонирует непогрешимость математики, а Сенкевича привлекает ее трезвость. XIX век упрочил позиции математики в умах просвещенного общества. Математика получила титул королевы наук в то время, когда еще действительно правили короли, а позже, подобно им, она сохранила только корону и титул, т. е. место и роль математики были несомненны и ясны, но достаточно ограничены. Английский логик Джон Стюарт Милл сто лет назад назвал ее «мельницей, которая перемелет все, что в нее заложат, но сама по себе ничего дать не может». Для Милла математика была готовым и замкнутым *corpus doctrinae* (учением), как и сегодня для большинства образованных людей. Он знал только ту математику, которую в разных учебных заведениях должны были изучать будущие строители машин, дорог и мостов, и которую позже французы систематизировали в своих прекрасных курсах математического анализа, почти полностью этим инженерам ненужных. Мог ли Милл предвидеть, что именно тогда его современник Георг Бернхард Риман напишет научную работу об основных гипотезах геометрии, и что еще через сто лет, в 1954 году никто даже не вспомнит плоской фразы Милла? Все будут вспоминать лишь труды Римана, в которых пустили ростки те мысли, которые через 50 лет расцвели в теории относительности. В эти годы основной проблемой физики было объяснение отрицательного результата эксперимента Майкельсона[2]. Альберт Эйнштейн вместо объяснения создал из него постулат и подверг понятия времени и пространства невиданной ранее и радикальной ревизии. Поэтому, обосновывая присуждение Эйнштейну премии имени Бойяи, учрежденной для крупнейших математиков, лауреат этой премии Гильберт написал, что премия является признанием высокого полета математического духа, возвышающего дело Эйнштейна. Последствия этого дела преобразили физику и привели к открытиям, с которыми человечество связывает сегодня наибольшие надежды и самые страшные опасения. Математика специальной теории относительности была элементарной, а ее физическая интерпретация чрезвычайно трудной, поскольку противоречила представлениям, сложившимся в нашем сознании в течение тысячелетий. Минковский считал Эйнштейна физиком и позволил себе снисходительно отнестись к его математике, и подобное мнение прослеживается

[2] Этот эксперимент, если бы он был проведен во времена Коперника, задержал бы решение вопроса о движении Земли еще на пару сотен лет.

у самого Гильберта, когда он говорит о математическом духе, а не о самом Эйнштейне как математике. Такое раздвоение характерно для переплетения двух наук в одной личности, что прекрасно понимал Гильберт, гений которого соответствовал гению лауреата.

На этот раз из мельницы высыпалось нечто, что никто в нее не засыпал и чего никто даже не мог себе вообразить в качестве продукта размола. Вдохновило ли Эйнштейна чтение работ Римана или он руководствовался какими-то иными идеями? Премия носит имя Бойяи… Кем был Бойяи? Он был профессиональным офицером, одним из лучших выпускников военной академии в Вене и создателем неевклидовой геометрии — это одна из нитей, ведущая к Эйнштейну. Несомненно, Гильберт, который был автором известных *Grundlagen der Geometrie* (Основ геометрии), хорошо знал, что творение Эйнштейна является продолжением работ Бойяи и Лобачевского. А имя другого члена жюри, Анри Пуанкаре, напоминает нам философские трудности, которые надо было преодолеть, создавая единую теорию времени и пространства. Кем был Пуанкаре? Однажды я задал этот вопрос известному чистому математику Э. Ландау, испытывавшему отвращение к практическим применениям математики, который мне на это ответил просто: «Я никогда не слышал о таком математике! Это ведь физик!». Нарочитое недоумение или преднамеренное святотатство означало, что Пуанкаре не заботился о математической строгости, но он был великим универсалом. И дело не сводится к тому, что Пуанкаре в 1913 году был приглашен в Вену, где прочитал прекрасную лекцию о значении гуманитарных наук для наук точных. Неважно, что, заняв после смерти комедиографа Викторьена Сарду его кресло во Французской Академии, он сумел высказать *éloge* (похвалу) своему предшественнику в такой блестящей речи, которой не постыдился бы ни один из 40 бессмертных (как принято называть французских академиков). Пуанкаре был универсалом именно потому, что он не задумывался о границах наук. Он был математиком в самом высоком значении этого слова, в особенности тогда, когда использовал топологию для решения проблемы замкнутых траекторий в механике небесных тел. Его пример показывает, что запахивание межей даже внутри одной и той же науки может иметь существенное значение и придать отдельному исследователю силу коллектива.

Несомненно, Эйнштейн знал методологические работы не только Пуанкаре, но и его предшественника, Эрнста Маха. Этот австрийский физик и философ начал свою карьеру на кафедре математики в Граце, но не совершил ничего заметного в этой науке. Зато он занимался методологией точных наук и создал направление, из которого полвека спустя выросла философская школа под названием «Wiener Kreis». Характерным примером идей этого направления может служить работа Маха *Analyse der Empfindungen (Анализ ощущений)*.

Я настолько далеко отошел от темы доклада, что должен объяснить, почему вспомнил Маха. Знаменитый Эль Греко изображал человеческие фигуры, выглядевшие неестественно стройными. Некоторые историки искусства говорят, что он рисовал так, как видел; другие упрекают его в маньеризме и отсутствии художественной искренности. Никогда никому не пришло в голову спросить математиков о том, был ли действительно Эль Греко маньеристом, но каждый математик (даже никогда не читавший *Analyse der Empfindungen*) рассмеется, когда ему скажут, что этот критянин изображал людей стройными, потому что они так выглядели в его глазах. Математик рассуждает следующим образом: если бы Эль Греко видел квадрат как прямоугольник, то он нарисовал бы его в виде квадрата, поскольку тогда видел бы и на полотне и в действительности одно и то же, т. е. его глаз растянул бы в высоту одинаково и модель и образ. Следовательно, испанский мастер изображал квадраты как прямоугольники скорее всего потому, что ему было безразлично реальное сходство изображения с моделью. Вы спросите, почему мы пытаемся дать ответ на незаданный вопрос? Почему вмешиваемся не в свои дела? Почему не отсылаем полемизирующих эстетов к специалистам, к философам и психологам, к окулистам и анатомам? Мы не делаем этого, потому что наш клиент может попасть к такому анатому, который объясняет пугливость лошадей тем, что на сетчатке лошадиного глаза все предметы выглядят в 4 раза больше, чем на сетчатке человеческого глаза. Тот же самый нонсенс, напечатанный черным по белому, мы можем найти в нашумевшей автобиографии Франка Гарриса, где этим же автор объясняет нам, почему несколько сотен украденных им в Мексике лошадей разбежались по дороге. Но, как говорится, специалисты находятся на медицинских факультетах, и поэтому обращаться следует именно к ним, а не к зоотехникам, писателям и конокрадам. На врачебном отделении одного из наших довоенных университетов объясняли, что младенец должен постепенно учиться правильно доставать наблюдаемые предметы, потому что, дескать, их образы на сетчатке глаза ребенка перевернуты, и он ищет внизу предметы, находящиеся высоко, и вверху — предметы, находящиеся низко (и поэтому часто промахивается). Это наивное объяснение не выдерживает никакой критики: ребенок ведь не смотрит на сетчатку, а сетчатка видит образы именно так, как Эль Греко и лошади Гарриса.

Очевидно, нетрудно предугадать, что кто-то из читателей уже задает себе привычный вопрос: «Как все это связано с математикой? Почему автор упрекает врачей в ошибках 25-летней давности?». Я говорю об этом, потому что в этом и есть суть вопроса, над которым мы сегодня размышляем. И роль, которую определила себе вроцлавская математика, состоит именно в том, чтобы разъяснить нашу точку зрения естествоиспытателям и убедить их, что если лошадь видит все предметы в 4 раза бóльшими, чем мы сами, то она видит все это точно так же, как и мы! Объясняя это, мы не раз ударимся головой об стену, но когда нам говорят, что головой стену не прошибешь, то утешимся тем, что прошибить ее можно только и именно головой. Очевидно, что в этой позиции есть превышение компетенции, но взаимное сотрудничество разных наук прежде всего и превыше всего есть превышение компетенции, беспрерывное нарушение границ и агрессия. Возможно, кто-то упрекнет меня в том, что я изменяю само понятие математики: «Мы ведь тоже учились математике в школе. В то время она ассоциировалась с покупкой, при которой хорошие яблоки продавались по 3 штуки за 10 грошей, а те что похуже — по 4 штуки за 11 грошей, а всего 7 штук за 21 грош, или каждое яблоко за 3 гроша, из чего вытекали неслыханные затруднения для всего класса вместе с учителем. А высшая математика —

это когда для покупок в нашем распоряжении целая ярмарка. Как и полагается обывателям, мы верим в силу всяких математических формул и поэтому требуем, чтобы математики решали конкретные задачи (пусть, например, они вычислят число точек соприкосновения двух веществ, измельченных в порошок и смешанных в равных количествах, если диаметр зерен одного вещества в три раза больше, чем другого). Вместо решения конкретных задач математики рассказывают нам философские анекдоты. Мы подозреваем, что эти анекдоты суть просто дымовая завеса, за которой скрывается беспомощность математики перед конкретными естественнонаучными и техническими задачами».

С сожалением должен признать, что обвинение на 90% справедливо, и один естествоиспытатель может действительно поставить больше вопросов, чем десять математиков дать на них ответ. Даже один вопрос, с которым приходит к нам биолог, геолог или инженер, является чрезвычайно трудным. Но еще чаще этот вопрос несуществен, и спрашивающий не получил бы никакой пользы от ответа. Случается, что от нас требуют математических обоснований заранее поставленных положений, которые либо вообще не связаны с какой-либо математикой, либо сформулированы так, что не могут быть ни ложными, ни истинными. Иногда это просто элементарные истины без последствий. Очень редко случается, чтобы сразу возникла потребность преодоления математических трудностей, но зато очень часто мы с удивлением видим, что понятия и объекты, которые мы, математики, поставили бы на первое место, вообще не фигурируют в данной дисциплине. И поэтому мы относимся к нашим клиентам как к тем поварам и рестораторам, которые не позволяют посетителям заказывать блюда по своему усмотрению, а пытаются накормить их по собственному вкусу и желанию.

Главный принцип, который мы сознательно используем, находится в наиболее явном противоречии с обожествленным в XIX веке принципом специализации. Такая позиция заставляет нас непрерывно сражаться на два фронта, для объяснения чего мы снова должны призвать читателей к терпению. Ведь мы до сих пор не упомянули, что только часть математиков пошла той большой исторической дорогой, которая привела к поразительным открытиям. только эта часть осталась верной девизу: *Eritis sicut deus, scientes bonum et malum!* (Будьте как боги, знающие добро и зло!) Большинство же признало внутреннюю непротиворечивость или, если угодно, логическое согласие с критерием истины и чистосердечно поверило лести таких почитателей, как Прус. Исходя из исключительности математики, эти люди пренебрегли всеми другими доводами.

Говоря откровенно, этот вопрос весьма сложен вообще, так как почти все ученые действительно остаются честными, занимаясь своей наукой, но весьма вольно все приукрашивают, когда им приходится говорить о ней. Поэтому я начну с довольно резкого утверждения и скажу, что большинство (причем огромное большинство) математических работ не только не имеют никакого прикладного значения, но и никогда его иметь не будут. Обычно математики это отрицают, используя аргументы поразительной наивности. Например, они приводят многочисленные примеры разработанных теорий из области чистой математики, которые позднее неожиданно пригодились физикам и техникам. Математикам не стоит забывать, что такие примеры можно пересчитать по пальцам, в то время как ежегодно появляется несколько тысяч оригинальных теоретических работ, так что, пожалуй, нельзя считать, что (хотя бы с точки зрения использования интеллектуальных ресурсов человечества) решение математикой проблем иных наук выглядит сколь-нибудь рациональным. По-видимому, было бы значительно лучше, если бы эти математики по примеру моего (к большому сожалению, рано ушедшего из жизни) друга Зигмунда Янишевского открыто признались, что верят в ценность только чистой математики, а от ее применений им ни жарко, ни холодно.

Вера математиков в свою науку не сводится к ритуалу. Известно ли вам, что такое простые числа? Мы называем так числа, которые являются неделимыми (2, 3, 5, 7, 11 и т. д.). Доказано, что их бесконечно много, и среди них встречаются пары-близнецы, типа (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19)… Предполагается, хоть этого никто и не доказал, что число таких пар бесконечно. Можно спросить, какой смысл в доказательстве такого утверждения? Кто огорчится, если выяснится, что утверждение неверно? Какое оно может иметь значение? Сама задача настолько трудна, что ни одно орудие современного математического арсенала не сумеет ее поразить. Но более интересным, чем эта задача, является существование людей, которые охотно посвятили бы полжизни, если бы имели шанс дознаться, так ли это на самом деле. Они подобны тем, кто посвящает половину жизни, чтобы подготовиться к экспедиции в Гималаи, которая может отобрать у них остаток жизни. Что это за люди, занимающиеся поиском простых чисел? Это те, которые другие занятия считают скучными и недостойными высшего разума. Не будем обольщаться: для людей подобного склада даже такие открытия, как кванты энергии или переход массы в энергию — это пустяки, которыми не стоит заниматься, а их отношение к применениям математики выражается в снисходительной терпимости.

Впрочем, числа-близнецы — не самый яркий пример, так как теория чисел имеет с этим миром хотя бы платоническую связь через тривиальную арифметику. Некоторые другие разделы математики (например, геометрия многомерных пространств или теория множеств) гораздо более отдалены от всяких приложений и лишены не только прямых и косвенных применений, но даже едва уловимой связи с окружающим нас материальным миром.

Психика этих мечтателей не отличается равнодушием, ибо не существует науки без ученых. Так случилось, что несколько сильных личностей решили заняться развитием математики в Польше в XX веке. К ним принадлежал уже упоминавшийся Зигмунд Янишевский, памятником которому является «Fundamenta Mathematicae»; принадлежали к ним и другие основатели варшавской школы, прежде всего Вацлав Серпиньский и Стефан Мазуркевич, а также логики. Эта школа вместе с краковской, которую возглавлял Станислав Заремба-старший, и со львовской (быстрому росту которой мы обязаны Банаху) в период между мировыми войнами подняли провинциальный уровень польской математики до европейского. Это явление было столь отчетливым, что его заметили и другие польские ученые, особенно физики, которые и попробовали обратиться к математикам за помощью в решении некоторых задач. Из этого не вышло ничего примечательного, но я приведу одно исключение. Научный эмигрант Леон Лихтенштейн, большой знаток теории планет и сам математик высокого класса, поставил перед Стефаном Мазуркевичем одну из задач, относящихся к равновесным формам вращающихся жидких тел. Мазуркевич решил ее (получив необходимое ограничение длины оси такого тела) и опубликовал результат в общеизвестном периодическом издании «Mathematische Zeitschrift». Этот результат, поразивший Лихтенштейна и несомненно являющийся одним из важнейших достижений соавторства представителей варшавской школы, не был упомянут в научном некрологе Мазуркевича, так как математики его просто не заметили. Таким образом, это исключение еще сильнее свидетельствует против нас, чем все упреки физиков. Даже Заремба, известный знаток теории потенциала и уравнений математической физики, не только не посодействовал развитию польской физики, но скорее наоборот — замедлил это развитие своим негативным отношением к теории относительности.

Появлению теоретической физики в Польше мы обязаны таким ученым, как Смолуховский, Рудзкий и Рубинович — все эти физики обучались математике за границей. Новое поколение физиков, вышедшее из школы Рубиновича и Инфельда, все еще не может найти общий язык с математиками. Контакт начинает завязываться, но сегодня пока рано об этом говорить.

Математики в этой игре имели лучшие карты, поскольку обладали высшим научным рангом, и поэтому сетования физиков также не находили отклика. Скажем откровенно, что в большинстве случаев математики в самом деле не понимали, чего от них хотят, так что их совесть была чиста (что значительно облегчало их положение при взаимных обвинениях), и лишь некоторые чувствовали, что здесь что-то не в порядке. Налаживание отношений с физиками не является легким — оно требует многих лет для изучения современной теоретической физики, и математику трудно рисковать своим «капиталом времени» без гарантии получить отдачу.

Существует еще одна связанная с этим проблема. Как известно, первые инженеры появились в Польше каких-то 100 лет назад (а инженеры, подготовленные в самой Польше, — всего 75 лет назад). Все они изучали математику и должны были ее применять на практике, вследствие чего наиболее подходящим местом для установления контакта с другими науками являлись, пожалуй, кафедры математики в политехнических институтах. Однако преподаватели этих кафедр придерживались западных образцов (либо косвенно, т. е. беря их у берлинских и венских подражателей, либо непосредственно — из французского источника политехнического обучения), вследствие чего преподавание велось без связи с практическими потребностями. Самым удивительным выглядит то, что даже компетентные в технике профессора совсем не сетовали на создавшееся положение. Они лишь требовали, чтобы математики были хорошими преподавателями, т. е. умели излагать свой материал так, чтобы студенты успешно сдали экзамен и забыли о математике (как забыли ее их профессионалы-профессора!). Учебники, написанные математиками-политехниками, вообще не имели никакой связи с техникой и даже не приводили примеров применения математики. Ситуацию спасали кафедры механики, которые доказывали, что в математике есть вещи, способные заинтересовать будущего инженера, а в университетах сходными с ними были кафедры теоретической физики. На этих кафедрах по необходимости нередко преподаватели излагали некоторые разделы математики без помощи математиков, подвергая себя насмешкам специалистов-математиков, которым студенты позднее повторяли ошибки, дозволенные преподавателям физики. Тогда-то и возникла не вылеченная до сих пор «травма» у физиков, некоторые из которых даже думают, что главным козырем математики является ее строгость.

Несомненную роль в этом застое сыграла стабилизация отношений в Европе с 1871 до 1914 года. Но ничто не длится вечно, и в конце концов такое положение вещей стало вызывать возражения. Я уже упоминал великого геттингенского геометра Клейна, который принадлежал к сторонникам индустриализации и (как, впрочем, и большинство его коллег), подобно Вильгельму II и всему лагерю национал-либералов, считал образцом Соединенные Штаты. Поэтому именно он сознательно начал формировать обучение в направлении применения математики, создал в университете кафедры прикладной математики, начертательной геометрии и даже электротехники, что привело к спору с политехниками, которые рассорились в Геттингене на основании неразрешимой конкуренции. Она дошла до того, что участие двух геттингенских корифеев (Клейна и Гильберта) в семинаре, посвященном строительству кораблей, вызвало всеобщее огорчение их наиболее консервативных коллег. Сегодня уже не подлежит сомнению актуальность идеи геттингенских сподвижников, что доказывают именно сетования политехников. Ведь мы и во Вроцлаве не так давно слышали, что мы не должны вмешиваться не в свои дела.

Симбиоз математики с техникой не дал тех результатов, которые ожидались, возможно потому, что обе стороны имели свои традиции, а также из-за психологических различий при оценке и понимании роли математики в технических приложениях. Для математика висячий мост или турбина Лаваля были обычно лишь предлогом для начала исследований. Когда оказывалось, что такие задачи ведут к изящным и глубоким математическим теориям, математики в своих изысканиях заходили так далеко, что забывали о практическом смысле задачи. Более того, в тех случаях, когда им удавалось получить элементарное решение задачи, они с отвращением забрасывали его. Поэтому порой даже такие выдающиеся инженеры, как Эберман, заявляли, что конструкторам достаточно той минимальной порции математики, которую дает средняя школа.

Если нигде в мире в этом отношении не было ничего хорошего, то в Польше было хуже, чем где-либо еще. Вторая мировая война заставила нас забыть об этих проблемах, а когда она закончилась, надо было идти напролом, чтобы наверстать отставание, вызванное шестью годами военной летаргии и предвоенной беспечности. Обычной тактикой стала переброска «моста» с математического берега на противоположный в самом широком месте: необходимо было атаковать лагерь биологов и врачей — самый отдаленный и с виду самый неприступный. Чтобы охарактеризовать сложившуюся ситуацию, достаточно вспомнить, что перед войной студенты-естественники должны были слушать лекции по математике для естествоиспытателей и даже сдавать экзамен по этому курсу, но такие лекции читались иногда логиками, иногда доцентами математики, а иногда — лицами, которые вообще не представляли, что надо делать. Все эти лекторы имели одну характерную особенность: они не знали никаких своеобразных применений математики к естественным наукам, не интересовались математикой с этой точки зрения и чаще всего не имели ничего общего с вопросами природоведения. Название «математика для естествоиспытателей» они понимали как «элементы высшей математики», а слова «для естествоиспытателей» — как пренебрежительный эпитет, типа прилагательного «дежурное» к существительному «блюдо». Истинные же математики признавали свободу обучения и получали всё *à la carte* (согласно меню). Однако еще перед войной были попытки перебросить мост, и эти попытки предпринимались с противоположного берега — врачами. Здесь я позволю себе высказать слова признательности и благодарности Францишеку Гройеру за то, что он первым из врачей переплыл на математический берег, для чего были необходимы научный темперамент и фантазия. Сегодня уже трудно найти во Вроцлаве ежегодник *Pediatrii polskiej*, в котором тогда сразу три автора набросились на Гройера за его патергеометрию (для написания такого набора бессмыслицы потребовалось целых три автора!). Я купил бы сегодня этот том по цене филейной вырезки, чтобы можно было здесь процитировать целые отрывки из этих статей, ибо подобный эффект можно сравнить лишь с восстановлением фильма с участием Асты Нильсен, звезды экрана 50-летней давности.

Но оставим в стороне воспоминания и попытаемся рассказать, как в действительности обстоит дело. На чем основано взаимодействие с естествоиспытателями и врачами? Обычно нам говорят, что для успешного взаимодействия необходимо знать биологию и медицину. Это, конечно, совершенно неверно! Знать надо все, но наш век (который постоянно хвастается принципом специализации) учит, что тот, кто знает все, не знает ничего, а кто хочет поймать сразу двух зайцев, не поймает ни одного. Надо отказаться от принципа специализации и понять, насколько мнимой является скромность тех, которые в любой ситуации говорят: «я в этом ничего не смыслю». Следует помнить, что наука есть теория действительности, в которой все взаимно связано. Но откуда можно взять необходимые знания? Должны ли математики изучать анатомию и физиологию или, наоборот, естествоиспытатели должны изучать дифференциальное и интегральное исчисление? Были такие естествоиспытатели, которые делали подобные попытки и спустя несколько лет утверждали, что у них из этого ничего хорошего не вышло. А как же надо поступать? Надо учиться на конкретных задачах, а не по книгам и про запас.

Один врач заметил существование связи между туберкулезом и картиной крови, а именно — обнаружил, что некоторые кровяные тельца у туберкулезников появляются в меньшем количестве, чем у здоровых людей. Я спросил его, откуда ему это известно и притворился, что знаю, что такое туберкулез, моноциты и лимфоциты, хотя на самом деле никто из нас не видел ни лейкоцитов, ни палочек Коха (да и вообще не желает их видеть!). Врач ответил, что нормальный состав крови известен по тысячам наблюдений. Я согласился с этим, но спросил, легко ли распознать состав крови, нужен ли для этого микроскоп и расшифруют ли два врача одно и то же у одного пациента? Такие вопросы часто застают врасплох врача, который не знает, являемся ли мы круглыми невеждами или только выдаем себя за них. В таких ситуациях обычно врач бьется над тем, чтобы словесно объяснить нам то, что на его взгляд является простым и ясным, пока мы уже раздумываем над очередным вопросом. Таким способом мы быстро обучаемся без особых хлопот, точнее, за счет нашей жертвы, которая думает, что ее экзаменуют. Однако знакомый с основами статистики врач может вполне справиться и без помощи математика. Он вычислит по 63 наблюдениям среднее отклонение (в сторону уменьшения) от нормы содержания этих телец в крови туберкулезников, а затем определит дисперсию и опубликует свою работу в печати. На это другой врач, прочитавший учебник по статистике, показывает ему книгу, где черным по белому написано, что полученное им отклонение не является существенным, поскольку не доходит до двух сигма, а составляет всего 1.95 сигма. Несчастный автор приходит к нам за помощью, считая, что если бы у него было еще одно наблюдение, то все было бы *lege artis* (по всем правилам искусства). Бедный врач полагает, что из-за такого пустяка он теряет труд нескольких месяцев! Тогда мы снова его спрашиваем, о чем идет речь: о том, чтобы получить конкретный диагноз (позволяющий сделать вывод о наличии туберкулеза или *a contrario* (напротив) о его отсутствии), или о составе крови в банке, куда слита кровь всех 63 пациентов? Сначала он даже не понимает нашего гротескного способа разговора, но через некоторое время мы находим другое, еще более грубое сравнение, и, конечно, врач соглашается с тем, что речь всегда идет именно о конкретном пациенте. Тогда оказывается, что действительность (реальная доля) искомого явления составляет 999 промилле, поскольку из 63 исследуемых только три пациента имеют отрицательный результат — именно у них явление настолько сильно выражено, что это так влияет на состав крови в банке. Таким образом, работа спасена и, более того, показывает, что отрицательный результат обычно отчетливо проявляется, хотя и является редким.

Мораль из этого правдивого случая такова, что врачам вообще не нужно книжного математического образования и что такое образование скорее затрудняет нашу роль. Когда естествоиспытатель в первый раз появляется на заседании Отделения применений Математического института ПАН[3], он никак не может понять, почему все присутствующие с трудом сдерживают смех после первой же высказанной им фразы. Математики смеются, заранее зная, что в девяти случаях из десяти докладчик скажет: «Прошу меня извинить, если я буду произносить математические нелепости, поскольку не знаю математики и едва помню то, чему учился в школе…». Как я уже упоминал, подобная скромность не пользуется у нас признанием. Она подобна скромности пассажира, проходящего на границе таможенный досмотр и декларирующего, что он имеет для обложения пошлиной одну плитку швейцарского шоколада: истинная цель такой декларации заключается в том, чтобы отвлечь внимание от целой коробки с часами, спрятанной в чемодане. Когда естествоиспытатель, врач или юрист говорит, что он не знает математики, мы думаем: «Помоги Бог, чтобы он не знал только математики, ибо догадываемся, что будет, если он не знает и того, что обязан знать».

[3] Полное название: Отделение естественнонаучных и народнохозяйственных применений.

А в чем, по нашему мнению, должен разбираться, например, естествоиспытатель? Он должен уметь объяснить нам, что он делает, почему это делает, откуда ему известны излагаемые факты, в чем он сомневается и что из этих сомнений следует. Но все эти трудности выглядят пустяками по сравнению с теми, которые встречаются в науках, что сами создали себе математический аппарат (такова, например, дендрометрия). Поскольку она уже сто лет оперирует формулами, то дендрометры владеют дифференциальным и интегральным исчислением и сами придумали различные формулы. Если кто-то из их клана приведет такую формулу, то его предупредят, что лес и математика несовместимы. Математики не понимают таких утверждений, как не понимают и газет, в которых можно встретить фразу «спорт, в частности велосипедный, это не математика, ибо в нем еще много других факторов». Такое высказывание прекрасно понимают 99 из 100 читателей ежедневной прессы, за исключением того единственного, который и является математиком. Мы не понимаем, почему формулы дендрометров применимы к лесу, а наши — нет. Когда они говорят, что надо считаться с опытом, то мы отбрасываем в сторону всякие формулы и предлагаем прекрасные таблицы, определяющие объем древесины по одному измерению охвата и длины ствола. Когда они удивляются, почему мы называем эти таблицы прекрасными, мы объясняем это тем, что в таблицах нет ничего кроме наблюдений. Иногда они говорят, что необходимо считаться с дендрометрией, наукой старой, серьезной и имеющей свои кафедры. Но очень часто те, кто сидят на этих кафедрах, взаимно не понимают друг друга, так что им время от времени требуются математики в качестве экспертов в собственных спорах.

Все эти байки не ограничиваются какой-то одной местностью или даже масштабами всей страны: известно, что в Чехии и Саксонии война между дендрометрами и математиками развивается подобным же образом, и закончится лишь тогда, когда дендрометры обучатся математической статистике. Нельзя ничего посоветовать людям, которые не хотят верить математикам, но сами являются наполовину математиками. Такой человек должен прежде стать полным математиком. В качестве известного примера можно привести Р. Э. Фишера (из сельскохозяйственной школы в Ротэмстеде, Англия), который, не найдя общего языка с математиками, сам создал оригинальные статистические методы. Его работа выдержала несколько изданий и оказала математической статистике бо́льшую услугу, нежели учебники, написанные профессиональными математиками.

Многие из естествоиспытателей (а, возможно, еще более многие — среди врачей) вообще не верят в применимость математики к исследованиям живой природы. Не верят потому, что предмет математики в школе выработал у них предубеждение в отношении абстрактности понятий, формализма определений и искусственности задач, напоминающих шарады и ребусы. Карикатурная простота геометрических концепций (как их видит математик) кажется противоречащей текучести и сложности живого мира (великий антиматематик Гёте писал о «вечно зеленеющем древе жизни»). Эта антитеза компрометирует в глазах натуралистов саму мысль о математическом истолковании живой природы как наивную и вредную в своих претензиях на простоту. Такие натуралисты воображают, что математики хотят найти формулы для всего сущего, что они хотят заранее составить гороскопы жизни (подобно их средневековым братьям-астрологам), что в конце концов они захотят предсказывать каждый шаг и каждое содрогание живого организма.

Каким образом сформировались такие взгляды? Они вовсе не являются оригинальными и свежими — образ именно такого математика мы найдем у Вольтера, а еще раньше у Свифта. Ян Потоцкий высмеял их в повести, написанной 150 лет назад, и мы были бы признательны историкам литературы, если бы захотели и сумели понять, откуда берет начало эта идея. Из какого источника течет этот ручей, к счастью уже убывающий? Но иногда естествоиспытатели из одной крайности попадают в другую, которая представляет собой мистическую веру в таинственную силу математического аппарата, и им начинает казаться, что элементарные тождества, подвергнутые тривиальным алгебраическим преобразованиям, способны придать естественнонаучным положениям характер несомненности. Между двумя флангами находятся те, которые считают, что математику можно применять ко всем наукам, за исключением той, которую именно они представляют. Математики же старого типа все еще надеются встретить такого идеального естествоиспытателя, который сумел бы каким-то неизвестным (и вероятнее всего невозможным) способом заменить свою специальность и науку на дедуктивную схему. Такой естествоиспытатель должен экспериментальные основы своей науки обрядить в одежды аксиом (подобно тому, как Евклид поступил с основами геометрии) и заключить в них все, что нужно и можно знать о смысле технических терминов. Затем он поднес бы, как на тарелочке, сформулированные в этих терминах естественнонаучные задачи математику для решения. В одной из своих новелл Анатоль Франс пишет: «Один раз в жизни я видел справедливого судью — это было на картине», а я не могу представить себе такой сцены даже на картине. Если бы такой естествоиспытатель родился и существовал, то вероятнее всего он выбрал бы для изучения точные науки. Если бы он умел формализовать свои задачи, то смог бы их решать и без математика. Если бы для него это оказалось трудным, то плохой математик тоже не смог бы ему помочь, а хороший не захотел бы тратить на это время. Если бы каким-то чудом все эти препятствия исчезли и естествоиспытатель сумел бы получить желанную формулу, то он не знал бы, что с ней делать. Я встречал в работах по естествознанию формулы, играющие чисто декоративную роль — авторы таким идолопоклонническим способом и трудным, ненужным или невразумительным языком пытались донести до читателя некоторые детали. В эту ловушку часто попадают даже физики.

Если сотрудничество наталкивается на такие трудности, то почему тогда в цитированной книге Кульчинского говорится о положительных достижениях вроцлавских математиков в совместной работе с естествоиспытателями, техниками, врачами и даже с гуманитариями и юристами? Как нам это удалось? Как были преодолены преграды, казалось бы непреодолимые в своей разнородности и многочисленности?

Сотрудничество оказалось возможным лишь благодаря тому, что сама научная работа — это естественный процесс и она подчиняется законам развития, применения и эволюции. Точно так же, как новые виды животных и растений формируются при изменении внешних условий или возникают путем скрещивания существующих видов, так и на наших глазах изменяются содержание, смысл и стиль науки. Та математика, которая содержится в учебниках, не подходит для той медицины и истории естествознания, которые утвердились в музеях, анатомических атласах и препаратах. Все школьное, известное и общепринятое при сотрудничестве не принимается во внимание, а подходит лишь то, что только зарождается. С того момента, когда естествоиспытатель приходит к нам или мы к нему, первые часы напоминают разговор глухого с немым. Мы смотрим на красивые цветные диаграммы и удивляемся, почему они не пользуются таблицами, а они удивляются, что никак не могут убедить нас в чем-то, что они упорно называют достоверностью или гарантированным результатом. Естествоиспытатель начинает говорить, а мы (вместо того, чтобы экзаменовать его по математике, чего он опасался!) спрашиваем, где можно выучиться так плохо говорить по-польски. Он настолько доволен, что мы не заставляем его извлекать корень третьей степени из семи, что пропускает мимо ушей нашу наглость и продолжает говорить, оказываясь прекрасным популяризатором. Например, специалист-мукомол показывает нам прибор, называемый фаринографом, который используется для определения впитывающей способности, рыхлости, упругости и других объективных свойств теста. Тогда мы спрашиваем, а почему его интересует тесто — он считает этот вопрос доказательством неслыханного невежества; надо быть математиком, чтобы не знать, что из теста выпекается хлеб! Поэтому от качества теста зависит и качество хлеба. А что такое хороший хлеб? Это такой хлеб, который по вкусу людям! Все это для нас таинственно, ибо хлеб делается из теста, тесто из муки, а мука из пшеницы. Речь идет о выборе сортов пшеницы, из которых получается вкусный хлеб. Тогда мы предлагаем вообще не интересоваться ни тестом, ни мукой, а исключительно пшеницей и хлебом. Нам кажется, что следовало бы сперва выпечь хлеб из разных сортов пшеницы, предложить его попробовать разным людям, а затем по результатам опроса отобрать сорта культивируемой пшеницы. Но мукомол непременно хочет оценить только объективные качества теста! Мы совершенно не можем понять, для чего ему это надо, а он не умеет нам это объяснить. Измучившись, мы расходимся с убеждением, что в результате нашего общения хлеба не получится. Но через пару недель мы встречаемся снова. Теперь уже ни он, ни мы не являемся теми, кем были месяц назад. Мы узнали о неслыханной сложности процесса превращения муки в хлеб, а он узнал, что правильные рассуждения могут быть важнее голландского фаринографа, даже для самых практических целей. Взаимодействие изменило и его, и нас. Мы привыкли думать (а не экспериментировать), они — естествоиспытатели — экспериментировать (а не думать), и лишь совместно мы умеем и то, и другое. Это напоминает рассмотрение фотографии двумя глазами. Подобным образом изменяются не только люди, преобразуются стиль и проблематика самих взаимодействующих научных дисциплин. Впрочем, так происходит не всегда. Существуют ученые, выработавшие иммунитет ко всяким влияниям — среди естествоиспытателей этому присягнули непокорные морфологи, среди нас таковыми являются мечтатели, которые слышат музыку сфер, льющуюся из мира математических абстракций. Такими математиками были Платон и его современник Архитас из Таренто, прославившийся искусством применения математики. Именно их Норвид заставил вести поэтический спор о дороге, которой должна шествовать королева наук. Пожалуй, во всей мировой литературе никто удачнее и глубже Норвида не осмыслил этого векового антагонизма.

Не будем слишком удаляться от Вроцлава и настоящего времени, поскольку мы говорим о здешней, специфической научной атмосфере. Каким образом она сложилась? На ее создание повлияли несколько обстоятельств уже в 1945 году. Во-первых, этому способствовало объединение всех высших учебных заведений в один Университет (с большой буквы У), а во-вторых — необходимость взаимной помощи и дружбы, которая объединила изгнанников, отыскавших друг друга после войны. В-третьих, возникла некая потребность ежедневных встреч за общим столом в Мирусе. И наконец, по дороге мы растеряли тоги и должны были дать голос также и тем, которые вообще никогда в жизни не имели на себе тоги.

Но все это не дало бы никакого эффекта, если бы не несколько людей, умеющих заглянуть далеко за пределы собственной деятельности. Я назову здесь только Гиршфельда и, полностью опуская заслуги этого великого ученого и необыкновенного человека в области его деятельности (т. е. в микробиологии и иммунологии), скажу лишь несколько слов о его сотрудничестве с математиками. Оно началось очень давно — еще в переписке между Гиршфельдом и Феликсом Бернштайном, вскоре после открытия групп крови. Феликс Бернштайн являлся выдающимся профессором математики в Геттингене, когда я был там студентом, и его имя связано с одной из основных теорем теории множеств. Переписка закончилась принятием формулировки законов наследования групп крови (A, B, O, AB), предложенной Бернштайном, который вообще не был естествоиспытателем. Каким же образом он смог обнаружить в группах крови что-то, чего не заметили их первооткрыватели? Несомненно, ему и на ум не пришло экспериментирование или наблюдение, и он просто принял явление *prima facie* (не подвергая сомнению), анализируя наблюдения Ландштайнера, Дунгерна и Гиршфельда. Там не было никакой математической проблемы, так как проблема была чисто методологической, но ее следовало только распознать и понять. Недавно во Вроцлаве проф. Слупецкий занялся определением групп крови и оказалось, что группа O логически отличается от остальных и определение генотипов для логика является совсем непростой задачей, значительно отличающейся от определения фенотипов. Характерно, что дискуссия о генетических принципах, которая обычно не выходит за рамки фразеологии, во Вроцлаве впервые действительно прошла в освещении представлений логики.

Гиршфельд был естествоиспытателем *par excellence* (по преимуществу), но он отлично чувствовал математическую сущность возникающих задач. Наше сотрудничество, прежде всего, оказалось связанным с задачами установления отцовства, и оно позволило определить вероятность отцовства до проведения экспертизы (результат в точности оказался равным доле истинных отцов среди ответчиков). Работа также позволила в каждом случае установить вероятность отцовства после экспертизы и оценить число ошибочных судебных заключений, и позволила освободить вычисления от генетических гипотез (за исключением генетического подобия) и все заключения основывать лишь на материале самих экспертиз. Тем самым мы смогли учесть в них возможные ошибки экспертов и отбросить концепцию так называемых истинных семей. И наконец, наша работа позволила указать путь к распространению этого метода на все наследуемые группы крови. Прогресс в этом направлении еще при жизни Гиршфельда сдерживался невежеством и завистью, а после его смерти те, кто в первую очередь должны были спасать наследие великого ученого, скромно говорили: «Мы об этом ничего не знали». Зато у практикующих юристов понимания оказалось гораздо больше, чем можно было ожидать, так как именно для этой науки из судебных дел вытекают выводы, касающиеся не только законодательства, но и критики «стоимости» приговоров в делах иного рода.

Я могу привести и обратный пример сотрудничества (при котором инициатива исходила от математиков), относящийся к так называемой вроцлавской таксономии. Исследование началось с абстрактного вопроса: как надо строить железнодорожную сеть? В более сложном варианте вопрос формулируется следующим образом: как может авиационный инспектор самым быстрым маршрутом посетить все аэродромы страны? Задача является весьма сложной для всех математиков, которым она была предложена, однако начертить схему кратчайших связей между 16-ю польскими городами (при условии, чтобы она не содержала разветвлений) оказалось достаточно просто, и эта задача коллективно была решена. Позднее я сообразил, что не только города характеризуются взаимным удалением друг от друга: в методе Чекановского упорядочение всех предметов по их характерным свойствам тоже определяется расстояниями между этими свойствами.

Так появилась концепция вроцлавской таксономии, которую мы затем пытались применить к антропологии, к классификации населения по частоте групп крови, к экологии растений, к криминальным (блатным) сонетам и к проблеме строения звездных структур. Теория пригодна также к стандартизации самых обычных предметов, например, плетеных корзин или образцов одежды.

Очевидно, что только некоторая дистанция от предмета, взгляд издалека могут создать концепцию такого рода, и ясно, что в этих проблемах нельзя ожидать инициативы поэтов или портных. В подобной ситуации сотрудничество должно сразу начинаться с агрессии. Во всех задачах такого типа появляется как бы железнодорожная сеть, называемая деревом (дендритом), а роль математики заключается в рассмотрении этого понятия всеобщей важности и значения.

Особым открытием здесь является идея перестановки свойств и предметов, так как, имея набор предметов и систему свойств, можно поменять их роли и получить иной дендрит. Мы решили это сделать с видами лесных мхов и с лесами, в которых они произрастают, для чего мы использовали одну чужую работу, опубликованную Польской Академией наук. Оказалось, что мхи обладают свойствами, характерными для соответствующих лесов, и по ним можно даже судить о типе леса (но по типу леса нельзя судить о виде мхов, что наглядно демонстрируют те же дендриты). Ботаники не приняли наши результаты серьезно, но недавно я получил гранки работы, автор которой (довольно известный естествоиспытатель) предлагает свою концепцию количественных измерений в биохимии. Брошюра написана разумно, понятным языком, и выглядит крайне необходимой. Для коллег автора она будет полезна, так как 90% из них до сих пор знали только 10% ее содержания и сути. Проблема состоит в том, что ее содержание было известно статистикам во всем мире уже 50 лет тому назад (и уже тогда не представляло собой ничего нового).

Почему возникает такая ситуация? Возможно, из-за различия стиля мышления в разных дисциплинах, так как естествоиспытатели просто не заметили существования некоторых научных фактов и понятий, которые косвенно и постепенно должны были внедряться в их науки. Один из этих фактов заключается в том, что математическая статистика является ни чем иным, как теорией естественной индукции. Я предполагаю, что именно так биологи воспринимали и некоторые давным-давно известные химические факты.

Мы живем одновременно, но в разных эпохах. Огромные затраты труда были бы сэкономлены, если бы небольшая, доступная и практичная книжечка *Medical Statistics*, написанная биологом Хиллом, была переведена и издана на польском языке.

Но вернемся к основам коллективной работы. Такая работа требует непосредственного контакта. Она совсем не заключается в том, чтобы взять два «склада мудрости» и ссыпать их содержимое в один, нельзя также рассчитывать, что на каждый вопрос найдется ответ в иной науке. Смысл коллективной работы основан на взаимном изменении стиля мышления. Математики должны отказаться от выискивания в иных науках дедуктивных теорий и также выяснить у естествоиспытателей не то, чем является математика, а то, чем она обязана быть (сами естествоиспытатели этого не знают, но, возможно, они помогут нам это выяснить?). Как это можно сделать? С помощью такой постановки задач, при которой мы должны будем переосмыслить идеи, повторяющиеся у них без критики из столетия в столетие. Взаимодействие наук происходит одновременно и полностью изменяет взгляды обеих сторон, а постоянная совместная работа изменяет стиль научной эпохи.

Я уже упоминал о цюрихском профессоре Эйнштейна — Германе Минковском, который достаточно точно первым сформулировал малую (по-видимому, автор имеет в виду специальную — *перев.*) теорию относительности. Как-то на лекции он сказал, что Эйнштейн имел плохую математическую подготовку («я могу это утверждать, поскольку сам учил его математике»). Минковский прекрасно отдавал себе отчет в том, что необходимо полностью пересмотреть принципы кинематики в соответствии с теорией относительности, но нельзя довольствоваться лишь упреками в адрес Эйнштейна. Рано или поздно, но в один прекрасный момент профессора обязаны стать учениками своих учеников, и только способные к этому пригодны для коллективной работы.

Особая вроцлавская концепция заключается в исключении вероятностных понятий отовсюду, где можно прийти к цели иным путем. Для этой концепции весьма характерна идея Стефана Дробота, умевшего в статистических задачах заменить такие понятия измерительным анализом, причем измерительный анализ (или теория моделей) был связан для него с физикой или теорией вероятностей через конкретную математическую задачу (а именно, вычисления статистической оценки). Решение экономических задач с помощью измерительного анализа стало неожиданностью и для математиков, и для экономистов. Несомненно, это не удалось бы сделать, если бы ученые не выходили за границы своей специальности. Такое требование можно назвать законом дистанции: чем дальше друг от друга какие-то науки, тем ярче свет от их соединения, подобно тому, как с расстоянием увеличивается мощность молнии.

Необходимо также нарушить временны́е границы и планировать завтрашнее сотрудничество еще до того, как наши будущие сподвижники узнают об этом. Мечтая о сотрудничестве с метеорологами, мы не должны начинать с изучения аэродинамики и исправления прогнозов погоды или применять сложные методы математического анализа к перемещению воздушных масс. Нас интересует, что такое хороший прогноз. Интересно, что это можно строго определить только при условии, что известна цель прогноза и величина ущерба в результате неправильного прогноза. Известно, что с этой точки зрения прогноз, являющийся просто трактовкой наблюдений, хуже абсолютного прогноза, рассчитанного по тому же самому материалу (по нашему мнению, он оказывается ошибочным в каждом втором случае). Еще интереснее, что абсолютный прогноз зависит от потребителя, поскольку от ущерба, который ему будет нанесен вследствие ошибочного прогноза, существенно зависит само предсказание. Без метеорологов эти мечты так и останутся только лишь мечтами; однако в целом эта программа соответствует математической тенденции отыскания *оптимума* при данных условиях, а не тому, к чему обычно стремятся естествоиспытатели, — ожиданию повышения точности приборов и увеличению количества наблюдений.

К другому направлению, имеющему шанс развития во Вроцлаве, относится огромная проблематика, связанная с задачами теории решений, игр или планирования, непосредственно относящаяся к экономике. В некоторых странах это направление давно вышло за рамки теоретических решений, и можно привести конкретные примеры математического планирования практической деятельности в крупных масштабах. У нас оно вообще не известно тем лицам, которые должны о нем знать в первую очередь.

Математики еще не добрались до этих лиц и их задач, а без делового контакта любое углубление этой теории (на лекциях и семинарах) будет явно противоречить той программе коллективных исследований, которую я пытаюсь предложить и охарактеризовать в предлагаемой статье. Мой упрек обоснован — об этом свидетельствует тот факт, что пока вообще не существует математических организаций и даже отдельных консультантов, способных оказать неотложную помощь тем специалистам, которые постоянно решают математические проблемы (подобно тому, как Журден в пьесе Мольера говорил прозой, не сознавая этого).

Итак, как выглядит рецепт коллективной работы? Коллективность в нашем случае имеет по меньшей мере три разных значения. Она может заключаться в самой тематике (например, в научном плане вроцлавской медицинской школы предусматривается изучение интерференции разных болезней в одном организме), а также просто основываться на совместной работе нескольких лиц над одним заданием, что во Вроцлаве постоянно практикуется не только математиками, но и врачами. Но наибольший интерес представляет коллективность в значении сотрудничества между дисциплинами.

Таким образом, совместная работа во Вроцлаве выступает в разных формах, является здесь нормальным явлением и ее можно наблюдать на сотнях примеров. Она является не подражанием чужим образцам, а нашим собственным достижением. Мы не выгребли ее из опустошенных погребов и не вынесли из руин сгоревших домов. Она не возникла по приказу или прихоти отдельной личности, так как никому нельзя приказать: «с завтрашнего дня мы начинаем сотрудничать!». Наша коллективность сама является продуктом нашего содружества и именно поэтому мне так трудно объяснить, на чем она основана.

Немного о кибернетике

Минуло уже триста лет после смерти Блеза Паскаля, но наша мысль все возвращается к этому независимому духу, далеко обогнавшему свою эпоху и поэтому оставшемуся для нее малопонятным. Он угас на сороковом году жизни, но сумел изобрести машину для вычислений еще до того, как ему исполнилось двадцать. В принципе, арифмометр Паскаля не отличался от тех, которые с начала нашего столетия выполняют роль счетоводов в магазинах, банках или конторах, и тоже мог быстро складывать многозначные числа[1]. Но прототип, изготовленный автором МЫСЛЕЙ[2], не нашел применения, так как в его время не умели изготовлять зацепления, которые используются в современных арифмометрах. В XVII веке еще не была разработана геометрия и кинематика зубчатых колес, и никто не умел вырезать такие колеса из твердого металла. Вместо колес поэтому использовались диски, снабженные по окружности штифтами, но при большой скорости оборотов штифты ломались, и этот технологический недостаток обрек изобретение на неудачу. Наше время сумело справиться с подобными проблемами точной механики, и счетные машины в разных вариантах и под разными названиями нашли себе надлежащее место и применения. Арифмометры не скрывали в себе ничего таинственного и поэтому вызывали не большее удивление, чем локомотивы и паровые мельницы. Лишь во время Второй мировой войны возникла задача, с которой не мог справиться самый лучший арифмометр: как можно зениткой сбивать смертоносные самолеты, несущиеся со скоростью несколько сот

---

1 Только Г. В. Лейбниц показал, что идею Паскаля можно использовать для умножения.

2 Так назывался последний философский трактат Паскаля.

километров в час? Для решения задачи надо было уметь по положению и скорости самолета мгновенно вычислять такое направление стрельбы, чтобы снаряды попали в крылатого врага. Другими словами, было необходимо создать автоматическое устройство, которое в доли секунды воспринимало бы положение самолета и производило вычисления, а также управляло наводкой всех орудий так, чтобы сбивать даже высокоскоростные самолеты… Для решения такой задачи техника так называемого «века пара и электричества» была уже недостаточной, так как зубчатые колеса не могли работать с такой большой скоростью, а еще труднее было придумать аппарат, который выдерживал бы огромные стартовые ускорения. Проблему удалось решить, только используя электронные лампы, широко применявшиеся до этого в радиоаппаратуре. Такие лампы способны изменять свою проводимость тысячи раз в секунду, что и позволило создать на их основе современные вычислительные машины.

Как часто бывает, решающий скачок в военной технике привел к новым результатам в других областях исследований, далеких от первоначальных задач. Американский математик Норберт Винер заинтересовался иными аспектами стрельбы, а именно проблемами сбора информации, действий на основе этой информации, определения ошибки при этих действиях и устранения этой ошибки при новой попытке действий. Этот метод «проб и ошибок» известен артиллеристам еще со времен изобретения пороха для стрельбы, но Винер первым осознал его универсальность. Этим методом пользуются, например, велосипедисты и водители автомобилей, когда они незначительными движениями руля непрерывно компенсируют отклонения транспортного средства от движения вдоль автострады. Вообще говоря, так же поступает и любой рулевой, и поэтому именно корабельный руль дал Винеру наилучший пример всеобщего закона, который он назвал «обратной связью». На больших судах управление автоматизировано: если руль установлен так, чтобы судно двигалось прямо (например, на север), а случайная причина отклоняет его от курса, то ось гироскопа (постоянно сохраняющая северное направление) отклоняется от оси судна, и это отклонение вызывает подачу пара в соответствующую камеру цилиндра. Работа поршня перекладывает руль и вызывает возвращение судна к заданному курсу, а после восстановления правильного курса на север вентиль перекрывает подачу пара. Это остроумное приспособление, однако, не является исключительной привилегией современных автоматизированных морских гигантов: одинокому гребцу на обычной лодке весло служит рулем, а маяк на берегу — ориентиром направления, так что когда гребец видит, что лодка отклонилась от курса, то он веслом выправляет направление. В этом случае полный цикл (действий и управления) состоит из нескольких элементов: маяк образует свое изображение на сетчатке глаза гребца, зрительный нерв пересылает образ в мозг и возбуждает там импульс. Импульс другим путем поступает в мышцы руки, держащей весло, после чего импульс вызывает там реакцию мышц, приводящую к изменению угла весла относительно лодки. Такой принцип обратной связи использовался уже много тысяч лет, но вплоть до последних лет Второй мировой войны он не был предметом сознательного научного анализа, хотя в случае гребца он безусловно проявляется гораздо утонченнее и универсальнее, чем в случае современного гироскопического управления рулем. Именно Винер первым осознал принципиальное подобие этих двух с виду разных механизмов, и он же организовал коллектив ученых, которые занялись систематическим «нарушением» границ своих специальностей. В своей книге «Кибернетика или управление и связь в животном и машине» Винер приводит отчет о работе этого коллектива за период с начала Второй мировой войны и до даты публикации книги, цитируя в ней, в первую очередь, американского физиолога Артура Розенблюта, своего товарища по работе времен войны, а также многих других физиологов, врачей, математиков и инженеров. Наиболее интересным в книге является раздел IV, посвященный обратной связи и колебаниям, в котором впервые пациент неврологической клиники сравнивается с неисправным корабельным рулевым механизмом автоматического типа. Винер первым заметил, что каждая неисправность руля имеет свой клинический эквивалент в виде одного из многих заболеваний нейромоторного аппарата, хорошо известных врачам, и первым показал, какие дефекты регуляторов и управляющих автоматов являются эквивалентами многих конкретных заболеваний (например, *tabes dorsalis* или болезнь Паркинсона). Подобие становится очевидным, когда мы пытаемся описать математические модели таких обыденных действий, как доставание спичек или манипуляции дверной щеколдой. Винер и его товарищи разработали именно такие модели — сегодня их технические термины (вход, канал связи, выход, память, шум, количество информации, обратная связь и т. п.) из речи специалистов перешли даже в жаргон прессы, обогатив ее излишним балластом. Но здесь речь идет не о названиях, а об изумительном событии в истории медицины и науки вообще. Мы имеем дело со странными диагнозами удивительных врачей: рулевой механизм корабля был неисправен, симптомы определил математик, а неврологи знали вид заболевания, прежде чем инженеры изобрели автоматические рулевые механизмы, или своих пациентов!

В истории философии можно найти одинаково знаменательные события — сегодня их трудно оценить в надлежащей степени, но в свое время они стали верстовыми столбами мудрости, хотя позже направление дороги неоднократно вынужденно изменялось. Мнение Декарта, что животные являются лишь автоматами, требовало недюжинной независимости разума. Этот сверхматериалистический тезис так настойчиво просился к применению в отношении людей (столь близких к высшим млекопитающим полным подобием структуры всех органов, не исключая и нейромоторного аппарата), что математик мог бы привести собаку и ее хозяина в качестве примера пары топологически эквивалентных созданий. Но от Декарта до Павлова прошло три века… Ведь только сто лет назад поняли, что химические превращения органической материи подчиняются тем же самым законам, что и химия неживой природы, и что принцип сохранения массы и энергии справедлив и в отношении живых организмов! Очень трудно было также преодолеть психологические предрассудки эпохи при доказательстве того, что действиями людей и животных управляет одна и та же динамика, которая прекрасно была известна уже в XVIII веке, а вскоре и была практически проверена на различных машинах. Но самый захватывающий эпизод случился значительно позже, в 1903 году, когда Вилбур Райт на моторном самолете очертил первый круг на небе, а на вопрос, как летает машина, которая тяжелее воздухе, ответил: «*Like a bird*» — подобно птице!… Как мы должны это понимать? Поскольку птица является летающей машиной, то — говорит Райт — я построил машину, подражающую птице… В этом суждении первого авиатора скрывается вера в положение Декарта — до 1903 года большинство даже очень образованных людей верили, что птица летает потому, что является птицей (и, следовательно, как бы создана для полета) и никакой аппарат с ней не сравнится, так как не является птицей… Райт поставил на другую карту: птица летает, потому что является машиной для полета, так что для полета надо просто построить аппарат, снабженный крыльями, и дать ему вместо мускулов бензиновый мотор… Путь Винера шел параллельно пути Райта, но в обратном направлении: автоматический рулевой механизм корабля иногда проявляет неисправность, называемую «рысканием» — ее можно описать математически. Винер исходил из того, что человек, протягивающий руку к стакану, должен иметь управляющий аппарат, и, следовательно, он подвержен дефектам, подобным дефектам автоматического рулевого механизма. Так говорит Винер, а Райт сказал себе, что коль скоро существует живая летающая машина, то можно построить искусственную, которая будет подражать живой по образу действий. Винеру была известна теория корабельного рулевого механизма и его дефектов, и он знал также, что человеческий нейромоторный аппарат подвержен заболеваниям. На этой основе он мог описать симптомы болезни Паркинсона, не заглядывая в учебник нейрофизиологии — его открытие не требовало изобретений иных, нежели само открытие, что птица является машиной[3].

Открытия такого рода не часто отмечает история человеческой мысли — к ним можно отнести теорию гравитации Ньютона. В свое время она не произвела большого впечатления на его современников. Даже позднее многие образованные люди (такие, как Гёте) долго не отдавали себе отчета в том, сколько времени

[3] Братья В. и О. Райт имели многочисленных предшественников, которые, однако, не сумели подкрепить это открытие созданием искусственной птицы, предоставив это изобретение нашему веку.

пробежало на часах, — возможно потому, что моделями теории были планеты и Луна, т. е. предметы далекие и загадочные. Когда пару лет назад удалось поместить на орбитах искусственные спутники Земли, большинство обеспокоилось тем, что будет, если искусственная Луна упадет на Землю, а меньшинство удивлялось, что она не падает. Когда кто-то заметил, что настоящая Луна тоже не падает на Землю, ему отвечали: «Луна не падает, потому что это Луна», почти дословно повторяя тезис скептиков авиации «птица не падает, потому что это птица». Лишь немногие поняли, что если Луна не падает, то и другой предмет, отправленный во вращение вокруг Земли, тоже не упадет. Еще меньшее число людей заметили, что являются свидетелями первого в истории эксперимента, отлично подтверждающего теорию Ньютона на предметах, к которым прикоснулась рука человека, и видимых невооруженным глазом. Этого события также пришлось дожидаться без малого триста лет, и вновь причиной промедления были технологические трудности, так как во времена Ньютона не существовало взрывчатых веществ, способных придать снаряду скорость по меньшей мере в тридцать раз большую, чем скорость тогдашнего пушечного ядра. Сегодня еще мало экспериментов в лабораторном масштабе, позволяющих объяснять ученикам в школе законы гравитации на моделях, подобно демонстрации, например, колебания маятника. Недавно я нашел в газете заметку о наблюдениях, которые межпланетная станция MARINER II передала на Землю. Информация доказывала невозможность органической жизни на Венере — эта заметка была набрана петитом. Ракета за сто дней преодолела около 80 000 000 км, чтобы подтвердить старый афоризм, что между небом и Землей есть многое, что и не снилось школьным умникам. Действительно, мне бы никогда не могло присниться, что я увижу такое утверждение, напечатанное петитом в газете, т. е. там, где обычно самыми жирными буквами сообщаются нелепые новости (которые даже со знаком минус не становятся правдивыми).

Философы давно задумались над вопросом, является ли человек машиной? Прекрасный ответ на этот вопрос дают марионетки, которые вызывают аплодисменты подобием своей внешности и движений человеческому прототипу — секретом деревянного полишинеля является его подчинение тем же самым законам механики, которым подвластен живой клоун в цирке. Но я не думаю, что всегда было легко поверить в принципы, которые сегодня звучат так естественно… Ведь не более чем сто лет назад Парижская Академия наук занялась парадоксом кота, падающего на четыре лапы, если его вначале удерживать в перевернутом положении, подвесив на четырех нитках, привязанных ко всем лапам. Рациональная механика (так назвали ее великие создатели, члены той же Академии) давно умеет объяснять этот занимательный эксперимент, но сам факт разногласий во мнениях свидетельствует, что было немало и сторонников иного объяснения кошачьего *salto mortale* — пожалуй, каждый догадается, что это объяснение сводилось к тому, что кот всегда падает на четыре лапы, потому что это… кот. Людям всегда такая иррациональная механика нравилась больше рациональной.

В настоящее время полемика развернулась вокруг машины для вычислений, а говоря чуть серьезнее — электронного цифрового компьютера, который уже не является ни играющим шкафом, ни автоматом для продажи перронных билетов. У современных компьютеров более высокие амбиции: они играют в шахматы, сочиняют танцевальную музыку и подтверждают аутентичность подписей. Правда, пока они делают это хуже, чем живые специалисты, но нелегко найти человека, который один заменил бы компьютер во всех трех функциях, а в качестве побочного занятия за несколько минут мог бы решить сто уравнений со ста неизвестными. Скептики утверждают, что любая деятельность электронного компьютера всегда является лишь выполнением программы, написанной рукой человека и вложенной в выдвижной ящик машины тоже человеком, для которого она остается слепым инструментом. Но защитники машины указывают им, что метафора «слепой» в данном случае неуместна, так как человеческий глаз тоже является инструментом (но отнюдь не слепым), и что эволюция науки была подобна открытию кибернетики, поскольку изобретение стеклянной линзы и открытие ее свойства концентрировать световые лучи предществовали признанию анатомами роли хрусталика глаза[4]. В ответ противники машин упрекают компьютеры в отсутствии сознания, так как трудно представить себе такую машину, отдающую себе отчет в проделанном, а еще труднее — такую, которая могла бы свободно принимать решения.

Вместо того, чтобы защищать машины, я позволю себе напомнить, что пишет Паскаль о таких играх, как орел-решка. По его мнению, даже игрок с небольшими умственными способностями победит в этой игре наивного противника, если правильно оценит его «наивность» — т. е. догадается, например, что простачок, проиграв на орла, поставит на решку. Более изощренный партнер справится со средне сообразительным, который может победить только абсолютно неразвитого и т. д. Для того чтобы воспользоваться теорией Паскаля, надо на основании нескольких первых ходов (а, возможно, и по внешнему виду партнера) правильно оценить степень его сообразительности. Однажды в баре в Нью-Мексико я видел, как мой приятель играл со случайным противником и успешно побеждал его, используя советы Паскаля. Но что случится, если партнером будет компьютер? Д. У. Хагельбергер дал ответ на этот вопрос с помощью соответствующей модификации машины, которую он заставил угадывать, положил ли живой партнер монету вверх орлом или решкой. После большого количества опытов оказалось, что машина в среднем выигрывает в 55 случаях из 100. Секрет выигрыша машины заключается в том, что она записывает в память всю историю игры с самого начала, так как ее опекун каждый раз информирует ее о результате. Сначала эта информация не дает никакой пользы, но после нескольких десятков записей машина начинает основывать свои решения на опыте, т. е. она ищет в памяти этапы игры, состоящие из нескольких (например, из трех) последовательных решений игрока и стольких же собственных ответов. При этом она производит отбор так, чтобы такие циклы (шестерки) совпадали, и, обнаружив такие циклы, делает вывод, что живой игрок поступит так, как он поступал раньше в большинстве этих выбранных случаев. Это предположение машина

[4] С конца XIII века уже Роджеру Бэкону было известно об увеличительных стеклах, но только в XVI веке Ф. Мавролико сравнил глазной хрусталик с линзой.

и сообщает в качестве своего ответа. В этой ситуации живому игроку не поможет даже паскалевское остроумие: даже если он попытается отступить от используемых до сих пор правил и изменить тактику, то рано или поздно он начнет действовать рутинно и проиграет на долгой дистанции. Еще хуже обстоит дело, когда живой игрок начинает считать, что он имеет дело с «тупым» автоматом, циклически повторяющим сигналы, раз и навсегда записанные на ленте. И наоборот: электронный компьютер принимает живого партнера за автомат и не сильно в этом ошибается — положительный баланс машины заставляет человека признать, что это компьютер его раскусил, а он, живой игрок, недооценил разумность аппарата. Таким образом, электронный шулер оказывается гораздо богаче и мудрее живых…

Две большие войны стерли из нашей памяти имя испанского ученого Торреса Кеведо. Не имея в своем распоряжении электронной техники, он сумел перед Первой мировой войной сконструировать электрического шахматиста, объявлявшего мат королем и ладьей одинокому королю, управляемому живым игроком, который имел право определять произвольное начальное положение всех трех фигур; электрический игрок побеждал всегда за кратчайшее число ходов, определяемое давно известной живым шахматистам теорией. Улам и Штейн решили исследовать, не ошибся ли Винер в своем предсказании, что электронные компьютеры сравняются с опытными шахматистами марки «гомо сапиенс». В своем отчете 1957 года они объясняют, почему компьютеры играют очень слабо. Если машина должна играть посредственно, то обязана, подобно человеку, рассматривать и оценивать по меньшей мере три ближайших собственных хода и столько же ответных ходов противника. По приближенной оценке это соответствует 64 миллионам ветвей, соединяющих начальное положение с тем, которое будет на шахматной доске после этих шести ходов, так что даже самые качественные машины должны были бы думать над каждым ходом несколько часов, а значит партия продолжалась бы целыми неделями… Как же получается, что на 64 полях человек все еще полностью преобладает над компьютерами? Ведь несовершенство человеческой памяти, к сожалению, нам хорошо известно! Каким образом человек в течение одной или двух минут находит ход, радикально разрушающий позицию, которую машина создавала в течение многих часов? Преимущество человека обусловлено широтой его мышления: если человек, например, видит, что его король находится в трудном положении на правом фланге, то он не будет раздумывать над возможным ходом своей пешки на краю левого фланга. Человек также не будет учитывать очевидно бесцельные ответы противника — это настолько уменьшает поле выбора, что у него редко возникает необходимость десятиминутного размышления. Именно это умение отличать существенное от несущественного или, иными словами, искусство «обрисовать» ситуацию несколькими движениями кисти (минуя тысячи деталей, которые машина последовательно анализирует все без исключения) дает шахматисту преимущество над компьютером. Это поразительное человеческое свойство до последнего времени оставалось столь незамеченным, что у него нет даже соответствующего названия, но именно оно позволяет нам осуществлять массу операций, требующих специфической точности (умение ходить по пересеченной местности, оценка на глаз ширины канавы, отгадывание по нескольким штрихам изображаемого на карикатуре лица, понимание содержания документа при беглом чтении и многое другое), и именно этому свойству человека будут завидовать компьютеры, если когда-нибудь научатся у человека чувству зависти.

Идя по этому пути, Ст. Улам выдвинул концепцию «синергетики», основанную на разделении работы между человеком и машиной. Человек делит поле зрения на несколько частей и классифицирует их по важности, после чего отбрасывает те, которые считает не имеющими значения (в шахматной игре или в иной проблеме, требующей его решения), а в оставшейся части поля выбирает несколько возможных решений и приказывает машине изучить их последствия и помочь ему выбрать наилучшее решение. После нескольких собственных ходов человек может вновь подключить машину к анализу ситуации. Например, при игре в бридж роль машины следовало бы ограничить запоминанием ходов, а человеку — предоставить выбор карты, после получения от электрического суфлера сообщения относительно расклада. Общеизвестным примером синергетики может служить взаимодействие водителя автомобиля с двигателем, при котором последний выполняет работу, связанную с энергетическими затратами, оставляя водителю функцию коррекции направления движения.

Если мы сравним аппарат Торреса Кеведо с компьютером, играющим в шахматы при полном комплекте фигур, то возникает вопрос — почему старомодный электрический аппарат блестяще справляется с заданием, а в тысячу раз более быстрый компьютер оказывается таким беспомощным перед человеком? Ответ сводится к тому, что шахматисты давно решили проблему игры короля и ладьи против одинокого короля, а также вывели точные правила, определяющие для каждого положения этой тройки фигур наилучший ход белых, так что (поскольку аппарат играет белыми) Торресу потребовалось только встроить эти правила в аппарат. Ничего подобного нет в шахматной игре с полным комплектом фигур, так как, вообще говоря, в шахматах неизвестно даже, игра каким цветом теоретически должна приводить к победе или поражению (хотя известно, что такое правило должно существовать!).

Война отличается от шахматной игры тем, что здесь ситуация оценивается посредством тысяч телеграфных, телефонных, радиотелефонных и прочих сообщений, а так называемый театр военных действий охватывает целые континенты и океаны. Некоторые теоретики проблем современной войны желают поднять на высший уровень значение «здравого рассудка» полководцев. Например, один из экспертов, сэр Солли Цукерман[5], опасается, что слишком изощренная автоматизация всех решений может (в связи с огромным числом параметров, точные значения которых знать невозможно) привести к фатальным решениям в определенной ситуации. Действительно, если все будет зависеть от беспощадной логической машины, то может произойти какая-нибудь неожиданность, важность которой машина не заметит, хотя ее мог бы с легкостью учесть каждый благоразумный и опытный полководец, доверяющий не столько машине, сколько обычной крестьянской смекалке. Короче говоря, английский эксперт НАТО мог бы считаться сторонником синер-

5 Operation Research Quarterly, 13, 3, Sept. 1962.

гетики, если бы знал, что такая теория существует и дозрела до практического применения, но оба предположения выглядят сомнительными. Но как можно полагаться на здравый смысл или крестьянскую смекалку, если они возникают в основном из опыта, а приобрести опыт современной войны не имел возможности еще никто, поскольку никто еще не применял атомные боеголовки и ракеты дальнего радиуса действия на густо населенных территориях. Сегодняшняя война, в которой одна сторона верила бы в непогрешимость машин, а другая — в рекомендации и опасения С. Цукермана, была бы подобна игре в шахматы, когда по одну сторону шахматной доски сидел бы компьютер, а по другую неопытный шахматист — как мы знаем из исследований Улама и Штейна[6], шансы в этом случае более или менее равны… Эксперт также с недоверием относится к современной теории игр, которую он считает разделом статистики и теории вероятностей, в чем ошибается. В связи с тем, что нам (к счастью) очень мало известно о будущей войне, мы должны будем (если примем предположение о возможности такой войны за разумную гипотезу) учиться на собственном опыте в процессе сражений. Регистрацию столь важных событий и обеспечение непрерывной «обратной связи» в этом случае нельзя доверить никому, кроме машины будущего — обладатель такой машины будет в такой же ситуации, что и конструктор машины, выигрывающей в соотношении 55 : 45 в орла-решку.

В конце XIX века многие охотно повторяли фразу известного физиолога Эмиля Дюбуа-Реймона (*Ignoramus et ignorabimus*, т. е. «не знаем и не будем знать!») и составляли списки так называемых неразрешимых проблем, которые за сто лет до этого Иммануил Кант назвал антиномиями чистого разума. Было ли начало мира или он существовал всегда? Будет ли он существовать вечно? Ограничен он или безграничен? Может ли живая материя возникнуть из мертвой или только из живой? Появление электронных компьютеров напомнило нам фразу берлинского физиолога, который помещал ответы за границами науки, как недосягаемые для человеческого разума. На фоне этих классических дилемм

[6] Chess Review, Jan. 1957.

вопрос о том, является ли электронный компьютер живым существом, каждому представляется комичным по своей нелепости, однако его стоит поставить, так как он заставляет задуматься над тем, что является характерной особенностью живых организмов. Новые открытия механизмов в органическом мире и в самом человеке пробуждают у нас старую как мир мечту о гомункулусе — если человек является машиной, то почему машина не может быть человеком? Название «электронный мозг» 30 лет назад вытеснило из словаря термин «робот», но оба они суть проявление одних и тех же идей, самая старая из которых восходит еще к Адаму, вылепленному из глины. Эти идеи раньше имели лишь одно направление: из мертвого можно было сотворить живое, а обратное превращение всегда было сопряжено с проклятием и карой. Кроме того, нельзя забывать о проблеме сосуществования свободной воли с абсолютным детерминизмом — пример такого подхода мы видим в исламе. В решении задачи подводит и эстетический критерий, поскольку лишь некоторые люди (почти исключительно мужчины) склонны усматривать в машинах специфическую красоту. Известная работа Гюйсманса «A rebours» (против шерсти), который первым ввел в искусство так называемый техноромантизм, завершает определенную эпоху, а гениальный создатель этого выражения предсказал гибель тому поколению, которое продаст душу машине. А может быть, и тело? Кто победит в войне машин и людей? Сколько людей и сколько машин погибло в последних войнах? Эта статистика известна, хоть для машин это и не похвально.

Естествоиспытатели склонны считать критерием жизни обмен материей между живым существом и окружающей средой, а также продолжение существования живых организмов путем размножения. Я добавил бы сюда и смерть как одну из особенностей жизни: все, что живет, умрет. Самопроизвольное движение является не необходимым атрибутом жизни, а лишь достаточным, и существуют машины, которые могут претендовать на звание живых в силу своего движения. Название «автомобиль» дословно означает лишь нечто, что само движется, чему соответствует в переводе слово «самоход». Весьма характерно, что первые люди, которым на глаза попались автомобили, видели в них именно то, что казалось наиболее существенным (накопленный опыт научил их, что повозка нуждается в тягловом животном, которое ходит самостоятельно, потому что является живым), и удивление при виде самодвижущейся повозки отразилось в названии. Люди, знакомые с ролью автомобилей на Западе (особенно в Соединенных Штатах), и сами западные социологи сходятся в том, что существующее там пристрастие к автомобилям нельзя объяснить никаким рациональным образом. Дорог для пешеходов там, собственно говоря, нет, а улицы настолько забиты автомобилями, что для них необходимо строить многоярусные магистрали. Правда, цена автомобиля, особенно подержанного, невелика, но стоимость содержания, ремонта, страховки и парковки является ощутимой. Дальние поездки на автомобиле утомительны, а хлопот с ним в чужом городе немало. Столь неразумное отношение к машине можно объяснить только усмотрением в ней чего-то большего, чем бездушная глыба вещества. Мне известен только один пример превосходства машины над человеком (даже более всеобъемлющего, чем автомобиль) — это ротационная печатная машина, однако в этом случае превосходство является косвенным (через продукт, именуемый печатью), так что этот пример требует отдельного изучения, которое невозможно уместить на полях рукописи.

Самопроизвольное движение требует свободной воли, наличие которой у машины сомнительно, но мы можем спросить, имеет ли ее сам человек? Однажды я был свидетелем постгипнотического эксперимента (т. е. такого, в котором медиум после пробуждения должен выполнить приказания, отданные ему во время гипнотического сеанса), причем эксперимент был организован так, что любые возможности мошенничества были исключены. После пробуждения медиум вел себя совершенно нормально, хотя присутствующие знали, что когда придет пора возвращаться домой, то медиум потребует, чтобы ему одолжили книгу, лежащую на столе. В нужный момент хозяин сознательно создавал трудности, но медиум обосновывал свои действия и упорствовал в желании, которое было ему чуждым. Не было ли это желание тогда подобно камню, сброшенному ногой туриста с горного склона? Возможно (если бы камень обладал сознанием свободного выбора и умел говорить), камень сказал бы нам: я иду вниз, так как договорился о встрече со знакомым мне камнем?… Ведь еще Аристотель объяснял падение тел стремлением всякой материи к движению вниз в вертикальном направлении.

Для принципиальных материалистов не существует резкой границы, разделяющей мир на органическую и неорганическую половины — есть только вопрос сложности, поскольку богатством структур органические клетки превышают все, что мы считаем мертвой материей. Печень состоит из миллионов клеток, каждая из которых является столь сложным комплексом различных элементов, что самый большой электронный компьютер выглядит в сравнении с ней слишком примитивным механизмом, поскольку физиологические задачи печени удивительно разнородны и сложны. Решая эти задачи, природа не стала прибегать к магическому заклинанию «печень — это печень», а построила гигантский комплекс миниатюрных автоматизированных фабрик, что является доказательством универсальности и единства законов природы. Электронные машины безусловно технически проще этих фабрик, и поэтому мы должны не удивляться, что они слабо играют в шахматы, а лишь констатировать, что природа тоже не располагает гениальными конспектами, когда ей предстоит решать трудную задачу.

Верующие люди (я подразумеваю верующих в Священное Писание) решают вопрос о живой и мертвой материи, приписывая Творцу живую и бессмертную силу творения из хаоса космического порядка, а затем и органической жизни, вершиной которой является человек. Так что неудивительно, если бы этот человек в свою очередь сумел сконструировать и создать предметы, наделенные способностью восприятия, координирования движений, питания, размножения, принятия решений, умения играть и борьбы за существование. Один из самых великих математиков нашего века, недавно умерший Дж. фон Нейман поставил перед собой задачу определить, способна ли электронная машина создать другую (лучшую и более точную копию себя самой), и получил некоторые результаты, свидетельствующие о возможности такого процесса.

Имя фон Неймана связано с теорией игр, а вероятностные игры — с творчеством Паскаля, который первым сформулировал теорию азартных игр в виде отдельной доктрины, называемой теорией вероятностей. Но фон Нейман, а до него пара других ученых, из которых самым ранним был французский математик и политик Эмиль Борель, занялись иным аспектом игр, а именно принципом оптимального поведения. На первый взгляд кажется, что такое поведение невозможно определить без знания правил, которыми пользуется противник, однако нам известно, что противник тоже не знает наших правил. Математика умеет справляться с такими ситуациями, в результате чего теория игр, никому не известная до Первой мировой войны, после Второй стала развитой областью науки. Эта теория позволяет выйти из заколдованного круга с помощью оптимальной стратегии, но в реальных ситуациях поиск такой стратегии может потребовать долгих вычислений. Именно в таких ситуациях специалистам по теории игр на помощь приходит электронная машина, так как она может не только играть в шахматы и шашки, но и многое другое. Теория игр, действительно, позволяет решать множество задач: от распределения грузовых вагонов по железнодорожной сети страны до определения эффективности применения конкретного лекарства на основании нескольких сотен проб.

Проблема потенциальных способностей машины (или наоборот, их неспособности) появилась примерно сто лет назад в мечтах об автоматах, говорящих человеческим голосом. Затем из лиры возникла обычная шарманка (но она была при этом лишена поэтического ореола), а уже позднее дело дошло до героев баритона и героинь сопрано, имена которых мы видим на мраморных досках театров, хотя создатели памятных досок возможно не понимали, что скорее следовало бы процарапать иглой на воске голос знаменитой Малибран, чем высечь резцом на камне ее имя. Из всех машин, созданных во второй половине XIX века, простейшей является граммофон: вращающаяся пластинка (сначала восковая, потом эбонитовая) и стальная игла, острие которой опирается на пластинку, а другой конец соединен с металлическим рупором. Благодаря своей простоте изобретение Эдисона уже в прототипе можно было изготовить настолько превосходно, что когда его впервые продемонстрировали в парижской Академии наук, то многие академики стали озираться в поисках чревовещателя. Дело в том, что врачи (ссылаясь на свой авторитет в вопросах горла, носоглотки, голосовых связок и языка) утверждали до этого, что естественный фонетический аппарат человека является уникальным. Считалось, что он имеет столько изумительных особенностей, что никакая машина (не говоря уже о какой-то там пластинке с гвоздиком) никогда не сможет подражать человеческому голосу, созданному матерью-природой. В этом эпизоде вновь проявилась сила веры в наследственную привилегию потомков Адама: человек говорит, потому что он является человеком, а следовательно, никакая машина не может говорить человеческим голосом. Но машина говорила человеческим голосом, а ее победа была полной — о впечатлении пусть свидетельствует повесть *Ève future*[7], герой которой с помощью Эдисона создает искусственную женщину. Сюжет книги построен на вопросе: если граммофон верно воспроизводит высоту тона и его окраску, акцент, индивидуальные особенности речи и напряжение голоса (а также звуковой образ всех чувств, которые мы ощущаем в словах и песнях), то не превзойдет ли искусственная женщина живую в том, о чем мечтает создавший ее поклонник? Все человеческие чувства (радость и отчаяние, надежда и сомнение) при этом сводятся к следу в канавке, вырезанной иглой на пластинке в процессе записи. Этот след можно представить зависимостью $y = f(x)$, где x означает время, а y глубину следа… таким образом, все очарование голоса тенора в известной арии из оперы «Тоска» можно выразить с помощью непрерывной функции одной переменной, а граммофон является экспериментальным доказательством этого утверждения. Для воспринимающих музыку людей он играет заранее оговоренную роль, из чего можно сделать и обратный вывод: человек является говорящей и поющей машиной, а его организм содержит среди многих других аппаратов также голосовой аппарат. Сегодня об этом знает каждый, но до Эдисона мало кто принял бы такую грубую формулировку фактов.

[7] Villiers de l'Isle Adam, 1886.

Не заслуживает ли внимания философов настойчивое желание людей оговорить свою монополию на некоторые действия и их неспособность сделать общий вывод из поражений, то и дело наносимых нам машинами? Обычно мы утешаемся тем, что эти машины создал человек… Дело обстоит именно так, но из этого не видно никаких принципиальных оснований, гарантирующих нам вечные патентные права на все возможные изобретения, многие из которых нам еще не снились…

Граммофон является звуковым аналогом фотопленки (т. е. аппаратом только регистрирующим и воспроизводящим), так что его нельзя отнести к универсальным машинам, похожим на современные компьютеры. Проблемы сегодняшнего дня уже требуют создания аппарата, который бы мог читать ноты и текст, превращая их в песню так, как это делает певец, глядя на партитуру. На этом пути нет никаких принципиальных препятствий (хотя технические трудности могут быть немалые), однако остается неясным, должны ли мы радоваться или огорчаться тому, что в недалеком будущем мы будем представляться друг другу в виде коробочек, которые на банальные вопросы будут давать банальные ответы. Материалы для таких бесед можно найти в «Словаре человеческой глупости» Г. Флобера, так что на вопрос о том, может ли машина мыслить, мы можем получить деликатный ответ: «к сожалению, нет — у нас нет души» (в связи с этим можно отметить, что термин «могущественный электронный мозг», придуманный мозжечком недалеких журналистов, выглядит не оплаченной взаимностью лестью в адрес машины).

Концепция обратной связи в вычислительных машинах проявляется в виде контролирующих устройств, и мы можем представить себе ее использование в граммофоне. Можно предположить, что принцип синергетики вскоре найдет себе дорогу и к компьютерам, но ситуацию характеризуют не только эти, мимоходом сформулированные тенденции. Популяризация задач, стоящих перед нашим поколением, сама по себе является непростой проблемой. Количество ученых, вовлеченных в нее, превышает их совокупное количество во всех предыдущих поколениях, поэтому следует, прежде всего, говорить о популяризации для самих ученых. Лишь немногие гуманитарии отдают себе отчет в сущности математической проблематики. Например, недавно я прочитал серьезную статью, в которой «математическим гением» был назван один из так называемых счетчиков (умеющих за пару секунд перемножать в уме многозначные числа). Писавший об этом журналист, по-видимому, просто не знал работ французских психологов конца XIX века (которые еще тогда подметили, что среди таких счетчиков много умственно недоразвитых личностей), но, с другой стороны, лишь очень немногие математики знакомы с достижениями современной генетики. Мы подобны Крезу, который не мог сосчитать своих богатств. Мы живем в эпоху взрывов, не только атомных. Европейские монархи в первой четверти XIX века посылали своих гонцов на перекладных конях, но за тысячи лет до этого такой способ был известен и египетским фараонам. Скорость передвижения менялась очень незначительно за время от момента, когда человек впервые оседлал коня, до момента пуска локомотива Стефенсона, но в это последнее мгновенье она сразу удвоилась. Удвоение скорости первых поездов произошло всего лишь за следующие 50 лет, после чего последовало еще 8 таких удвоений скорости транспорта. Переход от реактивного самолета, летящего со скоростью звука, к ракетам с космонавтами, летящими вокруг Земли, потребовал пяти удвоений и произошел в течение шести лет — это значит, что в настоящее время человек ежегодно удваивает скорость своих транспортных средств! Рост населения земного шара тоже приобретает характер взрыва — в настоящее время период его удвоения составляет около 50 лет. Если бы темп роста был постоянным, то из этого следовало бы, что до Рождества Христова на Земле вообще не было людей (ошибочность такого рассуждения наглядно доказывает то, что период удвоения населения стремительно убывает). Экономические (а следовательно, и политические) последствия таких процессов сегодняшний наблюдатель просто не видит, и они предстанут перед нами внезапно, как свершившийся факт. Это недалекое будущее проявится как результат бурного развития технологии, которая основана на новых источниках энергии. С 1643 года (когда Паскаль придумал свою машину) до появления арифмометров прошло около 250 лет. Для перехода от арифмометров к компьютерам понадобилось лишь 50 лет, а в настоящее время период удвоения быстродействия цифровых машин продолжает иметь взрывной характер (поэтому все здесь написанное устареет еще до того, как будет напечатано).

Таким образом, трудно оценить или предвидеть роль цифровых машин в будущем. Когда в начале нашего столетия появился кинематограф, зрители наслаждались видом въезжающего на станцию поезда или преодолевающего препятствия всадника. Тогда всем казалось, что кино будет продолжать показывать интересные события, заснятые в движении, но никто не предвидел, что оно станет производителем произведений искусства, т. е. театром универсального и коммерческого формата. Современные компьютеры рассчитывают пенсии и зарплаты работников или находят противоречия в налоговых ведомостях, но следует думать, что сам факт существования машин вызовет и иные, несравненно более важные проблемы, о которых мы сегодня ничего не знаем.

Удастся ли решить все эти проблемы? Думаю, что нет. Удастся ли решить некоторые из них? Думаю, что да. Как закончится игра между человеком и машиной? Не знаю, но лишь уверен, что эта проблема представляет собой игру с бесконечно большой ставкой…

Памяти Леона Лихтенштейна

21 августа 1933 года в Закопане скоропостижно скончался Леон Лихтенштейн, доктор философии и технических наук, профессор математики Лейпцигского университета, действительный член Польской Академии наук, Саксонской Академии наук и Львовского научного общества, член Польского математического общества и многих других научных организаций и объединений.

Это известие быстро распространилось по всем научно-исследовательским центрам. На страницах профессиональных изданий математический мир подробно был проинформирован о величине этой утраты. Это нелегкая задача. Богатство и многосторонность научных достижений покойного затрудняют суждение о его заслугах, суждение, обоснование и суть которого не были бы слишком легкими в связи с важностью Дела, и оценку, формулировка которой соответствовала бы достоинству Человека.

Поэтому в настоящем некрологе я ограничусь приведением некоторых фактов и дат из жизни Леона Лихтенштейна в надежде, что и другие специалисты напишут об иных заслугах этого всемирно известного математика, превосходного знатока теоретической астрономии и гидродинамики, основателя и издателя математических журналов, прекрасного лектора и любимого учениками профессора. Еще в юности он понял, что исток и устье математики совпадают (они находятся в ее применениях). Он всю жизнь шел вверх по течению этой реки, и в конце жизни начал искать в философии те таинственные источники, из которых вытекают истина и красота математики.

Составленный ассистентом лейпцигского Математического института предварительный список работ покойного насчитывает 127 названий, включая четыре книги.

Самая объемная из них, «Grundlagen der Hydrodynamik» (XVI + 506 с.), опубликованная в 1929 г. издательством Springer, является полным учебником гидродинамики, причем львиную долю содержания составляют собственные результаты автора.

«Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung» (1923) представляет собой обзор классических проблем астрономии и анализа в их взаимодействии от Ньютона до новейших времен.

«Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen» (1931) является монографией, где, в частности, помещены также те новые результаты, которые автор излагал на лекциях во Львове в течение одного триместра 1930 года, будучи гостем университета Яна Казимежа.

Последняя из книг, «Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten» вышла в текущем году и появилась на полках книжных магазинов незадолго до смерти автора.

По размеру книгам немногим уступают энциклопедические статьи. Статьи о теории потенциала и конформных отображениях и дифференциальных уравнениях в частных производных эллиптического типа (200 и 57 стр.), представляют собой части IIC3 и IIC12 математической энциклопедии Тойбнера (они были опубликованы в 1918 и 1924 гг.), а о количестве вложенного в них труда свидетельствуют 640 ссылок к первой из статей. Третья, о теории интегральных уравнений и функциях бесконечно многих переменных, помещена в 4 параграфах списка работ Паскаля (1929).

Четыре статьи являются рецензиями на работы Ф. Рисса, К. Неймана, О. Д. Келлога и Э. Мейерсона. Последняя из них относится к философии и вышла в «Erkenntnis» (1933). Но кроме нее мы найдем в списке пять философских работ, появившихся под влиянием Э. Мейерсона, последняя из которых (в журнале «Journal de psychologie») еще находится в печати.

Одиннадцать научных работ в области космогонии, в особенности по теории формы небесных тел, появились в «Mathematische Zeitschrift», а также в отчетах саксонской и баварской академий, в отдельном сборнике в честь Зеелигера, в «Annali della Scuola Normale superiore di Pisa», в «Wiadomości Matematyczne» и в «Enseignement Mathématique». Эти 11 работ, появившиеся в течение стольких же лет, являются наибольшей из научных заслуг Леона Лихтенштейна и незыблемым памятником ему. Идя по пути великих математиков двух столетий, по пути Маклорена, Клеро, Даламбера, Лапласа, Якоби, Дирихле, Римана и Пуанкаре, Лихтенштейн решил использовать все те математические средства, которыми столь обильно располагал, чтобы в серии задуманных крупномасштабных аналитических исследований раскрыть загадки равновесия вращающихся тел, которые мы видим над собой в виде планет или планетарных и кольцевых систем.

Нужна была большая вера в могущество анализа и не меньшая вера в свои силы, чтобы работать в областях, откуда вожди математической мысли не раз возвращались, не одержав решающей победы. Достаточно вспомнить, что полемика между Дж. Г. Дарвином и Ляпуновым относительно устойчивости одной из форм равновесия продолжалась целые годы, поскольку никто не хотел углубляться в гущу формул, хотя было известно, что наверняка содержащийся в них результат важен для космогонической теории. Лихтенштейн не ожидал, подобно другим, счастливого момента вдохновения, который укажет легкий путь, пока изящный прием избавит от копания в формулах и поисков доказательств сходимости. Он любил цитировать Больцмана: «Изящество — это дело сапожников и портных». Он был из тех строителей, которые сами тащат камни, когда подводят каменщики. К космогоническим работам примыкает также другая серия из тринадцати публикаций в области гидродинамики, где он дополняет математические основы, размышляет над предпосылками, подводит результаты и делает обобщения.

Ранние работы, однако, говорят о технических применениях математики; восемнадцать работ касаются теории кабелей высокого напряжения и связанных с этим математических и экспериментальных задач. Об этом периоде своей жизни он не любил вспоминать, но один из профессоров политехнического института уверял меня, что именно эти работы определили деятельность автора на кафедре электротехники.

Чистая математика обязана ему одиннадцатью работами по вариационному исчислению, девятнадцатью по теории потенциала, двадцатью шестью по теории дифференциальных уравнений в частных производных и четырнадцатью по другим разделам анализа, в том числе по теории функций действительной переменной. Он одним из первых использовал в анализе теорию функций бесконечно многих переменных, а в вариационном исчислении получил бесконечный ряд все более точных условий, используя ортогональные разложения, — идею совершенно оригинальную и неожиданную.

Леон Лихтенштейн родился 16 мая 1878 г. в Варшаве, закончил там в 1893 г. частную школу Панкевича и в следующем году сдал экзамен на аттестат зрелости в государственной школе. Затем он записался на отделение механики политехнического института в Шарлоттенбурге и в 1901 г. получил диплом инженера по строительным машинам. Год он был на практике и имел также один год перерыва в учебе. В 1901–1902 гг. изучал электротехнику в том же самом политехническом институте и поэтому поступил на фирму Сименс–Гальске (переименованную позже в Сименс–Шукерт) в качестве инженера-электротехника. В течение трех лет работал в лаборатории этой фирмы, один год рассчитывал провода для электрифицированных железных дорог, а с 1906 г. возглавлял кабельную лабораторию. С 1918 г. был математиком-экспертом на фирме Сименса.

В 1908 г., т. е. будучи 30-летним мужчиной, он сдает экзамен на знание немецкого языка, чтобы в том же году получить степень доктора технических наук в Шарлоттенбурге.

Несмотря на успехи в инженерной деятельности, он не нашел в своей профессии достаточного поля для его теоретических способностей и поэтому в 1906 г. записался простым слушателем в берлинский университет, где в 1909 г. получил звание доктора философии. В следующем году в Шарлоттенбурге защитил диссертацию и до 1920 г. преподавал там математику, а в 1919 г. стал почетным профессором. На этот период (1904–1920 гг.) приходятся работы в области теоретической и практической электротехники.

В 1920 г. он был приглашен на кафедру математики в Мюнстер, что означало для него освобождение от различных практических обязанностей и разрыв с инженерной сферой деятельности, которую он считал не столь необходимой, планируя на далекую перспективу занятия математикой. Старая обитель математики, Лейпцигский университет, связанный с именами Нейманов и историей теории потенциала, пригласил его в 1921 г. на должность профессора. Там он в течение двенадцати лет работал как ученый и профессор, там издавал «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» (1919–1927), там продолжал издание «Mathematische Zeitschrift», главным редактором которого был с его основания в 1918 г. Саксонская Академия наук 8 июня 1925 г. избрала его своим действительным членом, а спустя три года этой чести его удостоила Польская Академия наук. В 1931 г. он становится действительным членом Львовского научного общества, с 1923 г. он является соредактором «Prace Matematyczno-Fizyczne» в Варшаве, а с 1928 г. — членом редакционного комитета сборника «Circolo Matematico di Palermo».

Таковы сухие даты из жизни Леона Лихтенштейна, но они не дают полной картины его научного и личного достоинства. Самое важное то, что ученый мир хорошо узнал его, что дал ему возможность работать и не скупился на внешние проявления признания. А теперь, перед лицом утраты, со всех сторон раздаются голоса, с несдерживаемой искренностью (которую нельзя найти в официальных декретах и дипломах) выражающие скорбь и восхищение.

«…Cet ouvrage est merveille[1]…» — говорит французский математик о «Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten». — «Ses travaux font preuve d’une capacité de travail phénomenale et de l’envie d’être utile au monde savant bien d’avantage que de l’envie d’être lu et apprécié»[2], — пишет другой. — «Was mich zu Ihm hinzog, war nicht nur die Gemeinsamkeit mathematischer Interessen, sondern nicht minder die Reinheit seines mathematischen Idealismus

[1] Эта работа великолепна. — *Прим. перев.*

[2] Его труды свидетельствуют о феноменальной работоспособности и убеждают, что его желание быть полезным научному миру гораздо сильнее желания быть прочитанным и оцененным. — *Прим. перев.*

und Güte seines Herzens»[3], — признает немецкий математик. А другой добавляет: «Er hatte uns daran gewöhnt, dass seine Arbeitsfähigkeit, seine Gestaltungskraft ebenso unbegrenzt war wie seine Genialität»[4]. И одно блистательное имя за другим появляются у гроба и все соглашаются с тем, что умер не только великий представитель науки, но несравненный человек, своей жизнью явивший пример, как должен мыслить и поступать ученый.

Нет человека, более далекого от типа «специалиста», чем Леон Лихтенштейн. Ему не только было чуждо всякое сведéние математики к роли полезного практического аппарата, но он даже не мог согласиться с теми адептами Маха, которые видели роль науки в точном описании явлений. На съезде естествоиспытателей в Праге в 1928 г. он даже использовал ироничное выражение, назвав их «тривиалистами». Взирая ввысь, где сверкают планеты, которым он отдал столько сил, он иначе понимал математику, требовал иных объяснений от философии. Поэтому знакомство с работами Мейерсона оказало на него особое влияние. Он завязал переписку с этим автором, проникся его идеями и при ближайшей возможности поехал в Париж главным образом с тем, чтобы познакомиться с семидесятилетним писателем. Эти поездки он предпринимал неоднократно и знакомство перешло в искреннюю дружбу, о чем красноречиво свидетельствует переписка. Парижским друзьям Мейерсона должно было казаться странным, что парижский философ и лейпцигский математик могут много о чем поговорить... по-польски. Ибо Леон Лихтенштейн никогда не утрачивал связи с родиной. Он живо интересовался делами нашей науки и культуры, в чем мог убедиться каждый, кто проезжал через Лейпциг. Его гостеприимством пользовались наши стипендиаты, обучавшиеся в Лейпциге, математики и другие люди. Он не забывал о математических конгрессах в Варшаве и во Львове, с радостью принял приглашение прочитать в течение триместра лекции в университете Яна Кази-

---

3 Меня привлекает в нем не только общность математических интересов, но и в не меньшей степени чистота его математического идеализма и сердечная доброта. — *Прим. перев.*

4 Он приучил нас к тому, что его работоспособность и сила воображения так же безграничны, как и его гениальность. — *Прим. перев.*

межа во Львове и содействовал публикации работ наших авторов в «Mathematische Zeitschrift». В польских изданиях он поместил 20 работ, из них 8 на польском языке.

Вот дословные отрывки из его последних писем:

15 мая 1933 г. он пишет: «… Слава Богу, что для «Studiów» и «Monografij»[5] нашлись материальные средства… Наверное, Вы хотели бы знать, каковы мои научные планы. Так вот, через какие-нибудь четыре недели в издательстве Springer выйдет книга (приблизительно 180 страниц) о видах равновесия вращающейся жидкости. Пишу пару новых работ и готовлю к печати вещь, занимающую меня много лет — об эстетике математики (около 100 страниц), которая также должна выйти в издательстве Springer. Все это, несомненно, требует свободного времени. Того, на которое я рассчитываю, скоро буду иметь достаточно много и даже слишком.»

25 мая 1933 г.: «Что касается работы об эстетике математики, то я размышляю об этом по меньшей мере восемь лет. Скоро, по-видимому, на эту тему появится моя статья в «Revue psychologique». Это будет очерк общего характера, который я хотел бы разработать более детально. Материала у меня пропасть, однако желательны были бы более глубокие знания алгебры, теории чисел и разных других предметов. При случае хотелось бы прочитать пару новых работ в этих областях науки. Работы Биркгофа, Шпейсера, Фосса и других трактуют вопросы с совершенно иной точки зрения. Очень, очень хотелось бы написать работу, о которой упоминал выше. Ведь мне кажется, что у меня есть несколько идей, которые никто до сих пор не высказывал. Смогу ли я осуществить свои планы, очень трудно предвидеть…»

14 июня 1933 г.: «Заканчиваю корректуру книги о видах равновесия и на самом деле не имею свободной минуты…»

2 августа 1933 г.: «… надеюсь, что дорогой друг получил мою книгу «Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten»… Слава Богу, что она уже вышла, так что я теперь могу немного отдохнуть и подумать о дальнейших работах. Как обычно случается, систематическая разработка некоторого раздела науки выдвигает ряд новых идей. Это большое преимущество систематической работы. У меня возникли пара новых идей и намерение прочитать об этом лекцию на съезде швейцарских математи-

[5] Речь идет об учебниках математики и польских математических монографиях.

ков в Альтдорфе в начале сентября. Вскоре я пришлю дорогому другу статью о кольцах Сатурна и об эстетике математики, опубликованную в «Revue psychologique»… Как Вы видите, я имею различные намерения и надеюсь, что их осуществлю, — хотя не всегда легко подняться над всем, что преподносит жизнь, и думать только о наилучшем и наивысшем, т. е. о научной работе.»

11 августа 1933 г.: «… В своих эстетических рассуждениях я обращаюсь только лишь к читателю, основательно знакомому с математикой, физикой и т. д. Мне хочется объяснить тот факт, почему нам, математикам, эта наука представляется столь красивой. Я ничуть не намереваюсь переубеждать «профанов»… Как я уже Вам сообщал, через пару дней я выезжаю на неполные две недели в Закопане. Первый раз в жизни!… В конце августа я поеду через Лейпциг в Швейцарию и одновременно на съезд швейцарских математиков в Альтдорф. Я предупредил о чтении лекции о видах равновесия и т. д. Хочу привести ряд новых результатов, частично уже предсказанных в моей книге, частично же совершенно новых и даже весьма важных.»

17 августа 1933 г., Закопане, Быстре: «… Вероятно, я останусь здесь самое большее до субботы, 26-го. На обратной дороге мне выпадет день или два остаться в Варшаве у сестры, которую не видел года четыре, затем целый день пробуду в Лейпциге и, несмотря ни на что, самое позднее 31-го планирую быть уже в Альтдорфе… Забыл добавить, что задержусь еще в Кракове, куда пригласил меня N… Он снова написал мне одно из тех писем, которые заслуживают опубликования как с точки зрения внутренней формы, так и философской глубины. Я действительно нахожусь под впечатлением от этой необычной эпистолярной вещи. Я, как говорится, очень утомлен и сплю по 10 часов в сутки…»

Когда я ответил на эту последнюю страничку, то через пару дней получил свое письмо обратно с почтовой припиской: «Адресат умер». 30 августа его останки были сожжены в лейпцигском крематории в присутствии сотрудников Университета, Академий и многочисленных немецких и прочих ученых. В соответствии с уставом 1 сентября Леон Лихтенштейн должен был покинуть университетскую кафедру.

Памяти Зигмунда Янишевского[1]

3 января 1920 года во Львове в возрасте 31 года умер Зигмунд Янишевский, доктор Парижского университета, бывший приват-доцент Львовского университета, бывший секретарь и один из основателей Польского математического общества, член Польского философского общества и Варшавского философского института, а в последнее время профессор математики в Варшавском университете.

Европейская наука потеряла первоклассного специалиста в области топологии, польская наука потеряла создателя этого направления математических исследований у нас и понесла урон, который, особенно в современных условиях, ничем нельзя возместить. Но день 3 января 1920 года не только одел в траур ученых Общества, обоих университетов и сравнительно небольшой коллектив специалистов, коллег и учеников покойного, но и нанес ощутимый ущерб каждому благородному делу. Ибо значение этого незаурядного человека, память которого мы сегодня хотим почтить, не ограничивается лишь его научными заслугами, оно простирается дальше и глубже.

Родившись в Варшаве в 1888 г., он в 1907 г. закончил реальную школу во Львове, а затем в Цюрихе, Мюнхене, Геттингене и Париже обучался математике у Буркхардта, Брунна, Гильберта, Минковского, Цермело, Тёплица, Бернштайна, Рунге, Ландау, Бореля, Гурсата, Адамара и Пикара, а философии — у Фёрстера, Пфандлера, Рейнака, Бергсона, Дуркхайма и других. В Париже, сдав экзамен, получил лицензию и степень доктора точных наук,

[1] Воспоминание, зачитанное 7 февраля 1920 г. на заседании Польского математического общества во Львове, посвященном памяти Зигмунда Янишевского.

а о том, как относились к нему французские ученые, свидетельствует факт, что Пуанкаре (который очень неохотно общался с коллегами) проводил длинные дискуссии с этим 22-летним студентом о его топологических воззрениях. Спустя несколько лет после его отъезда из Парижа А. Лебег еще выделял его из легиона, прошедшего за это время через ворота Сорбонны, причем вспоминал с глубоким признанием его особой индивидуальности.

Статья «O kontynuach nieprzywiedlnych między dwoma punktami», опубликованная в 1911 г. в «Journal de l'École Polytechnique», не только важна и чрезвычайно любопытна с точки зрения ее результатов, но и отличается от других работ подобного рода логическим использованием специальной символики, которая, будучи пересаженной из алгебры логики на почву топологии, впервые дает свои плоды. *Континуум* — это связное замкнутое множество, которое нельзя разбить на два замкнутых непустых множества. Континуум, неприводимый между точками A и B, это такой континуум, включающий A и B, никакая часть которого не является континуумом, содержащим A и B. Следовательно, неприводимый континуум является наиболее естественным с точки зрения *analysis situs* (топологии) определением *дуги*, соединяющей A с B. Поскольку существуют и другие определения, например, определение Жордана, основанное на идеологии аналитической геометрии, то возникает задача о соотношении старого и нового определений. Пытаясь решить эту непростую задачу, многие известные ученые[2] допустили ошибку, а Янишевский решил ее полностью и изящным методом. Из этих исследований возник целый ряд его заметок: Contribution à la géometrie des courbes planes générales (Comptes Rendus, 1910), Sur la géometrie des lignes cantoriennes (C. R., 1910), Nowy kierunek w geometrji (Wiadomości matematyczne, 1910), Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points (Akademja Umiejętności w Krakowie, 1912).

Но уже одного взгляда на титульный лист докторской диссертации Янишевского достаточно, чтобы заметить, что математика не была для него всем на свете. На этом листе мы видим посвяще-

[2] Л. Зоретти.

ние лидеру французских христианских демократов Марку Санье, с которым он познакомился и подружился в кооперативе союза «Sillon» — социальные проблемы были другим увлечением Янишевского. Это посвящение напоминает друзьям покойного незначительную, но характерную деталь: во время пребывания в Париже он обычно столовался в ресторане кооператива и, не желая, однако, извлекать выгоду из дешевизны этого заведения, ежемесячно возмещал разницу между обычной ценой и ценой кассы союза.

В 1911/12 гг. в Обществе научных курсов он читал лекции по «analysis situs» и философии математики. В 1912 г. был в Кембридже на международном математическом конгрессе, где выступил с докладом о «*понятии линии и поверхности*», в котором указал на неудовлетворительность всех существовавших до тех пор определений поверхности. Затем он выехал в Марбург, чтобы слушать Наторпа, потом с той же целью в Грац к Мейнону и наконец в Падую и Болонью к Энрикесу и Пинчерле.

В 1913 г. во Львовском университете он защитил диссертацию, выполненную под руководством профессора Ю. Пуцины и В. Серпиньского (в настоящее время профессора Варшавского университета), которые познакомились с ним и правильно оценили на XI Съезде польских врачей и естествоиспытателей в Кракове в 1911 г. Диссертация на тему «О реализме и идеализме в математике», посвященная вопросу о том, всегда ли можно дать словесное *определение* математическому понятию *существование*, получила всеобщее признание. Двумя годами позже эта интересная и красивая работа была опубликована в печати (Przegląd Filozoficzny, 1916). Научная работа «O rozcinaniu plaszczyzny przez kontinua», которая вышла в «Prace Matematyczno-Fizyczne» в 1913 г., исследует топологическую проблему типа так называемого утверждения Жордана, которое гласит, что замкнутая кривая (непересекающаяся) делит плоскость на две несвязные области. Речь шла о том, обладает ли этим же свойством «кривая Янишевского», т. е. два непрерывных континуума, соединяющих одни и те же точки A, B. На этот вопрос Янишевский ответил утвердительно.

В летнем полугодии 1913/14 г. он читал лекции по теории аналитических функций и функциональному исчислению. Когда началась война, он завербовался в Восточный легион, а после его расформирования перешел в Западный и с карпатской бригадой в качестве солдата артиллерии принял участие в зимней кампании 1914/15 гг. Затем, будучи вместе со всем дивизионом переведенным в Королевство, нес в Хожуве службу как простой солдат. Когда командование решило (по примеру Австрии) ввести так называемые «одногодичные полоски», он начал протестовать против распоряжения, считая, что такая привилегия унижает других добровольцев. В конце концов войсковое начальство пришло к выводу, что человеку подобного рода даже во время войны надо предоставить возможность заниматься соответствующей работой, и перевело его во Львов. Он снова начал преподавать, когда возник вопрос о принятии воинской присяги. Преданный Пилсудскому и его делу как член и курьер P. O. W., он не мог принести присягу и поэтому должен был сбежать в Радом и скрываться под вымышленным именем. Имеется фотография того периода, представляющая его в кругу детей на лестнице детского приюта, который он основал за счет собственных скромных сбережений и в котором сам опекал детей, обучая их и заботясь о муке, каше и молоке.

Будучи в 1918 г. назначен профессором Варшавского университета, он строит далеко идущие планы, набросок которых приводит в короткой статье «O potrzebach matematyki» (О потребностях математики) в I томе «Nauki Polskiej» (1919). Он собирает все больше сторонников своего плана «Математического института». Это должно было быть объединение всех серьезно работающих польских математиков в единое целое, задача которого сводилась бы к контролю над развитием науки и организации математического обучения. План включал в себя несколько пунктов: 1) распределение наград и стипендий; 2) представление мнений о кандидатах на должности в высших учебных заведениях; 3) руководство коллективными работами в области библиографии и дидактики, составление терминологии и формирование научных планов и т. д.; 4) издание журналов и учебников. Этот план в такой степени получил признание даже за пределами математических сфер, что варшавские философы на основании устава Янишевского учредили устав философского института. З. Я. имел также полностью выработанные взгляды в вопросах реформы высшей школы. Он считал неотложным (а если вдуматься, то трудно с этим не согласиться) отделение Университета в виде свободной, открытой для каждого научной академии типа Collége de France или École des Hautes Études, от всех остальных, территориально и организационно сгруппированных вокруг него профессиональных учебных заведений (т. е. от управленческого училища, медицинского училища, технического, педагогического и т. д., которые должны были иметь свои четкие научные планы и выдавать дипломы по соответствующей специальности). Весной 1919 г. он заболел испанкой и для лечения выехал в Италию, добрался до Неаполя и вернулся полный художественных впечатлений, оптимизма и надежд. Еще в корректуре он просматривает первый выпуск основанного им «Fundamenta Mathematicae», международного журнала, посвященного основам математики и издаваемого польскими учеными, а приехав во Львов на рождественские каникулы, 3 января 1920 года умирает после скоротечного воспаления легких.

Его жизнь длилась 31 год, но была так полна мыслей, чувств и действий, что этого хватило бы на несколько обычных человеческих жизней.

Зигмунд Янишевский каждую вещь рассматривал с самой глубокой стороны и сам о себе говорил, что является не столько математиком, сколько философом. Одному из своих друзей он признался, что занимается математикой для того, чтобы убедиться, как далеко одним логическим рассуждением может зайти человеческая мысль. Помимо математических работ, изданных и неизданных (как, например, исследование овалов), он оставил после себя статьи философского содержания, например, диссертационную работу и статьи в пособии для самообразования (1915) под названием «Logistyka i Zagadnienia filozoficzne matematyki» (Логистика и философские проблемы математики». Вообще это пособие очень многим ему обязано. Такие разделы, как Общее введение (с оригинальной генеалогической таблицей различных ветвей математики), Введение к 3-й части, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Функциональные, разностные и интегральные уравнения, Разложения в ряды, Топология, Основы геометрии, Заключение и Справочный аппарат — это почти половина целого тома «Matematyka». В «Справочном аппарате» он проявил столь необычное знание европейских университетов, что читая его, трудно поверить, что писал это 25-летний молодой человек.

Он глубоко интересовался проблемами общественной жизни, имел коммунистические воззрения. В последние годы все больше стремился к воплощению в действие наиболее близко принимаемой к сердцу идеи любви к ближнему. Не занимаясь поиском для своей деятельности места в политике, он просто руководствовался моральным императивом, согласно которому он, будучи учеником реальной школы во Львове, раздаривал свою одежду однокашникам, а присужденную ему в 1917 г. премию Натансона в сумме нескольких тысяч рублей отдал на цели народного просвещения. Этот императив в конце концов проявился и в его последней воле, отписывающей все имущество на общественные нужды, тело для анатомического театра, а череп для френологических исследований, чтобы — как написано в завещании — и после смерти быть полезным.

Он был ученым большой величины, глубокого интеллекта и оригинальных творческих способностей, человеком незыблемых принципов, который даже у противников вызывал уважение своим зрелым, бескорыстным и логичным отношением к любому делу. Правильность характера, прямолинейность поведения, гражданское мужество и при этом благородное сердце сделали из него человека, утрата которого не только для друзей (а их было немало, так как он сам был надежным другом), не только для учеников (которых он, несмотря на собственную молодость, выискал, выучил и привил им навык самостоятельной работы), но и для страны и общества является не менее ощутимой, чем для науки.

Львов, 12 февраля 1920 г.

Стефан Банах

Выступление на торжественном заседании, посвященном памяти Стефана Банаха

Стефан Банах родился 20 марта 1892 года в Кракове. Его отец носил фамилию Гречек, был чиновником в краковском управлении железной дороги и происходил из горской семьи села Йорданова. Никто точно не знает истории детских лет Банаха, но известно, что сразу после рождения он был отдан на воспитание прачке по фамилии Банахова, проживавшей в мансарде на улице Гродзкой (дом № 70 или 71). С этого времени он уже никогда больше не встречался со своей матерью, так что, собственно говоря, совсем ее не знал. Отец тоже о нем не заботился, так что с 15 лет Банах перестал получать систематическое образование, но с большой охотой брал частные уроки математики. Математику он изучал самостоятельно и еще в гимназии читал французскую книгу Таннери о теории действительных функций; неизвестно, откуда он знал французский язык. Перед Первой мировой войной он посещал лекции Станислава Зарембы в Ягеллонском университете, но нерегулярно и недолго, после чего перешел во Львовский политехнический институт, где сдал так называемый «первый экзамен», подтверждающий два первых года обучения по инженерной специальности. Когда в 1914 г. началась мировая война, он вернулся в Краков. Проходя летним вечером 1916 года по бульвару, я услышал разговор, а скорее всего несколько слов; слова «интеграл Лебега» были так неожиданны, что я подошел к скамейке и познакомился с беседующими. О математике говорили Стефан Банах и Отто Никодим, которые сказали мне, что их третьим компаньоном является Вилкош. Эту тройку объединяла не только математика, но и безнадежность положения молодых людей в крепости (какой был в то время Краков), неуверенность в завтрашнем дне, отсутствие оплачиваемой работы и потеря контакта не только с заграничными, но даже и с польскими учеными. Такова была краковская атмосфера в 1916 году, но это не мешало троице просиживать в кафе и решать задачи в гомоне и толчее — Банах шума не избегал, а даже (неизвестно почему) охотно выбирал столики поближе к оркестру.

Мечтой Банаха была должность ассистента математики во Львовском политехническом институте, и она осуществилась в 1920 г., когда Антоний Ломницкий предоставил Банаху желанную должность. Банах уже тогда был автором работы о сходимости в среднем частичных сумм рядов Фурье. Эту задачу поставил ему я еще в 1916 году, когда познакомился с ним на краковских бульварах. До этого я долгое время пытался решить ее сам, так что велико было мое удивление, когда Банах получил отрицательный ответ, который сообщил мне через несколько дней с некоторой оговоркой (она заключалась в незнании примера Дюбуа-Реймона). Нашу совместную заметку С. Заремба представил Краковской Академии с большой задержкой, так что вышла она датированной 1918 годом.

С момента прибытия во Львов положение Банаха радикально изменилось. Он стал материально обеспеченным, женился и поселился в университетском здании на улице Св. Николая. В 1922 г. в III томе «Fundamenta Mathematicae» появилась его докторская диссертация: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,* с. 133–181.

Это была седьмая работа Банаха, а первая была посвящена теории линейных операций. В том же году состоялась его защита. В отношении Банаха не были соблюдены университетские традиции — ему присудили докторскую степень (хотя он не имел законченного образования) и сразу после защиты дали должность профессора в возрасте 30 лет. Не было недостатка в признании и с других сторон. В 1924 г. Банах стал членом-корреспондентом Польской Академии наук, в 1930 г. получил премию г. Львова, а в 1939 г. он стал лауреатом большой премии Академии. Сегодня трудно понять, почему в той же Академии не нашлось кресла для мальчишки с краковской улицы, но львовские математики сразу поняли, что Банах прославит польскую математику. До его прихода львовской школы не существовало в буквальном смысле этого слова, поскольку Серпиньский вскоре после Первой мировой войны вернулся в Варшаву, откуда его прогнала война, а вскоре после этого умер Зигмунд Янишевский. В межвоенное двадцатилетие львовская школа завоевала признание в первую очередь за счет теории операторов, ибо на этом поле выросли ее главные достижения. Банах занялся линейными функционалами, такими как интеграл. Он показал, что понятие интеграла можно расширить так, чтобы оно охватило все функции, сохраняя свойства, постулированные Лебегом; на самом деле это понятие неэффективно, но доказательство его существования и вывод (Fund. Math., 1923) свидетельствуют о силе Банаха. Основной его работой является книга о линейных операторах. Изданная в 1932 г. в виде первого тома «Monografie Matematyczne» (Варшава, VII + 254 с.), сегодня она во всем математическом мире известна под названием *Théorie des opérations linéaires*. Ее успех основан на том, что, благодаря так называемым «банаховым пространствам», можно получать в общем виде решение многих задач, которые до того требовали специальной трактовки и немалой сообразительности. Были и другие математики, большие и малые, которые до Банаха пытались создать теорию операторов. Я помню, как известный геттингенский математик Эдмунд Ландау высказался о книге *Operazioni distributive*, которую написал Пинчерле: «Пинчерле написал книгу, в которой не доказал ни одной теоремы» — и это действительно было так. Но были также и более крупные конкуренты. Прочитаем, что пишет создатель кибернетики Норберт Винер в своей автобиографии, изданной в Лондоне в 1956 г. (под названием *I am a mathematician*). Он упоминает там Фреше, который первым привел вид линейного функционала в пространстве L^2, но не отважился на создание системы постулатов, определяющих такое общее пространство, чтобы L^2 было только одним из многих в нем. Эту заслугу Винер приписывает себе самому. Он рассказывает, как Фреше, гостем которого был Винер в Страсбурге в 1920 г. по случаю математического конгресса, показал ему в «каком-то польском математическом издании» статью Банаха; Фреше был возмущен тем фактом, что Банах на несколько месяцев раньше Винера привел систему аксиом бесконечномерного векторного пространства, идентичную системе Винера. «Таким образом», говорит Винер, «через некоторое время новая теория стала называться теорией пространства Банаха–Винера, но я написал об этом еще пару раз и впоследствии отказался от своего имени — в настоящее время это пространство по справедливости называется именем только одного Банаха…»[1] После этого признания Винер несколько страниц своей автобиографии посвящает данной коллизии и объясняет, почему он покинул поле сражения: ему казалось, что теория Банаха является формализмом, который не оправдывается изобилием нетривиальных теорем, до того времени неизвестных, а затем он признается, что ошибся, поскольку спустя 34 года, прошедших со страсбургского конгресса, теория Банаха все еще популярна как инструмент анализа и «только теперь начинает в полной мере проявлять свою эффективность в качестве научного метода». Слава Банаха дошла до Соединенных Штатов еще до появления *Opérations linéaires*. Уже в 1934 г. в Бюллетене Американского математического общества (том 40, с. 13–16) Я. Д. Тамаркин в рецензии на книгу Банаха писал: «Она представляет собой заслуживающую внимания *climax* (кульминацию) долгой серии исследований, начатых Вольтеррой, Фредгольмом, Гильбертом, Адамаром, Фреше и Риссом, и успешно продолженных Стефаном Банахом и его учениками». И далее: «Теория линейных операций уже сама по себе является захватывающей областью, но ее важность подчеркивают многочисленные и красивые применения». Один из наиболее способных учеников Банаха, Станислав Улам, так пишет в некрологе, опубликованном в июле 1946 г. в Бюллетене Американского математического общества (т. 52, № 7 (1946), с. 600–603): «Недавно пришло известие, что вскоре после войны в Европе умер Банах, работы которого нас очень интересовали. Действительно, в одном из основных направлений его деятельности, а именно в теории линейных бесконечномерных про-

[1] Это название ввел в употребление Фреше.

странств, американская школа продвинулась вперед и добивается все более важных результатов. Это был изумительный перебежчик научной интуиции, который объединил усилия многочисленных польских и американских математиков в этой области…». И далее: «Работа Банаха впервые в общем случае подчеркнула успех метода геометрического и алгебраического подхода к проблемам линейного анализа, выйдя далеко за рамки скорее формального открытия Вольтерры, Адамара и их последователей. Его результаты охватывают более общее пространство, чем работы таких математиков, как Гильберт, Э. Шмидт, фон Нейман, Рисс и другие. Многие американские математики, особенно молодые, применили эти идеи к геометрическому и алгебраическому изучению линейных функциональных пространств, а эта работа (1946) продвигается все энергичнее и дает важные результаты».

Пожалуй, только этих мнений известных ученых (один из которых сыграл значительную роль в расчетах термоядерной реакции) достаточно для доказательства того, что Банах смог занять ведущее место в истории развития чрезвычайно важного и нового раздела анализа и войти в ряд известных математиков, работавших в этом направлении.

От себя лично, как свидетеля работы Банаха, я позволю добавить, что ясность мышления Банаха Казимеж Бартель однажды назвал «даже неприятной…». Он никогда не рассчитывал на счастливый случай, на то, что в данную минуту вдруг исполнятся его ожидания, и охотно говорил, что «надежда — мать глупцов». Это пренебрежение оптимизмом он применял не только в математике, но также и в политических пророчествах. Он был схож с Гильбертом в том, что набрасывался на задачу напрямую — отбрасывая все окольные пути и концентрируя усилия на центральном направлении, ведущем прямо к цели. Банах верил, что логический анализ проблемы должен напоминать шахматный анализ трудной позиции и приводить к точному доказательству или к опровержению утверждения.

Значение Банаха не ограничивается тем, чего он сам добился в теории линейных операций, в списке его 58 публикаций можно найти как работы, написанные совместно с другими математиками, так и его собственные работы, относящиеся к другим областям. К обеим этим категориям принадлежит работа о разбиении множеств на смежные части, написанная совместно с Тарским (Fund. Math., 6, 1924, с. 244–277). Решение этой задачи напоминает школьный метод доказательства теоремы Пифагора путем разрезания большого квадрата на части, из которых можно сложить два малых квадрата. Результат для трехмерного пространства является неожиданным — шар можно разложить на несколько частей, таких что из них можно образовать два шара, причем каждый из них будет таким же большим, как исходный шар! На меня особое впечатление произвела небольшая работа в «Proceedings of the London Mathematical Society» (том 21, с. 95–97). Задача заключается в нахождении ортогональной системы, полной в L^2, но неполной в L. Банах выбирает интегрируемую (L) функцию $f(t)$, $\int_0^1 f(t)dt = 1$, но такую, что $\int_0^1 f^2(t)dt = \infty$, обозначает через $\{\varphi_n(t)\}$ последовательность всех тригонометрических функций $\{\cos nt, \sin nt\}$ и определяет числовую последовательность $\{c_n\}$ соотношением $\int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt = c_n$. Если мы теперь определим последовательность $\{\psi_n(t)\}$ как $\psi_n(t) = \varphi_n(t) - c_n$, то из этого будет следовать $\int_0^1 f(t)\psi_n(t)dt = 0$ для всех n. Ортонормируя последовательность $\{\psi_n\}$, мы получим искомую последовательность $\{\gamma_n(t)\}$. Остроумие доказательства основано на том, что вспомогательная последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ не имеет того свойства, которое требуется от искомой последовательности. Известна также работа, посвященная сходимости функционалов, начатая одним из коллег Банаха, обобщенная Банахом и доведенная Ст. Саксом до окончательного вида (1927, Fund. Math., 9, с. 50–61). Банах интересовался также проблемой компланации (т. е. определением понятия площади кривых поверхностей), его определение является очень удачным и все еще остается предметом исследований (например, во Львове этим занимается проф. Кованко). В этой задаче, к сожалению, никто не умеет привести той принципиальной леммы, которая необходима для того, чтобы доказать соответствие банахова определения классическим. С сожалением надо еще раз подтвердить, что многие ценные результаты Банаха и его школы пропали (с большим ущербом для польской науки) из-за педантизма адептов этой школы, и прежде всего самого Банаха. Красива была также его идея замены классического определения колебания функции $y = f(x)$ другим, более соответствующим эпохе Лебега, а именно с помощью интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} L(\eta)d\eta$, где $L(\eta)$ означает число пересечений кривой $y = f(x)$ прямой $y = \eta$. Возможно, присутствующим будет интересно узнать, что этот подход имеет практическое значение — например, позволяет быстро рассчитать в «злотоднях» банковские кредиты, выдаваемые в заводских магазинах в виде сырья, ожидающего переработки.

Не буду больше говорить о многочисленных и важных позициях списка работ создателя львовской школы и основателя журнала «Studia Mathematica», сыгравшего немалую роль в развитии этой школы и в истории теории линейных операторов, а предпочту вернуться к личности Банаха и его непосредственному влиянию на окружение. Банах стал профессором в 1927 г., но ни до этого, ни после он не был профессором в академическом смысле этого слова. Он великолепно читал лекции, никогда не углубляясь в детали и не загромождал таблицы сложными и многочисленными обозначениями. Он не заботился о безупречности словесной формы, ему чужд был всякий гуманитарный глянец, и в течение всей жизни он сохранил некоторые черты краковского хулигана в способе существования и в речи. Письменное изложение мысли доставляло ему большие трудности. Свои рукописи он писал на больших страницах, вырванных из тетради; когда надо было изменить часть текста, он вырезал ненужные места и подклеивал части чистой странички (на которых писал новые версии), поэтому без помощи друзей и помощников первые работы Банаха никогда не дошли бы до типографии. Писем он почти совсем не писал и не отвечал на запросы в письменном виде. Он не увлекался логическими исследованиями, хотя отлично понимал их. Его не привлекали также практические применения математики, хотя, несомненно, он мог бы ими заняться, если бы захотел — ведь спустя год после получения степени доктора он читал лекции по механике в политехническом институте. Он говорил, что математика отличается специфической красотой, и ее никогда не удастся свести к жесткому дедуктивному методу, потому что рано или поздно она прорывает каждую формальную границу и создает новые принципы. Определяющей для него была ценность математический теорий, но не утилитарная, а самобытная. Его заграничные конкуренты по теории линейных операторов трактовали пространство слишком обобщенно, вследствие чего получали только банальные результаты, либо слишком много основывали на этих пространствах, сводя сферу их применения к немногочисленным и искусственным примерам — гений Банаха проявился в нахождении золотой середины. Это умение проникать в суть вопроса характеризует Банаха как прирожденного математика.

Банах умел работать всегда и везде. Он не привык к удобствам и не требовал комфорта, поэтому ему вполне хватало профессорского жалованья. Но пристрастие к посещениям кафе и полное отсутствие обывательской бережливости и планомерности в повседневных делах загнали его сперва в долги, а в конце концов в очень трудное положение. Желая из него выбраться, он занялся написанием учебников. Так появилось *Rachunek różniczkowy i całkovy* (Дифференциальное и интегральное исчисление) в двух томах, из которых первый был выпущен издательством Оссолиньских (1929, 294 с.), а второй издательством Książnica-Atlas (1930, 248 с.). Этот учебник написан сжато и понятно, и он пользовался и сегодня еще пользуется популярностью среди студентов первых лет обучения в высших учебных заведениях. Больше всего времени и сил отняло у Банаха написание учебников арифметики, алгебры и геометрии для средних школ, которые он писал сам или в соавторстве с Серпиньским и Стожеком. Его учебники ни в коем случае не были копированием существующих школьных книг, так как Банах (благодаря своему опыту репетитора) полностью отдавал себе отчет в том, что каждое определение, каждый вывод и каждая задача чрезвычайно важны для автора школьного учебника, который беспокоится о дидактической ценности. По моему мнению Банаху не хватало только одного из множества талантов, необходимых авторам школьных учебников: пространственного воображения. Продуктом опыта, приобретенного во время многократных лекционных курсов по механике в политехническом институте, стала *Mechanika w zakresie szkól akademickich* (Механика в объеме академических учебных заведений) (Monografie Matematyczne 8, 9). Этот двухтомный курс, изданный впервые в 1938 г., был переиздан в 1947 г., а несколько лет назад вышел его перевод на английский язык.

Чтобы оценить значение Банаха для науки в целом, а для польской науки в первую очередь, необходимо перечислить имена его учеников. Мы здесь видим нескольких из них. Мазур и Орлич являются непосредственными учениками Банаха: они представляют сегодня в Польше теорию операторов, их имена на обложке «Studia Mathematica» свидетельствуют о прямом продолжении банаховой научной программы, которая нашла явное выражение в этом издании. Станислав Улам, который обязан Куратовскому занятиями математикой, после получения степени доктора также вошел в орбиту Банаха. Банах, Мазур и Улам когда-то занимали самый лучший столик в так называемом шотландском кафе города Львова, и именно там проходили те заседания, о которых Улам пишет в уже цитированном некрологе: «it was hard to outlast or outdrink Banach during these sessions» (трудно было пересидеть или перепить Банаха во время этих заседаний). А было даже совещание, которое продолжалось 17 часов — его результатом явилось доказательство одной важной теоремы в пространстве Банаха, — но никто его не записал, и сегодня уже никто не способен его воспроизвести… вероятно, поверхность столика со следами химического карандаша после этого совещания, как обычно, была вытерта уборщицей кафе. Такая судьба постигла не одну теорему, доказанную Банахом и его учениками. Огромной заслугой г-жи Люции Банаховой, которая ныне покоится на вроцлавском кладбище, было то, что она купила толстую тетрадь в твердой обложке и вручила ее хозяину шотландского кафе. В тетради на первых страницах записывались вопросы и задачи, с тем чтобы возможные ответы когда-нибудь могли быть вписаны на свободных местах рядом с текстом вопросов. Оригинальная «шотландская книжка» предоставлялась по первому требованию каждому математику, посещавшему кафе, а за решение некоторых предложенных в ней проблем было даже обещано вознаграждение, которое варьировалось от небольшой чернильницы до живого гуся. Те, кто сегодня снисходительно улыбается, когда слышит о таких способах занятия математикой, пусть поймет, что — согласно мнению Гильберта — формулировка проблемы есть половина ее решения, а список нерешенных и выдвинутых проблем заставляет искать ответы и является вызовом для всех, желающих испытать себя. Именно подобное состояние умственной боевой готовности и создает научную атмосферу. Среди учеников Банаха, которые погибли от рук убийц в мундирах со свастикой, несомненно самым выдающимся был Павел Юлиуш Шаудер, лауреат международной премии имени Метаксаса, присужденной ему и Лере *ex aequo* (поровну). Именно Шаудер увидел, какое значение может иметь банахово пространство для краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. Трудность заключалась в подборе соответствующих норм, но Шаудер ее преодолел, и, благодаря этому молодому ученому, пальму первенства в такой классической теории, как дифференциальные уравнения в частных производных, делят между собой Франция и Польша.

На более позднюю деятельность Банаха свою мрачную тень бросила Вторая мировая война. В 1939–1941 гг. он был деканом во Львовском университете и даже членом-корреспондентом Киевской Академии, а после вторжения немцев (в конце июня 1941 г.) стал кормить вшей в бактериологическом институте Вейгля. Несколько недель он провел в тюрьме, когда в его квартире застали людей, занимавшихся контрабандой немецких марок. Впрочем, пока решался его вопрос, он в тюрьме смог доказать одну новую теорему…

Банах прежде всего был математиком. Его мало интересовали политические вопросы, хотя он имел проницательный взгляд на любую актуальную ситуацию, в которой ему приходилось находиться. Природа не производила на него никакого впечатления, а искусство, литература, театр были для него второстепенными развлечениями и выпадали ему очень редко, во время кратких перерывов в работе — зато он ценил сплоченный рюмкой коллектив друзей. Концентрация всей его умственной энергии в одном направлении не знала никаких преград. Он не обольщался надеждой и прекрасно знал, что среди людей есть всего лишь небольшой процент тех, кто способен понять математику. Однажды он сказал мне: «Знаешь, друг, что я тебе скажу? Гуманитарные науки в средней школе важнее математики — математика это острый инструмент, он не для детей…».

Было бы ошибкой представлять Банаха мечтателем, неряхой, апостолом или аскетом. Это был реалист, который даже физически не напоминал кандидатов в святые или хотя бы в святоши. Не знаю, существует ли сейчас, но наверняка еще 25 лет назад существовал идеал польского ученого, созданный не столько по наблюдениям настоящих ученых, сколько исходя из духовных потребностей той эпохи, выразителем которой был Стефан Жеромский. Такой ученый должен был вдали от мирских утех работать для неясно определенного «общества», причем ему заранее прощалась даже безрезультатность этой работы, невзирая на то, что в других странах ученых оценивают не по степени их отреченности от жизни, а по их реальному вкладу в науку. Польская интеллигенция еще между двумя войнами находилась под впечатлением этого мученического идеала, но Банах никогда ему не был подвластен. Он был здоровым и сильным, был реалистом вплоть до цинизма, а польской науке, особенно математике, сумел дать больше любого другого. Он лично больше всех остальных способствовал развенчанию ошибочного мнения, что в научной конкуренции недостаток гениальности (или, хотя бы, только недостаток таланта) можно заменить какими-то иными качествами, которые, впрочем, отличаются тем, что их трудно подтвердить. Банах отдавал себе отчет в своей значимости и в том, какие ценности он создал. Он подчеркивал свое горское происхождение и довольно пренебрежительно относился к типу общеобразованного интеллигента без портфеля.

Он дождался во Львове поражения немцев, но скончался вскоре после этого, 31 августа 1945 г. Его похоронили за счет Украинской Республики. Его именем названа одна из вроцлавских улиц. Собрание его работ издано Польской Академией наук.

Самой главной заслугой Банаха является преодоление и разрушение до основания комплекса неполноценности поляков от ощущения своего низкого уровня в точных науках, маскирующегося возвышением посредственных личностей. Банах этому комплексу никогда не был подвержен — он соединял в себе искру гениальности с каким-то внутренним императивом. Он как бы постоянно слышал слова поэта: «Есть только одно: пылкая слава ремесла!»[2] — а математики хорошо знают, что их ремесло сродни поэзии и ее секретам…

[2] П. Верлен: «Il n’y que la gloire ardente du métier».

Речь, произнесенная при присвоении степени почетного доктора Варшавского университета (28 апреля 1958 г.)

28 апреля 1958 г. в золотом зале Казимировского Дворца на Краковском Предместье в Варшаве, в присутствии министра высшего образования проф. Стефана Жолкевского состоялось торжественное присвоение степени почетного доктора профессору Гуго Штейнгаузу. Инициатором был проф. Вацлав Серпиньский.

В своем выступлении проф. Серпиньский, особо подчеркнув обстоятельства личной дружбы, обрисовал область интересов проф. Штейнгауза, который многие годы занимался теорией меры и тригонометрических рядов, где получил много фундаментальных результатов, был вдохновителем и одним из создателей польской школы функционального анализа, инициатором польских исследований в теории вероятностей (в настоящее время развивающихся весьма энергично) и первым, кто обратил внимание польских математиков на важность применения математики к различным отраслям естествознания, народного хозяйства, промышленности и техники. Его личный вклад играл и будет играть особую роль в этих исследованиях. Профессор Штейнгауз всегда был отличным популяризатором, а его известная книга *Математический калейдоскоп*[1], переведенная на многие языки, пользуется популярностью во всем мире.

В торжествах приняло участие значительное число коллег, учеников, друзей и деятелей науки, которые с признательностью восприняли ответные благодарственные слова выдающегося ученого, одного из создателей и летописцев польской математической школы.

[1] Русский перевод: М.–Л.: Гостехиздат, 1949.

Речь проф. Гуго Штейнгауза

Ваше превосходительство, уважаемые господа деканы, милостивые господа организаторы! Диплом, который я получил из ваших рук, дает мне не только почетный титул доктора Варшавского университета, но и наделяет тремя особыми привилегиями. Первая из них более всего доставляет удовольствие их обладателю: обычные дипломы свидетельствуют о том, что соискатель ad doctoris gradum pertinent (прошел через экзамены для получения степени), а этот деликатно замалчивает такой вопрос. В данный момент, выступая в этом уважаемом коллективе, я воспользуюсь второй привилегией — не буду злоупотреблять правом последнего слова. Для длинной речи у меня не хватает опыта, но как я мог его приобрести? В такой роли никто не выступает часто (разумеется, за исключением моего любезного покровителя). Наибольшую совестливость пробудила во мне третья привилегия: это venia studiorum (зачисление в студенты). Как я могу быть доктором университета, студентом которого я никогда не был? С того момента, когда ректор и декан отделения математики и физики соблаговолили уведомить меня, что я удостоен исключительной чести — получить степень почетного доктора с вытекающими отсюда последствиями, меня одолевает именно это сомнение. Вопрос, где и чему я учился, подобен мучительному сну, в котором взрослому человеку приказывают вернуться в школу и повторно пройти последние классы, и этот вопрос вызывает во мне не одно воспоминание.

Когда я начинал учиться, прошла забастовка под лозунгом полонизации образования в школах в условиях тогдашней российской аннексии (в первую очередь под лозунгом возвращения польского характера этому университету), но эта забастовка протеста привела к изгнанию и выпихнула за границу волну из тысяч студентов. Эта волна катилась далеко на запад, а меня привела в Геттинген, где я встретился с прекраснейшей молодежью, собравшейся со всей Польши, прежде всего из Варшавы. Там я узнал братьев Дзевульских, Тадеуша Банахиевича, Эдварда Лота, Генрика Колодзейского, Зигмунда Янишевского, Вацлава Серпиньского, Розенблюма, Стефана Мазуркевича, Фелициана Кемпиньского. С Казимежем Янценом, Мечиславом Бернацким, Генриком Лауэром, Александром Райхманом и многими другими спустя несколько лет я встретился в Мюнхене и в Париже. Вот таким образом я оказался студентом этого университета, хотя и partibus infidelium (частично не по своей воле). Сказанное не является преувеличением. Там и тогда Банахиевич заказал мне написать популярную статью в варшавский «Wszechświat», и эта студенческая компиляция числится под номером один в списке моих работ. Вторую работу я обсуждал с Янценом. Серпиньский специально для меня написал две лекции, чтобы обучить меня цепным дробям и формуле суммирования Эйлера–Маклорена. Во время ночных прогулок я учился астрономии у Банахиевича, это он объяснил мне красоту и важность механики, а также практическое значение теории вероятностей.

Дзевульские, духовные предводители геттингенской Полонии, направляли мои интересы к приложениям математики, но все тогдашние Филоматы и Филареты единодушно и систематично вводили мне противоядие против опасности, которая угрожала каждому прибывшему в Саксонию за знаниями эмигранту, а особенно мне, выходцу из Галиции. Эта опасность заключалась в признании превосходства западной цивилизации, представленной лучшими в мире университетами, что поощряло забыть обо всем том, что мои тогдашние друзья (как присутствующие здесь, так и те, которых, к сожалению, уже никогда не увижу) всегда помнили и мне забыть не позволили.

Поскольку университет удостоил меня степени доктора (как бы в порядке амнистии в связи с приближающейся 150-летней годовщиной своего образования), то да будет мне позволено сказать pro domo mea (про мой дом), что 50 лет назад я был заочным студентом того Варшавского университета, который тогда существовал только в мечтах моих тогдашних коллег и покровителей.

Сила желания привела к тому, что мечта стала явью — поэтому кроме тех, кто сегодня хранят славу и достоинство этой высшей школы, пусть соблаговолят принять мои благодарности и те, кого мне дано было знать в течение полувека, и кому по справедливости принадлежит имя возродителей Варшавского университета!

Речь, произнесенная при присвоении степени почетного доктора Университета им. Адама Мицкевича в Познани

(16 ноября 1963 г.)

Ваше Превосходительство, почтенные господа деканы, многоуважаемые господа организаторы! Только что Университет имени Адама Мицкевича удостоил меня степени почетного доктора. Высокое отличие, которым является степень доктора *honoris causa*, я понимаю как выражение признания двух математических школ, к которым я имел счастье принадлежать. Не буду говорить о львовской, поскольку мой любезный покровитель[1], в свое время ее приверженец, достойно ее представляет в Познани и успешно пересадил на здешнюю почву ее математический дух. О львовской школе еще сегодня ходят анекдоты, касающиеся ее работы. Вроцлавская школа частично переняла этот стиль, однако имеет иную проблематику. Молодые вроцлавские ученые имели возможность сравнить наши обычаи с научной атмосферой Запада, особенно с тем, что они видели в Соединенных Штатах, где много центров, много ученых и много достижений. Однако мы можем констатировать наше преимущество в навыках коллективной работы, благодаря чему нам удается, несмотря на многочисленные трудности (к которым относятся низкое материальное и кадровое обеспечение, недостаток жилья и постоянная катастрофа, именуемая реформой школьного образования), претендовать

[1] Проф. Владислав Орлич. — *Прим. ред. польского издания*.

на более высокое место в науке, чем то, которое соответствует нашему реальному жизненному уровню или масштабу производства электроэнергии.

Всякие торжества являются поводом для обмена приветственными словами. Но мое уважение к этому Университету и к участникам этого почтенного собрания не позволяет мне ограничиться лишь благодарностями. Ведь ваш доктор *honoris causa*, Казимеж Твардовский, выступил в этом актовом зале с лекцией о достоинстве Университета. Право и обязанность говорить правду *ex cathedra* (с кафедры) — это было в Познани основным тезисом речи Твардовского. Правда редко бывает легкой и не всегда всем приятна — я позволю себе сказать, что я думаю о той лицемерной ситуации, в которой оказалась математика в нашей современной действительности. Я считаю эту ситуацию пагубной для общества и унизительной для математиков. Как обычно, из газет трудно узнать о сегодняшней роли математики, ибо пресса умеет только морочить головы читателям и распространять несколько избитых фраз и положений, якобы защищающих позиции математики. Лучше всего имитируют правду три следующих газетных штампа: 1) польская математика — лучшая на свете; 2) электронные машины дают математикам новые возможности проявить себя, а промышленности и администрации позволяют экономить время и силы (так как электронные мозги заменяют массу бухгалтеров, кассиров и счетоводов); 3) без математики не было бы искусственных спутников, космонавтов и всяких ракетных чудес. Из этих трех суждений газетчики делают вывод, что в течение 20 лет нужно будет подготовить 17 000 математиков! Отсюда легко подсчитать, что в 1965 году нам не будет хватать нескольких тысяч математиков, после чего естественным представляется вывод: королева наук останется без подданных! (Express Wieczorny, № 83, 8 апреля 1963 г.) К счастью, не все читают газеты. Один из них, 7-летний сын способного молодого ученого, моего коллеги по профессии, когда его в школе спросили, кто по специальности его отец, ответил: «железнодорожник». «Почему же ты не ответил, что отец математик?» — спросили его дома. «Тогда все стали бы смеяться надо мной…». Газеты бьют тревогу, что некому будет учить в общеобразовательных школах, поскольку для получения высшего математического образования подается лишь 800 заявлений на 1000 вакантных мест, т. е. на 20% меньше. Однако давайте присмотримся к газетной информации поближе. Фраза о славе польской математики не очень вяжется со следующей (об электронных машинах как главном прогрессе этой науки), поскольку польская математика на 95% обязана своей славой исследованиям, далеким от конструирования вычислительных машин. Еще труднее согласиться с третьей фразой, так как ни один выдающийся польский математик (и даже ни один из средних) не отличился в расчетах орбит космических полетов (хотя термин «стратосфера», прочитанный по-польски, звучит для нас как определение этой сферы). Кроме того, надежда на то, что промышленность может получить какую-то экономию при применении современных компьютеров из-за снижения персональных издержек, является призрачной: амортизация дорогих заграничных машин (и еще более дорогих отечественных) обходится дороже, чем все счетоводы, заменяемые этими машинами.

Положение математики в Польше является трагикомедией ошибок и недоразумений. Уже само именование «математикой» школьных вычислений является неправильным — ведь никому не приходит в голову называть уроки чтения и письма наукой польской литературы! Другим недоразумением, значительно более важным, является упорное игнорирование факта, известного каждому учителю по собственному опыту: 25% юношей и чуть больше девушек перестают понимать слова учителя, когда на доске появляется алгебраическая символика. Для меня из этого факта вытекает беспрекословный вывод, что принуждение всех учеников к изучению математики подобно обязательному обучению музыке глухих людей. Поэтому я уверен, что после 6 или 7 лет обучения надо дать ученикам право выбора между гуманитарным и математико-естественным направлением. Перевод слабых в математике на гуманитарные отделения облегчит им изучение других предметов, а произведенный отбор позволит учителям математики без труда выполнить программу на математическом отделении. Кроме того, это облегчит поиск кандидатов на роль учителей математики, так как в старших классах их понадобится в два раза меньше, чем в настоящее время.

Значительно глубже недоразумение, которое я назвал бы заколдованным кругом. Математики-выпускники университетов — это по большей части будущие преподаватели различного рода школ: начальных, средних и высших. Значительную часть учебного времени у них занимают лекции и семинары, т. е. дидактическая работа. Для чего могут пригодиться такие знания? Только для обучения математике других (например, в школах). Сегодняшнее положение таково, что лишь несколько процентов студентов будут заниматься именно математикой (то есть сами себе будут ставить задачи, которые необходимо решать), а почти все остальные выпускники будут заниматься педагогической работой в обычных школах. Если такое переливание математических знаний из одних мозгов в другие и имеет какой-то реальный смысл, то оно должно закончиться там, где кто-то учится математике без намерения дальнейших занятий ею. Речь идет о применении математики к *реальным* проблемам (а не только к таким, которые интересуют исключительно любителей теоретической математики). Такое намерение можно назвать *программой Архимеда*. Пожалуй, эта программа совершенно естественна хотя бы потому, что ведь выпускники медицинских высших учебных заведений (по крайней мере в 90% случаев) выбирают специальность врача, и только немногие из них предполагают в дальнейшем заняться исследовательской работой или преподаванием медицины! А вот в математике программа Архимеда является чем-то новым. Меня удивляют школьники, которые хотят, чтобы папа был железнодорожником, и не верят, что математик не обязательно должен быть учителем. Но меня удивляют и те, кто изучает математику, не веря в то, что эта наука может пригодиться для чего-либо большего, нежели для защиты диссертации… Кризис, который в настоящее время переживает математика, является весьма острым, поскольку сейчас непомерно увеличивается число общеобразовательных школ. Если верить газетам, то промышленность, торговля, горное дело, сельское хозяйство, биология, медицина, география, метеорология и многие другие отрасли нуждаются в помощи математика, особенно, когда речь идет о планировании в государственном масштабе. Если бы так было на самом деле, то тревога газет была бы обоснованной, но реальная ситуация выглядит совсем иначе: в данный момент в промышленности занято едва ли несколько сотен математиков (большинство которых связано с не свойственной им работой), и тщетны надежды, что ежегодно будет требоваться пара сотен архимедов и что разные ведомства, проектные бюро, банки и фабрики будут за них драться так, как спортивные команды за игроков. Пока мы не видим ни спроса, ни предложения. Почему?

Как перевести на современный польский язык специфическое прусское изречение Бисмарка, что «в конце концов ведь никто никогда не будет чем-то бóльшим, нежели кирасиром!». Я заменю слово «кирасир» на «инженер», ибо инженер должен знать все (он — физик и математик, чертежник и монтер, изобретатель и конструктор). Я встречал таких инженеров. Скольких? Одного! Его звали Александр Детциус, он был моим шефом в конторе по распределению природного газа и он пригласил меня в качестве математика. Это было в 1919–1920 годах (т. е. 45 лет тому назад), но с тех пор я не встречал никого, кто бы умел так ставить перед математиками задачи, имеющие практический смысл. Благодаря ему я познакомился *in vivo* (наяву) с программой Архимеда, а перегонные заводы фирм «Gartenberg», «Waterkein» и «Karpaty» имели в штате математика для решения задач, возникающих при совместной эксплуатации газопровода — я что-то не слышал, чтобы сегодня, например, фирма «Туров» имела постоянного математического эксперта… Еще более удивительно, что горное дело и промышленность еще реже используют физиков, чем математиков. Мне трудно объяснить это иначе, чем глубокой верой директоров в кирасиров… прошу прощения за машинальную описку — здесь должно было быть «инженеров». Я не хочу здесь затрагивать трудный вопрос преподавания математики в политехнических учебных заведениях (чем я занимался в первые годы пребывания во Вроцлаве), но я знаю, что студенты политехнического института по большей части считали математику одним из главных препятствий на пути к карьере. Блестящий профессор Львовского политехнического института и конструктор подводных лодок, Эберман, считал балластом все, что выходит за рамки вычислений, так что я не надеюсь, что математик мог бы найти поддержку у главного инженера завода, руководителем которого когда-то был Эберман! Разматывая этот клубок нитей (или проблем), мы доходим до того, что надо учить не детей, а взрослых. Сколькие из них знают, что такое математика? Удовольствуемся следующим примером: экспортные товары у нас проходят статистический контроль качества. Польский комитет по стандартизации за несколько лет работы взыскал немало денежных штрафов, прежде чем опубликовал стандарты качества для штучных товаров — эта небольшая книжка (среди авторов которой есть выдающийся инженер и пара математиков) вовсе не требует от читателя знания высшей математики. Я лично знаком с начальником Арбитражной палаты и знаю, что он никогда не слышал об этих стандартах… знаю также, что наши официальные экспортеры не придерживаются их. Они сами выдумали свои стандарты, которые имеют ту особенность, что большие партии товаров почти никогда не пройдут через контроль, зато даже некачественный товар можно протолкнуть малыми партиями. Таким способом мы сами себя вынудили малыми партиями поставлять в Египет водомерные счетчики, что затрудняет импортерам их приемку... египетский получатель не желает знать самозванных стандартов и сам заново контролирует поставки, а именно... согласно документам Польского комитета по стандартизации! Можно ли ожидать, что наш поставщик даст работу математику, если не доверяет официальным стандартам, которые можно купить за 20 злотых?

На этом фоне сложился необычный альянс двух партнеров. Один из них — великие ученые, люди, преданные науке, всемирно известные математики (этого партнера не интересуют ни реальный мир, ни реальная математика), а второй — эмпирики, считающие мышление ненужной роскошью. Их образование не позволяет даже представить себе, что такое математика и как ее следует использовать. Между этим молотом и той наковальней находится молодой математик, который желает применять свои знания на практике. Уже при защите докторской диссертации он становится объектом дискриминации, поскольку корифей науки, постоянно пребывающий за границей (я имею в виду границу здравого рассудка), требует от диссертанта, чтобы он в своей работе привел новую математическую теорему (хотя бы даже лишенную практической пользы). Корифей не хочет понимать, что наибольшим научным открытием является исключение математики отовсюду, откуда ее можно удалить, а не искусственное ее введение туда, где можно без нее обойтись. Отсюда следует логический вывод: способные математики выбирают теоретические темы, чтобы избежать дискриминации — это облегчает им научную карьеру. Те же из них, кто несмотря ни на что выдерживают программу Архимеда и переплывают через Сциллу докторской диссертации, позже попадают в Харибду сыгранного клуба кирасиров, которым университетская докторская степень не внушает уважения.

Возможно, мне удалось представить сущность тайного и бессознательного соглашения двух категорий вредителей. Мой упрек направлен тем, кто не дорос до руководства современными производственными коллективами, ибо они даже не догадываются, что каждый второй их шаг ошибочен, не требует гражданского мужества, поскольку не получит отклика… но атака на жрецов абстракции вызывает реакцию. Легко предсказать какую. Университеты и академии имеют привилегию свободы научных исследований — никто не может диктовать профессорам, чем они должны заниматься. Наука должна, конечно, беречь свободу, как зеницу ока. Несмотря на это, необходимо ограничить число польских ученых, занимающихся, например, исследованием поведения пауков в Гибралтаре. Если математика не находит понимания даже у нуждающихся в ней практиков, то не стоит удивляться ученикам Платона, считавшим занятия Архимеда математикой делом, недостойным настоящего философа. Математика не относится к числу дорогостоящих наук, но, несмотря на это, министр, который должен отстаивать бюджет в сфере математики на научные исследования, на публикации, институты, кафедры и стипендии, требует от специалистов привести аргументы. Если он сам в глубине души является приверженцем Платона, то какими должны быть аргументы? Убежденный в приоритете абстрактной математики и далекий от современного мира, загипнотизированного техникой с ее семимильными шагами, имеет ли он право ссылаться на практическую важность математики? Предположим, что министр в чем-то откажет. Известно ли кому-то, когда и какие реальные плоды вырастут на каком-то абстрактном кусте математики? Впрочем, если министр относится к кирасирам, он всегда может сказать: «Hic Rhodus, hic salta!»[2] .

Несколько месяцев назад действительность вмешалась в вымышленную полемику, когда оказалось, что очень абстрактная и очень современная теория стохастических процессов позволяет устранить препятствия, затрудняющие подачу бурого угля по ленточному транспортеру с открытых разработок на электростанции, постоянно питаемые этим углем. Математическую идею предложил Ст. Гладыш, а инженеры-специалисты утверждают, что за счет этого получается огромная экономия, бóльшая нежели все суммы, выделенные до сих пор государственным казначейством на нужды математики.

Недавно в одном из многих популярных периодических изданий прозвучал голос об обратной тенденции. Заглавие статьи предостерегает от использования математики, а автор критикует принцип оптимальности, используемый для решения практических задач. Если мы намерены серьезно прислушаться к этому голосу, то надо было бы прежде всего подвергнуть сомнению упоминавшееся туровское решение, однако все указывает на то, что автор не очень понимает проблему и постоянно намекает на некоторые обстоятельства, которыми нельзя пренебрегать, хотя они этого заслуживают.

Таким образом, главный мотив сетований отпал: математиков мало не из-за отсутствия у абитуриентов желания учиться, а потому, что профессия учителя является малопривлекательной. Аналогично, в промышленности математиков мало не из-за недостатка соответствующих выпускников университетов, а потому, что промышленность и экономика не понимают роли математиков в современном мире материального производства. К математикам на промышленных предприятиях относятся хуже, чем к инженерам: если они не очень сообразительны — им предлагают второстепенную административную работу, а если сообразительны, то их способности остаются недооцененными и нереализованными. Поэтому самые лучшие и амбициозные из них выбирают научную карьеру.

---

[2] «Прыгай здесь и сейчас!»

Итак, мы имеем здесь пример товара, когда предложение приспосабливается к спросу. Спрос небольшой, цена товара низкая, поэтому нечего удивляться, что предложение такое незначительное. Нам грозит опасность и с другой стороны — войска генерала Бурбаки атакуют нашу начальную школу. Бурбаки сделал открытие, что детей с колыбели можно учить математической логике, теории множеств и абстрактной алгебре, так как им это очень нравится — по такому пути можно зайти далеко, особенно когда тайно сложится союз математики с геометрией и физикой… детям лучше этого не знать.

Шесть лет назад во Вроцлаве состоялась конференция, предметом которой была роль математики в настоящий момент. Я позволю себе зачитать заключительную часть своего выступления из протоколов этой конференции (полностью их можно найти в «Kosmos B», IV, выпуск 2 (14), 1958, стр. 123–151), и эти предложения сто́ит сравнить с тем, что я имел честь здесь высказать, благодаря терпеливости и любезности уважаемой аудитории!

«Дискуссия не идет в направлении, которое меня интересует. Я сказал, что не может быть, чтобы Польша не знала, что такое математика. Один из наших экономистов сказал на это следующее: «Все у нас очень плохо. Финансовое положение плачевное, но некоторые резервы имеются. Одним из резервов, например, является то, что у нас нет электрифицированных железных дорог. Мы можем их электрифицировать и очень много на этом заработать. И таких резервов несколько». Меня беспокоит не то, какое место занимает математика, а то, что мы находимся в ситуации, когда из всего надо извлекать пользу.

Я считаю, что математика так же хороша, как и электрификация, при условии, что она правильно используется. Между тем эта математическая электрификация выглядит так, что все средства вложены в постройку бетонных столбов и натягивание проводов, но при этом не закуплены локомотивы. Проблема в том, что все считают, что на самом деле дела идут очень хорошо.

Мы слышали восторг по поводу искусства для искусства и пренебрежительные слова о ничтожных выгодах. Я повторяю, что в нашей ситуации такое отношение недопустимо.

Молодежь из общеобразовательной школы обратилась к Ежи Завейскому, чтобы он поспособствовал ликвидации математики в школе, поскольку она ни для чего не нужна.

Может, государство думает, что я осуждаю эту молодежь? Нет! Я считаю, что это мыслящая часть молодежи, потому что если она полагает, что математика ни для чего не нужна (и не видит в ней реальной потребности), то имеет право и основания писать об этом. Вежливый ученик доверяет профессорам, но именно те невежливые, которые написали Завейскому, являются самыми умными.

А что мы им отвечаем? Мы говорим им о Платоне и об искусстве ради искусства, и таким образом подтверждаем справедливость их петиции!

Польские математики утверждают (правда, не все), что их наука в Польше развита достаточно высоко, и зарубежные математики в целом это мнение подтверждают (во всяком случае продукт, произведенный каким-нибудь известным польским математиком, получает в мире лучшую оценку, чем польские консервы, текстиль или радиоприемники). Трудную экономическую ситуацию нашей страны в данный момент знают все трезвые люди (я не считаю, что они составляют большинство), но эти люди не знают, что математика располагает средствами, делающими возможным повышение качества консервов, текстиля и радиоприемников. Попытки использования математической науки для этих, и даже более удивительных целей встречают поддержку со многих сторон. Легко говорить о том, что творчество нельзя ограничивать определенными рамками, что благородный мудрец должен работать для чистой науки (без оглядки на сиюминутную прибыль), что математика обходится значительно дешевле физики, а физика — значительно дешевле театра (не говоря уж о спорте!) и т. п. В данный момент речь идет о другом. Сессия показала, что многие из польских ученых не разбираются в той парадоксальной роли, которую играет математика в польской трагедии. Когда тонет корабль, лучше выбросить рояль за борт, чем дискутировать, что на нем играть — Моцарта или рок-н-ролл. Даже если бы прикладная математика ежегодно обходилась государству всего в 1000 злотых, то и эту тысячу следовало бы вычеркнуть из бюджета, если и впредь будет продолжаться молчаливый сговор против всякого применения науки на практике. А ученых можно экспортировать за валюту!».

Перечень источников

Автобиография. Опубликовано в «Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego», Seria II: Wiadomości Matematyczne XVII (1973).

Математика вчера и сегодня, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wroclawskiego. Matematyka-Fizyka-Astronomia II, seria B, nr 3 (1959), s. 5–19.

Что такое математика и на чем основан ее прогресс?, Kosmos, t. LII, z. IV (1927), s. 346–361.

О математической строгости, Matematyka nr 3 (53) (1958), s. 1–11.

Индуктивное умозаключение, Myśl Filozoficzna nr 5 (25) (1956), s. 26–47.

Беседа (немного историческая), Wiadomości Matematyczne VII (1963), s. 21–26.

О треугольниках, Wiadomości Matematyczne I, 2 (1956), s. 169-174.

Об играх (в свободном изложении), Studia Filozoficzne, z. 5 (1969), s. 3–13.

Пути прикладной математики, Matematyka z. 3 (5) (1949), s. 8–19.

Проблема необратимости, Kosmos nr 2, seria B, z. 2 (1955), s. 123–132.

Теория вероятностей как инструмент исследований в естествознании и производстве, Prace Matematyczne II, 1 (1956), s. 27–55.

Выступление в дискуссии на конференции «Статистика как метод познания», Zeszyty Problemowe Kosmosu z. 2 (1954), s. 83–85.

Статистическое оценивание как метод приемки товаров массового производства, Studia i Prace Statystyczne z. 2 (1950), s. 1–13.

Об установлении отцовства, Zastosowania matematyki I, 2 (1954), s. 67–82.

Взаимодействие наук на примере роли математики во вроцлавской научной среде, Nauka Polska IV, nr 4 (16) (1956), s. 45–66.

Немного о кибернетике, Znak 112 (1963), s. 1123–1142.

Памяти Леона Лихтенштейна, Mathesis Polska VIII (1933), s. 131–137.

Памяти Зигмунда Янишевского, Przegląd Filozoficzny nr 22 (1919), z. III, s. 113–117.

Стефан Банах. Выступление на торжественном заседании, посвященном памяти Стефана Банаха, Wiadomości Matematyczne IV (1961), s. 251–259.

Речь, произнесенная при присвоении степени почетного доктора Варшавского университета (28 апреля 1958 г.), Wiadomości Matematyczne III (1959), s. 9–11.

Речь, произнесенная при присвоении степени почетного доктора Университета им. Адама Мицкевича в Познани (1963 г.), Wiadomości Matematyczne VIII (1965), s. 119–135.

Именной указатель

Абаканович-Абданк Бруно 260
Абель Нильс Генрих 58
Адамар Жак Саломон 61, 153, 313, 322, 323
Андерсон Клинтон П. 26
Аристотель 299
Архитас из Таренто 278

Байес Томас 81–83, 85, 193, 194, 198, 224, 248
Байре Рене 137
Банах Стефан 25–27, 133, 135, 136, 158, 181, 267, 319–330
Банахиевич Тадеуш 332
Банахова Люция 327
Банахова, опекунша Стефана Банаха 319
Барбацкий Стефан 199
Бартель Казимеж 325
Башелье Луи 187
Бельтрами Эугенио 65, 177
Бергсон Анри 314
Бернацкий Мечислав 333
Бернулли Иоганн 156, 178, 183
Бернулли Якоб 67, 79
Бернштайн Феликс 242, 279, 313
Бернштейн Сергей Н. 186, 187, 194, 210
Бессель Фридрих Вильгельм 111, 177
Биркгоф Георг Дэвид 311
Бисмарк Отто, фон 338
Блекуэлл Дэвид 181
Бойль Роберт 51
Бойяи Вольфганг 29, 32, 34
Бойяи Каспар, де Бойя 29
Бойяи, семья 29
Бойяи Янош 30, 32–34, 42, 64, 177, 261, 262
Больцано Бернгард 105, 106
Больцман Людвиг Эдуард 34, 160, 162, 178, 307
Борель Эмиль 61, 126, 178, 181, 192, 300, 313
Борн Макс 160
Борткевич Владислав 178
Броун Роберт 72
Брунн Герман 313
Бурбаки Николя, псевдоним 68, 74, 342
Буркхардт Генрих 313
Бэкон Роджер 292

Ваальс Иоганн Дидерик, ван дер 182
Вальд Абрахам 193, 195, 198–200
Вармус Мечислав 202, 203
Веблен Торстен 63
Вейгль Рудольф 328
Вейерштрасс Карл 59, 105, 106
Вейль Герман 72
Вейссенхофф Ян 162
Венингер Маргарет 85
Вержбицкий Витольд 203, 205
Верлен Поль 331
Вёлер Фридрих 66
Вилкош Витольд 320
Вильгельм II 255
Вилье де л’Иль-Адам Огюст, де 301
Винер Норберт 39, 189–191, 287, 289, 294, 322
Войцеховский Казимеж 61
Вольд Герман 190
Вольтер (действ. Франсуа Мари Аруэ) 275

Вольтерра Вито 323
Вольфовиц Якоб 195, 198, 200
Врублевский Зигмунт Флорентий 24

Галуа Эварист 58, 73
Гаррис Бернард 192
Гаррис Франк Э. 264
Гаскелл Роберт Юджин 26, 74
Гаусс Карл Фридрих 29, 30, 32, 42, 64, 169, 177, 196
Гвяздоморский Ян 257
Гейгер Ганс 211
Гей-Люссак Луи Жозеф 182
Гейне Генрих Эдуард 122, 136
Геккель Эрнст 74
Гёдель Курт 32, 137
Гёте Иоганн Вольфганг, фон 275, 290
Гильберт Давид 61–63, 177, 261, 262, 313, 322, 323, 328
Гиппократ 78
Гиршик М. А. 198
Гиршфельд Людвиг 82, 83, 87, 209, 242, 246, 247, 252, 257, 278, 279
Гладыш Станислав 341
Гливенко Валерий Иванович 240
Гнеденко Борис Владимирович 185
Госевский Владислав 178
Греко Эль (действ. Доминикос Теотокопулос) 263
Гренандер Ульф 190
Гречек, отец Стефана Банаха 319
Гройер Францишек 271
Гурсат Эдуард 313
Гюйгенс Христиан 67
Гюйсманс Йорис Карл 298

Даламбер Жан Лерон 61
Дампир Уильям Сесиль, сэр 65
Дарбу Гастон 61, 106
Дарвин Джордж Говард 308
Дедекинд Рихард 68
Декарт Рене 50, 67, 288
Детциус Александр 338
Дзевульские, братья, Вацлав Михал, Владислав 332, 333
Диаманди Перикл 45
Дикштейн Самуэль 106
Дирихле Петер Густав Лежён 66, 307
Донскер Монро Д. 196
Дробот Стефан 202, 203, 282
Дуб Джозеф Л. 196
Дунгерн Эмиль, фон 243, 280
Дуркхайм Эмиль 314
Дыбовский Бенедикт 40
Дюбуа-Реймон Эмиль 296, 320

Евклид 27, 32, 34, 59, 63–65, 67, 73

Жеромский Стефан 329
Жолкевский Стефан 331
Жордан Камилл 63, 153, 314, 315

Завейский Ежи 25, 27, 343
Заремба Станислав 267, 268, 319, 320
Зенон из Элеи 29
Зигмунд Антон 179
Зонн Влодзимеж 209
Зоретти Людовик 314
Зубрицкий Стефан 209

Ивашкевич К. 198
Иноди Джакомо 45
Инфельд Леопольд 268

Кант Иммануил 104, 296
Кантелли Франческо Паоло 178, 187
Каратеодори Константин 162
Кархунен 190
Кац Марк 168, 179
Келлог Оливер Димон 306
Келус Анджей 211
Кемпиньский Фелициан 333
Кёниг Дитер 191
Кирхгоф Густав Роберт 55
Клейн Феликс 122, 177, 259, 260, 269
Клеро Алексис Клод 307
Кованко Александр С. 324
Козакевич Вацлав 180
Колмогоров Андрей Николаевич 181, 183, 187, 189, 190, 195, 196
Колодзейский Генрик 332
Колодзейчик Стефан 198
Коперник Николай 65
Котарбиньский Тадеуш 25, 40
Кох Роберт 272
Коши Огюстен Луи 61, 67, 105, 122, 136, 186

Коэн Поль Джозеф 137
Крайчик Морис 141
Крамер Гаральд 184, 186, 192
Крускал Уильям Г. 197
Кульчинский Станислав Леон 258, 276
Кун Гарольд У. 141
Курант Рихард 150
Куратовский Казимеж 327

Лаваль Карл Густав, де 270
Лагранж Жозеф Луи, де 48, 49, 51, 61, 67
Ланге Оскар 177, 193
Ландау Эдмунд 262, 313, 321
Ландштайнер Карл 242, 279
Лаплас Пьер Симон, де 61, 79–81, 168, 169, 177, 183, 186, 228, 229, 231
Лауэр Генрик 333
Лебег Анри Леон 61, 136, 162, 178, 181, 314, 319, 321, 325
Леви Поль Пьер 185, 188
Левин Эжен 242
Лейбниц Готфрид Вильгельм 44, 50, 67, 109, 285
Лексис Вильгельм 145
Лере Жан 328
Лесневский Станислав 155
Лехманн Эрих Лео 197
Линдеберг Дж. У. 185
Линдеман Фердинанд 52
Листинг Иоганн Бенедикт 71, 72
Лиувилль Жозеф 108
Лихтенштейн Леон 142, 267, 268, 305, 307–312
Лобачевский Николай Иванович 29, 32, 33, 64, 178, 263
Ломницкий Антоний Мариан 178, 180, 320
Ломницкий Мариан 179
Лот Эдвард 332
Лошмидт Иосиф 161, 163, 174, 179, 183
Лукасевич Ян 155
Лукашевич Юзеф 82, 210, 254, 257
Ляпунов Александр Михайлович 186, 307

Мавролико Франческо 292
Маеда Фумитомо 71
Мазур Станислав 133, 135, 158, 327
Мазуркевич Стефан 178, 179, 267, 268
Майкельсон Альберт Абрахам 33, 65, 261
МакКинси Дж. К. К. 97
Маклорен Колин 307, 333
Максвелл Джеймс Клерк 34, 160, 178
Малибран Гарсиа Мария Фелисита 300
Марков Андрей Андреевич 187, 188, 190, 191, 193
Марцинкевич Юзеф 179, 180
Марчевский Эдвард 175, 181, 191, 192
Мах Эрнест 33, 263, 310
Мейерсон Эмиль 306, 310
Мейнонг Алексиус Риттер, фон Хандшусхайм 315
Мендель Грегор Иоганн 243
Мёбиус Август Фердинанд 72
Мизес Рихард, фон 181
Милицер-Гружевска Галина 187
Милл Джон Стюарт 34, 261
Минковский Герман 262, 283, 313
Мицельский Ян 125, 128, 135, 136, 130
Монж Гаспар 260
Морган Аугустус, де 129
Мостеллер Фредерик 197
Мостовский Анджей 140
Моцарт Вольфганг Амадей 343
Мошиньский Вацлав 203
Муавр Абрахам, де 183, 186, 228, 229, 231
Мэсси Франк Дж., мл. 197
Мюллер Эрвин Вильгельм 211

Навье Луи Мари 183
Наполеон I (Наполеон Бонапарт) 153, 260
Наполеон III (Карл Людвик Наполеон Бонапарт) 61
Наторп Пауль 315
Нейман Джон, фон 88, 97, 98, 127, 133, 138, 139, 160, 299, 300, 323
Нейман Карл Готфрид 306

Нейман Сплава Ежи 87, 88, 143, 179, 180, 193–195, 198
Нейманы 309
Никодим Отто Марцин 319
Нильсен Аста 271
Норвид Киприан 278
Нусбаум-Хиларович Юзеф 40
Ньютон Исаак 34, 50, 61, 67, 154, 289, 306

Одерфельд Ян 177, 194, 196, 203, 213
Окань Морис, д' 56
Орлич Владислав 158, 327, 334

Павлов Иван Петрович 288
Паркинсон Джеймс 288
Паскаль Блез 34, 35, 42, 78, 285, 292, 300, 306
Пастёр Луи 73
Пачоли Лука 78
Паш Мориц 177
Пеано Джузеппе 181
Пикар Шарль Эмиль 313
Пилсудский Юзеф 316
Пинчерле Сальваторе 315, 321
Пирсон Кеннет Р. 87
Пирсон Эгон Шарп 195
Пифагор 62, 63, 79
Платон 63, 146, 278, 340, 343
Погоржельский Витольд 203
Понселе Жан Виктор 73, 260
Потоцкий Ян 275
Прус Болеслав (действ. Александр Гловацкий) 260
Птолемей Клавдий 28
Пуанкаре Анри 61, 160, 162, 177, 262, 263, 314
Пуассон Симеон Дени 178, 183, 186, 192
Пуцина Юзеф 315
Пфандлер Александр 314

Райков Дмитрий А. 185
Райский Чеслав 211
Райт Вилбур 289
Райт Орвилл 289
Райхман Александр 179, 180
Рейнак Соломон 314
Ренар Шарль 203
Реньи Альфред 186, 191
Риман Бернгард 33, 54, 55, 59, 64, 67, 72, 261, 262
Рисс Фриджис 306, 322, 323
Розенблюм Марвин 332
Розенблют Артур 287
Романовский Святослав 203
Рубинович Войцех 268
Рудзкий Мауриций Пий 268
Рузевич Станислав 58
Рунге Фердинанд 313
Руффини Паоло 58
Рылл-Нардзевский Чеслав 130, 133, 138, 181, 192
Рэлей Джон Уильям, лорд 55
Рюкле Г. 45

Садовский Веслав 177, 197
Сакс Станислав 158, 181
Салк Йонас Эдвард 77
Санье Марк 315
Сарду Викторьен 262
Сверчковский Станислав Славомир 136
Свифт Джонатан 275
Сенкевич Генрик (псевд. Литвос) 260
Серпиньский Вацлав 108, 181, 267, 315, 321, 326, 331, 332
Сколем Торальф А. 136
Слупецкий Ежи 279
Слуцкий Евгений Евгеньевич 188
Смирнов Николай Васильевич 195, 196
Смолуховский Мариан 34, 162, 178, 190, 268
Стожек Влодзимеж 326
Стокс Джордж Габриэль, сэр 182
Сцевола Муций 90

Такер Альберт У. 141
Тамаркин Якоб Давид 322
Таннери Жюль 320
Тарский Альфред 27, 136, 181
Тауринус Франц Адольф 34
Твардовский Казимеж 335
Тёплиц Отто 124, 313
Торрес Кеведо Леонардо 294, 296
Туран Пауль 169, 170, 182

Уайлд Оскар 43
Улам Станислав Марцин 179, 293, 294, 322, 327
Уолтер Уильям Грэй 91
Урбаник Казимеж 72, 181, 192

Феллер Уильям 70, 185, 186
Ферма Пьер, де 66, 79
Фёрстер Фридрих Вильгельм 313
Фиш Марк 177, 186, 196, 199
Фишер Рональд Эйлмер, сэр 87, 143, 157, 194, 196, 198, 220. 274
Флобер Гюстав 302
Форд Генри 40, 154
Фосс Генрих 312
Франс Анатоль (действ. Жак Анатоль Тибо) 276
Фредгольм Эрик Ивар 323
Френкель Авиезри С. 136
Фреше Морис 321, 322
Фурье Жан 187–189, 320

Хагельбергер Д. У. 92, 101, 292
Ханкель Герман 11, 106
Харди Годфри Гарольд, сэр 111, 151
Хартман Станислав 181, 192
Хелмерт Фридрих Роберт 177
Хемингуэй Эрнест 76
Хеннелл 66
Хёффдинг Василий 197
Хилл Брэдфорд А. 218, 281
Хилле Эйнар 191
Хинчин Александр Яковлевич 184–186, 189, 190
Ходжс Джозеф Л., мл. 98
Хоель Пауль Герхард 239

Цермело Эрнст 123–128, 130, 135, 136, 160, 162, 178, 182, 313
Цукерман Солли, сэр 295

Чекановский Ян 280
Чепмэн Сидней 190
Чех Эдуард 125
Чеховский Тадеуш 177
Чубер Эмануэль 179

Шаудер Юлиуш Павел 330
Шварц Герман Амандус 54, 55, 59
Шварц Лоран 38, 61–66, 68, 70, 72, 74, 75
Шеннон Клод Элвуд 92
Шефер Клеменс 163
Шеффе Анри 196
Шмидт Эрхард 323
Шпейсер Давид 311
Шпенглер Освальд 74
Шрёдингер Эрвин 160, 163, 165, 171, 173, 175, 176
Штейн К. 196, 199, 293
Штейнгауз Гуго Дионисий 22, 43, 140, 182, 191, 192, 194, 198, 201, 206, 207, 212, 240, 331, 332
Шухарт 206

Щеклик Эдвард 208

Эберман Людвиг 270, 338, 339
Эверс Ганс Гейнц 259
Эгервари Э. 170, 171, 183
Эдисон Томас Альва 301, 302
Эйлер Леонард 52
Эйнштейн Альберт 33, 64, 151, 160, 190, 261–263, 282
Энрикес Федерико 316
Эренфейхт Анджей 141
Эренфест Пауль 160
Эрмит Шарль 61
Эссен Маттс Р. 186

Якоби Карл Густав Якоб 307
Янишевский Зигмунд 143, 146, 266, 267, 313–317, 321, 332
Янцен Казимеж 333

От польского издательства

Согласно желанию проф. Штейнгауза, которое он выражал еще при своей жизни, издательство решило не вносить каких-либо изменений в пределах текстов. Ибо Гуго Штейнгауз сопроводил свои работы оговоркой *versio ultima* (окончательная версия) и не позволял — даже ценой отзыва из печати — вносить в них никаких изменений или поправок, в особенности в отношении грамматических правил.

Опубликованные в разных местах и в разное время работы Штейнгауза подготавливались к печати редакциями отдельных периодических изданий с разной степенью тщательности, хотя их окончательная языковая форма соответствовала условиям, определенным желанием автора. Сноски, которыми раньше были снабжены эти тексты и которые помещены в настоящем сборнике, сделаны Штейнгаузом и редакциями периодических изданий. В данном издании все они оставлены, а в некоторых дополнительно учтено влияние времени и правил, руководящих научной жизнью в послевоенной Польше. Издательство решилось только исправить очевидные ошибки, возникшие по причине неточности предыдущих изданий.

Содержание

Предисловие. *Абрамов А. М.* 5
Гуго Штейнгауз. Автобиография. *Перевод Ю. А. Данилова* 9
Математика вчера и сегодня 23
Что такое математика и на чем основан ее прогресс? 43
О математической строгости 61
Индуктивное умозаключение 76
Беседа (немного историческая) 105
О треугольниках 113
Об играх (в свободном изложении) 122
Пути прикладной математики 142
Проблема необратимости 160
Теория вероятностей как инструмент исследования
в естествознании и производстве 177
Выступление в дискуссии на конференции
«Статистика как метод познания» 216
Статистическое оценивание как метод приемки товаров
массового призводства 221
Об установлении отцовства 240
Взаимодействие наук на примере роли математики
во вроцлавской научной среде 258
Немного о кибернетике 285
Памяти Леона Лихтенштейна 305
Памяти Зигмунда Янишевского 313
Стефан Банах. Выступление на торжественном заседании,
посвященном памяти Стефана Банаха 319
Речь, произнесенная при присвоении степени почетного доктора
Варшавского университета (28 апреля 1958 г.) 331
Речь, произнесенная при присвоении степени почетного доктора
Университета им. Адама Мицкевича (16 ноября 1963 г.) 334
Перечень источников 344
Именной указатель 345
От польского издательства 350

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для операционных систем Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Научное электронное издание

Штейнгауз Гуго Дионисий

МАТЕМАТИКА – ПОСРЕДНИК МЕЖДУ ДУХОМ И МАТЕРИЕЙ

Подписано к использованию 07.10.14.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Гуго Дионисий Штейнгауз (1887–1972) — крупный математик, один из родоначальников замечательной польской математической школы, выпускник Геттингенского университета в легендарные времена Ф. Клейна и Д. Гильберта.

Написание фрагментов истории математики в Польше было одной из задач автора. Другая задача — популярное изложение тем, входящих в сферу его научных интересов. Но главная роль иная: это глубокие методологические и философские размышления о природе математики и, в первую очередь, о соотношении математики и действительности, о взаимодействии математики и других наук, математики и производства. Редкий математический дар, наблюдательность и остроумие, громадный опыт и неизменный интерес к так называемой «прикладной математике» позволили Г. Штейнгаузу всегда оставаться в поле конкретных задач, не впадая в чрезмерно абстрактную общность рассуждений.

Погрузившись в чтение, читатель несомненно получит редкое удовольствие от ярких идей, соображений, образов. Удовольствие от заочного общения с мудрым человеком, человеком большой внутренней свободы — замечательным математиком, педагогом, популяризатором Гуго Штейнгаузом.

Член-корреспондент РАО,
Александр Абрамов