Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Учебник

Под общей редакцией доктора экономических наук, профессора К. В. Балдина

3-е издание

Москва
2011

УДК 517
ББК 22.16
М34

Авторы:
К. В. Балдин — доктор экономических наук, профессор — введение, гл. 1, 2, 10;
В. Н. Башлыков — доцент — гл. 12, 13, приложение;
В. В. Мартынов — кандидат технических наук, доцент — гл. 8, 9, 11;
А. В. Рукосуев — доцент — гл. 3, 4, 5, 6, 7.

Рецензенты:
В. А. Лукинов — доктор экономических наук, профессор;
В. А. Зотов — доктор физико-математических наук, профессор

М34 **Математика для гуманитариев:** Учебник / Под общ. ред. д. э. н., проф., К. В. Балдина. — 3-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2011. — 512 с.

ISBN 978-5-394-01115-3

Настоящий учебник написан на базе лекционных курсов, которые авторы читали в ряде вузов столицы. В нем рассмотрены практически все аспекты дисциплины “Математика” Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и программы по специальностям “Психология”, “Лингвистика и межкультурные коммуникации”, “Юриспруденция”, “Философия” и “Менеджмент”.

Учебник содержит два основных раздела “Основы дискретной и высшей математики” и “Теория вероятностей и математическая статистика”. В учебник включены прикладные наработки авторов по математике, теории вероятностей и математической статистике, примеры использования классических методов и заданий для самостоятельной работы обучаемых.

Для студентов гуманитарных специальностей, аспирантов, преподавателей, а также научных сотрудников, предпринимателей, менеджеров и руководителей фирм.

Учебник подготовлен при государственной поддержке ведущих научных школ. Грант № НШ 1907.2006.10.

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-5-394-01115-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел II
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Введение

Название “математика” происходит от греческого слова “матема” (μα θη μα) — знание, наука. Математика относится к числу наиболее старых наук. В Вавилоне и Египте во втором тысячелетии до нашей эры были известны многие сведения из арифметики и геометрии.

Академик А. Н. Колмогоров выделил четыре основных периода развития математики:

1. Период зарождения математики, который продолжался до VI–V вв. до н. э. Были известны разрозненные факты и формулы, которые использовались для решения сугубо практических задач: составление календарей, обмер земельных участков и т. д.
2. Период элементарной математики с VI–V в. до н. э. до XVI в. н. э. Были заложены начала дедуктивного, аксиоматического методов. Развитие дедуктивной теории связано с именем Аристотеля, а первое систематизированное изложение геометрии было сделано Евклидом. Начала современной алгебры было положены в трудах итальянского ученого эпохи Возрождения Леонардо Пизанского (Фибоначчи).
3. Период создания математики переменных величин включает период с XVII в. по середину XIX в., который характеризуется созданием аналитической геометрии Р. Декартом, дифференциального и интегрального исчислений И. Ньютона и Г. Лейбница, а также современной алгебраической символики француза Виета.
4. Современный период развития математики с середины XIX в. по наше время. Была создана теория действительных чисел, которая позволила строго выстроить математический анализ. В конце XIX столетия в работах Г. Кантора появилась теория множеств. В XIX и XX вв. были заложены ос-

новы математической логики. В XX в. под влиянием успехов абстрактной алгебры появилось понимание математической структуры. Построению и исследованию математических структур были посвящены работы группы французских математиков, которые писали под псевдонимом Н. Бурбаки. Бурно развивались в XX в. теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных функций. Здесь велик вклад российских и советских математиков П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. Н. Колмогорова, Е. С. Вентцель.

В середине XIX в. Ф. Энгельс в своей работе "Анти — Дюринг" дал определение предмета математики. По Ф.Энгельсу, "чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира". [30]. Это определение отражает развитие математики от ее зарождения до середины XIX в.

Второе определение предмета математики было дано Н. Бурбаки в первой половине XX в. Оно было обусловлено современным периодом развития математики и новым подходом к аксиоматическому методу.

По Н. Бурбаки, математика — "скопление математических структур, не имеющих к действительности никакого отношения" [8].

Н. Бурбаки выделяет три основных типа структур: алгебраические, порядка, топологические. Многие ученые считали, что определение Ф. Энгельса устарело. Но подход Н. Бурбаки встретил и негативное отношение, так как они не выяснили отношения рассматриваемых ими структур к действительному миру. Определение Ф. Энгельса не надо отбрасывать, его надо дополнить. Современное определение можно сформулировать, например, так [18]: *математика — наука, которая исследует пространственные формы, количественные отношения, аксиоматические структуры и вопросы доказательства путем построения абстрактных моделей действительного мира.*

Математика проникла практически во все сферы человеческой деятельности. Это объясняется, во-первых, тем, что она способна создавать модели изучаемых явлений[1], а во-вторых — используется для обработки цифровых данных (как средство расчета).

В настоящее время различные численные и аналитические методы используются не только в естественных, но и в гуманитарных науках, например в социологии, лингвистике, юриспруденции, экономике.

С одной стороны, с помощью математических методов можно более глубоко анализировать сложные экономические явления и процессы, а с другой — проблемы экономики стимулирует разработку новых математических теорий. Например, необходимость решения задач экономического планирования привела к разработке теории линейного программирования в 30-х гг. XX в. [19].

Можно сделать вывод о том, что глубокое изучение экономических процессов и управление ими невозможны без знания современного математического аппарата. Математическая подготовка современного специалиста в области экономики имеет свои специфические особенности, связанные со сложностью проведения финансово-экономических операций и принятия рациональных управленческих решений по ним.

Как наука математика имеет определенное математическое мировоззрение, однако для специалистов в области экономики, менеджмента, психологии и юриспруденции математика является прежде всего мощным инструментарием при проведении необходимых расчетов и исследований, а также фундаментом, на котором строится современное здание высшего профессионального образования.

Материал учебника представлен в виде двух разделов и предназначен для студентов 1-го и 2-го курсов гуманитарных специальностей вузов.

---

[1] Математической моделью изучаемого явления называется логическая конструкция, которая отражает геометрические формы этого явления и количественные соотношения между его числовыми параметрами.

Первый раздел "Основы дискретной и высшей математики" состоит из семи глав. В первой главе "Основы дискретной математики" представлены основы теории множеств, введены элементы комбинаторики и основы теории графов. Вторая глава "Элементы линейной и векторной алгебры" посвящена матрицам, векторам, определителям и их свойствам, а также действиям над ними. Приведены методы решения систем линейных алгебраических уравнений. В третьей главе "Функции и пределы" дано определение функции, способы ее задания и основные свойства, а также числовой последовательности и предела. Рассмотрены признаки существования предела, первый и второй замечательные пределы, дано понятие комплексных чисел. В четвертой главе "Основы дифференциального исчисления" кратко рассмотрены такие фундаментальные понятия, как производная, дифференциал, их геометрический смысл, даны понятия функции многих переменных и частных производных, а также приведены некоторые сведения о приложениях дифференциального исчисления (формула Тейлора, правило Лопиталя, исследование функции с помощью производной). В пятой главе "Элементы интегрального исчисления" раскрыто содержание интегрального исчисления, приведены определения и свойства неопределенного, определенного, несобственного и кратного интегралов, а также способы их вычисления. Рассматриваются приложения интегрального исчисления. Шестая глава "Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях" написана на основе материала, изложенного в предыдущих главах. В ней представлены обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка с постоянными коэффициентами, а также методы их решения. Особое место занимает решение линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Дано также понятие решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Седьмая глава "Ряды" посвящена исследованию числовых, функциональных и степенных рядов.

Второй раздел "Теория вероятностей и математическая статистика" включает в свой состав шесть глав. Восьмая глава “Случайные события” раскрывает понятия аппарата теории вероятностей, способы нахождения вероятности случайных событий, правила действия с вероятностями и основные теоремы. В девятой главе “Случайные величины” представлена классификация случайных величин, законы распределения случайных величин (СВ) и формы их представления, а также числовые характеристики и распределения СВ и случайного вектора. По объему десятая глава “Функции случайных аргументов” является небольшой и посвящена теоремам и определению числовых характеристик функций случайных аргументов. Прикладное значение имеет содержание одиннадцатой главы “Статистические методы оценивания характеристик продукции”, в которой раскрыта сущность выборочного метода оценивания и основных предельных теорем теории вероятностей (теоремы Чебышева, Бернулли и Ляпунова). Оценивание законов распределения случайных величин, точечное и интервальное оценивание числовых характеристик случайных величин составляют содержание двенадцатой главы “Методы статистической обработки результатов испытаний”. Тринадцатая глава “Статистическая проверка гипотез” раскрывает сущность классического метода и метода последовательного анализа Вальда, а также их соотношение. Заканчивается каждая глава задачами для самостоятельного решения и вопросами для самопроверки.

Представленный курс математики охватывает большинство разделов, изучаемых студентами гуманитарных специальностей вузов. При написании книги авторы придерживались современных точек зрения на понятия, о которых идет речь, и не отступали от общепринятых взглядов. Авторы стремились изложить материал в доступной для студентов форме. При этом материал по дискретной математике, в частности по теории графов, теории вероятностей и математической статистике, будет полезен студентам, изучающим психологию, менеджмент и юриспруденцию. Однако авторы издания не претендуют на исчерпывающую широту охвата учебного материала из-за ограничений на объем книги.

Раздел I
ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1. Понятие множества

Понятие множества не определяется через другие понятия математики, т. е. оно является первичным. Появилось оно в конце XIX в. в работах Г. Кантора (о сравнении мощностей множеств) [5, 8]. Г. Кантор определил множество как "объединение в одно целое объектов хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью". Разумеется, это определение не может рассматриваться как строгое математическое, его, впрочем, не существует, так как понятие множества является исходным, на его основе строятся остальные понятия математики.

Множество состоит из каких-то объектов. Например, существует множество натуральных чисел (N), множество всех звезд нашей Галактики, множество всех жителей Российской Федерации и т. д. Объекты, входящие в данное конкретное множество являются его элементами. Различают конечные (состоящие из конечного числа элементов) и бесконечные множества.

Множества будем обозначать заглавными буквами A, B, C,..., X, Y, Z, а их элементы — малыми буквами a, b, c, ..., x, y, z. Тот факт, что элемент x принадлежит множеству X обозначают так: $x \in X$, а не принадлежит — $x \notin X$.

Если все элементы множества X являются также элементами множества Y, то множество X есть подмножество множества Y. Это записывается следующим образом $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Множество всех подмножеств множества Y называется степенью этого множества и обозначается 2^y или $P(Y)$.

Множество X и Y являются равными (состоят из одних и тех же элементов) $X = Y$, если $X \subset Y$ или $Y \supset X$. Может использоваться следующая запись $X \subseteq Y$, т. е. либо $X = Y$, либо $X \subset Y$ (является собственным подмножеством множества Y).

Вводится понятия пустого множества ($\varnothing$), которое не содержит не одного элемента. Например, множество решений уравнения $x^2 + 4 = 0$ есть пустое множество.

Способы задания множеств [5, 8]

а) Словесное описание.

Например, множество X есть множество всех прямых, проходящих через точку A плоскости α.

б) Перечисление элементов, входящих в множество.

Например, $X = \{-7, 0, 12, 123, 700\}$. Элементы в приведенном списке могут располагаться в любом порядке и должны быть различны, т. е. множества $X = \{5, 5, 7\}$ и $Y = \{5, 7\}$ равны между собой. Если во множестве есть совпадающие элементы, то его называют семейством $Z = (5, 9, 9, 12, 12, 23)$ и заключают в круглые скобки.

в) Описание свойств элементов, входящих в множество.

$X = \{x \mid [(x - 3)(x - 5)] > 0\}$, т. е. элементами множества X будут только те числа, которые удовлетворяют неравенству $(x - 3)(x - 5) > 0$.

Если обозначить через $Q(x)$ свойства элементов, входящих во множество X, то для задания этого множества в общем случае можно использовать следующую запись $X = \{x \mid Q(x)\}$, т. е. множество X состоит из тех элементов x, которые удовлетворяют свойству $Q(x)$. Множество, которое содержит все рассматриваемые в некоторой задаче множества, называется универсальным и обозначается U.

Например, в качестве U можно взять множество N (заметим, что в некоторых монографиях оно начинается не с единицы, а с нуля).

$$Z = \{z \in N \mid z < 6\}, \text{ т. е. } Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Для сокращения записи в математике используют кванторы всеобщности, существования, существования и единственности [17]:

$\forall$ — квантор всеобщности (перевернутая первая буква английского слова *All*);

$\exists$ — квантор существования (перевернутая первая буква английского слова *Exists*);

$\exists!$ — квантор существования и единственности.

Например, запись $(\forall x \in X)\ P(x)$ означает: для всех x из множества X справедливо $P(x)$; запись $(\exists y \in Y)\ R(y)$ — существует y из множества Y такое, что справедливо $R(y)$; запись $(\exists! z \in Z)\ M(z)$ — существует единственное z из множества Z такое, что справедливо $M(z)$.

Операции над множествами [5,26]

Пусть задано универсальное множество U. Множество всех его подмножеств есть 2^U. Заданы также множества X и Y, причем $X \in 2^U$ и $У \in 2^U$.

Дополнением множества X называется множество X' элементов множества U, которые не принадлежат X:

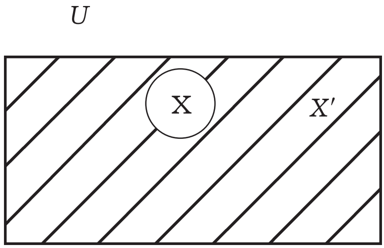
$$X' = \{x \in U \mid x \notin X\}.$$

Графически операции над множествами (рис. 1.1) можно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна):

Пересечение $(X \cap Y)$ двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих обоим этим множествам (рис. 1.2):

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$$

Объединение $(X \cup Y)$ двух множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и $У$ (рис. 1.3):



U — изображается прямоугольником;
X — круг;
X' — заштрихованная область прямоугольника.

Рис. 1.1

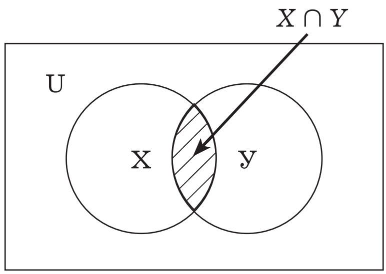


Рис. 1.2

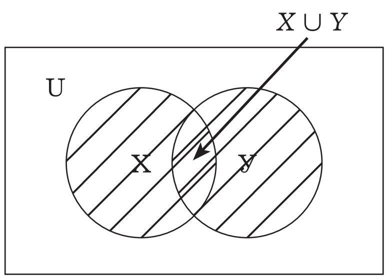


Рис. 1.3

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$$

Разность ($X \backslash Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих X, но не принадлежащих Y (рис. 1.4):

$$X \backslash Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}$$

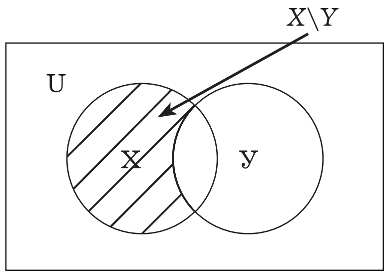


Рис. 1.4

Аналогично определяется разность ($Y \backslash X$) множеств Y и X (рис. 1.5):

$$Y \backslash X = \{y \mid y \in Y \text{ и } y \notin X\}$$

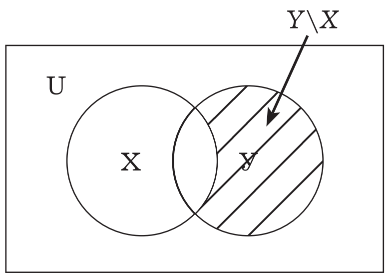


Рис. 1.5

Симметрическая разность ($X\Delta У$) множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств X и Y (рис. 1.6):

$$X\Delta Y=(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)=(X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$$

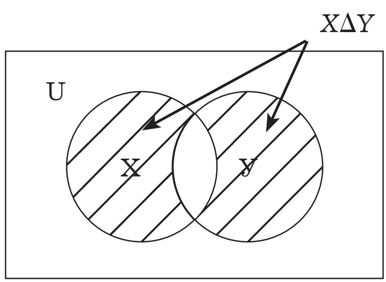


Рис. 1.6

Теперь рассмотрим конкретный числовой

Пример.

Дано множество: $X = \{-5, 0, 3, 17, 28, 33, 100\}$.

$Y = \{-7, 0, 5, 17, 33, 108\}$.

$X \cap Y = \{0, 17, 33\}$.

$X \cup Y = \{-7, -5, 0, 3, 5, 17, 28, 33, 100, 108\}$.

$X \backslash Y = \{-5, 3, 28, 100\}$.

$Y \backslash X = \{-7, 5, 108\}$.

$X \Delta Y = \{-7, -5, 3, 5, 28, 100, 108\}$.

Мощность множеств

Число элементов в конечном множестве X называют его мощностью и обозначают $|X|$ или $\#X$.

Например, $X = \{5, 12, 23, 111\}$, $|X| = 4$.

Если известны мощности множеств X и Y, то можно найти мощность их объединения по формуле:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

В общем случае имеем [5]:

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| =$$
$$= \sum_i |X_i| - \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| + \sum_{i<j<k} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots$$

Для подсчета элементов в конечных множествах можно использовать комбинаторику.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.

Взаимная однозначность показывает, что каждому элементу первого множества соответствует один элемент второго и наоборот.

Рассмотрим пример осуществления этого принципа.

Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 60 или мощности 40.

Используем понятие числа сочетаний из n элементов по k (они отличаются только составом элементов) (более подробно в п. 1.2). Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (читается n факториал).

В нашем случае имеем:

$$C_{100}^{60} = \frac{100!}{60!40!}; \quad C_{100}^{40} = \frac{100!}{40!60!}$$

Поэтому у 100-элементного множества одинаковое количество подмножеств мощности 60 и 40 элементов.

Два множества называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое количество элементов.

Но это определение годится и для бесконечных множеств. Например, отрезки [0,1] и [0,10] равномощны, так как отображение $x \to 10x$ дает нужное соответствие. [5,8].

Можно также доказать, что интервал (0,1) и луч (0, $+\infty$) равномощны. Искомое взаимно однозначное соответствие имеет вид $x \to \frac{1}{x} - 1$. [5].

Так же доказывается, что множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Тот факт, что множество X равномощно (эквивалентно) множеству Y записывается так: $X \sim Y$ ($|X| = |Y|$).

Множество называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел (N).

Например, множество целых чисел (Z) равномощно N, т. е. $Z \sim N$.

Доказывается (см. [5]):

1) подмножество счетного множества конечно или счетно;

2) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

3) объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

Множество действительных чисел (R) или множество бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. Мощность множества R больше мощности любого счетного множества и называется мощностью континуума.

Приведем без доказательства теорему Кантора—Бернштейна.

Если множество X равномощно какому-то подмножеству множества Y, а множество Y равномощно какому-то подмножеству множества X, то множества X и Y равномощны.

Дадим также общую формулировку теоремы Кантора.

Никакое множество Z не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Наглядные представления о множествах могут приводить к противоречиям.

Приведем, например, парадокс Рассела [5].

Типичные множества не являются своими элементами. Например, множество целых чисел (Z) само не является целым числом и не будет своим элементом. Но в принципе можно представить себе множество, которое является своим элементом, например, множество всех множеств (U). Такие множества назовем "необычными". Теперь рассмотрим множество всех обычных множеств. Если оно обычное, то является своим элементом и, следовательно, оно — необычное, и наоборот.

В принципе понятие "множество" не является непосредственно очевидным: разные люди (научные школы) могут понимать его по-разному.

Функции, прямые произведения, отношения

Сначала дадим традиционное определение функции [18].

Даны два множества X и Y. Функцией, которая определена на множестве X и принимает значение на множестве Y, называется закон (f), по которому каждому элементу x из множества X ($x \in X$) ставится в соответствие один элемент y из множества Y ($y \in Y$). Обычно это записывают в виде $y = f(x)$. Множество X есть область определения функции f, а множество $E = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X\; y = f(x)\} \subseteq Y$ — множеством значений функции f. Функцию f, определенную на множестве X и принимающую значения на множестве Y, обозначают так $f : X \to Y$.

Элемент $x \in X$ называется независимой переменной (аргументом), элемент $f(x)$ называется значением функции на элементе x.

Пусть задана однозначная функция f, т. е. различным значениям ее аргументов соответствуют различные значения функции $(\forall x_1 \in X)\ (\forall x_2 \in X)\ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$. Знак "$\Leftrightarrow$" означает эквивалентность, например $A \Leftrightarrow B$ значит, что A эквивалентно B. (A тогда и только тогда, когда B).

Тогда $\forall y \in E$ может быть поставлен в соответствие единственный элемент $x \in X$, такой что $y = f(x)$ и который обозначается $x = f^{-1}(y)$. Это значит, что на множестве E определена функция f^{-1}, которая принимает значения на множестве X и называется обратной к функции f. Если задана функция f^{-1}: $E \to X$ и $Y = E$, т. е. когда множество значений функции f совпадает со всем множеством Y, функцию f называют взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y.

Теперь сформулируем определение прямого или декартова произведения.

Прямым произведением множеств X_1, X_2, X_3, ..., X_n, $n \geq 2$ называется множество различных упорядоченных наборов (n-мерных векторов) $(x_1, x_2, x_{3,} ..., x_n)$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$ ..., $x_n \in X_n$, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, \forall i = \overline{1,n}\}$.

Заметим, что $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \neq X_n \times \ldots \times X_2 \times X_1$.

В том случае, если $X_i = X\ \forall i = \overline{1,n}$, то $X \times X \times \ldots \times X \equiv X^n$ ("$\equiv$" — тождественно равно) и называется n-й степенью множества X. [14,18].

В частном случае, если имеется два множества X и Y, их прямым произведением будет множество различных упорядоченных наборов (двумерных векторов) (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$, обозначаемые $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Например, имеем два множества $X=\{5, 6\}$, $Y=\{\ln 3, \ln 7\}$.

$X \times Y = \{(5, \ln 3), (5, \ln 7), (6, \ln 3), (6, \ln 7)\}$.

$Y \times X = \{(\ln 3, 5), (\ln 7, 5), (\ln 3, 6), (\ln 7, 6)\}$.

т. е. $X \times Y \neq Y \times X$.

Теперь дадим определение отношения. Даны множества $X_1, X_2, ..., X_n$, $n \geq 1$; n-местным отношением между элементами множеств $X_1, X_2, ..., X_n$ называется любое подмножество ρ прямого произведения этих множеств, т. е. $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times, ..., \times X_n$. Если $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \rho$ говорят, что элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ связаны отношением ρ.

Если $X_i = X \; \forall i = \overline{1, n}$, $\rho \subseteq X^n$, говорят, что ρ есть n-местное отношение на множестве X. [14, 18].

Для одноместных, двухместных и трехместных отношений часто используют специальные названия: унарные, бинарные, тернарные соответственно, т. е.

$n = 1$ — бинарное отношение $\rho \subseteq X_1$;

$n = 2$ — бинарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2$;

$n = 3$ — тернарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$.

Если отношение совпадает с прямым произведением, оно называется полным, т. е. $\rho = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Рассмотрим конкретные примеры отношений.

Пример 1.1

$X = \{1, 2, 7, 23, 35, 56\}$, $\rho = \{x \mid x \in X$ и $x < 23\}$, $\rho = \{1, 2, 7\}$, т. е. при $n = 1$ отношение ρ есть подмножество множества X.

Пример 1.2

$X_1 = \{0, 1, 2\}$; $X_2 = \{5, 6, 7\}$;

$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_2 < 6\}$; $\rho = \{(0, 5), (1, 5), (2, 5)\}$.

Особый интерес представляют бинарные отношения, которые мы рассмотрим более подробно.

Если ρ есть отношение между элементами множеств X и Y, т. е. $\rho \subseteq X \times Y$, можно использовать запись $x \, \rho \, y$, т. е. x связано с y соотношением ρ.

Обратным к отношению $\rho \subseteq X \times Y$ называется отношение

$$\rho^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in \rho\} \subseteq Y \times X.$$

Геометрически понятие бинарного отношения показано на рис. 1.7.

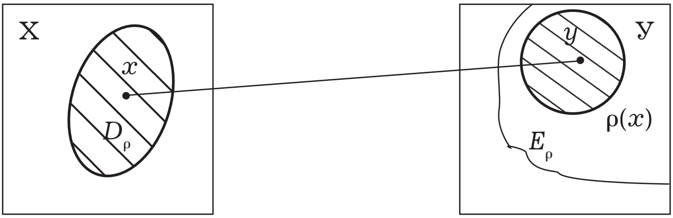


Рис 1.7

$D_\rho = \{x \mid x \in X, (xy) \in \rho\}$ — множество определения отношения $\rho \subset X \times Y$

$E_\rho = \{y \mid y \in Y, (xy) \in \rho\}$ — множество значений отношений $\rho \subset X \times Y$.

Заметим, что для $\rho^{-1} \subset Y \times X$ D_ρ и E_ρ поменяются местами. Точка x — элемент множества D_ρ, а множество $\rho(x)$ есть ρ-образ элемента x, а точка y является некоторым элементом из $\rho(x)$.

Отсюда видно, что бинарное отношение является многозначной функцией [18].

Заметим, что прямое произведение множества действительных чисел (R) само на себя $R \times R = R^2$ представляет собой систему координат на плоскости $x0y$.

Отношение $\rho \subseteq X \times Y \subseteq R^2$ является графиком отношения ρ.

Теперь рассмотрим конкретный пример бинарного отношения.

Пример 1.3 [14].

Дано множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Найдем отношение ρ, если оно задано так:

$$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1\ x_2 \in X_2\ x_1 \text{ — делитель } x_2,\ x_1 \leq 5\}.$$

Отношение ρ имеет вид.

$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)\}$.

Теперь найдем множество определения и множество значений отношения ρ:

$$D_\rho = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E_\rho = X.$$

Представим полученное отношение ρ в графическом виде. Для этого зададим систему координат. Осью абсцисс будет D_ρ, а осью ординат E_ρ. По этим осям отложим элементы исходного множества X, затем соответствующие пары (x_1x_2) отметим точками и получим графическое изображение нашего отношения (рис. 1.8).

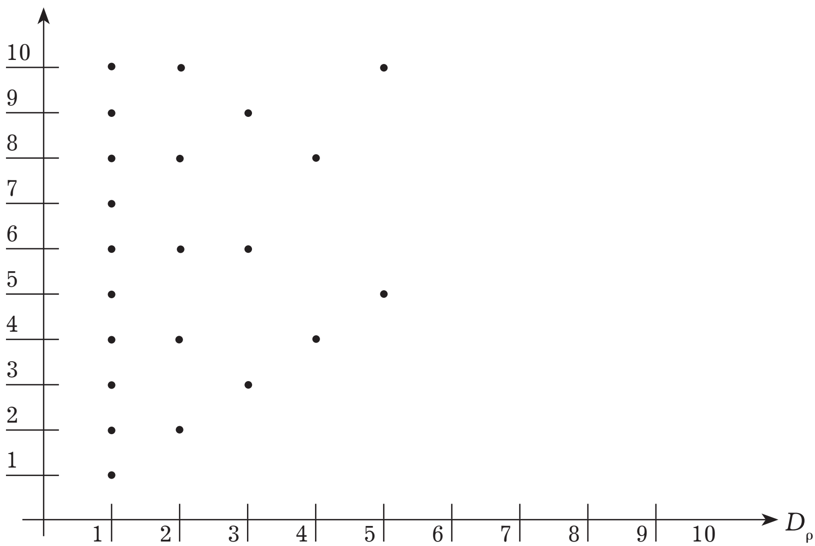


Рис. 1.8

Бинарные отношения можно представить в виде графа (множества вершин и множества ребер, см. раздел “Основы теории графов”).

Вершинами будут элементы исходного множества X, а ребрами пары (x_1x_2). В данном случае важен порядок следования элементов, поэтому ребра будут ориентированными (обозначим их стрелками). В результате получим следующий граф (рис. 1.9).

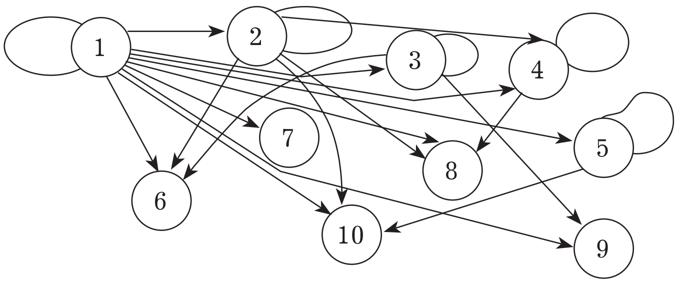


Рис. 1.9

В случае $x_1 = x_2$ получим петлю.

Наконец бинарное отношение можно представить в виде матрицы, т. е. прямоугольной таблицы размера $n \times m$, где n — количество строк, а m — количество столбцов. Например, если имеем два множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ и бинарное отношение на элементах этих множеств $\rho \subseteq X{\times}Y = = \{(xy) \mid x{\in}X, y{\in}Y\}$, то этому отношению соответствует матрица размера $n{\times}m$, состоящая из нулей и единиц. Единицами обозначаются пары (xy), входящие в отношение ρ. (Более подробно о матрицах см. в главе 2 “Элементы линейной и векторной алгебры”.)

В данном примере имеем отношение $\rho \subseteq X^2$, т. е. ему соответствует матрица размера $10{\times}10$, число строк и столбцов которой равно числу элементов в множестве X (рис. 1.10).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1.10

В заключение рассмотрим функцию как отношение.

Отношение f между элементами множеств X и Y называется функцией, определенной на множестве X и принимающей значение на множестве Y, если

$$\forall x \in X\ \exists!\ y \in X \,\big|\, (x,y) \in f. \tag{1.1}$$

В этом случае пишут $f\colon X \to У$, а вместо $(x,y) \in f$ обычно пишется $y = f(x)$; y называют значением функции f на элементе x, так как для функциональных отношений в силу (1.1) f-образная одноэлементного множества $\{x\}$ будет одноэлементное множество $\{f(x)\}$.

Заметим, что (1.1) эквивалентно выполнению двух условий:

$$f^{-1}(У) = X; \tag{1.2}$$

$$y_1 = f(x) \text{ и } y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2. \tag{1.3}$$

Иногда отношения называют функцией, если выполнено только условие (1.3), а если выполнено и условие (1.2), то *отображением.*

Часто слова функция и отображения используют как синонимы [18].

1.2. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика — часть математики, которая посвящена решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами, т. е. комбинаторика решает задачи выбора элементов из конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке. [7, 8, 27].

Приведем правила сложения и умножения, которые применяются в комбинаторике. [7].

Правило сложения. Если выбор каждого из объектов A_i $(i = \overline{1,k})$ можно сделать n_i способами, то выбор или A_1 или A_2, ..., или A_k можно произвести $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Правило умножения. Если выбор каждого из k объектов B_i $(i = \overline{1,k})$ можно сделать m_i способами, то выбор и B_1, и B_2, ..., и B_k можно осуществить $N = \prod_{i=1}^{k} m_i$ способами.

Приведем конкретные примеры применения этих правил.

Пример 1.4. Из Москвы в Санкт-Петербург можно добраться самолетом, поездом, автобусом. Есть пять автобусных маршрутов, два авиамаршрута, один железнодорожный. Поэтому общее число маршрутов между Москвой и Санкт-Петербургом равно: $n = 5 + 2 + 1 = 8$

Пример 1.5. Из пункта A в пункт B можно доехать по 5 дорогам, из B в C — по трем дорогам, а из C в D — по четырем дорогам (рис. 1.11). Сколькими способами можно проехать из A в D через B и C?

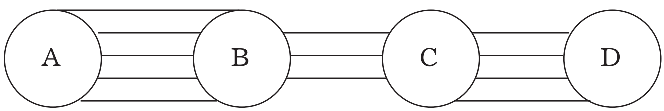


Рис. 1.11

По правилу произведения получаем $N = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

Размещения

Дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по m элементам $(0 \le m \le n)$ называется любое упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов исходного множества. Все эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения. [7, 8, 27].

Обозначим размещения из n элементов по m

$$A_n^m = n(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (читается n факториал).

Принимается, что $0! = 1$ и $A_0^0 = 1$.

Пример 1.6. В футбольной премьер-лиге РФ участвует 16 команд. Сколькими способами можно распределить три первых призовых места?

Так как в данном случае порядок команд имеет значение, то имеем дело с размещениями, т. е.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{1\times2\times3\times\ldots\times16}{1\times2\times3\times\ldots\times13} = 14\times15\times16 = 3360.$$

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т. е.

$$(A_n^m)_{\text{повт}} = n^m.$$

Пример 1.7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5,6,7,8. $(A_4^3)_{\text{повт}} = 4^3 = 64$ трехзначных числа.

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов [7, 8]. Так как каждая перестановка содержит все n элементов исходного множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов, т. е.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример 1.8. Расставить четыре книги на полки можно $P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ способами.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида, ..., n_i элементов i-го вида, то число перестановок с повторениями находится по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_i) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_i!}.$$

Пример 1.9. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр: 2, 2, 3, 3, 4, 4. В данном случае $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, т. е.

$$P_6(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}{1\times 2\times 1\times 2\times 1\times 2} = 90.$$

Сочетания

Дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов исходного множества. Различными подмножествами считаются только те, которые отличаются по составу элементов. [8, 27].

Обозначив число сочетаний через C_n^m получим

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.10. В бригаде 25 человек. Надо найти четырех человек для работы в ночную смену. Сколькими способами это можно сделать.

Так как порядок выбранных четырех рабочих не имеет значения, то имеем

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25\times 24\times 23\times 22}{1\times 2\times 3\times 4} = 12650.$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m находятся по формуле

$$\left(C_n^m\right)_{\text{повт}} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 1.11. Число различных бросаний трех одинаковых кубиков равно

$$(C_6^3)_{\text{повт}} = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = \underline{56}.$$

С числами C_n^m связано функциональное тождество, которое называется формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

При $a = 1$ имеем

$$(1+b)^n = C_n^0 + C_n^1 b + \ldots\ldots + C_n^m b^m + \ldots\ldots + C_n^n b^n.$$

Пример 1.12. Используя бином Ньютона найти $(1 + b)^7$.

$$(1+b)^7 = 1 + C_7^1 b + C_7^2 b^2 + C_7^3 b^3 + C_7^4 b^4 + C_7^5 b^5 + C_7^6 b^6 + C_7^7 b^7 =$$
$$= 1 + 7b + 21b^2 + 35b^3 + 35b^4 + 21b^5 + 7b^6 + b^7.$$

1.3. Основы теории графов

Впервые термин “граф” был употреблен венгерским математиком Д. Кенигом в 1936 г. Но начало теории графов было положено Л. Эйлером в 1736 г., когда он решил задачу о кенигсбергских мостах и нашел критерий существования в графе специального маршрута (эйлерова цикла). Но как математическая дисциплина теория графов сформировалась именно в первой трети XX в. Эта теория располагает аппаратом решения различных прикладных задач из разных областей науки и техники, например, сетевое планирование и управление [10, 21]. В настоящее время теория графов — один из наиболее быстро развивающихся разделов математики.

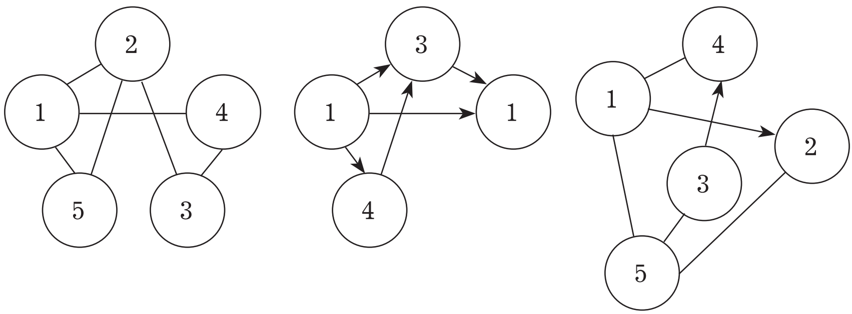
Предположим, что V — это непустое конечное множество, а $V^{(2)}$ — это множество всех его двухэлементных подмножеств. Множество E является произвольным подмножеством множества $V^{(2)}$, т. е. $E \subseteq V^{(2)}$.

Тогда графом (G) называется пара множеств (V, E), т. е. $G = (V, E)$, где VG — множество вершин графа, а EG — множество его ребер [10, 21, 25]. Любое ребро графа определяется парой его вершин. Если все пары вершин упорядоченные, то граф называется ориентированным (его ребра обозначают стрелками), в противном случае он — неориентированный. В том случае, если в графе есть ориентированные и неориентированные ребра, он называется смешанным. Ориентированный граф G можно задать как отношение, т. е. как подмножество прямого произведения множества его вершин V само на себя.

$$G \subseteq V \times V.$$

В этом случае множество всех двухэлементных подмножеств $V^{(2)}$ заменяется декартовым произведением $V \times V = V^{(2)}$ [10].

Графы обычно изображаются в виде рисунков, на которых вершины изображаются кружками (точками), а ребра отрезками (рис. 1.12).



а) неориентированный граф

б) ориентированный граф

в) смешанный граф

Рис. 1.12

Приведем конкретный пример.

Пример 1.13. Пусть задано множество V={1,2,3}. Тогда

$$V^{(2)} = \{(1,2), (1,3), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (3,1), (3,2)\}.$$

$$E = \{(1,2), (1,3), (3,2)\}.$$

Предположив, что порядок вершин имеет значение, получаем следующий ориентированный граф (рис. 1.13).

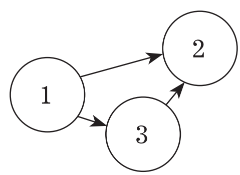


Рис. 1.13

Далее вершины графа будем обозначать буквами $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$, а ребра $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Вообще говоря, две вершины V_i и V_j определяют ребро e_k т. е. $e_k = (V_i, V_j)$ (рис. 1.14).

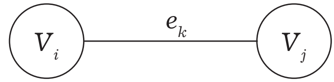


Рис. 1.14

И в этом случае они будут концевыми вершинами ребра e_k. Но концевые вершины ребра не обязательно различны, т. е. начальная и конечная вершины могут совпадать. В этом случае ребро становится петлей (рис. 1.15).

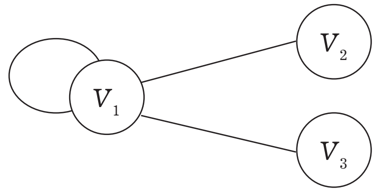


Рис. 1.15

Граф, имеющий петли, иногда называют псевдографом (рис. 1.16)

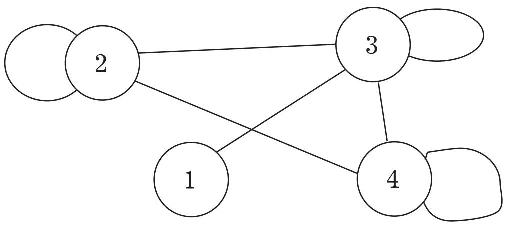


Рис. 1.16

Между двумя вершинами может проходить и несколько ребер (ориентированных и неориентированных), их называют параллельными. А граф, имеющий такие ребра, называют мультиграфом (см. рис. 1.17). Мультиграф — это пара (V, E), где V — множество вершин, а E — семейство подмножеств множества $V^{(2)}$. Употребление термина “семейство” говорит о том, что элементы множества $V^{(2)}$ могут повторяться (возможны параллельные ребра) [10].

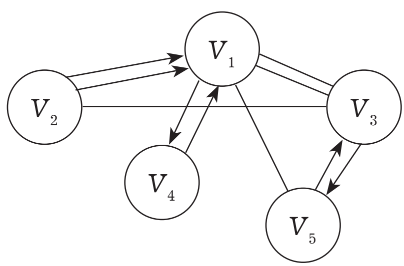


Рис. 1.17

Если граф не имеет петель и параллельных ребер его называют простым (см. рис. 1.13). Граф G называется графом порядка n, если он содержит n вершин. (На рис. 1.18 приведен граф восьмого порядка.) [21].

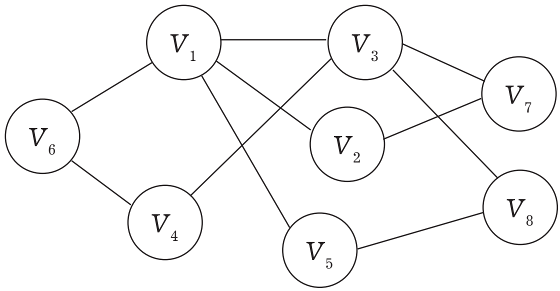


Рис. 1.18

Граф, который не имеет ребер (состоит только из вершин) называется пустым (рис. 1.19).

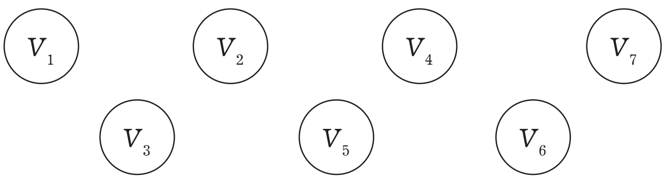


Рис. 1.19

Граф, не имеющий вершин, называется ноль-графом ($\varnothing$). Две вершины называются смежными, если они являются концевыми вершинами какого-то ребра (например, вершины V_1 и V_3; V_2 и V_7 на рис. 1.18).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, то они являются смежными (например, ребра e_1 и e_2; e_2 и e_4 на рис. 1.20).

Если имеют в виду разные элементы графа (вершины и ребра),

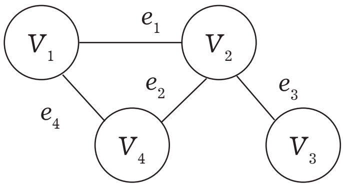


Рис. 1.20

то используют понятия инцидентности, т. е. ребро инцидентно своим концевым вершинам (например, ребро e_3 инцидентно вершинам V_2 и V_3).

Число инцидентных вершине ребер называется степенью (валентностью) этой вершины и обозначается $d(V_i)$. Например, степень вершины V_2 равна 3 ($d(V_2) = 3$) [10, 21, 27].

Вершина степени 1 называется висячей, вершина степени ноль — изолированной, а петля при вершине добавляет в степень этой вершины двойку.

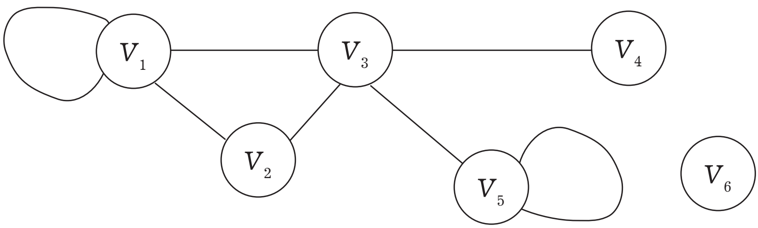


Рис. 1.21

Например, вершина V_4 на рис. 1.21 является висячей, а вершина V_6 — изолированной, а степень вершины V_1 равна 4 ($dV_1 =$ $= 4$, два ребра и петля).

Граф называют полным, если две любые его вершины смежные (см. рис. 1.13).

Приведем без доказательства две теоремы [10].

Теорема 1.1. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер. У графа на рис. 1.21 имеется 7 ребер, а сумма степени его вершин равна — 14.

Теорема 1.2. Число вершин нечетной степени в любом графе четно. Например, у графа, изображенного на рис. 1.21 таких вершин две (V_4 и V_5).

Может оказаться, что один и тот же граф изображается разными рисунками. Говорят, что два графа G_1 и G_2 изоморфны, если существует такое взаимнооднозначное соответствие между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов ицидентны соответствующим вершинам этих графов [25]. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

На рис. 1.22 приведен пример изоморфных графов [10].

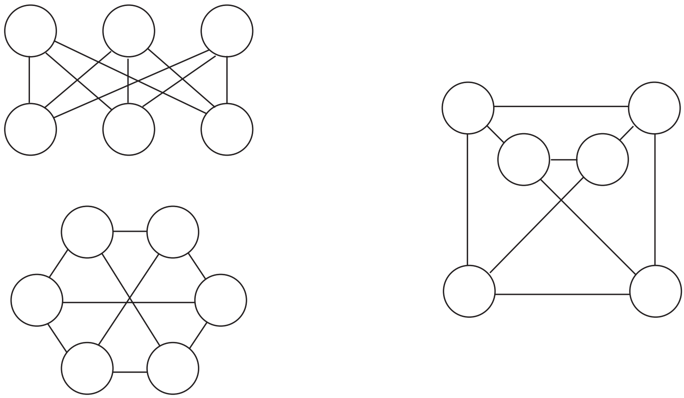


Рис. 1.22

В тех случаях, когда необходимо различать изоморфные графы помечают их вершины и (или) ребра (рис. 1.23).

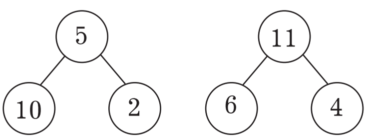


Рис. 1.23

Маршруты, цепи, пути, циклы [10, 21, 25].

Маршрут в графе — это конечная чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и оканчивающаяся на вершине, причем одинаковые вершины и ребра в маршруте могут повторяться. Например, маршрут $V_1e_1\,V_2e_5\,V_4e_6\,V_1e_8\,V_6e_7\,V_4$ на рис. 1.24.

Маршрут называют открытым, если его конечные вершины различны, в противном случае он является замкнутым, например маршрут $V_1e_1\,V_2e_5\,V_4e_6\,V_1e_8\,V_6e_7\,V_4e_6V_1$ на рис. 1.24.

Маршрут называют цепью, если все его ребра различны. Цепь является открытой, если ее конечные вершины различны, в противном случае она — замкнутая.

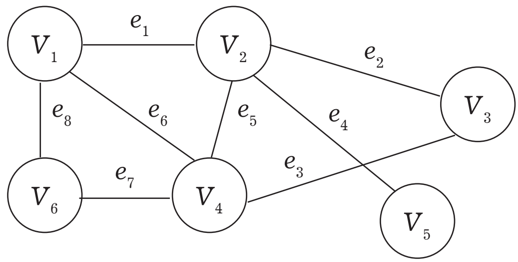


Рис. 1.24

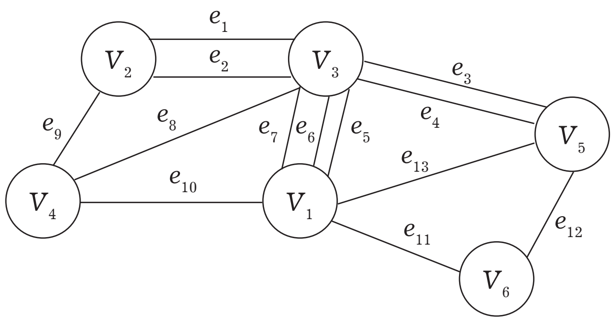


Рис. 1.25

На рис. 1.25 $V_2e_1\ V_3e_3\ V_5e_{13}\ V_1e_5\ V_3\ e_8V_4$ — открытая цепь, а $V_1e_{13}\ V_5e_3\ V_3e_2\ V_2e_1\ V_3e_7\ V_1$ — замкнутая цепь.

Открытую цепь называют путем, если все ее вершины различны, например $V_4e_8\ V_3e_6\ V_1e_{11}\ V_6$ на рис. 1.25.

Замкнутую цепь называют циклом, если все ее вершины за исключением концевых различны, например $V_3e_3\ V_5e_{13}\ V_1e_7\ V_3$ на рис. 1.25.

Две несовпадающие вершины V_i и V_j в графе G называется связными, если существует маршрут V_i - V_j.

Граф G называют связным, если две его любые несовпадающие вершины могут быть соединены маршрутом. Например, связными являются графы на рис. 1.24 и 1.25, а несвязным — граф, изображенный на рис. 1.26.

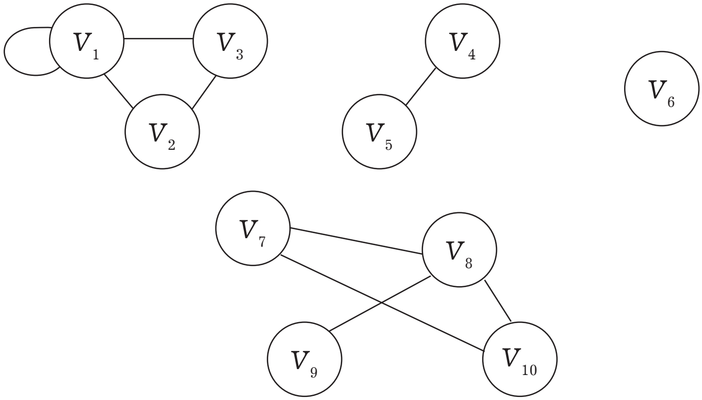


Рис. 1.26

Деревья и лес

Большую роль в различных отраслях науки имеют связные ациклические (не имеющие циклов) графы, которые на множестве V вершин имеют $E = (V - 1)$ ребер, т. е. $G = (V, (V - 1))$. Эти графы носят название деревьев [10, 21]. Заметим, что $(V - 1)$ — это минимальное количество ребер для того, чтобы граф был связным.

Примерами древовидной структуры являются генеалогический граф, схема вертикали управления любой организации, совокупность всех файлов, размещенных на диске ПЭВМ. Пример дерева приведен на рис. 1.27.

Несвязный граф, компонентами которого являются деревья, называется лесом (рис. 1.28).

Матрицы графов

1. Матрица инцидентности.

Рассмотрим простой граф G (без петель и параллельных ребер), имеющий n вершин и m ребер. Ему соответствует матрица инцидентности размера $n \times m$, т. е.

$$A_{\mathrm{I}} = [a_{ij}], \text{ где } i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m};$$

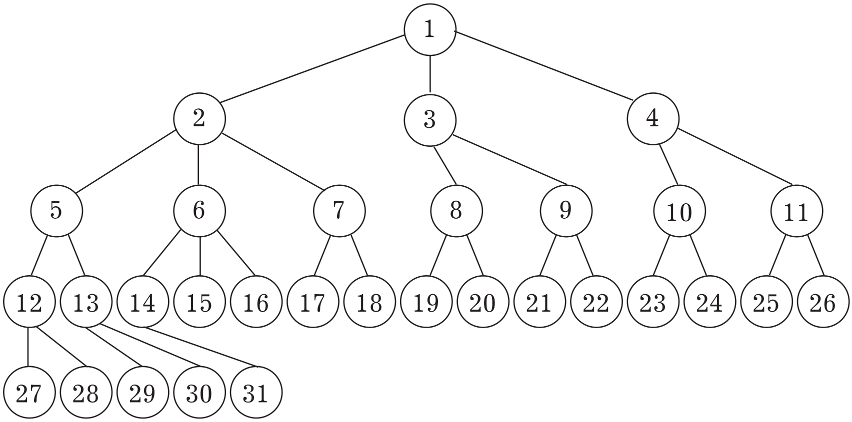


Рис. 1.27

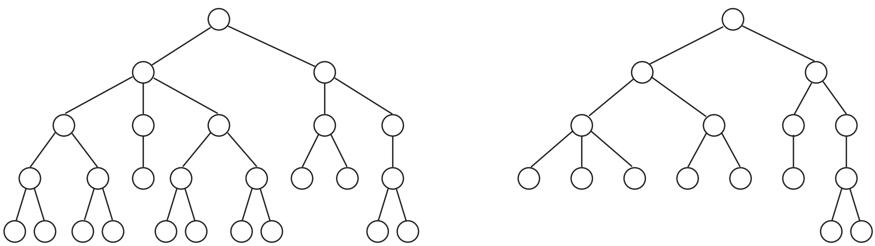


Рис. 1.28

Каждый элемент этой матрицы a_{ij} в случае ориентированного графа определяется следующим образом [10, 21].

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i \text{ и исходит из нее;} \\ -1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i \text{ и входит в нее;} \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ неинцидентно вершине } i. \end{cases}$$

В случае неориентированного графа имеем

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i; \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ неинцидентно вершине } i. \end{cases}$$

Рассмотрим конкретный пример. Имеем ориентированный граф, имеющий 5 вершин и 7 ребер. (рис. 1.29).

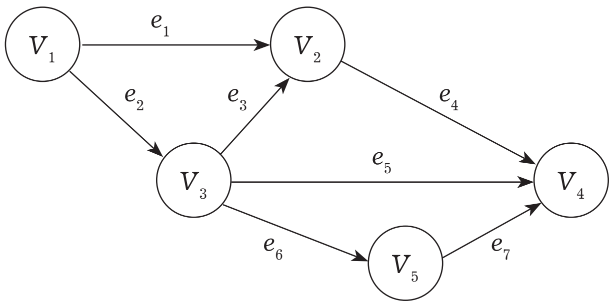


Рис. 1.29

Ему соответствует матрица инцидентности размера 5×7 следующего вида

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

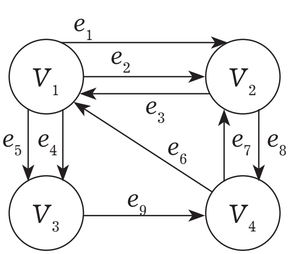


Рис. 1.30

В случае задания мультиграфа (имеет параллельные ребра) матрица инцидентности определяется по приведенным выше правилам. Например, найдем матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис. 1.30.

Искомая матрица имеет размер (4×9) и выглядит следующим образом

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица смежности.

Пусть задан псевдограф (имеет петли) содержащий n вершин и m ребер.

Матрицей смежности этого графа A_s называется матрица размера $n \times n$, т. е.

$$A_s = (a_{ij}),\ i = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,n}$$

Любой элемент этой матрицы a_{ij} в случае ориентированного графа определяется следующим образом [10].

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } (V_i V_j) \in e_k \text{ и ребро исходит из вершины } V_i; \\ 0, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае, если граф G неориентированный, то любой элемент его матрицы смежности определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } V_i \text{ и } V_j \text{ принадлежит ребру } e_k; \\ 0, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Матрица A_s в этом случае будет симметричной относительноглавнойдиагонали. Рассмотрим конкретный пример. Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис. 1.31.

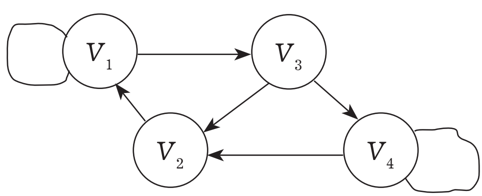


Рис. 1.31

Искомая матрица смежности имеет размер 4×4 и выглядит так:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В том случае, если граф кроме петель имеет параллельные ребра матрица A_s находится по следующим правилам [7].

Если задан ориентированный граф, то каждый элемент его матрицы смежности находится так:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum & \text{числа ребер, выходящих из вершины } V_i \text{ и входящих в вершину } V_j; \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае неориентированного графа имеем:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum & \text{числа ребер между смежными вершинами } V_i \text{ и } V_j; \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис 1.32.

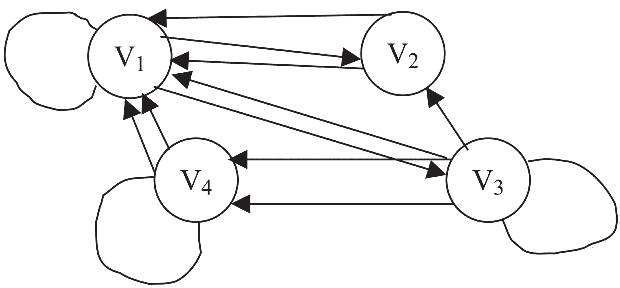


Рис. 1.32

Данному графу соответствует матрица смежности размера 4×4, имеющая вид:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Раскраски

Задачи раскраски вершин или ребер графа занимают важное место в теории графов. Особенностью этих задач является существование объектов, которые по каким-то причинам могут быть объединены в одну группу.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, $k \in N$. Произвольная функция вида $f\colon VG \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ называется вершинной k-раскраской, или просто k-раскраской. Раскраска называется правильной, если для любых смежных вершин V_i и V_j выполняется неравенство $f(V_i) \neq f(V_j)$. Граф, для которого существует правильная k-раскраска называется k-раскрашиваемым. В определении раскраски вместо множества $\{1, 2, 3, ..., k\}$ можно взять произвольное k-элементное множество. Правильную k-раскраску графа можно трактовать как окрашивание каждой его вершины в один из k цветов, при этом смежные вершины должны быть окрашены в разные цвета. При k-раскраске может быть использовано и менее k цветов. Правильную k-раскраску графа G можно рассматривать как разбиение

$$V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_t = VG, t \leq k$$

множества вершин VG на не более чем k непустых классов, каждый из которых является независимым множеством. Классы этого разбиения называются цветными классами. Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется хроматическим числом этого графа и обозначается $X(G)$. Если $X(G) = k$, то граф G называется k-хроматическим.

Правильная k-раскраска G при $k = X(G)$ называется минимальной [10, 27].

На рис. 1.33 приведена одна из правильных 4-раскрасок, причем меньшим числом цветов этот граф раскрасить нельзя [10].

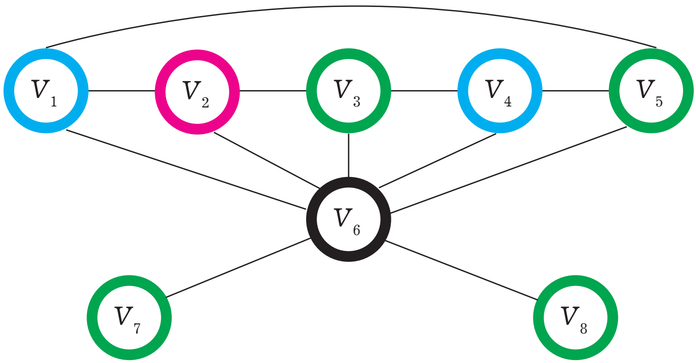


Рис. 1.33

Плоские и планарные графы

В некоторых случаях необходимо знать, можно ли изобразить граф на плоскости так, чтобы его изображение удовлетворяло некоторым условиям. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем проводники электрического тока не должны пересекаться. Такая же задача возникает при проектировании железнодорожных трасс, когда нежелательны переезды. Поэтому вводится понятие плоского графа.

Плоским называют граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины [10].

Примеры плоских графов показаны на рис. 1.34.

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным [10]. На рис. 1.35, а приведен плоский граф, а на рис. 1.35, б — планарный граф, изоморфный графу на рис. 1.35, а.

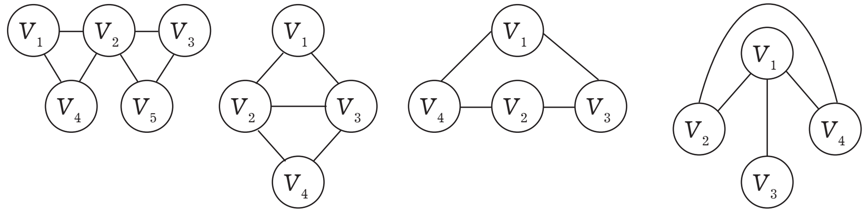


Рис. 1.34

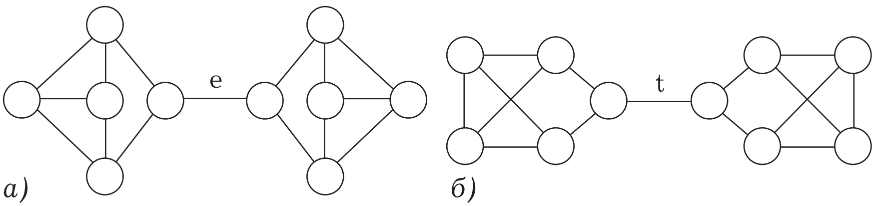


Рис. 1.35

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых в этой теории. Первоначально вопрос формулировался так: достаточно ли четырех красок для такой раскраски произвольной географической карты, при которой любые две соседние страны окрашены в разные цвета. Рассматриваются только те карты, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой линии, а соседними считаются страны, имеющие общую границу ненулевой длины.

Позднее понятие карты сформулировали так: карта — это связный плоский мультиграф без мостов (ребро графа называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент графа, мостами являются ребра e и t в графах на рис. 1.35, а, б).

В 1879 г. английский математик А. Кэли сформулировал гипотезу четырех красок так: всякая карта 4-раскрашиваема.

Часто пользуются другой формулировкой: всякий планарный граф 4-раскрашиваем.

В 1890 г. Р. Хивуд показал, что если 4 заменить на 5, то гипотеза легко доказывается, т. е. верна теорема: всякий планарный граф 5-раскрашиваем.

Эйлеровы цепи

Как уже упоминалось, с задачи о кенингсбергских мостах началась теория графов. На рис. 1.36 показан план расположения семи мостов на реке Преголь в городе Кенингсберге (ныне Калининград). Задача состоит в том, чтобы пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку [10, 21, 25].

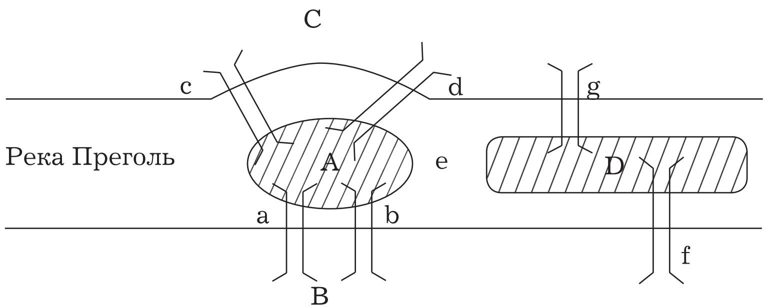


Рис. 1.36

Так как существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины — различным, разделенным мостами, участками города (рис. 1.37).

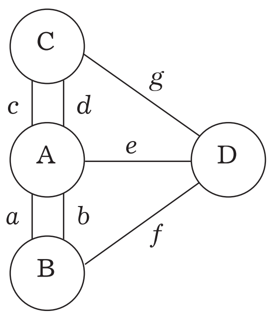


Рис. 1.37

Л. Эйлер обратился к общей задаче, касающейся теории графов: в каких случаях в конечном графе можно найти такой цикл, в котором каждое ребро графа участвовало бы один раз?

Если такой цикл (замкнутая цепь) есть, он называется эйлеровым, а граф, содержащий его — эйлеровым графом.

Л. Эйлер сформулировал и доказал теорему: конечный граф G является Эйлеровым графом тогда и только тогда, когда: а) граф является связным; б) степени всех его вершин четные.

Из теоремы Л. Эйлера следует, что задача о кенингсбергских мостах не имеет решения (граф на рис.1.37 не Эйлеров, так как степени всех его четырех вершин являются нечетными $d(A) = 5$; $d(B) = 3$; $d(C) = 3$; $d(D) = 3$).

Если обобщить задачу Л. Эйлера, то надо искать наименьшее число не пересекающихся по ребрам цепей N_i, которые необходимы для того, чтобы покрыть конечный связный граф G, т. е. включающий все его ребра в цепи N_i. Решение этой задачи сводится к задаче Л. Эйлера.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано: $X = \{-5, 17, 22, 34, 101\}$;
   $Y = \{-17, 0, 22, 34, 102, 505\}$.
   Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, $X \Delta Y$.
2. Дано: $X=(-\infty;5]$; $Y=[-7;607)$.
   Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$, X/Y, Y/X.
3. Докажите, что отрезки [0,1] и [0,5] равномощны.
4. Дано: $X = \{1, 2, 3\}$; $Y = \{7, 8\}$ $\rho = \{(1,7), (1,8), (2,8), (3,7)\}$.
   Построить матрицу и граф отношения ρ.

5. Сколькими способами в отделе, состоящем из 100 человек можно выбрать начальника и его заместителей?

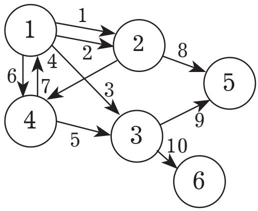
6. Есть шесть видов конвертов без марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?

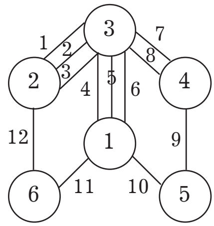
7. Из двенадцати человек надо выбрать пять и разместить их на занумерованных стульях (по одному человеку на стул). Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно посадить за стол четырех мужчин и четырех женщин так, чтобы женщины и мужчины не сидели рядом?

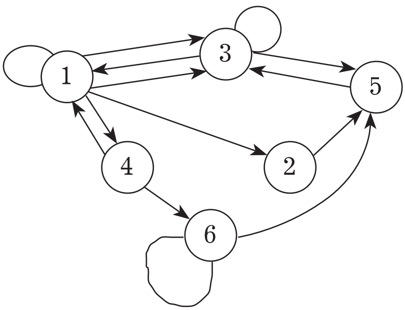
9. Сколько различных восьмизначных чисел можно составить, используя цифры 3,4,5?

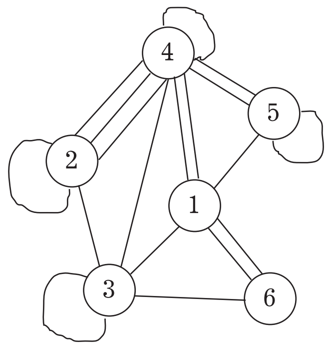
10. Найти матрицы инцидентности для 2 графов:





11. Найти матрицы смежности для графов:





Вопросы для самопроверки

1. Какие способы задания множеств вы знаете?
2. Какое множество называется универсальным?
3. Какое отношение называется бинарным?
4. Что называется числом сочетаний из n элементов по m?
5. Что называется числом размещений из n элементов по m?
6. Что называется перестановкой из n элементов?
7. Какие графы называются изоморфными?
8. Какие графы называются Эйлеровыми?
9. Что такое степень вершины графа?
10. Какие графы называют деревьями?
11. Что такое k-раскраски графа?
12. Какие графы называют планарными?

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Линейная алгебра — это часть математики, посвященная в основном теории матриц и связанной с нею теории линейных преобразований, векторных пространств. Она включает теорию форм, теорию инвариантов, тензорную алгебру.

В данном учебнике мы рассмотрим понятие матрицы, ее применение для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также определители, векторы, собственные числа и векторы матриц.

2.1. Матрицы, определители и их свойства

Матрицей называется прямоугольная таблица размером m (число строк) на n (число столбцов), заполненная некоторыми математическими объектами [28]. Мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются действительные числа.

Как правило матрицы обозначают большими буквами (A, B,...), а их элементы маленькими буквами с двумя индексами, указывающими номер строки и номер столбца (a_{ij}, b_{ij},...). Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ записывают следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(a_{ij}\right) = \left[a_{ij}\right] = \left\|a_{ij}\right\|, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Если заменить строки матрицы ее столбцами (столбцы строками), то получим транспонированную матрицу, которую обозначают заглавной буквой с индексом Т наверху:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые типы матриц [19, 29].

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то мы имеем квадратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ называются главной диагональю, а их сумма — это след матрицы.

Элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ составляют побочную диагональ.

Если все элементы матрицы, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, равны нулю, то мы имеем диагональную матрицу:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все ненулевые элементы диагональной матрицы равны 1, то мы имеем единичную матрицу:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если ненулевые элементы располагаются выше главной диагонали, то имеем верхнюю треугольную матрицу, а если ниже — нижнюю треугольную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $m \times 1$ — это матрица-столбец, а матрица размера $1 \times n$ — матрица-строка:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейные операции над матрицами [13, 19, 29]

Для сложения двух матриц необходимо, чтобы они имели одинаковые размеры.

Сумму двух матриц обозначим $A + B$, а ее элементы равны $a_{ij} + b_{ij}$, т. е.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) Для любых двух матриц одинакового размера всегда существует единственная матрица Z такая, что $A + Z = B$. Тогда Z есть разность матриц B и A, т. е. $Z = B - A$. Элементы матрицы Z равны $b_{ij} - a_{ij}$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число $k \in R$ называется матрица

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots ka_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} \dots ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $5 \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$.

Для умножения двух матриц необходимо, чтобы они были согласованными. Матрицы A и B называются согласованными, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пусть заданы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \text{где } i = \overline{1, m}, \ \ j = \overline{1, n}.$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2p} \\ \dots & \dots \quad \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{np} \end{pmatrix} = (b_{ik}), \quad \text{где } j = \overline{1, n}, \ \ k = \overline{1, p}.$$

Тогда произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C размера $m \times p$, элементы c_{ik} которой находятся по формуле

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Из определения произведения матриц следует, что

$$A \times E = E \times A = A.$$

Произведение матриц обладает следующими свойствами:
1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
2) $(A + B) \times C = AC + BC$.
В общем случае $A \times B \neq B \times A$.
Рассмотрим конкретный пример умножения двух матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы размера $n \times n$ вводится понятие определителя.

Определителем квадратной матрицы порядка $n \times n$ (определителем порядка n) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки, по одному из каждого столбца и снабженных знаками плюс и минус по некоторому определенному правилу. Это правило сформулируем позже [15, 29].

Определитель порядка n матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

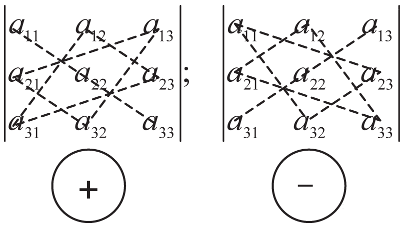
обозначается следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приведем легко запоминающиеся правила для вычисления определителей второго и третьего порядков [3, 19]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1-2\times(-6)=15.$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 2\times4\times(-8)+0\times0\times7+1\times6\times(-3)-0\times4\times1-$$

$$-(-8)\times(-3)\times0-2\times6\times7=-64-18-84=-166.$$

Сформулируем **свойства определителей** [3,19].

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

2. При перестановке строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{222} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Если все элементы строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно выносить за его знак:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ где } k \in R.$$

5. Определитель равен нулю, если все элементы минимум двух его строк (столбцов) пропорциональны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \text{ где } k \in R.$$

6. Если каждый элемент строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых суммы, а у другого — из вторых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же вещественное число:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ где } k \in R.$$

Дадим понятие минора и алгебраического дополнения [3, 19].

Рассмотрим матрицу размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \;\; a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \;\; a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k различных строк и k различных столбцов, причем $1 \leq k \leq$ минимального значения из m и n.

Элементы выделенных строк и столбцов образуют квадратную матрицу порядка k. Определитель выделенной квадратной матрицы порядка k называют минором k-го порядка матрицы A.

Если в выделенную квадратную матрицу порядка k включены строки и столбцы исходной матрицы, имеющие одинаковые номера, то такой минор называется главным.

Полное обозначение минора k-го порядка следующее

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix},$$

где i — номера выделенных строк;

j — номера выделенных столбцов.

Общее число миноров порядка k прямоугольной матрицы размера $m \times n$ можно найти по формуле

$$N_k = C_m^k \times C_n^k,$$

где C_m^k — число сочетаний из m по k,

C_n^k — число сочетаний из n по k.

Число миноров первого порядка совпадает с общим числом элементов исходной матрицы

$$N_1 = C_m^1 \times C_n^1 = m \times n.$$

Рассмотрим конкретный пример

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее число миноров первого порядка данной матрицы A равно $N_1 = C_2^1 \times C_3^1 = 6$. Например,

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5; \qquad M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10.$$

Максимальный порядок миноров данной матрицы равен двум.

Общее число миноров второго порядка равно $N_2 = C_2^2 \times C_3^2 = 3$. Например,

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}; \quad M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}; \quad M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь квадратную матрицу размера $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем в ней все элементы i-й строки и j-го столбца. Оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$. Определитель этой матрицы будет минором $(n-1)$ порядка исходной матрицы A.

Например, вычеркнем в матрице A первую строку и второй столбец и получим следующий минор $(n-1)$ порядка исходной матрицы

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минор обозначаем по номеру элемента, который стоит на пересечении вычеркиваемой строки и вычеркиваемого столбца. В нашем случае это элемент a_{12}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется число, вычисляемое по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т. е., если сумма номеров строки и столбца — четная, алгебраическое дополнение будет совпадать с соответствующим минором, а если нечетная, то алгебраическое дополнение и минор будут иметь разные знаки.

Используя понятие алгебраического дополнения можно сформулировать общее правило вычисления определителя n-го порядка. Он вычисляется с помощью формул разложения по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. Всего существует $2n$ формул разложения определителя (по элементам n-строк и n-столбцов) [3, 19, 29].

Например, приведем разложение по элементам первой строки и второго столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} =$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{n2}A_{n2}.$$

То есть каждый элемент строки (столбца) умножается на соответствующее алгебраическое дополнение.

Теоретически с помощью формул разложения можно вычислить определитель квадратной матрицы любого порядка, но реально эти формулы используются для нахождения определителей не выше 4-го порядка. Объем вычислений можно несколько сократить, если использовать свойства определителей.

Из формул разложения следуют приведенные нами выше правила вычисления определителей второго и третьего порядков.

Рассмотрим конкретные примеры вычисления определителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-7-18)-5(21-24)+(9-(-4)) =$$

$$= -50+15+13 = -22.$$

В данном примере мы разложили определитель по элементам первой строки.

Найдем определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

К этому определителю сначала применим свойство номер 7. Первую строку определителя умножим последовательно на (−4); (−3); (−2) и сложим со 2-й; 3-й и 4-й строками. В результате получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам 1-ого столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

К полученному определителю вновь применим свойство номер 7. Умножим последовательно третью строку на (−2) и на (−7) и сложим со второй и первой строчками. Получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель разложим по элементам первого столбца, т. е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 36 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}\ldots =$$

$$= -[16 - (-144)] = -160.$$

Теперь рассмотрим обратную матрицу и правило ее вычисления.

Квадратная матрица A называется вырожденной, если ее определитель равен нулю, т. е. $\det A = 0$.

В противоположном случае ($\det A \neq 0$) матрица A является невырожденной. A любой невырожденной матрице A соответствует единственная обратная матрица A^{-1}.

Причем выполняется равенство

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E$$

Приведем алгоритм нахождения обратной матрицы [13, 19].

1. Вычислить определитель матрицы A и убедиться, что он не равен нулю.

2. Составить матрицу A_1 из алгебраических дополнений матрицы A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Составить присоединенную матрицу (B), получаемую транспонированием матрицы A_1

$$B = A_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

5. Проверка полученного результата

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Рассмотрим конкретные примеры на обращение матриц.

Пример 2.1. Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти: A^{-1}

Находить A^{-1} будем в соответствии с приведенным алгоритмом. Найдем определитель исходной матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\times 5-(-1)\times 2 = 17,$$

т. е. $\det A \neq 0$, поэтому у матрицы A есть обратная A^{-1}

Теперь найдем алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = 5;\ A_{12} = 1;\ A_{21} = -2;\ A_{22} = 3.$$

Составим из найденных алгебраических дополнений матрицу A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B (транспонируем матрицу A_1)

$$B = A_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\times B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления обратной матрицы.

$$A\times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17}+\frac{2}{17} & -\frac{6}{17}+\frac{6}{17} \\ -\frac{5}{17}+\frac{5}{17} & \frac{2}{17}+\frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. обратная матрица A^{-1} вычислена верно.

Пример 2.2. Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{-1}.

Вычисляем определитель матрицы А.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку последовательно на (−2) и на (−3) и складываем со второй и третьей, затем полученный определитель раскладываем по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -50 + 30 = -20;$$

$\det A \neq 0$, т. е. исходная матрица A — невырожденная и у нее есть обратная матрица.

Теперь найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -26;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -12;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 10;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 15;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Из найденных алгебраических дополнений составляем матрицу A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} -26 & -25 & -11 \\ -12 & -10 & -2 \\ 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу $B = A_1^T$:

$$B=\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times B=$$

$$=\frac{1}{-20}\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{26}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{10}{20}\\ \frac{25}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{15}{20}\\ \frac{11}{20} & \frac{2}{20} & -\frac{5}{20}\end{pmatrix}.$$

Делаем проверку правильности вычисления обратной матрицы $A \times A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{26}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{10}{20}\\ \frac{25}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{15}{20}\\ \frac{11}{20} & \frac{2}{20} & -\frac{5}{20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Из проверки следует, что обратная матрица вычислена верно.

Имеют место следующие равенства:

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;

$(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$;

$(A \times B \times C \times \ldots \times F)^{-1} = F^{-1} \times \ldots \times C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}$.

Ранг матриц. Любая матрица кроме своего порядка должна характеризоваться еще одним показателем, который устанавливает количество ее независимых строк и столбцов. Этот показатель и называют рангом матрицы. Дадим его определение [13, 19].

Рангом ($r(A)$) матрицы A называют наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг имеет любая матрица.

Ранг матрицы считается равным нулю, если все элементы матрицы равны нулю.

Для матриц высокого порядка разработаны специальные вычислительные методы определения ранга, например, методы жордановых исключений. Из приведенных выше свойств определителей следует, что ранг матрицы не изменяется: при ее транспонировании, при перестановке каких-либо строк или столбцов, при умножении каждого элемента строки или столбца на одно и то же число, при сложении элементов какой-то строки (столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца), умноженными на действительное число.

Без доказательства приведем теорему и следствия из нее [19].

Теорема 2.1. Если ранг матрицы равен k, то существует k линейно-независимых строк, от которых линейно зависят все остальные строки матрицы.

Следствие 1. Если ранг матрицы равен k, то она имеет k линейно-независимых столбцов, от которых линейно зависят остальные столбцы.

Следствие 2. Максимальное число линейно-независимых строк матрицы совпадает с максимальным числом линейно-независимых столбцов и равно рангу матрицы.

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Линейная система m уравнений с n неизвестными — это система вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

где $i = \overline{1,m}$;

$j = \overline{1,n}$;

a_{ij} — коэффициенты;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные;

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены.

Систему (2.1) можно записать в матричном виде:

$$AX = B, \tag{2.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных.

Решением СЛАУ называется любая совокупность n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая обращает каждое уравнение системы (2.1) в верное равенство.

Любая СЛАУ вида (2.1) может иметь одно решение, бесконечное множество решений, ни одного решения.

Если СЛАУ имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если СЛАУ не имеет решений, то она — несовместная.

Если все свободные члены СЛАУ (2.1) равны нулю, то система называется однородной, а если хотя бы один из свободных членов системы не равен нулю, то она называется неоднородной. Система однородных уравнений всегда совместна, т. е. она имеет хотя бы одно решение ($x_j=0$).

Перед решением СЛАУ надо убедиться в ее совместности. Поэтому приведем без доказательства теорему Кронекера-Капелли, которая позволяет это сделать.

Дополним матрицу A системы (2.2) столбцом свободных членов. В результате этого получим матрицу порядка $m \times (n + 1)$, которую называют расширенной матрицей системы (C):

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Через $r(A)$ и $r(C)$ обозначим ранги матриц A и C соответственно.

Теперь сформулируем теорему [19].

Теорема 2.2. Для того чтобы СЛАУ вида (2.2) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы ($r(A)$) был равен рангу расширенной матрицы системы ($r(C)$), т. е. $r(A) = r(C)$. Здесь возможны два случая: 1) если $r(A) = r(C) = n$, где n — число неизвестных в системе (2.2), то СЛАУ имеет единственное решение; 2) если $r(A) = r(C) < n$, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

СЛАУ можно решать или прямыми или итерационными методами.

В прямых (точных) методах решение системы (2.2) находится за конечное число арифметических действий. К прямым методам относятся метод Гаусса и его модификации, метод квадратного корня, метод Крамера и др.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение системы (2.2) находится как lim (предел) при $k \to \infty$ последовательных приближений $x^{(k)}$, где k — номер итерации. Обычно за конечное число итераций этот предел не достигается. Как правило, задается некоторое малое число $\varepsilon > 0$ (точность) и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| < \varepsilon.$$

К итерационным методам относятся: метод Якоби, метод Зейделя, метод релаксации, метод минимальных невязок, метод скорейшего спуска и др. [1, 24]

В предлагаемом учебнике рассмотрим прямые методы: метод Гаусса и метод Крамера.

Рассмотрим метод Гаусса решения СЛАУ. Он состоит из двух шагов. На первом шаге мы приводим исходную систему уравнений к верхнему треугольному виду, а на втором шаге находим неизвестные (x_j), начиная с последнего [1, 17].

Предположим, что мы имеем систему n уравнений с n неизвестными, и она является совместной, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Исключаем неизвестное x_1 из всех уравнений, начиная со второго. Для этого из второго уравнения почленно вычтем первое, умноженное на a_{21}/a_{11}, из третьего почленно вычтем первое, умноженное на a_{31}/a_{11} и т. д., причем $a_{11} \neq 0$, если $a_{11} = 0$, то переставляем местами уравнения системы (2.3). После этого система (2.3) примет вид.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_1 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1; \quad (i, j = \overline{2, n}).$

В системе (2.4) исключаем неизвестные x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, т. е. ведущим элементом становится $a_{22}^{(1)} \neq 0$, если он равен нулю, то переставляем уравнение местами, т. е. из третьего уравнения системы (2.4) мы вычитаем второе, умноженное на коэффициент $a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$, из четвертого уравнения системы (2.4) вычитаем второе, умноженное на коэффициент $a_{42}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$ и т. д. В результате мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases} \tag{2.5}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}; \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}; \quad (i, j = \overline{3, n}).$

Аналогичный процесс мы продолжаем далее и на (n–1)-*м* шаге приходим к следующей системе уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

То есть исходную систему уравнений (2.3) привели к верхнему треугольному виду (первый шаг метода Гаусса завершен). Второй шаг (обратный ход) заключается в решении системы уравнений (2.6). Он осуществляется следующим образом: из последнего уравнения системы (2.6) находим $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, используя найденное значение x_n из предпоследнего (n−1) уравнения системы (2.6) находим x_{n-1}, затем из (n−2) уравнение системы (2.6) находим x_{n-2} и т. д. до x_1.

Алгоритм Гаусса состоит из однотипных операций, которые легко программируются.

Решим систему уравнений, используя метод Гаусса.

Пример 2.3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24; \\ -15x_1 + 4x_2 = -42. \end{cases} \tag{2.7}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнения системы (2.7). Для этого умножим первое уравнение почленно на 4 и вычтем из второго, затем умножим первое уравнение на (−5) и вычтем из третьего. В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ -3x_2 + 17x_3 = -8; \\ 9x_2 - 25x_3 = -2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Теперь исключим из третьего уравнения системы (2.8) неизвестное x_2. Для этого умножим поэлементно второе уравнение системы (2.8) на (−3) и вычтем из третьего уравнения системы (2.8).

В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ -3x_2 + 17x_3 = -8; \\ 26x_3 = -26. \end{cases} \tag{2.9}$$

Из системы уравнений (2.9) последовательно находим неизвестные x, начиная с последнего (x_3), т. е. $x_3 = -1$;

$$x_2 = \frac{17x_3 + 8}{3} = -3\,; \; x_1 = \frac{8 - x_2 + 5x_3}{3} = 2\,.$$

Теперь рассмотрим метод Крамера решение СЛАУ.

Рассмотрим систему уравнений (2.3), которую запишем в матричном виде

$$AX = B, \tag{2.10}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица системы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных.

Если определитель матрицы A ($\det A$) не равен нулю, то существует A^{-1}.

Домножим слева систему (2.10) на A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \text{ так как } A^{-1}A = E, \text{ то}$$

имеем $EX = A^{-1}B$, а так как $EX = X$, то
окончательно получим $X = A^{-1}B$ (2.11)
или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\det A}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\det A}. \end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

Числители равенств (2.13) есть разложения по элементам 1, 2, ..., n-го столбцов определителя, полученного из det A заменой в нем 1, 2, ..., n столбцов столбцом свободных членов, т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, неизвестные x_i можно найти по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \qquad (2.14)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. [19].

Решим систему уравнений, используя метод Крамера

Пример 2.4.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Вначале найдем определитель исходной системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -21 - 26 + 46 = -1.$$

Затем находим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2.$$

и определяем неизвестные x_i; $i = 1, 2, 3$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = -2.$$

2.3. Собственные числа и собственные векторы матриц

Проблема собственных чисел играет существенную роль не только в линейной алгебре, но и в других разделах математики, а также во многих прикладных областях (в менеджменте, психологии, юриспруденции) [12].

Пусть задана квадратная матрица A размера $(n \times n)$, элементами которой являются действительные числа (R) и вектор неизвестных X размера $(n \times 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что λ — это некоторое неизвестное действительное число.

Если λ и ненулевой вектор X удовлетворяют уравнению

$$AX = \lambda \times X, \tag{2.15}$$

то λ называется собственным числом или собственным значением матрицы A, а X — собственным вектором этой же матрицы, соответствующим λ [12, 15].

Преобразуем уравнение (2.15) к следующему виду:

$$\lambda \times X - A \times X = 0, (\lambda E - A) \times X = 0, \qquad (2.16),$$

где E — единичная матрица.

Матрица

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

называется характеристической матрицей [18].

Так как по условию вектор неизвестных X не равен нулю, то среди его координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ должна быть хотя бы одна ненулевая. A для того, чтобы система линейных однородных уравнений (2.16) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю (это следует из теоремы Кронекера-Капелли).

Поэтому получаем

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.17}$$

Число $\lambda = \lambda_k$, где $k = \overline{1, n}$ будет собственным числом только в том случае, если матрица $(\lambda_k E - A)$ — вырожденная.

Уравнение (2.17) называется характеристическим уравнением матрицы A и представляет собой алгебраическое уравнение степени n относительно λ [18]:

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_n = 0. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Множество всех корней уравнения (2.18) называется спектром матрицы A.

Заметим, что уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет те же корни, что и уравнение (2.17), т. е.

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \det(\lambda E - A).$$

Каждому собственному значению спектра матрицы A ставится в соответствие собственный вектор, определенный с точностью до скалярного множителя. Если λ_k есть кратный корень характеристического уравнения, то для произвольной квадратной матрицы число соответствующих собственных векторов может быть не равно кратности корня. С геометрической точки зрения собственный вектор определяет в пространстве некоторое направление (прямую, проходящую через начало координат), которое в результате преобразования не изменяется и вдоль которого пространство испытывает растяжение или сжатие в λ раз [3, 18].

Полином $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ называют характеристическим полиномом. Коэффициенты p_k $(k = \overline{1, n})$ можно вычислить по следующим рекуррентным формулам [29]:

$$\begin{cases} p_1 = -SpA; \\ 2p_2 = -SpA^2 - p_1 SpA; \\ 3p_3 = -SpA^3 - p_1 SpA^2 - p_2 SpA; \\ 4p_4 = -SpA^4 - p_1 SpA^3 - p_2 SpA^2 - p_3 SpA; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ np_n = -SpA^n - p_1 SpA^{n-1} - \ldots - p_{n-1} SpA. \end{cases} \tag{2.19}$$

Здесь $SpA = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk}$ — след матрицы (сумма элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A). Заметим, что $p_n = (-1)^n \times \det A$. При отыскании собственных чисел даже для матриц невысокого порядка неизбежно большое количество вычислений. Для общего случая нельзя предложить оптимальный способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Рассмотрим случай, когда собственные числа находятся сразу исходя из вида матрицы (исходная матрица либо диагональная, либо верхняя или нижняя треугольная). В этом случае собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ совпадают с элементами главной диагонали исходной матрицы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Пусть задана верхняя треугольная матрица A размера $(n \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ 0 & (\lambda - a_{22}) & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (\lambda - a_{nn}) \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - a_{11}) \times (\lambda - a_{22}) \times \ldots \times (\lambda - a_{nn}) = 0.$$

Отсюда видно, что собственные числа равны:

$$\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \ldots, \lambda_n = a_{nn}.$$

С появлением ЭВМ получили распространение итерационные методы нахождения собственных чисел, которые не используют вычисление характеристического полинома. К этим способам относятся: степенной метод, метод обратных итераций, QR-алгоритм, метод вращений Якоби, QL-алгоритм и др. Причем применение конкретного итерационного метода зависит от вида исходной матрицы A [1].

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 2.5. Дана матрица A размера (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А.

Из условия задачи видно, что матрица А является верхней треугольной матрицей. Поэтому собственными числами данной матрицы будут элементы ее главной диагонали

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -4 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Теперь найдем соответствующие найденным собственным числам собственные векторы. Для этого мы используем уравнение (2.16).

Для $\lambda_1 = -4$ получаем

$$(-4E - A) \times X_1 = 0, \qquad (2.20)$$

где $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Далее раскроем матричное уравнение (2.20)

$$\left[-4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -4x_2 - x_3 = 0; \\ -5x_2 = 0; \\ -5x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как матрица этой системы вырождена, то она имеет ненулевые решения, которые имеют вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \neq 0, x_1 \in R,$$

т. е. получены искомые собственные вектора для λ_1

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ получаем

$$(E - A)X_2 = 0, \text{ где } X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

или в подробной записи $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

В результате получаем

$$5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \text{ или } x_3 = 5x_1 - 4x_2,$$

т. е. это уравнение имеет ненулевые решения, которые и будут искомыми собственными векторами для λ_2.

Эти решения запишем в виде

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 5x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \quad x_1, x_2 \in R.$$

Пример 2.6. Дана матрица A размера (2×2). Найти собственные числа и собственные матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение (2,17) для данного случая

$$\det\,(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\lambda + 3) \times \lambda - 4 = 0; \quad \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0; \quad D = 9 - 4 \times 1(-4) = 25;$$

$$\lambda_1 = \frac{-3 + 5}{2} = 1; \quad \lambda_2 = \frac{-3 - 5}{2} = -4.$$

Теперь найдем собственные векторы исходной матрицы A, соответствующие $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -4$.

Для $\lambda_1 = 1$ имеем

$(E - A)X_1 = 0,$ где $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

В подробной записи получим

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{или} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель полученной матрицы равен нулю, то она имеет ненулевые решения, которые и являются собственными векторами X_1, которые мы и находим

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x_2 = 2x_1$. Из второго уравнения системы получаем $x_2 = 2x_1$, т. е. она имеет бесконечное множество решений. И искомый собственный вектор X_1 будет иметь вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \neq 0, \quad x_1 \in R.$$

Аналогично, для $\lambda_2 = -4$ находим

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \neq 0, \quad x_2 \in R.$$

В заключение приведем два полезных правила [18]:

1) сумма собственных чисел матрицы A равна следу этой матрицы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn};$$

2) произведение собственных чисел матрицы A равно определителю этой матрицы

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A.$$

2.4. Некоторые сведения о векторах

Цифровые данные, используемые в экономике, можно представить в виде списков чисел, каждое из которых имеет определенный смысл.

Например, списки цен различных товаров в магазинах, объемы продукции разных видов, выпущенных каким-либо предприятием за год и т. д. В математике такие упорядоченные списки чисел называют векторами. Дадим определение n-мерного вектора ($n = 1, 2, ...$).

Упорядоченный набор n чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ называется n-мерным вектором. Мы будем обозначать векторы заглавными буквами со стрелками над ними, т. е.

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, числа $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ есть координаты вектора, а n — его размерность [12, 13].

Два n-мерных вектора называются равными, если их соответствующие координаты равны, например:

$$\vec{X} = (2, 3, 7, 12); \vec{Y} = (2, 3, 7, 12) \Rightarrow \vec{X} = \vec{Y}.$$

Вектор, все координаты которого нули, называется нуль-вектором и обозначается $\vec{0}$.

Алгебраической суммой двух n-мерных векторов

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } \vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

называется вектор $\vec{X} \pm \vec{Y}$, каждая координата которого равна алгебраической сумме соответствующих координат векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, т. е.

$$\vec{X} \pm \vec{Y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n). \qquad (2.21)$$

Произведением действительного числа k на n-мерный вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерный вектор $k\vec{X}$, каждая координата которого равна произведению числа k на соответствующую координату вектора $\vec{X}$, т. е.

$$k\vec{X} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n). \qquad (2.22)$$

Множество n-мерных векторов, для которых определены действия алгебраического сложения (2.21) и умножения на число (2.22), называют n-мерным векторным пространством и обозначают R^n (в случае $n = 1$ оно совпадает с множеством действительных чисел R).

В случае $n = 2$ и $n = 3$ имеем соответственно двумерное (R^2) и трехмерное (R^3) векторные пространства, а двумерные и трехмерные вектора имеют геометрическую интерпретацию: они изображаются направленными отрезками на плоскости и в пространстве [3, 12, 13].

Пусть в R^n заданы вектора

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\vec{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n);\ k \in R;\ t \in R.$$

Приведем свойства линейных действий векторами [3, 12]:

1) $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$;

2) $\vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) = (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z}$;

3) $\vec{X} + \vec{0} = \vec{X}$;

4) $kt(\vec{X}) = k(t\vec{X})$;

5) $k(\vec{X} + \vec{Y}) = k\vec{X} + k\vec{Y}$;

6) $(k + t)\vec{X} = k\vec{X} + t\vec{X}$;

7) $0\vec{X} = \vec{0}$;

8) $k\vec{0} = \vec{0}$;

9) $\vec{X} - \vec{Y} = \vec{X} + (-1)\vec{Y}$.

Длина (норма) вектора $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в пространстве R^n находится по формуле

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \qquad (2.23)$$

Например, задан вектор $\vec{X} = (5, 3, -2)$.

Используя (2.23) найдем, что его длина равна

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

Введем понятие скалярного произведения в действительном пространстве R^n.

Скалярным произведением двух векторов

$$\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } \vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

в R^n ($x_i \in R^n$, $y_i \in R^n$, $i = \overline{1, n}$) называется число, получаемое по формулам [3, 12, 13]:

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \tag{2.24}$$

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left|\vec{X}\right| \times \left|\vec{Y}\right| \times \cos\alpha, \tag{2.25}$$

где α есть угол между n-мерными векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ (в случае $n = 2$ и $n = 3$ α будет углом между направленными отрезками на плоскости и в пространстве, а при $n > 3$ векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ являются математическими абстракциями).

Из формулы (2.25) следует, что угол между n-мерными векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)}{\left|\vec{X}\right| \times \left|\vec{Y}\right|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{2.26}$$

Если угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен $\frac{\pi}{2}$, то скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n = 0. \tag{2.27}$$

Пример 2.7.

Например, заданы векторы

$\vec{X} = (2, 3, 7)$ и $\vec{Y} = (1, 6, 5)$ в 3-мерном пространстве R^3. Найти угол между ними.

По формуле (2.26) получим

$$\cos\left(\vec{X}\vec{Y}\right) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} =$$

$$= \frac{2 + 18 + 35}{\sqrt{4 + 9 + 49}\sqrt{1 + 36 + 25}} =$$

$$= \frac{55}{\sqrt{62}\sqrt{62}} = \frac{55}{62} \approx 0{,}887097;$$

$$\alpha = (\vec{X}\vec{У}) \approx 27°29'21{,}5''$$

Скалярное произведение в пространстве R^n обладает следующими свойствами [3, 12]:

1) $\left(\vec{X}, \vec{X}\right) \geq 0$ (при этом равенство нулю будет только в том случае, если $\vec{X} = \vec{0}$);

2) $\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left(\vec{Y}, \vec{X}\right)$;

3) $(k\vec{X} + t\vec{Y}, \vec{Z}) = k(\vec{X}, \vec{Z}) + t(\vec{Y}, \vec{Z})$.

Здесь $\vec{X}, \vec{У}, \vec{Z}$ — векторы в R^n, а k и t — действительные числа.

Пространство R^n, в котором введено понятие скалярного произведения по формуле (2.24), называется евклидовым n-мерным пространством [3, 12].

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти произведения матриц

1.1. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -3 & 9 & 0 \\ 18 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

1.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 17 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 10 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$;

1.3. $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

2.1. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 6 \\ 10 & 0 & -11 & 5 \\ -3 & -7 & 8 & 11 \end{vmatrix}$; 2.2. $\begin{vmatrix} 7 & -10 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 18 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ -4 & -3 & 9 & 15 \end{vmatrix}$;

2.3. $\begin{vmatrix} 0 & -10 & 3 & 7 \\ 6 & 13 & -8 & -7 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Найти матрицы, обратные данным:

3.1. $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3.2. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3.3. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -10 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранги матриц:

4.1. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 1 \\ 8 & -7 & 12 & 4 \\ -15 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix}$; 4.2. $\begin{pmatrix} 2 & 11 & -7 & 4 \\ -6 & 4 & -2 & -12 \\ 3 & -6 & 8 & -6 \\ 9 & 2 & 4 & 18 \end{pmatrix}$;

4.3. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить СЛАУ методами Гаусса и Крамера:

5.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 5.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 52x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

6. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

6.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 6.2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; 6.3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

6.4. $\begin{pmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Дано: $\vec{X} = (1, -5, 6, 7, 10)$; $\vec{Y} = (-2, 7, 8, 11, -6)$.

Найти угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$.

8. Даны два ортогональных вектора

$\vec{X} = (3, x_2, 7)$ и $\vec{Y} = (1, 6, 8)$.

Найти координату x_2.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей? Типы матриц.
2. Правило и свойства сложения матриц.
3. Правило и основные свойства перемножения двух матриц.
4. Как найти матрицу, обратную заданной? Любая ли матрица имеет обратную?
5. Что называется определителем?
6. Что такое ранг матрицы?
7. Как определить, совместна ли заданная СЛАУ?
8. В каких случаях однородные СЛАУ имеют ненулевые решения?
9. В чем суть итерационных методов решения СЛАУ?
10. В чем состоит метод Гаусса решения СЛАУ?
11. В чем состоит метод Крамера решения СЛАУ?
12. Какие числа называются собственными значениями матрицы?
13. Что такое след матрицы?
14. Какое уравнение называется характеристическим уравнением матрицы?
15. Дать определение n-мерного векторного пространства.
16. Что называется нормой вектора?
17. Как найти угол между двумя векторами в n-мерном векторном пространстве?
18. Какое n-мерное пространство называется евклидовым?

3. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

3.1. Некоторые сведения о функциях

В любой области науки мы встречаемся с различными величинами. Под величиной понимают все то, что может быть измерено и (или) вычислено и выражено числом или числами [2].

В естественных, технических и гуманитарных науках имеют дело с различными величинами, например, скоростью, силой, температурой, себестоимостью, валовым внутренним продуктом какой-либо страны, количеством преступлений в каком-то регионе и др.

А в математике конкретные величины не участвуют, т. е. рассматривают величины вообще, не принимая во внимание их физический смысл.

Все величины можно разделить на переменные и постоянные.

Переменной называется такая величина, которая принимает различные числовые значения. Величина, которая не меняет свое числовое значение, называется постоянной.

Все процессы характеризуются взаимоизменяемостью нескольких переменных величин, а это приводит к важнейшему понятию математики функциональной зависимости.[2, 22]

Часто одни и те же величины могут в одних случаях быть переменными, а в других постоянными.

Например, в формуле $F = ma$ величины m (масса) и a (ускорение) могут быть как постоянными, так и переменными.

Но существуют и фундаментальные постоянные, которые сохраняют свое значение, по крайней мере, в нашей Метагалактике.

Например, в законе всемирного тяготения $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ величина $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11},\ \dfrac{м^3}{кг \cdot с^2}$ — фундаментальная постоянная.

Установление и описание связей между величинами одна из основных задач математического анализа, который включает в себя ряд дисциплин: теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисления, теорию рядов и др. [2]. Некоторые сведения из этих дисциплин мы рассмотрим в главах 3–7.

Теперь приведем определение функции одного независимого аргумента.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x на множестве определения D, если каждому значению $x \in D$ по какому-то закону поставлено в соответствие одно (несколько, бесконечно много) значение (значений) y [2, 20].

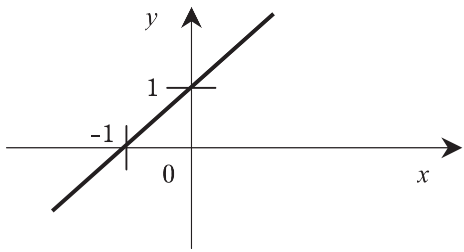


Рис. 3.1

В первом случае функция называется однозначной, например, $y = x + 1$ (рис. 3.1).

А во втором случае — многозначной, например, y = Arcsin x (рис. 3.2).

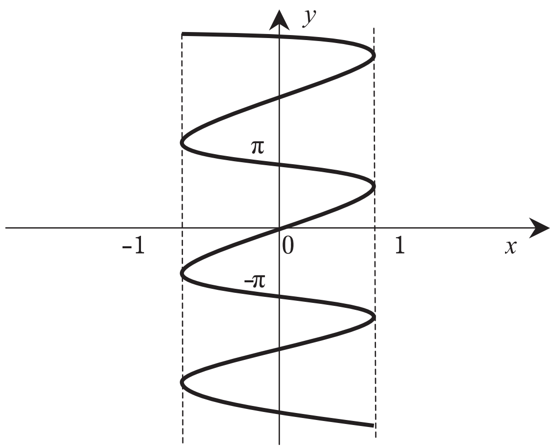


Рис. 3.2

Величину x из области D можно брать произвольно, поэтому она называется аргументом или независимой переменной. А величина y будет зависеть от выбранной величины x, поэтому ее называют зависимой переменной или функцией.

Область D может быть любой, но, как правило, используются области двух видов:

- множество целых неотрицательных чисел или какие-то части этого множества;
- один или несколько интервалов (конечных или бесконечных) числовой оси.

В первом случае имеем функцию целочисленного аргумента, а во втором — непрерывного.

Тот факт, что величина y есть функция аргумента x, обычно записывают так: $y = f(x)$.

Множество всех значений функции y обозначим через E.

Функцию можно задать с помощью таблицы, в виде графика (преимуществом этого способа является его наглядность) или аналитически (формулой). Последний способ является самым распространенным.

Все функции можно разделить на два класса: элементарные и неэлементарные.

К элементарным функциям относятся основные элементарные функции:

$y = x^n (n \in R)$, $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$,

$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$,

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

и функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции и заданные одной формулой [22].

Например,

$$y = \frac{6\sin^2 x - 5x^3}{\sqrt{14\operatorname{ctg}x + 2}};\ y = \frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}};\ y = \frac{8^x - 7x^3}{\operatorname{tg}2x};\ y = \frac{e^x - 5^{2x}}{\ln 4x} \text{ и т. д.}$$

Все функции, не подходящие под данное определение, элементарными функциями не являются.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0; \\ 0 \text{ при } x = 0; \\ 1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

не является элементарной функцией, так как задана тремя формулами [6, 22].

А функция $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n = n!$ не будет элементарной, так как количество операций умножения, которое нужно совершить для получения $f(n)$, не будет являться конечным.

3.2. Предел последовательности. Предел функции. Вычисление пределов.

Прежде чем перейти к определению предела напомним, что в математике используются три вида бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, ∞. Бесконечность не является числом, она показывает, как меняется переменная величина, которая конечна в любой момент времени.

Теперь определим понятие последовательности и ее предела.

Последовательностью называется множество чисел, которое перенумеровано с помощью целых чисел и расположено в порядке возрастания номеров [2].

Если задана последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то тем самым любому целому неотрицательному значению n поставлено в соответствие значение $y_n = f(n)$.

Например, члены геометрической прогрессии $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, являются последовательными значениями функции $f(n) = \frac{1}{3^n}$, где $n \in Z^+$, Z^+ — целые положительные числа.

Может случиться так, что с увеличением n значения $y_n = f(n)$ будет неограниченно приближаться к какому-то числу a. В этом случае говорят, что число a является пределом функции

$f(n)$ целочисленного аргумента n или последовательности y_1, y_2, ..., y_n при $n \to \infty$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Число a является пределом последовательности y_1, y_2, ..., y_n, ..., если для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $N > 0$, что для всех $f(n)$ с номерами $n > N$ справедливо неравенство [2, 22]

$$|f(n) - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Используя приведенное определение, докажем, что последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ имеет предел, равный 1.

Согласно определению имеем

$$\left|\frac{n}{n+1`} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = N.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, что при всех $n > N$ будет выполняться (3.1.), а это означает, что 1 есть предел исходной последовательности.

Теперь рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывного аргумента x (рис. 3.3) и предположим, что x неограниченно приближается к числу x_0 ($x \to x_0$). При этом может оказаться, что соответствующее значение $f(x)$ неограниченно приближается к некоторому числу b. В этом случае говорят, что число b есть предел функции $f(x)$ при ($x \to x_0$).

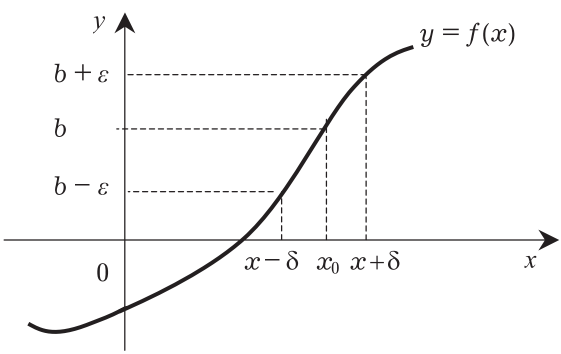


Рис. 3.3

Сформулируем определение предела функции.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет справедливо неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$ [2, 20]. Заметим, что функция не обязательно должна быть определена в предельной точке x_0, она должна быть определена лишь в некоторой окрестности этой точки.

Тот факт, что b — предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Данное нами определение иллюстрируется рис. 3.3. Используя приведенное определение предела, докажем, что

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

На основании определения имеем

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| < \varepsilon \Rightarrow |\, x - 3\,| < \varepsilon = \delta. \quad (3.2)$$

Таким образом, мы доказали, что исходная функция будет отличаться от 6 меньше, чем на ε, если будет выполняться неравенство (3.2). В данном случае $\varepsilon = \delta$.

Приведенное определение не дает способа вычисления пределов. Ниже мы рассмотрим некоторые из таких методов.

Дадим понятие о левых и правых пределах функции $y = f(x)$ и точках ее разрыва.

Если $f(x) \to b_1$ при $x \to x_0$ так, что x принимает только значения, меньшие x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = b_1$ и называют b_1 левым пределом.

Аналогично, если $f(x) \to b_2$ при $x \to x_0$ так, что x принимает только значения, большие x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = b_2$ и называют b_2 правым пределом [2, 20].

Геометрическая иллюстрация левого и правого пределов дана на рис. 3.4.

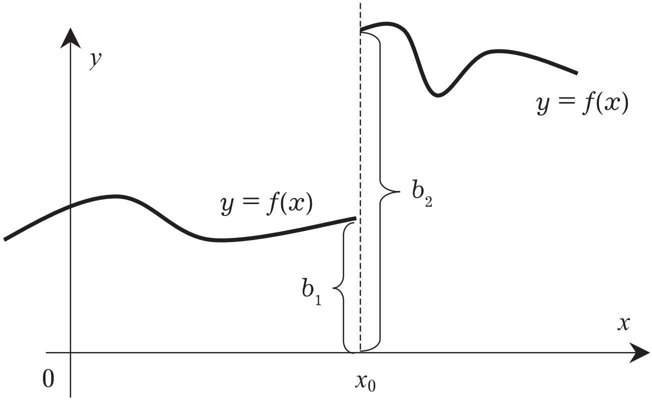


Рис. 3.4

Из рис. 3.4 следует, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет разрыв. Он носит название разрыва первого рода (в точке разрыва первого рода левый и правый пределы не равны $b_1 \neq b_2$ и конечны). Все остальные точки разрыва называются точками разрыва второго рода [2, 20]. Примерами разрывов второго рода являются бесконечные разрывы (рис. 3.5).

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

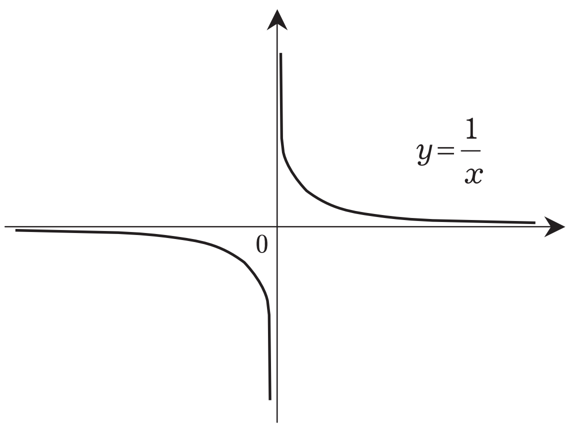


Рис. 3.5

Предположим, что аргумент функции $y = f(x)$ неограниченно возрастает $x \to \infty$, т. е. является бесконечно большим аргументом. Может оказаться, что при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому пределу b (рис. 3.6).

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $N > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться условие $|f(x) - b| < \varepsilon$ [2, 20, 22].

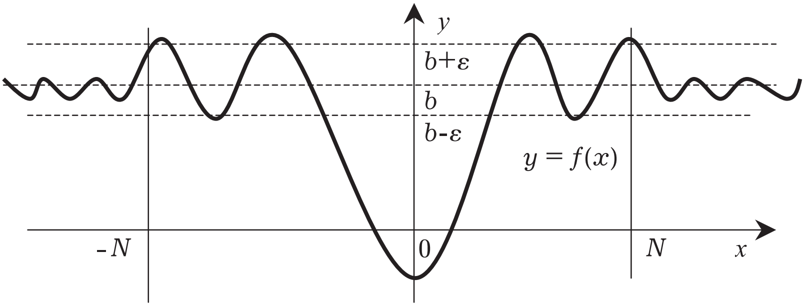


Рис. 3.6

Теперь рассмотрим случай стремления функции $y = f(x)$ к бесконечности при $x \to x_0$.

Функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, если для $\forall M > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$ [2, 20].

Это определение иллюстрируется рис. 3.7.

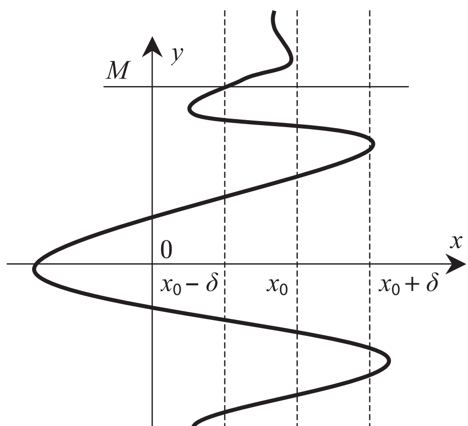


Рис. 3.7

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется ограниченной в данной области изменения аргумента, если существует $N > 0$ такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполняться неравенство $|f(x)| \leq N$. Если такого числа N нет, то функция $y = f(x)$ является неограниченной в данной области.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на своей области определения $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 3.8).

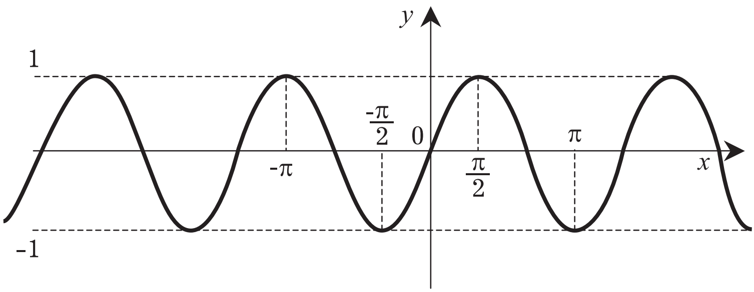


Рис. 3.8

$$|\sin x| \leq 1, \text{ т. е. } N = 1.$$

Дадим определение бесконечно малой величины.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Например, функция $y = (x - 3)^3$ при $x \to 3$ есть бесконечно малая величина, так как $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3)^3 = 0$.

Постоянное очень малое число не является бесконечно малой величиной. Единственное число, которое рассматривается в качестве бесконечно малой величины, это ноль. Связь бесконечно малых и бесконечно больших величин можно проследить из теоремы 3.1: если $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая величина и наоборот [2].

Сравнение бесконечно малых

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0.$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^5} = \infty.$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где $C \in R$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка.

Например, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x}{x} = 3.$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть эквивалентные бесконечно малые.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1.$

Теперь приведем основные свойства пределов, которые будем использовать при их вычислении [2, 9, 16].

Предел алгебраической суммы конечного числа функции равен алгебраической сумме пределов от этих функций, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Предел постоянной величины равен самой постоянной величине, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} C = C,$$

где $C \in R$.

Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов от этих функций, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \right] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Следствие Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x),$$

где $C \in R$.

Предел частного двух функций равен частному от их пределов, если предел знаменателя не равен нулю, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0.$$

Предел целой положительной степени функции равен той же степени предела этой функции, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^n,$$

где $n \in Z^+$, Z^+ — целые положительные числа.

Предел целой положительной n-й степени корня функции равен корню n-й положительной степени предела этой функции, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)},$$

где $n \in Z^+$.

Приведем два замечательных предела, которые можно использовать при решении пределов.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e$ (основание натуральных логарифмов).

Стремление к бесконечности всегда можно заменить стремлением к нулю и наоборот. Заменим во втором замечательном пределе $\dfrac{1}{x} = y$, а $x = \dfrac{1}{y}$. Тогда согласно теореме 3.1 при $x \to \infty$ $y \to 0$ и второй замечательный предел принимает вид $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = e$.

Кратко рассмотрим понятие непрерывности функции. Для этого напомним, что приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ [2, 16], где Δx есть приращение аргумента (рис. 3.9).

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в какой-либо окрестности этой точки, и если выполняется следующее равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{3.3}$$

Докажем, например, что функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке x_0 своей области определения.

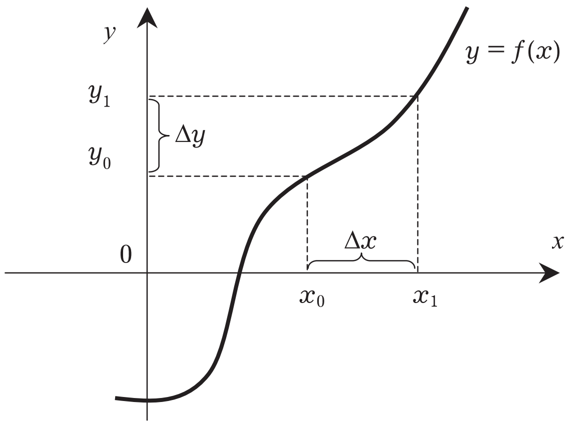


Рис. 3.9

Согласно определению непрерывности функции в точке x_0 получим

$$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 =$$

$$= -2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cdot \sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x_0 + \Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right)=$$

$$=-2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{2x_0+\Delta x}{2}=0.$$

Пользуясь выражением для приращения функции, формулу (3.3) можно переписать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0).$$

Обозначим $x_0+\Delta x=x$, тогда x будет стремиться к x_0 при $\Delta x\to 0$, и окончательно получим

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \qquad (3.4)$$

т. е. функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и предел функции при стремлении аргумента к x_0 существует и равен значению функции в этой точке [2].

Заметим, что функция является непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой его точке. А все основные элементарные функции непрерывны на тех интервалах, в которых они определены. Приведем основные свойства непрерывных функций [9].

1. Алгебраическая сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная в тех точках, в которых делитель не равен нулю.

4. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ — непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ также непрерывна.

5. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и имеет обратную функцию $x=\varphi(y)$, то последняя также непрерывна.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна, то в формуле (3.4) можно поменять местами знаки функции и предела, т. е. [16]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f \lim_{x \to x_0} x. \qquad (3.5.)$$

Формула (3.5) означает, что если функция непрерывна, то для отыскания предела надо вместо аргумента x подставить предельное значение x_0. Это правило неприменимо в том случае, когда при постановке предельного значения мы получаем неопределенности вида:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; (0\ \infty); (\infty - \infty); 1^\infty; 0^0; \infty^0 \text{ и др.}$$

Теперь приведем конкретные примеры вычисления некоторых пределов [4, 23].

Пример 3.1.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{4^2 + 2}{4 - 3} = \frac{18}{1} = 18.$$

Пример 3.2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3.$$

Пример 3.3.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{7x^5 + 6x^4 - 5x^2 + 7}.$$

Если подставить предельное значение, то получим неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Поэтому для решения подобных примеров используют следующий прием: делят числитель и знаменатель на x в максимальной степени, в данном случае на x^5. Тогда получим:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{6}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{4}{x^5}}{7 + \dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{7}{x^5}} = \frac{0 - 0 + 0 - 0}{7 + 0 - 0 + 0} = 0.$$

Пример 3.4.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{5x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{5x} \right) \left(\frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}} \right) =$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2+x})}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2+x})}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Пример 3.5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 2x\cdot\frac{3}{x}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}.$$

(Предел в квадратных скобках — это второй замечательный предел).

Пример 3.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right]^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3.7.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log_5(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_5(1+x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\log_5(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_5\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_5 e$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то можно воспользоваться формулой (3.5).

Пример 3.8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}.$$

Данный предел можно свести к первому замечательному пределу путем замены переменной, т. е.

$$8x = y \Rightarrow x = \frac{y}{8}, \text{ при } x \to 0\ y \to 0,$$

тогда получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x} = \lim_{y\to 0} 8\frac{\sin y}{y} = 8\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 8.$$

Пример 3.9.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{x}\right)^{x^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0, \text{ т. е. бесконечно малое.}$$

Пример 3.10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}} = \frac{6+0}{1-0} = 6.$$

Пример 3.11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}} = \frac{0+1}{0+\dfrac{1}{3}} = 3.$$

Пример 3.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)-\ln 3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3+x}{3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{3x}} =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{1}{3}} = \ln e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3.13.

$$\lim_{x\to 8}\frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4} = \lim_{x\to 8}\left[\frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4}\cdot\frac{\sqrt{x+8}+4}{\sqrt{x+8}+4}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(64 - x^2)(\sqrt{x+8} + 4)}{x + 8 - 16} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \left(\frac{-(x-8)(x+8)(\sqrt{x+8} + 4)}{x - 8} \right) =$$

$$= -\lim_{x \to 8} (x+8)(\sqrt{x+8} + 4) = -128.$$

Пример 3.14.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}.$$

Необходимо свести данный предел к первому замечательному пределу. Для этого делаем замену переменной, т. е. $\arcsin x = y$, $x = \sin y$, при $x \to 0$ y $\to 0$.

Тогда получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

3.3. Комплексные числа

Комплексным числом t называется выражение следующего вида:

$$t = p + ig, \ p \in R, \ g \in R,$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$) [2].

В том случае, если $p = 0$ имеем чисто мнимое число $t = ig$.

А если $g = 0$, то $t = p$, т. е. является действительным числом. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел (C), т. е. $R \subset C$.

Величина p есть действительная часть комплексного числа t и обозначается $p = \mathrm{Re}t$, а g — мнимая часть комплексного числа t и обозначается $g = \mathrm{Im}t$ [2].

Комплексные числа $t = p + ig$ и $\bar{t} = p - ig$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются комплексно сопряженными [2, 16].

Пример 3.15.

Комплексные числа $t = 5 + 7i$; $\bar{t} = 5 - 7i$ являются комплексно сопряженными.

Два комплексных числа $t_1 = p_1 + ig_1$ и $t_2 = p_2 + ig_2$ будут равны только в том случае, когда равны их действительные и мнимые части, т. е. $p_1 = p_2$ и $g_1 = g_2$

Пример 3.16.

Найти x и y из равенства $7y + 4xi = 18 - 9i$.

Исходя из условия равенства комплексных чисел, получим

$$7y = 18 \to y = 18/7;$$
$$4x = -9 \to x = -9/4.$$

Любое комплексное число $t = p + ig$ можно изобразить точкой A (p, g) на плоскости $0pg$ такой, что $p = \mathrm{Re}t$, $g = \mathrm{Im}t$ и, наоборот, каждую точку A (p, g) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа t (рис. 3.10).

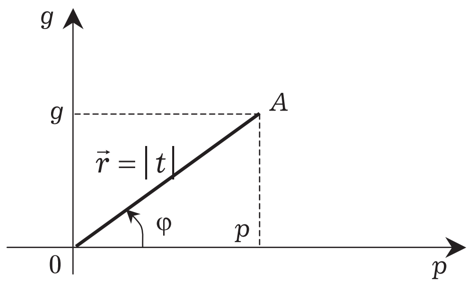


Рис. 3.10

Плоскость $0pg$ называется комплексной плоскостью, ось $0p$ — действительной осью, а $0g$ — мнимой осью.

С каждой точкой A плоскости $0pg$ связан радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{0A}$. Угол, образованный этим радиусом-вектором с положительным направлением оси $0p$, называется аргументом $\varphi = \mathrm{Arg}\, t$ комплексного числа.

Наименьшее по модулю значение $\mathrm{Arg}\ t$ называется его главным значением и обозначается $\arg t$. Заметим, что $-\pi < \arg t \leq \pi$.

Значение аргумента находят по формулам (см. рис. 3.10).

$$\sin\varphi = \frac{g}{|t|}; \quad \cos\varphi = \frac{p}{|t|}; \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{g}{|p|},$$

где $|t| = \vec{r} = \sqrt{p^2 + g^2}$ — модуль комплексного числа t [2, 16].

Алгебраической формой комплексного числа называется запись вида $t = p + ig$. А модуль $\vec{r}$ и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\overrightarrow{0A}$, изображающего комплексное число t (см. рис. 3.10).

Тогда получаем $p = r\cos\varphi$; $g = r\sin\varphi$; и, следовательно, комплексное число $t = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в виде, который называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 3.17.

Записать в тригонометрической форме комплексное число $t = 1 + i$.

$$\vec{r} = |t| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\cos\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2; \quad \sin\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

Поэтому

$$\arg t = \varphi = \pi/4.$$

Следовательно, получим

$$t = 1 + i = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + i(\sin\pi/4)].$$

Из формулы Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = \exp(i\varphi)$ следует показательная форма комплексного числа [16]:

$$t = r\exp(i\varphi),$$

где $r = |t|$, а $\varphi = \arg t$.

Пример 3.18.

Найдем показательную форму комплексного числа.

$$t = 1 + i \quad t = \sqrt{2}\exp(i\pi/4).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения функций:

1.1. $y=\sqrt{2x^2+7x-5}$;

1.2. $y=\log_5(6\cos x-2)$;

1.3. $y=\dfrac{x^4+6x^3-8x+2}{x^2-5}$;

1.4. $y=5x^3-16x^2+2x-7$.

2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-6x^3+x^2-9}{7x^5+11x^4+2x^2-6x}$;

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-4x^2-5x+2}{4x^2-x+7x^3+18}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin(5x)}{32x}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-x^2+4x}{x^2+8x}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x}{11x}$;

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$;

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^x$;

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}(-5x^2-7x+18)$;

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

2.10. $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}(x-\sqrt{x^2-3})$;

2.11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$;

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(10\pi x)}{\mathrm{tg}(5x)}$.

3. Найти значение x и y из равенств:

a) $17x + 15i = 2 - 8iy$;

b) $6x - (5x - 3y)i = 7 + 2i$;

c) $(16 - 3i)x + (12 + 6)y = 10 + 6i$;

d) $(13i - 10)x + (12 - 13i)y = 12 - 23i$.

4. Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

a) $t = -4 + 2i\sqrt{3}$;

b) $t = 3 + 3i\sqrt{3}$;

c) $t = 2 - 2i$;

d) $t = 6i$.

5. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах.

a) $t = 2\exp\left(\dfrac{3\pi}{4}i\right)$;

b) $t = 4\exp\left(\dfrac{\pi}{4}i\right)$;

c) $t = 1{,}6\exp\left(\dfrac{10}{\pi}i\right)$;

d) $t = 7{,}6\exp\left(\dfrac{\pi}{6}i\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией одной независимой переменной?

2. Перечислить основные элементарные функции.

3. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.

4. Что такое предел функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$?

Дайте определение правого и левого пределов функции $y = f(x)$.

5. Дайте определение предела последовательности.

6. Какая функция называется бесконечно большой величиной при $x \to x_0$?

7. Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?

8. Сформулировать правила предельного перехода в случае арифметических действий.

9. В чем состоит правило предельного перехода для непрерывной функции?

10. Какое число называется комплексным?

11. Какие комплексные числа называются чисто мнимыми?

12. Какие комплексные числа называются сопряженными?

13. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?

14. Как записываются комплексное число в тригонометрической форме?

15. Как записываются комплексное число в показательной форме?

4. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление — это раздел математического анализа, связанный в основном с понятиями производной и дифференциала функции.

4.1. Производная первого порядка. Дифференциал. Производная второго порядка

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю [2, 20, 22].

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. производная функции

$$f(x) \quad \left(f'(x), y', \frac{dy}{dx}\right)$$

есть некоторая функция, полученная по определенным правилам из заданной функции.

Значение производной функции $y = f(x)$ в какой-то точке x_0 обозначают обычно так:

$$f'(x_0) \text{ или } y'_{x=x_0}.$$

Механический смысл производной — это предел средней скорости за бесконечно малый промежуток времени.

Геометрический смысл производной вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.1. Если значение производной от функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно $f'(x_0)$, то прямая, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, является касательной к графику функции в точке M_0.

Геометрический смысл производной иллюстрируется на рис. 4.1.

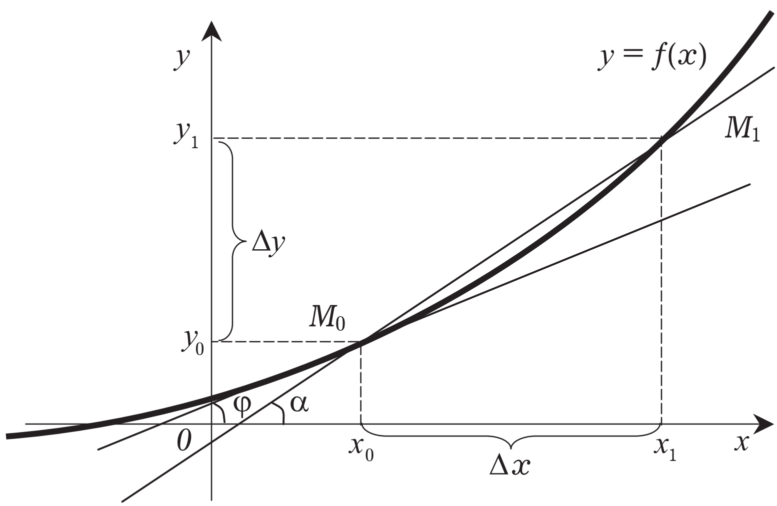


Рис. 4.1

Проведем через точки M_0 и M_1 секущую, угол α между секущей и положительным направлением оси $0x$ равен:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Будем перемещать точку M_1 по кривой в сторону точки M_0 т. е. устремим Δx к нулю. Предельным значением секущей будет касательная, проходящая через точку M_0. Тогда получим [2, 16, 17]:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi.$$

Установим связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Она видна из следующей теоремы,

Теорема 4.2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она непрерывна. Обратное утверждение неверно. В качестве примера возьмем функцию $y = |x|$. Ее график показан на рис. 4.2.

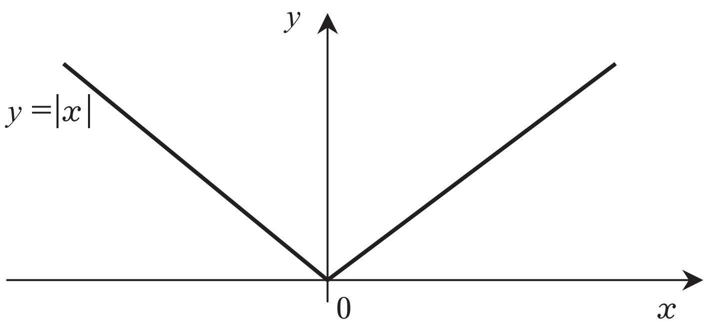


Рис. 4.2

Из него видно, что в точке $x = 0$ данная функция не имеет определенной касательной, а значит, не имеет в этой точке и производной.

Из определения производной следует способ ее вычисления.

Найдем производную функции $y = x^n$, где $n \in Z$, исходя из определения производной

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \left(nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Итак, $(x^n)' = nx^{n-1}$, например $(x^8)' = 8x^7$.

Можно доказать, что полученная формула верна для всех $n \in R$ [22].

Из приведенного примера видно, что использовать определение производной для ее вычисления дело достаточно трудоемкое. Поэтому гораздо проще, используя определение производной, вывести производные основных элементарных функций и сформулировать правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения, частного функций, сложной функции, обратной функции. По полученным формулам и правилам можно будет находить производные любых элементарных функций [2].

Производные основных элементарных функций

$(x^n)' = nx^{n-1}$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$;

$(e^x)' = e^x$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x;$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Дополним таблицу производных производными от гиперболических и обратных гиперболических функций, которые не являются основными элементарными функциями, но часто используются в различных приложениях [2, 22].

К гиперболическим функциям относятся гиперболические синус ($\operatorname{sh}x$), косинус ($\operatorname{ch}x$) и тангенс ($\operatorname{th}x$), которые находятся по формулам:

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \ \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \ \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Все эти функции определены на множестве действительных чисел (R) и связаны между собой следующими соотношениями:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$; $\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x$;

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x}; \ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x};$$

Функции, обратные $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{th}x$, являются обратными гиперболическими функциями и обозначаются $\operatorname{Arch}x$ (арксинус гиперболический), $\operatorname{Arsh}x$ (арккосинус гиперболический), $\operatorname{Arth}x$ (арктангенс гиперболический):

$$\mathrm{Arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$
$$\mathrm{Arch}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1});$$
$$\mathrm{Arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Производные гиперболических и обратных гиперболических функций находятся по формулам:

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x; \ (\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x; \ (\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$$
$$(\mathrm{Arsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \ (\mathrm{Arch}\, x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \ (\mathrm{Arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Правила дифференцирования

1. Производная алгебраической суммы функций:

$$(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x);$$

2. Производная произведения функций:

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x).$$

Исходя из этого правила для трех функций, получим,

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x))' = (f_1(x) \cdot f_2(x))' \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x) =$$
$$f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x) \cdot f_3(x) + f_3'(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(x);$$

3. Производная частного двух функций:

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_2'(x) \cdot f_1(x)}{\left[f_2(x)\right]^2}; \quad f_2(x) \neq 0;$$

4. Производная сложной функции.

Сформулируем теорему.

Теорема 4.3. Производная сложной функции равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной, т. е. если $y = f(u)$, а $u = \varphi(\mathrm{x})$ и $y = f(\varphi(x))$, то согласно данной теореме:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Аналогично выводится формула при любом числе промежуточных аргументов, т. е. производная сложной функции равна произведению производных от функций ее составляющих.

Например, найдем производную функции

$$y = \cos^2 4x.$$

$$y' = 2\cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 = -8\cos 4x \cdot \sin 4x = -4\sin 8x;$$

5. Производная обратной функции находится по формуле

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \text{ или } x'(y) = \frac{1}{y'(x)},$$

т. е. производные от взаимно обратных функций обратны по величине. В качестве примера найдем производную функции

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x'_y = \cos y \Rightarrow y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Примеры нахождения производных

Пример 4.1.

$$y = \log_{2x} \sin^2 x = \frac{\ln \sin^2 x}{\ln 2x}.$$

Прежде чем найти производную от заданной функции перейдем к другому основанию и найдем производную исходной функции по правилу производной частного.

$$y = \frac{\frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x \cdot \ln 2x - \frac{1}{2x} \cdot 2\ln \sin^2 x}{(\ln 2x)^2} =$$

$$= \frac{2\mathrm{ctg} x \cdot \ln 2x - x^{-1} \ln \sin^2 x}{(\ln 2x)^2}.$$

Пример 4.2.

$$y = x^{\sin x}.$$

Данная функция называется сложной показательной функцией. Чтобы найти производную от такой функции прологарифмируем ее левую и правую части, а затем продифференцируем полученные выражения, помня, что y есть функция от x [2]

$$\ln y = \sin x \ln x; \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x;$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right); \quad y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Дадим понятие о дифференциале функции.

Если задана непрерывная функция $y = f(x)$, имеющая производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\mathrm{x})$,
где $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Далее получаем:

$$\Delta x = f\,'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Дифференциалом (от латинского слова *differentia* — разность) функции называется главная часть приращения этой функции, линейная относительно приращения аргумента x, т. е.

$$dy = f\,'(x) \cdot \Delta x.$$

Геометрический смысл дифференциала виден из рис. 4.3.

Дифференциал функции геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведенной в точке $M(x,y)$ при данных значениях x, Δx [16, 22].

Рассмотрим функцию $y = x$.

Для нее получим, что $dy = \Delta x$, а так как y можно заменить на x по условию, то имеем $dx = \Delta x$.

Следовательно, дифференциал функции равен $dy = y'dx$. Отсюда следует формула:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Дадим понятие о производной второго порядка. Предположим, что нам задана функция $y = f(x)$ имеющая производную $y' = f\,'(x)$.

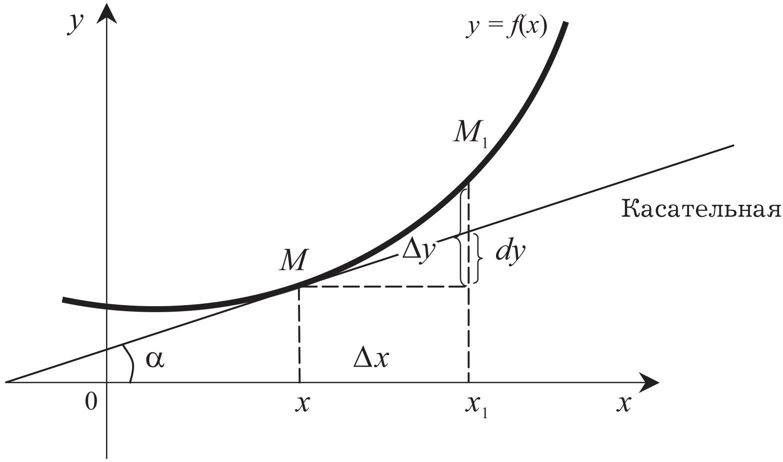


Рис. 4.3

Эта производная также является функцией и если она дифференцируема, то от нее можно взять производную. Она будет называться производной второго порядка:

$$y'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Например, найдем вторую производную функции.

Пример 4.3.

$$y = 3x^2 + \sin^3 x.$$
$$y' = 6x + 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$
$$y'' = 6 + 3(2\sin x \cdot \cos^2 x - 3\sin^3 x).$$

С помощью первой и второй производных можно исследовать функцию на экстремум (max, min), находить точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости функции.

4.2. Некоторые сведения о функциях многих переменных. Понятие о частной производной

Ранее были рассмотрены функции, которые зависели от одного независимого аргумента. Но в реальной действительности чаще приходится иметь дело с функциями, которые зависят от двух, трех и большего числа независимых аргументов.

Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b будет функцией двух независимых аргументов. Функция эта имеет вид $S_{пр} = a \cdot b$, где a и b могут быть любыми действительными положительными числами, так как и стороны прямоугольника, и его площадь не могут быть отрицательными величинами.

Положение какого-либо объекта на поверхности планеты определяется тремя координатами: широтой, долготой и высотой, т. е. является функцией трех независимых аргументов.

Положение космического аппарата (КА), движущегося по невозмущенной эллиптической орбите вокруг Земли, есть функция шести аргументов (трех координат (x, y, z) и трех составляющих скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$). Эта функциональная зависимость имеет следующий вид:

$$F = \varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

В гуманитарных науках, например в юриспруденции и экономике, жестко детерминированные функциональные связи встречаются нечасто. Там используются многофакторные статистические взаимосвязи вида:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \Delta f(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) + \varepsilon(y_1, y_2, ..., y_m).$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — учтенные признаки, под влиянием которых меняется функция Z,

$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ — ошибки учтенных признаков,

$y_1, y_2, ..., y_m$ — неучтенные признаки, которые могут влиять на функцию Z.

Сначала рассмотрим функцию двух независимых аргументов x и y. Переменная величина Z называется функцией переменных величин x и y на множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение величины Z [2, 3, 6, 20].

Множество D называется областью определения функции Z. Обычно она представляет собой часть плоскости $x0y$, ограниченной одной или несколькими линиями. Тот факт, что Z есть функция независимых аргументов x и y записывают так:

$$Z = f(x, y).$$

Функция двух аргументов может задаваться следующими способами:

1) аналитическим, т. е. приводится формула, при помощи которой по заданным значениям аргументов x и y находят значения функции Z. Например,

$$Z = \frac{1}{2}xy;\ Z = \sin^2(x + 2y);\ Z = \sqrt[3]{\sin^3 x - \ln y};\ Z^2 = x^2 + y^2;$$

2) табличным, т. е. для некоторого количества пар аргументов (x, y) приводятся значения функции (Z).

x \ y	y_1	y_2	...	y_n
x_1	Z_{11}	Z_{12}	...	Z_{1n}
x_2	Z_{21}	Z_{22}	...	Z_{2n}
...	...	...	...	...
x_n	Z_{n1}	Z_{n2}	...	Z_{nn}

3) графическим.

Графиком функции двух независимых аргументов в системе прямоугольных координат называется множество точек, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты — соответствующими значениями Z. Графиком функции двух непрерывных аргументов обычно служит поверхность. Например, графиком функции $Z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения (рис. 4.4).

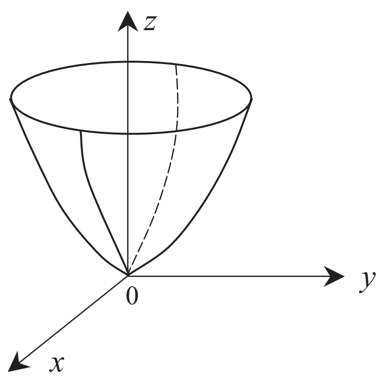


Рис. 4.4

Теперь дадим определение функции n независимых аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$.

Переменная величина W называется функцией переменных величин $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение W.

Тот факт, что W есть функция аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, записывают так:

$$W = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Геометрическая иллюстрация функций от n независимых аргументов теряет наглядность при $n > 2$.

При исследовании поверхностей 2-го порядка часто применяют метод сечений, который заключается в том, что определение вида поверхности по ее уравнению производится путем изучения кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Дадим определение предела функции двух независимых аргументов.

Число b называется пределом функции $Z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся от x_0 и y_0, соответствующие значения функции $f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа b [6, 22].

Тот факт, что b есть предел функции $Z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x, y) = b.$$

Теперь введем понятия частных производных по независимым аргументам.

Рассмотрим функцию двух независимых аргументов x и y

$$Z = f(x, y).$$

Предположим, что $y = \text{const}$ и рассмотрим $f(x, y)$ как функцию одного независимого аргумента x.

Если эта функция дифференцируема, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y).$$

Нижний индекс (x) указывает на то, что производная берется по аргументу x.

Частной производной по x от функции $Z = f(x, y)$ называется функция переменных величин x и y, которая получается при дифференцировании $f(x, y)$ по x в предположении, что $y = \text{const}$.

Она обозначается так:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, Z'_x.$$

Аргумент y считается постоянным только в процессе дифференцирования. После нахождения частной производной функция $\frac{\partial Z}{\partial x}$ будет зависеть от двух аргументов x и y.

Аналогично определим частную производную по y от функции $Z = f(x, y)$ при $x = \text{const}$. Как предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x,y).$$

Она обозначается так: $\frac{\partial Z}{\partial y}; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, Z'_y$. При нахождении частных производных используются формулы и правила дифференцирования функции одного независимого аргумента. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 4.4.

$Z = 5x^3 \cdot \cos y$.

$\frac{\partial Z}{\partial x} = 15x^2 \cdot \cos y;\ \frac{\partial Z}{\partial y} = -5x^3 \cdot \sin y;$

Пример 4.5.

$Z = 6x^4 \cdot \operatorname{tg} y + 5x \cdot \ln y$,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 24x^3 \cdot \operatorname{tg} y + 5\ln y,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{6x^4}{\cos^2 y} + \frac{5x}{y}.$$

Аналогично можно определить частные производные от любого числа независимых аргументов.

Например, имеем функцию n независимых переменных

$$W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Определим частную производную по аргументу x_1

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определим частную производную по аргументу x_2

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_2}$$

и так далее.

Пример 4.6.

$W = 2x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \ln x_3;$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2 \cdot \cos x_2 \cdot \ln x_3; \ \frac{\partial W}{\partial x_2} = -2x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ln x_3;$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_3} = \frac{2x_1 \cdot \cos x_2}{x_3}.$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть имеем функцию двух независимых аргументов $Z = f(u, v)$, причем аргументы являются функциями независимых переменных x и y, т. е. $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$, следовательно

$$Z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

В этом случае частные производные функции Z по аргументам x и y будут вычисляться по формулам [2, 22].

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пример 4.7.

$Z = e^{3xy} \cdot \sin(5x + y).$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = e^{3xy} \cdot 3y \cdot \sin(5x + y) + e^{3xy} \cdot \cos(5x + y) \cdot 5 =$$

$$= e^{3xy} \cdot [3y \cdot \sin(5x+y) + 5\cos(5x+y)],$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = e^{3xy} \cdot 3x \cdot \sin(5x+y) + e^{3xy} \cdot \cos(5x+y) =$$

$$= e^{3xy} \cdot [3x \cdot \sin(5x+y) + \cos(5x+y)].$$

Пример 4.8.

$Z = \sin(x^3 y^2) \cdot \ln(3y + x^2)$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \cos(x^3 y^2) \cdot 3x^2 \cdot y^2 \cdot \ln(3y + x^2) + \frac{\sin(x^3 y^2)}{(3y + x^2)} \cdot 2x.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \cos(x^3 y^2) \cdot 2yx^3 \cdot \ln(3y + x^2) + \frac{\sin(x^3 y^2)}{(3y + x^2)} \cdot 3.$$

Производная по направлению и градиент

Предположим, что в каждой точке A некоторой области D задано значение скалярной физической величины W (температура, давление, влажность и т. п.). Тогда W называется скалярной функцией точки и записывается так $W = W(A)$. Если в области D задана скалярная функция точки $W(A)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле.

Если скалярное поле не зависит от времени, оно называется стационарным. В противном случае поле будет нестационарным, т. е. будет зависеть не только от точки A, но и от времени t.

Производная по направлению

В гиперпространстве, в котором задано поле $W = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ возьмем точку $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и найдем скорость изменения функции при движении точки A в направлении некоторого вектора $\vec{\mu}$. Этот вектор начинается в точке A, а углы между ним и координатными осями $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (направляющие косинусы) равны: $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \ldots, \cos\varphi_n$.

Приращение ΔW, получаемое при переходе от точки A в точку A_1, по направлению $\vec{\mu}$ равно:

$\Delta W = W(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - W(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Тогда $\Delta\mu = \left|AA_1\right| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$.

Производной от функции $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ по направлению $\vec{\mu}$ называется предел

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \lim_{\Delta\mu \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta \mu}\right).$$

То есть производная характеризует скорость изменения функции по данному направлению.

В курсах математического анализа доказывается (см., например, [2]), что

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \frac{\partial W}{\partial x_1}\cos\varphi_1 + \frac{\partial W}{\partial x_2}\cos\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x_n}\cos\varphi_n.$$

Пример 4.9. Найти производную функции

$$W = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 - 4x_1x_4^2$$

в т. $A(0, 1, 2, 1)$ по направлению к т. $A_1(2, 0, 1, 3)$

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AA_1} = (2, -1, -1, 2)$:

$\cos\varphi_1 = 0{,}632$; $\cos\varphi_2 = -0{,}316$; $\cos\varphi_3 = -0{,}316$; $\cos\varphi_4 = 0{,}632$.

Далее определяем частные производные исходной функции W и их значения в точке A, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_1 - 4x_4^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = 4x_2;\ \frac{\partial W}{\partial x_3} = 9x_3^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_4} = -8x_1x_4.$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_A = -4;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)_A = 4;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)_A = 36;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)_A = 0.$$

Затем вычисляем искомую производную по направлению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)_A = -15{,}179.$$

Знак минус говорит о том, что функция в заданном направлении убывает. Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, называют градиентом функции и обозначают grad W, т. е.

$$\operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) \text{или}$$

$$\operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)\vec{e}_2 + ... + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)\vec{e}_n.$$

Теперь формулу для производной по направлению можно переписать в виде скалярного произведения grad W на единичный вектор $\vec{e}_\mu = (\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, ..., \cos\varphi_n)$, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = (\operatorname{grad} W,\ \vec{e}_\mu) \text{ или } \frac{\partial W}{\partial \mu} = \left|\operatorname{grad} W\right| \cos\alpha,$$

где α — угол между вектором grad W и направлением $\vec{\mu}$.

Из последней формулы видно, что $dW / d\mu$ достигает своего максимального значения в том случае, когда $\alpha = 0$. Поэтому направление градиента совпадает с направлением $\vec{\mu}$ вдоль которого функция меняется быстрее всего, т. е. grad W показывает направление скорейшего возрастания функции. А наибольшая скорость изменения функции W в точке A равна:

$$\left|\operatorname{grad} W\right| = \sqrt{(\partial W / \partial x_1)^2 + (\partial W / \partial x_2)^2 + ... + (\partial W / \partial x_n)^2}.$$

Пример. Найти наибольшую скорость возрастания функции $W = 2x_1x_2 + 3x_2^2x_3 - 4x_4^3$ в точке $A(1, 2, -1, 3)$.

Вначале находим частные производные

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_2;\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = 2x_1 + 6x_2x_3;\ \frac{\partial W}{\partial x_3} = 3x_2^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_4} = -12x_4^2.$$

Затем получаем

$$\operatorname{grad} W = 2x_2\vec{e}_1 + (2x_1 + 6x_2x_3)\vec{e}_2 + 3x_2^2\vec{e}_3 - 12x_4^2\vec{e}_4$$

и вычисляем $\operatorname{grad} W(1, 2, -1, 3) = 4\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 - 108\vec{e}_4$ и, наконец, находим наибольшую скорость возрастания функции $|\operatorname{grad} W(A)| = 109{,}2$.

4.3. Некоторые приложения дифференциального исчисления

4.3.1. Формула Тейлора

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n + 1)$-го порядка включительно на некотором интервале, включающем точку x_0. Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = x_0$ равно значению функции $y = f(x)$ в этой точке, а значение его производных до n-го порядка в точке $x = x_0$ равны значениям соответствующих производных от функции $y = f(x)$ в этой точке, т. е.

$$P_n(x_0) = f(x_0);\ P_n'(x_0) = f'(x_0);\ P_n''(x_0) = f''(x_0);$$
$$P_n'''(x_0) = f'''(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{4.1}$$

Искомый многочлен (более подробно см., например, [20,22]) будет иметь вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(x_0). \tag{4.2}$$

Через $R_n(x)$ обозначим разность значений данной функции $y = f(x)$и многочлена, находимого по формуле (4.2), т. е. $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Отсюда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, или

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_o) + R_n(x), \tag{4.3}$$

где $R_n(x)$ — это остаточный член, который может быть записан в разных формах. Мы приведем так называемую форму Лагранжа, которая имеет вид:

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta). \tag{4.4}$$

Здесь $\eta \in [x, x_0]$ и ее можно представить в виде $\eta = x_0 + \lambda(x - x_0)$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда формула для остаточного члена примет вид:

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\lambda(x-x_0)].$$

А формула

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\\ +\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\\ +\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}[x_0+\lambda(x-x_0)].\end{aligned} \tag{4.5}$$

называется формулой Тейлора для функции $y = f(x)$.

Если в формуле (4.5) принять $x_0 = 0$, то она примет вид:

$$\begin{aligned}f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\\ +\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\lambda x).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь $0 < \lambda < 1$, а формулу (4.6) часто называют формулой Маклорена. Теперь найдем разложение функции $y = e^x$ по формуле (4.6).

$f(x) = e^x$; $f(0) = 1$; $f'(x) = e^x$; $f'(0) = 1$; $f''(x) = e^x$;

$f''(0) = 1$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$.

Эти данные подставляем в формулу (4.6) и получаем:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda x},\text{ где } 0<\lambda<1.$$

Если $|x| \le 1$, то взяв $n = 8$, найдем оценку остаточного члена $R_n < \frac{1}{9!}3$. А если $x = 1$, то получим формулу для приближенного вычисления числа e [22], т. е.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71827.$$

Здесь верны первые четыре знака после запятой, так как ошибка не превосходит числа $\frac{3}{9!}$ или 10^{-5}. Заметим, что какое бы ни было x, остаточный член $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda x} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. Поэтому при $\forall x$, взяв достаточное число членов разложения, по формуле (4.6) получим e^x с любой необходимой степенью точности.

4.3.2. Правило Лопиталя

Данное правило помогает раскрывать неопределенности вида: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, его суть выражается теоремой [2, 20, 22].

Теорема 4.4 Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности. Если отношение производных этих функций имеет предел, то отношение самих функций тоже имеет предел, который равен пределу отношения производных, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}; \tag{4.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{4.8}$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры применения этого правила [4, 23].

Пример 4.10.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Ранее мы сводили этот предел ко второму замечательному пределу и пользовались тем, что $\ln x$ является непрерывной функцией. Заметим, что простота взятия данного предела кажущаяся, так как дифференцирование функций само опирается на знание пределов [2].

Пример 4.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{6\cos 3x}=\frac{7}{6}.$$

Пример 4.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3}=\frac{1}{3}.$$

Пример 4.13.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-3}=-1.$$

Заметим, что если производные числителя и знаменателя одновременно стремятся к нулю или к бесконечности можно применять правило Лопиталя еще раз, а в случае необходимости и далее.

Пример 4.14.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3+2x-6}{7x^4+20x^2-7x+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3-9x^2+2}{28x^3+40x-7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{60x^2-18x}{84x^2+40}=\lim_{x\to\infty}\frac{120x-18}{168x}=\lim_{x\to\infty}\frac{120}{168}=\frac{5}{7}.$$

Пример 4.15.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{6}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{6}{x}\right)\left(-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}6\cos\frac{6}{x}=6.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{7}=\infty.$$

Формулы (4.7) и (4.8) справедливы только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Приведем пример, когда отношение функций имеет предел, а отношение их производных не стремится ни к какому пределу.

Пример 4.16.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

А предел производных равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

При $x \to \infty$ этот предел колеблется между 0 и 2 и поэтому не имеет предела. То есть к данному примеру правило Лопиталя применить нельзя, оно не является универсальным.

При помощи правила Лопиталя можно раскрывать другие неопределенности, например:

$$0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 1^{\infty};\quad \infty^{0};\quad 0^{0}.$$

Эти случаи сводятся к рассмотренным нами неопределенностям $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4.17.

$$\lim_{x\to 0} x^3 \ln 5x.$$

Это случай $0 \cdot \infty$.

Преобразуем данный предел к виду $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 5x}{\frac{1}{x^3}}$, т. е. привели исходный предел к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Теперь можно применить правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 5x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5x}\cdot 5}{-\frac{3}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{3}\right)=0.$$

Пример 4.18.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{\ln x}\right),$$

т. е., имеем случай $\infty-\infty$. Исходный предел преобразуем к виду

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x\ln x-2x+2}{(x-1)\ln x},$$

т. е. мы пришли к случаю $\frac{0}{0}$, поэтому применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x\ln x-2x+2}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{3\ln x+\frac{3x}{x}-2}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{3\ln x+1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Пример 4.19.

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$, т. е., имеем случай 1^{∞}.

Рассмотрим предел

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x}$, а это случай $\frac{0}{0}$, поэтому к последнему пределу применимо правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2}{1}=\lim_{x\to 0}(-2\operatorname{tg}2x)=0.$$

Поэтому исходный предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1.$$

Пример 4.20.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{7x}$, т. е., имеем случай 0^{0}.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^{7x}=\lim\limits_{x\to 0}7x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{7x}}$, т. е. пришли к случаю $\frac{\infty}{\infty}$. Теперь к последнему примеру применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{7x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{7x^2}}=\lim_{x\to 0}(-7x)=0$$

Поэтому исходный предел равен

$$\lim_{x\to 0}x^{7x}=e^0=1.$$

4.3.3. Асимптоты

Прямая L называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние δ от переменной точки A функции до этой прямой при удалении точки A в бесконечность стремится к нулю (рис. 4.5) [2, 6, 22].

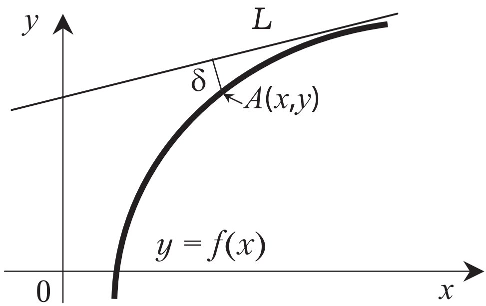


Рис. 4.5

Различают вертикальные асимптоты (параллельные оси $0y$) и наклонные.

Сначала рассмотрим вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\pm\infty,\text{ или }\lim_{x\to x_0-}f(x)=\pm\infty,\text{ или }\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,$$

то прямая $x = x_0$ является асимптотой функции $y = f(x)$ и наоборот, если прямая $x = x_0$ есть асимптота кривой $y = f(x)$, то существуют указанные выше пределы.

То есть для нахождения вертикальных асимптот надо найти такие значения $x = x_0$, при приближении к которым функция $y = f\ (x)$ стремится к бесконечности. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечное число вертикальных асимптот (рис. 4.6): $x = \pm\dfrac{\pi}{2}; \quad x = \pm\dfrac{3\pi}{2}; \quad x = \pm\dfrac{5\pi}{2}; \ldots,$

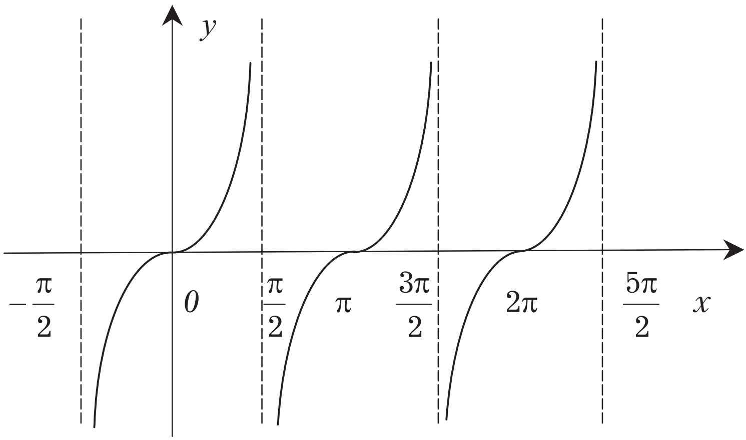


Рис. 4.6

Теперь рассмотрим наклонные асимптоты. Предположим, что функция $y = f\ (x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax + b$ (рис. 4.7).

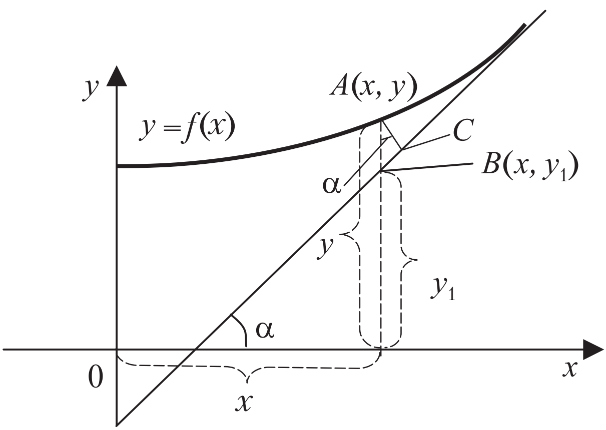


Рис. 4.7

Нам нужно найти коэффициенты a и b. Точка $A(x, y)$ принадлежит функции $y = f(x)$, а точка $B(x, y_1)$ — асимптоте. Длина отрезка AC — это расстояние от точки A до асимптоты и по условию

$$\lim_{x\to+\infty}(AC)=0. \tag{4.9}$$

Обозначим через α угол наклона асимптоты к положительному направлению оси $0x$ и из ΔABC найдем

$$(AC)=(\mathrm{AB})\cos\alpha \Rightarrow (AB)=\frac{(AC)}{\cos\alpha},$$

так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \mathrm{const}$, то в силу (4.9) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(AB)=0, \tag{4.10}$$

так как $(AB) = |y - y_1| = |f(x) - ax - b|$, то (4.10) принимает следующий вид:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0. \tag{4.11}$$

Следовательно, если $y = ax + b$ есть асимптота, то выполняется (4.11) и наоборот, если при коэффициентах a и b выполняется (4.11), то прямая $y = ax + b$ является асимптотой. Теперь найдем коэффициенты a и b. Из (4.11) получаем

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Так как $x \to +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0,$$

а так как b есть число, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$, поэтому получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0$$

или

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{4.12}$$

Получив a из (4.11) находим b по формуле

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]. \tag{4.13}$$

Следовательно, если $y = ax + b$ является асимптотой, то a и b находятся по формулам (4.12) и (4.13). Если хотя бы один из пределов (4.12) или (4.13) не существует, то функция $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет [22].

Все приведенные рассуждения справедливы и при $x \to -\infty$. Так как асимптотическое изменение функции может быть различным при стремлении x к положительной и отрицательной бесконечности, то надо раздельно рассматривать случаи $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Если существует асимптота в первом случае, то ее называют левосторонней, а во втором случае — правосторонней.

Если при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ пределы (4.12) и (4.13) совпадают, то левосторонняя и правосторонняя асимптоты являются частями одной и той же прямой.

Заметим, что если функция дробно-рациональная, то при нахождении a и b сразу можно рассматривать произвольное стремление к бесконечности.

Рассмотрим примеры нахождения наклонных асимптот.

Пример 4.21.

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}.$$

Так как данная функция дробно-рациональная, то сразу рассматриваем произвольное стремление x к ∞

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(2x^2-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3 - x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - x(2x^2-1)}{2(2x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - 2x^3 + x}{4x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4 - \frac{2}{x^2}} = 0.$$

Поэтому получаем $y = \frac{1}{2}x$.

Пример 4.22.

$$y = 2x + \ln x.$$

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 2$$

(по правилу Лопиталя)

$$b = \lim_{x\to+\infty}(2x+\ln x - 2x) = \lim_{x\to+\infty}\ln x = \infty.$$

Из последнего равенства следует, что исходная функция наклонной асимптоты не имеет.

4.3.4. Исследование функций с помощью производных первого и второго порядков и построение их графиков

Приведем ряд теорем, позволяющих находить участки монотонности (возрастания, убывания) функции, экстремумы функции, участки выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба.

Вначале сформулируем достаточный признак монотонности [2, 16]:

1) если $f'(x) > 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале возрастает;

2) если $f'(x) < 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале убывает;

3) если $f'(x) = 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале постоянна.

Геометрическая интерпретация этого признака показана на рис. 4.8.

Важную роль в исследовании функций играют точки, отделяющие интервалы ее возрастания от интервалов ее убывания. Эти точки носят название экстремумов функции или ее локальных максимумов и минимумов. Слово “локальный” означает, что точка будет максимальной (минимальной) лишь на каком-то интервале.

Теперь приведем определение:

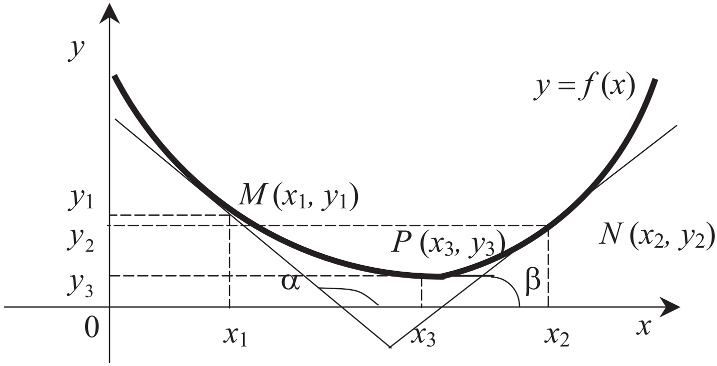


Рис. 4.8

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x = x_1) < 0; \operatorname{tg} \beta = y'(x = x_2) > 0; y'(x = x_3) = 0$$

1) точка M (x_1, y_1) есть точка локального максимума функции $y = f(x)$, если $f(x_1)$ — наибольшее значение функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки M (x_1, y_1);

2) точка N (x_2, y_2) есть точка локального минимума функции $y = f(x)$, если $f(x_2)$ — наименьшее значение функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки N (x_2, y_2).

Функция на своей области определения может иметь несколько экстремумов. Наибольшее и наименьшее значения функции ее области определения обычно называют абсолютным максимумом и абсолютным минимумом.

Понятие экстремума функции иллюстрируется рис. 4.9.

Теперь сформулируем необходимый признак экстремума [2, 16]: Если в точке (т. A, т. B, т. C, т. D на рис. 4.9) функция $y = f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю (т. A, т. B, т. D на рис. 4.9), либо не существует (т. C на рис. 4.9).

Приведенный признак не является достаточным, т. е. из того факта, что производная в данной точке равна нулю или не существует, еще не следует, что эта точка есть экстремум функции.

Недостаточность данного признака проиллюстрируем примером 4.23. Рассмотрим функцию $y = x^3$ и найдем ее экстремум,

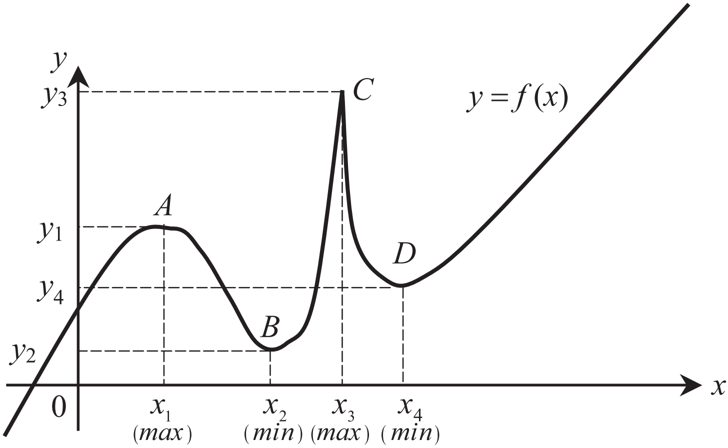


Рис. 4.9

используя приведенный признак (найдем производную данной функции, приравняем ее к нулю и найдем координаты экстремума, если он существует).

$y' = 3x^2$; $3x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ — экстремум данной функции в соответствии с необходимым признаком.

Но из графика функции $y = x^3$ (рис. 4.10) следует, что экстремума в точке с координатами x = 0, y = 0 у данной функции нет.

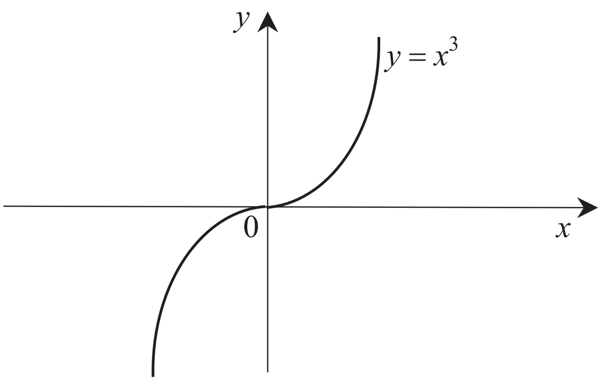


Рис. 4.10

Сформулируем теперь достаточный признак экстремума: точка (т. A, т. B, т. C, т. D на рис. 4.9) есть точка экстремума функции $y = f\ (x)$, если производная этой функции $y' = f\ '(x)$ при переходе x через критическую точку (точку, где производная равна нулю или не существует) меняет знак. Если знак меняется с плюса на минус (т. A, т. C на рис. 4.9), то имеем локальный максимум, а если знак меняется с минуса на плюс (т. B, т. D на рис 4.9), то имеем локальный минимум.

Заметим, что функция $y = f\ (x)$ должна быть непрерывна на интервале, содержащем критическую точку.

Пример 4.23. Производная функции

$$y = \frac{2}{x^2};\ \ y' = \frac{-4}{x^3}$$

меняет знак при переходе через точку $x = 0$, но экстремума в ней не имеет, так как в этой точке она разрывна [2].

Вернемся к примеру 4.22 и проверим, удовлетворяется ли там достаточный признак экстремума (рис. 4.11).

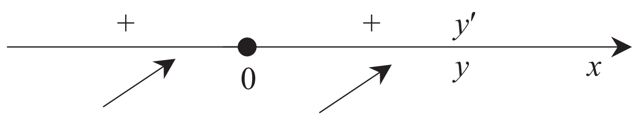


Рис. 4.11

Из рисунка видно, что производная функции $y = x^3$ не меняет знака при переходе x через точку $x = 0$, поэтому данная функция не имеет экстремума в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$.

Пример 4.24. Рассмотрим функцию

$y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2.$

$y' = 9x^2 + 12x - 1$

$9x^2 + 12x - 1 = 0$

$x_1 \approx 0{,}06; x_2 \approx -1{,}4$

$y' = 9(\text{x} - 0{,}06)(x + 1{,}4)$

Применяя достаточный признак экстремума находим, что в точке $x = -1{,}4$ — максимум, а в точке $x = 0{,}06$ — минимум (рис. 4.12).

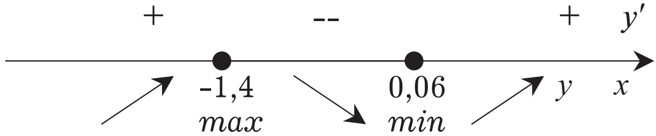


Рис. 4.12

Точки экстремума можно находить и с помощью второй производной. Для этого сформулируем второй достаточный признак экстремума: некоторая точка с координатами x_0, y_0 будет точкой экстремума функции $y = f(x)$, если $f\,'(x_0) = 0$, а $f\,''(x_0) \neq 0$, при этом, если $f\,''(x_0) > 0$, то данная точка будет точкой минимума функции $y = f\,(x)$, а если $f\,''(x_0) < 0$ — точкой максимума; в том случае если $f\,''(x_0) = 0$ данный признак не применим [2, 16].

Используем приведенный признак для нахождения экстремумов функции $y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2$ из примера 4.24.

$y'' = 18x + 12.$

$y''(\text{x} = 0{,}06) = 18 \cdot 0{,}06 + 12 \approx 13{,}1.$

$y''(\text{x} = -1{,}4) = 18 \cdot (-1{,}4) + 12 \approx -13{,}2.$

Следовательно, в точке $x = 0{,}06$ исходная функция будет иметь минимум, а в точке $x = -1{,}4$ — максимум.

Теперь покажем, как применять вторую производную для нахождения участков выпуклости и вогнутости функции и ее точек перегиба.

Сначала приведем соответствующие определения.

График дифференцируемой функции $y = f\,(x)$ называется вогнутым вверх (в положительном направлении оси ординат) на некотором интервале, если на этом интервале он расположен выше касательной, проведенной к любой точке графика в этом интервале (рис. 4.13).

График дифференцируемой функции $y = f\,(x)$ называется выпуклым вверх (в положительном направлении оси ординат) на некотором интервале, если на этом интервале он расположен ниже касательной, проведенной к любой точке графика в этом интервале (рис. 4.14).

Точки, отделяющие участки выпуклости функции от участков ее вогнутости (и наоборот), называются точками перегиба.

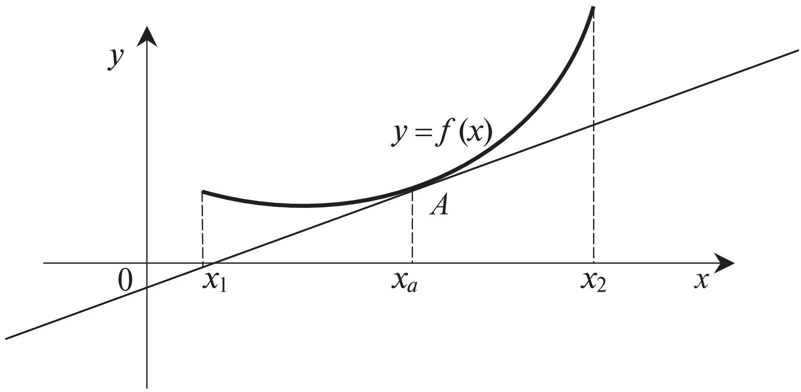


Рис. 4.13

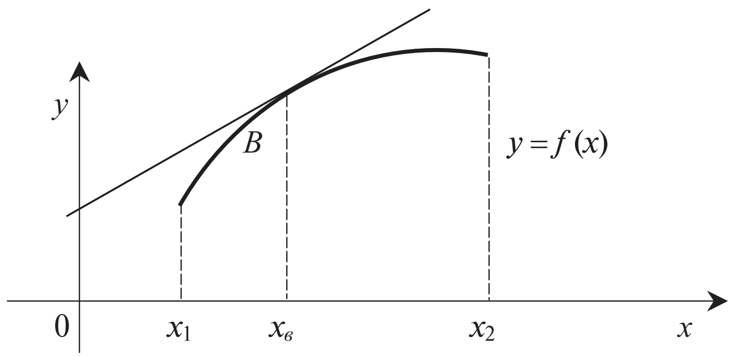


Рис. 4.14.

Теперь сформулируем теорему.

Теорема 4.5. Если вторая производная функции $y = f\ (x)$ всюду на некотором интервале меньше нуля, то функция $y = f\ (x)$ на этом интервале — выпуклая; если вторая производная функции $y = f\ (x)$ всюду на некотором интервале больше нуля, то функция $y = f\ (x)$ на этом интервале — вогнутая [2, 16, 20].

Приведем также необходимый признак существования точки перегиба: если точка с координатами x_0, y_0 является точкой перегиба функции $y = f\ (x)$, то вторая производная данной функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует [2, 16].

Недостаточность данного признака мы проиллюстрируем примером.

Пример 4.25. Рассмотрим функцию $y = x^4$. Воспользовавшись приведенным выше признаком, проверим, есть ли у этой функции точки перегиба.

$y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$

$12x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ должна быть точкой перегиба по необходимому признаку, но если взглянуть на график этой функции (рис. 4.15) видно, что в данной точке перегиба нет.

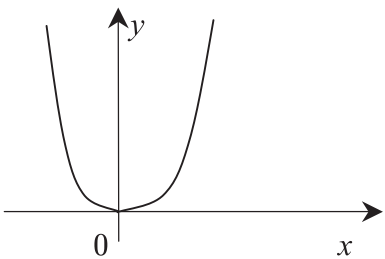


Рис. 4.15

Поэтому сформулируем достаточный признак существования точки перегиба: точка с координатами x_0, y_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, если $f''(x)$, меняет знак при переходе x через x_0; если знак меняется с минуса на плюс, то слева от данной точки лежит участок выпуклости, а справа — участок вогнутости, а если знак меняется с плюса на минус, то наоборот [2, 16].

Применим данный признак к функции из примера 4.25.

Из рис. 4.16 видно, что достаточный признак не выполняется, поэтому в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ перегиба нет.

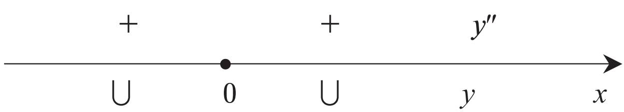


Рис. 4.16

Теперь применим достаточный признак существования точки перегиба к функции из примера 4.24.

В данном случае (рис. 4.17) достаточный признак свидетельствует о том, что точка с абсциссой $\left(-\frac{2}{3}\right)$ является точкой перегиба функции $y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2$.

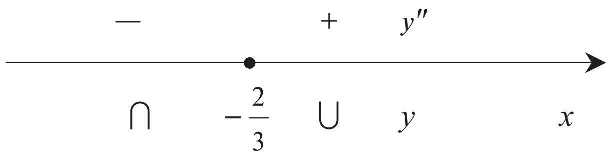


Рис. 4.17

$$y'' = 18x + 12;\ 18x + 12 = 0;\ x = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}.$$

Теперь приведем схему, по которой удобно проводить исследование функций [2]:

1. Нахождение области определения функции, точек ее разрыва, интервалов ее непрерывности и вертикальных асимптот.

2. Проверка функции на четность, нечетность, периодичность.

3. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат (если это не требует больших вычислительных затрат).

4. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции.

5. Нахождение участков выпуклости, вогнутости функции и точек ее перегиба.

6. Нахождение наклонных асимптот.

7. Построение графика функции по результатам проведенного исследования.

Пример 4.26.

Теперь в соответствии с приведенной схемой исследуем функцию $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Данная функция определена на всей оси $0x$ за исключением точки $x = 2$, т. е. $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой данной функции, так как

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty;\ \ \lim_{x\to 2-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty.$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической, так как $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x+T) \neq f(x)$, где T — период, а график данной функции проходит через начало координат.

Теперь найдем первую производную исходной функции и найдем участки монотонности и экстремумы.

$$y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2};$$

$$x^2 - 4x = 0;\ x(x-4) = 0;\ x = 0;\ x = 4.$$

Точку $x = 2$, где не существует первой производной исходной функции, на экстремум можно не проверять, так как в этой точке сама функция имеет бесконечный разрыв.

Следовательно (рис. 4.18), в соответствии с достаточным признаком экстремума данная функция имеет максимум в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ и минимум в точке с координатами $x = 4$, $y = 8$.

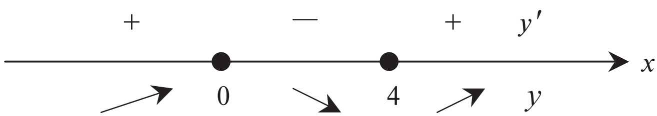


Рис. 4.18

Теперь найдем вторую производную и определим участки вогнутости, выпуклости и точки перегиба, используя теорему 4.5 и достаточный признак существования точки перегиба

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(x-2)[(2x-4)(x-2) - 2x^2 + 8x]}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Таким образом вторая производная нигде не обращается в ноль, следовательно, данная функция не имеет точек перегиба. Надо только проверить, меняет ли вторая производная исходной функции знак при переходе x через точку бесконечного разрыва $x = 2$ (второй производной заданной функции также не существует в точке $x = +2$).

Поэтому (рис. 4.19) слева от точки $x = 2$ исходная функция будет выпуклой, а справа от точки $x = 2$ — вогнутой.

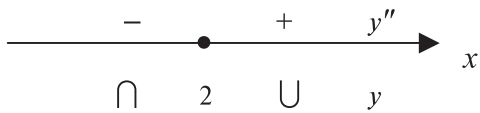


Рис. 4.19

Теперь проверим, имеет ли исходная функция наклонные асимптоты, для этого воспользуемся формулами (4.12) и (4.13) (так как заданная функция является дробно-рациональной, можно рассматривать произвольное стремление x к бесконечности).

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2.$$

Поэтому прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой исходной функции.

Теперь по результатам проведенного исследования построим график заданной функции (рис. 4.20).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные следующих функций:

1.1. $y = \log_{\cos 2x}(5\sin^2 8x - e^{4x^3})$;

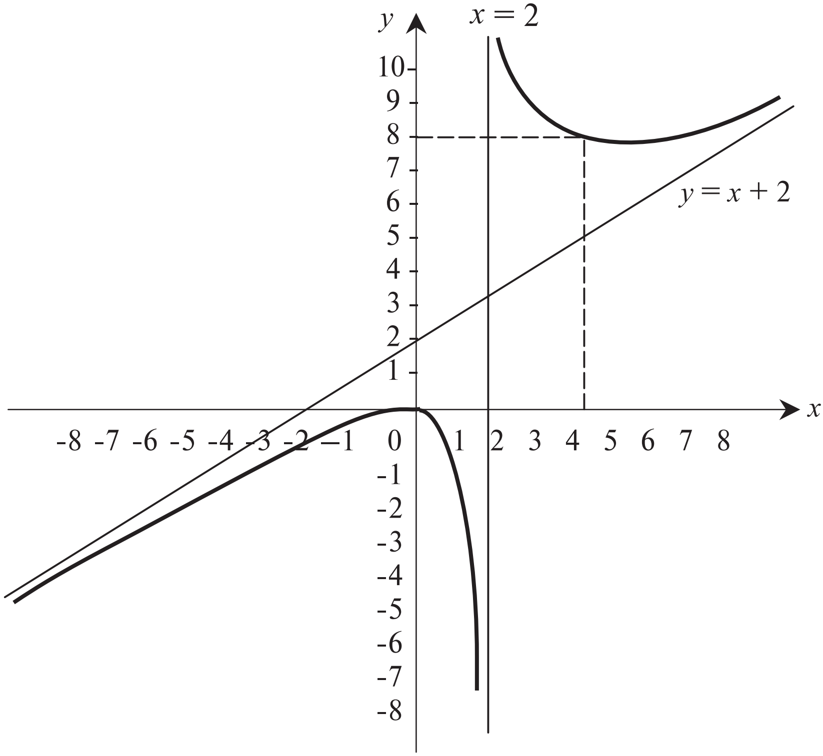


Рис. 4.20

1.2. $y = \left(\mathrm{tg}5x\right)^{\cos^3 x}$;

1.3. $y = e^{\mathrm{tg}^3 x} \cdot \ln^6(2x^4 + 7x)$;

1.4. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\cos^2 5x - x^6}}{16\mathrm{tg}^3 7x}$;

1.5. $y = 6^{\mathrm{ctg}^2 x} \cdot x^8 + \ln^2 4x$;

1.6. $y = e^{\mathrm{tg}^3 x} \cdot 7^{\cos^2 2x}$;

2. Найти вторые производные следующих функций:

2.1. $y = 6x^4 + 4\sin 3x$;

2.2. $y = e^{7x} \cdot \mathrm{tg}\, 5x$;

2.3. $y = \dfrac{\ln 6x}{4x^2}$;

2.4. $y = 5x^8 - 16x^5 + \sin 2x$

3. Исследовать функции и построить их графики:

3.1. $y = 2x^4 - 8x^2 + 3$;

3.2. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$;

3.3. $y = 2x^2 - 10$;

3.4. $y = 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6$;

3.5. $y = 3x - x^3$;

3.6. $y = \dfrac{x}{x^2 + 16}$;

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если функция Z имеет вид:

4.1. $Z = x^3 \cdot \sin^2 y$;

4.2. $Z = x^y$;

4.3. $Z = \sqrt{2x^2 + y^2}$;

4.4 $Z = \mathrm{tg}^2\,(x^3y) \cdot 2^{2x+3}$;

4.5. $Z = \mathrm{arctg}\,(x^4 + 5y^6)$;

4.7. $Z = \sqrt{\mathrm{tg}^5 x^3 - \ln^2 y^6}$.

5. Используя правило Лопиталя, найти пределы функций:

5.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{1-2x} + 1}{\sqrt{2-x} - 1}$;

5.2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3 + 7x^2 - 6x}{8x^4 - 15x^2 - 10}$;

5.3. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x}}$;

5.4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, 8x}{\mathrm{tg}\, 12x}$;

5.5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 \ln x}{1 - x^3}$;

5.6. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$.

6. Найти производную функции
$W = 2x_1^3 x_3^2 - 3x_2^2 + 3x_3 x_4 x_5^3$ в точке A (0, -1, 2, 4, -3).
7. Найти наибольшую скорость возрастания функции
$W = 5x_1 x_3^2 - 4x_1^2 x_2^3 + 2x_3 x_4 x_5^2$ в точке A (-2, -1, 3, 0, 4).

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение производной функции $y = f(x)$.

2. Каковы геометрический и механический смыслы производной?

3. Как найти производную сложной функции?

4. Дать определение дифференциала функции $y = f(x)$.

5. Какой геометрический смысл имеет дифференциал?

6. Что называется производной второго порядка от функции $y = f(x)$?

7. В чем состоит достаточный признак экстремума?

8. Какие точки называются точками перегиба функции $y = f(x)$?

9. Что называется асимптотой функции $y = f(x)$?

10. Сформулировать правило Лопиталя и привести примеры его применения.

11. Что называется функцией двух независимых переменных?

12. Что называется графиком функции двух независимых переменных?

13. Что называется пределом функции $Z = f$ (x, y) при $x \to x_0$ и $y \to y_0$.

14. Дать определение частных производных функции двух независимых аргументов.

15. Дать определение градиента

16. Как можно выразить производную по направлению через градиент?

5. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Интегральное исчисление — это раздел математического анализа, в котором изучаются свойства и способы вычисления интегралов и их применение.

Интегрирование — это действие, обратное дифференцированию. Например, с его помощью находится скорость тела по заданному ускорению.

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразной от функции $y = f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, производная которой равна исходной функции, т. е. $F'(x) = f(x)$. Из этого определения следует, что любая функция по отношению к своей производной является первообразной [2, 16].

Рассмотрим пример $y = x^5$. Данная функция служит производной для функции $y = \frac{x^6}{6}$, так как $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$ и $\left(\frac{x^6}{6} - 1000\right)' = x^5$, или в общем виде $\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = x^5$, где $C = \text{const}$.

Из данного примера видно, что любая функция $\left(\frac{x^6}{6} + C\right)$ будет первообразной для функцией $y = x^5$.

Теперь приведем формулировку основной теоремы о первообразных.

Теорема 5.1. Любая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных, причем любые две из них друг от друга отличаются постоянным слагаемым [2, 22].

Формула $F(x) + C$ исчерпывает множество всех первообразных исходной функции. Геометрически выражение $F(x)+C$ есть семейство кривых (рис. 5.1.), каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых вдоль оси $0y$.

Заметим, что первообразную можно находить не только по производной, но и по дифференциалу.

Теперь дадим определение неопределенного интеграла.

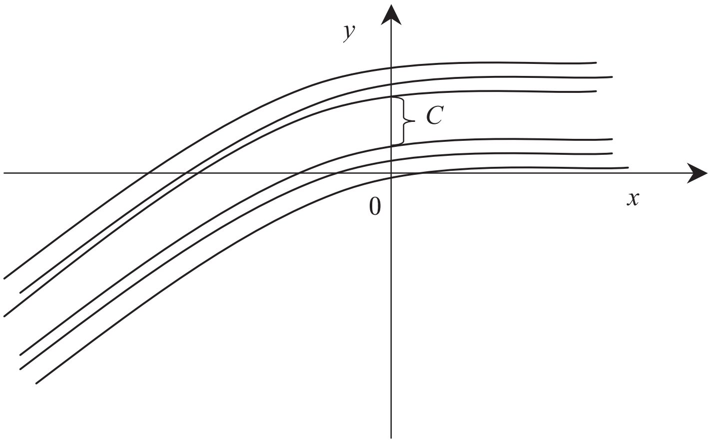


Рис. 5.1

Отыскание первообразных называется неопределенным интегрированием, а выражение, охватывающие совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается так:

$$\int f(x)dx,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция;

$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение;

x — переменная интегрирования.

Заметим, что $f\,(x)$ на участке интегрирования должна быть непрерывна;

$\int$ — знак интеграла.

Таким образом, неопределенный интеграл есть семейство функций $F(x) + C$, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ [2, 6]}.$$

Нахождение всех первообразных для данной функции $f\,(x)$ и называется неопределенным интегрированием. Термин "неопределенное интегрирование" появился, потому что не указывается, какая первообразная имеется в виду.

Сразу скажем, что интегрирование значительно сложнее дифференцирования. Дифференцирование любых элементарных функций производится по определенным правилам, а интегрирование требует в каждом конкретном случае индивидуального подхода. Разумеется, есть общие методы интегрирования, некоторые мы рассмотрим далее. Заметим, что производная от любой элементарной функции есть функция элементарная, а про неопределенный интеграл от элементарной функции этого сказать нельзя. Первообразная от элементарной функции может оказаться и не представимой с помощью конечного числа элементарных функций. Про такие функции говорят, что они не интегрируемы в элементарных функциях. Примерами так называемых неберущихся интегралов являются:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}; \quad \int \frac{dx}{\ln x}; \quad \int \frac{\sin x dx}{x};$$

$$\int \frac{\cos x dx}{x}; \quad \int \frac{e^x dx}{x}; \quad \int e^{-x^2} dx$$

и др.

Из определения неопределенного интеграла следует, что

$$\left.\begin{aligned} \left(\int f(x)dx\right)' &= f(x); \\ d\left(\int f(x)dx\right) &= f(x)dx; \\ \int f'(x)dx = \int df(x) &= f(x) + C. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Найдем неопределенные интегралы от основных элементарных функций, используя для этого таблицу производных от основных элементарных функций (см. главу 4 “Основы дифференциального исчисления”).

Например, $(\sin x)' = \cos x$. Перепишем это равенство в виде

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \Rightarrow d \sin x = \cos x dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства и с учетом третьей формулы (5.1) получим

$$\int d\sin x = \int \cos x dx \Rightarrow \sin x + C = \int \cos x dx.$$

Это и есть табличный интеграл.

Точно так же получают и другие табличные интегралы от основных элементарных функций.

Приведем таблицу интегралов от основных элементарных функций. Справедливость приведенных формул легко проверить дифференцированием.

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$

9) $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg} x + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$

Добавим формулы интегрирования гиперболических и обратных гиперболических функций.

12) $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C;$

13) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

16) $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arth} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C;$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arsh} x + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C;$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arch} x + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C.$

Объединение формулы 17 и 18 и дает формулу 11 таблицы неопределенных интегралов. Заметим, что кроме основной таблицы интегралов существуют таблицы интегралов от элементарных и специальных функций, например. (*Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Наука, 1986; Интегралы и ряды. В 3 т. — М.: Наука, 1986).

Задача "взятия" неопределенного интеграла состоит в том, чтобы преобразовать его к табличному.

Приведем свойства неопределенного интеграла.

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] dx =$$
$$= \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \ldots \pm \int f_n(x) dx.$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак неопределенного интеграла, т. е.

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx, \text{где } k \in R.$$

3. Любая формула интегрирования сохраняет свой вид при постановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т. е. если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$,

где $u = u(x)$ — любая дифференцируемая функция от x.

В силу свойства 3 таблица неопределенных интегралов (основная таблица) будет справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функции от нее, т. е. основная таблица интегралов сразу значительно расширяется [2, 22].

Методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование.* Используется таблица интегралов, свойства неопределенных интегралов и различные преобразования подынтегрального выражения.

Пример 5.1.

$$\int\left(2\sin x + 3x^3 - \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int \sin x dx + 3\int x^3 dx - 5\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= -2\cos x + \frac{3}{4}x^4 - 5\mathrm{tg}x + C.$$

Пример 5.2.

$$\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 7x}{2x}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int x^2 dx + 2\int x dx + \frac{7}{2}\int dx = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{7}{2}x + C.$$

Пример 5.3.

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x}dx = 2\int \sin x dx = -2\cos x + C.$$

Пример 5.4.

$$\int \sin^2 x dx =$$

[Воспользуемся формулами $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Последнее выражение подставляем вместо подынтегральной функции]

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x \, d2x =$$

[Заметим, что $d2x = 2dx$ заменяем $2x$ на y, т. е. $2x = y$.]

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos y dy = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin y + C =$$

[Возвращаемся к прежнему аргументу] =

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Таким образом, в примере 5.4 использовали еще один метод интегрирования (замена переменной), который более подробно рассмотрим ниже.

2. *Интегрирование по частям*. Этот метод следует из формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции аргумента x, тогда имеем

$$(uv)' = u'v + v'u, \text{ или}$$
$$d\,(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируем обе части последнего равенства и получим.

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (5.2)$$

Это и есть формула интегрирования по частям.

Этот способ состоит в том, что подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух множителей u и dv и заменяется двумя интегрированиями:

1) отыскание v из выражения для dv;

2) отыскание интеграла от vdu.

Смысл способа состоит в том, что эти два интегрирования выполнить легче, чем “взять” исходный интеграл [2, 6, 22].

Рассмотрим конкретные примеры и применения данного метода.

Пример 5.5.

$$\int \ln x dx = \left[u = \ln x, dv = dx \Rightarrow v = x, du = \frac{dx}{x} \right] =$$

$$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

В данном примере выбор u и dv производится однозначно, но так бывает не всегда.

Пример 5.6.

$$\int xe^x dx = \left[u = x; du = dx; dv = e^x dx; v = \int e^x dx = e^x \right] =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C,$$

но если принять

$$[u = e^x; du = e^x dx; dv = xdx; v = \frac{x^2}{2}],$$

то

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx,$$

т. е. получим более сложный интеграл, чем исходный.

Бывает случаи, когда формулу (5.2) надо применять несколько раз.

Пример 5.7.

$$\int e^x \sin x dx = [u = \sin x;\ du = \cos x dx;\ dv = e^x dx;$$

$$v = \int e^x dx = e^x] = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

[К интегралу $\int e^x \cos x dx$ опять применим формулу (5.2), получим

$$u = \cos x; du = -\sin x dx; dv = e^x dx; v = e^x]$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right) =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Переносим $\int e^x \sin x dx$ в левую часть равенства и получим:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + 2C,$$

(постоянная может быть любой, возьмем ее равной $2C$),

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 5.8.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \left[u = \sqrt{1-x^2}; dv = dx \Rightarrow v = x; du = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x.$$

Переносим $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ в левую часть и получаем

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + 2C,$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

3) *Метод замены переменной.* Его применяют в том случае, если исходный интеграл сложно или невозможно с помощью алгебраических и иных преобразований свести к одному или нескольким табличным интегралам [2, 16].

Способ заключается в следующем: заменяется новой переменной такая часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить или разделить подынтегральное выражение).

Метод замены переменной основан на следующей теореме. Пусть некоторая функция $\varphi(t) = x$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $[a, b]$, пусть X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на отрезке [a, b] справедлива формула

$$\int f(x)dx\,\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{5.3}$$

В некоторых случаях лучше использовать замену переменной не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$ [2, 16, 22].

Приведем конкретные примеры.

Пример 5.9.

Найти $\int(5x-6)^{90}dx$.

$\int(5x-6)^{90}dx =$ [Можно разложить подынтегральную функцию, используя бином Ньютона, но это будет слишком длинно, поэтому делаем замену переменной: $t = 5x-6 \Rightarrow x = \dfrac{t+6}{5}$; $dx = \dfrac{dt}{5}$, поэтому получим] $= \dfrac{1}{5}\int t^{90}dt = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{t^{91}}{91} + C =$

$=$ [Или, возвращаясь к первоначальной переменной x, имеем] $= \int(5x-6)^{90}dx = \dfrac{(5x-6)^{91}}{455} + C.$

Пример 5.10.

$$\int\frac{dx}{x^2+16} = \int\frac{dx}{\dfrac{16(x^2+16)}{16}} = \frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+1} =$$

[Теперь делаем замену переменной

$y = \dfrac{x}{4} \Rightarrow x = 4y \Rightarrow dx = 4dy] = \dfrac{1}{16}\cdot 4\int\dfrac{dy}{y^2+1} = \dfrac{1}{4}arctgy + C =$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$= \dfrac{1}{4}arctg\left(\dfrac{x}{4}\right) + C.$

Пример 5.11.

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{(x+1)^2+4}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

=[Теперь делаем замену переменной

$$t=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2t-1=x\Rightarrow dx=2dt]=\frac{1}{4}\int\frac{2dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}arctgt+C=$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

Пример 5.12.

$$\int\frac{2x^2dx}{x^3+7}=\frac{2}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+7}=$$

[Заметим, что

$$d(x^3+7)=3x^2dx]=\frac{2}{3}\int\frac{d(x^3+7)}{x^3+7}=$$

= [Делаем замену переменной $y=x^3+7$]

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dy}{y}=\frac{2}{3}\ln|y|+C=$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$=\frac{2}{3}\ln\left|x^3+7\right|+C.$$

Пример 5.13.

$$\int\frac{2^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=$$

[Заметим, что $d\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$] =

$$=2\int 2^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=$$

[Теперь делаем замену переменной $\sqrt{x}=y$]

$$=2\int 2^y dy=2\cdot\frac{2^y}{\ln 2}+C=$$

[Возвращаем переменную x]

$$= \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C.$$

Пример 5.14.

$$\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = 2 \int e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx =$$

[Заметим, что $d \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$]

$$= \int e^{\sin^2 x} d \sin^2 x =$$

[Теперь делаем замену переменной $t = \sin^2 x$]

$$= \int e^t dt = e^t + C =$$

[Возвращаем переменную x]

$$= e^{\sin^2 x} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Любая рациональная функция $R(x)$ может быть представлена в виде дроби, т. е. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Если степень числителя (m) больше или равна степени знаменателя (n), то, разделив $P(x)$ на $Q(x)$, получим многочлен $P_1(x)$ и в остатке многочлен $P_2(x)$ не выше $(n - 1)$ степени, т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$. Интегрирование $P_1(x)$ проходит без проблем.

Надо проинтегрировать правильную рациональную дробь, степень числителя которой меньше степени знаменателя $\left(\frac{P_2(x)}{Q(x)}\right)$.

$\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей двух видов $\frac{A_i}{(x-a)^i}$; $\frac{B_i x + C_i}{(x^2 + px + q)^i}$, где A_i, B_i, C_i — постоянные [2, 20, 22].

Каждому множителю $(x - a)^k$ в представлении знаменателя $Q(x)$ соответствует в разложении дроби $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ на слагаемые сумма k простейших дробей вида:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}.$$

Каждому множителю $(x^2 + px + q)^t$ соответствует сумма t простейших дробей вида:

$$\frac{B_t x+C_t}{(x^2+px+q)^t}+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1 x+C_1}{(x^2+px+q)}.$$

Имеет место следующее разложение дроби $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ на слагаемые [2, 22]:

$$\frac{P_2(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}+\ldots+\frac{B_t x+C_t}{(x^2+px+q)^t}+$$

$$+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1 x+C_1}{(x^2+px+q)}. \qquad (5.4)$$

Пример 5.15.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=$$

[Делаем замену переменной, обозначив $\sqrt{e^x+1}=y$, тогда получим $e^x+1=y^2\Rightarrow e^x=y^2-1\Rightarrow \ln e^x=$

$$=\ln(y^2-1), x=\ln(y^2-1), dx=\frac{2ydy}{y^2-1}]=$$

$$\int\frac{2ydy}{y(y^2-1)}=2\int\frac{dy}{y^2-1}=2\int\frac{dy}{(y-1)(y+1)}.$$

Дробь $\frac{1}{(y-1)(y+1)}$ — правильная рациональная дробь; разложим ее на простейшие дроби (см. 5.4)

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1},$$

где A и B неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти. Освобождаясь от знаменателя, имеем:

$1 = A(y + 1) + B(y - 1);$

$1 = Ay + A + By - B.$

Приравнивая коэффициенты при y и y^0, получим систему уравнений для определения A и B.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow A=-B \\ &1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \text{ и } A=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)}=\frac{0{,}5}{y-1}-\frac{0{,}5}{y+1}$$

и искомый интеграл примет вид:

$$2\int\frac{dy}{(y-1)(y+1)}=2\left(\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y+1}\right)=\int\frac{d(y-1)}{y-1}-\int\frac{d(y+1)}{y+1}=$$

[Заметим, что $d(y+1)=dy$ и $d(y-1)=dy$]

$$=\ln|y-1|-\ln|y+1|+C=\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+C=$$

[Возвратим переменную e^x]

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int f(\sin x,\cos x)dx$ с помощью подставки $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ можно преобразовать в интеграл от рациональной функции [2, 22].

Используются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Из равенства $x=2\operatorname{arctg} u$ имеем $dx=\frac{2du}{1+u^2}$. В результате указанной подстановке исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int f(\sin x,\cos x)dx=\int f\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2},$$

т. е. подынтегральная функция рациональна относительно u.

Пример 5.16.

$\int \frac{dx}{\cos x}$.

Применим подстановку $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\frac{(1-u^2)}{(1+u^2)}} = 2\int \frac{du}{1-u^2} =$$

[Воспользуемся формулой 16 из таблицы интегралов.]

$$= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

С помощью указанной подстановки хорошо "берутся" интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}$.

Интегрирование функций $\int f(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $u = tg\frac{x}{2}$ всегда приводит к успеху, но в силу своей общности она не всегда является оптимальной.

5.2. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла можно прийти рассматривая различные задачи, например нахождение площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы, определение пути по заданной переменной скорости.

Найдем площадь криволинейной трапеции, т. е. фигуры, которая ограничена осью $0x$, графиком непрерывной функции $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.2). Пока будем считать, что криволинейная трапеция расположена над осью 0x, т. е. $f(x) > 0$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на n частичных интервалов: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$.

В точках деления отрезка $[a,b]$ проведем прямые, параллельные оси $0y$, и разобьем криволинейную трапецию $aABb$

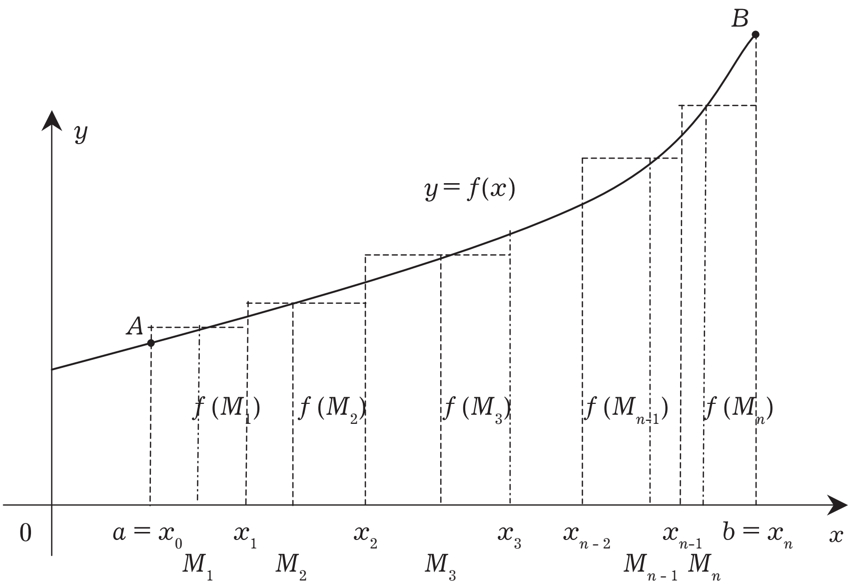


Рис. 5.2

на n частичных трапеций. В каждом из частичных интервалов возьмем по произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (некоторые из этих точек могут совпадать с точками деления отрезка $[a, b]$).

Через точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ проведем прямые, параллельные оси $0y$ до пересечения с функцией $y = f(x)$. Отрезки этих прямых $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)$ есть ординаты графика функции $y = f(x)$. Взяв частичные интервалы за основания, построим на них n прямоугольников с высотами, равными $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)$. В результате мы получим ступенчатую фигуру, состоящую из n прямоугольников. Так как площадь любого из прямоугольников будет равна $f(M_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, то площадь ступенчатой фигуры можно найти по формуле

$$S_{\text{ступ}} = f(M_1)(x_1 - x_0) + f(M_2)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$+ f(M_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.5}$$

При неограниченном увеличении количество частичных интервалов ($n \to \infty$) и при стремлении длины наибольшего из них к нулю ступенчатая фигура будет неограниченно приближаться к криволинейной трапеции $aABb$, т. е. получим

$$S_{\text{кр.трап}} = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.6}$$

Зная площадь криволинейной трапеции, мы можем находить площади любых плоских фигур (этот вопрос мы подробнее рассмотрим ниже). К выражению вида (5.6) приводят и другие задачи (нахождение работы переменной силы, вычисление пути по заданной переменной скорости).

Теперь приведем строгое определение определенного интеграла.

Впервые для непрерывной функции оно было дано в 1823 г. французским математиком Коши, а позднее немецкий математик Риман показал, что определение Коши применимо к более широкому классу функций [2, 22]. Это позволило ему впервые дать в общей форме определение интеграла и определить условие его существования.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$ ($f(x)$ не обязательно положительна на $[a, b]$). Отрезок $[a, b]$ разбивается на n частичных интервалов точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ причем $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Во всех частичных интервалах $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ берутся произвольно точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$, находятся значения функций $y = f(x)$ в этих точках $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)$.

Составляем сумму вида

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \tag{5.7}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Затем находим предел интегральной суммы (5.7) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, т. е. при $\max \Delta x_i \to 0$.

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \tag{5.8}$$

В рассмотренной нами задаче о криволинейной трапеции предел (5.8) определяет ее площадь. В общем случае он называется определенным интегралом от функции $f\ (x)$ в пределах от a до b и читается: интеграл от a до b $f\ (x)$ по dx. Таким образом, согласно определению, получаем:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.9}$$

Сумма в выражении (5.7) называется n-й интегральной суммой [2, 20, 22].

Как и в неопределенном интеграле $f(x)$ — есть подынтегральное функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, переменная x — переменная интегрирования, отрезок $[a,\ b]$ называется интервалом интегрирования, а числа a и b нижним и верхним пределами соответственно.

Определенный интеграл есть некоторое число, а величина его зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Заметим, что площадь криволинейной трапеции — это геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла с помощью составления интегральных сумм вида (5.7) вызывает серьезные проблемы даже в самых простых случаях, поэтому для их нахождения используют другой способ, который мы рассмотрим ниже.

Теперь приведем без доказательства теорему существования определенного интеграла.

Теорема 5.2. Если функция $f(x)$ непрерывна в отрезке $[a,b]$, то ее n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала. Этот предел, т. е. определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

не зависит ни от способа разбиение $[a,\ b]$ на частичные интервалы, ни от выбора в этих интервалах промежуточных точек [2].

Свойства определенного интеграла

1. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, k \in R.$$

3. Если переставить местами пределы интегрирования, то интеграл изменит только знак, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если интервал интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.

6. Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$ на длину интервала интегрирования, т. е.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),\ a < b,$$

где M и m — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 5.3) [22].

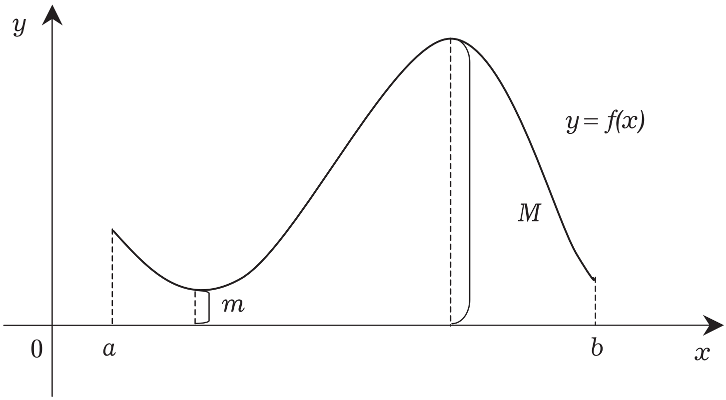


Рис. 5.3

7. Если в каждой точке x отрезка $[a, b]$ $\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx,\ a < b.$$

8. Внутри интервала интегрирования $[a, b]$ есть хотя бы одно значение $x = A$, для которого выполняется следующее равенство

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(A).$$

Формула Ньютона — Лейбница

Приведем без доказательства формулировку теоремы.

Теорема 5.3. Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем и нижнем пределах интегрирования [2, 22], т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{5.10}$$

Или иначе, значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной от подынтегральной функции в интервале интегрирования.

Формула (5.10) дает удобный способ вычисления определенных интегралов, если известна первообразная подынтегральной функции, т. е. необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции и подставить в нее пределы интегрирования.

Приведем конкретные примеры.

Пример 5.17.

$$\int_0^3 5e^x dx = 5\int_0^3 e^x dx = 5e^x\Big|_0^3 = 5(e^3 - e^0) = 5(e^3 - 1).$$

Пример 5.18.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right).$$

Пример 5.19.

$$\int_3^7 \frac{dx}{x+5} =$$

[Заметим, что $d(x + 5) = dx$]

$$= \int_3^7 \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|\,x+5\,|\Big|_3^7 = \ln(7+5) - \ln(3+5) =$$

$$= \ln 12 - \ln 8 = \ln\left(\frac{12}{8}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в этом случае будет иметь вид:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{5.11}$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.20.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx =$$

$$[u = \sin x; du = cosxdx; dv = \sin xdx; v = \int \sin xdx = -\cos x]$$

$$= -\sin x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx = -(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin 0\cos 0) +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx.$$

Перенеся $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$ в левую часть равенства, окончательно получим

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 5.21.

$$\int_2^2 x\ln x\,dx = [u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x};\ dv = xdx;\ v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}] =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2dx}{x} = \left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx =$$

$$= 2\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = \ln 4 - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2) = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

Метод замены переменной в определенном интеграле

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной проводится так же, как и при нахождении неопределенного интеграла, за исключением того, что в данном случае нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной. Но надо помнить, что, заменяя переменную под знаком интеграла, надо менять и пределы интегрирования.

Решим конкретные примеры.

Пример 5.22.

$$\int_2^4 \frac{xdx}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{2xdx}{x^2+8} =$$

[Заметим, что $d(x^2+8) = 2xdx$] $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 \frac{d(x^2+8)}{x^2+8}$.

Делаем замену переменной, обозначим $y = x^2+8$. Теперь необходимо поменять пределы интегрирования:

$$y\,|_{x=2} = 2^2+8 = 12;\ \ y\,|_{x=4} = 4^2+8 = 24;$$

и окончательно получаем:

$$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{d(x^2+8)}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int_{12}^{24}\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|\Big|_{12}^{24} = \frac{1}{2}(\ln 24 - \ln 12) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{24}{12} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 5.23.

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2x\sqrt{1+x^2}\,dx =$$

[Заметим, что $d(1+x^2) = 2xdx$]

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2).$$

Теперь заменяем переменную и пределы интегрирования $t = 1+x^2$;

$$t\,|_{x=1} = 1+1^2 = 2;\ \ t\,|_{x=2} = 1+2^2 = 5$$

и окончательно получаем:

$$\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)=\frac{1}{2}\int_2^5 y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}\right)=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right).$$

Пример 5.24.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2+\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx=$$

[Заметим, что $d\mathrm{tg}x=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$]

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2+\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)d\mathrm{tg}x.$$

Теперь делаем замену переменной и меняем пределы интегрирования $\mathrm{tg}\,x = t$; $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=1;\quad \mathrm{tg}0=0,$ в результате получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2+\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)d\,\mathrm{tg}x=\int_0^1\left(2+\sqrt{t}\right)dt=2\int_0^1 dt+\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=2t\Big|_0^1+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

5.3. Некоторые сведения о несобственных интегралах

Распространим понятие определенного интеграла на случай бесконечного интервала интегрирования.

Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $[a, +\infty)$. Тогда можно найти интеграл от функции $f(x)$, который взят по любому интервалу $[a, b]$, где $b > a$.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ тем лучше выражает значение, которое надо принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$, чем больше b.

Пусть b неограниченно возрастает, тогда есть две возможности: или $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ имеет предел, или данный интеграл предела не имеет, а это означает, что он или стремится к бесконечности, или колеблется, т. е. не стремится ни к какому пределу.

Теперь дадим определение несобственного интеграла.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$ называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$. Это записывается следующим образом

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{5.12}$$

Если предел (5.12) существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если не существует, то расходящимся [2, 22].

Если первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ известна, то можно определить, сходится несобственный интеграл или нет. Используем формулу Ньютона-Лейбница и получим:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a).$$

Поэтому если предел первообразной $F(x)$ при $x \to \infty$ существует, то несобственный интеграл сходится, а если предел не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл в интервале $(-\infty; b)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(-\infty).$$

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $(-\infty; +\infty)$, то получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если оба интеграла в правой части последнего выражения сходятся, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а если хотя бы один из них расходится, то и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится [2, 22].

Если известна первообразная $F(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Сходящиеся несобственные интегралы имеют определенный геометрический смысл. Например, график функции $y = f(x)$ ограничивает криволинейную трапецию с бесконечным основанием (см. рис. 5.4).

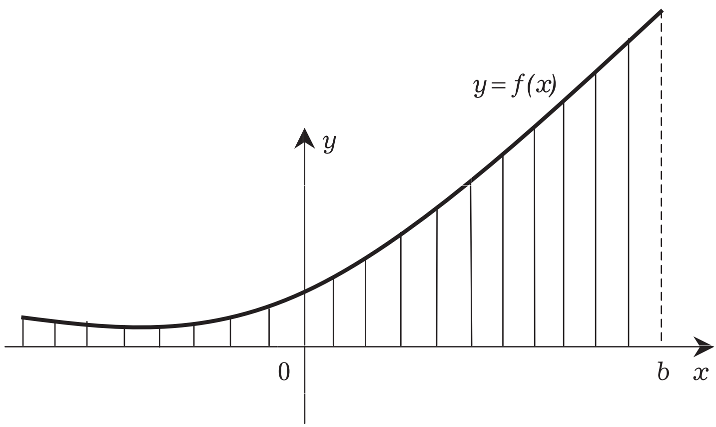


Рис. 5.4

Если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+b} f(x)dx$ сходится, то заштрихованная фигура имеет площадь, которая равна этому интегралу. А если интеграл расходится, то говорить о площади фигуры нельзя.

Теперь приведем конкретные примеры решения несобственных интегралов.

Пример 5.25.

Вычислим $\int\limits_0^\infty e^{-2x}dx$.

[Делаем замену переменной $-2x = y \Rightarrow x = -\frac{y}{2} \Rightarrow dx = -\frac{dy}{2}$. Затем меняем пределы интегрирования $y(0) = 0$; $y(\infty) = -\infty$.] Тогда получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\infty} e^y dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^0 e^y dy = \frac{1}{2}e^y\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}\left(e^0 - \frac{1}{e^\infty}\right) = \frac{1}{2}.$$

т. е. несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-2x}dx$ сходится и равен $\frac{1}{2}$.

Пример 5.26.

$\int\limits_5^\infty \frac{3dx}{x} = 3\int\limits_5^\infty \frac{dx}{x} = 3\ln x\Big|_5^\infty = 3\ln(\infty) - 3\ln(5) = \infty$, т. е. данный интеграл расходится.

Пример 5.27.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^\infty \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty}(-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^b =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}(\cos b - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Величина $[-\lim\limits_{b\to\infty}(\cos b - \frac{\sqrt{2}}{2})]$ не стремится к определенному пределу при $b \to \infty$ (колеблется).

Пример 5.28.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 3e^x dx = 3e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 3(e^\infty - \frac{1}{e^\infty}) = \infty,$$

т. е. данный интеграл расходится.

Часто важно знать не конкретное значение несобственного интеграла, а сходится он или расходится. Для этого используются признаки сравнения, которые мы и приводим.

1. Если для $\forall x$ $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и если $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, при этом выполняется неравенство

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Например, проверим сходится ли интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(2+e^x)}.$$

При $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x^2(2+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$.

Теперь рассмотрим сходится ли несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = 1,$$

т. е. данный интеграл сходится. Поэтому по признаку 1 сходится $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2(2+e^x)}$, и его значения меньше 1.

2. Если для $\forall x\ (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причем $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Например, проверим сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^3}}dx.$$

Очевидно, что $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^3}} > \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Теперь рассмотрим сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\,\bigg|_1^b = 2\lim_{b\to\infty}(\sqrt{b} - 1) = \infty,$$

т. е. данный интеграл расходится. Поэтому по признаку 2 расходится

$$\int_1^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^3}}dx.$$

3. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$. Последний интеграл в этом случае называется абсолютно сходящимся.

В качестве примера проверим сходимость интеграла

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx.$$

На интервале [1; ∞) подынтегральная функция $\frac{\sin x}{x^3}$ знакопеременная.

Видно, что $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$. Теперь рассмотрим, сходится ли несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\infty}-1\right) = \frac{1}{2},$$

т. е. данный интеграл сходится. Поэтому по признаку 1 сходится

$$\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx,$$

а, следовательно, по признаку 3 сходится и интеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx.$$

При использовании признаков сравнения надо иметь запас функций, несобственные интегралы от которых или сходятся, или расходятся и результат этот нам известен заранее. Эти функции мы будем использовать в качестве $\varphi(x)$.

5.4. Некоторые приложения определенного интеграла

5.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Так как определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции, а площадь любой плоской фигуры можно представить как сумму и (или) разность площадей криволинейных трапеций, то, следовательно, определенный интеграл можно использовать для вычисления площадей плоских фигур [2, 16].

Если функция $y = f(x)$ или плоская фигура $ABCD$ находятся выше оси $0x$ (см. рис 5.5 и рис. 5.6), то мы имеем $S_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $S_2 = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx.$

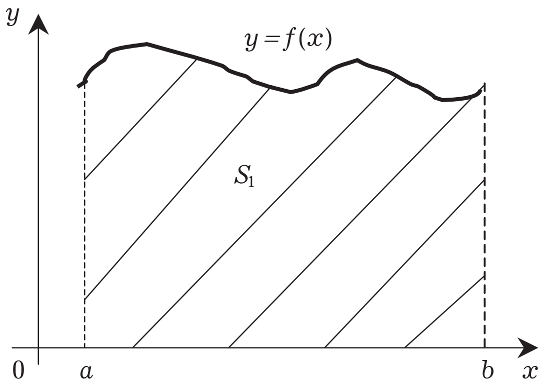


Рис. 5.5

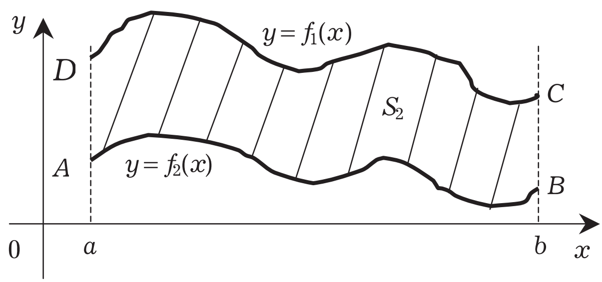


Рис. 5.6

Если функция $y = f(x)$ находится полностью или частично под осью $0x$ (см. рис. 5.7 и рис. 5.8), то мы получаем:

$$S_3 = \left|\int_a^b f(x)dx\right|;\ S_4 = \int_a^b f(x)dx + \left|\int_b^c f(x)dx\right|.$$

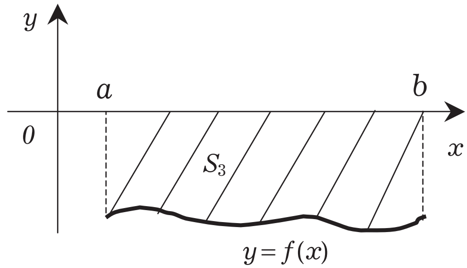


Рис. 5.7

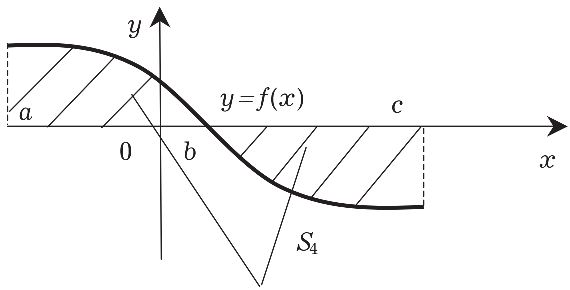


Рис. 5.8

Если функция $x = \varphi(y)$ или плоская фигура $ABCD$ прилегают к оси $0y$, то (см. рис. 5.9 и рис. 5.10)

$$S_5 = \int_a^b \varphi(y)dy\,;\; S_6 = \int_a^b \big(\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\big)dy.$$

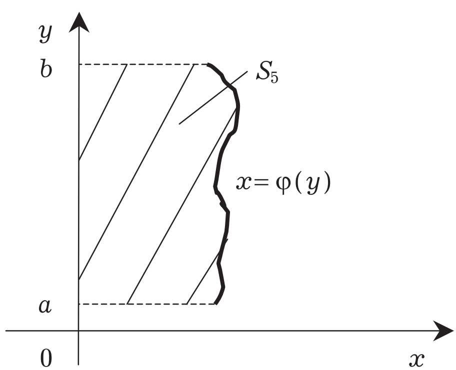


Рис. 5.9

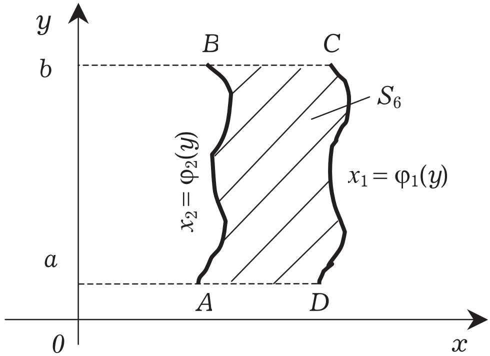


Рис. 5.10

Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующей схеме:

1) В соответствии с условиями задачи делают схематический чертеж.

2) Искомую площадь представляют как сумму и (или) разность площадей криволинейных трапеций.

3) Находят пределы интегрирования.

4) Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и искомую площадь фигуры.

Теперь рассмотрим конкретные примеры вычисления площадей плоских фигур.

Пример 5.29.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = 4 - y^2,$ $x = 0$.

Сначала по условиям задачи строим схематический чертеж (см. рис. 5.11).

$x = 4 - y^2$ — парабола. Найдем ее вершину $x' = -2y$. $y = 0$, $x = 4$ (max) и точки пересечения с осью $0y$. $4 - y^2 = 0$, $y = 2$, $y = -2$.

$y_1 = -2$ и $y_2 = 2$ являются пределами интегрирования.

Теперь найдем искомую площадь. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс, то можно записать.

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - y^2)\,dy = 2\int_{0}^{2}(4 - y^2)\,dy = 2\left(4y\Big|_0^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2\right) =$$

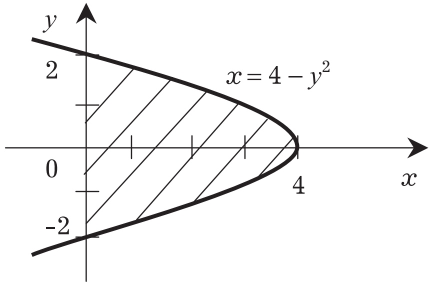


Рис. 5.11

$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ кв. ед.}$$

Пример 5.30.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 6x + 8;\ y = 0$$

Построим схематический чертеж искомой фигуры (см. рис. 5.12)

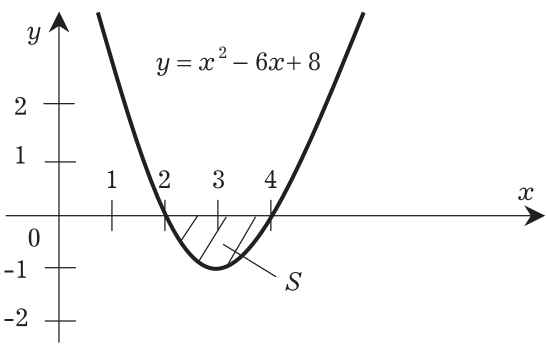


Рис. 5.12

Кривая $y = x^2 - 6x + 8$ есть парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем ее характерные точки.

$y' = 2x - 6;$

$y' = 0;$

$2x - 6 = 0;$
$x = 3,\ y = -1$ (min);
$x^2 - 6x + 8 = 0;$
$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4;$

$x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4;\ \ x_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ (пределы интегрирования).

Теперь находим искомую площадь (знак модуля ставится, так как фигура находится под осью $0x$).

$$S = \left|\int_2^4 \left(x^2 - 6x + 8\right)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 - 6\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 + 8x\Big|_2^4\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) - 3\left(16 - 4\right) + 8(4-2)\right| =$$

$$= \left|\frac{56}{3} - 36 + 16\right| = \left|\frac{56}{3} - 20\right| = \frac{4}{3} \text{ кв. ед.}$$

Пример 5.31.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

Построим схематический чертеж (см. 5.13) и найдем пределы интегрирования:

$$\frac{6}{x} = 7 - x;\ 6 - 7x + x^2 = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

(пределы интегрирования)

Теперь находим искомую площадь

$$S = \int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right)dx = 7x\Big|_1^6 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^6 - 6\ln|x|\Big|_1^6 =$$

$$= (42 - 7) - (18 - \frac{1}{2}) - 6(\ln 6 - \ln 1) =$$

$$= 35 - 17{,}5 - 6\ln 6 = (17{,}5 - 6\ln 6) \text{ кв. ед.}$$

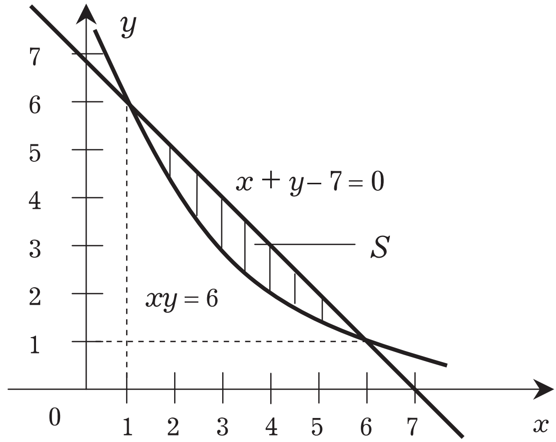


Рис. 5.13

5.4.2. Нахождение длины дуги кривой

Пусть в плоскости $x0y$ уравнением $y = f\ (x)$ задана кривая линия. Вычислим длину дуги АВ этой кривой, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 5.14).

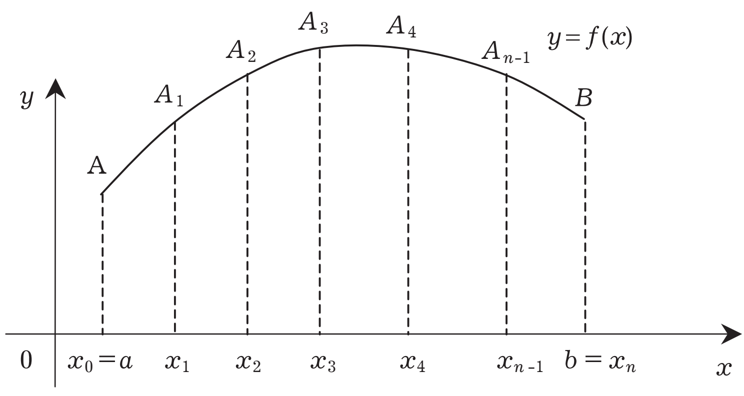


Рис. 5.14

На дуге AB возьмем точки A, A_1, A_2, ..., B с абсциссами $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $b = x_n$. Проведем хорды AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$, длины которых соответственно обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$. В результате получим ломаную линию $A, A_1\ A_2\ ...\ A_{n\text{-}1}\ B$, которая вписана в дугу AB. Длина этой ломаной будет равна $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$. А длиной ($l$) дуги AB называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю, т. е.

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

В курсах математического анализа доказывается (см., например, [2, 20]), что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует и длина дуги АВ находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (5.13)$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.32.

Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$, отсеченной осью $0x$.

Сначала построим график исходной функции и найдем a и b (см. рис. 5.15)

$y' = x.$

$\min x = 0; y = -\frac{3}{2}.$

Находим a и b.

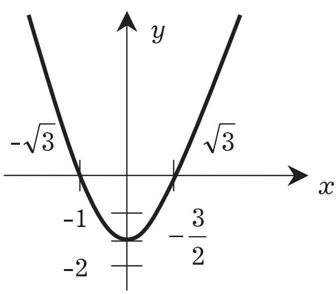


Рис. 5.15

$$\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 0, \ x^2 = 3, \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Теперь по формуле (5.13) находим искомую длину дуги.

$l = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2}\, dx =$ [Так как исходная парабола симметрична относительно оси 0у, то получаем] $= 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2}\, dx.$

Найдем $l_1 = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \dfrac{l}{2}$.

Получившийся определенный интеграл можно брать несколькими способами, например, подстановкой $x = \operatorname{sh} y$ (где $\operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ — гиперболический синус) или методом интегрирования по частям, которым мы и воспользуемся. Напомним, что формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

В нашем случае имеем

$$u = \sqrt{1+x^2}; dv = dx \Rightarrow v = x;$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Тогда получим:

$$l_1 = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(x\sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx \right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= 2\sqrt{3} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx + \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(Интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ является табличным (см. формулу 17 таблицы интегралов раздела 5.1). Он равен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x + C = \ln\left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C.$$

В нашем случае получаем

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left| x+\sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln\left|\sqrt{3}+2\right|.$$

Поэтому l_1 примет вид:

$$l_1 = 2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx + \ln\left|\sqrt{3}+2\right|.$$

Переносим $\left(-\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx \right)$ налево, и так как $l_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx$ окончательно получаем

$$l = 2l_1 = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = 2\sqrt{3} + \ln\left|\sqrt{3}+2\right|.$$

5.4.3. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, которое образовано вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.16).

Разобьем полученное тело на слои с помощью секущихся плоскостей, перпендикулярных к оси $0x$ и пересекающих ее в точках $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. Каждый слой заменим прямым цилиндром. Объем каждого из этих цилиндров будет равен $V_i = \pi y^2_{i-1}\,\Delta x_i,\ i = \overline{1,n}$ [в данном случае поперечные сечения с абсциссами $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ есть окружности].

Поэтому объем n-ступенчатого тела будет равен:

$$V_n = \pi y_0^2 \Delta x_1 + \pi y_1^2 \Delta x_2 + \ldots + \\ + \pi y_{n-1}^2 \Delta x_n = \pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 \Delta x_i.$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$ и при стремлении $\max \Delta x_i \to 0$ и получаем искомый объем тела вращения [2]:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \quad (5.14)$$

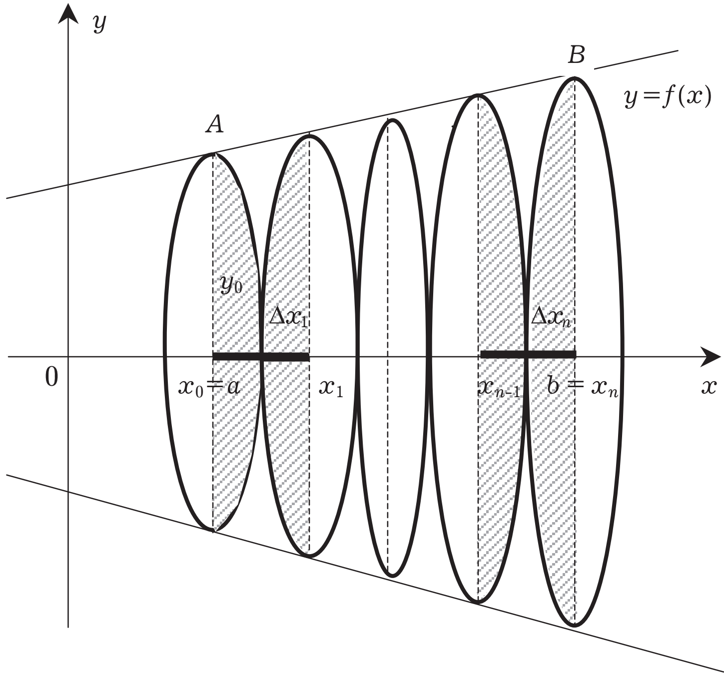


Рис. 5.16

В том случая, если тело образовано вращением вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции $cCDd$, ограниченной функцией $x = \varphi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 5.17), то его объем находится по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (5.15)$$

Теперь рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.33.

Найдем объем двухосного эллипсоида вращения, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, где a и b — большая и малая полуоси соответственно (одной из моделей Земли как раз и является двухосный эллипсоид вращения, в

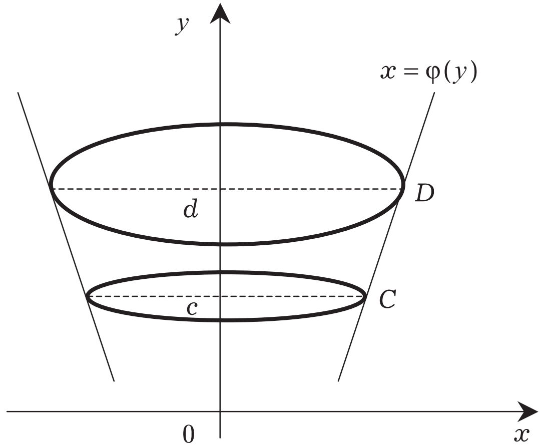


Рис. 5.17

России принят рефенц-эллипсоид с параметрами a = 6378245 м, $\alpha = \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{1}{298{,}3}$). Его сечением, в плоскости $x0z$ будет эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. (см. рис. 5.18).

Таким образом, эллипсоид образован вращением вокруг оси 0х функции $z = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, ограниченной прямыми x = -a и $x = a$, и осью $0x$.

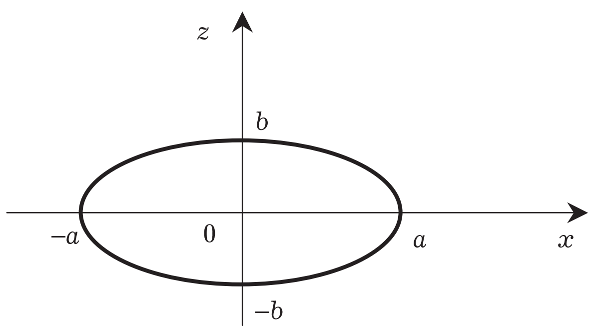


Рис. 5.18

Тогда по формуле (5.14) получаем:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=\pi b^2\left(\int_{-a}^{a}dx-\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2dx\right)=\pi\, b^2\left(x\Big|_{-a}^{a}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a}\right)=$$

$$=\pi b^2\left\{[a-(-a)]-\frac{1}{a^2}\left[\frac{a^3}{3}-\left(-\frac{a^3}{3}\right)\right]\right\}=$$

$$=\pi b^2\left(2a-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2a^3}{3}\right)=\pi b^2\left(2a-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

5.5. Приближенное вычисление определенных интегралов

В тех случаях, когда подынтегральная функция имеет сложный вид и неясно как ее преобразовать к табличной или же первообразная подынтегральная функции не выражается через элементарные функции, применяют приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Приведем несколько способов приближенного интегрирования, исходя из определения интеграла как предела суммы.

а) Формула прямоугольников.

Пусть на $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Надо вычислить $\int_a^b f(x)dx$. Отрезок $[a, b]$ разделим точками $a = x_0$, x_1, $x_2,\ldots, x_{n-1}$, $x_n = b$ на n одинаковых частей длины Δx, где $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ (см. рис. 5.19).

Значения функции $y = f(x)$ в точках x_0, x_1, $x_2,\ldots$, x_{n-1}, x_n обозначим через y_0, y_1, $y_2,\ldots$, y_{n-1}, y_n.

Теперь составим две суммы:

$$S_1 = y_0\,\Delta x + y_1\,\Delta x + y_2\,\Delta x +\ldots+ y_{n-1}\,\Delta x, \qquad (5.16)$$

где S_1 есть суммарная площадь прямоугольников, лежащих ниже $y = f(x)$;

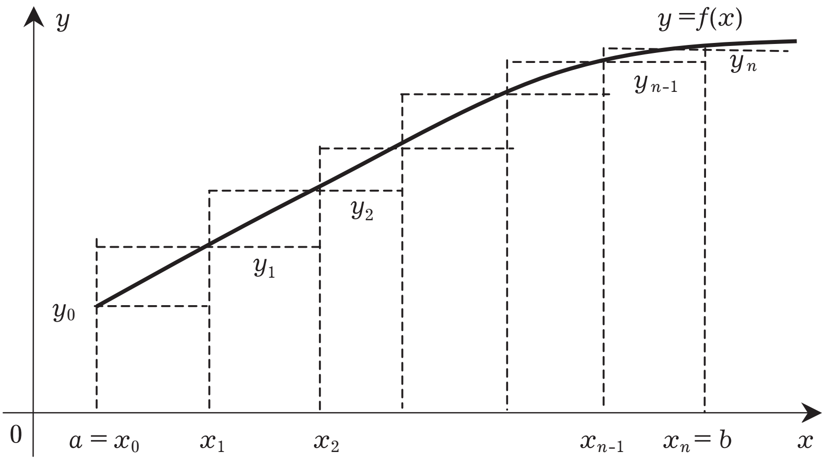


Рис. 5.19

$$S_2 = y_1\,\Delta x + y_2\,\Delta x + ... + y_n\,\Delta x, \tag{5.17}$$

где S_2 есть суммарная площадь прямоугольников, лежащих выше $y = f\,(x)$.

Истинная площадь фигуры, ограниченная $y = f\,(x)$, удовлетворяет условию $S_1 < S_{ист} < S_2$.

Поэтому можно записать приближенные равенства [1,16]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}), \tag{5.18}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n). \tag{5.19}$$

Приближенные равенства (5.18) и (5.19) и есть формулы прямоугольников. Ошибка, которую мы совершаем при вычислении интегралов по формулам (5.18) и (5.19) будет тем меньше, чем больше n. Для того чтобы определить, сколько точек деления надо взять, чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, надо использовать формулу оценки погрешности, которая получается при приближенном вычислении интеграла. Для метода прямоугольников она имеет вид:

$$\left|\alpha_n\right| \le \frac{(b-a)^2 M}{2n},$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right|$ [9].

Приведем конкретный пример.

Пример 5.34.

Используя метод прямоугольников, вычислим приближенно интеграл

$\int\limits_2^6 \frac{dx}{\ln x}$, взяв $n = 10$.

Заметим, что этот интеграл относится к числу неберущихся, т. е. он не выражается в элементарных функциях.

$$y = f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad \frac{b-a}{n} = \frac{6-2}{10} = 0{,}4.$$

Используем для расчета формулу (5.18).

$$y_0 = \frac{1}{\ln 2} = 1{,}443; \quad y_1 = \frac{1}{\ln 2{,}4} = 1{,}142; \quad y_2 = \frac{1}{\ln 2{,}8} = 0{,}971;$$

$$y_3 = \frac{1}{\ln 3{,}2} = 0{,}860; \quad y_4 = \frac{1}{\ln 3{,}6} = 0{,}781; \quad y_5 = \frac{1}{\ln 4} = 0{,}721;$$

$$y_6 = \frac{1}{\ln`4{,}4} = 0{,}675; \quad y_7 = \frac{1}{\ln 4{,}8} = 0{,}638; \quad y_8 = \frac{1}{\ln 5{,}2} = 0{,}607;$$

$$y_9 = \frac{1}{\ln 5{,}6} = 0{,}581.$$

Теперь по формуле (5.18) имеем:

$$S_1 = \int\limits_a^b \frac{dx}{\ln x} \approx 0{,}4(1{,}443 + 1{,}142 + 0{,}971 + 0{,}860 + 0{,}781 +$$

$$+ 0{,}721 + 0{,}675 + 0{,}638 + 0{,}607 + 0{,}581) \approx 3{,}368.$$

б) Формула трапеций.

Более точное значение определенного интеграла, чем по (5.18) и (5.19), получим, заменив исходную функцию $y = f(x)$ ломаной линией (см. рис. 5.20).

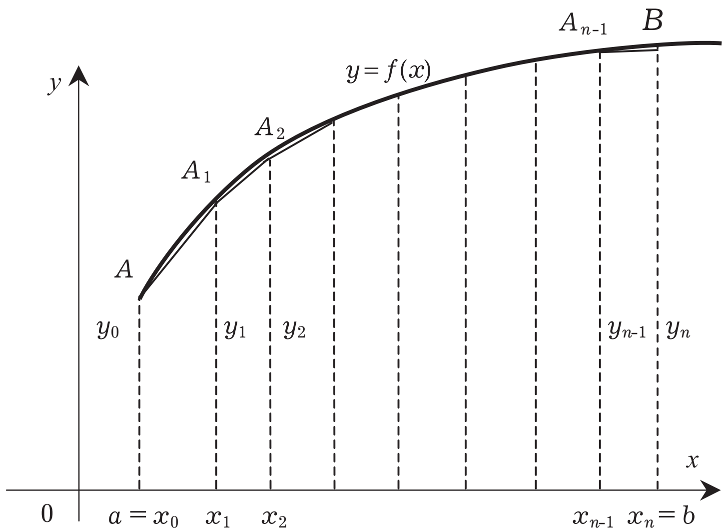


Рис. 5.20

То есть площадь криволинейной трапеции $aABb$ заменим площадью фигуры, состоящей из прямоугольных трапеций: aAA_1x_1, $x_1A_1A_2x_2$, ..., $x_{n-1}A_{n-1}Bb$. Их площади будут равны: $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$; $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$; ... ; $\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$. Поэтому определенный интеграл приближенно будут равен [1, 16]:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}\Delta x + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (5.20)$$

Выражение (5.20) носит название формулы трапеций.

Формула оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла, в этом случае имеет вид [9]:

$$|\alpha_n| \le \frac{(b-a)^3 M_1}{12n^2},$$

где $M_1 = \max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

Приведем конкретный пример вычисления определенного интеграла по формуле (5.20)

Пример 5.35.

Используя метод трапеции приближенно вычислим интеграл $\int\limits_1^4 \frac{e^x}{x}dx$, приняв $n = 10$. Этот интеграл, как и интеграл предыдущего примера, является неберущимся. В данном случае $y = f(x) = \frac{e^x}{x}$; $\frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{10} = 0{,}3$.

$$y_0 = \frac{e^1}{1} = e \approx 2{,}718;\ y_1 = \frac{e^{1,3}}{1{,}3} \approx 2{,}823;\ y_2 = \frac{e^{1,6}}{1{,}6} \approx 3{,}096;$$

$$y_3 = \frac{e^{1,9}}{1{,}9} \approx 3{,}519;\ y_4 = \frac{e^{2,2}}{2{,}2} \approx 4{,}102;\ y_5 = \frac{e^{2,5}}{2{,}5} \approx 4{,}873;$$

$$y_6 = \frac{e^{2,8}}{2{,}8} \approx 5{,}873;\ y_7 = \frac{e^{3,1}}{3{,}1} \approx 7{,}161;\ y_8 = \frac{e^{3,4}}{3{,}4} \approx 8{,}813;$$

$$y_9 = \frac{e^{3,7}}{3{,}7} \approx 10{,}932;\ y_{10} = \frac{e^4}{4} \approx 13{,}650.$$

Теперь по формуле (5.20) получаем

$$\int\limits_1^4 \frac{e^x}{x}dx \approx 0{,}3\left(\frac{2{,}718+13{,}650}{2} + 2{,}823 + \cdots + 10{,}932\right) \approx 17{,}813.$$

в) Формула парабол (формула Симпсона).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разделим $[a, b]$ на четное число частей $n = 2m$. Сущность способа заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси $0y$ (см. рис. 5.21).

Уравнения таких парабол имеет вид $y = cx^2 + dx + p$. Коэффициенты c, d, p можно однозначно найти по трем точкам, если абсциссы их различны. Дуги парабол проводят через каждую тройку точек. Криволинейную трапецию $aABb$ заменяют суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол. Площадь первой из таких параболических трапеций равна

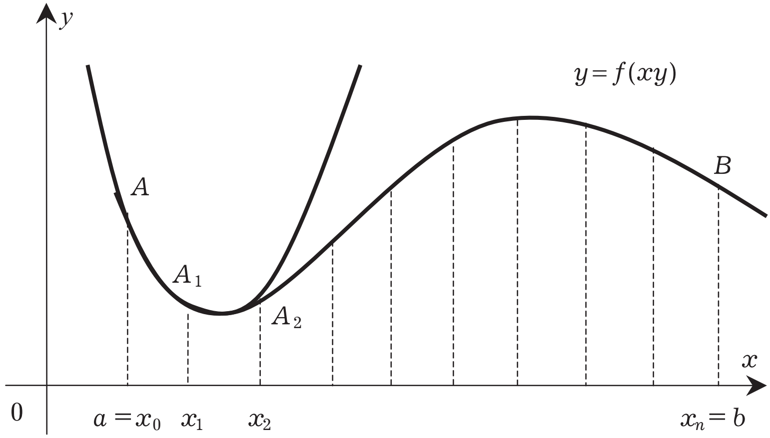


Рис. 5.21

$$S_1 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right),$$

площадь второй равна: $S_2 = \dfrac{\Delta x}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$ и т. д.

Искомая формула Симпсона имеет вид [1, 16]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \cdots y_{n-2}) + \right.$$

$$\left. + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (5.21)$$

Формула оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла, в этом случае имеет вид [9]:

$$\left|\alpha_n\right| \le \frac{(b-a)^5 M_2}{180(2n)^4},$$

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b}\left| f^{(4)}(x)\right|$.

Применение формулы (5.21) значительно повышает точность вычисления определенного интеграла. Метод прямоугольников является наиболее простым и наименее точным способом. Выбор способа приближенного интегрирования зависит от подынтегральной функции и требуемой точности расчета.

Приведем конкретный пример вычисления определенного интеграла по формуле (5.21).

Пример 5.36.

Используя формулу Симпсона приближенно вычислим интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$, приняв $n = 10$. Заметим, что этот интеграл, как и интегралы из двух предшествующих примеров, является неберущимся. В данном случае $y = f(x) = \frac{\cos x}{x}$;

$$\frac{b-a}{3n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{30} = \frac{\pi}{120}; \quad \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{10} = \frac{\pi}{40};$$

$$y_0 = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}9003; \quad y_1 = \frac{\cos\frac{11\pi}{40}}{\frac{11\pi}{40}} \approx 0{,}752; \quad y_2 = \frac{\cos\frac{12\pi}{40}}{\frac{12\pi}{40}} \approx 0{,}624;$$

$$y_3 = \frac{\cos\frac{13\pi}{40}}{\frac{13\pi}{40}} \approx 0{,}512; \quad y_4 = \frac{\cos\frac{14\pi}{40}}{\frac{14\pi}{40}} \approx 0{,}413; \quad y_5 = \frac{\cos\frac{15\pi}{40}}{\frac{15\pi}{40}} \approx 0{,}325;$$

$$y_6 = \frac{\cos\frac{16\pi}{40}}{\frac{16\pi}{40}} \approx 0{,}246; \quad y_7 = \frac{\cos\frac{17\pi}{40}}{\frac{17\pi}{40}} \approx 0{,}175; \quad y_8 = \frac{\cos\frac{18\pi}{40}}{\frac{18\pi}{40}} \approx 0{,}111;$$

$$y_9 = \frac{\cos\frac{19\pi}{40}}{\frac{19\pi}{40}} \approx 0{,}053; \quad y_{10} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

По формуле (5.21) получим:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx \approx \frac{\pi}{120}[0{,}9003 + 0 + 2(0{,}624 + 0{,}413 + 0{,}246 + 0{,}111) +$$

$$+ 4(0{,}752 + 0{,}512 + 0{,}325 + 0{,}175 + 0{,}053)] \approx 0{,}287.$$

5.6. Понятие о двойном интеграле

Понятие двойного интеграла является расширением понятия определенного интеграла на случай двух аргументов.

На плоскости $x0y$ рассмотрим замкнутую область В (область В называется замкнутой, если она ограничена линией и точки, которые лежат на границе, считаются принадлежащими области B), ограниченную линией L. В этой области зададим непрерывную функцию $z = f(x, y)$. Область B произвольно разобьем на n частей (площадок): b_1, b_2, b_3, ..., b_n. Площади этих частей (площадок) обозначим ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. В каждой площадке $b_i\,(i=\overline{1,n})$ возьмем произвольную точку M_i (эта точка может лежать и на границе площадки). Таким образом, будем иметь n точек: M_1, M_2, ..., M_n (см. рис. 5.22).

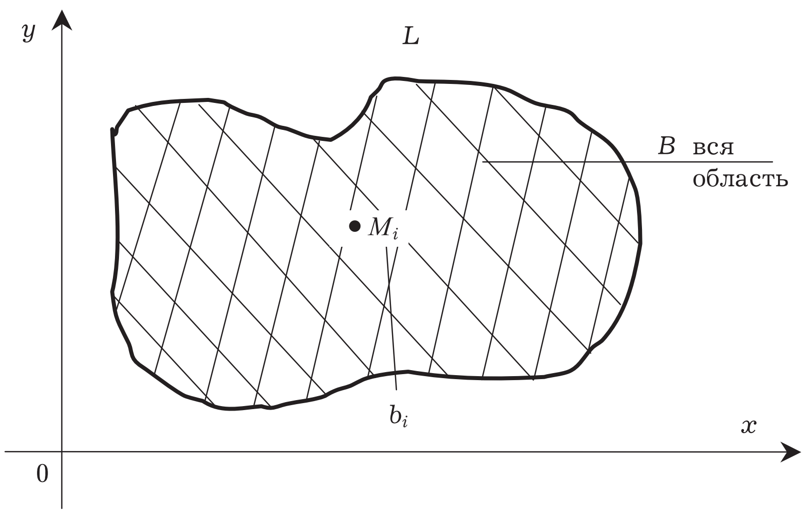


Рис. 5.22

Через $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$ обозначим значения функции $z = f(x, y)$ в выбранных нами точках. Затем составим сумму произведений $f(M_i)\Delta S_i$, которую обозначим V_s:

$$V_s = f(M_1)\Delta S_1 + f(M_2)\Delta S_2 + \cdots + f(M_n)\Delta S_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i. \tag{5.22}$$

Сумма (5.22) называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ в области B [22].

В случае, если $z = f(x, y) \geq 0$ в области B каждое слагаемое $f(M_i)\Delta S_i$ есть объем цилиндра, площадь основания которого ΔS_i, а высота $f(M_i)$. А сумма V_s представляет собой объем некоторого ступенчатого тела (см. рис. 5.23).

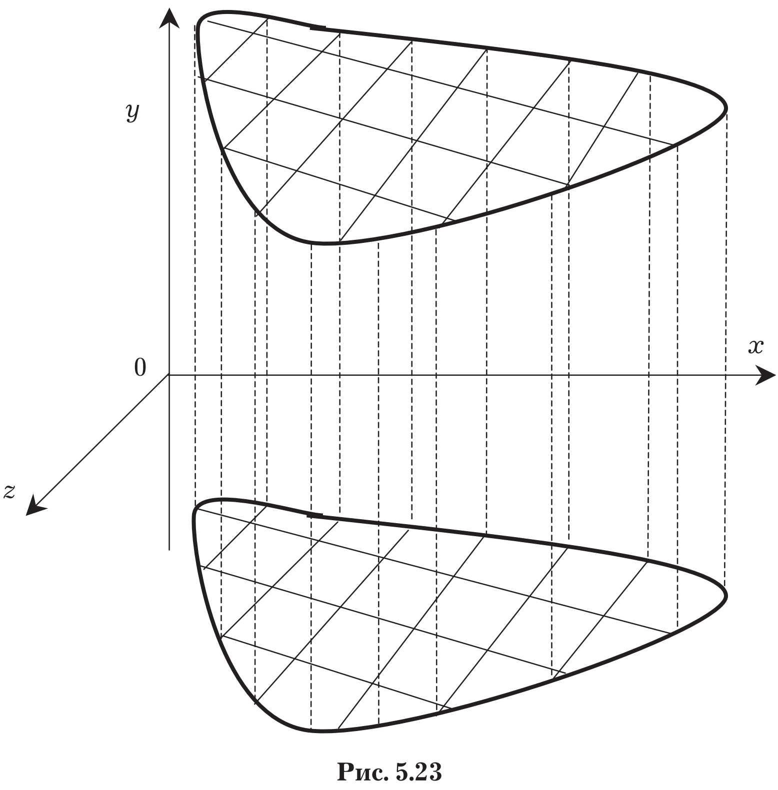


Рис. 5.23

Теперь рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, которые составлены с использованием функции $z = f(x, y)$ для области B:

$$V_{s_1}, V_{s_2}, \ldots, V_{s_k} \tag{5.23}$$

при различных способах разбиении области B на площадки b_i. Потребуем, чтобы максимальный диаметр площадок b_i стремился к нулю ($\max \operatorname{diam} b_i \to 0$) при стремлении к бесконечности количества этих площадок ($n_k \to \infty$). Тогда будет справедлива следующая теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема 5.4. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области B, то существует предел последовательности (5.23) интегральных сумм (5.22), если максимальный диаметр площадок $b_i \to 0$, а $n \to \infty$. Этот предел будет одинаков для любой последовательности вида (5.23), т. е. он не зависит ни от способа разделения области B на площадки b_i, ни от выбора в этих площадках точек M_i. Этот предел называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области B и обозначается

$$\iint_B f(x)ds = \iint_B f(xy)dxdy,$$

т. е.

$$\lim_{\max \operatorname{diam} b_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \iint_B f(xy)dxdy.$$

Область B называется областью интегрирования.

Если $z = f(x, y) \geq 0$, двойной интеграл от этой функции по области B равен объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $x0y$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $0z$, а направляющей служит линия L.

Свойства двойного интеграла

1) Если область B разбить на две части B_1 и B_2, то

$$\iint_B f(xy)dxdy = \iint_{B_1} f(xy)dxdy + \iint_{B_2} f(xy)dxdy.$$

Аналогично при разбиении области B на число частей больше двух.

2) Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т. е.

$$\iint\limits_B [f_1(xy) \pm f_2(xy) \pm \cdots \pm f_n(xy)]\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_B f_1(xy)dxdy \pm \iint\limits_B f_2(xy)dxdy \pm \cdots \pm \iint\limits_B f_n(xy)dxdy.$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т. е.

$$\iint\limits_B cf(xy)\,dxdy = c\iint\limits_B f(xy)\,dxdy,$$

где c — постоянная величина.

Вычисление двойного интеграла

1. Простейший случай.

Область B задана неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, т. е. она является прямоугольником $ADBC$ (см. рис. 5.24).

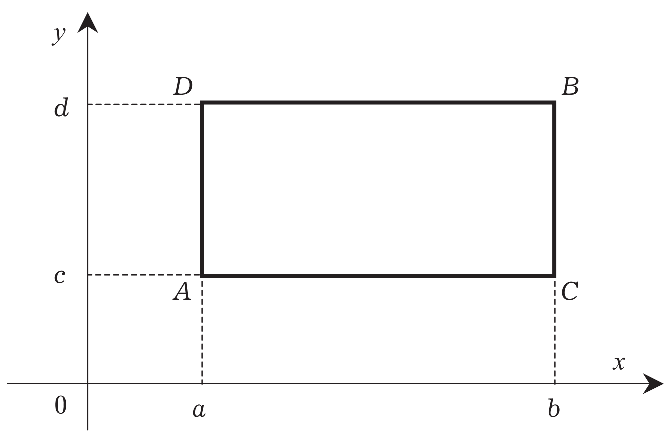


Рис. 5.24

В этом случаи двойной интеграл вычисляется по одной из приводимых ниже формул [2, 22]:

$$\iint\limits_B f(xy)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(xy)\,dx; \tag{5.24}$$

$$\iint\limits_B f(xy)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(xy)\,dy. \tag{5.25}$$

В правых частях формул (5.24) и (5.25) стоят повторные интегралы.

При вычислении по формуле (5.24) сначала находится определенный интеграл $\int\limits_a^b f(xy)dx$, причем y рассматривается как постоянная, но результат интегрирования рассматривается как функция от y. Второе интегрирование в пределах от c до d выполняется по аргументу y. При использовании формулы (5.25) порядок действий обратный.

Двойной интеграл $\iint\limits_{(ADBC)} f(xy)dxdy$ есть объем призматического тела с основанием $ADBC$. Заметим, что внешние знаки интеграла соответствуют внешним дифференциалам.

Рассмотрим конкретные примеры.

Вычислить интегралы:

Пример 5.37.

$$\int\limits_0^1\int\limits_1^2 (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_1^2 (x^2+y^2)dx = \int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\left[\frac{8}{3}+2y^2-\frac{1}{3}-y^2\right] = \frac{8}{3}\int\limits_0^1 dy + 2\int\limits_0^1 y^2dy - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 y^2dy =$$

$$= \frac{8}{3}y\Big|_0^1 + \frac{2y^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{3}y\Big|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

Пример 5.38.

$$\int\limits_3^4\int\limits_1^2 \frac{dydx}{(x+y)^2} = \int\limits_3^4 dx\int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int\limits_3^4 dx\int\limits_1^2 \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \int\limits_3^4 dx\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_3^4 dx\left[-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right] = \int_3^4 dx\left(\frac{1}{(x+2)(x+1)}\right) = \int_3^4 \frac{dx}{(x+2)(x+1)} =$$

$$\left[\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right] =$$

$= [1 = Ax + A + Bx + 2B,\ 0 = A + B,\ 1 = A + 2B, B = 1, A = -1]$, получаем

$$= \int_3^4 dx\left[\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}\right] = \int_3^4 dx\left[\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right] = -\int_3^4 \frac{dx}{x+2} + \int_3^4 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\ln|x+2|\Big|_3^4 + \ln|x+1|\Big|_3^4 = -\ln 6 + \ln 5 + \ln 5 - \ln 4 = \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

2. Общий случай.

а) Если контур области B встречается с любой пересекающей его вертикальной прямой не более чем в двух точках (т. N_1 и т. N_2 на рис. 5.25), то область B задается неравенствами $a \le x \le b$ и $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$,

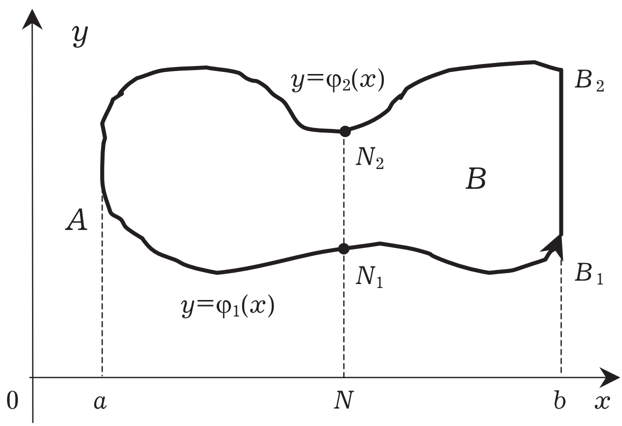


Рис. 5.25

где a и b — крайние абсциссы области B;

$\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — функции, выражающие ординаты нижней и верхней граничных линий AN_1B_1 и AN_2B_2.

В этом случае двойной интеграл находится по формуле [2, 22]:

$$\iint\limits_B f(xy)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(xy)dy. \qquad (5.26)$$

б) Если контур области B встречается не более чем в двух точках с любой пересекающей его горизонтальной прямой, то аналогично случаю а) получаем (см. рис. 5.26).

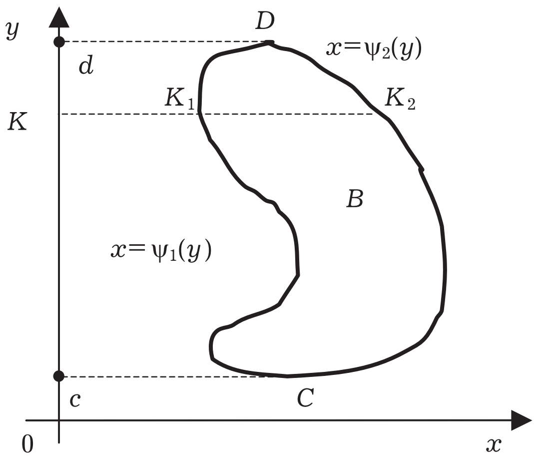


Рис. 5.26

$$\iint\limits_B f(xy)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(xy)\,dx. \qquad (5.27)$$

Если контур области В не подходит ни под случай а), ни под случай б), то ее разбивают на несколько частей так, чтобы к каждой части были применимы или формула (5.26) или (5.27).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.39.

Вычислим интеграл $\iint\limits_B (2y^2 + 3x)\,dxdy$, если область B ограничена линиями $y = x^2$, $y^2 = x$ (см. рис. 5.27). Данная задача подходит под случаи а) и б).

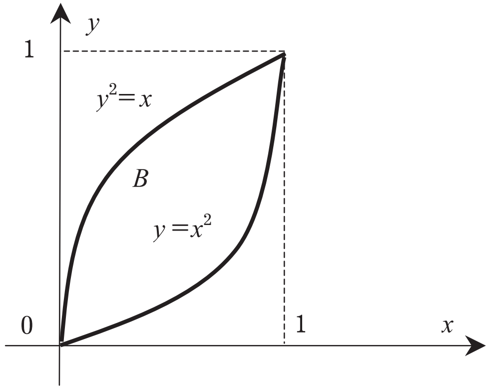


Рис. 5.27

Используем, например, формулу (5.26) (случай а). В данном случае $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$. Поэтому получим:

$$\iint\limits_B (2y^2+3x)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (2y^2+3x)dy = \int\limits_0^1 dx\left(\frac{2}{3}y^3+3xy\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\left[\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}x^6+3x^3\right)\right] = \int\limits_0^1\left(\frac{11}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^6-3x^3\right)dx =$$

$$= \frac{11}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1 - \frac{3x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{22}{15}-\frac{2}{21}-\frac{3}{4} \approx$$

$$\approx 1{,}47 - 0{,}09 - 0{,}75 = 0{,}63.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Методом непосредственного интегрирования найти интегралы:

1.1. $\int \frac{x^4+2x}{x}dx$; 1.2. $\int\left(3x^3+\frac{7}{x}\right)dx$;

1.3. $\int (8x^3+3\sin x)\,dx$; 1.4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)(1+x)}dx$.

2. Найти интегралы, использовав метод замены переменной:

2.1. $\int 3x(6x^2-7)^5\,dx$; 2.2. $\int 5\operatorname{tg} x dx$;

2.3. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x+5}}$; 2.4. $\int \frac{7dx}{x+\sqrt{x}}$.

3. Найти интегралы, использовав метод интегрирования по частям:

3.1. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 3.2. $\int 5\arcsin\ x\,dx$;

3.3. $\int x^2\sin xdx$; 3.4. $\int x^3 e^{-x}dx$.

4. Вычислить определенные интегралы:

4.1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\operatorname{tg} x dx$; 4.2. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-5}$; 4.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\ xdx$;

4.4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x\cos^2\ xdx$; 4.5. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{3x}dx$;

4.6. $\int_2^8 \frac{\ln x}{x^2}dx$; 4.7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\sin xdx$; 4.8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6xdx}{\sin^2\ x}$;

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_0^{+\infty}(5x+1)dx$; 5.2. $\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^5}$;

5.3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; 5.4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$.

6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси 0x криволинейной трапеции, ограниченной функцией $xy=4$ и прямыми $x=1$, $x=4$ и осью $0x$.

7. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси 0y криволинейной трапеции, ограниченной функцией $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $y=\pm 2b$.

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y^2 = x^3$, $x = 4$.

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

10. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y = \sin x$ и осью $0x$, вращается вокруг оси $0x$. Найти объем тела вращения.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 10$ и осью $0y$.

12. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

12.1. $y = x^2$, $y^2 = x$; 12.2. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

12.3. $y^3 = x^2$, $y = 1$; 12.4. $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$

13. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 5$.

14. Найти длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

15. Найти длину дуги кривой $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ от $y = 0$ до $y = 3$.

16. Определите длину окружности $x^2 + y^2 = 25$.

17. Используя формулу прямоугольников, вычислить интеграл $\int\limits_1^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, приняв $n = 10$.

18. Используя формулу трапеции, вычислить интеграл $\int\limits_0^6 e^{-x^2}dx$, приняв $n = 10$.

19. Используя формулу Симпсона вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$, приняв $n = 10$.

20. Вычислить двойные интегралы:

20.1. $\int\limits_0^2 \int\limits_y^{y\sqrt{3}} xydxdy$;

20.2. $\int\limits_0^5 \int\limits_{\frac{x}{3}}^{x} \frac{xdydx}{x^2+y^2}$.

21. Вычислить интеграл $\iint\limits_B (3x + y)dxdy$, если область интегрирования B ограничена линиями:

21.1. $x = 2$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 5$;

21.2. $x = 0$, $x = 5$, $y = -2$, $y = 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется первообразной?
2. В чем состоит суть метода интегрирования по частям?
3. В чем состоит суть метода замены переменной?
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. В чем состоит суть метода замены переменной в определенном интеграле?
6. Вывести формулу для объема тела вращения.
7. В каких случаях применяют приближенные методы интегрирования?
8. В чем заключается суть признаков сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами?
9. В чем состоит теорема существования двойного интеграла?

6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

6.1. Основные понятия и определения

Дифференциальными называются уравнения, которые содержат искомые функции, их производные и (или) дифференциалы различных порядков, независимые переменные [22].

Теория дифференциальных уравнений появилась в конце XVIII в. в результате решения некоторых задач механики и физики. Термин дифференциальные уравнения ввел Г. Лейбниц.

Дифференциальные уравнения подразделяются на дифференциальные уравнения в частных производных, неизвестная функция в которых зависит от двух и большего количества неизвестных, и на обыкновенные дифференциальные уравнения, неизвестная функция в которых зависит от одного аргумента.

В данном учебнике кратко рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения следующий [2, 22]:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

или

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Наивысший порядок производных, входящих в дифференциальное уравнение, называется его порядком.

Например, $2xy''+5xy'-7y = 0$ это дифференциальное уравнение второго порядка.

Решить дифференциальное уравнение — это значит найти такую функцию, подстановка которой в это дифференциальное уравнение превращает его в тождество [16].

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Геометрически они изображаются семейством интегральных кривых. И эту совокупность решений называют общим решением дифференциального уравнения и записывают так: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ [2, 22].

А решения, содержащие конкретные значения постоянных, называются частными решениями дифференциальных уравнений.

6.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

6.2.1. Общее понятие

Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию, ее производную и (или) дифференциал [2].

Его общий вид следующий:

$$F(x, y, y') \text{ или } F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0.$$

Если это уравнение можно разделить относительно производной (y'), то оно примет вид:

$$y' = f(x, y).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$y = \varphi(x, C).$$

Для того чтобы получить конкретные частные решения, надо задать начальные условия, т. е. указать пару соответствующих друг другу значений аргумента (x_0) и функции (y_0). Обычно это записывается так: $y\big|_{x=x_0} = y_0$ [2, 22].

Задавая начальные условия, из семейства интегральных кривых выделяем какую-то конкретную кривую.

Вопрос о том, в каком случае можно утверждать, что частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию существует, а также является единственным, становится ясным из следующей теоремы: если в дифференциальном уравнении $y' = f\,(x,\ y)$ функция $y = f\,(x, y)$ и ее частная производная по y $\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ непрерывны в некоторой области D на плоскости $x0y$, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого дифференциального уравнения $y = \varphi(x,)$, удовлетворяющее условию при $x = x_0$ и $y = y_0$ [22].

Приведенная теорема была впервые сформулирована и доказана Коши. Поэтому задачу нахождения частного решения по заданным начальным условиям называют задачей Коши.

6.2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

В общем случае такие уравнения имеют вид: $f_1(x)f_2(y)dx + {}$ $+\ f_3(x)f_4(y)dy = 0.$

Разделим обе части этого дифференциального уравнения на произведение $f_2(y)f_3(x)$, предполагая, что оно не равно нулю.

$$\frac{f_1(x)f_2(y)dx}{f_2(y)f_3(x)} + \frac{f_3(x)f_4(y)dy}{f_2(y)f_3(x)} = 0.$$

Далее получаем

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = -\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy.$$

В полученном дифференциальном уравнении при dx стоит только функция от x, а при dy стоит только функция от y, т. е. переменные разделены. Интегрируем левую и правую части последнего равенства и получаем:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = -\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy + C.$$

Это и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения [2, 6].

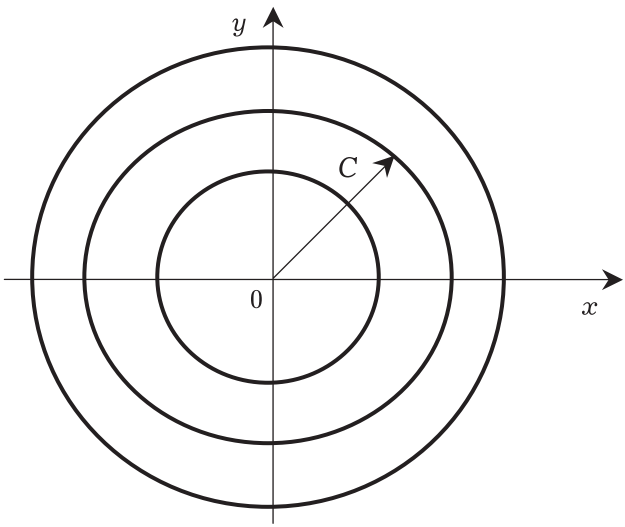
Рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 6.1. Найдем частное решение дифференциального уравнения. $xdx + ydy = 0$, если начальное условие таково $y|_{x=2} = 10$.

$$ydy = -xdx, \int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1, y^2 + x^2 = 2C_1.$$

Так как постоянная может быть любой, то примем $2C_1 = C^2$. Тогда получим общее решение исходного дифференциального уравнения $y^2 + x^2 = C^2$.

С геометрической точки зрения это решение представляет собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C (см. рисунок).



Найдем теперь частное решение для заданных начальных условий, т. е. выделим из семейства окружностей одну. Получим $10^2 + 2^2 = C^2 \Rightarrow C^2 = 104, C = \sqrt{104}$.

Поэтому частное решение имеет вид: $y^2 + x^2 = 104$.

Пример 6.2. Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$1 + y' + y + xy' = 0.$$

Перепишем его в виде:

$$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0;$$

$$(1+y)+\frac{dy}{dx}(1+x)=0.$$

Правую и левую часть домножим на dx.

$$(1+y)dx+dy(1+x)=0.$$

Правую и левую части делим на $(1+x)\neq 0$:

$$\frac{(1+y)dx}{1+x}+dy=0.$$

Правую и левую части делим на $(1+y)\neq 0$:

$$\frac{dx}{1+x}+\frac{dy}{1+y}=0;$$

$$\frac{dy}{1+y}=-\frac{dx}{1+x}.$$

Теперь интегрируем правую и левую части:

$$\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{1+x};\quad \int\frac{d(1+y)}{1+y}=-\int\frac{d(1+x)}{1+x};$$

$$\ln|1+y|=-\ln|1+x|+\ln C;\quad \ln|1+y|=\ln\left|\frac{C}{1+x}\right|;$$

$$1+y=\frac{C}{1+x}.$$

Окончательно получаем $y=\frac{C}{1+x}-1.$

Полученное выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.3. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$2xyy'=y^2-1.$$

Перепишем его в виде

$$2xy\frac{dy}{dx}=y^2-1.$$

Домножим правую и левую часть на dx:

$$2xydy = (y^2 - 1)dx.$$

Разделим правую и левую части на $x \neq 0$:

$$2ydy = \frac{(y^2 - 1)dx}{x}.$$

Разделим правую и левую части на $y^2 - 1 \neq 0$:

$$\frac{2ydy}{y^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

Теперь проинтегрируем правую и левую части полученного выражения

$$\int \frac{2ydy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{d(y^2 - 1)}{y^2 - 1} = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln|y^2 - 1| = \ln|xC|, \; y^2 - 1 = xC,$$

$$y^2 = xC + 1, \quad y = \sqrt{xC + 1}.$$

Полученное уравнение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.4. Найти частое решение дифференциального уравнения $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$, если задано следующее начальное условие $y|_{x=1} = 5$.

Перепишем исходное дифференциальное уравнение так:

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0.$$

Домножим правую и левую части на dx:

$$(x^2 + 4)dy - 2xydx = 0.$$

Разделим правую и левую части на $x^2 + 4$:

$$dy - \frac{2xydx}{x^2 + 4} = 0.$$

Разделим правую и левую части на $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{x^2 + 4} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2 + 4}.$$

Теперь интегрируем обе части полученного выражения.

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2xdx}{x^2+4},\quad \ln|y|=\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4},$$

$\ln|y|=\ln|x^2+4|+\ln C,\ \ln|y|=\ln|C(x^2+4)|.$

$y=C(x^2+4).$

Полученное уравнение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения. Геометрически оно представляет собой семейство парабол.

По заданным начальным условиям найдем частое решение, т. е. выделим конкретную параболу из полученного семейства.

$$5=C\,(1^2+4)\Rightarrow 5=5C\Rightarrow C=1.$$

Поэтому частное решение имеет вид $y=x^2+4$.

Рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, которые сводятся к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

6.2.3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f\,(x,\ y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно аргументов x и y, если при любом k справедливо равенство [22]

$$f\,(kx,\ ky)=k^n f\,(x,\ y).$$

Например, функция $f\,(x,\ y)=2xy-3y^2$ является однородной функцией второго измерения, так как

$$2(kx)(ky)-3(ky)^2=k^2(2xy-y^2).$$

А функция $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $\dfrac{(kx)^2-(ky)^2}{(kx)(ky)}=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$,

т. е. $$f\,(kx,\ ky)=f\,(x,\ y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.1}$$

называется однородным относительно x и y, если функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

По условию имеем $f(kx, ky) = f(x, y)$, положим $k = \frac{1}{x}$, тогда получим $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$, т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов. Тогда дифференциальное уравнение (6.1) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{6.2}$$

Сделаем замену переменных, обозначим

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т. е. } y = ux,$$

тогда
$$y' = u'x + u = \frac{du}{dx}x + u.$$

После подстановки дифференциальное уравнение (6.2) примет вид

$$\frac{du}{dx}x = f(1, u) - u, \tag{6.3}$$

т. е. пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Преобразуя (6.3.), получим

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{6.4}$$

Интегрируя обе части уравнения (6.4), получаем

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C. \tag{6.5}$$

Так как постоянная C может быть любой, можно записать уравнение (6.5) в виде $\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|$.

Интегрируя уравнение (6.5), получаем u, затем делаем обратную замену $u=\frac{y}{x}$ и получаем искомое общее решение однородного дифференциального уравнения. При наличии начальных условий можно найти и частное решение.

Пример 6.5. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$xy'-y=y(\ln y-\ln x),\quad \frac{dy}{dx}x-y=y\ln\left|\frac{y}{x}\right|.$$

Обе части последнего равенства разделим на x, тогда получим

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\ln\left|\frac{y}{x}\right|,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\ln\left|\frac{y}{x}\right|+1\right).$$

т. е. исходное дифференциальное уравнение является однородным.

Для его решения используем замену

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u.$$

После замены дифференциальное уравнение примет вид:

$$u'x+u=u(\ln u+1),\quad \frac{du}{dx}x=u(\ln u+1)-u,$$

$$\frac{du}{dx}x=u\ln u,\quad \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства

$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{d\ln u}{\ln u}=\ln|x|+\ln C,$$

$$\ln(\ln u)=\ln|Cx|,\quad \ln u=Cx\Rightarrow u=e^{Cx}.$$

Делаем обратную замену $u=\frac{y}{x}$ и получаем $\frac{y}{x}=e^{Cx}$ или $y=xe^{Cx}$ — это и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Предположим, что заданы начальные условия $y_{|x=2}=1$. Тогда находим частное решение заданного дифференциального уравнения

$$1 = 2e^{2C} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{2C} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{2C} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = 2C\ln e \Rightarrow C = \frac{\ln\frac{1}{2}}{2},$$

т. е. частное решение имеет вид:

$$y = xe^{\frac{\ln\frac{1}{2}}{2}x}.$$

6.2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

К линейным дифференциальным уравнениям относятся дифференциальные уравнения вида:

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{6.6}$$

т. е. линейное относительно неизвестной функции и ее производной. В уравнении (6.6) $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции аргумента x [2, 22].

Дифференциальное уравнение (6.6) сводится к двум дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными с помощью следующего приема.

Представим функцию y в виде произведения двух функций $y = uv$. Одной из этих функций можно распорядиться произвольно, а вторая при этом должна быть определена в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло исходному дифференциальному уравнению. Свободой выбора одной из функций u и v надо воспользоваться для упрощения дифференциального уравнения, получающегося после замены.

Из равенства $y = uv$ получим $y' = u'v + v'u$. Это выражение подставим в (6.6) и получим:

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x);$$
$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

В качестве v выберем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + p(x)v = 0. \tag{6.7}$$

Тогда для нахождения u получим дифференциальное уравнение

$$u'v = q(x). \tag{6.8}$$

Из дифференциального уравнения (6.7) находим v.

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Интегрируем обе части последнего выражения

$$\begin{gathered}\int\frac{dv}{v} = -\int p(x)dx; \quad \ln|v| = -\int p(x)dx; \\ v = \exp(-\int p(x)dx).\end{gathered} \tag{6.9}$$

Под неопределенным интегралом в выражении (6.9) понимается какая-то одна первообразная от функции $p(x)$, т. е. v есть вполне определенная функция от x.

Теперь используя найденное значение функции v из уравнения (6.8), находим функцию u.

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} \Rightarrow \frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow du = q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right).$$

Интегрируем обе части последнего выражения и получаем

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{6.10}$$

В формуле (6.10) для функции u берутся все первообразные.

Зная функции u и v, находим искомую функцию y.

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C). \tag{6.11}$$

Выражение (6.11) является общим решением линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 6.6. Найдем общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - 3\frac{y}{x} = x^3$.

Используем подстановку $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$ и получим

$$u'v+v'u-\frac{3}{x}uv=x^3, \quad u'v+u(v'-\frac{3}{x}v)=x^3.$$

В качестве v выберем какое-то частное решение дифференциального уравнения $v'-\dfrac{3}{x}v=0$, тогда u можно найти из дифференциального уравнения $u'v = x^3$.

Находим функцию v

$$\frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v=0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{3}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v}=$$

$$=3\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=3\ln|x| \Rightarrow v=x^3.$$

Зная v, находим функцию u

$$\frac{du}{dx}v=x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}x^3=x^3, \quad \frac{du}{dx}=1 \Rightarrow du=dx, \quad u=x+C.$$

Зная функции u и v, находим исходную функцию y

$$y = uv = x^3(x + C). \tag{6.12}$$

Выражение (6.12) есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид таких дифференциальных уравнений следующий:

$$y' + ay = b, \tag{6.13}$$

где $a, b \in R$ [16].

Дифференциальное уравнение вида (6.13) решается разделением переменных, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=b-ay \Rightarrow \frac{dy}{b-ay}=dx.$$

Интегрируем левую и правую части последнего выражения и получаем:

$$\int\frac{dy}{b-ay}=\int dx \Rightarrow -\frac{1}{a}\int\frac{d(b-ay)}{b-ay}=x+C_1 \Rightarrow -\frac{1}{a}\ln|b-ay|=x+C_1,$$

$$\ln|b-ay| = -ax - aC_1, \quad b - ay = e^{-ax}e^{-aC_1},$$
$$-ay = e^{-ax}e^{-aC_1} - b, \quad y = -\frac{1}{a}e^{-ax}e^{-aC_1} + \frac{b}{a}.$$

Так как постоянная может быть любая, обозначим $C = -\frac{1}{a}e^{-aC_1}$ и получаем общее решение дифференциального уравнения (6.13)

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}. \tag{6.14}$$

Пример 6.7. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y + 5 = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y - 5 \Rightarrow \frac{dy}{(-2y-5)} = dx,$$
$$\int\frac{dy}{(-2y-5)} = \int dx, \quad -\frac{1}{2}\int\frac{d(-2y-5)}{(-2y-5)} = x + C,$$
$$-\frac{1}{2}\ln|-2y-5| = x + C, \quad \ln|-2y-5| = -2x - 2C,$$
$$-2y - 5 = \exp(-2x)\exp(-2C), \qquad -2y = \exp(-2x)\exp(-2C) + 5,$$
$$y = -\frac{1}{2}\exp(-2x)\exp(-2C) - \frac{5}{2}.$$

6.3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

6.3.1. Общее понятие

Дифференциальные уравнения второго порядка имеют следующий вид

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.15}$$

или

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0.$$

Если уравнение (6.15) можно разрешить относительно второй производной, то оно примет вид [2, 22]

$$y'' = f\,(x, y, y'). \tag{6.16}$$

Простейшим случаем дифференциального уравнения второго порядка является дифференциальное уравнение вида

$$y'' = f\,(x), \tag{6.17}$$

которое решают двукратным интегрированием, т. е.

$$\frac{dy'}{dx} = f(x) \Rightarrow dy' = f(x)dx;$$

$$\int dy' = \int f(x)dx \Rightarrow y' = F_1(x) + C_1;$$

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x) + C_1 \Rightarrow dy = \left(F_1(x) + C_1\right)dx;$$

$$\int dy = \int\left(F_1(x) + C_1\right)dx \Rightarrow y = F_2(x) + C_1x + C_2.$$

В качестве примера найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + C_1, \quad y = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2.$$

Заметим, что дифференциальное уравнение вида (6.16) имеет бесконечное множество решений, которые задаются формулой

$$y = \varphi(x, c_1, c_2) \quad (6.18),$$

содержащей две произвольные постоянные. Выражение вида (6.18) называется общим решением дифференциального уравнения (6.16).

Частное решение дифференциального уравнения (6.16) находится при помощи задания начальных условий:

$$y_{|x=x_0} = y_0 \text{ и } y'_{|x=x_0} = y'_0.$$

Найдем частные решения рассмотренного дифференциального уравнения $y''=x^2$ при следующих начальных условиях

$$y_{|x=2} = 2 \text{ и } y'_{|x=2} = 4.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений для нахождения постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{2^3}{3} + C_1 \\ 2 = \dfrac{2^4}{12} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{4}{3} \\ C_2 = -2 \end{cases}.$$

Поэтому частное решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{4}{3}x - 2.$$

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки с координатами (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, задают еще угловой коэффициент касательной (y'_0) к этой кривой. Так как общее решение дифференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит бесконечное множество интегральных кривых, но одна из них имеет заданный угловой коэффициент (y'_0).

Будем считать, что правая часть дифференциального уравнения (6.16) $f(x, y, y')$ является функцией трех независимых аргументов, так как при задании начальных условий координаты x_0, y_0 и угловой коэффициент касательной y'_0 ничем между собой не связаны.

Тогда сформулируем теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения вида (6.16).

Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, то дифференциальное уравнение вида (6.16) имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$. Если кроме этого непрерывны и частные производные

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'},$$

то это решение единственное [2, 22].

Как и для дифференциального уравнения первого порядка, задача отыскания частного решения по начальным условиям называется задачей Коши.

Для дифференциальных уравнений второго порядка выделение частного решения можно проводить путем задания так называемых краевых условий. В этом случае задаются значения функции y в двух различных точках

$$y_{|x=x_1} = y_1 \text{ и } y_{|x=x_2} = y_2.$$

В качестве примера найдем частное решение дифференциального уравнения $y''=x^2$ при следующих краевых условиях: $y_{|x=1} = 0$ и $y_{|x=2} = 1$.

Подставляя эти значения в общее решение исходного уравнения, получим систему уравнений для нахождения неизвестных постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{12} + C_1 + C_2 \\ 1 = \dfrac{4}{3} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{4}; \\ C_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}.$$

В рассмотренном случае получилось одно частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям, но так бывает не всегда. Дифференциальное уравнение вида (6.16) может не иметь решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям или иметь бесконечное множество таких решений. В этом состоит коренное отличие задания краевых условий от задания начальных условий [2, 6, 22].

6.3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

К ним относятся дифференциальные уравнения вида

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{6.19}$$

где $a \in R$, $b \in R$.

Приведем без доказательства теоремы, помогающие находить общее решение дифференциального уравнения вида (6.19).

Теорема 6.1. Если функция $y = y_1$ — это решение дифференциального уравнения (6.19), то и функция $y = Cy_1$ ($C = \text{const}$) также решение дифференциального уравнения (6.19).

Теорема 6.2. Если функции $y = y_1$ и $y = y_2$ есть решения дифференциального уравнения (6.19), то и функция $y = y_1 + y_2$ также решение дифференциального уравнения (6.19).

При этом y_1 и y_2 называются частными решениями (6.19).

Два частных решения дифференциального уравнения (6.19) называют линейно независимыми, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный коэффициент C, т. е. $y_2 \neq Cy_1$.

Теорема 6.3. Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения уравнения (6.19), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{6.20}$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (6.19), имеющее вид (6.20), надо найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Л. Эйлер предложил искать частное решение уравнения (6.19) вида $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$ и k необходимо подобрать [2, 22].

Чтобы найти значение k, при котором $y = e^{kx}$ будет решением дифференциального уравнения (6.19), подставим $y = e^{kx}$ и ее производные первого и второго порядка в это дифференциальное уравнение. Получим

$$y' = ke^{kx};\ y'' = k^2 e^{kx},$$

$$k^2 e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0.$$

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0,$$

$$e^{kx} \neq 0 \text{ для } \forall x,$$

значит

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{6.21}$$

Уравнение (6.21) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (6.19). Решая его, можно найти неизвестные постоянные k_1 и k_2.

При решении уравнения (6.21) возможны три случая:

1. $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, общее решение уравнения (6.19) имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{6.22}$$

2. $D = 0$, $k_1 = k_2 = k$. В этом случае $y_1 = e^{kx}$ и можно доказать (см., например, [2, 22]), что $y_2 = xe^{kx}$, а общее решение уравнения (6.19) имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + xC_2 e^{k_2 x}. \tag{6.23}$$

3. $D < 0$, k_1 и k_2 — комплексно-сопряженные корни вида

$$k_1 = c + ip;\ k_2 = c - ip,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Частные решения дифференциального уравнения (6.19) в этом случае имеют вид:

$$y_1 = e^{(c+ip)x};\ y_2 = e^{(c-ip)x}.$$

Как правило, чтобы не иметь мнимых величин в показателе степени, эти решения преобразуют, используя формулы Л. Эйлера.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x;\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Для рассматриваемого случая получаем:

$$y_1 = e^{(c+ip)x} = e^{cx}e^{ipx} = e^{cx}(\cos px + i\sin px);$$
$$y_2 = e^{(c-ip)x} = e^{cx}e^{-ipx} = e^{cx}(\cos px - i\sin px).$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (6.19) имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= C_I e^{cx}(\cos px + i\sin px) + C_{II}e^{cx}(\cos px - i\sin px) = \\ &= C_I e^{cx}\cos px + iC_I e^{cx}\sin px + C_{II}e^{cx}\cos px - iC_{II}e^{cx}\sin px = \\ &= e^{cx}\cos px(C_I + C_{II}) + ie^{cx}\sin px(C_I - C_{II}). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$C_1 = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} \text{ и } C_2 = i(C_{\mathrm{I}} - C_{\mathrm{II}})$$

и окончательно получим:

$$y = e^{cx}(C_1\cos px + C_2\sin px). \tag{6.24}$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 6.8.

Найдем частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

при следующих начальных условиях $y_{|x=0} = 8;\ y'_{|x=0} = 0.$

Сначала будем искать общее решение исходного дифференциального уравнения.

$$k^2e^{kx} - 2ke^{kx} - 3e^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}(k^2 - 2k - 3) = 0,$$
$$e^{kx} \neq 0;\ k^2 - 2k - 3 = 0,$$
$$D = 4 - 4\cdot(-3) = 16,$$
$$k_1 = \frac{2+4}{2} = 3;\ k_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{3x} - C_2e^{-x}.$$

Теперь находим частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Вначале находим

$$y' = 3C_1e^{3x} + C_2e^{-x},$$

затем получаем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 8 = C_1e^0 + C_2e^0 \\ 0 = 3C_1e^0 - C_2e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = C_1 + C_2 \\ 0 = 3C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 6 \end{cases}.$$

Поэтому частное решение имеет вид:

$$y = 2e^{3x} + 6e^{-x}.$$

Пример 6.9.

Найдем общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Перепишем исходное дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$k^2e^{kx} - 6ke^{kx} + 9e^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}(k^2 - 6k + 9) = 0,$$
$$e^{kx} \neq 0;\ (k^2 - 6k + 9) = 0,$$
$$D = 36 - 4\cdot1\cdot9 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = k = \frac{6}{2} = 3.$$

Частными решениями данного уравнения являются:

$$y_1 = e^{kx} = e^{3x} \text{ и } y_2 = xe^{kx} = xe^{3x}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + xC_2 e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 6.10.

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 13e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 - 4k + 13) = 0,$$

$$e^{kx} \neq 0; \ (k^2 - 4k + 13) = 0,$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36,$$

$$k_1 = \frac{4 + i6}{2}; \quad k_2 = \frac{4 - i6}{2}.$$

$$k_1 = 2 + 3i; \ k_2 = 2 - 3i.$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

6.3.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью

Общий вид таких дифференциальных уравнений следующий:

$$y'' + ay' + by = f\,(x). \qquad (6.25)$$

Общее решение такого дифференциального уравнения получается суммированием общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + ay' + by = 0$ и какого-то частного решения дифференциального уравнения (6.25) [2, 22].

Так как нахождение общего решения дифференциального уравнения вида (6.19) мы рассмотрели раньше, то остается найти любое частное решение дифференциального уравнения (6.25).

Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

1. Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (6.25) имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^{nx}. \tag{6.26}$$

где $P_1(x)$ — многочлен.

Тогда дифференциальное уравнение (6.25) имеет частное решение вида $y = x^m P_2(x)e^{nx}$, где $P_2(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_1(x)$, причем если число n не является корнем характеристического уравнения $k^2 + ak + b = 0$, то $m = 0$, а если является, то m — кратность этого корня.

Взяв решение в указанной форме, находим неизвестные коэффициенты многочлена $P_2(x)$ по способу неопределенных коэффициентов. Правило сохраняется и в том случае, когда $n = 0$, т. е. в правой части стоит только многочлен $P_1(x)$ (в этом случае надо проверить, не является ли ноль корнем характеристического уравнения, в частном случае многочлен $P_1(x)$ может быть нулевой степени, т. е. постоянной величиной).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.11.

Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' - 4y = 4 + x.$$

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$D = 9 - 4\cdot 1(-4) = 25$$

$$k_1 = \frac{-3+5}{2} = 1;\ \ k_2 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Значит общее решение однородного дифференциального уравнения будет равно $y_1 = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

Правая часть рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид $P_1(x)e^{nx}$, причем $n = 0$, а $P_1(x) = 4 + x$.

Так как ноль не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 3k - 4 = 0$, то частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_2 = Ax + B$, где A и B — постоянные, которые нужно найти. Находим $y'_2 = A$; $y''_2 = 0$ и подставляем в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$3A - 4Ax - 4B = 4 + x;$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 3A - 4B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{3}{4} - 4 = 4B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{19}{8} \end{cases}$$

Поэтому частным решением заданного дифференциального уравнения будет функция

$$y_2 = -\frac{1}{4}x - \frac{19}{8}.$$

А его общим решением — функция

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{19}{8}.$$

2. Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (6.25) имеет вид

$$f(x) = a\cos nx + b\sin nx. \qquad (6.27)$$

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то дифференциальное уравнение (6.25) имеет частное решение вида

$$y = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ есть корни характеристического уравнения, то частное решение (6.25) имеет вид

$$y = x(A\cos nx + B\sin nx).$$

В тех случаях, когда или $a=0$, или $b=0$ решение нужно искать в указанном виде.

Пример 6.12. В качестве примера найдем общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 3\cos 2x$.

Сначала находим общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(k^2 + 4k + 13) = 0;$$

$$D = -36;$$

$$k_1 = -2 + 3i;\ k_2 = -2 - 3i.$$

А его общее решение таково

$$y_1 = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Теперь находим частное решение исходного дифференциального уравнения. Его правая часть имеет вид (6.27), причем $a = 3$; $b = 0$; $n = 2$. Числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение заданного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A и B — неизвестные коэффициенты, которые надо найти.

Дважды дифференцируем y_2 и результаты подставляем в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$y'_2 = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$

$$y''_2 = -4A\cos 2x + 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 3\cos 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$
$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 3\cos 2x.$$

Теперь приравниваем друг к другу одноименные коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ и получаем:

$$\begin{cases} -4A + 8B + 13A = 3 \\ -4B - 8A + 13B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A + 8B = 3 \\ 9B = 8A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A + \dfrac{64}{9}A = 3 \\ B = \dfrac{8}{9}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{27}{145} \\ B = \dfrac{24}{145} \end{cases}$$

И частное решение исходного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y_2 = \frac{27}{145}\cos 2x + \frac{24}{145}\sin 2x.$$

Поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y = y_1 + y_2 =$$
$$= e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{27}{145}\cos 2x + \frac{24}{145}\sin 2x.$$

Теперь приведем **метод Лагранжа** (способ вариации произвольных постоянных), который позволяет находить общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

где $f(x)$ — любая функция [2].

Чтобы применить описываемый метод, надо знать общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad (6.28)$$

где a и b могут быть как числами, так и некоторыми функциями от x. Будем считать, что a и b — числа.

Предположим, что дифференциальное уравнение (6.28), соответствующее дифференциальному уравнению (6.25), имеет общее решение:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать общее решение дифференциального уравнения (6.25) в виде

$$y = k_1(x)y_1 + k_2(x)y_2. \qquad (6.29)$$

Здесь $k_1(x)$ и $k_2(x)$ — неизвестные функции, которые надо определить, а y_1 и y_2 — известные частные решения дифференциального уравнения (6.28).

Продифференцируем (6.29) и получим:

$$y' = k'_1(x)y_1 + k_1(x)y'_1 + k'_2(x)y_2 + k_2(x)y'_2.$$

Так как надо найти две функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$, то одним из соотношений между ними можно распорядиться произвольно.

Поэтому положим

$$k'_1(x)y_1 + k'_2(x)y_2 = 0. \qquad (6.30)$$

Тогда $y' = k_1(x)y'_1 + k_2(x)y'_2$.

Последнее выражение продифференцируем второй раз и получим:

$$y'' = k'_1(x)y'_1 + k_1(x)y''_1 + k'_2(x)\,y'_2 + k_2(x)y''_2.$$

Теперь подставим в левую часть дифференциального уравнения (6.25) y, y', y'' и получим:

$$k'_1(x)y'_1 + k_1(x)y''_1 + k'_2(x)y'_2 + k_2(x)y''_2 + ak_1(x)\,y'_1 + ak_2(x)y'_2 +$$
$$+ bk_1(x)y_1 + bk_2(x)y_2 = k'_1(x)y'_1 + k'_2(x)y'_2 + k_1(x)(y''_1 +$$
$$+ ay'_1 + by_1) + k_2(x)(y''_2 + ay'_2 + by_2) = f(x);$$
$$y''_1 + ay'_1 + by_1 = 0;\ y''_2 + ay'_2 + by_2 = 0.$$

так как y_1 и y_2 есть частные решения дифференциального уравнения (6.28).

Поэтому для того, чтобы функция (6.29) была общим решением (6.25) необходимо выполнения двух условий.

$$\begin{cases} k'_1(x)y_1 + k'_2(x)y_2 = 0; \\ k'_1(x)y'_1 + k'_2(x)y'_2 = f(x). \end{cases} \tag{6.31}$$

Для того чтобы система (6.31) имела решения необходимо, чтобы ее определитель не был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому из системы (6.31) сначала находим $k'_1(x)$ и $k'_2(x)$, а затем интегрированием определяем сами функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$. Если при интегрировании $k'_1(x)$ и $k'_2(x)$ ввести произвольные постоянные, то сразу получим общее решение дифференциального уравнения (6.25).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.13.

$$y''+2y = \operatorname{ctg}\sqrt{2}x.$$

Исходному дифференциальному уравнению соответствует однородное дифференциальное уравнение $y'' + 2y = 0$, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$k^2+2=0; \quad k_{1,2}=\pm i\sqrt{2}; \quad y_1=\cos\sqrt{2}x; y_2=\sin\sqrt{2}x.$$

Поэтому запишем общее решение исходного дифференциального уравнения в виде

$y=k_1\cos\sqrt{2}x+k_2\sin\sqrt{2}x$, здесь k_1 и k_2 — функции от x.

А затем составим систему уравнений для нахождения k'_1 и k'_2

$$\begin{cases} k'_1\cos\sqrt{2}x+k'_2\sin\sqrt{2}x=0; \\ -\sqrt{2}k'_1\sin\sqrt{2}x+\sqrt{2}k'_2\cos\sqrt{2}x=\operatorname{ctg}\sqrt{2}x. \end{cases}$$

Решаем систему и получаем

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}x & \sin\sqrt{2}x \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{vmatrix}=\sqrt{2}\cos^2\sqrt{2}x+\sqrt{2}\sin^2\sqrt{2}x=\sqrt{2};$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin\sqrt{2}x \\ \operatorname{ctg}\sqrt{2}x & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{vmatrix}=-\operatorname{ctg}\sqrt{2}x\cdot\sin\sqrt{2}x;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}x & 0 \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x & \operatorname{ctg}\sqrt{2}x \end{vmatrix}=\cos\sqrt{2}x\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{2}x;$$

$$k'_1=\frac{-\operatorname{ctg}\sqrt{2}x\cdot\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}; k'_2=\frac{\cos\sqrt{2}x\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{2}x}{\sqrt{2}};$$

$$k'_1=\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x; \quad k'_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos^2\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{2}x}.$$

Интегрируем k'_1, k'_2 и находим

$$k_1=-\int\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x\,dx=\left[\sqrt{2}x=t, x=\frac{t}{\sqrt{2}}; dx=\frac{dt}{\sqrt{2}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int\cos t\,dt=-\frac{1}{2}\sin t+C_1=-\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}x+C_1.$$

здесь C_1 — произвольная постоянная.

$$k_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos^2\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{2}x}dx=\left[\sqrt{2}x=t, x=\frac{t}{\sqrt{2}}; dx=\frac{dt}{\sqrt{2}}\right]=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{\sin t} + \cos t \right) = \left[u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}; dt = \frac{2du}{1+u^2}; \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{du}{u} + \cos t \right) = \frac{1}{2} \left(\ln|u| + \cos t \right) + C_2 = \frac{1}{2} \left(\ln\left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t \right) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln\left| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}x}{2} \right| + \cos\sqrt{2}x \right) + C_2.$$

здесь C_2 — произвольная постоянная.

Теперь общее решение исходного дифференциального уравнения мы запишем в виде:

$$y = \left(-\frac{1}{2} \sin\sqrt{2}x + C_1 \right) \cdot \cos\sqrt{2}x +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2} \ln\left| tg \frac{\sqrt{2}x}{2} \right| + \frac{1}{2} \cos\sqrt{2}x \right) + C_2 \right] \cdot \sin\sqrt{2}x.$$

6.4. Понятие о системах обыкновенных дифференциальных уравнений

При решении некоторых задач физики, механики, экономики часто надо находить функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих искомые функции y_1, y_2, ..., y_n, независимую переменную x и производные и (или) дифференциалы искомых функций [22]. В настоящем учебнике кратко рассмотрим системы дифференциальных уравнений первого порядка. Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned} \right\} \qquad (6.32)$$

Система вида (6.32), правые части которой не содержат производных искомых функций, называется нормальной. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений — значит найти функции y_1, y_2, …, y_n,, удовлетворяющие (6.32) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0, \tag{6.33}$$

если они заданы.

Интегрирование системы (6.32) проводят следующим образом.

Дифференцируем по x первое уравнение системы (6.32) и получаем:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя в этом уравнении производные $\frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями из (6.32) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \Phi_2(x, y_1, ..., y_n).$$

Дифференцируем его по x и, поступая аналогично предыдущему, найдем:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \Phi_3(x, y_1, ..., y_n).$$

Продолжая далее также, придем к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi_n(x, y_1, ..., y_n).$$

Поэтому исходная система дифференциальных уравнений (6.32) примет вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ \dotfill \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = f_n(x, y_1, ..., y_n). \end{array}\right\} \tag{6.34}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (6.34) получаем y_2, y_3, …, y_n, выразив их через $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Подставляем выражения для y_2, y_3, …, y_n из (6.35) в последнее уравнение системы (6.34) и получаем дифференциальное уравнение n-го порядка для определения y_1, т. е.

$$\frac{dy_1^n}{dx^n} = F(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \tag{6.36}$$

Решаем уравнение (6.36) и находим y_1

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \tag{6.37}$$

Далее дифференцируем уравнение (6.37) $(n-1)$ раз и находим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от x, C_1, C_2, …, C_n. Затем подставляем их в (6.35) и находим искомые функции y_2, y_3, …, y_n, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_3 &= \psi_3(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n). \end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

Для того чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (6.33) надо найти из (6.37) и (6.38) соответствующие постоянные C_1, C_2, …, C_n [22].

Теперь приведем конкретный пример решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 6.14. Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ &\frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

Из второго уравнения системы находим

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - y$$

и, подставив в первое уравнение этой системы, получим

$$4\cos t - 4y - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t$$

или
$$\frac{dy}{dt} = 4\cos t - 4y + 3x - \sin t. \qquad (6.40)$$

Продифференцируем по t уравнение (6.40):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt} - 4\sin t - \cos t.$$

Подставим в это уравнение вместо $\frac{dy}{dt}$ его значение из (6.40), а вместо $\frac{dx}{dt}$ его значение из (6.39):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\cos t - 3y - 16\cos t + 16y - 12x + 4\sin t - 4\sin t - \cos t.$$

После преобразований получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -14\cos t + 13y - 12x. \qquad (6.41)$$

Найдем x из дифференциального уравнения (6.40):

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} - 4\cos t + 4y + \sin t\right)$$

и подставим его значение в (6.41). Тогда получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2\cos t - 4\sin t. \qquad (6.42)$$

Уравнение (6.42) — это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, которые рассматривались в п. 6.3.2. Решив уравнение (6.42), найдем неизвестную функцию y.

Вначале найдем общее решение дифференциального уравнения без правой части, т. е. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 4k + 3 = 0;\ k_1 = -1;\ k_2 = -3.$$

А общее решение следующее:

$$y_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t},$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Теперь найдем любое частное решение дифференциального уравнения (6.42)

$$f\,(x) = 3\cos \mathrm{t} - 4\sin t.$$

Так как числа $\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение (6.42) ищем в виде

$$y_2 = A\cos t + B\sin t,$$

где A и B неизвестные постоянные, которые необходимо определить.

Находим y_2' и y_2'':

$$y_2' = -A\sin t + B\cos t$$
$$y_2'' = -A\cos t - B\sin t.$$

Поставляем y_2; y_2'; y_2'' в (6.42) и получаем:

$$-A\cos t - B\sin t - 4A\sin t + 4B\cos t + 3A\cos t + 3B\sin t =$$
$$= 2\cos t - 4\sin t$$

или

$$2A\cos t + 4B\cos t + 2B\sin t - 4A\sin t = 2\cos t - 4\sin t,$$

или

$$\cos t(2A + 4B) + \sin\,(2B - 4A) = 2\cos t - 4\sin t,$$
$$2A + 4B = 2 \rightarrow A = 1,$$
$$2B - 4A = -4 \rightarrow B = 0.$$

Следовательно,

$$y_2 = \cos t.$$

А общее решение дифференциального уравнения (6.42) имеет вид:

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-t} - C_2{}^{-3t} + \cos \mathrm{t}. \qquad (6.43)$$

Теперь определим неизвестную функцию x по формуле

$$x=\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}-4\cos t+4y+\sin t\right). \tag{6.44}$$

Дифференцируя по t уравнение (6.43) находим

$$\frac{dy}{dt}=-C_1e^{-t}-3C_2e^{-3t}-\sin t.$$

Подставляя в (6.44) найденные значения dy/dt и значение y из формулы (6.43), получаем искомую функцию x, т. е.

$$x=\frac{1}{3}(-C_1e^{-t}-3C_2e^{-3t}-\sin t-4\cos t+\sin t+4C_1e^{-t}+$$

$$+4C_2e^{-3t}+4\cos t)=\frac{1}{3}\left(3C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}\right)=C_1e^{-t}+\frac{1}{3}C_2e^{-3t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $(x+5)dy-(y+10)dx=0$;

б) $(3xy^2+2x)dx+(2y+x^2y)dy=0$;

в) $y'=\dfrac{10}{x^2-4}$;

г) $2\sin xdx+\dfrac{3dy}{\sqrt{2y}}=0$;

д) $2y\cos y-\sin^5 xdy=0$.

2. Предположим, что темп изменения производительности труда характеризуется функцией $f(t)$. Найти функцию производительности труда $y=y(t)$, если:

а) $f(t)=\dfrac{5t}{\sqrt{t^2+4}}$; $\quad y_{|t=0}=0$;

б) $f(t)=\dfrac{\ln t}{6t}$; $\quad y_{|t=e}=1$;

3. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений:

а) $(y-x)dx+(y+x)dy$;

б) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$;

в) $(6y + 4x)dx + (3y + 8x)dy = 0$;

г) $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy - ydx)$.

4. Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений и частные решения там, где заданы начальные условия:

а) $y' + \frac{2x}{1-x^2}y = 1$;

б) $y' - 7ytgx = \frac{5x}{\cos x}$;

в) $2xy' - 3x^2y = \frac{e^{x^2}}{x + \frac{1}{x}}, \quad y_{|x=0} = 1$;

г) $2xy' + \frac{1}{\ln x}y = \frac{x^2+7}{\ln x}, \quad y_{|x=e} = e^2$.

5. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y' - 2y + 7 = 0$;

б) $3y' - 6y + 9 = 0$.

6. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' = 5x$;

б) $y'' = \cos x$;

в) $y'' = 18x^2 + 2$;

г) $y'' = 10x^2 + 2x$.

7. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений:

а) $y'' = \frac{1}{x^2} - 1$ при $y_{|x=1} = -1; \quad y'_{|x=1} = 1$;

б) $y'' = \sin x$ при $y_{|x=0} = 0; \quad y'_{|x=0} = 1$

8. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 5y' + 6 = 0$;

б) $y'' - 3y' + 16 = 0$;

в) $y'' - 22y' + 12 = 0$;

г) $6y'' - 10y' - 7 = 0$;

9. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y'' + 4y' + 3 = 0$, если $y_{|x=0} = -1; \quad y'_{|x=0} = 4$

б) $y'' - 10y' + 25 = 0$, если $y_{|x=1} = 2$; $\quad y_{|x=1} = 6$

10. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 2y' + 2y = 3e^{4x}$;

б) $y'' - y' - 2y = e^{7x}$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 3x - 16$;

г) $y'' + 4y' + 4y = 3\sin 3x + 2\cos 3x$;

д) $y'' - 12y' + 36y = 3\sin x$;

е) $y'' - 4y' - 5y = \cos 3x$.

11. Решить системы дифференциальных уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4y + 3x; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + 2x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + y + 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 2z. \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?

2. Что такое общее решение дифференциального уравнения первого порядка?

3. Что такое частное решение и в чем суть начальных условий для дифференциального уравнения первого порядка?

4. Дать формулировку теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

5. Что является геометрической иллюстрацией общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка?

6. Что такое дифференциальное уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и каким методом его можно решить?

7. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются однородными, каков их метод решения?

8. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются линейными, каков их метод решения?

9. Какие дифференциальные уравнения называются обыкновенными? Каков их общий вид?

10. Какие функции называются однородными функциями n-го измерения?

11. Как найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами?

12. Чем отличается задание краевых условий от задания начальных условий в дифференциальных уравнениях второго порядка?

13. Какие дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами называются однородными?

14. Как найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

15. Как найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью?

16. Что называется системой дифференциальных уравнений и ее решением?

17. Как система дифференциальных уравнений сводится к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

7. РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Выражение $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$,

где w_1, w_2, ..., w_n, ... — некоторые числа, называют числовым рядом; w_1, w_2, ..., w_n, ... — это члены ряда.

Для любого числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ можно построить последовательность его частичных сумм S_n:

$S_1 = w_1$;

$S_2 = w_1 + w_2$;

$S_3 = w_1 + w_2 + w_3$;

……………………...

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.1)$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда и говорят, что этот ряд сходится. Если этот предел не существует, то говорят, что ряд (7.1) расходится и суммы не имеет [3, 11, 22].

Приведем конкретные примеры.

Пример 7.1.

Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Пример 7.2.

Геометрическая прогрессия

$w + wq + wq^2 + \ldots + wq^{n-1} + \ldots\ (w \neq 0)$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Если $|q| < 1$, то $w + wq + wq^2 + \ldots + wq^{n-1} + \ldots = \frac{w}{1-q}$.

Пример 7.3.

Обобщенно гармонический ряд $\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leq 1$.

Пример 7.4.

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e-1,$$

т. е. данный ряд сходится и его сумма равна $(e - 1)$.

При исследовании рядов одним из важнейших вопросов является вопрос о том, сходится изучаемый ряд или расходится. Далее рассмотрим достаточные признаки, на основании которых можно решить этот вопрос. Сейчас же приведем необходимый признак сходимости рядов, т. е. условие, при невыполнении которого ряды расходятся.

Теорема 7.1. Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n [2, 22].

Следствие. Если n-й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится. Данный признак не является достаточным, т. е. он может выполняться, а ряд будет расходиться. Например, гармонический ряд из примера 7.1 расходится, несмотря на то, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$.

Основные свойства сходящихся числовых рядов [11]

1. Сходимость числового ряда не нарушится, если приписать или отбросить конечное число его членов.

2. Если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число k, то его сходимость не нарушится.

3. Два сходящихся ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S_1$; $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = S_2$ можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$ будет сходится, а его сумма будет равна $S_1 \pm S_2$.

Признаки сходимости положительных числовых рядов описаны в литературе [2, 11, 22]

Если все члены рядов

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7.2}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{7.3}$$

неотрицательны и $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то из сходимости ряда (7.3) следует сходимость ряда (7.2). Из расходимости ряда (7.2) следует расходимость ряда (7.3).

Если все члены рядов (7.2) и (7.3) положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=C$, $0 < C < +\infty$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 7.5.

Ряд $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n}+\ldots$ расходится, так как гармонический ряд $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ расходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}:\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 7.6.

Ряд $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ расходится, так как его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов гармонического ряда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$, который расходится.

Признак Коши

Если все члены ряда $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ неотрицательны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n}=b$, то при $b < 1$ этот ряд сходится, а при $b > 1$ расходится (при $b = 1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда).

Пример 7.7.

Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Применяем к данному ряду признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

и видим, что он сходится.

Признак Даламбера

Если все члены ряда $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=l$, то при $l < 1$ этот ряд сходится, а при $l > 1$

этот ряд расходится (при $l = 1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда).

Пример 7.8. Исследуем сходимость ряда

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$$

Применяем к данному ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}:\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

и видим, что он сходится.

Интегральный признак сходимости Коши

Если $W_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $f(n)$ — значение при $x = n$ некоторой функции $f(x)$, непрерывной, положительной и не возрастающей при $x \geq 1$, то ряд $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ сходится или расходится в зависимости от того, существует или нет конечный $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx$.

Пример 7.9.

Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots .$$

Применяем к данному ряду интегральный признак сходимости Коши, положив $f(x)=\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1,$$

т. е. ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов

Числовой ряд

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \qquad (7.4)$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots \tag{7.5}$$

Абсолютно сходящийся ряд всегда сходится. Если ряд (7.4) сходится, а ряд (7.5) расходится, то говорят, что ряд (7.4) сходится условно [11, 22].

Теперь приведем теорему Лейбница, которая применяется для знакочередующихся рядов; т. е. рядов у которых положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Теорема 7.2. Ряд

$$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \ldots + (-1)^{n-1} w_n + \ldots,$$

где все $w_n > 0$, сходится, если все его члены таковы, что $w_1 > w_2 > > w_3 > \ldots > w_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, а его сумма положительна и не превосходит первого члена [2, 11, 22].

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1. Если ряд сходится абсолютно, то новый ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

2. Если ряд сходится условно, то какое бы число S ни взять, можно так переставить члены в этом ряде, чтобы сумма преобразованного ряда была равна именно S.

3. Если ряд сходится условно, то можно так переставить члены в этом ряде, что новый ряд будет расходиться.

7.2. Функциональные ряды

Выражение вида

$$W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x), \tag{7.6}$$

где $W_1(x)$, $W_2(x)$, ..., $W_n(x)$, ... — некоторые функции, определенные на одном и том же множестве D, называется функциональным рядом [2, 11].

Множество $E \subseteq D$ всех значений x, при которых функциональный ряд (7.6) сходится (как числовой ряд), называется областью сходимости этого ряда. Функция $S(x)$, $x \in E$ является суммой ряда (7.6), если

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = W_1(x) + W_2(x) + \dots + W_n(x)$.

Если функция $S(x)$, $x \in P (P \subseteq E)$ является суммой ряда (7.6), то говорят, что этот ряд сходится на множестве P к функции $S(x)$.

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве P к функции $S(x)$, если для $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n \geq N$ сразу для всех $x \in P$ выполняется неравенство [11]

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Если функциональный ряд сходится на множестве P, то на этом множестве сходимость не обязана быть равномерной, но на некотором подмножестве множества P сходимость может оказаться равномерной.

Приведем признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Если члены функционального ряда

$$W_1(x) + W_2(x) + \dots + W_n(x) + \dots$$

удовлетворяют на множестве P неравенствам

$$|W_n(x)| \leq W_n \ (\mathrm{n} = 1, 2, 3, \dots),$$

где W_n — члены сходящегося числового ряда

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n + \dots,$$

то функциональный ряд сходится на множестве P равномерно [11].

Пример 7.10.

Ряд $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ сходится на $P = (-\infty;\ +\infty)$ равномерно, так как всегда $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Если функции $W_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, а составленный из них ряд $W_1(x) + W_2(x) + \dots + W_n(x) + \dots$ сходится равномерно на этом отрезке к функции $S(x)$, то:

1) функция $S(x)$ на $[a, b]$ непрерывна;

2) $\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b W_1(x)dx + \int\limits_a^b W_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b W_n(x)dx + \ldots$

Пример 7.11.

Ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ сходится равномерно к функции $\frac{1}{1-x}$, поэтому

$$\int\limits_0^{1/2} 1 \cdot dx + \int\limits_0^{1/2} x dx + \ldots + \int\limits_0^{1/2} x^{n-1} dx + \ldots = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1-x}$$

или $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots = \ln 2.$

Если функции $W_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке:

1) ряд $W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots$
сходится к функции $S(x)$;

2) ряд $W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x) + \ldots$
сходится равномерно, то $S(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и

$$S'(x) = W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x) + \ldots$$ [11, 20, 22].

7.3. Степенные ряды

Функциональный ряд.

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n, \quad (7.7)$$

где $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и x_0 — некоторые числа, называют степенным рядом с центром в точке x_0.

Возможны следующие три случая:

1) степенной ряд (7.7) сходится только при $x = x_0$ (везде расходящийся ряд);

2) степенной ряд (7.7) сходится (причем абсолютно) при любых значениях (всюду сходящийся ряд);

3) существует число $R > 0$ такое, что ряд (7.7) сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$ (радиус сходимости ряда). $R = 0$ для всюду расходящегося ряда и $R = \infty$ для всюду сходящегося ряда.

Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда (7.7). При этом на концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 7.12.

Найдем область сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{x^m}{n\cdot 2^n}+\ldots .$$

Положим $W_n = \dfrac{|x|^n}{n\cdot 2^n}$; $W_{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$.

Тогда по признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}|x|^n}=\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|}{2},$$

следовательно, данный степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 2$ и расходится при $|x| > 2$, а радиус его сходимости равен 2 ($R = 2$).

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости: при $x = 2$ ряд $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится, а при $x = -2$ ряд $-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ сходится. Поэтому область сходимости исходного степенного ряда $E = [-2; 2)$.

Основные свойства степенных рядов [2, 11]

1. Если степенной ряд не является всюду расходящимся, то его сумма непрерывна в каждой точке области сходимости.

2. Степенной ряд внутри его области сходимости можно интегрировать почленно, так что если

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots + \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots = S(x),\ x \in E,$$

то

$$\alpha_0(x-x_0)+\alpha_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\alpha_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+\ldots+$$
$$+\alpha_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+\ldots=\int_0^x S(x)dx.$$

Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно, так что если

$$\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)^2+\ldots+\alpha_n(x-x_0)^n+\ldots=S(x),$$
$$x\in(x_0-R,\,x_0+R),\ R>0,$$

то

$$\alpha_1+2\alpha_2(x-x_0)+\ldots+n\alpha_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots=S'(x),$$
$$x\in(x_0-R,\,x_0+R).$$

Это свойство сохраняет силу и для конца интервала сходимости, если только последний ряд на этом конце сходится.

4. Если степенной ряд

$$\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)^2+\ldots+\alpha_n(x-x_0)^n+\ldots$$

не является всюду расходящимся, то его сумма $S(x)$ имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков. При этом

$$\alpha_0=S(x_0);\ \alpha_1=S'(x_0),\ \alpha_2=\frac{S''(x_0)}{2!},\ldots,\alpha_n=\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots.$$

Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков при $x=x_0$, то степенной ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{7.8}$$

называют рядом Тейлора для функции $f(x)$. При $x_0=0$ получают частный случай ряда Тейлора

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (7.9)$$

который часто называют рядом Маклорена [2, 11, 22].

Для того чтобы ряд (7.8) сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, где $R_n(x)$ — остаточный член ряда Тейлора.

Приведем теорему, которая позволяет устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при неограниченном возрастании n или нет, т. е., разлагается ли функция $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

Теорема 7.3.

Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет $(n+1)$-ю производную $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этого интервала имеет вид

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\eta)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где η заключено между x_0 и x [2] (см. также гл. 4).

Приведем разложения в степенной ряд некоторых функций:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sin x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\cos x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=arctgx, \ |x|\le 1;$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\ln(x+1), \quad x\in(-1;1].$$

Задачи для самостоятельного решения

1. С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^{2n}+2}$; 1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+1}$;

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; 1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n-1}$.

2. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

2.1. $1+\frac{2!}{5}+\frac{3!}{5^2}+\frac{4!}{5^3}+\ldots$;

2.2. $\frac{1}{(\ln 2)^3}+\frac{1}{2!(\ln 3)^3}+\frac{1}{3!(\ln 4)^3}+\ldots$;

3. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши:

3.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$;

3.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n^2}$.

4. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$; 4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{5n^4+2}$.

5. Исследовать абсолютную или условную сходимость рядов:

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^3}$; 5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$;

5.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$; 5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)\cdot 4^n}$

6). Найти области сходимости степенных рядов:

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{3n}$; 6.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$;

6.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; 6.4. $x+2x^2+4x^3+8x^4+\ldots$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовым рядом?
2. Что такое сумма ряда? Дать определение сходящегося и расходящегося рядов.
3. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
4. В чем суть признаков Даламбера и Коши?
5. В чем суть интегрального признака Коши?
6. Какой ряд называется знакочередующимся?
7. В чем сущность признака Лейбница?
8. Что называется абсолютной и условной сходимостью ряда?
9. Какой ряд называется функциональным?
10. Что называется областью сходимости функционального ряда?
11. Какой ряд называется степенным?
12. Каковы основные свойства степенных рядов?

Литература к разделу I

1. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994.
2. *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. — М.:, Наука, 1969.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. В 3 т., — М.: Дрофа, 2003.
4. *Булдык Г. М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике. — Минск: Юнипресс, 2002.
5. *Верещагин Н. К., Шень А.* Начала теории множеств. — М., МЦНМО, 1999.
6. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. — М.: «ДЖАНГАР, «Большая медведица», 2001.
7. *Гончарова Г. А., Мочалин А. А.* Элементы дискретной математики. — М.: ФОРУМ-ИНФРА-М, 2003.
8. *Грес П. В.* Математика для гуманитариев. — М.: ЮРАЙТ, 2000.

9. *Гусак А. А.* Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. — Минск: ТетраСистемс, 1998.

10. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1989.

11. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. — М.: Высшая школа, 1987.

12. *Идельсон А. В., Блюмкина И. А.* Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. — М.: ИНФРА-М, 2000.

13. *Клиот-Дашинский М. И.* Алгебра матриц и векторов. — СПб.: Лань, 2001.

14. *Кук Д., Бейз Г.* Компьютерная математика. — М.: Наука, 1990.

15. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: ГИФМЛ, 1962.

16. *Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л.* Математика. — М.: Высшая школа, 1991.

17. *Максимов Ю. Д. и др.* Курс высшей математики для гуманитарных специальностей. — СПб.: Специальная литература, 1999.

18. Математика для бакалавров технических специальностей: Т. 1. Общие разделы / Под общ. ред. Ю. Д. Максимова. — СПб.: Специальная литература, 1999.

19. *Марков Л. Н., Размыслович Г. П.* Высшая математика: Ч. 1. Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии. — Минск: Амалфея, 1999.

20. *Немыцкий В. и др.* Курс математического анализа. В 2 т. — М.: ГИТТЛ, 1957.

21. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1968.

22. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. — М.: Наука, 1964.

23. *Подольский В. А., Суходский А. М.* Сборник задач по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1974.

24. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.

25. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984.

26. Общая алгебра. Т. 1 / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1990.

27. *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Элементы дискретной математики. — М.: ИНФРА-М, 2002.

28. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.

29. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М.-Л.: Физматгиз, 1963.

30. *Энгельс Ф.* «Анти-Дюринг» / Сочинения. Т. 20. — М.: Госполитиздат, 1961.

Раздел II
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

8.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей — математическая наука, занимающаяся изучением закономерностей в случайных явлениях массового характера [4].

Под случайным принято понимать явление, которое при многократном наблюдении (воспроизведении одного и того же комплекса условий проведения эксперимента) протекает каждый раз по-разному.

Например, в 1827 г ботаник Р. Броун открыл явление, которое по его имени стали называть броуновским. Он наблюдал под микроскопом и обнаружил, что частицы пыльцы находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить. Вскоре было обнаружено, что это движение — общее свойство любых мелких частиц, взвешенных в жидкости. Интенсивность движения зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц. Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории других частиц, так что близкие частицы очень быстро становятся удаленными.

Приведем другой пример. Производится стрельба из артиллерийского орудия.

С помощью методов баллистики при определенных исходных данных (начальной скорости движения снаряда $\overline{V}_0$, угле бросания Θ_0, баллистическом коэффициенте снаряда С) можно рассчитать теоретическую траекторию движения (штрихпунктирная линия на рис. 8.1).

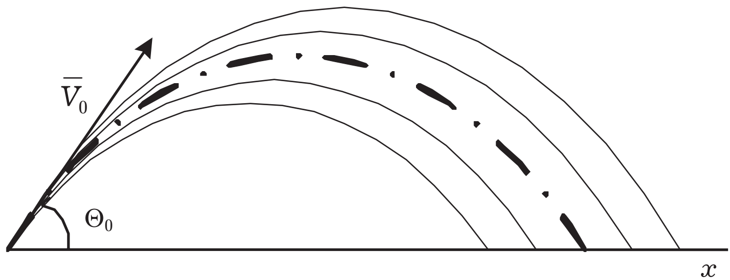


Рис. 8.1

При реальных стрельбах траектория полета каждого отдельного снаряда будет отклоняться от расчетной. При проведении нескольких выстрелов при одних и тех же исходных данных (V_0, Θ_0, C) будем наблюдать рассеивание траектории полета снарядов относительно расчетной. Это обусловлено действием большого числа второстепенных факторов, влияющих на траекторию полета, но не заданных в числе исходных данных. К числу таких факторов следует отнести: ошибки при изготовлении снаряда, отклонение веса снаряда от номинального значения, неоднозначность структуры заряда, ошибки в установке угла наклона ствола орудия, метеорологические условия и т. д.

Основные факторы, учитываемые при наблюдении случайного явления, определяют его протекание в общих чертах и от наблюдения (опыта) к наблюдению не меняются. Второстепенные факторы вызывают различия в их результатах.

Вполне очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором точно и полно учтены факторы, определяющие явление. Невозможно достигнуть того, чтобы при многократных наблюдениях результаты полностью и в точности совпадали.

Иногда при решении практических задач случайными отклонениями пренебрегают, рассматривая не само реальное явление, а его упрощенную схему (модель), полагая, что в данных условиях наблюдения явление протекает вполне определенным образом. При этом из всей совокупности факторов, воздействующих на явление, выделяются основные, наиболее существенные. Влиянием остальных, второстепенных, факторов просто пренебрегают.

Такая схема изучения явлений часто применяется в механике, технике, психологии, экономике и других отраслях знаний. При таком подходе выявляется основная закономерность, присущая данному явлению и дающая возможность предсказать результат наблюдения при определенных исходных данных. По мере развития науки число учитываемых факторов увеличивается, явление исследуется подробнее, научный прогноз становится точнее. Описанная схема изучения явлений получила название классической схемы так называемых точных наук.

Однако при решении многих практических задач классическая схема "точных наук" неприменима. Существуют задачи, результат решения которых зависит от достаточно большого числа факторов, зарегистрировать и учесть которые практически невозможно.

Например, производится обстрел объекта из артиллерийского орудия с целью его поражения. Как было отмечено выше, при стрельбе из артиллерийского орудия имеет место рассеивание точек падения снарядов. Если размеры объекта существенно превышают размеры зоны рассеивания, то этим рассеиванием можно пренебречь, поскольку выпущенный снаряд попадет в цель. Если размер объекта меньше размеров зоны рассеивания, то некоторая часть снарядов в цель не попадет. В этих условиях приходится решать задачи, например, по определению среднего числа снарядов, попавших в цель, требуемого числа снарядов для надежного поражения цели и др. При решении таких задач классическая схема "точных наук" оказывается недостаточной. Эти задачи связаны со случайной природой рассеивания снарядов, и при их решении случайностью этого явления пренебрегать нельзя. Необходимо изучить рассеивание снарядов как случайное явление с точки зрения присущих ему закономерностей. Надо исследовать закон распределения координат точек падения снарядов, выяснить источники, вызывающие рассеивание и т. д.

Рассмотрим второй пример. Система автоматического управления функционирует в условиях непрерывно воздействующих помех. Действие помех приводит к отклонению управляемых параметров от расчетных значений. При исследовании процесса функционирования системы необходимо установить природу и структуру случайных возмущений, выяснить влияние конструктивных параметров системы на вид этой реакции и т. п.

Все подобные задачи, а число их в природе чрезвычайно велико, требуют изучения не только основных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и анализа случайных возмущений и исключений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих исходу наблюдений при заданных исходных данных элемент неопределенности.

С теоретической точки зрения второстепенные (случайные) факторы ничем не отличаются от основных (наиболее существенных). Точность решения задачи можно повышать за счет учета большого числа факторов от самых существенных до самых ничтожных. Однако это может привести к тому, что решение поставленной задачи ввиду сложности и громоздкости будет практически неосуществимым и не будет представлять никакой ценности.

Очевидно, должна существовать принципиальная разница в методах учета основных факторов, определяющих явление в главных чертах, и второстепенных факторов, влияющих на явление в качестве возмущений. Элементы неопределенности, сложности, присущие случайным явлениям, требуют создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы и разрабатываются в теории вероятностей. Ее предметом являются специфические закономерности ти, наблюдаемые в случайных явлениях. При многократных наблюдениях однородных случайных явлений обнаруживаются в них вполне определенные закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым случайным явлениям.

Например, если много раз подряд бросать монету, то частота появления цифры (отношение числа бросаний, при которых появилась цифра, к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к числу равному 0,5. Такое же свойство "устойчивости частоты" обнаруживается и при многократном повторении любого другого опыта, исход которого представляется заранее неопределенным (случайным).

Закономерности в случайных явлениях появляются всегда, когда имеют дело с массой однородных случайных явлений. Они оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, а средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже неслучайным.

Методы теории вероятностей приспособлены только для исследования массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но дают возможность предсказать средний случайный результат массы однородных случайных явлений, предсказать средний исход массы аналогичных опытов, конкретный исход каждого из которых остается неопределенным (случайным).

Вероятностные методы не противопоставляют себя классическим методам "точных наук", а являются их дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

В зависимости от сложности случайного явления для его описания используют следующие понятия: *случайное событие, случайная величина, случайная функция* (рис. 8.2).

Именно в такой последовательности и будем рассматривать закономерности в случайных явлениях.

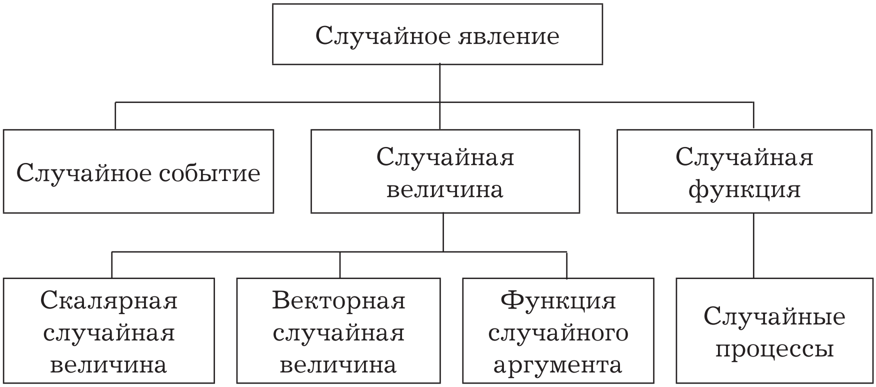


Рис. 8.2

8.2. Основные понятия и определения

Одним из фундаментальных понятий в теории вероятностей является испытание (эксперимент). Под испытанием понимают наблюдение того или иного явления при реализации определенного комплекса условий (наблюдение этого же явления в других условиях считается другим испытанием).

Если результат испытания фиксируется только как факт, то его называют событием.

Введем следующую формальную схему испытания (эксперимента) (рис. 8.3).

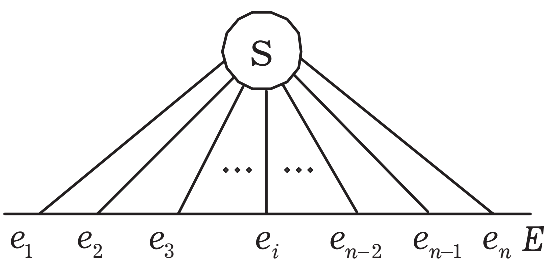


Рис. 8.3

На рисунке обозначено:

S — комплекс условий эксперимента;

E — множество результатов эксперимента.

В одной реализации эксперимента может появиться один и только один исход, который называют *элементарным событием* e_i. Множество всех исходов эксперимента E называют *пространством элементарных событий* [5]. Оно вводится описательным путем.

Пример 8.1. Производится прием готовой продукции на предприятии. Элементарными событиями будут e_1 — исправное изделие не принято, e_2 — принятое изделие исправно, e_3 — принято исправным дефектное изделие. Множество исходов: e_1, e_2, e_3 образует пространство элементарных событий $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Группируя различным образом элементарные события, также будем получать события. Событие A — это подмножество пространства элементарных событий $A \subset E$.

В дальнейшем события будем обозначать прописными буквами начала латинского алфавита: A, B, C и т. д. или такими же буквами с цифровыми индексами.

Например, событие A — изделие принято (пример 8.1) включает элементарные события e_2 — принятое изделие исправно и e_3 — принято исправным дефектное изделие:

$$\mathrm{A} = \{e_2, e_3\}.$$

Пример 8.2. Производится обстрел m целей. Элементарные события: e_1 — ни одна цель не поражена ($e_1 = 0$); поражена одна цель ($e_2 = 1$); поражено две цели ($e_3 = 1$) и т. д. до $e_{m+1} = m$. В этом случае получаем пространство элементарных событий

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}\}.$$

Событие B — поражение не менее двух целей включает элементарные события $e_3, e_4, \ldots, e_{m+1}$

$$E = \{e_3, e_4, \ldots, e_{m+1}\}.$$

Все множество событий, которое можно построить на пространстве элементарных событий, называют полем событий или σ (сигма)-алгеброй.

Событие, которое наступает всякий раз при реализации комплекса условий, называют *достоверным*. Например, падение на землю монеты или кости при их подбрасывании и т. д. [4, 5].

Событие, которое никогда не наступает при реализации данного комплекса условий, называют *невозможным*. Например, процедура банкротства более m предприятий при диагностике m предприятий является событием невозможным.

В дальнейшем будем обозначать достоверные события буквой U, а невозможные — буквой V.

Событие, которое при реализации данного комплекса условий может как наступить, так и не наступить, называют *случайным*. Например, попадание в цель при одном выстреле, прием партии готовой продукции при контроле ее качества, отказ элемента системы в процессе ее функционирования в течение времени t и т. п.

Между различными событиями, принадлежащими одному и тому же пространству элементарных событий, могут быть установлены определенные соотношения и операции. Обычно для изображения событий используют логические диаграммы Эйлера-Венна (Венна).

Рассмотрим некоторые операции над событиями.

Произведением (пересечением) нескольких событий A_1, A_2, ..., A_n называют событие

$$B = \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

состоящее в совместном (одновременном или последовательном) их наступлении. Событие B включает те и только те элементарные события, которые принадлежат одновременно и A_1, и A_2, и ..., и A_n. Диаграмма Венна для события $B = A_1 \cdot A_2$ показана на рис. 8.4 (заштрихованная область).

Например, событие, заключающееся в нормальном функционировании технической системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов (рис. 8.5), является произведением двух событий: A_1 — исправная работа первого элемента и A_2 — исправная работа второго элемента, причем оба эти события при испытании осуществляются одновременно.

Примером произведения событий, наступающих при испытании последовательно, является поражение трех целей при их обстреле из орудия тремя снарядами.

Суммой (объединением) событий A_1, A_2, ..., A_n называют событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из них и обозначаемое

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Событие C включает в себя все те элементарные события, которые принадлежат хотя бы одному из событий A_i [4, 5].

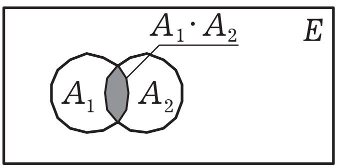


Рис. 8.4

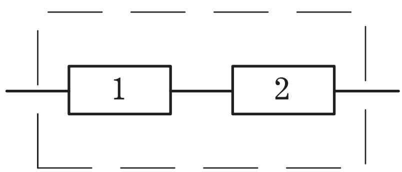


Рис. 8.5

В рассмотренном выше примере (см. рис. 8.5), событие C является суммой событий A_1 или A_2, если C — отказ цепи, а A_1 и A_2 — отказ первого и второго элемента соответственно.

Диаграмма Венна представлена на рис. 8.6 (заштрихованная область).

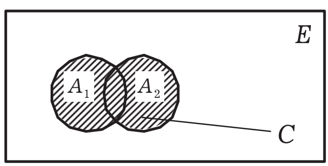


Рис. 8.6

События A_1 и A_2 называются *несовместными* в данном испытании, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_1 — получение одного попадания в цель и A_2 — получение двух попаданий (в той же серии выстрелов) являются несовместными. Символически признак несовместности событий A_1 и A_2 можно представить так:

$$A_1 \cdot A_2 = V.$$

У несовместных событий нет общих точек на диаграмме. Несколько событий называются *попарно несовместными*, если никакие два из них в данном испытании не могут наступить вместе. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_0 — ни одного попадания в цель, A_1 — одно попадание в цель, A_2 — два попадания в цель попарно несовместны. Обычно попарно несовместные события называют просто несовместными.

Несколько событий A_1, A_2, ..., A_n составляют *полную группу*, если в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них, т. е., если

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U. \tag{8.1}$$

Так, в рассматриваемом выше примере стрельбы по цели двумя снарядами события A_0, A_1, A_2 составляют полную группу несовместных событий. Диаграмма Венна для данного случая показана на рис. 8.7.

Два несовместных события, составляющих полную группу, называются *противоположными* (рис. 8.8). Их обычно обозначают A и $\overline{A}$ (не “A”). Например, отказ и нормальное функционирование элемента технической системы, попадание и промах при стрельбе одним снарядом по цели являются противоположными событиями.

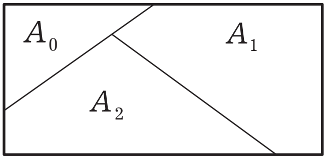


Рис. 8.7

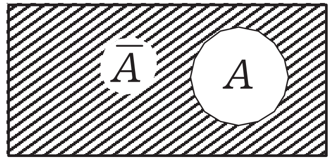


Рис. 8.8

Для противоположных событий справедливы соотношения

$$A + \overline{A} = U,$$
$$A \cdot \overline{A} = V. \tag{8.2}$$

8.3. Частота и вероятность. Способы нахождения вероятностей случайных событий

8.3.1. Статистическое определение вероятностей

При обработке результатов испытаний принято считать наиболее информативной характеристикой того, как часто наступало некоторое событие A в серии испытаний, произведенных при одном и том же комплексе условий, отношение числа $N(A)$ испытаний, в которых оно имело место, к общему их числу:

$$P^*(A) = \frac{N(A)}{N}. \tag{8.3}$$

Эту величину принято называть *частотой* наступления события (иногда ее называют частостью). Вполне очевидно:

- для невозможного события $P^*(V) = 0$;
- для достоверного $P^*(U) = 1$;
- для случайного $0 \le P^*(A) \le 1$.

Знаки нестрогого неравенства здесь поставлены потому, что случайное событие, в принципе, может наступить или не наступить во всех произведенных испытаниях.

При многократном осуществлении какого-либо одного и того же испытания частота наступления соответствующего ему события сравнительно редко сколько-нибудь значительно отклоняется от некоторого неотрицательного числа, причем тем реже, чем больше произведено испытаний. Такое свойство частоты называют устойчивостью. Это свойство, многократно проверенное экспериментально, является одной из наиболее характерных закономерностей, которые присущи случайным явлениям.

Число, относительно которого при неограниченном увеличении количества испытаний стабилизируется частота наступления события в определенных условиях, принимают за меру объективной возможности его появления в этих условиях и называют *вероятностью* данного события.

Обозначать вероятности принято буквами p или P с указанием или без указания в скобках соответствующего события.

Из введенного выше понятия вероятности следует, что

$$0 \leq P \leq 1,$$

причем для достоверного события

$$P(U) = 1,$$

а для невозможного

$$P(V) = 0.$$

Вероятность случайного события позволяет судить о том, как часто оно будет иметь место при проведении данного эксперимента. Например, если вероятность нормального функционирования системы за промежуток времени T равна 0.94, то при достаточно большом числе испытаний системы в соответствующих условиях она не откажет в среднем в 94 испытаниях из каждых 100.

Особенность устойчивости частоты состоит в том, что при увеличении числа испытаний она не стремится к вероятности как к пределу, а стабилизируется относительно этой характеристики так, что существенные отклонения частоты от вероятности оказываются все более и более редкими. Тем не менее это дает основание принимать за вероятность события частоту его наступления, полученную по результатам большого числа испытаний. Однако следует иметь в виду, что практическое применение такого способа нахождения вероятностей может быть существенно ограничено стоимостью соответствующих экспериментов. Кроме того, обычно проблематичным является решение вопроса о том, какое число испытаний можно считать достаточным для нахождения вероятности интересующего события без большого риска допустить существенную ошибку в оценке ее величины.

Например, еще в XVIII в. было замечено, что среди обычной корреспонденции письма без адреса обладают определенной устойчивостью. По тем данным можно было сделать вывод о том, что на протяжении нескольких лет на каждый миллион писем приходилось в среднем 25–27 писем без адреса.

Частотный подход к определению вероятности, несмотря на его кажущуюся простоту, приводил к теоретическим и математическим трудностям. Поэтому в современной теории вероятностей понятие вероятности события обычно вводят аксиоматически.

8.3.2. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Рассмотрим формулировки аксиом, данные академиком А. Н. Колмогоровым [9].

1. Каждому случайному событию $A \subset E$ поставлено в соответствие число $P(A)$, $0 \le P(A) \le 1$, которое называют вероятностью наступления события A.

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(U) = 1.$$

3. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_i \ldots, A_n$ попарно несовместные, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Из аксиом следуют свойства вероятности, которые приведем без доказательства.

1. Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(V) = 0.$$

2. Вероятность события, $\overline{A}$, противоположного событию A, равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. Если событие A влечет за собой событие B ($A \subset B$), то

$$P(A) \le P(B).$$

4. Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

5. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Таким образом вводится одно из правил действия с вероятностями — правило сложения вероятностей.

Другое правило — правило умножения вероятностей — опирается на понятие условной вероятности. *Условной вероятностью $P(A/B)$ называют вероятность события A, вычисленную при условии, что событие B произошло.*

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

или

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

8.3.3. Классический способ определения вероятности

В теории вероятностей широкое распространение получили задачи, условия которых соответствуют так называемой схеме урн [4, 5]. Сущность этой схемы может быть сформулирована следующим образом. Результаты эксперимента представляются конечным числом *равновозможных и несовместных* исходов, составляющих *полную группу*, причем некоторые исходы благоприятствуют наступлению какого-либо события, т. е. при осуществлении любого из них данное событие имеет место. (Понятие равновозможности исходов эксперимента в классической теории вероятностей является основным, однако формально не определяется).

Такая схема реализуется наиболее просто, если эксперимент заключается в том, что из "урны" (непрозрачного сосуда), содержащего некоторое известное количество одинаковых на ощупь шаров разного цвета, извлекается наудачу некоторое число шаров, а интересующим экспериментатора событием является выход определенной комбинации шаров каждого цвета. Этим и объясняется принятое название данной схемы.

Классический способ определения вероятности представляется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{8.4}$$

где m — число исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A;

n — общее число равновозможных несовместных исходов.

В урне находятся K одинаковых на ощупь шаров, в том числе M белых и $(K - M)$ черных. Испытание заключается в извлечении из нее наудачу N каких-либо шаров. Интересующее нас событие состоит в том, что среди выбранных шаров ровно m окажутся белыми.

Очевидно, что общее число всех равновозможных и несовместных исходов рассматриваемого испытания равно C_K^N. Событие, вероятность которого надо определить, будет иметь место, если в выборку попадут любые m белых шаров и любые $(N - m)$ черных. Количество вариантов выбора m белых шаров из общего их числа M равно C_M^m. Каждый такой вариант может осуществиться с каким-либо из C_{K-M}^{N-m} вариантов выбора $(N - m)$ черных шаров из $(K - M)$, имеющихся в урне. Следовательно, число исходов, благоприятствующих наступлению интересующего нас события, равно произведению $C_M^m C_{K-M}^{N-m}$. Таким образом, согласно формуле (8.4), искомая вероятность определяется выражением

$$P = \frac{C_M^m C_{K-M}^{N-m}}{C_N^K}.$$

Общим недостатком классического способа определения вероятности является ограниченная его применимость. Действительно, далеко не все комплексы условий приводят к возможности применения рассмотренных способов.

Поэтому в теории вероятностей разработаны способы, позволяющие определить вероятности одних событий через известные вероятности других. Основу этих способов составляют правила умножения и сложения вероятностей, опирающиеся на понятие условной вероятности.

8.4. Понятие условной вероятности. Стохастическая зависимость случайных событий

Пусть производится испытание со случайным исходом, в результате которого могут произойти (или не произойти) какие-то события A и B или несколько событий.

Вероятность события при условии наступления в данном испытании другого события (нескольких событий) называют условной и обозначают $P(A/B)$, $P(A/B_1, B_2, ..., B_n)$ и т. д.

Проиллюстрируем введенное понятие на примере. Осуществляется однократное бросание игральной кости и рассматриваются события: A — выпадение шести очков, B — выпадение четного числа очков. Применение классического способа определения вероятности в данном случае даст $P(A)=\frac{1}{6}$. Если в комплекс условий такого испытания ввести факт наступления события B, то соответствующая условная вероятность $P(A/B)$ оказывается равной $\frac{1}{3}$ (число всех равновозможных несовместных исходов испытания с выпадением четного числа очков — три, а выпадение шести очков происходит только в одном из них). Если же в комплекс условий испытания ввести факт наступления события $\overline{B}$, то условная вероятность $P(A/\overline{B})$ оказывается равной нулю, поскольку появление шести очков при выпадении нечетного их числа невозможно (события A и $\overline{B}$ несовместны). Таким образом, для рассмотренного испытания

$$P(A/B) \neq P(A/\overline{B}), \qquad (8.5)$$

причем

$$P(A/B) \neq P(A),$$
$$P(A/\overline{B}) \neq P(A). \tag{8.6}$$

Из приведенного примера видно, что между событиями может существовать особого типа зависимость, которая проявляется в том, что вероятность одного из них изменяется при наступлении или ненаступлении другого (других). Такую зависимость называют стохастической (вероятностной) [6].

Два события A и B являются *стохастически зависимыми*, если факт наступления или ненаступления одного из них изменяет вероятность наступления другого так, что выполняется условие (8.6). В противном случае, когда одно из событий не "реагирует" на появление или непоявление другого изменением своей вероятности, т. е. имеют место равенства

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A), \tag{8.7}$$

они являются *стохастически независимыми*. (В дальнейшем для краткости первое слово термина "стохастическая зависимость" будем опускать).

Зависимость (так же, как и независимость) событий всегда взаимна, т. е., если событие A зависит от B, то и B зависит от A. Более того, в этом случае зависимыми оказываются события A и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Несовместные события всегда зависимы. В самом деле, если события A и B несовместны, то при любом значении вероятности $P(A)$ условная вероятность $P(A/B)$ равна нулю и, следовательно, $P(A/B) \neq P(A)$.

Несколько событий называются попарно независимыми, если независимыми являются любые два из них.

Несколько событий независимы в совокупности, если вероятность наступления каждого из них не изменяется при появлении любой комбинации остальных. Следует иметь в виду, что для независимости событий в совокупности их попарной независимости недостаточно.

8.5. Правила действий с вероятностями

Область практического применения классического способа определения вероятности ограничена задачами, условия которых сводятся к “схеме урн”. Ограничена на практике и область статистического способа определения вероятностей событий по их частотам. Поэтому при решении практических задач широко используются методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий находить вероятности других, связанных с ними. Систему таких методов и представляет собой, в сущности, сама теория вероятностей. Ее основу составляет совокупность правил действия с вероятностями, а именно — правил (теорем) умножения и сложения вероятностей.

Правила умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = P(A_2)P(A_1/A_2). \qquad (8.8)$$

При независимости событий A_1 и A_2

$$P(A_2/A_1) = P(A_2),\ P(A_1/A_2) = P(A_1),$$

поэтому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2). \qquad (8.9)$$

Вероятность произведения нескольких событий определяется соотношением

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}), \qquad (8.10)$$

а если эти события независимы в совокупности, то

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (8.11)$$

Правила сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т. е.

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2). \qquad (8.12)$$

Вероятность суммы нескольких событий в общем случае определяется соотношением

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - .... + (-1)^{n-1} P(A_1A_2..A_n). \qquad (8.13)$$

Если же события несовместны, то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2), \qquad (8.14)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (8.15)$$

Отсюда следует, что сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице. Действительно, в этом случае, согласно соотношению (8.1),

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(U),$$

но $P(U) = 1$, а

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \qquad (8.16)$$

Принимая во внимание, что противоположные события по определению являются несовместными и составляют полную группу, из соотношения (8.16) получим также

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \qquad (8.17)$$

или

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (8.18)$$

Пример 8.3. По цели производится три независимых выстрела. Вероятности попадания в цель при каждом очередном выстреле равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3.

Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Решение

Введем обозначения: A_i — попадание в цель при i-м выстреле ($i = 1, 2, 3$). $\overline{A_i} = 1 - A_i$ — событие, противоположное событию A_i (промах). B — попадание в цель хотя бы один раз.

Найдем вероятности событий $\overline{A_1}$; $\overline{A_2}$; $\overline{A_3}$. $P(\overline{A_1}) = 0{,}9$; $P(\overline{A_2}) = 0{,}8$; $P(\overline{A_3}) = 0{,}7$. А искомую вероятность найдем из соотношения (см. формулы (8.11); (8.17); (8.18)

$$P(B) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = \\ = 1 - 0{,}54 = 0{,}46. \qquad (8.19)$$

В задачах, подобных рассмотренной, при большом числе испытаний и исходов отыскание необходимых соотношений между событиями существенно упрощается при использовании соответствующего графа (дерева) событий. Применительно к задаче примера 8.3 такой граф представлен на рис. 8.9.

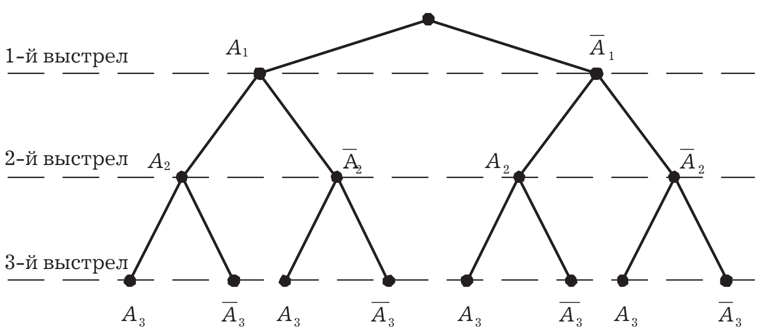


Рис. 8.9

Использование графа (дерева) событий позволяет не только упростить процесс отыскания вероятностей интересующих событий, но и проводить проверку правильности расчетов. При этом используется свойство графа, состоящее в том, что сумма вероятностей исходов на каждом уровне графа равна единице.

Пример 8.4. В урне лежат три белых, три черных и три красных шара. Сразу берут три шара. Какова вероятность того, что все три шара окажутся:

а) одинакового цвета;

б) разного цвета.

Решение

Предположим, что шары вынимаются через малые промежутки времени. Для наступления события а) первый взятый наудачу шар может оказаться любого цвета, но второй шар должен быть того же цвета, а вероятность этого события равна 2/8. Третий шар также должен быть того же цвета с вероятностью 1/7. По формуле (8.11) искомая вероятность

$$P(A) = 1 \cdot 2/8 \cdot 3/7 = 1/28.$$

Для случая б), рассуждая аналогично, получаем

$$P(B) = 1 \cdot 6/8 \cdot 3/7 = 9/28.$$

8.6. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли

При решении целого ряда практических задач приходится сталкиваться со следующей схемой проведения испытаний. Производится N испытаний, в результате каждого из которых наступает либо событие A, либо противоположное ему событие $\bar{A}$. Вероятность события A в любом испытании не зависит от исходов всех других испытаний (испытания являются независимыми) и равна P (это обеспечивается одинаковым комплексом условий проведения каждого испытания). Такая схема испытаний впервые была рассмотрена Я. Бернулли и носит его имя.

Применительно к схеме Бернулли простейшая задача заключается в определении вероятности $P_N(k)$ того, что событие A при N испытаниях наступит ровно k раз ($k = 0, 1, 2, \ldots, N$).

Очевидно, что такой результат будет иметь место, если событие A произойдет в каких-либо k испытаниях и не произойдет (т. е. произойдет событие $\bar{A}$) в остальных $(N - k)$ испытаниях. Поскольку испытания являются независимыми, вероятность каждого из этих исходов равна $p^k(1 - p)^{N-k}$.

Число всех таких несовместных исходов представляется числом сочетаний из N элементов по k, так как испытаниями, в которых наступит событие A, могут быть любые k из общего их числа N.

Следовательно,

$$P_N(k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \tag{8.20}$$

где $C_N^k = \dfrac{N!}{k!(N-k)!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Полученная формула называется формулой Бернулли. Для удобства ее практического использования составлена таблица значений вероятностей $P_N(k)$ в зависимости от значений N, p, k. Такая таблица помещена, в приложении (табл. 3).

Отметим следующее. События, состоящие в наступлении события A ровно k раз, являются несовместными и образуют полную группу. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{N} P_N(k) = 1. \tag{8.21}$$

Пример 8.5. В условиях примера 8.3 найти вероятности трех промахов, одного, двух и трех попаданий, если вероятность попадания в цель при всех выстрелах одинакова и равна 0,5.

Решение

По формуле Бернулли (8.20), приняв $N = 3$ и $p = 0{,}5$, с помощью табл. 3 приложения находим:

$P(B_0) = P_3(0) = 0{,}125$; $P(B_2) = P_3(2) = 0{,}375$;
$P(B_1) = P_3(1) = 0{,}375$; $P(B_3) = P_3(3) = 0{,}125$.

Заметим, что непосредственно из соотношений (8.11), (8.17) и (8.18), полученных в процессе решения примера 8.3, при $P(A_i) = \text{const} = p$ имеем:

$P(B_0) = P_3(0) = (1 - p)^3$; $P(B_2) = P_3(2) = 3p^2(1 - p)$;
$P(B_1) = P_3(1) = 3p(1 - p)^2$; $P(B_3) = P_3(3) = p^3$,

что совпадает с результатами использования формулы Бернулли, поскольку

$$C_3^0 = 1; \quad C_3^1 = 3; \quad C_3^2 = 3; \quad C_3^3 = 1.$$

В некоторых задачах применительно к схеме Бернулли требуется определить вероятность $P_N(k \geq m)$ того, что при N испытаниях событие A наступит не менее m раз.

Поскольку все исходы N испытаний являются несовместными, эта вероятность в соответствии с (8.15) определяется выражением

$$P_N(k \geq m) = \sum_{k=m}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \qquad (8.22)$$

Его целесообразно использовать лишь при $m > N/2$, а при $m \leq N/2$ для уменьшения объема необходимых вычислений вероятность $P_N(k \geq m)$ целесообразно вычислять через вероятность противоположного события, т. е. по формуле

$$P_N(k \geq m) = 1 - P_N(k < m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \qquad (8.23)$$

Таким образом, для вычисления вероятности того, что при осуществлении N испытаний в схеме Бернулли событие A наступит не менее m раз, следует использовать соотношения

$$P_N(k \geq m) = \begin{cases} \sum_{k=m}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \text{ при } m > N/2; \\ 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \text{ при } m \leq N/2. \end{cases} \qquad (8.24)$$

Для облегчения расчетов целесообразно воспользоваться табл. 4 приложения.

Часто при решении практических задач требуется определить вероятность того, что интересующее нас событие наступит хотя бы один раз. Например, в условиях примера 8.5 определить вероятность хотя бы одного попадания, т. е. $P_N(k \geq 1)$.

Вероятность данного события определяется вычитанием из единицы вероятности ненаступления события ни разу, т. е.

$$P_N(k \geq 1) = 1 - (1 - p)^N.$$

Для решения таких задач целесообразно воспользоваться табл. 5 приложения.

8.7. Формула полной вероятности

При решении целого ряда задач из области экономической практики встречаются такие, в которых интересующее нас событие может наступать при реализации различных комплексов условий, причем осуществление самих комплексов условий представляет собой случайное событие. В общем виде эти задачи формулируются следующим образом.

В данном испытании событие A может наступить с одним из несовместных случайных исходов H_1, H_2, ..., H_i, ..., H_n, называемых *гипотезами*, вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_i)$, ..., $P(H_n)$ которых известны (заданы или поддаются вычислению).

Известны также условные вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, ..., $P(A/H_i)$, ..., $P(A/H_n)$ наступления события A при осуществлении каждого из этих исходов. Требуется найти вероятность события A безотносительно к тому, какой из исходов H_1, H_2, ..., H_i, ..., H_n будет иметь место.

В соответствии с условиями такой задачи событие A представляется соотношением

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_iA + \ldots + H_nA.$$

Отсюда, применяя правила сложения и умножения вероятностей с учетом того, что события H_1A, H_2A, ..., H_jA ..., H_nA несовместны, получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \tag{8.25}$$

Формула (8.25) и называется *формулой полной вероятности*, а определяемая ею вероятность $P(A)$ — *полной вероятностью* события A.

Пример 8.6. Вероятность изготовления изделий с дефектом равна 0,4. Приемка готовых изделий производится по системе контроля, при которой дефектное изделие принимается с вероятностью 0,05, а кондиционное — с вероятностью 0,99. Найти вероятность того, что предъявленное на контроль изделие будет принято.

Решение

По условиям задачи событие A — предъявленное на контроль изделие принято — может наступить с одним из противоположных, т. е. несовместных и составляющих полную группу исходов:

H_1 — предъявленное изделие является дефектным;

H_2 — предъявленное изделие является кондиционным, причем

$$P(H_1) = 0{,}4;\ P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0{,}6.$$

Каким окажется принятое изделие, дефектным или кондиционным, в данном случае не имеет значения, так что вероятность $P(A)$, которую требуется определить, по смыслу является полной вероятностью. Поэтому, используя формулу (8.25), находим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}6 \cdot 0{,}99 = 0{,}614.$$

Таким образом, в рассмотренных условиях принимается в среднем 614 изделий из каждой тысячи предъявленных на контроль, независимо от их качества.

8.8. Формула Байеса

Формула полной вероятности позволяет определять вероятность наступления события до проведения испытания. При этом вероятности гипотез определяются либо обстановкой испытания, либо задаются. Однако иногда результат проведенного эксперимента изменяет наши сведения о гипотезах, при которых могло произойти событие. Следовательно, гипотезам после испытания можно поставить в соответствие новые вероятности, отличные от тех, которыми они характеризовались до эксперимента.

Задачу по определению апостериорных (после опыта) вероятностей сформулируем следующим образом.

В данном испытании событие A может наступить с одним из несовместных случайных исходов $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, H_n$, вероятности $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_i), \ldots, P(H_n)$ которых известны. Известны также условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_i), \ldots, P(A/H_n)$ наступления этого события при осуществлении каждого исхода. В произведенном испытании событие A наступило. Требуется найти вероятности $P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_i/A), \ldots, P(H_n/A)$ осуществления при этом какого-либо из исходов $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, H_n$.

Применяя в условиях данной задачи правило умножения вероятностей, получим

$$P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

или с учетом формулы полной вероятности (8.25),

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.26}$$

Полученное соотношение и называется *формулой Байеса*.

В условиях рассмотренной задачи исходы H_i, с одним из которых может произойти событие A, играют роль гипотез. Вероятности $P(H_i)$ по смыслу являются априорными (до опыта), а вероятности $P(H_i/A)$ — апостериорными вероятностями этих гипотез. Формула Байеса обеспечивает возможность пересчета первых во вторые, т. е. учета информации, полученной в результате произведенного испытания. Из этой формулы следует, что сумма всех апостериорных вероятностей равна единице.

Пример 8.7. В условиях примера 8.6 найти вероятность того, что принятое изделие является дефектным.

Решение

При обозначениях событий, введенных в примере 8.6, используя формулу Байеса, находим

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}05}{0{,}615}=0{,}0326,$$

так что в условиях данного примера из каждых десяти тысяч принятых в среднем 326 изделий будут дефектными.

Пример 8.8. Наблюдения показали, что кредиты в коммерческих банках предоставляют: 10% — государственным учреждениям, 30% — другим банкам и 60% — физическим лицам. Вероятности невозврата кредита соответственно равны 0,01; 0,05 и 0,2. Определить полную вероятность невозврата кредита и вероятность невозврата кредита коммерческим банком.

Решение

Полную вероятность невозврата кредита можно определить, используя выражение (8.25), в соответствии с которым

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=0{,}1\cdot 0{,}01+0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}136.$$

Используя формулу Байеса, находим вероятность невозврата кредита коммерческим банком

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}015}{0{,}136}\approx 0{,}11.$$

Пример 8.9. На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства, на второй — 30%, на третьей — 50%. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годных изделий: 95, 98 и 97%.Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным, а также вероятности того, что это бракованное изделие сделано на первой, второй и третьей линиях.

Решение

Обозначим через H_1, H_2, H_3 события, состоящие в том, что взятое изделие произведено соответственно на первой, второй и третьей линиях. Согласно условиям задачи $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}1$; $P(H_3) = 0{,}5$ и эти события образуют полную группу несовместных событий, т. е. сумма их вероятностей равна 1.

Обозначим через A событие состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным. Согласно условиям задачи

$$P(A/H_1) = 0,\ 5;\ P(A/H_2) = 0{,}02;\ P(A/H_3) = 0{,}03.$$

Используя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A) = 0{,}05 \cdot 0{,}2 + 0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}03 \cdot 0{,}5 = 0{,}031.$$

Априорные вероятности того, что наугад взятое изделие изготовлено на первой, второй или третьей линии, равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5.

Допустим, что в результате контроля взятое наугад изделие оказалось бракованным; определим теперь апостериорные вероятности того, что это изделие изготовлено на первой, второй или третьей линиях. По формуле Байеса имеем

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}2}{0{,}031} = \frac{10}{31} = 0{,}322,$$

$$P(H_2 / A) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}3}{0{,}031} = \frac{6}{31} = 0{,}194,$$

$$P(H_3 / A) = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}5}{0{,}031} = \frac{15}{31} = 0{,}484.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Прибор состоит из трех последовательно включенных блоков. События A_i $(i = \overline{1,3})$ означают исправность блоков. Выразить всеми возможными способами событие $\overline{B}$ — отсутствие сигнала на выходе прибора через события A_i и $\overline{A_i}$.

2. Прибор состоит из трех параллельно включенных блоков. События A_i $(i = \overline{1,3})$ означают исправность блоков. Выразить всеми возможными способами событие B — наличие сигнала на выходе через события A_i и $\overline{A_i}$.

3. Три стрелка, имея в наличии по два патрона, стреляют по мишени по очереди, расходуя по одному патрону. Победившим считается первый попавший в мишень. Через A_i и $\overline{A_i}$ (попадание и промах) выразить события:

B_i — состязание выиграет i-й стрелок;

C — состязание не выиграет никто.

4. Каждая из четырех изготовленных деталей может оказаться годной (A_i) либо дефектной ($\overline{A_i}$). Выразить события, состоящие в том, что:

а) ровно три детали имеют дефект;

б) все детали годные;

в) хотя бы одна имеет дефект;

г) не более двух имеют дефект;

д) только вторая имеет дефект.

5. По линии связи передается сигнал. Событие $\overline{A_i}$ означает, что сигнал искажен на промежуточном пункте, событие $\overline{B}$ — сигнал искажен на конечном пункте. Пояснить смысл следующих событий:

а) $A\overline{B}$,, б) AB, в) $A + B$, г) $A\overline{B} + \overline{A}B$,, д) $\overline{A}\,\overline{B}$.

6. В барабане револьвера семь гнезд. В пять из них вложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, и после остановки нажимается спусковой крючок. Найти вероятность того, что при двукратном осуществлении такого испытания:

а) выстрела не произойдет;

б) произойдет два выстрела;

в) произойдет один выстрел.

Примечание: Осечка исключена.

7. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наугад вынимают 2 шара. Найти вероятности того, что:

а) оба шара белые;

б) оба шара черные;

в) шары разного цвета.

8. В коробке среди пятнадцати деталей имеются 5 бракованных. Определить вероятность того, что среди наугад взятых четырех деталей не менее двух окажутся неисправными.

9. В урне находятся 3 белых, 4 черных и 8 красных шаров. Из нее последовательно извлекают по одному шару. Определить вероятность того, что белый шар появится раньше черного.

10. При контроле качества продукции из каждой партии в 100 изделий проверяются случайным образом выбранные 50, и партия принимается, если в выборке оказалось не более одного дефектного изделия. Какова вероятность принять партию, содержащую 5 дефектных изделий?

11. В урне содержится 5 пронумерованных шаров. Из нее последовательно наугад извлекают по одному все шары. Определить вероятность того, что шары будут идти в возрастающем порядке.

12. Из урны, содержащей 6 белых, 4 красных и 3 черных шара, наугад вынимают три шара. Найти вероятность того, что они будут:

а) одного цвета;

б) разного цвета.

13. Из полного набора домино (28 костей) наугад вынимают две кости. Первая вынутая кость оказалась 2–2. Найти вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

14. Из полного набора домино (28 костей) наугад вынимают две кости. Первая вынутая кость оказалась 2–4. Найти вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

15. Из полного набора домино (28 костей) наугад вынимают две кости. Найти вероятность того, что их можно приставить друг к другу.

16. Вероятность того, что новорожденный доживет до 5 лет, равна 0,95; вероятность того, что он доживет до 60 лет, равна 0,6. Какова вероятность человеку, прожившему 5 лет, дожить до 60 лет?

17. В ящике находятся 10 деталей, 4 из которых имеют дефект. Из него последовательно с возвращением извлекают

по одной детали до тех пор, пока не встретится деталь без дефекта. Какова вероятность того, что придется извлечь не более трех деталей.

18. Система контролирует работу 6 агрегатов, от каждого из которых в течение времени T может поступить сигнал о неисправности с вероятностью 0,2. Найти:

а) моду, медиану, математическое ожидание;

б) дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

в) вероятность того, что число отказов превысит 3.

19. Сколько партий вероятнее выиграть у равносильного противника:

а) три из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех из четырех или не менее пяти из восьми.

20. Партия изделий содержит 5% брака. При каком объеме случайной выборки вероятность попадания в нее хотя бы одного бракованного изделия будет не менее 0,9?

21. Однотипные приборы поставляются двумя заводами, причем первый из них поставляет 2/3 от общего количества. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени приборов, поставляемых первым заводом, равна 0,96, а вторым — 0,9. Определить вероятность того, что взятый наудачу прибор проработает заданное время.

22. В условиях задачи 21 определить вероятность того, что:

а) проработавший заданное время прибор поставлен вторым заводом;

б) отказавший прибор поставлен первым заводом.

23. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 — подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

24. Микросхемы поставляются с трех заводов. Первый и третий поставляют по 25% всей продукции, а второй — 50%. Ве-

роятности того, что микросхемы проработают заданное число часов, соответственно равны 0,9, 0,8, и 0,6. Определить вероятность того, что:

а) взятая наугад микросхема проработает заданное число часов;

б) с какого завода наиболее вероятно была поставлена микросхема, не проработавшая заданное число часов.

Вопросы для самопроверки

1. Что является предметом теории вероятностей?
2. Дайте определение случайного события и приведите примеры.
3. Что называется суммой и произведением нескольких событий?
4. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
5. Дайте определения достоверного и невозможного событий и приведите примеры.
6. Как определить частоту и вероятность наступления события?
7. Приведите формулировку аксиом Колмогорова.
8. Что такое условная вероятность?
9. Каковы правила действий с вероятностями?
10. Приведите схему Бернулли.
11. Выведите формулу полной вероятности.
12. Выведите формулу Байеса.

9. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

9.1. Случайные величины и их классификация

Случайной называется переменная величина, которая в результате испытания (реализации определенного комплекса условий) принимает одно из множества своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно [1, 4, 9].

Случайными величинами являются, например:

1. Число попаданий в цель при ограниченном числе боеприпасов.

2. Число выстрелов до первого попадания в цель при неограниченном расходе боеприпасов.

3. Число дефектных изделий в партии готовой продукции.

4. Время безотказной работы элемента технической системы.

5. Отклонение точки падения снаряда от точки прицеливания.

По аналогии с обычными переменными различают *скалярные* и *векторные* случайные величины или системы случайных величин.

В приведенных выше примерах первые четыре случайные величины являются скалярными, а пятая двумерным вектором (системой двух случайных величин: отклонения по дальности и боковому направлению).

Скалярные случайные величины в дальнейшем будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z (используя при необходимости цифровые индексы). Применительно к случайным векторам будем использовать обозначения $\{X, Y\}$, $\{X_1, X_2\}$, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

По характеру множества возможных значений различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. Дискретной называют случайную величину, множество возможных значений которой является конечным или бесконечным, но счетным, так что все они могут быть в каком-либо порядке пронумерованы и представлены последовательностью, конечной — $x_1, x_2, ..., x_n$ или бесконечной $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Иначе говоря, возможные значения дискретной случайной величины представляются точками: скалярной — на числовой оси, векторной — в соответствующем n-мерном пространстве ($N \geq 2$). На практике наиболее часто встречаются дискретные случайные величины, принимающие только целочисленные значения. В приведенных выше примерах такими случайными величинами являются первые три.

Непрерывной называют случайную величину, множество возможных значений которой несчетно и сплошь заполняет какой-либо ограниченный или неограниченных интервал (область). В примерах, приведенных выше, непрерывными случайными величинами являются последние две.

Наряду с дискретными и непрерывными случайными величинами иногда встречаются случайные величины смешанного типа (они в дальнейшем нами рассматриваться не будут).

9.2. Закон распределения случайной величины и формы его представления

9.2.1. Понятие распределения случайной величины

Для того чтобы описать любую случайную величину, необходимо, очевидно, задать множество ее возможных значений. Однако одного этого оказывается недостаточно. Например, дискретная случайная величина X представляет число попаданий в мишень при трех выстрелах начинающего стрелка, а дискретная случайная величина Y — число попаданий тоже при трех выстрелах стрелка высокой квалификации. Нетрудно видеть, что обе эти случайные величины имеют одно и то же множество возможных значений:

$$x_1 = y_1 = 0, x_2 = y_2 = 1, x_3 = y_3 = 2, x_4 = y_4 = 3,$$

но при многократном осуществлении испытаний (стрельб) одинаковые возможные значения будут появляться неодинаково часто (например, возможное значение $x_1 = 0$ будет иметь место значительно чаще, чем $y_1 = 0$, а возможное значение $x_4 = 3$ значительно реже, чем $y_4 = 3$).

Следовательно, для полного описания случайной величины наряду с заданием множества ее возможных значений требуется еще указать, как часто то или иное из них будет иметь место, т. е. какова его вероятность.

Поскольку в результате испытания случайная величина принимает обязательно одно и только одно из своих возможных значений, то сумма их вероятностей равна единице (как сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу).

Для непрерывной случайной величины указать вероятность каждого из ее возможных значений нельзя хотя бы потому, что множество этих значений бесконечно и несчетно. Кроме того, как будет показано далее, вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Поэтому непрерывная случайная величина будет полностью охарактеризована в вероятностном смысле, если указать вероятность ее попадания в любой интервал возможных значений.

Под законом распределения случайной величины понимают соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями или интервалами возможных значений случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения случайной величины является ее исчерпывающей вероятностной характеристикой и может быть представлен в таких формах, как *функция вероятности, функция распределения и плотность распределения* (плотность вероятности).

9.2.2. Функция вероятности

Функция вероятности (ранее часто использовался термин *ряд распределения* [4, 5, 6]) используется для описания распределений только дискретных случайных величин. Она задает однозначное отображение множества возможных значений x_i случайной величины на множество их вероятностей $p(x_i)$.

В такой форме закон распределения представляется либо аналитической формулой, позволяющей вычислить вероятность каждого возможного значения величины, либо таблицей, в которой указываются все ее возможные значения и соответствующие им вероятности. Так, например, если случайная величина X является числом попаданий в цель при N независимых выстрелах с одинаковой вероятностью попадания p, то вероятности $p(x_i)$ всех ее возможных значений $x_i = 0, 1, ..., N$ определяются формулой Бернулли, т. е.

$$P(X = x_i) = p\left(x_i\right) = C_N^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i}, \tag{9.1}$$

которая, таким образом, непосредственно представляет распределение этой случайной величины.

Результаты расчетов по формуле (9.1) можно свести в табл. 9.1.

Таблица 9.1

x_i	0	1	2	...	N
$p(x_i)$	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$		$p(N)$

Подчеркнем, что сумма всех вероятностей $p(x_i)$ в такой таблице равна единице, т. е.

$$\sum_{x_i=0}^{N} p(x_i) = 1.$$

Функцию вероятности иногда называют рядом распределения.

9.2.3. Функция распределения

Функцией распределения скалярной случайной величины X называется функция $F(x)$ аргумента x, которая при каждом x задает вероятность того, что данная случайная величина примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x) \tag{9.2}$$

(при этом аргумент x не обязательно должен совпадать с возможными значениями случайной величины).

Функция распределения является универсальной формой, позволяющей представлять распределения случайных величин любого типа.

Для уяснения смысла функции распределения рассмотрим следующий пример.

Пример 9.1. Построить график функции распределения дискретной случайной величины X, распределение которой задано табл. 9.2.

Таблица 9.2

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Заметим, что такое распределение имеет число попаданий в цель после трех независимых выстрелов с вероятностью попадания р = 0,5 при каждом из них.

Решение

1. При $x = 0$ в соответствии с равенством (9.2) имеем

$$F(0) = P(X < 0) = 0,$$

поскольку рассматриваемая случайная величина X не имеет возможных значений меньше нуля.

Очевидно, что по той же причине $F(x) = 0$ для $x < 0$.

2. При $x = 1$ согласно равенству (9.2)

$$F(1) = P(X < 1).$$

Из табл. 9.2 следует, что неравенство $X < 1$ выполняется в единственном случае — когда рассматриваемая случайная величина принимает возможное значение $x_1 = 0$. Следовательно,

$$F(1) = P(X < 1) = p(x_1) = 0{,}125. \tag{9.3}$$

Нетрудно видеть, что, поскольку на интервале $0 < x \leq 1$ эта случайная величина возможных значений не имеет, $F(x) = 0{,}125$ для всех $0 < x \leq 1$.

3. При $x = 2$ на основе равенства (9.2)

$$F(2) = P(X < 2).$$

Обращаясь к табл. 9.2, видим, что неравенство $X < 2$ выполняется, если случайная величина Xпринимает либо значение $x_1 = 0$, либо значение $x_2 = 1$. Ввиду того, что такие исходы испытания являются несовместными,

$$F(2) = P(X < 2) = p(x_1) + p(x_2) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5. \qquad (9.4)$$

Отсутствие на интервале $1 < x < 2$ возможных значений рассматриваемой случайной величины позволяет заключить, что $F(x) = 0{,}5$ для всех $1 < x \leq 2$.

4. При $x = 3$ по определению

$$F(3) = P(X < 3),$$

а из табл. 9.2 следует, что выполнение неравенства $X < 3$ имеет место при осуществлении какого-либо их трех несовместных исходов испытания: случайная величина X реализуется значением $x_1 = 0$ или значением $x_2 = 1$, или значением $x_3 = 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} F(3) = P(X < 3) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = \\ = 0{,}5 + 0{,}375 = 0{,}875, \end{aligned} \qquad (9.5)$$

причем $F(x) = 0{,}875$ для всех $2 < x \leq 3$, ибо на интервале $2 < x < 3$ рассматриваемая случайная величина возможных значений не имеет.

5. Рассуждая аналогично, приходим к выводу о том, что при любом $x > 3$ (например, при $x = 3{,}01$) неравенство $X < x$ выполняется, если осуществляется хотя бы один из четырех несовместных исходов испытания: случайная величина X принимает либо возможное значение $x_1 = 0$, либо возможное значение $x_2 = 1$, либо возможное значение $x_3 = 2$, либо возможное значение $x_4 = 3$. Поэтому для любого $x > 3$

$$F(3) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) = 0{,}875 + 0{,}125 = 1. \qquad (9.6)$$

Результат является очевидным, поскольку рассматриваемая случайная величина при осуществлении испытания достоверно принимает значения меньше, чем любое $x > 3$.

График функции распределения, соответствующий условиям рассмотренного примера, представлен на рис. 9.1. Из этого рисунка следует, что функция распределения дискретной случайной величины в промежутках между ее возможными значениями не изменяется. В точках, отвечающих возможным значениям, эта функция имеет разрывы, совершая скачки, которые равны вероятностям соответствующих возможных значений. Следовательно, она столь же информативна, как и функция вероятности, заданная табл. 9.1.

Обобщая результаты решения задачи в примере 9.1 (равенства (9.3)–(9.6)), можно заключить, что в общем случае функция распределения скалярной случайной величины определяется соотношением

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i), \tag{9.7}$$

где $p(x_i)$ — вероятности ее возможных значений.

Очевидно, что чем больше возможных значений имеет случайная величина, тем большим оказывается число скачков соответствующей ей функции распределения, а, следовательно, тем меньшей величина каждого из них (сумма всех скачков равна единице). Следовательно, функция распределения непрерывной скалярной случайной величины, возможные значения которой сплошь заполняют тот или иной интервал, представляется непрерывной кривой

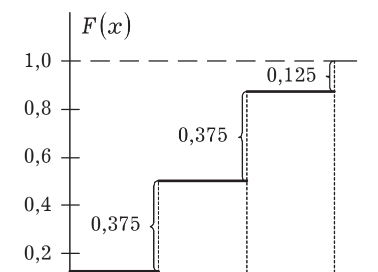


Рис. 9.1

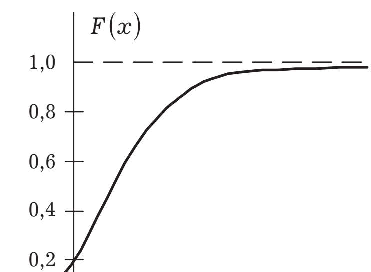


Рис. 9.2

Заметим, что поскольку вид функции $F(x)$ определяется распределением вероятностей на множестве возможных значений случайной величины, более правильно называть ее функцией распределения вероятностей.

Функция распределения скалярной случайной величины имеет следующие основные свойства:

1. $0 \le F(x) \le 1$, ибо ее значения являются вероятностями.

2. $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ как вероятность достоверного события.

$F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ как вероятность невозможного события.

3. Если $x_2 > x_1$, , то $F(x_2) > F(x_1)$, т. е. функция распределения является неубывающей функцией аргумента x.

В справедливости этого утверждения можно убедиться следующим образом. Введем в рассмотрение события (рис. 9.3):

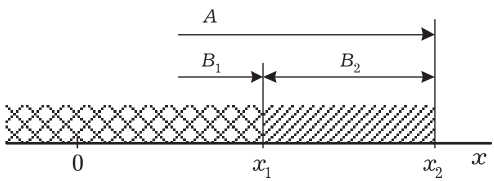


Рис. 9.3

A — выполнение неравенства $X < x_2$;

B_1 — выполнение неравенства $X < x_1$;

B_2 — выполнение неравенства $x_1 \le X < x_2$.

Очевидно, что

$$A = B_1 + B_2,$$

причем события B_1 и B_2 несовместны. Поэтому

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2)$$

или

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (9.2), определяющее смысл функции распределения скалярной случайной величины, получим

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2), \tag{9.8}$$

а поскольку $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, заключаем, что

$$F(x_2) > F(x_1).$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал (полуоткрытый справа) равна разности значений функции распределения на концах этого интервала, т. е.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \tag{9.9}$$

что непосредственно вытекает из равенства (9.8) и иллюстрируется рис. 9.4.

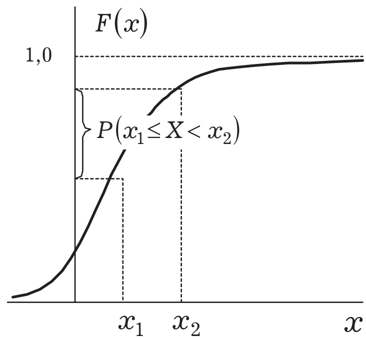


Рис. 9.4

Последнее из рассмотренных свойств функции распределения скалярной случайной величины позволяет заключить, что если эта случайная величина непрерывна, то вероятность ее попадания в какую-либо точку числовой оси равна нулю (в равенстве (9.9) следует принять $x_2 = x_1$). Иначе говоря, равной нулю оказывается вероятность каждого возможного значения такой случайной величины. На первый взгляд, это заключение кажется противоречащим здравому смыслу, поскольку в результате испытания одно из возможных значений любой случайной величины реализуется всегда. Однако в действительности никакого противоречия здесь нет: сделанный вывод означает лишь то, что при большом числе испытаний конкретное возможное значение x (равное, например, двум) непрерывная случайная величина X будет принимать крайне редко. Значительно чаще будут появляться, например, возможные значения, хотя бы немного отличающиеся от 2,0. Поэтому частота каждого возможного значения непрерывной случайной величины стабилизируется относительно нуля.

С учетом отмеченной особенности непрерывных скалярных случайных величин применительно к ним нестрогое равенство $x_1 \le X$ в скобках левой части соотношения (9.9) можно заменить строгим, т. е. считать интервал от x_1 до x_2 открытым. Кроме того, из-за этой особенности нет смысла задавать распределение такой случайной величины вероятностями ее возможных значений. Речь может идти только о вероятностях ее появления в том или ином интервале, определение которых обеспечивает вполне функция распределения. Следовательно, и для непрерывных скалярных случайных величин она является исчерпывающе информативной.

9.2.4. Плотность распределения

Плотностью распределения скалярной случайной величины X называется функция $f(x)$ аргумента x, которая при каждом x равна пределу отношения вероятности попадания данной случайной величины на интервал Δx в окрестности точки x к длине этого интервала, когда она стремится к нулю, т. е.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{9.10}$$

(если такой предел существует).

Из данного определения следует, что функция $f(x)$ по существу задает плотность вероятности в окрестности каждой точки числовой оси, поэтому более правильно называть ее плотностью распределения вероятностей.

Принимая во внимание соотношение (9.9), равенство (9.10) можно представить в виде

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

откуда следует, что

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{9.11}$$

т. е. плотность распределения скалярной случайной величины есть производная от функции распределения $F(x)$ по аргументу x. Поэтому она как форма представления закона распределения применима только к случайным величинам непрерывного типа.

График плотности распределения $f(x)$, соответствующий некоторой функции распределения $F(x)$, представлен на рис. 9.5.

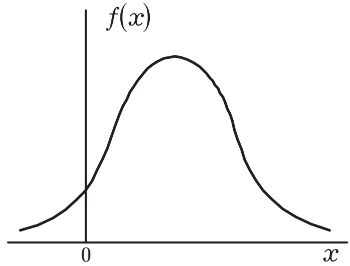


Рис. 9.5

Плотность распределения скалярной случайной величины имеет следующие основные свойства:

1. $f(x) \geq 0$ как предел отношения неотрицательной величины к положительной.

2. $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \tag{9.12}$$

что непосредственно вытекает из равенства (9.11) и иллюстрируется рис. 9.6.

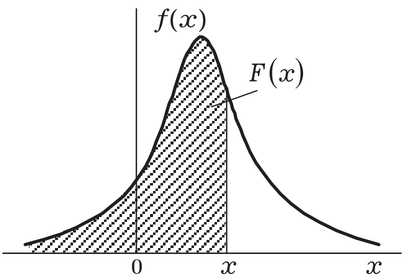


Рис. 9.6

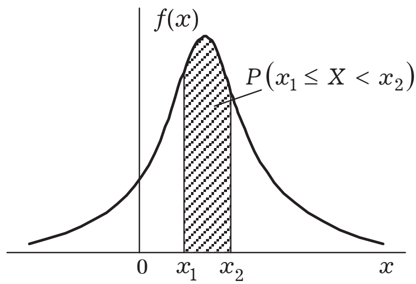


Рис. 9.7

3. $P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, что вытекает из равенства (9.9) с учетом второго свойства плотности распределения и иллюстрируется рис. 9.7.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ как вероятность достоверного события (следовательно, площадь под кривой $f(x)$ любого вида равна единице).

Полезно отметить, что плотность распределения скалярной случайной величины имеет размерность, обратную размерности самой случайной величины (это непосредственно вытекает из соотношения (9.10), определяющего понятие плотности).

Третье из рассмотренных свойств позволяет заключить, что вероятность попадания непрерывной скалярной величины в бесконечно малую окрестность какой-либо точки числовой оси с точностью до бесконечно малых высших порядков определяется равенством

$$P(x \le X < x + \Delta x) = f\,(x)\Delta x,$$

правую часть которого принято называть элементом вероятности (для достаточно малых конечных интервалов Δx выполняется приближенное равенство, что иллюстрируется рис. 9.8).

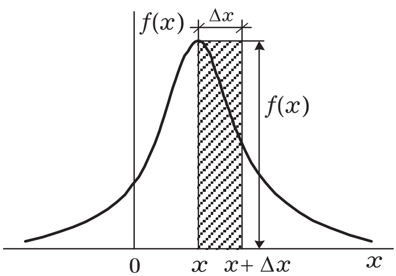


Рис. 9.8

$$P\left(x \le X < x + \Delta x\right) \approx f\left(x\right)dx,$$

Поскольку плотность распределения непрерывной скалярной случайной величины обеспечивает возможность определения вероятностей ее попадания в любой интервал, она дает полную информацию о распределении такой случайной величины и при этом позволяет достаточно наглядно представлять его графически.

В заключение заметим, что функцию распределения случайной величины иногда называют интегральным, а плотность — дифференциальным законом распределения.

Применительно к скалярным случайным величинам обе эти функции принято задавать на всей числовой оси.

9.3. Числовые характеристики скалярных случайных величин

Как уже было отмечено, исчерпывающей характеристикой любой случайной величины является ее закон распределеления, который полностью определяется, например, функцией распределения. Однако для решения прикладных задач часто оказывается достаточным описывать распределение случайной величины лишь в самых общих чертах, отражая его наиболее существенные особенности. Для этого используются специальные характеристики распределения (их называют также числовыми характеристиками случайной величины). Основные из таких характеристик дают представление о том, относительно какой точки группируются возможные значения случайной величины и какова степень их рассеивания, в связи с чем одни из них называют характеристиками положения, а другие — характеристиками рассеивания. Ниже эти характеристики рассматриваются применительно к скалярным случайным величинам.

9.3.1. Характеристики положения

В качестве числовых характеристик положения используются: *мода, медиана и математическое ожидание.*

Модой называют значение случайной величины, которому соответствует максимум функции вероятности или плотности распределения. Таким образом, мода (условимся обозначать ее символом Mo) дискретной случайной величины определяется из условия

$$P(X = Mo) = \max_{x_i} P(X = x_i), \tag{9.13}$$

а непрерывной — из условия

$$f\,(x = Mo) = \max_{x_i} f\,(x), \tag{9.14}$$

что иллюстрируется рис. 9.9 и рис. 9.10 (вертикальными линиями на рис. 9.10 представлены вероятности возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Медианой называется корень уравнения

$$F(x) = 0{,}5,$$

т. е. такая точка Me на числовой оси, для которой

$$P(X < Me) = P(X > Me) = 0{,}5. \tag{9.15}$$

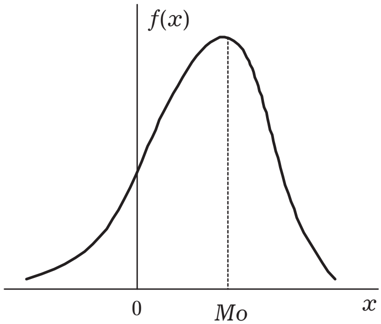


Рис. 9.9

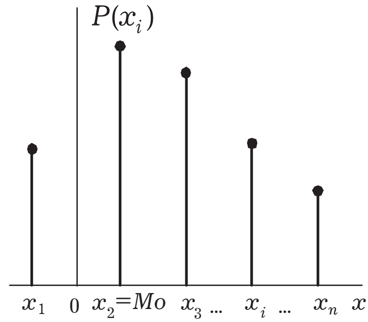


Рис. 9.10

Медиана непрерывной случайной величины всегда определяется однозначно (рис. 9.11 и 9.12).

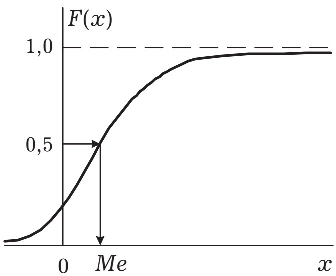


Рис. 9.11

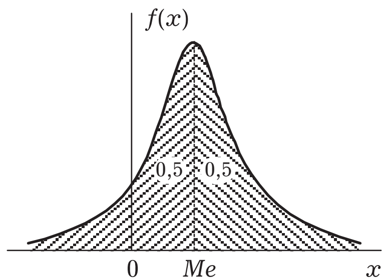


Рис. 9.12

Дискретная же случайная величина может либо вообще не иметь медианы (рис. 9.13), либо иметь их бесконечное множество (рис. 9.14), в связи с чем применительно к таким случайным величинам эта числовая характеристика на практике используется редко.

Математическое ожидание является наиболее часто используемой числовой характеристикой положения.

Для дискретной случайной величины оно определяется как сумма произведений ее возможных значений на их вероятности, т. е. с помощью оператора

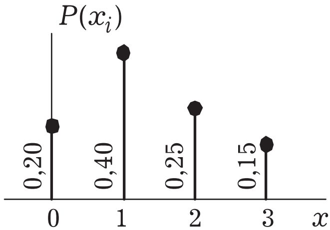


Рис. 9.13

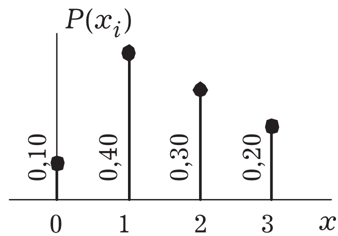


Рис. 9.14

$$M[X]=\sum_{x_i} x_i p(x_i). \tag{9.16}$$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание определяется оператором

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, \tag{9.17}$$

который по существу аналогичен оператору (9.16) с той лишь разницей, что здесь суммирование заменено интегрированием, а вероятность $p(x_i)$ — элементом вероятности $f(x)dx$ (заметим, что интеграл в правой части выражения (9.17) практически следует вычислять в пределах, определяющих интервал значений x, при которых плотность $f(x)$ отлична от нуля).

По смыслу *математическое ожидание — это среднее значение случайной величины, а точнее — число m_x, около которого при достаточно большом количестве испытаний группируется среднее арифметическое ее реализовавшихся значений.*

Действительно, пусть при осуществлении N испытаний, результаты которых представляются дискретной случайной величиной X с возможными значениями x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n, каждое из этих значений реализовалось соответственно N_1, N_2, ..., N_i, ...N_n раз. Среднее арифметическое полученных результатов

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{x_i} x_i N_i$$

можно представить в виде

$$\bar{x} = \sum_{x_i} x_i p^*(x_i),$$

где $p^*(x_i) = \dfrac{N_i}{N}$ — частота появления при N испытаниях возможного значения x_i.

Сопоставляя полученное выражение с соотношением (9.16), нетрудно видеть, что их правые части отличаются лишь тем, что в первом возможные значения умножаются на свои вероятности, а во втором — на частоты. Отсюда, принимая во внимание, что при неограниченном увеличении числа испытаний частота стабилизируется относительно вероятности, можно прийти к заключению о справедливости данного выше толкования смысла математического ожидания.

Математическому ожиданию можно дать следующую механическую интерпретацию. Для дискретной случайной величины оно в соответствии с равенством (9.16) представляет центр масс системы, состоящей из невесомого (или однородного) стержня, в точках с абсциссами $\boldsymbol{x_i}$ которого сосредоточены массы $p(x_i)$. Для случайной величины непрерывного типа математическое ожидание, согласно соотношению (9.17), представляет абсциссу центра масс фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой $f(x)$.

Пример 9.2. В условиях примера 9.1 найти математическое ожидание случайной величины X — числа попаданий в цель после трех независимых выстрелов с вероятностью попадания $p = 0{,}5$ при каждом из них.

Решение

Используя табл. 9.2, на основе оператора (9.16), получаем

$$m_x = 0 \cdot 0{,}125 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}375 + 3 \cdot 0{,}125 = 1{,}5,$$

что соответствует механической интерпретации математического ожидания (распределение вероятностей на интервале от 0 до 3 симметрично относительно точки $x = 1{,}5$).

Полученный результат означает, что при достаточно большом числе таких стрельб в среднем в каждой из них будет получено полтора попадания в цель. Подчеркнем, что дробное значение математического ожидания в данном случае вполне правомерно, поскольку это среднее значение.

Среди всех свойств математического ожидания, основные из которых будут рассмотрены ниже, выделим пока одно, состоящее в следующем. Если случайная величина Z является функцией случайной величины X, т. е. $Z = \varphi(x)$, а распределение аргумента X известно, то

$$M[Z] = \sum_{x_i} \varphi(x_i) p(x_i) \tag{9.18}$$

при дискретном аргументе и

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \tag{9.19}$$

при непрерывном.

Действительно, пусть $Z = \varphi(X) = X^2$, а аргументом X является дискретная случайная величина с возможными значениями x_1, x_2, x_3, x_4, вероятности которых соответственно равны $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, и $p(x_4)$ (одна из таких случайных величин рассматривается в примере 9.1). Тогда возможные значения z_i случайной величины Z можно определить следующим образом:

$$z_1 = x_1^2, \; z_2 = x_2^2, \; z_3 = x_3^2, \; z_4 = x_4^2.$$

При этом, очевидно, что каждое из них будет появляться так же часто, как и соответствующее возможное значение x_i аргумента X. Следовательно, $p(z_1) = p(x_1)$, $p(z_2) = p(x_2)$, $p(z_3) = p(x_3)$, $p(z_4) = p(x_4)$ и, таким образом,

$$M[Z] = \sum_{z_i} z_i p(z_i) \tag{9.20}$$

эквивалентно соотношению (9.18).

9.3.2. Характеристики рассеивания

В качестве числовых характеристик рассеивания используются: дисперсия, среднее квадратическое (стандартное) отклонение. вероятностное (срединное) отклонение.

Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D\left[X\right]=M\left[\left(X-m_2\right)^2\right]. \tag{9.21}$$

В соответствии с соотношениями (9.18) и (9.19) дисперсия дискретной случайной величины вычисляется с помощью оператора

$$D[X]=\sum_{x_i}(x_i-m_x)^2\,p(x_i), \tag{9.22}$$

а непрерывной — с помощью оператора

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx. \tag{9.23}$$

Числовые значения дисперсий, получаемые на основе операторов (9.22) и (9.23), в дальнейшем будем обозначать символом D_x.

Пример 9.3. Найти дисперсию случайной величины в условиях примера 9.1.

Решение

Используя табл. 9.2 и принимая во внимание, что для этой случайной величины $m_x = 1{,}5$, с помощью оператора (9.22) получаем

$$D_x = (0-1{,}5)^2{\cdot}0{,}125 + (1-1{,}5)^2{\cdot}0{,}375 +$$
$$+ (2-1{,}5)^2{\cdot}0{,}375 + (3-1{,}5)^2{\cdot}0{,}125 = 0{,}75.$$

Дисперсия является одной из важнейших характеристик распределения, поскольку отражает основную особенность случайной величины — рассеивание ее возможных значений, причем достаточно «чутко» реагирует на различные оттенки в характере этого рассеивания. Для иллюстрации сказанного ниже представлены (таблицами функции вероятности) распределения четырех дискретных случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4, имеющих одинаковые математические ожидания $m_{x_1}=m_{x_2}=m_{x_3}=m_{x_4}=1{,}5$, и приведены вычисленные значения их дисперсий:

$$X_1: \begin{array}{c|c|c|c|c} x_{1i} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(x_{1i}) & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}20 \end{array}, \quad D_{x_1} = 1{,}05,$$

$$X_2: \begin{array}{c|c|c|c|c} x_{2i} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(x_{2i}) & 0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}05 \end{array}, \quad D_{x_2} = 0{,}45,$$

$$X_3: \begin{array}{c|c|c|c|c} x_{3i} & -1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline P(x_{3i}) & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}20 \end{array}, \quad D_{x_3} = 2{,}65,$$

$$X_4: \begin{array}{c|c|c|c|c} x_{4i} & -1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline P(x_{4i}) & 0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}05 \end{array}, \quad D_{x_4} = 0{,}85.$$

Анализ этих данных позволяет заключить, что при одинаковой длине интервала рассеивания большую дисперсию имеет та случайная величина, у которой крайние возможные значения более вероятны ($D_{x_1} > D_{x_2}$ и $D_{x_3} > D_{x_4}$); при увеличении длины рассеивания дисперсия может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, как при этом распределяются вероятности возможных значений случайной величины ($D_{x_3} > D_{x_1}$ и $D_{x_4} > D_{x_2}$, но $D_{x_4} < D_{x_1}$).

При практическом использовании дисперсии известным неудобством является то, что ее размерность равна квадрату размерности соответствующей случайной величины. Поэтому в приложениях чаще применяется другая числовая характеристика рассеивания — среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Средним квадратическим отклонением (его принято обозначать символом σ_x*) называется положительный квадратный корень из дисперсии, т. е.*

$$\sigma_x = +\sqrt{D_x}. \tag{9.24}$$

Очевидно, что среднее квадратическое отклонение характеризует степень рассеивания возможных значений случайной величины не хуже дисперсии, а его размерность совпадает с размерностью соответствующей случайной величины.

Заметим, что поскольку дисперсию связывают со средним квадратическим отклонением — соотношение (9.24), ее обозначают иногда символом σ_x^2.

Вероятное (срединное) отклонение используется в качестве числовой характеристики рассеивания применительно только к непрерывным случайным величинам, плотность распределения которых симметрична относительно вертикали, проходящей через точку математического ожидания. Для обозначения этой характеристики используются символы B_x (русское «вэ» от слова «вероятное») или E_x.

Вероятным (срединным) отклонением называется половина интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который случайная величина попадает с вероятностью 0,5.

Иначе говоря, вероятное (срединное) отклонение определяется из условия

$$P(|X - m_x| < B_x = 0{,}5, \tag{9.25}$$

которое иллюстрируется рис. 9.15.

Возможность его использования в качестве характеристики рассеивания вытекает из того, что получаемая согласно условию (9.25) величина B_x однозначно определяется видом кривой $f(x)$ и поэтому хорошо «отслеживается» степень рассеивания случайной величины (рис. 9.16).

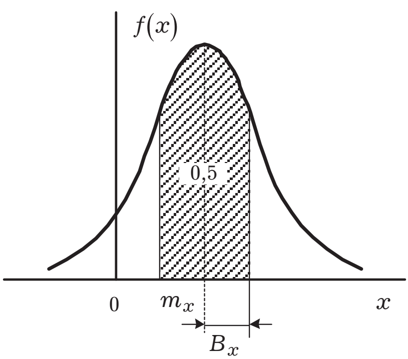


Рис. 9.15

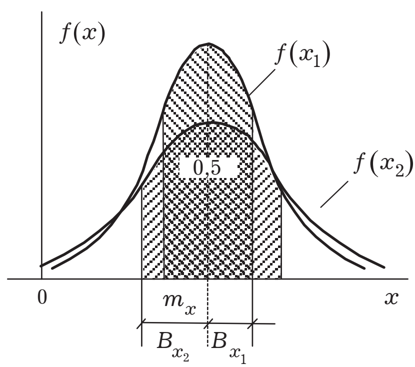


Рис. 9.16

По своему смыслу вероятное (срединное) отклонение является характеристикой, позволяющей судить о том, из какого интервала будет принимать свои возможные значения случайная величина, в среднем, в половине всех ее наблюдений. Поэтому по информативности о степени рассеивания конкретной случайной величины оно более наглядно, чем дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Для сравнительной же оценки степени рассеивания нескольких случайных величин все три рассмотренные числовые характеристики одинаково удобны.

9.3.3. Моменты случайной величины

Для описания распределения скалярной случайной величины в теории вероятностей может использоваться его механическая аналогия — распределение масс системы материальных точек, расположенных на одной прямой, при условии что суммарная масса системы равна единице.

При описании распределения дискретной случайной величины можно представить, что массы, равные вероятностям $P(x_i)$, сосредоточены в точках возможных значений случайной величины. Механической аналогией распределения непрерывной случайной величины может служить такое распределение массы на прямой линии, при котором плотность массы в каждой точке равна плотности распределения $f(x)$ случайной величины в этой точке.

Подобная аналогия в описании распределения случайной величины позволяет трактовать ее математическое ожидание как координату центра масс системы материальных точек. Механическим аналогом дисперсии случайной величины является момент инерции системы материальных точек относительно центра масс. Чем больше степень сосредоточения массы около центра системы, тем меньше момент инерции системы и тем меньше дисперсия соответствующей случайной величины.

Механическая аналогия распределения случайной величины позволяет сделать некоторое обобщение понятия числовых характеристик путем введения моментов случайной величины.

В теории вероятностей широко используются начальные и центральные моменты случайной величины [4, 5, 6, 9].

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой величины:

$$\alpha_k = M[X^k]. \tag{9.26}$$

С учетом зависимостей (9.18) и (9.19) получаем выражения для вычисления начального момента k-го порядка:

дискретной случайной величины

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P(x_i), \tag{9.27}$$

непрерывной случайной величины

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx. \tag{9.28}$$

Из начальных моментов самостоятельное значение имеет момент первого порядка

$$\alpha_1 = M[X], \tag{9.29}$$

который является математическим ожиданием случайной величины.

Начальные моменты высших порядков используются главным образом для вычисления центральных моментов.

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени соответствующей центрированной случайной величины

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k]. \tag{9.30}$$

С учетом зависимостей (9.18) и (9.19) получим:

- для дискретной случайной величины

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k P(x_i), \tag{9.31}$$

- для непрерывной случайной величины

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k f(x)dx. \tag{9.32}$$

Из центральных моментов наибольшее значение имеет момент второго порядка

$$\mu_2 = M[(X - m_x)^2], \tag{9.33}$$

который является дисперсией случайной величины.

Центральные моменты могут быть выражены через начальные. Например, второй центральный момент случайной величины (или ее дисперсия) может быть выражен через первый и второй начальные моменты:

$$\mu_2 = D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Из центральных моментов более высокого порядка находят применение моменты третьего и четвертого порядка.

Третий центральный момент используется для характеристики асимметрии распределения. Это объясняется тем, что для случайной величины, симметрично распределенной относительно своего математического ожидания, все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Если же распределение несимметрично, то нечетные центральные моменты отличны от нуля. За характеристику асимметрии принят центральный момент третьего порядка.

Для удобства переходят от момента третьего порядка к безразмерной характеристике, которая называется *коэффициентом асимметрии* и определяется по формуле

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}. \tag{9.34}$$

Говорят, что распределение имеет положительную асимметрию ($a_x > 0$), если мода распределения меньше математического ожидания ($Mo < m_x$) и, наоборот, ($a_x < 0$), если $Mo > m_x$.

Центральный момент четвертого порядка используется для характеристики островершинности или плосковершинности кривой плотности распределения. Безразмерная характеристика островершинности распределения случайной величины называется *коэффициентом эксцесса*, или просто *эксцессом*, и определяется по формуле

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \tag{9.35}$$

По значению C_x сравнивают кривую заданного распределения с кривой наиболее распространенного нормального распределения, которое принято за эталон и для которого

$$\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3, \text{ т. е. } C_x = 0.$$

Кривые распределений при $C_x > 0$ будут более островершинными по сравнению с кривой нормального распределения. Плосковершинные распределения имеют отрицательный эксцесс.

9.4. Основные теоретические распределения скалярных случайных величин

Реальные распределения большинства встречающихся на практике скалярных случайных величин достаточно хорошо представляются их моделями, которые называют теоретическими распределениями. Основные из этих распределений рассматриваются ниже.

Биномиальное распределение

Если распределение вероятностей на конечном множестве возможных значений x_i дискретной скалярной случайной величины X, определенном последовательностью чисел 0, 1, 2,..., N, определяется формулой Бернулли, т. е.

$$P(X = x_i) = C_N^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i}, \quad x_i = 0,1,2,\ldots,N, \tag{9.36}$$

то это распределение называют биномиальным.

Из выражения (9.36) следует, что биномиальное распределение определяется двумя параметрами: N и p, причем можно показать, что они связаны с математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X соотношениями

$$m_x = Np, \; D_x = Np(1 - p), \tag{9.37}$$

Биномиальному распределению подчиняется, например, число наступлений события при осуществлении испытаний в схеме Бернулли. В этом случае параметр N равен числу испытаний, а параметр p — вероятности наступления события в каждом из них.

Напомним, что значения вероятностей (9.36) табулированы и представлены табл. 3 приложения.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является предельным для биномиального при $N \to \infty$ и р $\to 0$, если $Np = const = m$.

Для распределения Пуассона функция вероятности имеет вид

$$P(X = x_i) = \frac{m^{x_i}}{x_i!} e^{-m}. \tag{9.38}$$

Множество возможных значений x_i представляется бесконечным рядом чисел 0, 1, 2, 3, ..., а особенностью параметра m является то, что он равен математическому ожиданию и дисперсии соответствующей случайной величины, т. е.

$$m = m_x = D_x \qquad (9.39$$

(ввиду того, что распределение Пуассона типично для безразмерных случайных величин, такое равенство вполне правомерно).

Практически распределение Пуассона имеет место при конечном, но достаточно большом числе N испытаний в схеме Бернулли, когда вероятность близка к нулю, в связи с чем его называют иногда распределением редких событий.

Значения вероятностей (9.38) табулированы и представлены табл. 6 приложения.

Показательное (экспоненциальное) распределение

Показательным называют распределение непрерывной случайной величины X, которое задается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при x} \geq 0 \end{cases} \tag{9.40}$$

или функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при x} \geq 0. \end{cases} \tag{9.41}$$

Графики плотности вероятности (9.40) и функции распределения (9.41) представлены на рис. 9.17 и 9.18 соответственно.

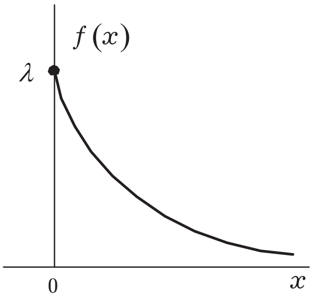


Рис. 9.17

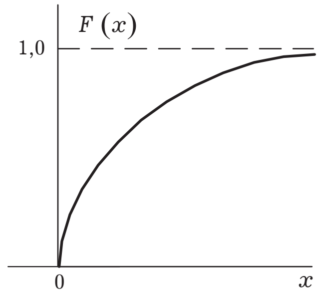


Рис. 9.18

Показательное распределение имеет единственный параметр λ, причем для этого распределения

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Данное распределение достаточно хорошо описывает распределение времени безотказной работы весьма обширного класса элементов технических систем, в связи с чем широко применяется при оценке их надежности.

Показательное распределение обладает важным свойством. Если случайная величина X имеет показательное распределение, а событие $X > x$ произошло, то случайная величина $Y = X - x$ имеет также показательное распределение с тем же самым параметром $\lambda = \dfrac{1}{m_x}$.

Это свойство означает, что если показательное распределение имеет случайная величина T — время безотказной работы агрегата и агрегат уже проработал нормально какое-то количество часов, то это никак не влияет на закон распределения оставшегося времени безотказной работы агрегата. Иначе говоря, если среднее время безотказной работы агрегата $m_t = 1000$ *ч* и агрегат уже проработал 500 *ч*, то среднее время последующей работы этого агрегата опять-таки равно 1000 *ч*.

Равномерное распределение

Равномерным принято называть распределение непрерывной скалярной случайной величины X, если оно представляется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b, \\ 0, & \text{при } x > b, \end{cases} \tag{9.42}$$

так что соответствующая функция распределения определяется соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \tag{9.43}$$

Графики функций (9.42) и (9.43) представлены на рис. 9.19 и 9.20.

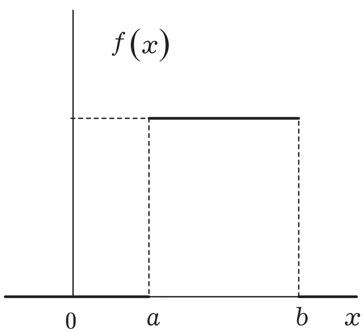


Рис. 9.19

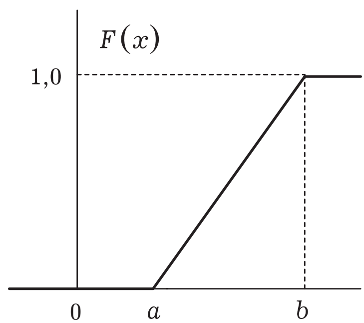


Рис. 9.20

Концы a и b интервала равномерного распределения являются его параметрами и определяют значения числовых характеристик этого распределения, причем

$$m_x = \frac{a+b}{2}, \; D_x = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{9.44}$$

При равномерном распределении случайной величины вероятность ее попадания в интервал от x_1 до x_2 принадлежащий интервалу $[a, b]$, определяется формулой

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}, \tag{9.45}$$

которая может быть получена из соотношений (9.42) и (9.43). Таким образом, эта вероятность равна отношению длины рассматриваемого интервала к длине всего интервала распределения, т. е. не зависит от его положения внутри $[a, b]$.

В инженерной практике используются некоторые частные случаи равномерного распределения. Например, при моделировании случайных факторов на ЭВМ применяется равномерное распределение в интервале от 0 до 1, для которого (рис. 9.21)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{при } x > 1 \end{cases} \tag{9.46}$$

и следовательно, в соответствии с формулами (9.44)

$$m_x = \frac{1}{2}, \ D_x = \frac{1}{12}. \tag{9.47}$$

Другой частный случай равномерного распределения используется при оценке точности технических измерений. Как известно, ошибка округления отсчета по шкале любого измерительного прибора до ближайшего деления с ценой $2L$ является случайной, а все ее значения равновозможны и по абсолютной величине не превышают L. Следовательно, эта ошибка имеет равномерное распределение в интервале от $a = -L$ до $b = +L$ (рис. 9.22), т. е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2L}, & \text{при } |x| \le L, \\ 0, & \text{при } |x| > L, \end{cases} \tag{9.48}$$

а из соотношений (9.44) следует, что ее числовые характеристики определяются равенствами

$$m_x = 0, D_x = \frac{L^2}{3}. \tag{9.49}$$

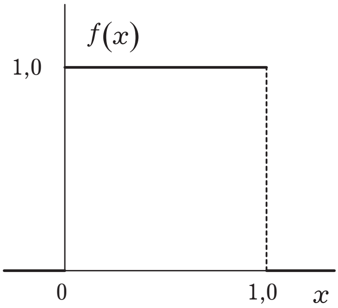


Рис. 9.21

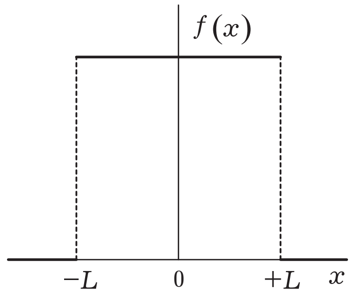


Рис. 9.22

Нормальное распределение

Нормальное распределение непрерывной скалярной случайной величины X определяется плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{9.50}$$

где m_x — математическое ожидание;

σ_x — среднее квадратическое (стандартное) отклонение этой случайной величины,

или функцией распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{9.51}$$

графики которых представлены на рис. 9.23 и 9.24.

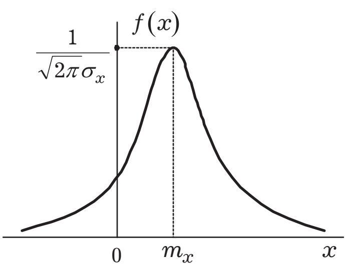


Рис. 9.23

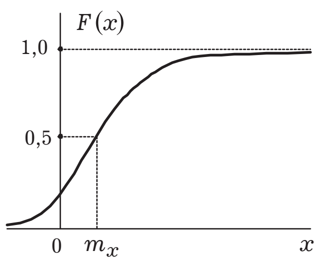


Рис. 9.24

Из соотношения (9.50) следует, что при нормальном распределении числовые характеристики m_x и σ_x являются его параметрами и, следовательно, полностью определяют это распределение.

Нормальное распределение присуще очень широкому кругу случайных величин, встречающихся в инженерной практике. Это объясняется тем, что для обширного класса случайных факторов объективно выполняются условия, в которых формируется именно нормальное распределение соответствующих случайных величин. Суть этих условий состоит в следующем: если какая-либо случайная величина по своей природе является суммой случайных слагаемых с ограниченными дисперсиями и распределенных как угодно, то распределение этой случайной величины будет тем ближе к нормальному, чем больше таких слагаемых она представляет. (Строгое доказательство сходимости распределения суммы случайных величин к нормальному составляет содержание центральной предельной теоремы теории вероятностей, доказанной А. М. Ляпуновым [1].)

Известно, например, что рассеивание точек падения снаряда по дальности при стрельбе из артиллерийского орудия на постоянных установках прицельных устройств является следствием суммарного влияния большого числа случайных источников. Среди них можно указать фактическое положение ствола в момент выстрела, отклонения от номиналов начальной скорости снаряда, его веса и аэродинамических характеристик, а также отклонения реальных значений параметров атмосферы от стандартных. Каждый из этих источников, в свою очередь, может быть представлен суммой составляющих его случайных компонентов, играющих примерно одинаковую роль в формировании рассеивания конечного результата — точки падения снаряда. Поэтому его распределение считается практически нормальным.

Практически нормальным можно считать и распределение других непрерывных случайных величин, являющихся результатом суммарного влияния большого числа случайных источников.

Необходимо отметить, что интеграл в правой части равенства (9.51) к элементарным функциям не сводится. Поэтому значения функции нормального закона распределения могут быть получены лишь путем численного интегрирования плотности (9.50), результаты которого для постоянного практического использования целесообразно табулировать. Очевидно, что соответствующая таблица должна иметь три входа: верхний предел интегрирования x и параметры m_x, σ_x, т. е. представляется слишком громоздкой. Оказывается, однако, что для решения практических задач достаточно составить только таблицу функции стандартного нормального распределения с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$, т. е. таблицу функции

$$F_{\text{T}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{9.52}$$

имеющую один вход — верхний предел интегрирования y. Такая таблица приведена в приложении (табл. 1).

Действительно, используя в интеграле (9.51) замену переменной интегрирования x на

$$t = \frac{x - m_x}{\sigma_x} \tag{9.53}$$

и учитывая, что при такой замене $dt = \dfrac{dx}{\sigma_x}$, а верхний предел интеграла x следует заменить на $\dfrac{x - m_x}{\sigma_x}$, получим

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_{\text{T}}\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right). \tag{9.54}$$

Таким образом, табличная функция (9.52) обеспечивает возможность вычисления значений функции нормального распределения с любыми значениями параметров m_x и σ_x. Поэтому с ее помощью можно, например, рассчитать вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в тот или иной интервал при заданных значениях m_x и σ_x. В самом деле, поскольку всегда эта вероятность равна разности значений функции распределения на границах интервала, т. е.

$$P(x_1 \le \mathrm{X} \le x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

для рассматриваемого случая с учетом соотношения (9.54), имеем

$$P(x_1 \le X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx,$$

откуда с учетом соотношения (9.94) найдем

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F_\mathrm{T}\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - F_\mathrm{T}\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right). \tag{9.55}$$

Отметим, что значение табличной функции (9.52) при каждом значении ее аргумента $\boldsymbol{y}$ геометрически представляется площадью под кривой плотности

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{9.56}$$

слева от точки y (рис. 9.25). Поскольку эта кривая симметрична относительно нуля, площадь под ней слева от точки $-y$, равная $F_\mathrm{T}(-y)$, одинакова с площадью справа от точки y. Вся же площадь под данной кривой, представляющей плотность распределения (нормального с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$), равна единице. Поэтому из рис. 9.25 следует, что

$$F_\mathrm{T}(-y) = 1 - F_\mathrm{T}(y). \tag{9.57}$$

Значения табличной функции нормального распределения представлены в табл. 1 приложения.

Применительно к нормальному распределению составлена также таблица функции

$$\Phi_\mathrm{T}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{9.58}$$

которую называют функцией Лапласа (или интегралом вероятностей). Она является нечетной функцией своего аргумента, т. е.

$$\Phi_{\text{т}}(-y) = -\Phi_{\text{т}}(y), \tag{9.59}$$

и геометрически представляется площадью под кривой (9.56) между точками $-y$ и y (рис. 9.26). Сопоставляя друг с другом рис. 9.25 и 9.26, нетрудно установить, что

$$F_{\text{т}}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi_{\text{т}}(y). \tag{9.60}$$

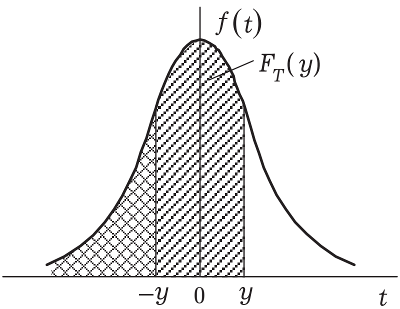


Рис. 9.25

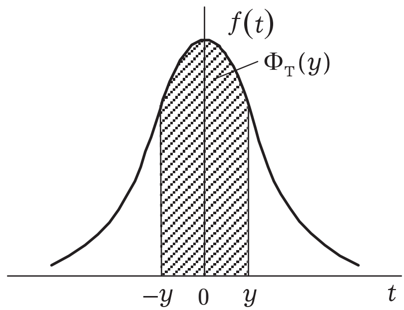


Рис. 9.26

Поэтому равенство (9.55) можно представить в виде

$$P(x_1 \le X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{\text{т}}\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi_{\text{т}}\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right)\right]. \tag{9.61}$$

Таким образом, функция Лапласа может использоваться для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (при этом необходимо принимать во внимание соотношение (9.59)).

В приложении функция Лапласа (9.58) представлена в табл. 2.

Функция Лапласа оказывается наиболее удобной при вычислении вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в интервал, симметричный относительно ее математического ожидания. Действительно, если обозначить длину такого интервала через $2L$, то в соответствии с рис. 9.27 его левая и правая границы будут определяться соотношениями $x_1 = m_x - L$ и $x_2 = m_x + L$. Поэтому по (9.61), с учетом (9.59), получим

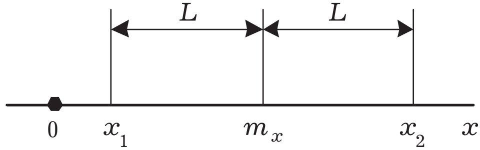


Рис. 9.27

$$P(|X - m_x| < L) = P(m_x - L \le X < m_x + L) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\varPhi_\text{Т}\left(\frac{L}{\sigma_x}\right) - \varPhi_\text{Т}\left(-\frac{L}{\sigma_x}\right)\right] = \varPhi_\text{Т}\left(\frac{L}{\sigma_x}\right). \tag{9.62}$$

В частности, если $L = 3\sigma_x$, то $P(|X - m_x| < L) = \varPhi_\text{Т}(3) = = 0,9973$. Следовательно, при нормальном распределении случайной величины ее возможные значения практически достоверно (с вероятностью 0,9973) рассеиваются относительно математического ожидания в пределах, не превышающих три стандартных отклонения в каждую сторону. Это утверждение обычно называют правилом «трех сигм».

С помощью табличной функции Лапласа можно установить соотношение между срединным (вероятным) и стандартным отклонениями при нормальном распределении. Для этого необходимо принять в равенстве (9.62) $L = B_x$ и положить определяемую им вероятность равной 0,5, т. е. найти соотношение $\frac{B_x}{\sigma_x}$ из условия $\Phi_T\left(\frac{B_x}{\sigma_x}\right) = 0,5$.

Отсюда обратным интерполированием по табл. 2 приложения получаем

$$\frac{B_x}{\sigma_x} = 0,6745,$$

так что

$$B_x = 0,6745\sigma_x \approx \frac{2}{3}\sigma_x. \tag{9.63}$$

Это соотношение иногда представляют в виде

$$B_x = \rho\sqrt{2}\sigma_x, \tag{9.64}$$

где $\rho = 0{,}4769$ — константа нормального распределения.

Распределение Релея

Случайная величина R подчиняется закону Релея, если плотность ее распределения определяется выражением

$$f(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r \le 0, \\ 2ar\, e^{-ar^2}, & \text{при } r > 0, \end{cases} \tag{9.65}$$

где a — параметр распределения ($a > 0$).

Распределение Релея имеет случайная величина

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{9.66}$$

где X и Y — независимые нормально распределенные случайные величины, у которых дисперсии одинаковы, а математические ожидания равны нулю.

В этом случае параметр распределения

$$a = \frac{1}{2\sigma_r^2},$$

где $\sigma_r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Это распределение широко применяется на практике. Например, отклонение точки попадания в мишень от точки прицеливания (Т. пр.) связано с абсциссой и ординатой этой точки соотношением вида (9.66) (рис. 9.28).

Поэтому, если систематические ошибки отсутствуют и рассеивание точки попадания круговое ($\sigma_x = \sigma_y$), это отклонение имеет распределение Релея.

Выражение для плотности распределения обычно записывают в несколько ином виде.

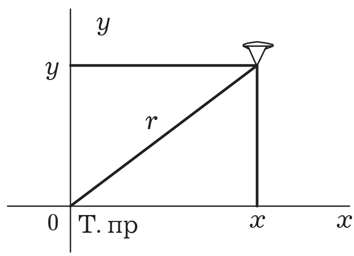


Рис. 9.28

Если σ — стандартное отклонение кругового рассеивания точек попадания относительно точки прицеливания, то $a = \dfrac{1}{2\sigma^2}$ и

$$f(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r \le 0, \\ \dfrac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } r > 0. \end{cases} \qquad (9.67)$$

Функция распределения $F(r)$ случайной величины R, подчиняющейся закону Релея, определяется равенством

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r \le 0, \\ 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } r > 0, \end{cases} \qquad (9.68)$$

а основные числовые характеристики m_r и D_r вычисляют по формулам:

$$m_r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma = 1{,}233\sigma, \qquad (9.69)$$

$$D_r = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2 = 0{,}4292\sigma^2. \qquad (9.70)$$

Графики плотности и функции распределения изображены на рис. 9.29 и 9.30.

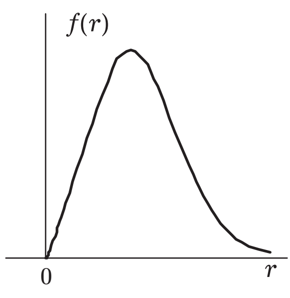


Рис. 9.29

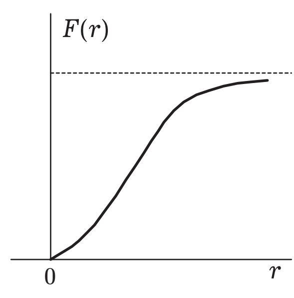


Рис. 9.30

Гамма-распределение

Случайная величина X имеет гамма-распределение, если плотность распределения определяется выражением

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{при } x > 0, \end{cases} \tag{9.71}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция;

α и β — параметры распределения ($\beta > 0$).

В частном случае, если параметр α принимает лишь целочисленные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k!$$

и выражение для плотности распределения при $x > 0$ может быть переписано в виде

$$f(x)=\frac{x^k}{k!\beta^{k+1}}e^{-\frac{x}{\beta}}. \tag{9.72}$$

Для гамма-распределения основные числовые характеристики — математическое ожидание и дисперсию — определяют по формулам:

$$m_x = \beta(\alpha+1),\ D_x = \beta^2(\alpha+1). \tag{9.73}$$

Гамма-распределение находит широкое применение в теории надежности. Оно используется при исследовании надежности аппаратуры в период ее приработки и работы в форсированных режимах.

Если плотность гамма-распределения определяется выражением (9.72), то говорят, что случайная величина X имеет распределение Эрланга k-го порядка. Показательное распределение является распределением Эрланга нулевого порядка. Если в выражении (9.72) положить $k = 0$, получим (9.40).

Одним из частных случаев гамма-распределения является χ^2 (хи-квадрат)-распределение с k степенями свободы, для которого плотность распределения определяется выражением

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{9.74}$$

Формула (9.74) следует из (9.71) при $\beta = 2$, $\alpha = \frac{k}{2} - 1$, ($k = 1$, 2, 3, ...).

Если случайная величина X подчиняется χ^2-распределению, то из (9.73) следует, что $m_x = k$, $D_x = 2k$.

χ^2-распределение широко используется при статистической обработке и анализе результатов испытаний образцов продукции [1, 10, 14].

Распределение Стьюдента

Случайная величина X имеет распределение Стьюдента, если плотность распределения определяется выражением

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, -\infty < x < \infty, \qquad (9.75)$$

где k — целочисленный параметр, называемый числом степеней свободы.

Данное распределение широко используется при обработке результатов испытаний образцов продукции.

При неограниченном увеличении k ($k > 30$) плотность распределения Стьюдента приближается к плотности нормального распределения, т. е. для распределения Стьюдента нормальное распределение является предельным.

9.5. Распределение случайного вектора

Распределения векторных случайных величин представляются теми же основными формами, что и распределения скалярных. В дальнейшем ограничимся рассмотрением этих форм применительно лишь к двумерному случайному вектору (системе двух случайных величин).

Функция вероятности используется только для случайных векторов с дискретными компонентами и обычно задается таблицей, где указываются возможные значения x_i и y_i компонент X и Y случайного вектора $\{X, Y\}$, а также вероятности $p(x_i, y_i)$ всех пар этих значений (табл. 9.3).

Очевидно, что при этом

$$\sum_{x_i} \sum_{y_j} p(x_i, y_j) = 1.$$

Таблица 9.3

$y_j \backslash x_i$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_i}$	…	$\boldsymbol{x_n}$
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_i, y_2)$	…	$p(x_n, y_2)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Функцией распределения двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ называется функция $F(x, y)$ двух аргументов x и y, которая при каждой комбинации их значений задает вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$ и $Y < y$, т. е.

$$F(x, y) = P(X < x, y < Y). \tag{9.76}$$

Таким образом, функция распределения $F(x, y)$ задает вероятность того, что точка со случайными координатами X и Y (случайная точка $\{X, Y\}$ окажется где-либо в пределах бесконечного квадранта плоскости $x0y$, правая вершина которого имеет координаты x и y (рис. 9.31).

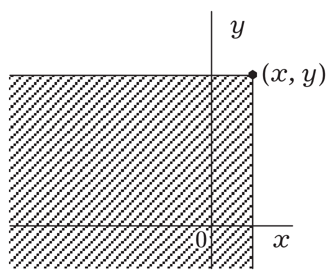


Рис. 9.31

Функция распределения случайного вектора $\{X, Y\}$ с дискретными компонентами связана с вероятностями $p(x_i, y_j)$ комбинацией их всевозможных значений соотношением

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p\left(x_i, y_j\right). \tag{9.77}$$

Она представляется в трехмерном пространстве ступенчатой (для случайного вектора $\{X, Y\}$ с дискретными компонентами) или гладкой поверхностью (для случайного вектора с непрерывными компонентами).

Основными свойствами функции распределения двумерного случайного вектора являются следующие:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$, поскольку функция $F(x, y)$ представляется вероятностями.

2. $F(+\infty, +\infty) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1,$

$$F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(y),$$

$$F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x),$$

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0,$$

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0,$$

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0, \qquad (9.78)$$

в чем нетрудно убедиться, обращаясь к рис. 9.31.

3. Функция распределения $F(x, y)$ — неубывающая функция каждого из своих аргументов

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, если $x_2 > x_1$,

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, если $y_2 > y_1$,

$F(x_2, y_2) \ge F(x_1, y_1)$, если $x_2 > x_1$ или $y_2 > y_1$,

что опять-таки следует из рис. 9.31.

4. Вероятность попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат $0x$, $0y$ (рис. 9.32), равна алгебраической сумме значений функции распределения $F(x, y)$ в вершинах этого прямоугольника

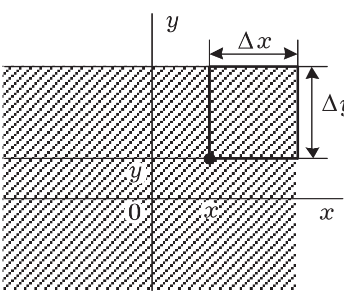


Рис. 9.32

$$P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y) =$$
$$= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) -$$
$$- F(x, y + \Delta y) + F(x, y). \qquad (9.79)$$

Отсюда следует, что вероятность совпадения случайной точки $\{X, Y\}$ с любой точкой плоскости, как и вероятность ее попадания на любую линию этой плоскости, равна нулю.

Плотностью распределения двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ *называется функция* $f(x, y)$ *аргументов, которая определяется следующим образом*:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}, \qquad (9.80)$$

т. е. является пределом отношения вероятности попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке (x, y), когда оба его размера стремятся к нулю (если такой предел существует).

С учетом соотношения (9.79) равенство (9.80) можно представить в виде

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}, \qquad (9.81)$$

что обеспечивает возможность нахождения плотности $f(x, y)$, если функция распределения $F(x, y)$ задана.

Геометрически плотность распределения $f(x, y)$ представляется поверхностью в трехмерном пространстве и используется применительно только к случайным векторам с непрерывными компонентами.

Плотность распределения двумерного случайного вектора имеет следующие основные свойства.

1. $f(x, y) \ge 0$ как предел отношения неотрицательной величины к положительной.

2. $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (9.82)$$

что непосредственно вытекает из соотношения (9.81).

3. Вероятность попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в какую-либо область G на плоскости $x0y$ определяется равенством

$$P(\{X,Y\}\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy, \tag{9.83}$$

т. е. численно равна объему под поверхностью $f(x, y)$ над этой областью (рис. 9.33).

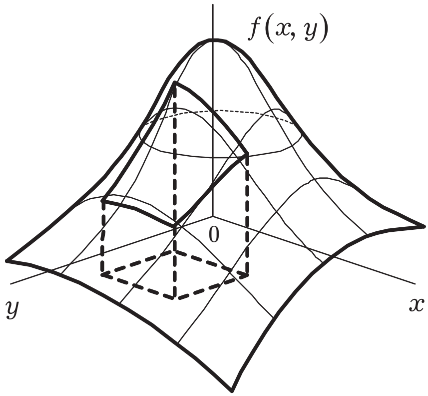


Рис. 9.33

Отсюда следует, что с точностью до бесконечно малых высших порядков вероятность попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в бесконечно малую окрестность точки (x, y) $P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y)$ на плоскости $x0y$ определяется равенством

$$P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y) = f(x, y)dxdy, \tag{9.84}$$

правую часть которого называют элементом вероятности.

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ как вероятность достоверного события, так что весь объем под поверхностью плотности распределения равен единице.

Размерность плотности $f(x, y)$ обратна произведению размерностей компонент X и Y случайного вектора, что полезно иметь в виду при решении практических задач, связанных с нахождением плотностей распределения.

Функцию и плотность распределения двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ принято задавать на всей плоскости $x0y$.

9.6. Частные и условные распределения компонент случайного вектора

9.6.1. Частные распределения

Распределение одной или нескольких компонент, входящих в случайный вектор (систему случайных величин), называют частным распределением.

Частные распределения случайных величин, составляющих систему, часто используются при решении практических задач. Например, если рассматривается система трех случайных величин $\{X, Y, Z\}$, то помимо частных распределений отдельных случайных величин рассматривают и частные распределения различных пар случайных величин $\{X, Y\}$, $\{X, Z\}$, $\{Y, Z\}$.

В дальнейшем рассмотрим частные распределения для системы двух случайных величин.

При известном распределении вектора $\{X, Y\}$ частные распределения определяются следующим образом. Предположим компоненты X и Y — дискретные случайные величины, совместное распределение которых задано табл. 9.3. Вероятности $p(x_i)$, $p(y_i)$ возможных значений компонент X и Y, которые представляют частные распределения каждой из них, определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} p(x_i) &= \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \quad i = 1,2,\ldots,n, \\ p(y_j) &= \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j), \quad j = 1,2,\ldots,m. \end{aligned}\right\} \qquad (9.85)$$

Таким образом, вероятности возможных значений компоненты X получаются суммированием записанных в табл. 9.3 чисел по строкам, а вероятности возможных значений компоненты Y — суммированием этих чисел по строкам.

Если распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ задано функцией распределения, то с учетом свойства функции распределения частные функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ следует определять из соотношений

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \lim_{y\to\infty} F(x,y), \\ F(y) &= \lim_{x\to\infty} F(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

Для вектора с непрерывными компонентами плотности $f(x)$ и $f(y)$ соответствующих частных распределений могут быть получены на основе равенства (9.11)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{ и } f(y) = \frac{dF(y)}{dy}.$$

В случае если распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ задано плотностью $f(x, y)$, то плотности $f(x)$ и $f(y)$ частных распределений его компонент могут быть получены из соотношений

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \\ f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.87}$$

Выражения (9.87) получены исходя из свойств плотности и функции распределения (равенства 9.81 и 9.82).

Из соотношений (9.87) следует, что геометрически плотность $f(x)$ частного распределения компоненты X при каждом значении аргумента x представляется площадью вертикального сечения фигуры, ограниченной поверхностью $f(x, y)$, причем секущая плоскость проходит через точку x перпендикулярно оси $0x$ (рис. 9.33). Аналогичную геометрическую интерпретацию дают и плотности $f(y)$ частного распределения компоненты Y.

Пример 9.4. Мобильная точечная цель свободно маневрирует на участке местности, который представляется кругом радиуса R. Информация о фактическом положении цели отсутствует. Найти распределения ее прямоугольных координат относительно центра области маневрирования.

Решение

По условиям задачи положение цели в произвольный момент времени описывается двумерным случайным вектором, компонентами которого являются ее текущие координаты X и Y в заданной системе координат. Плотность $f(x, y)$ распределения этого случайного вектора может быть получена следующим образом. Поскольку информация о фактическом текущем положении цели отсутствует, то нахождение ее в окрестности любой точки круга радиуса R является равновозможным. Используя геометрический способ определения вероятности, получим

$$P\left(x \le X < x + \Delta x,\ y \le Y < y + \Delta y\right) = \frac{\Delta x \Delta y}{\pi R^2}.$$

Согласно соотношению (9.80) распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ описывается плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/(\pi R^2), & \text{при } x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 > R^2, \end{cases} \tag{9.88}$$

представленной на рис. 9.34 (равномерное распределение в круге радиуса R с центром в начале координат).

Плотность $f(x, y)$ отлична от нуля для любого значения x при

$$-\sqrt{R^2 - y^2} \le x \le +\sqrt{R^2 - y^2},$$

(рис. 9.35), а для любого значения y при

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le +\sqrt{R^2 - x^2}.$$

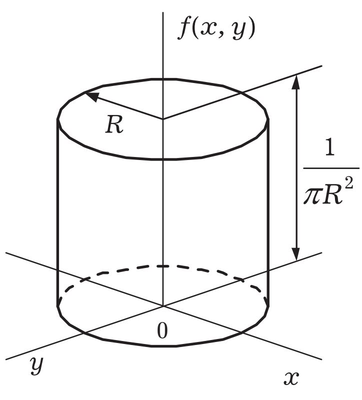


Рис. 9.34

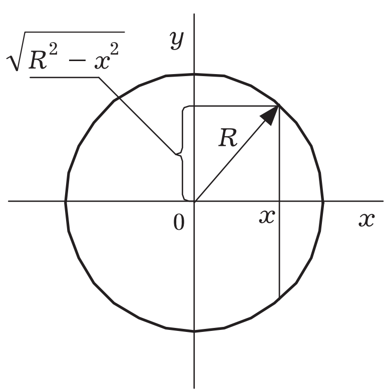


Рис. 9.35

Поэтому в соответствии с соотношением (9.87) можно записать

$$f(x)=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}dy=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$$

и

$$f(y)=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}}dx=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}.$$

Таким образом, обе компоненты случайного вектора $\{X, Y\}$ имеют одинаковые (по виду) частные распределения. Графики их плотностей

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & \text{при } |x|\le R,\\ 0, & \text{при } |x|>R,\end{cases} \tag{9.89}$$

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & \text{при } |y|\le R,\\ 0, & \text{при } |y|>R\end{cases} \tag{9.90}$$

представлены на рис. 9.36 (а и б).

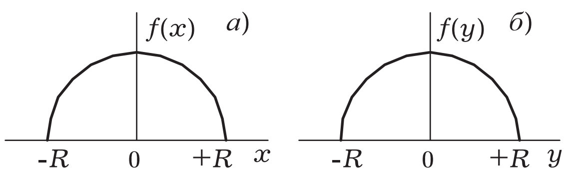


Рис. 9.36

9.6.2. Условные распределения. Стохастическая зависимость случайных величин

Распределение одной или нескольких входящих в систему случайных величин, найденное при условии, что другие входящие в систему случайные величины приняли определенные значения, называют условным распределением.

Условные распределения могут быть получены, если распределение случайного вектора (системы случайных величин) известно.

Если компоненты вектора $\{X, Y\}$ являются дискретными случайными величинами, то их условные распределения описываются вероятностями

$$P(x_i/y_j) = P(X = x_i/Y = y_j)$$

для всех $i = 1, 2, ..., n$, при каждом $j = 1, 2, ..., m$,

$$P(y_j/x_i) = P(Y = y_j/X = x_i)$$

для всех $j = 1, 2, ..., m$, при каждом $i = 1, 2, ..., n$.

Исходы испытания, заключающиеся в том, что $X = x_i$ и $Y = y_j$, являются случайными событиями. Распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ задано вероятностями $p(x_i y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$. Поэтому, используя правило умножения вероятностей, можно записать

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \qquad (9.91)$$

для всех $i = 1, 2, ..., n$ при каждом $j = 1, 2, ..., m$,

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$

для всех $j = 1, 2, ..., m$ при каждом $i = 1, 2, ..., n$,
где $p(x_i)$, $p(y_j)$ — вероятности, представляющие частные распределения компонент X и Y.

Из соотношений (9.91) следует, что сумма вероятностей, представляющих то или иное условное распределение дискретных компонент случайного вектора, равна единице

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) = 1 \text{ и } \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{m}} p(y_j / x_i) = 1.$$

Для случайного вектора $\{X, Y\}$ с непрерывными компонентами условные распределения обычно задают соответствующими плотностями $f(x/y_j)$ и $f(y/x_i)$. Формулы для их определения могут быть получены заменой в левых и правых частях выражений (9.91) вероятностей $p(x_i/y_j)$, $p(y_j/x_i)$, $p(x_i, y_j)$, $p(x_i)$, $p(y_j)$ соответствующими элементами вероятностей, т. е. представлением в виде

$$f(x/y)dx = \frac{f(x,y)dxdy}{f(y)dy},$$

$$f(y/x)dy = \frac{f(x,y)dxdy}{f(x)dx},$$

откуда следует, что

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)},$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}. \qquad (9.92)$$

Плотности условных распределений компонент случайного вектора обладают теми же свойствами, что и плотности безусловных (частных) распределений.

Функции условных распределений непрерывных компонент случайного вектора $\{X, Y\}$ при необходимости могут быть получены на основе соотношения (9.12) непосредственно из выражений (9.92)

$$F(x/y) = \frac{1}{f(y)}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx,$$

$$F(y/x) = \frac{1}{f(x)}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dy.$$

Для условных распределений, как и для безусловных, могут быть определены соответствующие числовые характеристики.

Пример 9.5. Найти плотности условных распределений компонент случайного вектора $\{X, Y\}$ при исходных данных примера 9.4.

Решение

В условиях данного примера плотность $f(x, y)$ случайного вектора $\{X, Y\}$ задана соотношениями (9.88), а плотности $f(x)$ и

$f(y)$ частных распределений его компонент — соотношениями (9.89) и (9.90). Поэтому непосредственно по формулам (9.92) получаем

$$f(x/y) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}}; \quad f(y/x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}},$$

т. е., любое из условных распределений каждой компоненты рассматриваемого случайного вектора является равномерным типа (9.48). При этом длина интервала распределения компоненты $X(Y)$ определяется фиксированным значением компоненты $Y(X)$, играющим роль условия. Окончательно плотности условных распределений запишутся в виде

$$f(x/y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}}, & \text{при } |x| \le \sqrt{R^2 - y^2}, \\ 0, & \text{при } |x| > \sqrt{R^2 - y^2}. \end{cases} \tag{9.93}$$

$$f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}, & \text{при } |y| \le \sqrt{R^2 - x^2}, \\ 0, & \text{при } |y| > \sqrt{R^2 - x^2}. \end{cases} \tag{9.94}$$

Графики условных плотностей (9.93) при различных значениях y вместе с графиком соответствующей частной плотности (9.89) представлены на рис. 9.37.

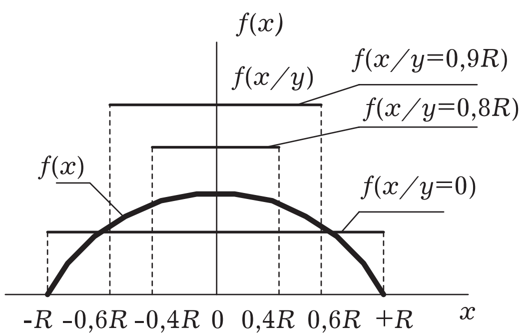


Рис. 9.37

Из рисунка видно, что условное распределение $f(x/y)$ зависит от того, какие значения принимает Y, причем оно не совпадает с частным распределением $f(x)$. Аналогичные выводы справедливы и для условного распределения $f(y/x)$ компоненты Y.

Полученный результат позволяет заключить, что случайные величины X и Y, составляющие систему $\{X, Y\}$, могут быть связаны особого типа зависимостью, которая проявляется в том, что одна из них «реагирует» на изменение другой изменением своего распределения. Такую зависимость называют стохастической. При стохастической зависимости можно указать, какое распределение будет иметь одна из случайных величин при известном значении другой. Наличие стохастической зависимости между случайными величинами устанавливается на основе анализа их условных распределений.

Случайная величина X стохастически не зависит от случайной величины Y, если при любом фиксированном значении $Y = y$ ее условное распределение оказывается одинаковым и совпадает с частным распределением, т. е., если для дискретной случайной величины

$$p(x_i/y_j) = p(x_i) \tag{9.95}$$

при всех y_j, $j = 1, 2, ..., m$,
а для непрерывной

$$f(x/y) = f(x) \tag{9.96}$$

при каждом y.

Невыполнение этих условий указывает на наличие стохастической зависимости случайной величины X от случайной величины Y. Стохастическая независимость, как и зависимость, всегда является взаимной (в дальнейшем слово «стохастическая» будем опускать).

Для независимых случайных величин справедливы равенства

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j), \tag{9.97}$$

если они дискретны, и

$$f(x, y) = f(x)\, f(y), \tag{9.98}$$

если непрерывны.

Применительно к независимым случайным величинам дискретного и непрерывного типа справедливо также равенство

$$F(x, y) = F(x)\, F(y), \tag{9.99}$$

Равенства (9.97), (9.98) и (9.99) являются формальными признаками независимости случайных величин.

9.7. Числовые характеристики векторных случайных величин

Основными числовыми характеристиками двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ являются математические ожидания m_x, m_y и дисперсии D_x, D_y (стандартные отклонения σ_x, σ_y) его компонент. При этом точка с координатами (m_x, m_y) на плоскости $x0y$ определяет центр рассеивания случайной точки $\{X, Y\}$, а дисперсии D_x, D_y характеризуют степень ее рассеивания в направлении осей $0x$ и $0y$. Однако они не отражают взаимного влияния случайных величин при их совместном рассмотрении, что вызывает необходимость введения дополнительных числовых характеристик.

Моменты распределения случайного вектора

Числовые характеристики случайного вектора вводятся через понятия начальных и центральных моментов.

Начальным моментом $(k + s)$-го порядка системы $\{X, Y\}$ называется математическое ожидание произведения k-й степени случайной величины X на s-ю степень случайной величины Y [1, 4, 12, 13]:

$$\alpha_{k,s} = M[X^k \cdot Y^s]. \tag{9.100}$$

В развернутом виде выражение для начального момента $(k + s)$-го порядка случайного вектора $\{X, Y\}$ записывается:

- для дискретного случайного вектора

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p(x_i, y_j), \tag{9.101}$$

- для непрерывного случайного вектора

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy. \tag{9.102}$$

На практике наиболее употребительными начальными моментами являются моменты первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= M[X^1 \cdot Y^0] = M[X] = m_x; \\ \alpha_{0,1} &= M[X^0 \cdot Y^1] = M[Y] = m_y. \end{aligned}\right\} \tag{9.103}$$

Таким образом, начальные моменты первого порядка являются математическими ожиданиями входящих в систему случайных величин.

Центральным моментом $(k + s)$-го порядка случайного вектора $\{X, Y\}$ называется математическое ожидание произведения k-й и s-й степеней соответствующих центрированных случайных величин

$$\mu_{k,s} = M[(X - m_x)^k (Y - m_y)^s]. \tag{9.104}$$

В развернутом виде формулы для центральных моментов $(k + s)$-го порядка запишутся в виде:

- для системы дискретных случайных величин

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p(x_i, y_j); \tag{9.105}$$

- для системы непрерывных случайных величин

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y)dxdy. \tag{9.106}$$

На практике наибольшее применение имеют центральные моменты второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \mu_{2,0} &= M[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0] = M[(X - m_x)^2] = D_x \\ \mu_{0,2} &= M[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2] = M[(Y - m_y)^2] = D_y. \end{aligned}\right\} \tag{9.107}$$

Таким образом, рассмотренные центральные моменты второго порядка являются дисперсиями случайных величин, входящих в систему, и характеризуют индивидуальные рассеивания этих величин относительно центра распределения.

Кроме того, к числу основных числовых характеристик двумерного случайного вектора относится еще один смешанный центральный момент второго порядка, называемый *моментом связи* $K_{x,y}$ (его называют также *корреляционным моментом или ковариацией*) [1, 5, 6, 9], который определяется следующим образом

$$\mu_{1,1} = K_{x,y} = M[(X - m_x)^1 (Y - m_y)^1], \tag{9.108}$$

и может быть либо положительным, либо отрицательным.

Вычисляется момент связи с использованием выражения

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p(x_i, y_j), \tag{9.109}$$

если случайные величины X и Y дискретны, или выражения

$$K_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dxdy. \tag{9.110}$$

если они непрерывны.

Момент связи является характеристикой частного случая стохастической зависимости — так называемой корреляционной зависимости или корреляции. Она проявляется в том, что при изменении одной случайной величины математическое ожидание другой изменяется по линейному закону в ту же сторону (если $K_{x,y} > 0$) или в противоположную (если $K_{x,y} < 0$). Иначе говоря, например, с возрастанием одной случайной величины другая в среднем при $K_{x,y} > 0$ тоже возрастает (линейно) — имеет место положительная корреляция, а при $K_{x,y} < 0$ уменьшается (опять-таки линейно) — имеет место отрицательная корреляция.

Случайные величины X и Y оказываются коррелированными, если они имеют общую случайную составляющую. Например,

$$X = Z + U,$$
$$Y = Z + V.$$

Случайная величина Z, изменяясь в какую-либо сторону, будет изменять в ту же сторону случайные величины X и Y. Однако, связь между ними проявится не как функциональная, так как на ней отражаются еще и рассеивания слагаемых U и V. В результате этого при увеличении (уменьшении) одной из случайных величин X или Y другая будет увеличиваться (уменьшаться) лишь в среднем.

Чем в большей степени рассеивается общая составляющая Z по сравнению с составляющими U и V, тем теснее корреляционная связь между случайными величинами X и Y, и, наоборот, при отсутствии рассеивания Z эти случайные величины становятся чисто независимыми.

Если компоненты X и Y случайного вектора $\{X, Y\}$ независимы, то они оказываются и некоррелированными. Обратное утверждение не всегда верно, поскольку некоррелированные случайные величины могут быть зависимыми. Это обусловлено тем, что распределение случайной величины является более полной ее вероятностной характеристикой, чем математическое ожидание. Такая особенность присуща, например, компонентам X и Y случайного вектора, рассмотренного в примерах 9.4 и 9.5. Как было показано, они стохастически независимы, но математические ожидания, соответствующие любому условному распределению каждой из них (см. рис. 9.37), равны нулю, т. е. не зависят от того, какие значения принимает другая, так что корреляция между X и Y отсутствует. И момент связи $K_{x,y}$ в условиях этих примеров оказывается равным нулю.

Наряду с моментом связи в качестве характеристики степени корреляции между случайными величинами используется *коэффициент корреляции* $r_{x,y}$, который определяется соотношением

$$r_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (9.111)$$

Эта характеристика обладает большей наглядностью относительно степени корреляции, чем момент связи, поскольку $|r_{x,y}| \leq 1$. Если случайные величины X и Y некоррелированы, то $r_{x,y} = 0$, а если они связаны линейной функциональной зависимостью, то $|r_{x,y}| = 1$ (знак $r_{x,y}$ одинаков со знаком $K_{x,y}$).

Следует отметить, что некоррелированными могут быть случайные величины, связанные друг с другом даже функциональной, но нелинейной зависимостью.

Числовые характеристики многомерного случайного вектора $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ задают совокупность математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$, матрицей $\left\| K_{x_i, x_j} \right\|$, элементами которой являются моменты связи всех возможных пар $x_i x_j$ его компонент. При этом, поскольку из определения момента связи (9.108) следует, что

$$K_{x,y} = K_{y,x};\ K_{x,x} = D_x;\ K_{y,y} = D_y,$$

такую матрицу представляют в виде:

$$\left\| K_{x_i x_j} \right\| = \left\| \begin{matrix} D_{x_1} & K_{x_1,x_2} & K_{x_1,x_3} & \ldots & K_{x_1,x_n} \\ & D_{x_2} & K_{x_2,x_3} & \ldots & K_{x_2,x_n} \\ & & D_{x_3} & \ldots & K_{x_3,x_n} \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & & D_{x_n} \end{matrix} \right\|$$

и называют корреляционной матрицей.

9.8. Нормальное распределение двумерного случайного вектора

Нормальное распределение двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ с некоррелированными компонентами X и Y определяются плотностью

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{ -\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right].$$

Следовательно

$$f(x, y) = f(x)\, f(y).$$

Таким образом, при отсутствии корреляции между нормально распределенными случайными величинами они оказываются независимыми.

Если компоненты X и Y двумерного вектора независимы и дисперсии (стандартные отклонения) одинаковы, т. е. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, то нормальный закон распределения называют круговым. В этом случае плотность нормального закона распределения имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{9.112}$$

В приложениях [5] часто встречаются задачи, сводящиеся к вычислению вероятности попадания нормально распределенной случайной точки $\{X, Y\}$ в прямоугольник (квадрат) или круг.

Вероятность попадания в прямоугольник (квадрат) вычисляется наиболее просто, если его стороны параллельны осям координат $0x$, $0y$ (рис. 9.38), а случайные величины X и Y независимы.

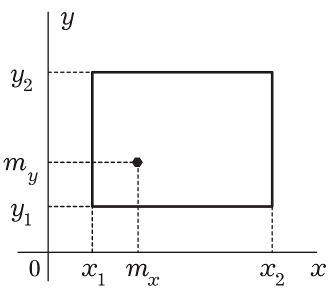


Рис. 9.38

Тогда искомая вероятность представляется вероятностью совместимого наступления двух независимых событий, одним из которых является выполнение неравенства $x_1 \le X < x_2$, а другим — выполнение неравенства $y_1 \le Y < y_2$. Поэтому в этом случае в соответствии с формулой (9.79) получим выражение

$$\begin{aligned} P &= P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = \\ &= \left[F_{\text{Т}}\left(\frac{x_2-m_x}{\sigma_x}\right) - F_{\text{Т}}\left(\frac{x_1-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[F_{\text{Т}}\left(\frac{y_2-m_y}{\sigma_y}\right) - F_{\text{Т}}\left(\frac{y_1-m_y}{\sigma_y}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\Phi_{\text{Т}}\left(\frac{x_2-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi_{\text{Т}}\left(\frac{x_1-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi_{\text{Т}}\left(\frac{y_2-m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi_{\text{Т}}\left(\frac{y_1-m_y}{\sigma_y}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9.113}$$

Вероятность попадания в круг, центр которого совпадает с центром кругового нормального распределения, вычисляется аналитически. Для этого частного случая расчетная формула может быть получена следующим образом. Подставив (9.112) в (9.83), получим

$$P(\{XY \subset G\}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint\limits_G \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}\right] dxdy.$$

где область G — круг радиуса R с центром в точке (m_x, m_y) (рис. 9.39).

Перенос начала координат в точку (m_x, m_y) позволяет записать это выражение в виде

$$P(\{X,Y\} \subset G) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint\limits_G \exp\left[-\frac{x_1^2+y_1^2}{2\sigma^2}\right] dxdy.$$

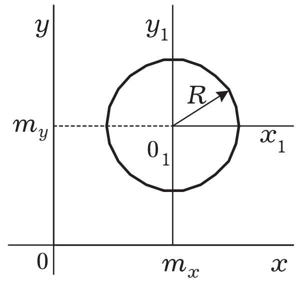


Рис. 9.39

Перейдя от прямоугольных координат к полярным координатам r и φ, т. е. полагая $x = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$ и учитывая, что $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ получим:

$$P(\{X,Y\} \in G) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) rdrd\varphi = \\ = 1-\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right). \tag{9.114}$$

Формула (9.114) определяет вероятность попадания нормально распределенной случайной точки в круг радиуса R, центр которого совмещен с центром кругового нормального распределения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плотность распределения случайной величины X задана выражением

$$f(x) = \begin{cases} A\cos x & \text{при} -\pi/2 \le x \le \pi/2; \\ 0 & \text{при} \left|x\right| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти а) коэффициент A и функцию распределения; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Монету подбрасывают 4 раза. Найти выражение для функции распределения числа выпадений герба. Определить математическое ожидание и дисперсию числа выпадений герба.

3. При работе радиотехнического устройства время от времени возникают сбои. Число сбоев за сутки подчиняется закону Пуассона с параметром $m = 1{,}5$. Определить вероятности того, что:

а) за двое суток не будет ни одного сбоя;

б) в течение суток будет хотя бы один сбой;

в) за неделю произойдет не менее трех сбоев.

4. Интенсивность отказов радиотехнического устройства равна 0,001 1/ч. Определить вероятность того, что устройство проработает более 500 ч.

5. Из скольких параллельно соединенных элементов должен быть собран блок, чтобы вероятность его безотказной работы в течение 100 ч была не менее 0,9, если время работы каждого элемента имеет показательное распределение с математическим ожиданием равным 200 ч?

6. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (2–8). Записать выражения для плотности и функции распределения. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

7. Измерение дальности до объекта сопровождается систематической и случайной ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону уменьшения дальности. Случайная ошибка подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 100 м. Определить:

а) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м;

б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинную.

8. Диаметр валиков, изготавливаемых на станке, распределен по нормальному закону с математическим ожиданием

50 мм и средним квадратическим отклонением 0,3 мм. Найти процент годных валиков, если бракуются валики, диаметр которых меньше 49,7 мм и больше 50,6 мм.

Вопросы для самопроверки

1. Случайны величины (СВ) и их классификация
2. Что такое распределение случайной величины?
3. Что такое функция вероятности СВ?
4. Что такое функция распределения?
5. Как построить график функции распределения дискретной СВ?
6. Каковы свойства функции распределения?
7. Что такое плотность распределения?
8. Каковы свойства плотности распределения?
9. Назовите характеристики положения СВ?
10. Назовите характеристики рассеивания СВ?
11. Каковы свойства математического ожидания СВ?
12. Каковы свойства дисперсии СВ?
13. Что такое моменты СВ?
14. Каковы основные распределения СВ?
15. Приведите примеры случайных величин, имеющих теоретические распределения.
16. Какими параметрами определяется биномиальное распределение?
17. При каких условиях осуществляется переход от биномиального распределения к распределению Пуассона?
18. Какими параметрами определяется равномерное распределение? Как по ним рассчитываются его числовые характеристики?
19. Укажите одно из важнейших свойств показательного (экспоненциального) распределения. Каков физический смысл параметра распределения и как определяются его числовые характеристики?
20. Какими параметрами определяется нормальное распределение? Поясните их физический смысл.

21. Перечислите характеристики рассеивания и укажите связь между ними.

22. Как определяется вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал с помощью табличной функции нормального распределения и табличной функции Лапласа?

23. Поясните связь между распределением Релея и нормальным распределением. Как их параметры связаны между собой?

24. В какой области находит широкое применение гамма-распределение? Какие распределения являются частными случаями гамма-распределения?

25. Где используется распределение Стьюдента? При каких условиях оно совпадает с нормальным распределением?

26. Что означает распределение случайного вектора?

27. Назовите числовые характеристики векторных СВ.

28. Поясните смысл понятия корреляция.

10. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

10.1. Общая характеристика задач исследования функций случайных аргументов

На практике широко распространены задачи, связанные с необходимостью использования при их решении теоретико-вероятностного аппарата исследования функций случайных аргументов.

Функцией случайных аргументов называют такую случайную величину $Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$, *возможные значения которой связаны с возможными значениями случайных аргументов функциональной зависимостью* $y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$. *Областью задания функции является область возможных значений системы аргументов* $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

Предположим, величина Y является функцией нескольких случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n),$$

и пусть известны характеристики случайных аргументов. В этом случае возникают две задачи: первая частная задача — определение числовых характеристик функции и вторая общая задача — нахождение закона распределения функции.

Аналогичные задачи имеют место и при рассмотрении функционального преобразования системы случайных величин:

$$Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2, ..., X_n);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_m = \varphi_m(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Математический аппарат исследования функций случайных аргументов в теории вероятностей разработан достаточно полно. Ограничимся рассмотрением лишь части этого аппарата, используемой при решении наиболее типичных задач оценки эффективности функционирования военно-технических систем.

Наибольший интерес для практики имеет определение числовых характеристик функций. При решении этой задачи не во всех случаях необходимо располагать законом распределения аргументов, а достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики аргументов. Предварительно рассмотрим ряд теорем о математических ожиданиях и дисперсиях, которые используются для построения методов определения числовых характеристик функций случайных аргументов.

10.2. Теоремы о числовых характеристиках случайных величин

Сформулируем без доказательства основные теоремы о числовых характеристиках случайных величин. Содержание этих теорем определяет свойства математического ожидания и дисперсии, знание которых необходимо для решения широкого круга прикладных задач исследования функций случайных аргументов [1, 4, 5, 11].

Теоремы о математических ожиданиях

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M[C] = C. \tag{10.1}$$

2. Математическое ожидание произведения постоянной величины C на случайную величину X равно произведению этой постоянной на математическое ожидание случайной величины:

$$M[CX] = CM[X], \tag{10.2}$$

т. е. постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i]. \tag{10.3}$$

Данное выражение справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Пример 10.1. Производится обстрел цели, состоящей из n отдельных объектов. Известны вероятности поражения каждого объекта $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Определить математическое ожидание числа пораженных объектов.

Решение

Введем в рассмотрение случайную величину X_i, принимающую одно из двух значений: 1, если i-й объект поражен, или 0, если i-й объект не поражен. Тогда случайная величина X — число пораженных объектов — равна сумме величин X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Математическое ожидание числа пораженных объектов будет равно

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Случайная величина X_i дискретного типа. Она принимает значение, равное единице, с вероятностью p_i и значение, равное нулю, с вероятностью $(1 - p_i)$. Поэтому

$$M[X_i] = 1 \cdot p_i + 0 \cdot (1 - p_i) = p_i,$$

а математическое ожидание числа пораженных объектов

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

При $p_i = \text{const} = p$

$$M[X] = np.$$

Таким образом, математическое ожидание числа пораженных объектов равно сумме вероятностей поражения каждого объекта. В частном случае, когда вероятность поражения каждого объекта одинакова, математическое ожидание числа пораженных объектов равно произведению этой вероятности на число объектов (в этом случае число пораженных объектов имеет биномиальное распределение).

4. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс момент связи этих величин:

$$M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy}. \tag{10.4}$$

Если случайные величины X и Y некоррелированы, то момент связи K_{xy} равен нулю и

$$M[XY] = M[X]M[Y]. \tag{10.5}$$

Для произвольного числа сомножителей математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i]. \tag{10.6}$$

Теоремы о дисперсиях

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D[C] = 0. \tag{10.7}$$

2. Дисперсия произведения постоянной величины C на случайную величину X равна произведению квадрата постоянной величины на дисперсию случайной величины:

$$D[CX] = C^2 D[X]. \tag{10.8}$$

3. Дисперсия суммы двух случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий и удвоенного момента связи:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \tag{10.9}$$

При произвольном числе слагаемых

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{x_i x_j}, \tag{10.10}$$

а если они независимы (или хотя бы некоррелированы), то

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i-1}^{n} D[X_i]. \tag{10.11}$$

Покажем применение теорем о числовых характеристиках для решения некоторых практических задач.

1. Математическое ожидание разности любой случайной величины и ее математического ожидания всегда равно нулю:

$$M[X - m_x] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0.$$

Отметим, что разность $X - m_x$ обычно называют центрированной случайной величиной.

2. Применяя первые три теоремы о математических ожиданиях, можно доказать справедливость более простой формулы для вычисления дисперсии случайной величины:

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2.$$

Действительно,

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X + m_x^2] =$$
$$= M[X^2] - 2m_x M[X] + M[m_x^2] = M[X^2] - m_x^2.$$

3. Используя третью и четвертую теоремы о математических ожиданиях, можно показать, что момент связи двух случайных величин

$$X = Z + U,$$
$$Y = Z + V,$$

где Z, U, и V — независимые случайные величины, равен дисперсии случайной величины Z (дисперсии их общей части):

$$K_{xy} = D_z.$$

4. Из второй теоремы о математических ожиданиях следует, что момент связи случайных величин

$$Y_1 = a_1 X_1 \text{ и } Y_2 = a_2 X_2 \quad (10.12)$$

определяется равенством

$$K_{y_1 y_2} = a_1 a_2 K_{x_1 x_2}, \quad (10.13)$$

которое получается в результате преобразований исходного выражения для $K_{y_1 y_2}$:

$$K_{y_1 y_2} = M[(Y_1 - m_y)(Y_2 - m_y)] = M[(a_1 X_1 - a_1 m_x)(a_2 X_2 - a_2 m_x)] =$$
$$= a_1 a_2 M[(X_1 - m_x)(X_2 - m_x)] = a_1 a_2 K_{x_1 x_2}.$$

5. Согласно первой и третьей теоремам о дисперсии с учетом очевидного равенства $K_{xc} = 0$ имеем

$$D[X + C] = D_x,$$

т. е. при добавлении к случайной величине любой постоянной ее дисперсия не изменяется.

6. Используя вторую теорему о математических ожиданиях и вторую теорему о дисперсиях применительно к так называемой центрированно-нормированной случайной величине

$$\overset{0}{X} = \frac{X - m_x}{\sigma_x}, \tag{10.14}$$

получим

$$M[\overset{0}{X}] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x} M[X - m_x] = 0;$$

$$D[\overset{0}{X}] = D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X - m_x] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X] = 1.$$

Таким образом, математическое ожидание любой центрированно-нормированной случайной величины равно нулю, а ее дисперсия (стандартное отклонение) — единице.

Отметим, что замена переменной интегрирования (см. 9.53), использованная при рассмотрении табличной функции нормального распределения (9.52), равносильна преобразованию случайной величины X в соответствующую ей центрированно-нормированную случайную величину (10.14), т. е. линейному преобразованию.

Поскольку выражение (9.52) представляет функцию нормального распределения с параметрами $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$, получается, что при нормальном распределении случайной величины ее линейное преобразование изменяет только значения параметров $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$, а не вид самого распределения. Сделанный вывод оказывается справедливым для любых распределений случайных величин и может быть обобщен следующей формулировкой: при линейном преобразовании случайной величины вид ее распределения не изменяется.

10.3. Определение числовых характеристик функций случайных аргументов

Рассмотрим задачу определения числовых характеристик функций случайных аргументов в следующей постановке. Случайная величина Z является функцией системы случайных аргументов $X_1, X_2, ..., X_n$. Вид функции $Z = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$ и ее параметры известны, а числовые характеристики системы случайных величин $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ заданы совокупностью значений математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$ и корреляционной матрицей $\left\| K_{x_i x_j} \right\|$.

Требуется найти числовые характеристики m_z и D_z случайной величины Z.

Линейная функция

Если функция $Z = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$ линейна относительно своих аргументов, так что

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b, \tag{10.15}$$

то решение задачи получается в результате непосредственного применения теорем о числовых характеристиках.

Так, используя первые три теоремы о математических ожиданиях, из выражения (10.15) получаем

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b, \tag{10.16}$$

т. е. математическое ожидание линейной функции случайных аргументов представляется такой же функцией их математических ожиданий.

Дисперсия линейной функции вида (10.15) определяется формулой

$$D_z = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_{x_i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}, \tag{10.17}$$

которая может быть получена из выражения (10.15) в результате применения теорем о дисперсиях с учетом того, что момент связи случайных величин (10.12) определяется равенством (10.13).

Если все аргументы линейной функции вида (10.15) независимы (или хотя бы некоррелированы), то из формулы (10.17) следует, что

$$D_z = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_{x_i}. \tag{10.18}$$

Нелинейная функция. Метод линеаризации

Применительно к функции $Z = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$, нелинейной относительно системы своих аргументов, решение задачи в сформулированной выше постановке может быть получено, как правило, лишь приближенно на основе метода линеаризации. Сущность метода линеаризации заключается в том, что нелинейную функцию заменяют некоторой линейной и затем по уже известным правилам находят числовые характеристики этой линейной функции, считая их приближенно равными числовым характеристикам нелинейной функции.

Сущность этого метода рассмотрим на примере функции одного случайного аргумента.

Если случайная величина Z является заданной функцией

$$Z = \varphi(X) \tag{10.19}$$

случайного аргумента X, то ее возможные значения z связаны с возможными значениями аргумента x функцией того же вида, т. е.

$$z = \varphi(x), \tag{10.20}$$

(например, если $Z = \sin X$, то $z = \sin x$).

Разложим функцию (10.20) в ряд Тейлора в окрестности точки $x = m_x$, ограничиваясь только первыми двумя членами разложения, и будем считать, что

$$z \approx \varphi(m_x) + \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{m_x} (x - m_x),$$

где $\varphi(m_x)$ — значение функции (10.20) при $x = m_x$;

$\left.\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{m_x}$ — значение производной функции (10.20) по аргументу x при $x = m_x$.

Такое допущение равносильно замене заданной функции (10.19) линейной функцией

$$Z = \varphi(m_x) + \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{m_x}(X - m_x).$$

На основе теорем о математических ожиданиях и дисперсиях получим расчетные формулы для определения числовых характеристик m_z и D_z в виде:

$$m_z = \varphi(m_x); \tag{10.21}$$

$$D_z = \left(\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{m_x}\right)^2 D_x. \tag{10.22}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае стандартное отклонение σ_z следует вычислять по формуле

$$\sigma_z = \left(\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{m_x}\right)\sigma_x. \tag{10.23}$$

(Модуль производной $\left|\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{m_x}$ здесь берется потому, что она может быть и отрицательной.)

Применение метода линеаризации для нахождения числовых характеристик нелинейной функции

$$Z = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{10.24}$$

произвольного числа случайных аргументов приводит к расчетным формулам для определения ее математического ожидания, имеющим вид

$$m_z = \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}); \tag{10.25}$$

$$D_z = \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m\right)^2 D_{x_i} + 2\sum_{i<j}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m\right)\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_m\right)K_{x_i x_j}, \tag{10.26}$$

где $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m$ и $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_m$ — частные производные от функции $z = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ по аргументам x_i и x_j соответственно, вычисленные с учетом знаков в точке $(m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n})$, т. е. путем замены всех входящих в них аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$ их математическими ожиданиями.

Наряду с формулой (10.26) для определения дисперсии D_z можно использовать расчетную формулу вида

$$D_z = \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m\right)\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_m\right) r_{x_i x_j}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}, \qquad (10.27)$$

где $r_{x_i x_j}$ — коэффициент корреляции случайных аргументов X_i и X_j.

Применительно к нелинейной функции независимых (или хотя бы некоррелированных) случайных аргументов формулы (10.26) и (10.27) имеют вид

$$D_z = \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m\right)^2 D_{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_m\right)^2 \sigma_{x_i}^2. \qquad (10.28)$$

Формулы, основанные на линеаризации нелинейных функций случайных аргументов, позволяют определять их числовые характеристики лишь приближенно. Точность вычисления тем меньше, чем больше заданные функции отличаются от линейных и чем больше дисперсии аргументов. Оценить возможную ошибку в каждом конкретном случае не всегда удается.

Для уточнения результатов, полученных по данному методу, может быть использован прием, основанный на сохранении в разложении нелинейной функции не только линейных, но и некоторых последующих членов разложения, например второго порядка.

Кроме того, числовые характеристики нелинейной функции случайных аргументов можно определять на основе предварительного отыскания закона ее распределения при заданном распределении системы аргументов. Однако нужно иметь в виду, что аналитическое решение такой задачи часто оказывается слишком сложным. Поэтому для нахождения числовых характеристик нелинейных функций случайных аргументов широко используется метод статистического моделирования.

Основой метода является имитация серии испытаний, в каждом из которых путем моделирования получается определенная совокупность $x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}$ значений случайных аргументов $X_1, X_2, ..., X_n$ из множества, отвечающего их совместному распределению. Полученные значения с помощью заданного соотношения (10.24) преобразуются в соответствующие значения z_i исследуемой функции Z. По результатам $z_1, z_2, ..., z_i, ...,$ z_k всех k таких испытаний искомые числовые характеристики вычисляются методами математической статистики.

Пример 10.2. Определить на основе метода линеаризации математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины

$$Z = \cos X,$$

если $m_x = \pi/3$, $\sigma = \pi/314 \approx 10^{-2}$.

Решение

1. По формуле (10.20) получаем

$$m_z = \cos(m_x) = \cos(\pi/3) = 0{,}5.$$

2. Используя таблицу производных элементарных функций, находим

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

и вычисляем значение этой производной в точке $x = m_x = \pi/3$:

$$\left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{m_x} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. По формуле (10.23) получаем

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{3}}{2}10^{-2}.$$

Пример 10.3. Определить на основе метода линеаризации математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины

$$Z = \frac{X_1 X_2^2}{2},$$

если $m_{x_1} = 10$; $m_{x_2} = 5$;

$$\sigma_{x_1} = 10^{-2};\ \sigma_{x_2} = 2 \cdot 10^{-2};\quad r_{x_1 x_2} = -625 \cdot 10^{-4}.$$

Решение

1. По формуле (10.25) получаем

$$m_z = \frac{m_{x_1} m_{x_2}^2}{2} = \frac{10 \cdot 25}{2} = 125.$$

2. Запишем формулу (10.27) для функции двух случайных аргументов

$$D_Z = \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x_1} \right|_m \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|_m \right)^2 \sigma_{x_2}^2 +$$

$$+ 2 \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x_1} \right|_m \right) \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|_m \right) r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}.$$

3. Находим частные производные от функции Z по аргументам X_1 и X_2:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{x_2^2}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 x_2$$

и вычисляем их значения в точке (m_{x_1}, m_{x_2}):

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x_1} \right|_m = \frac{m_{x_2}^2}{2} = \frac{25}{2}; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|_m = m_{x_1} m_{x_2} = 10 \cdot 5 = 50.$$

4. Подставив полученные данные в формулу для расчета дисперсии случайной величины Z, получим $D_z = 1$. Следовательно и $\sigma_z = 1$.

10.4. Распределение однозначного преобразования случайных величин

Ранее были изложены правила определения числовых характеристик функций случайных величин. На практике часто приходится решать задачи по определению закона распределения функции по известным законам распределения случайных аргументов. В дальнейшем будем рассматривать только непрерывные функции непрерывных случайных величин [12].

Предположим, что система случайных величин $\{Y_1, Y_2\}$ получена в результате функционального преобразования, проведенного над системой случайных величин $\{X_1, X_2\}$:

$$Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2);$$

$$Y_2 = \varphi_2(X_1, X_2); \qquad (10.29)$$

и пусть это преобразование будет взаимно однозначным, т. е. каждой паре возможных значений (y_1, y_2) соответствует только одна совокупность значений (x_1, x_2) и наоборот.

Известна плотность распределения случайных аргументов $f(x_1, x_2)$ и требуется определить плотность распределения функции $f(y_1, y_2)$.

Систему случайных величин можно рассматривать как случайную точку, координаты которой являются случайными величинами, входящими в систему. Рассмотрим элементарную область dS_x для системы координат $x_1 0 x_2$ и отвечающую ей элементарную область dS_y для системы $y_1 0 y_2$ (рис. 10.1).

Каждой точке элементарной области dS_y отвечает только одна вполне определенная точка области dS_x. Поэтому вероятность попадания случайной точки в область dS_y равна вероятности попадания в область dS_x:

$$f(y_1, y_2)dS_y = f(x_1, x_2)dS_x. \qquad (10.30)$$

Отсюда искомая плотность распределения запишется в виде

$$f(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)\frac{dS_x}{dS_y}. \qquad (10.31)$$

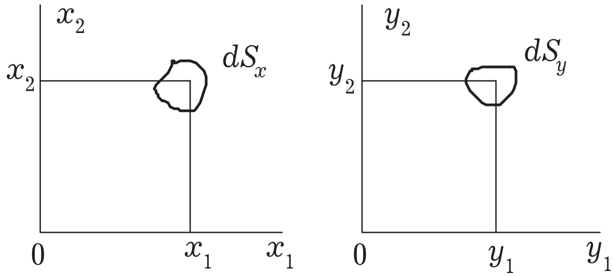


Рис. 10.1. Взаимно однозначное соответствие систем случайных величин

Известно, что отношение элементарных областей dS_x и dS_y при переходе от переменных x_1, x_2 к переменным y_1, y_2 равно якобиану преобразования:

$$\frac{dS_x}{dS_y} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = I. \qquad (10.32)$$

Таким образом, плотность распределения при однозначном функциональном преобразовании системы двух случайных величин определяют из выражения

$$f\,(y_1, y_2) = |I| f\,(x_1, x_2). \qquad (10.33)$$

Здесь берется модуль якобиана преобразования, так как

$$f\,(y_1, y_2) \geq 0 \text{ и } f\,(x_1, x_2) \geq 0.$$

Полученный результат может быть распространен и на случай функционального преобразования системы произвольного числа случайных величин. В общем случае, если известен якобиан преобразования при переходе от координат $(x_1, x_2, ..., x_n)$ к координатам $(y_1, y_2, ..., y_n)$

$$I = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (10.34)$$

и если это преобразование взаимно однозначно, плотность распределения системы случайных величин $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ определяется по формуле

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |I|\, f(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (10.35)$$

где I определяется выражением (10.34).

Рассмотрим некоторые частные случаи однозначного преобразования случайных величин.

Распределение монотонной функции одной случайной величины

Пусть $Y = \varphi(X)$ является монотонной функцией. Значит, между величинами X и Y имеется взаимное и однозначное соответствие. Тогда исходя из формулы (10.35) получим

$$f(y) = |I| f(x). \quad (10.36)$$

Но якобиан преобразования будет равен $I = dx/dy$. Тогда

$$f(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|. \quad (10.37)$$

Распределение линейной функции одной случайной величины

Предположим, что $Y = aX + b$. Обратная функция относительно Y запишется в виде $X = (Y - b)/a$.

Рассматриваемая функция является монотонной. Поэтому, используя выражение (10.37) и найдя $dx/dy = 1/a$, получим

$$f(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}. \quad (10.38)$$

Если, например, случайная величина X распределена по нормальному закону, то в соответствии с (10.38) найдем

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x|a|}\exp\left[-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}\right]. \qquad (10.39)$$

Проделав несложные преобразования в показателе степени, получим

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x|a|}\exp\left[-\frac{\{y-(am_x+b)\}^2}{2\sigma_x^2a^2}\right]. \qquad (10.40)$$

Анализ формулы (10.40) показывает, что случайная величина Y распределена нормально с математическим ожиданием $m_y = am_x + b$ и стандартным отклонением $\sigma_y = |a|\sigma_x$. Здесь получено подтверждение общего правила: линейное преобразование случайной величины не изменяет вида закона ее распределения.

Распределение полярных координат

На практике часто осуществляется переход от прямоугольных к полярным координатам. Предположим, что известна плотность распределения прямоугольных координат $f(x, y)$ и требуется определить плотность распределения системы полярных координат r, α, если

$$X = R\cos\alpha;\ Y = R\sin\alpha. \qquad (10.41)$$

Как известно, якобиан преобразования (10.41) равен $I = r$.

Тогда на основании общей формулы запишем

$$f(r,\alpha) = rf(x, y) = rf(r\cos\alpha, r\sin\alpha). \qquad (10.42)$$

В частном случае, если $\{X, Y\}$ — нормально распределенные величины с плотностью распределения

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right],$$

плотность распределения полярных координат имеет вид

$$f(r,\alpha)=\frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sigma_x^2}+\frac{\sin^2\alpha}{\sigma_y^2}\right)\right]. \tag{10.43}$$

Рассмотрим теперь распределение случайной величины R при условии, что $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$, т. е. для нормального кругового распределения.

Применяя правило определения частного распределения при известной плотности совместного распределения, имеем

$$f(r)=\int_0^{2\pi}f(r,\alpha)d\alpha=\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha,$$

или

$$f(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),\quad r\ge 0. \tag{10.44}$$

Получили плотность распределения Релея. Это распределение радиус-вектора, составляющие которого суть независимые нормально распределенные случайные величины с равными стандартными отклонениями.

10.5. Распределение неоднозначного преобразования случайных величин

Предположим, функция $Y=\psi(X)$ такова, что обратная ей функция $X=\psi(Y)$ неоднозначна, т. е. одному значению величины y соответствует несколько значений аргумента x (рис. 10. 2), которые обозначим $x_1=\psi_1(y)$; $x_2=\psi_2(y)$ и т. д. В данном случае функция будет немонотонная.

Событие $y<Y<y+dy$ будет иметь место при наступлении хотя бы одного из нескольких несовместных событий:

$$x_1<X<x_1+dx_1;\ x_2<X<x_2+dx_2;\ldots \tag{10.45}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем

$$P(y<Y<y+dy)=P(x_1<X<x_1+dx_1)+$$
$$+P(x_2<X<x_2+dx_2)+\ldots$$

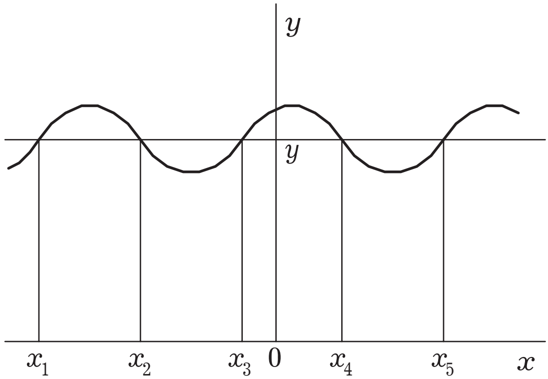


Рис. 10.2. График функции $y = \psi(x)$

или

$$f(y)dy = f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2 \ldots$$

Из последнего равенства получаем искомую формулу для плотности распределения $f(y)$ неоднозначного преобразования случайной величины:

$$f(y) = f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right| + \ldots \tag{10.46}$$

Формулу (10.46) можно распространить и на многомерный случай [6, 13].

В качестве примера рассмотрим квадратичное преобразование случайной величины X:

$$Y = X^2.$$

Каждому значению y, которое всегда положительно, отвечают два значения x:

$$x_1 = \sqrt{y}, \quad x_2 = -\sqrt{y}.$$

Применяя формулу (10.46), получим

$$f(y) = f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

или

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})].$$

Пусть, например, случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$ и стандартным отклонением σ_x. После квадратичного преобразования плотность распределения будет иметь вид:

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right) + \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma_x}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right); \quad y > 0.$$

Следовательно, результат квадратичного преобразования нормально распределенной случайной величины имеет распределение, отличное от нормального.

10.6. Распределение функции двух случайных величин

Рассмотрим частный случай преобразования системы двух случайных величин, имеющий большое значение для практики, а именно функцию двух случайных аргументов

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Необходимо по известному распределению системы случайных величин $\{X, Y\}$ определить распределение функции Z.

Чтобы воспользоваться полученным в п. 10.5 правилом для решения этой задачи, применим следующий прием. Введем в рассмотрение случайную величину Z_1, равную X. Для общности рассуждений можно записать

$$Z_1 = \varphi_1(X, Y). \tag{10.47}$$

При таком подходе систему случайных величин $\{Z_1, Z_2\}$ можно рассматривать как результат функционального преобразования системы $\{X, Y\}$:

$$Z = \varphi(X, Y);$$
$$Z_1 = \varphi_1(X, Y). \qquad (10.48)$$

Предположим, что соответствующие обратные функции $X = \psi_1(Z_1)$; $Y = \psi_2(Z, X)$ однозначны. К этому случаю применим полученное выше правило определения плотности распределения функционального однозначного преобразования.

Вычислим якобиан преобразования (10.48):

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z_1} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z_1} \end{vmatrix} = -\frac{\partial y}{\partial z}. \qquad (10.49)$$

Применяя формулу (10.35), получим

$$f(z, z_1) = f(x, y)\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|. \qquad (10.50)$$

Теперь, используя правило определения частного распределения, найдем решение поставленной задачи:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, z_1)dz_1$$

или

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|dx, \qquad (10.51)$$

так как $dz_1 = dx$.

Из формулы (10.51) как частные случаи получаются формулы для определения плотности распределения суммы, разности, произведения и частного от деления двух случайных величин. Ограничимся рассмотрением наиболее важного для практики случая определения плотности распределения суммы двух случайных величин.

Предположим $Z = X + Y$. Тогда $Z = X - Y$, $\frac{dy}{dz} = 1$ и

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx. \qquad (10.52)$$

Если случайные величины независимы, то

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z - x) dx. \qquad (10.53)$$

Формула (10.53) носит наименование формулы композиции, или формулы свертки двух распределений. Эту формулу можно записать и в другом виде:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z - y) f_y(y) dy.$$

Аналогично могут быть получены формулы для определения плотности распределения разности, произведения и частного от деления двух случайных величин.

10.7. Композиция распределений

10.7.1. Композиция нормального и равномерного распределений

Композицией распределений называют распределение суммы независимых случайных величин [1, 7, 13]. В практике часто приходится рассматривать сумму двух случайных величин, одна из которых распределена по нормальному, а другая по равномерному закону.

Предположим, что случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Случайная величина Y распределена по равномерному закону в интервале от a до b:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & \text{если } a \le y \le b; \\ 0, & \text{если } a < y < b. \end{cases}$$

Случайные величины X и Y независимы. Необходимо определить плотность распределения случайной величины Z, являющейся суммой этих величин:

$$Z = X + Y.$$

Применяя формулу (10.53) для композиции двух распределений, получим

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(z-y-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \frac{1}{b-a} dy.$$

Учитывая то, что плотность распределения $f(y)$ равна нулю в пределах от $-\infty$ до a и от b до $+\infty$, плотность распределения $f(z)$ примет вид:

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{[y-(z-m_x)]^2}{2\sigma_x^2}\right] dy. \qquad (10.54)$$

Формально подынтегральная функция есть нормальная плотность распределения с математическим ожиданием $z - m_x$ и стандартным отклонением σ_x, а интеграл представляет собой вероятность попадания случайной величины Z на интервал (a, b). Используя, например, табличную функцию Лапласа, выражение для этой вероятности запишем в виде

$$P(a \le y < b) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{\text{т}}\left\{\frac{b-(z-m_x)}{\sigma_x}\right\} - \Phi_{\text{т}}\left\{\frac{a-(z-m_x)}{\sigma_x}\right\}\right].$$

Тогда плотность распределения $f(z)$ примет вид:

$$f(z) = \frac{1}{2(b-a)}\left[\Phi_{\text{т}}\left\{\frac{b-(z-m_x)}{\sigma_x}\right\} - \Phi_{\text{т}}\left\{\frac{a-(z-m_x)}{\sigma_x}\right\}\right]. \qquad (10.55)$$

Для удобства проведения анализа плотности (10.55) рассмотрим частный случай: $m_x = m_y = 0$; $b - a = 2l$, т. е. $a = -l$ и $b = +l$. Тогда формула (10.55) примет вид

$$f(z) = \frac{1}{4l}\left[\Phi_{\text{т}}\left\{\frac{z+l}{\sigma_x}\right\} - \Phi_{\text{т}}\left\{\frac{z-l}{\sigma_x}\right\}\right].$$

Если обозначить $z_0 = \dfrac{z}{\sigma_x}$ и $l_0 = \dfrac{l}{\sigma_x}$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{4l_0}[\Phi_{\text{т}}(z_0 + l_0) - \Phi_{\text{т}}(z_0 - l_0)]. \qquad (10.56)$$

При фиксированных значениях l_0 с использованием таблицы функции Лапласа можно построить графики плотности $f(z_0)$. При $l_0 = 0, 1, 2, 3$ такие графики приведены на рис. 10.3.

Из графиков видно, что чем больше l_0, тем сильнее плотность композиции нормального и равномерного распределений отличается от нормального. Для наглядности на рис. 10.3 штриховой линией показана плотность нормального распределения (при $l_0 = 0$).

При сравнительно небольших l_0 кривые плотности $f(z_0)$ имеют вид кривых нормального распределения, при больших значениях l_0 кривые композиции становятся плосковершинными.

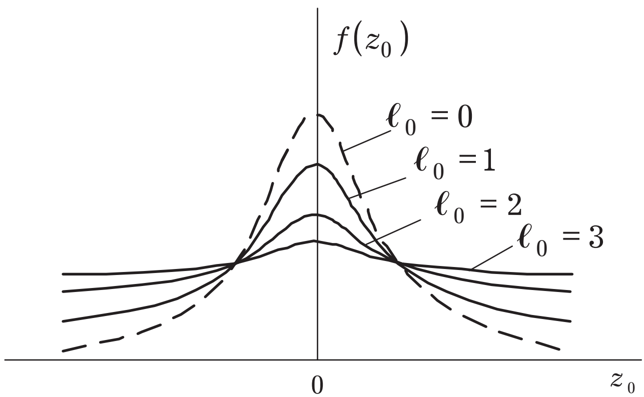


Рис. 10.3. Влияние величины l_0 на вид кривых нормального распределения

Поскольку $l_0 = \dfrac{l}{\sigma_x}$, а $\sigma_y = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$, то $l_0 = \sqrt{3}\,\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Отсюда видно, что вид плотности композиции нормального и равномерного распределений целиком и полностью определяется соотношением характеристик рассеивания этих распределений.

При решении практических задач композицию нормального и равномерного распределений приближенно заменяют нормальным распределением, оставляя неизменными параметры композиции

$$f(z) \approx \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}},$$

где

$$m_z = m_x + m_y; \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \frac{l^2}{3}}.$$

Однако следует заметить, что это справедливо только при небольших значениях l_0. Погрешность от такой замены возрастает с ростом $l_0 = \frac{l}{\sigma_x}$.

10.7.2. Композиция нормальных распределений

Часто при решении практических задач приходится находить композицию нормальных распределений (при исследовании точности стрельбы, точности приборов и т. п.).

Предположим, случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с плотностями

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$

и

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left\{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}.$$

Необходимо найти плотность распределения случайной величины

$$Z = X + Y.$$

Применяя общее выражение композиции двух распределений, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(z-x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]\right\} dx.$$

Если произвести преобразование в показателе степени подынтегрального выражения и замену переменной, то интеграл сводится к табличному. Окончательное выражение композиции двух нормальных распределений получается в виде

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\exp\left\{-\left[\frac{(z-m_z)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right]\right\} \tag{10.57}$$

где $m_z = m_x + m_y$.

Подробный вывод выражения плотности распределения $f\,(z)$ можно найти в [5].

Таким образом, при композиции двух нормальных распределений получается снова нормальное распределение с математическим ожиданием $m_z = m_x + m_y$ и стандартным отклонением $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2}$.

Правила композиции двух нормальных распределений могут быть обобщены на случай произвольного числа независимых нормально распределенных случайных величин.

Предположим, что случайная величина

$$Z=\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями $m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$ и средними квадратическими отклонениями $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, ..., \sigma_{x_n}$.

В этом случае Z также будет иметь нормальное распределение с математическим ожиданием

$$m_z=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$$

и средним квадратическим отклонением

$$\sigma_z=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2}.$$

Если величины X_i распределены по нормальному закону, но зависимы, то можно показать, что их сумма будет распределена также нормально с математическим ожиданием

$$m_z=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$$

и стандартным отклонением

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j} r_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X имеет функцию вероятности

x_i	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,3	0,4

Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = 2^X$.

2. Случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = 2 - 3X$. Определить:

а) математическое ожидание и дисперсию величины Y;

б) момент связи и коэффициент корреляции случайных величин X и Y, если $m_x = -1$, $D_x = 4$.

3. Производится параллельное соединение двух резисторов номинальным сопротивлением 900 Ом. Максимальное отклонение сопротивления резистора от номинала 1%. Определить номинальное сопротивление такого соединения и его среднее квадратическое отклонение.

4. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $U = 3X - 2Y + 4Z - 5$, если

$m_x = 4$; $m_y = 2$; $m_z = 1$;
$D_x = 4$; $D_y = 1$; $D_z = 9$;
$r_{xy} = 0{,}5$; $r_{xz} = 1$; $r_{yz} = 0{,}5$.

5. Определить характеристики силы тока в цепи, если напряжение и сопротивление независимые случайные величины с характеристиками:

$m_u = 220$ В; $\sigma_u = 5$ В; $m_r = 100$ Ом; $\sigma_r = 3$ Ом.

6. Определить характеристики мощности $W = I^2R$, выделяемой на резисторе, подключенном к источнику тока, если ток

и сопротивление независимые случайны величины с характеристиками:

$m_i = 5$ А; $m_r = 1000$ Ом; $\sigma_i = 0{,}1$ А; $\sigma_r = 10$ Ом.

7. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$Z = \frac{XY^2}{2},$$

если $m_x = 10$; $m_y = 5$; $\sigma_x = 0{,}01$ $\sigma_y = 0{,}01$; $r_{xy} = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией случайных аргументов? Приведите примеры функций случайных аргументов.
2. Какие задачи решаются с использованием аппарата функций случайных аргументов?
3. Почему математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной?
4. Докажите, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.
5. Почему дисперсия постоянной величины равна нулю?
6. Чему равна дисперсия суммы случайной и постоянной величин?
7. Какую случайную величину называют центрированно-нормированной? Определите ее параметры.
8. Опишите постановку задачи определения числовых характеристик функций случайных аргументов.
9. Чему равны математическое ожидание и дисперсия линейной функции случайных аргументов?
10. В чем состоит сущность метода линеаризации при определении числовых характеристик функции случайных аргументов?
11. В чем заключается основное отличие неоднозначного преобразования случайных величин от однозначного?
12. Как изменяется закон распределения случайной величины при ее нелинейном преобразовании?

13. С какой целью вводится в рассмотрение случайная величина Z_1?

14. Чему равен якобиан преобразования?

15. Поясните формулу свертки или композиции двух распределений.

16. Что называется композицией распределений?

17. Чем определяется вид плотности распределения композиции нормального и равномерного распределения?

18. Какое распределение и с какими параметрами получается при композиции нормальных распределений?

11. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОДУКЦИИ

11.1. Общая характеристика статистических методов оценивания характеристик продукции и результатов ее применения

Качество образцов продукции зависит от большого числа случайных факторов. При оценивании качества продукции случайные факторы учитывают с помощью их вероятностных характеристик (закона распределения либо числовых характеристик). Например, в качестве характеристик надежности принимают математическое ожидание времени (среднее время) безотказной работы, вероятность безотказной работы в течение времени T и др.

Вероятностные характеристики случайных факторов можно находить теоретическим путем с помощью математического аппарата теории вероятностей. Для применения этого аппарата необходимо знать зависимости, связывающие случайные переменные, вероятностные характеристики которых необходимо найти, с переменными, вероятностные характеристики которых известны. Например, система состоит из n блоков (рис. 11.1). Известны средние времена безотказной работы каждого блока $m_{t_1}, m_{t_2}, \ldots, m_{t_n}$. Требуется определить среднее время безотказной работы системы.

В предположении, что переключающие устройства срабатывают мгновенно и безотказно, время безотказной работы системы будет равно

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n, \tag{11.1}$$

где T_i — время безотказной работы i-го блока.

Используя метод определения числовых характеристик функции случайных аргументов, можно найти среднее время безотказной работы системы

$$m_t = m_{t_1} + m_{t_2} + \ldots + m_{t_n}.$$

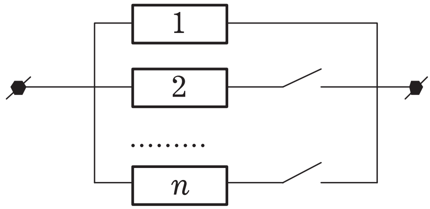


Рис. 11.1

Не вызывает существенных затруднений решение задачи по определению закона распределения времени безотказной работы системы по известным законам распределения времени безотказной работы блоков и зависимости (11.1).

Однако в некоторых случаях установить зависимость между случайными переменными либо вообще не удается, либо она оказывается настолько сложной, что применение аппарата теории вероятностей для решения подобных задач является затруднительным. Нельзя, например, чисто теоретическим путем установить продолжительность безотказной работы транзистора, микросхемы того или иного типа.

В этих случаях вероятностные характеристики находят экспериментальным путем, суть которого состоит в следующем. Многократно проводятся наблюдения исследуемого явления. Затем результаты наблюдений обрабатывают специальными математическими методами, которые позволяют приближенно определять искомые характеристики. Разработка таких методов составляет предмет математической статистики.

Математическая статистика — это прикладная наука, занимающаяся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений (испытаний) с целью изучения закономерностей массовых случайных явлений.

Наблюдения, осуществляемые в процессе эксперимента, могут заключаться в измерении какого-либо параметра исследуемого объекта либо в регистрации у него того или иного признака. В общем случае измеряемых параметров или регистрируемых признаков может быть несколько.

Эксперименты могут проводиться с реальным объектом либо с его моделью, адекватно описывающей процесс функционирования этого объекта.

Задачей проведения многих наблюдений является принятие решения относительно значений некоторых параметров (величин), характеризующих изучаемое явление или процесс. Если в процессе наблюдения непосредственно измеряется интересующий нас параметр, то говорят, что имеют место прямые измерения. Иногда интересующий нас параметр непосредственно измерить нельзя. В этом случае измеряется другая величина, с которой функционально связан интересующий нас параметр. Такие измерения называются косвенными.

После проведения наблюдений производят обработку их результатов. Смысл обработки результатов наблюдений заключается в получении сведений о свойствах изучаемого объекта. В наиболее общем виде можно говорить, что принимается определенное решение относительно этих свойств. Это решение может быть связано, например, с оцениванием конкретных значений характеристик (параметров), описывающих свойства объекта, проверкой предположений о нахождении этих характеристик в некоторых пределах, предположений о законах распределения наблюдаемых переменных и т. д.

Методы математической статистики используются при решении достаточно широкого круга задач. К числу таких наиболее часто встречающихся задач относятся [1, 12, 13]:

• определение по результатам одинаковых независимых экспериментов частоты наступления случайного события и оценка на этой основе его вероятности;

• оценивание по результатам одинаковых независимых экспериментов законов распределения и основных числовых характеристик случайных величин (математического ожидания, дисперсии, стандартного отклонения). Иногда оценивают и другие моменты распределения случайной величины. При наблюдении за системой двух случайных величин одновременно оценивают ковариацию (момент связи между ними) или коэффициент корреляции;

- определение неизвестных значений постоянных величин, неизвестных значений коэффициентов функций неслучайных аргументов при заданном виде этих функций;
- статистическая проверка гипотез о законах распределения или числовых характеристиках случайных величин;
- оценка влияния множества факторов на конечный результат и выбор наиболее важных факторов, а также исследование внутренней структуры результатов наблюдений (проверка однородности результатов и независимости испытаний).

11.2. Общая схема эксперимента

Рассмотрим общую схему эксперимента, в рамках которой можно описать методы решения перечисленных выше задач математической статистики [5].

Объект, на котором проводятся испытания, принято называть объектом экспериментального исследования (ОЭИ). Это может быть реальный объект, лабораторная установка, модель реального экономического объекта и т. п. Эксперимент заключается в наблюдении исследуемого явления в конкретных условиях. Учесть все условия при проведении эксперимента практически невозможно. Поэтому исследователь выбирает основные наиболее существенные факторы, определяющие исход эксперимента. Здесь под фактором будем понимать переменную, значения которой исследователь с той или иной степенью точности может контролировать в ходе эксперимента.

В качестве входных переменных на вход ОЭИ действует k контролируемых переменных (факторов) $x_1, x_2, ..., x_k$ (рис. 11.2). Исследователь имеет возможность проводить эксперименты при определенных фиксированных значениях входных переменных. Совокупность значений переменных, при которых проводятся испытания, составляет комплекс условий эксперимента.

На выходе ОЭИ в каждом испытании при фиксированных значениях входных переменных измеряется значение выходной переменной Y. В общем случае выходных переменных может быть несколько: $Y_1, Y_2, ..., Y_l$.

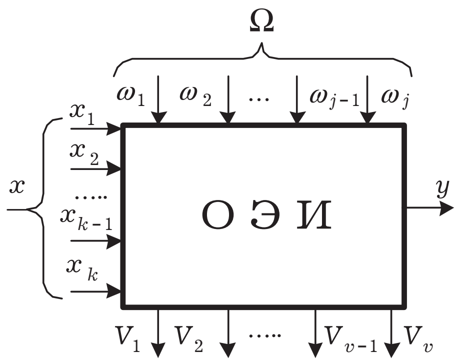


Рис. 11.2

Если значения переменной Y в каждом эксперименте при реализации одного и того же комплекса условий (при одних и тех же значениях $x_1, x_2, ..., x_k$) не меняются, то говорят, что эксперимент обладает идеальной воспроизводимостью. В этом случае в качестве математической модели эксперимента используют различные функциональные зависимости:

$$Y = \eta(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Кроме входных переменных, на ОЭИ воздействует группа неконтролируемых факторов (вектор помех Ω), действие которых носит случайный характер. К неконтролируемым факторам относятся факторы, которые невозможно учесть и проконтролировать в ходе эксперимента (ошибки установки значений входных переменных, ошибки измерения выходной переменной и т. п.). В силу этого выходная переменная Y в каждом эксперименте при реализации одного и того же комплекса условий будет принимать различные значения, т. е. будет носить случайный характер. Модель эксперимента в данном случае будет иметь вид:

$$Y = \eta(x_1, x_2, ..., x_k) + \varepsilon(x_1, x_2, ..., x_k)$$

где $\eta(x_1, x_2, ..., x_k)$ — регулярная составляющая, которую в статистике называют функцией отклика;

$\varepsilon(x_1, x_2, ..., x_k)$ — случайная ошибка результата наблюдения (эксперимента).

В общем случае распределение ошибки эксперимента зависит от комплекса условий. Считают, что ошибка эксперимента распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю ($M[\varepsilon(x_1, x_2, ..., x_k)] = 0$ Поэтому $M[Y] = \eta(x_1, x_2, ..., x_k)$

Зависимость математического ожидания выходной переменной Y от входных переменных $(x_1, x_2, ..., x_k)$ называется уравнением регрессии.

На выходе ОЭИ наряду с основной выходной переменной Y часто приходится контролировать группу неосновных выходных переменных $V_1, V_2, ..., V_k$. На неосновные выходные переменные обычно налагаются ограничения.

K-мерное пространство, координатами которого являются контролируемые переменные, называется факторным пространством. Система ограничений на неосновные выходные переменные выделяет в факторном пространстве область эксперимента G.

Различают активные и пассивные эксперименты. Эксперимент будет активным, если имеется возможность не только контролировать входные переменные, но и управлять ими. В пассивном эксперименте исследователь не имеет возможности устанавливать значения входных переменных по своему усмотрению, т. е. управлять входными переменными.

11.3. Сущность выборочного метода

Особенностью методов математической статистики является то, что выводы и заключения, полученные на основе этих методов, относятся не к отдельным испытаниям, которые были произведены, а представляют собой утверждения о вероятностных характеристиках исследуемого явления в целом [1, 12, 13]. Поэтому результат наблюдения в отдельном испытании следует рассматривать как один из возможных исходов, которые могли бы иметь место при многократном проведении испытания в одних и тех же условиях.

Совокупность всех мыслимых результатов наблюдений, которые могут быть получены в данных условиях, называют *генеральной совокупностью*. Различают конечные и бесконечные генеральные совокупности. Генеральная совокупность конечна, если содержит конечное число элементов. Бесконечная генеральная совокупность содержит бесконечное число элементов.

Например, производится сплошной контроль качества партии готовой продукции, содержащей N изделий. Испытание здесь заключается в извлечении одного изделия из партии и проверке его годности. Множество всех изделий образует генеральную совокупность, поскольку исход испытания состоит в появлении любого из N изделий (годного либо дефектного). В данном примере генеральная совокупность — конечная.

Если же предметом исследования является технологический процесс изготовления данного вида продукции, то генеральной совокупностью следует считать воображаемое бесконечное число изделий, которые могут быть изготовлены при данной технологии производства. Совокупность всех возможных отклонений точки падения снаряда от точки прицеливания при фиксированных условиях стрельбы также является примером бесконечной генеральной совокупности.

Задача обследования партии готовой продукции может состоять в оценке доли бракованных изделий или, что то же самое, в оценке вероятности извлечения бракованного изделия. Она может быть решена следующим образом. Провести обследование каждого изделия в партии и подсчитать число бракованных. Затем, используя классический способ определения вероятности, находят вероятность извлечения бракованного изделия (долю бракованных изделий в партии).

При сплошном контроле не возникает каких-либо трудностей при формировании статистического вывода.

На практике не всегда имеется возможность провести обследование всех элементов генеральной совокупности. Это обусловлено тем, что число элементов генеральной совокупности достаточно велико, чтобы провести сплошной контроль, либо для регистрации наличия признака приходится разрушать обследуемый элемент.

В этих условиях прибегают к выборочному обследованию элементов генеральной совокупности. При этом методе обследуются не все элементы генеральной совокупности, а только некоторая часть из них. Выводы и рекомендации, сформулированные по результатам выборочного обследования, распространяются на всю генеральную совокупность [1, 15].

Выборкой из генеральной совокупности называют совокупность результатов, полученных при непосредственном проведении испытаний. Число n элементов (результатов проведенных испытаний) является конечным и называется объемом выборки.

Если элементы выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, то выборку называют *однородной*.

В математической статистике предполагают, что выборки формируются при многократной реализации случайного эксперимента, результат которого точно предсказать невозможно. Поэтому такие выборки называют случайными.

Например, исследуется качество партии готовой продукции. С этой целью из партии случайным образом отбирают n изделий и определяют годность каждого из них. Так как в партии содержатся как годные, так и дефектные изделия, то результат обследования каждого изделия в выборке до проведения испытания следует рассматривать как случайную величину, которая принимает одно из двух возможных значений: ноль или единицу:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{если изделие годное;} \\ 1, & \text{если изделие дефектное.} \end{cases}$$

Таким образом, до проведения испытания результаты наблюдений представляют собой систему дискретных случайных величин:

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n\}.$$

После проведения испытания каждая из случайных величин X_i, $i = \overline{1,n}$ примет одно из двух возможных значений.

Предположим, что измеряемый в процессе испытания параметр является случайным, например, при контроле качества партии готовой продукции измеряется линейный размер детали. Результат измерения каждой из n деталей естественно считать случайной величиной, поскольку до проведения измерения нельзя предсказать численное значение размера детали, т. е. результаты измерений представляют собой систему непрерывных случайных величин:

$$\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n\}.$$

После проведения измерений каждая из случайных величин Y_i примет одно из своих возможных значений и будет получена совокупность n значений:

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n\}.$$

Результат каждого из n измерений постоянного параметра следует рассматривать как случайную переменную ввиду того, что измерения в реальных условиях сопровождаются ошибками. Ошибки измерений подразделяют на систематические и случайные [14].

Систематические ошибки — это составляющие общей ошибки измерений, обусловленные факторами, которые действуют одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. При повторных измерениях эти ошибки остаются неизменными, а если изменяются, то закономерно. Систематические ошибки, как правило, обусловлены погрешностями измерительных приборов (инструментальные ошибки) и несовершенством методов измерений (методические ошибки). Эти ошибки можно выявить и исключить из результатов измерений.

Случайные ошибки — составляющие общей ошибки, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Причиной случайных ошибок являются неконтролируемые факторы, проявление которых неодинаково в каждом измерении и которые заранее не могут быть учтены. Случайные ошибки являются принципиально не выявляемыми и, следовательно, неустранимыми.

Среди случайных ошибок особо следует выделить грубые ошибки. Причиной этих ошибок является неисправность приборов или неточности в действиях наблюдателя, связанные с неправильным чтением показаний измерительного прибора, с ошибками в записи результата измерения и т. д.

В дальнейшем при рассмотрении методов обработки результатов измерений будем считать, что при измерениях имеют место только случайные ошибки.

В статистике различают возвратные и безвозвратные выборки. Выборку называют *возвратной*, если извлеченный элемент после обследования перед извлечением следующего элемента снова возвращается в генеральную совокупность, *безвозвратной* — если отобранный элемент после обследования не возвращается в генеральную совокупность.

Если выбираемые элементы извлекаются из всей генеральной совокупности по одному, то полученная выборка называется *простой*. В дальнейшем будем рассматривать только простые случайные выборки и называть их просто выборками.

С позиций теории вероятностей элементы случайной выборки рассматриваются как независимые случайные величины с одним и тем же законом распределения. Это означает, что для плотности вероятности результатов испытаний справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

По результатам выборочного обследования можно достаточно уверенно судить о свойствах генеральной совокупности только тогда, когда выборка является представительной (репрезентативной). Выборка — *представительная*, если она достаточно полно отражает свойства генеральной совокупности. Чтобы выборка была представительной, она должна удовлетворять следующим требованиям [1, 13, 15]:

- элементы генеральной совокупности должны отбираться случайным образом;

• результаты испытаний в выборке должны быть независимыми;

• должен быть правильно определен объем выборки.

Выборки используются для решения вышеперечисленных задач математической статистики. При этом элементы выборки используются, как правило, для образования новых случайных величин вида $S_i = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, называемых *статистиками.*

Примерами статистик являются:

• выборочная сумма

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

• выборочное среднее

$$S_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

и т. д.

Все свойства (характеристики) генеральной совокупности, полученные по данным выборки, называют выборочными, или статистическими (в отличие от теоретических характеристик, изучаемых в теории вероятностей). Статистические характеристики в дальнейшем будем помечать индексом (звездочкой). Например,

$F^*(x)$ — статистическая функция распределения случайной величины X

m_x^* — статистическое математическое ожидание;

σ_x^* — статистическое стандартное отклонение и т. д.

Все выборочные характеристики являются функциями элементов выборки, т. е. статистиками.

В зависимости от объема выборки подразделяют на большие и малые. Существует несколько подходов к определению понятий большой и малой выборок. Так, например, в [15] используется следующий подход. Иногда при обработке результатов испытаний прибегают к группировке элементов выборки. При группировании количество информации, извлекаемой из выборки, обычно уменьшается. Это может привести к ухудшению качества (точности и достоверности) полученных результатов. Поэтому малой можно считать выборку, если при обработке ее методами, основанными на группировании элементов выборки, нельзя достичь заданного качества результатов. Наоборот, выборка является большой, если допускает группирование элементов без заметной потери количества информации.

При практических расчетах считают, что выборка имеет малый объем, если она содержит менее 50 элементов (иногда количество элементов ограничивают 15) [14].

Теоретической основой правомерности распространения статистических выводов, полученных по результатам ограниченного числа испытаний, на всю генеральную совокупность является закон больших чисел.

11.4. Понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме

Под законом больших чисел в теории вероятностей понимается ряд теорем, в которых доказывается сходимость по вероятности средних значений результатов большого числа наблюдений к некоторым постоянным величинам [5]. Смысл термина «сходимость по вероятности» состоит в следующем. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сходится по вероятности к постоянной C, если вероятность того, что значения X_n будут сколь угодно близки к C, неограниченно приближается к единице при $n \to \infty$. Математически сходимость по вероятности записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} P(|x_n - c| \le \varepsilon) = 1,$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Доказательство теорем дается в большинстве учебников по теории вероятностей и математической статистике. Поэтому ниже излагаются только их содержание и сущность.

Неравенство Чебышева

Для любой случайной величины X, имеющей конечное математическое ожидание и дисперсию, при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_x}{\varepsilon}. \tag{11.2}$$

Для противоположного события неравенство Чебышева примет вид

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon}. \tag{11.3}$$

Приведенные неравенства можно использовать для вычисления оценок вероятностей отклонения наблюдаемой случайной величины от своего математического ожидания, если ее закон распределения неизвестен.

Пример 11.1. Найти вероятность того, что случайная величина X, имеющая произвольный закон распределения, отклоняется от своего математического ожидания на величину, не выходящую за пределы $\pm 3\sigma_x$.

Решение

По формуле (11.3) получим

$$P(|X - m_x| < 3\sigma_x) \geq 1 - \frac{D_x}{9\sigma_x^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Известно, что для нормального закона распределения существует «правило трех сигм». Согласно этому правилу вероятность попадания случайной величины в интервал $(m_x - 3\sigma_x,\ m_x + 3\sigma_x)$ равна 0,997. Аналогичное правило существует и для случайных величин, распределение которых отлично от нормального. При этом вероятность данного события будет не ниже 8/9.

Теорема Чебышева

Предположим, производится n независимых измерений случайной величины X, имеющей конечную дисперсию D_x. Измерения равноточные и свободны от систематических ошибок. В этих условиях при неограниченном увеличении n среднее арифметическое результатов измерений x_i случайной величины X сходится по вероятности к математическому ожиданию этой случайной величины:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (11.4)$$

Из равенства (11.4) следует, что при достаточно больших n существенные отклонения по абсолютной величине среднего арифметического результатов измерений от математического ожидания маловероятны. Данное утверждение является основанием того, что в качестве неизвестного значения математического ожидания m_x может быть принято среднее арифметическое результатов большого числа измерений случайной величины X.

Следует отметить, что теорема Чебышева справедлива и для среднего арифметического различных функций от результатов наблюдений скалярной случайной величины $\varphi(x_i)$, $i = \overline{1, n}$ или системы случайных величин $\psi(X_i, Y_i, Z_i \ldots)$, $i = \overline{1, n}$. При этом должно выполняться условие: аргументы X_i или одноименные элементы систем аргументов $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ имеют один и тот же закон распределения, включая и параметры.

Например, $\varphi(x_i) = (X_i - m_x)^2$. С учетом того, что

$$M[\varphi(x_i)] = M[(X_i - m_x)^2],$$

в соответствии с равенством (11.4), можем записать:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 - D_x\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (11.5)$$

Предположим, что функция от результатов наблюдений системы двух случайных величин имеет вид

$$\psi(X_i, Y_i) = (X_i - m_x)\,(Y_i - m_y).$$

Математическое ожидание этой функции — момент связи результатов наблюдений двух случайных величин X и Y

$$M = [(X_i - m_x)\,(Y_i - m_y)] = K_{xy}.$$

Поэтому, в соответствии с равенством (11.4), можем записать:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)(y_i - m_y) - K_{xy}\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (11.6)$$

Из равенств (11.5) и (11.6) следует, что при достаточно большом n в качестве неизвестных значений дисперсии D_x случайной величины X момента связи K_{xy} двух случайных величин X и Y могут быть приняты средние арифметические вида

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 \text{ и } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)$$

соответственно.

Теорема Бернулли

Данная теорема доказывает устойчивость частоты случайного события, что позволяет применять на практике статистический способ определения вероятности наступления события.

При неограниченном увеличении числа независимых испытаний n в одних и тех же условиях частота $P^*(A)$ наступления случайного события A сходится по вероятности к его вероятности P, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_i}{n} - P\right| < \varepsilon\right) = 1, \tag{11.7}$$

где n_i — число наступлений события в n испытаниях;

ε — сколь угодно малая положительная величина.

В соответствии с теоремой Бернулли при большом числе испытаний частоту наступления случайного события можно принять в качестве его вероятности.

Если вероятность наступления случайного события в каждом испытании различна и равна P_j, $j = \overline{1, n}$, справедлива теорема Пуассона:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_i}{n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P_j\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

т. е. частота события сходится по вероятности к среднему арифметическому значению вероятностей события в каждом испытании.

Центральная предельная теорема Ляпунова

Одной из задач при применении методов обработки результатов испытаний является выявление условий, определяющих справедливость априорных предположений о виде закона распределения исследуемой случайной величины.

Часто при обработке результатов испытаний принимается предположение о нормальном законе распределения исследуемой случайной величины. Однако не всегда можно применить нормальный закон распределения. Поэтому необходимо определить условия, когда можно выдвигать предположение о нормальном распределении и в каких случаях от него следует отказаться. Условия, при которых возникает нормальный закон распределения, определяют предельные теоремы теории вероятностей. Одной из основных среди этих теорем является центральная предельная теорема Ляпунова [5]. Сущность данной теоремы сводится к следующему.

Закон распределения суммы независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых приближается к нормальному, если случайные величины, входящие в сумму, имеют дисперсии примерно одного и того же порядка и конечные математические ожидания. Требования равенства дисперсий означает, что влияние каждого слагаемого на сумму одинаково.

Таким образом, если

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

и случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ удовлетворяют указанным требованиям, то при достаточно большом n

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

где

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \text{ и } \sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2}.$$

На практике теорему Ляпунова применяют и в случае, когда n сравнительно невелико. При $n \geq 8$ эту теорему можно применять при суммировании непрерывных случайных величин, имеющих одинаковые симметричные законы распределения с одинаковыми числовыми характеристиками. Если же суммируются случайные величины с различными несимметричными законами и различными числовыми характеристиками, то теоремой Ляпунова можно пользоваться только при числе слагаемых порядка сотни [5,15].

Вопросы для самопроверки

1. Что вынуждает отказаться от методов теории вероятностей и перейти к методам математической статистики?
2. Какие задачи решаются методами математической статистики?
3. Что составляет комплекс условий эксперимента?
4. Какие требования предъявляются к ошибке эксперимента?
5. Какое уравнение называют уравнением регрессии?
6. Что называется факторным пространством?
7. В чем отличие активного эксперимента от пассивного?
8. В чем заключается особенность методов математической статистики?
9. Что называется генеральной совокупностью? Какие они бывают?
10. Что называется выборкой из генеральной совокупности? Какие требования к ней предъявляются и чем они обеспечиваются?
11. Что понимается под законом больших чисел?
12. В чем заключается смысл термина «сходимость по вероятности»?
13. Что доказывает неравенство Чебышева?
14. Что доказывают теорема Чебышева и теорема Бернулли?
15. В чем суть центральной предельной теоремы Ляпунова?

12. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

12.1. Постановка задачи оценивания вероятностных характеристик случайных величин

Предположим, цель эксперимента состоит в определении вероятностных характеристик некоторой случайной величины X. При n независимых наблюдениях этой случайной величины получена случайная выборка $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Требуется по результатам ограниченного числа наблюдений $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ выработать суждение о вероятностных характеристиках этой случайной величины.

Известно, что исчерпывающей вероятностной характеристикой случайной величины является закон ее распределения. Поэтому одной из задач обработки результатов испытаний является построение закона распределения случайной величины (статистической функции или статистической плотности распределения) по экспериментальным данным.

Часто для описания случайной величины достаточно знания ее числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии, стандартного отклонения, других моментов). В этом случае возникает необходимость в определении по результатам испытаний значений этих характеристик.

Поскольку объем выборки ограничен, то методы математической статистики позволяют находить лишь приближенные значения указанных характеристик, т. е. их оценки.

При оценивании параметров в математической статистике используют два подхода: точечное и интервальное оценивание. При *точечном оценивании* по результатам испытаний находят число (точку на числовой оси), которое принимают в качестве приближенного значения оцениваемого параметра. Полученное число называют оценкой параметра. В дальнейшем оценку параметра Θ будем обозначать Θ^* и использовать символическую запись $\Theta^* \to \Theta$ (Θ^* является точечной оценкой параметра Θ). В частности, параметром Θ может быть математическое ожидание m_x, дисперсия D_x, стандартное отклонение σ_x, вероятность P наступления случайного события и другие параметры случайной величины.

Оценка параметра Θ является функцией результатов испытаний, т. е. статистикой:

$$\Theta^* = s(X_1, X_2, ..., X_n). \tag{12.1}$$

Следовательно, *оценка Θ^* является случайной величиной с присущим ей законом распределения и числовыми характеристиками*. Знание вероятностных характеристик позволяет выявить статистические свойства оценок, устанавливать их точность и на этой основе выбирать наилучшие оценки.

При *интервальном оценивании* определяют интервал, который с заданной вероятностью накрывает истинное значение оцениваемого параметра. Границы интервала являются функциями результатов испытаний. Поэтому в общем случае границы интервала, а следовательно, и сам интервал, будут случайными:

$$s'(X_1, X_2, ..., X_n) \le \Theta \le s''(X_1, X_2, ..., X_n), \tag{12.2}$$

где $s'(X_1, X_2, ..., X_n)$, $s''(X_1, X_2, ..., X_n)$ — статистики, отличные от статистики (12.1) и в каждом конкретном случае определяемые соответствующими соотношениями.

В математической статистике рассматриваемый интервал принято называть *доверительным интервалом*, а вероятность, с которой он накрывает истинное значение параметра, — *доверительной вероятностью*.

Основное назначение доверительных оценок — характеризовать качество точечных оценок, определяемое их точностью и надежностью (достоверностью).

12.2. Основные требования к оценкам

Вид оценки каждой числовой характеристики выбирают один раз применительно к исследованию любой случайной величины. Эту выбранную оценку используют во всех случаях нахождения неизвестных значений данной числовой характеристики. Поэтому оценки выбирают так, чтобы при их массовом применении обеспечивалась наибольшая точность определения числовых характеристик. Чтобы оценки имели такое свойство, к ним предъявляют соответствующие требования [1, 10, 14, 15].

1. Оценка Θ_x^* параметра Θ_x должна быть *несмещенной*, т. е. математическое ожидание оценки должно быть равно истинному значению искомого параметра:

$$M[\Theta_x^*(X_1, X_2, ..., X_n)] = \Theta_x. \tag{12.3}$$

Достоинством несмещенной оценки является то, что получаемые с ее помощью значения искомого параметра группируются около действительного значения этого параметра и при массовом применении такой оценки в среднем будут равны этому значению. Применение несмещенных оценок обеспечивает отсутствие систематических ошибок определения неизвестных значений характеристик.

Если $M[\Theta_x^*] > \Theta_x$, то оценку Θ_x^* называют положительно смещенной, если $M[\Theta_x^*] < \Theta_x$, — отрицательно смещенной.

На практике иногда используют оценки, которые при малом объеме выборки n являются смещенными, но при увеличении n величина смещения стремится к нулю. Такие оценки называют *асимптотически несмещенными*. Оценка — асимптотически несмещенная, если выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} M[\Theta_x^*] = \Theta_x.$$

2. Оценка должна иметь минимальную дисперсию. Для одного и того же параметра можно подобрать не одну, а несколько несмещенных оценок. На рис. 12.1 показаны плотности вероятности трех несмещенных оценок параметра Θ_x, полученные при одном и том же объеме выборки n.

Как следует из рисунка, оценки $\Theta_{x_1}^*, \Theta_{x_2}^*, \Theta_{x_3}^*$ имеют разные дисперсии. Поэтому значения параметра Θ_x, полученные с помощью этих оценок, будут иметь различное рассеивание относительно истинного значения этого па-

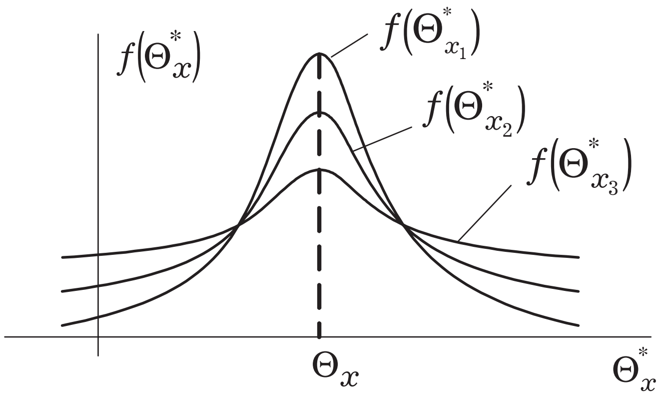


Рис. 12.1. Плотности распределений различных оценок

раметра. Очевидно, что наилучшей из оценок $\Theta^*_{x_1}, \Theta^*_{x_2}, \Theta^*_{x_3}$ является оценка с наименьшей дисперсией.

Отсюда вытекает, что одновременно с требованием несмещенности оценка должна удовлетворять еще одному требованию. Необходимо, чтобы при данном числе испытаний оценка имела минимальную дисперсию. *Несмещенная оценка, имеющая минимальную дисперсию, называется эффективной оценкой.*

Минимальная дисперсия несмещенной оценки Θ^*_x определяется выражением

$$\min_{\Theta_x} D[\Theta^*_x] = \frac{1}{nI(\Theta_x; x)},$$

где n— объем выборки из генеральной совокупности;

$I(\Theta_x; x)$ — количество информации о параметре Θ_x, содержащееся в одном наблюдении, так называемое информационное количество Фишера.

$$I(\Theta_x; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x, \Theta_x)}{\partial \Theta_x} \right)^2 f(x, \Theta_x) dx,$$

где $f(x, \Theta_x)$ — плотность распределения случайной величины X.

Выражение для минимальной дисперсии смещенной оценки записывается в виде [13, 14, 15]:

$$\min_{\Theta_x} D[\Theta_x^*] = \frac{\left(\dfrac{dM[\Theta_x^*]}{d\Theta_x}\right)^2}{nI(\Theta_x; x)}.$$

В качестве показателя эффективности оценки Θ_x^* параметра Θ_x используют меру эффективности e, равную отношению минимально возможной величины дисперсии оценки к дисперсии данной конкретной оценки ($0 \le e \le 1$):

$$e = \frac{\min\limits_{\Theta_x} D[\Theta_x^*]}{D[\Theta_x^*]}.$$

Асимптотической эффективностью e_a оценки $\Theta_x^* = s(X_1, X_2, ..., X_n)$, полученной по независимой выборке, называют предел

$$e_a = \lim_{n\to\infty} \frac{(dM[\Theta_x^*])^2}{nI(\Theta_x; x) \cdot D[\Theta_x^*]},$$

если он существует. Оценка Θ_x^* будет асимптотически эффективной, если $e_a(\Theta_x^*) = 1$.

3. Оценка должна быть *состоятельной*, т. е. сходиться по вероятности с увеличением числа испытаний к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Theta_x^* - \Theta_x|) < \varepsilon) = 1.$$

Состоятельная оценка должна быть асимптотически несмещенной, и с увеличением объема выборки дисперсия оценки должна уменьшаться. Поэтому в качестве состоятельности оценки можно принять одновременное выполнение двух равенств:

$$\lim_{n\to\infty} M[\Theta_x^*] = \Theta_x;$$
$$\lim_{n\to\infty} D[\Theta_x^*] = 0.$$

Таким образом, состоятельная оценка всегда асимптотически несмещенная и имеет минимальную дисперсию.

4. Желательно, чтобы оценка была *прочной* (робастной) или свободной (не зависящей от распределения).

Часто до проведения исследований закон распределения случайной величины X неизвестен. Поэтому не ясно, какую оценку принять для параметра Θ_x. Целесообразно в этом случае воспользоваться оценкой, эффективность которой при некоторых распределениях может быть меньше единицы, но вид ее не меняется с изменением закона распределения.

5. Размерность оценки должна совпадать с размерностью оцениваемого параметра.

На практике получить оценку, удовлетворяющую всем перечисленным требованиям, удается не всегда. Поэтому необходимо анализировать те последствия, к которым приводят отступления от того или иного требования.

Оценки, удовлетворяющие указанным требованиям, могут быть получены различными методами. Поскольку в дальнейшем будут использоваться уже полученные оценки параметров, то здесь эти методы не рассматриваются. Они достаточно полно изложены в литературе по математической статистике.

12.3. Оценивание законов распределения случайных величин

Как было отмечено в п. 11.1, одной из задач статистической обработки результатов испытаний является установление вида закона распределения случайной величины. На первом этапе решения этой задачи по результатам проведенных испытаний строят статистические функцию и плотность распределения. Анализ полученных графиков и природы исследуемой случайной величины обычно позволяет выдвинуть гипотезу о виде закона ее распределения. Затем по результатам испытаний проверяют справедливость выдвинутой гипотезы.

В данном пункте рассмотрим только первый этап решения указанной задачи.

Значения, принятые случайной величиной X при испытаниях, удобно представить в виде табл. 12.1, называемой *простой статистической совокупностью* [5].

Таблица 12.1

Простая статистическая совокупность

Номер испытания	1	2	…	i	…	n
Результат	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n

Если результаты наблюдений разместить в порядке возрастания, то получаемая при этом таблица называется *вариационным рядом* (табл. 12.2). Элементы вариационного ряда называются *порядковыми (ранговыми) статистиками*. Номер элемента вариационного ряда называется *рангом*.

Таблица 12.2

Вариационный ряд

Ранг элемента	1	2	…	r	…	n
Элемент ряда	x_1'	x_2'	…	x_r'	…	x_n'

$$x_1' \le x_2' \le \ldots \le x_r' \le \ldots \le x_n'.$$

В случае, когда исследуемая случайная величина дискретного типа или результаты измерений округляются, результаты нескольких наблюдений могут совпадать. Из этого следует, что различные результаты наблюдений могут появляться в выборке с различной частотой, определяемой по формуле

$$P_k^* = \frac{n_k}{n} = P^*(X = x_k),$$

где n_k — число появлений в выборке результата x_k, $k = \overline{1, K}$.

Вариационный ряд, представленный в форме табл. 12.3, принято называть статистическим рядом.

По известному статистическому ряду строят статистическую (выборочную) функцию распределения $F^*(x)$ (рис. 12.2). Ординаты функции $F^*(x)$ обычно определяют в точках, отвечающих полученным значениям результатов измерений x_k'', по формуле в которой суммирование распространяется на значения x_k'', меньшие x.

Таблица 12.3

Статистический ряд

x_k	x''_1	x''_2	...	x''_k	...	x''_K
n_k	n_1	n_2	...	n_k	...	n_K
P^*_k	P^*_1	P^*_2	...	P^*_k	...	P^*_K

$$F^*(x) = \sum_{x''_k < x} P^*(X = x''_k).$$

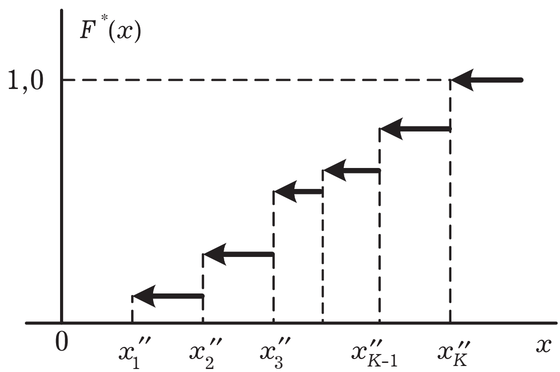


Рис. 12.2. Статистическая функция распределения

Статистическая функция распределения является кусочно-непрерывной. Точками разрыва функции являются полученные значения x_k, а величина разрыва в каждой точке численно равна частоте соответствующего результата в выборке. Если каждое из значений x_k в выборке получено 1 раз, то величина разрыва в каждой точке одинакова и равна $1/n$.

Основанием применимости статистической функции распределения $F^*(x)$ для оценивания истинной функции распределения $F(x)$ служит закон больших чисел, в частности, предельная теорема В. И. Гливенко. В соответствии с этой теоремой можно утверждать, что при увеличении объема выборки $F^*(x)$ сходится по вероятности к $F(x)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P[\max_x \left|F^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon] = 1.$$

Таким образом, статистическая функция распределения $F^*(x)$ является состоятельной оценкой функции распределения $F(x)$. Кроме того, она является несмещенной асимптотически эффективной оценкой [17]. Поэтому при достаточно большом n функцию распределения случайной величины можно приближенно заменять ее выборочной функцией распределения.

Однако при большом объеме выборки построение статистической функции распределения путем определения ее значений для каждого из полученных результатов FFF является трудоемким (статистический ряд становится громоздким). В этом случае результаты наблюдений подвергают предварительной обработке, суть которой заключается в следующем. Весь диапазон полученных результатов от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ разбивают на m интервалов. Затем определяют частоту попадания результатов измерений в каждый интервал по формуле

$$P_j^* = \frac{n_j}{n},$$

где n_j — число результатов измерений, попадающих в j-й интервал $j = \overline{1, m}$, включая его левую границу.

Число интервалов не должно быть слишком большим (в этом случае частоты подвергаются незакономерным колебаниям и статистический ряд становится невыразительным) или слишком малым (при этом описание случайной величины статистическим рядом становится грубым). Обычно выбирают 10–20 интервалов. Для ориентировочного определения числа интервалов можно пользоваться соотношениями $m \approx 5\lg(n)$ или $m \approx \sqrt{n}$ [15]. При этом желательно, чтобы выполнялось условие $n_j \geq 5$.

Длины интервалов можно брать как одинаковыми, так и различными. Если имеет место значительная неравномерность распределения случайной величины, длины интервалов целесообразно брать различными.

В областях наибольшей изменчивости распределения интервалы должны быть более короткими. В случае, когда интервалы различные, обработка экспериментальных данных несколько усложняется.

Итогом предварительной обработки результатов наблюдений является статистический ряд распределения случайной величины (табл. 12.4).

Таблица 12.4

Статистический ряд распределения

Интервалы	$x_{min} \le x < x_1$	$x_1 \le x < x_2$	…	$x_{j-1} \le x < x_j$	…	$x_{m-1} \le x < x_{max}$
n_j	n_1	n_2	…	n_j	…	n_m
P_j^*	P_1^*	P_2^*	…	P_j^*	…	P_m^*

Статистическую функцию распределения строят в виде ломаной линии с вершинами в граничных точках выбранных интервалов (см. рис. 12.3). Ординаты функции $F^*(x)$ в этих точках равны накопленным частотам:

$$\left.\begin{aligned}
&F^*(x_{\min}) = 0,\\
&F^*(x_1) = P_1^*,\\
&F^*(x_2) = P_1^* + P_2^*,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F^*(x_k) = \sum_{j=1}^{k} P_j^*,\\
&F^*(x_{\max}) = \sum_{j=1}^{m} P_j^* = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.4)$$

Знание статистического ряда позволяет построить статистическую плотность распределения $f^*(x)$, график которой принято называть *гистограммой*. Гистограмму строят следующим образом. На каждом из выбранных интервалов, как на основании, строят прямоугольники, площадь которых равна частоте попадания полученных результатов наблюдений на данный интервал. Высоты прямоугольников определяют из соотношения

$$f^*(x_j) = \frac{P_j^*}{\Delta x_j} \tag{12.5}$$

и откладывают их по оси ординат.

Из изложенного принципа построения гистограммы следует, что ее площадь всегда равна единице.

Таким образом, статистическая плотность распределения представляет собой функцию, ординаты которой в пределах интервалов разбиения результатов наблюдений постоянны. С увеличением объема выборки и, следовательно, числа интервалов гистограмма все более приближается к плотности распределения случайной величины и может использоваться для приближенного ее описания.

Построение статистической функции распределения и гистограммы рассмотрим на примере.

Пример 12.1. Для оценки точности показаний датчиков давления были произведены испытания 60 датчиков. При испытаниях каждым датчиком измерялось некоторое номинальное давление и определялась ошибка измерения δ_p как разность между показанием датчика и номиналом, выраженная в процентах. В протокол испытаний записывались числа датчиков, ошибки измерений которыми оказались в пределах интервалов, равных 0,5%. Минимальное значение ошибки измерения оказалось равно –2,5%, а максимальное +3,0%. Результаты проведенных испытаний сведены в табл. 12.5.

Таблица 12.5

Статистический ряд распределения

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число датчиков	1	3	5	9	11	9	8	6	4	3	1
Частоты в интервалах	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{1}{60}$

Требуется построить статистические функцию и плотность распределения $F^*(\delta_p)$ и $f^*(\delta_p)$ ошибки измерения давления датчиками этого типа.

Решение

1. Представляем результаты измерений в виде статистического ряда.

2. Рассчитываем по формулам (12.4) значения статистической функции распределения в точках, отвечающих границам выбранных интервалов.

3. Определяем высоты прямоугольников гистограммы (ординаты функции $f^*(\delta_p)$) для каждого интервала разбиения полученных результатов измерений, используя для этого формулу (12.5).

Результаты расчетов по пунктам 1, 2, 3 представлены в табл. 12.6.

Таблица 12.6

Статистическая плотность и функция распределения

Правая граница интервала	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$f^*(\delta_p)$	0	$\frac{2}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{22}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{2}{60}$
$F^*(\delta_p)$	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{38}{60}$	$\frac{46}{60}$	$\frac{52}{60}$	$\frac{56}{60}$	$\frac{59}{60}$	1

4. Строим графики статистической функции распределения (рис. 12.3) и плотности распределения (рис. 12.4).

Следует отметить, что неудачное разбиение на интервалы результатов измерений при составлении статистического ряда проявляется при построении гистограммы: она будет иметь либо «провалы», либо окажется невыразительной.

Полученные статистические функцию и плотность распределения аппроксимируют подобранным теоретическим законом. Затем проверяют гипотезу о согласованности теоретического и статистического законов распределения. Методы проверки гипотез о законах распределения изложены в главе 13.

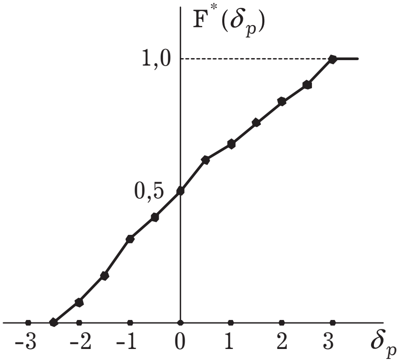


Рис. 12.3. Статистическая функция распределения

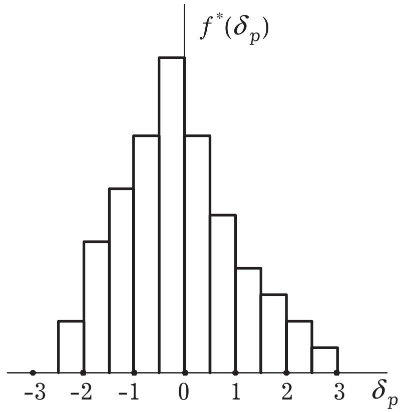


Рис. 12.4. Статистическая плотность распределения (гистограмма)

12.4. Точечное оценивание числовых характеристик случайных величин

12.4.1. Оценивание вероятности наступления случайного события

Данную задачу приходится решать, если результат эксперимента описывается случайным событием и в качестве характеристики свойства исследуемого объекта целесообразно принимать вероятность наступления некоторого события. Например, целью эксперимента является исследование надежности какой-либо системы. В качестве показателя надежности системы принята вероятность ее безотказной работы в течение определенного времени T. Для определения данного показателя планируется провести испытания n систем. Результат функционирования каждой системы можно описать случайным событием: за время T система не отказала либо наступил ее отказ. Результаты испытания n систем рассматривают как выборку объема n из генеральной совокупности.

Необходимость решения аналогичных задач возникает при исследовании эффективности боевых действий с помощью имитационных моделей. В этом случае результаты n «прогонов» модели на ЭВМ рассматривают как выборку из генеральной совокупности.

По результатам n испытаний подсчитывают число испытаний n_j, в которых наступило интересующее нас событие. Затем находят частоту наступления этого события

$$P^* = \frac{n_j}{n},$$

которую принимают в качестве его вероятности ($P^* \to P$).

Результат каждого отдельного испытания можно описать случайной переменной (дискретной случайной величиной)

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие наступило;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда число испытаний, в которых событие наступило, будет равно

$$n_j = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{12.6}$$

а частота определяется выражением

$$P^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{12.7}$$

Проанализируем свойство частоты P^* как оценки вероятности наступления случайного события.

1. Оценка P^* — несмещенная, так как математическое ожидание $M[P^*]$ равно истинному значению вероятности:

$$\begin{aligned} M[P^*] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \\ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[1 \cdot P + 0 \cdot (1-P)] = \frac{1}{n} \cdot nP = P. \end{aligned} \tag{12.8}$$

2. Поскольку, согласно теореме Бернулли,

$$\lim_{n\to\infty} P(|P^* - P| < \varepsilon) = 1,$$

т. е. частота P^* сходится по вероятности к вероятности P, то P^* — состоятельная оценка.

3. Дисперсия частоты P^* определяется выражением

$$D[P^*] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum D[X_i] = \frac{P(1-P)}{n}. \qquad (12.9)$$

Поскольку при $n \to \infty$ дисперсия $D[P^*] \to \infty$, то частота P^* — асимптотически эффективная оценка вероятности. Доказано, что при любом n дисперсия частоты (12.9) минимально возможная и, следовательно, P^* является вообще эффективной оценкой вероятности P.

Таким образом, частота наступления случайного события P^*является эффективной оценкой вероятности.

12.4.2. Оценивание математического ожидания случайной величины

Необходимость оценивания математического ожидания по результатам испытаний появляется в задачах, когда результат эксперимента описывается случайной величиной и показателем качества исследуемого объекта принято математическое ожидание этой случайной величины. Например, в качестве показателя надежности может быть принято математическое ожидание времени безотказной работы какой-либо системы, а при оценивании эффективности удара по группе объектов поражения — математическое ожидание числа пораженных объектов и т. д.

Задача оценивания математического ожидания формулируется следующим образом. Предположим, что для определения неизвестного значения математического ожидания случайной величины X предполагается произвести n независимых и свободных от систематических ошибок измерений X_1, X_2, ..., X_n. Требуется выбрать наилучшую оценку математического ожидания.

Наилучшей и наиболее распространенной на практике оценкой математического ожидания является среднее арифметическое результатов испытаний

$$m_x{}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{12.10}$$

называемое также *статистическим* или *выборочным средним.*

Покажем, что оценка m_x^* удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к оценке любого параметра.

1. Из выражения (12.10) следует, что

$$M[m_x{}^*] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = m_x,$$

т. е. оценка m_x^* — несмещенная оценка.

2. Согласно теореме Чебышева, среднее арифметическое результатов испытаний сходится по вероятности к математическому ожиданию, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Следовательно, оценка (12.10) есть состоятельная оценка математического ожидания.

3. Дисперсия оценки m_x^*, равная

$$D[m_x{}^*] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{D_x}{n}, \tag{12.11}$$

с ростом объема выборки n неограниченно убывает. Доказано, что если случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, то при любом n дисперсия (12.11) будет минимально возможной, а оценка m_x^* — эффективной оценкой математического ожидания. Знание дисперсии оценки позволяет вынести суждение относительно точности определения неизвестного значения математического ожидания с помощью этой оценки.

В качестве оценки математического ожидания среднее арифметическое используется в том случае, если результаты измерений равноточные (дисперсии $D[X_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ одинаковы в каждом измерении). Однако на практике приходится сталкиваться с задачами, в которых результаты измерений неравноточные (например, в процессе испытаний измерения производятся различными приборами). В этом случае оценка для математического ожидания имеет вид

$$m_x{}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i}, \qquad (12.12)$$

где $C_i = \dfrac{1}{D[X_i]}$ — вес i-го измерения.

В формулу (12.12) результат каждого измерения включается со своим весом C_i. Поэтому оценку результатов измерений m_x^* называют *средневзвешенной*.

Можно показать, что оценка (12.12) является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой математического ожидания. Минимальная дисперсия оценки определяется выражением

$$D[m_x{}^*] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} C_i}. \qquad (12.13)$$

При проведении экспериментов с моделями на ЭВМ подобные задачи возникают в том случае, когда оценки находят по результатам нескольких серий испытаний и число испытаний в каждой серии различно. Например, проведены две серии испытаний объемом n_1 и n_2, по результатам которых получены оценки $m_{x_1}^*$ и $m_{x_2}^*$. С целью повышения точности и достоверности определения математического ожидания результаты этих серий испытаний объединяют. Для этого следует воспользоваться выражением (12.12)

$$m_x{}^* = \frac{\sum_{j=1}^{J} C_j m_{x_j}^*}{\sum_{j=1}^{J} C_j},$$

где j — число серий испытаний.

При вычислении коэффициентов C_j вместо дисперсий $D[X_j]$ подставляют их оценки, полученные по результатам испытаний в каждой серии

$$D_x^* = \frac{1}{n_j - 1}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - m_{xj}^*)^2,$$

где n_j — число испытаний в j-й серии;

m_{xj}^* — оценка математического ожидания полученная по результатам j-й серии испытаний.

Аналогичный подход используют и при определении вероятности наступления случайного события по результатам серий испытаний.

Для оценивания математического ожидания случайной величины X, кроме выборочного среднего, могут использоваться и другие статистики. Чаще всего для этих целей используют члены вариационного ряда, т. е. порядковые статистики $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_r \le \ldots x_n$, на базе которых строят оценки, удовлетворяющие основным из предъявляемых требований, а именно состоятельности и несмещенности.

Предположим, что вариационный ряд содержит $n = 2k$ членов. Тогда в качестве оценки математического ожидания может быть принято любое из средних:

$$\bar{x}_i^* = \frac{x_i + x_{n-i+1}}{2}.$$

При этом k-е среднее

$$x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = Me^*$$

есть не что иное, как статистическая медиана распределения случайной величины X, поскольку имеет место очевидное равенство

$$P^*(X_i < Me^*) = (X_i > Me^*).$$

Преимущество статистической медианы состоит в том, что она свободна от влияния аномальных результатов наблюдений, неизбежного при использовании первого среднего, т. е. среднего из наименьшего и наибольшего числа вариационного ряда.

При нечетном объеме выборки $n = 2k - 1$ статистической медианой является ее средний элемент, т. е. k-й член вариационного ряда $Me^* = x_k$.

Существуют распределения, у которых среднее арифметическое не является эффективной оценкой математического ожидания, например распределение Лапласа. Можно показать, что для распределения Лапласа эффективной оценкой математического ожидания является выборочная медиана.

Доказано [10, 15], что если случайная величина X имеет нормальное распределение, то при достаточно большом объеме выборки закон распределения статистической медианы близок к нормальному с числовыми характеристиками:

$$M[Me^*] = M[X];$$

$$D[Me^*] = \frac{\pi}{2n} D_x \approx \frac{1{,}57}{n} D_x. \tag{12.14}$$

Из сравнения формул (12.11) и (12.14) следует, что дисперсия статистической медианы в 1,57 раза больше дисперсии среднего арифметического. Следовательно, среднее арифметическое как оценка математического ожидания во столько же раз эффективнее статистической медианы. Однако из-за простоты вычислений, нечувствительности к аномальным результатам измерений («засоренности» выборки) на практике в качестве оценки математического ожидания тем не менее используют статистическую медиану.

Следует отметить, что для непрерывных симметричных распределений математическое ожидание и медиана совпадают. Поэтому статистическая медиана может служить хорошей оценкой математического ожидания лишь при симметричном распределении случайной величины.

Для несимметричных распределений статистическая медиана Me^* имеет существенное смещение относительно математического ожидания, поэтому для его оценивания непригодна.

12.4.3. Оценивание дисперсии и стандартного отклонения случайной величины

На практике часто возникает необходимость определения оценок D_x^* и σ_x^* характеристик рассеивания D_x и σ_x результатов испытаний относительно математического ожидания случайной величины X. При решении этой задачи различают два случая: математическое ожидание случайной величины X известно и математическое ожидание неизвестно. Для вычисления оценок указанных характеристик используют выражения (статистики):

$$D_x^* = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_x)^2, \sigma_x^* = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_x)^2}, \tag{12.15}$$

где k — число степеней свободы:

$k = n$, если математическое ожидание известно;

$k = n - 1$, если математическое ожидание неизвестно.

При неизвестном математическом ожидании в формулы (12.15) вместо истинного значения m_x подставляют его оценку m_x^*, вычисленную по формуле (12.10).

Оценки дисперсии обладают необходимыми свойствами, т. е. они несмещенные, состоятельные и эффективные. Что касается оценок стандартного отклонения, то они являются отрицательно смещенными. Однако абсолютная величина смещения быстро уменьшается при увеличении числа испытаний (объема выборки) и уже при $n = 10$ не превышает 3% от σ_x. Оценка стандартного отклонения вида (12.15) является состоятельной и асимптотически эффективной оценкой.

При большом объеме выборки n (например, при большом числе «прогонов» модели на ЭВМ) желательно так организовать процесс обработки результатов моделирования, чтобы оценки для искомых характеристик формировались постепенно по ходу моделирования, т. е. без специального запоминания всей информации. Так, например, для получения оценки вероятности наступления события при обработке результатов моделирования достаточно накапливать в памяти ЭВМ лишь число «успешных» реализаций, а не хранить результаты всех испытаний. Для оценки математического ожидания накапливают сумму возможных значений случайной величины X_i: i = 1, 2, ..., n, которые она принимает в различных реализациях.

Непосредственное вычисление оценки дисперсии по формуле (12.15) нерационально, так как среднее значение m_x^* изменяется в процессе накапливания значений x_i. Это приводит к необходимости запоминания всех n значений x_i. Поэтому более рационально организовать фиксацию результатов моделирования для вычисления оценки дисперсии с использованием следующей формулы [1, 10, 13]:

$$D_x^* = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right].$$

Это значит, что для вычисления оценки дисперсии необходимо и достаточно накапливать две суммы: x_i и их квадратов x_i^2.

12.4.4. Определение числовых характеристик случайных величин при большом объеме выборки

При очень большом числе результатов измерений (несколько десятков или сотен) определение числовых характеристик случайных величин с помощью оценок (12.10) и (12.15) требует громоздких вычислений. Поэтому в таких случаях часто используют упрощенный способ решения задачи. Сущность его заключается в том, что результаты измерений группируют по интервалам, т. е. представляют их в виде статистического ряда, а искомые числовые характеристики определяют с помощью оценок следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} m_x^* &= \sum_{j=1}^{m} x_{\text{ср}j} P_j^*; \\ D_x^* &= \sum_{j=1}^{m} (x_{\text{ср}j} - m_x^*)^2 P_j^* = \sum_{j=1}^{m} x_{\text{ср}j}^2 P_j^* - m_x^{*2}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

где m — число интервалов;

P_j^* — частота попадания результатов измерений в j-й интервал;

$x_{срj}$ — координата середины j-го интервала.

Выражения (12.16) аналогичны выражениям (12.10), (12.15) и (9.16), (9.22), определяющим математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины. Разница состоит только в том, что здесь вероятности заменены частотами, а математическое ожидание m_x — статистическим средним m_x^*.

12.5. Интервальное оценивание числовых характеристик случайных величин

12.5.1. Понятие доверительной вероятности и доверительного интервала

При точечном оценивании получаются лишь приближенные значения искомых параметров. Степень рассеивания этих значений относительно истинных характеризуется дисперсиями (стандартными отклонениями) оценок. Однако знание этих дисперсий обычно оказывается недостаточным. Иногда требуется знать, насколько значение истинного параметра, полученное с помощью оценки при том или ином объеме выборки, отличается от истинного значения данного параметра, т. е. какой является ошибка:

$$\delta\Theta_x^* = \Theta_x^* - \Theta_x. \qquad (12.17)$$

Из равенства (12.17) видно, что величина погрешности $\delta\Theta_x^*$ случайна, а истинное значение Θ_x неизвестно. Поэтому нельзя определить значение погрешности, даже зная оценку $\delta\Theta_x^*$. Относительно погрешности $\delta\Theta_x^*$ можно сделать суждение вероятностного характера. Такие суждения обычно делают на основе понятия доверительного интервала.

Под доверительным интервалом понимают случайный интервал, который с некоторой вероятностью α накрывает истинное значение искомого параметра:

$$\alpha = P\left(\left|\Theta_x^* - \Theta_x\right| < \gamma\right). \qquad (12.18)$$

Вероятность α называют *доверительной вероятностью*. Она характеризует достоверность (надежность), а доверительный интервал длиной 2γ — точность определения неизвестного значения параметра Θ_x с помощью оценки Θ_x^*.

Поясним смысл доверительного интервала. С этой целью выражение (12.18) перепишем в виде

$$\alpha = P(\Theta_x^* - \gamma < \Theta_x < \Theta_x^* + \gamma). \quad (12.19)$$

Поскольку оценка Θ_x^* — величина случайная, то $\Theta_x^* - \gamma$ и $\Theta_x^* + \gamma$ также величины случайные, являющиеся границами интервала, который накрывает неизвестное значение оцениваемого параметра Θ_x.

Очевидно, что при фиксированной доверительной вероятности α чем уже доверительный интервал (чем меньше его полуразмах γ), тем точнее будет оценен неизвестный параметр Θ_x. Чем больше доверительная вероятность α при фиксированной длине доверительного интервала, тем надежнее будет произведено оценивание параметра Θ_x.

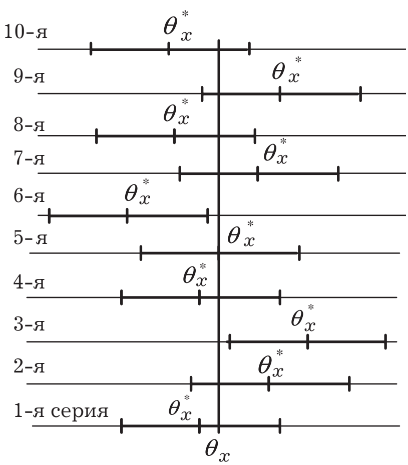


Рис. 12.5. Взаимное расположение доверительного интервала и истинного значения параметра по результатам различных серий испытаний

Предположим, что для оценивания некоторого параметра Θ_x проведено n испытаний, по результатам которых получена точечная оценка Θ_x^* этого параметра. Затем найдены левая $(\Theta_x^* - \gamma)$ и правая $(\Theta_x^* + \gamma)$ границы интервала. Еще раз проводят n испытаний. По результатам этой серии испытаний вновь находят оценку Θ_x^* и строят доверительный интервал. Пусть произведено десять таких серий по n испытаний в каждой серии. Соответствующие доверительные интервалы нанесены на горизонтальные линии (рис. 12.5).

Восемь интервалов из десяти накрыли точку Θ_x, а интервалы, полученные в 3-й и 6-й сериях, не накрыли Θ_x. Таким образом, частота события $\left|\Theta_x^* - \Theta_x\right| < \gamma$ равна 0,8. При увеличении числа серий по n испытаний в каждой частота указанного события будет устойчиво колебаться около доверительной вероятности α.

До сих пор рассматривался так называемый симметричный доверительный интервал, т. е. интервал, границы которого равноудалены от полученного значения оценки Θ_x^*. Однако в практике оценивания используют и несимметричные интервалы. У несимметричных интервалов левая граница удалена от значения оценки на величину γ_2, а правая — на γ_1 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). Длина доверительного интервала равна ($\gamma_1 + \gamma_2$). В этом случае выражение для доверительной вероятности запишем в виде

$$\alpha = P(\Theta_x^* - \gamma_2 < \Theta_x < \Theta_x^* + \gamma_1)$$

или

$$\alpha = P(-\gamma_2 < \Theta_x^* - \Theta_x < +\gamma_1). \qquad (12.20)$$

Условию (12.20) при фиксированной вероятности α удовлетворяет бесчисленное множество пар значений γ_1 и γ_2.

Предположим, что плотность распределения случайной величины $Y = \Theta_x^* - \Theta_x$ имеет вид, представленный на рис. 12.6. На этом же рисунке показаны два интервала, соответствующие одной и той же вероятности

$$\int_{-\gamma_2'}^{\gamma_1'} f(y)dy = \int_{-\gamma_2''}^{\gamma_1''} f(y)dy$$

Для устранения указанной неоднозначности используют два способа. Один из них основан на выборе таких значений γ_1 и γ_2, при которых обеспечивается симметрия в распределении вероятности ($1 - \alpha$), т. е. значений, удовлетворяющих условию

$$P(Y \le -\gamma_2) = P(Y \ge \gamma_1) = \frac{1-\alpha}{2} \qquad (12.21)$$

или

$$\int_{-\infty}^{-\gamma_2} f(y)dy = \int_{\gamma_1}^{+\infty} f(y)dy = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Такие значения γ_2 и γ_1 показаны на рис. 12.7 при несимметричном распределении случайной величины Y. Доверительный интервал, выбранный таким способом, называют *центральным*.

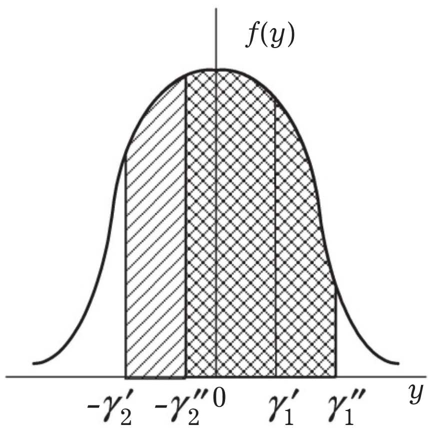


Рис. 12.6. Различные доверительные интервалы, соответствующие одинаковой доверительной вероятности

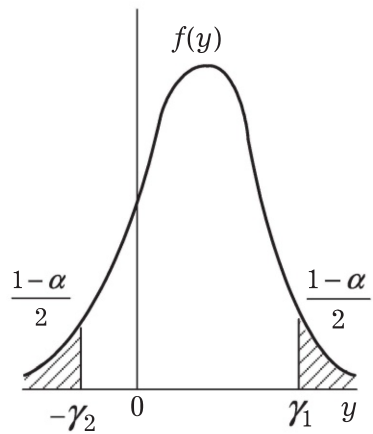


Рис. 12.7. Центральный доверительный интервал

Второй способ основан на выборе таких значений γ_1 и γ_2, которые при данном уровне вероятности α обеспечивают симметрию границ доверительного интервала относительно оценки Θ_x^*. Сущность данного способа будет рассмотрена при интервальном оценивании стандартного отклонения.

При симметричном распределении Y центральный и симметричный доверительные интервалы при фиксированной вероятности совпадают.

При интервальном оценивании решаются следующие основные задачи:

- определение доверительного интервала при заданной доверительной вероятности и фиксированном числе испытаний;
- определение доверительной вероятности при заданном доверительном интервале и фиксированном числе испытаний;
- определение необходимого числа испытаний при заданных доверительной вероятности и доверительном интервале.

Решение указанных задач не вызывает затруднений, если известен закон распределения случайной величины $(\Theta_x^* - \Theta_x)$.

Рассмотрим методы решения задач интервального оценивания при определении вероятности наступления случайного события, математического ожидания и стандартного отклонения случайной величины, которые наиболее часто используются в качестве характеристик вооружения и показателей эффективности боевых действий.

Иногда в силу ограниченности априорных сведений об исследуемом процессе либо из-за сложности вероятностных расчетов установить закон распределения не удается. В этом случае вначале приходится выдвигать соответствующие гипотезы относительно закона распределения оценки и проводить их проверку.

12.5.2. Оценивание вероятности наступления случайного события

Как было показано в п. 12.4.1, частота P^*, полученная по результатам n реализаций в соответствии с формулой (12.7), является эффективной оценкой вероятности P. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей (теоремы Ляпунова) при большом n распределение частоты P^* описывается нормальным законом распределения с плотностью вероятности

$$f(P^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{P^*}} \exp\left(-\frac{(P^* - m_{P^*})^2}{2\sigma_{P^*}^2} \right). \qquad (12.22)$$

При этом математическое ожидание и стандартное отклонение частоты определяются выражениями:

$$m_{P*} = P, \quad \sigma_{P*} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}. \qquad (12.23)$$

Рассмотрим случайную величину

$$Y = \frac{P*-P}{\sigma_{P*}}. \qquad (12.24)$$

Поскольку случайная величина Y связана с частотой P^* линейной зависимостью, то она также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, т. е. $Y \in N(0,1)$. Поэтому при любом уровне вероятности α справедливо соотношение

$$\alpha = P(|P*-P| < \gamma) = P\left(\left|\frac{P*-P}{\sigma_{P*}}\right| < y_\alpha\right) = \Phi_T(y_\alpha), \qquad (12.25)$$

где $y_\alpha = \dfrac{\gamma}{\sigma_{p*}}$ — аргумент табличной функции Лапласа, при котором $\Phi_т(y_\alpha) = \alpha$.

Неравенство

$$\left|\frac{P*-P}{\sigma_{P*}}\right| < y_\alpha$$

равносильно неравенству

$$-y_\alpha \sigma_{p*} < P*-P < y_\alpha \sigma_{p*}$$

или неравенству

$$P*-y_\alpha \sigma_{p*} < P < P*+y_\alpha \sigma_{p*}.$$

Отсюда вытекает, что интервал

$$I(P*-y_\alpha \sigma_{p*}; \quad P*+y_\alpha \sigma_{p*}) \qquad (12.26)$$

накрывает неизвестное значение P с вероятностью α.

Таким образом, для определения доверительного интервала при заданной доверительной вероятности α и фиксированном n необходимо:

• по результатам n испытаний по формуле (12.7) получить значение частоты P^*;

• рассчитать значение стандартного отклонения

$$\sigma_{P^*} = \sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{n}};$$

• по доверительной вероятности α из таблицы функции Лапласа (табл. 2 приложения) найти значение y_α;

• рассчитать границы доверительного интервала по формуле (12.26).

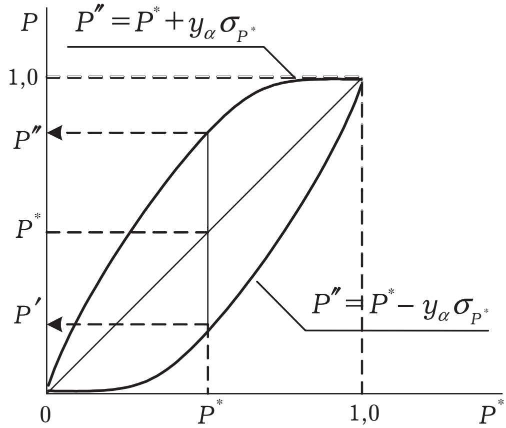


Рис. 12.8. Зависимость границ доверительного интервала для вероятности случайного события от значения частоты

На рис. 12.8 представлены зависимости границ доверительного интервала $P^* - y_\alpha\sigma_{P^*}$ и $P^* + y_\alpha\sigma_{P^*}$ от значения оценки P^* при фиксированных значениях α и n. Поскольку при вычислении оценки стандартного отклонения σ_{p^*} по формуле (12.23) вместо неизвестного значения вероятности P подставляют ее оценку P^*, полученную по результатам n испытаний, то оказывается случайным не только центр доверительного интервала, но и его длина.

Определение доверительной вероятности α при заданном доверительном интервале γ и фиксированном числе испытаний n производится в такой последовательности:

- рассчитать значения оценок вероятности P^* и стандартного отклонения σ_{p^*};
- вычислить значение аргумента табличной функции Лапласа

$$y_\alpha = \frac{\gamma}{\sigma_{P^*}} = \frac{\gamma\sqrt{n}}{\sqrt{P^*(1-P^*)}}; \qquad (12.27)$$

- по значению y_α из таблицы функции Лапласа найти вероятность α.

Если требуемые точность γ и достоверность α оценивания вероятности P заданы, то необходимое для их обеспечения число испытаний $n_{\text{тр}}$ находится из уравнения (12.27):

$$n_{\text{тр}} \geq \frac{P(1-P)}{\gamma^2} y_\alpha^2, \qquad (12.28)$$

где y_α находится из таблицы функции Лапласа по известной доверительной вероятности α.

Из соотношения (12.28) видно, что при фиксированном значении α необходимое число испытаний обратно пропорционально квадрату допустимой абсолютной погрешности γ. Поэтому для определения вероятности P по частоте P^* с достаточной точностью и достоверностью требуется большое число испытаний. В табл. 12.7 приведены необходимые значения числа испытаний $n_{\text{тр}}$, обеспечивающие с доверительной вероятностью α требуемую точность γ оценивания различных значений вероятности P.

Из таблицы видно, что необходимое число испытаний растет не только с увеличением требуемой точности, но и с приближением истинного значения оцениваемой вероятности P к вероятности, равной 0,5. Это обусловлено тем, что дисперсия оценки P^* достигает максимального значения, равного $0{,}25/n$, именно при $P = 0{,}5$.

Поскольку в выражение (12.28) входит неизвестное значение вероятности P, то определение необходимого числа ис-

Таблица 12.7

Требуемое число испытаний для оценивания вероятности с заданной точностью

P	γ			
	0,05	0,01	0,005	0,001
0,1 (0,9)	139	3458	13830	345744
0,2 (0,8)	246	6147	24587	614656
0,3 (0,7)	323	8068	32270	806736
0,4 (0,6)	369	9220	36880	921984
0,5	385	9604	38416	960400

пытаний $n_{тр}$ производят приближенно. Один из способов такого приближения состоит в оценке верхней границы необходимого числа испытаний на основе неравенства

$$n_{тр} \le 0{,}25\frac{y_\alpha^2}{\gamma^2},$$

которое получается с учетом того, что $\max\{P(1-P)\} = 0{,}25$.

Другой способ заключается в реализации соотношения (12.28) путем последовательного уточнения частоты P^* и n, начиная с некоторого ориентировочного значения числа испытаний n_0. После проведения n_0 испытаний это значение уточняют, заменяя в формуле (12.28) вероятность P полученным значением частоты P^*. Если при этом окажется, что новое значение n_1 не превышает n_0, решение задачи заканчивается. Если же $n_1 > n_0$, то производят еще $(n_1 - n_0)$ испытаний, по результатам которых уточняют значение частоты, а по нему — значение необходимого числа испытаний. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет обеспечена заданная точность определения вероятности P.

12.5.3. Оценивание математического ожидания

При оценивании математического ожидания следует различать случаи большой ($n > 30$) и малой ($n \le 30$)

выборки при известной и неизвестной характеристиках рассеивания результатов испытаний. Рассмотрим последовательно эти случаи.

Случай большой выборки

Если объем выборки большой, то при любом распределении результатов моделирования распределение оценки математического ожидания (12.10) близко к нормальному с параметрами

$$M[m_x^*] = m_x, \quad \sigma_{m_x^*} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \tag{12.29}$$

Предположим, что характеристика точности результатов измерений σ_x известна.

Тогда случайная величина

$$Y = \frac{m_x^* - m_x}{\sigma_{m_x^*}} \tag{12.30}$$

будет иметь также нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, т. е. $Y \in N(0;1)$.

Доверительная вероятность α будет определяться соотношением

$$\alpha = P(|\, m_x^* - m_x \,| < \gamma) = P\left(\left|\frac{m_x^* - m_x}{\sigma_{m_x^*}}\right| < \frac{\gamma}{\sigma_{m_x^*}}\right). \tag{12.31}$$

С учетом того, что случайная величина Y имеет нормальное распределение, соотношение (12.31) запишется в виде

$$\alpha = \Phi_{\text{т}}\left(\frac{\gamma}{\sigma_x}\sqrt{n}\right). \tag{12.32}$$

Разрешив уравнение (12.32) относительно γ, получим

$$\gamma = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\Phi_{\text{т}}^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\, y_\alpha, \tag{12.33}$$

где $\Phi_{\text{т}}^{-1}(\alpha)$ — функция, обратная табличной функции Лапласа.

Интервал

$$I\left(m_x^* - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} y_\alpha, m_x^* + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} y_\alpha\right) \qquad (12.34)$$

накрывает неизвестное значение m_x с вероятностью α. Длина интервала зависит только от уровня доверительной вероятности α и от стандартного отклонения $\sigma_{m_x^*}$ оценки m_x^*, с помощью которой определяется неизвестное значение m_x. Величина $\sigma_{m_x^*}$, как это следует из равенства (12.29), определяется числом измерений n и стандартным отклонением σ_x, характеризующим точность измерений. Таким образом, в рассматриваемом случае при фиксированных значениях α, n, σ_x длина доверительного интервала является постоянной. Случайным этот интервал оказывается потому, что центром его является оценка m_x^*, т. е. случайная величина.

Если же характеристика точности σ_x неизвестна, то вместо нее в формулы (12.29), (12.33), (12.34) подставляют оценку σ_x^*, полученную по результатам n измерений, что при большом n вполне допустимо. При этом доверительный интервал (12.34) имеет вид

$$I\left(m_x^* - \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} y_\alpha, m_x^* + \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} y_\alpha\right). \qquad (12.35)$$

Этот интервал имеет не только случайный центр m_x^*, но и случайную длину, так как она является функцией оценки среднего квадратического отклонения σ_x^*.

Определение доверительного интервала при известной доверительной вероятности α и фиксированном n производится в такой последовательности:

- по результатам n испытаний получают оценки m_x^* и σ_x^* по формулам (12.10) и (12.15) соответственно;
- из таблицы функции Лапласа (табл. 2 приложения) по вероятности α находят значение y_α;
- по формуле (12.35) рассчитывают границы доверительного интервала I.

Для определения доверительной вероятности α при известном размахе доверительного интервала γ и фиксированном числе измерений n необходимо:

- по результатам n измерений по формуле (12.15) получить оценку σ_x^*;
- вычислить значение $y_\alpha = \dfrac{\gamma}{\sigma_x^*}\sqrt{n}$;
- по величине y_α в таблице функции Лапласа найти значение доверительной вероятности α.

Случай малой выборки

Если закон распределения результатов измерения нормальный, то оценка m_x^* будет иметь нормальное распределение при любом объеме выборки. Поэтому при известном значении σ_x доверительный интервал и доверительная вероятность определяются аналогично, как и в первом случае (при большом объеме выборки). Однако, если характеристика точности результатов измерений σ_x неизвестна, при малом объеме выборки замена стандартного отклонения σ_x его оценкой σ_x^* может привести к грубым ошибкам. Поэтому для оценки точности и достоверности определения математического ожидания в этом случае используется нормированная разность

$$T = \frac{m_x^* - m_x}{\sigma_x^*}\sqrt{n}, \tag{12.36}$$

в которой оценка m_x^* определяется соотношением (12.10), а оценка σ_x^* — соотношением (12.15).

Поскольку знаменатель выражения (12.36) является случайной величиной, нормированная разность T оказывается распределенной по закону, отличному от нормального. Это распределение называют распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета).

Выражение для плотности распределения Стьюдента имеет вид

$$S_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}},$$

где Γ(*) — гамма-функция;

k — число степеней свободы.

Распределение Стьюдента имеет единственный параметр k, называемый числом степеней свободы

$$k = n - 1,$$

где n — число измерений, по результатам которых с помощью оценки (12.15) определяют неизвестное значение σ_x.

Кривая плотности распределения Стьюдента (рис. 12.9) симметрична относительно нуля и при $k > 30$ совпадает с кривой плотности нормального закона распределения с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Этим и обусловлен тот факт, что при большом объеме выборки и неизвестной характеристике точности результатов измерений для определения доверительного интервала используют таблицу функции Лапласа. При $k \leq 30$ ординаты плотности распределения Стьюдента при $|t| \to \infty$ уменьшаются медленнее, чем ординаты плотности нормального закона распределения.

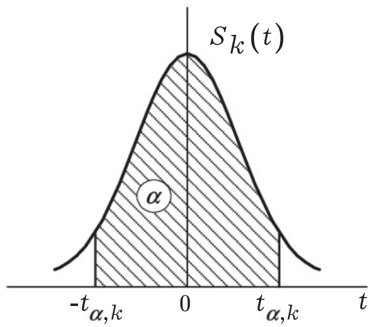


Рис. 12.9. Плотность распределения Стьюдента

Для распределения Стьюдента составлена таблица (см. табл. 8 приложения), в которой приведены значения $t_{\alpha,k}$, удовлетворяющие неравенству (см. рис. 12.9)

$$\alpha = P(|T| < t_{\alpha,k}) = 2\int_0^{t_{\alpha,k}} S_k(t)dt. \qquad (12.37)$$

Это позволяет в рассматриваемом случае определить симметричный доверительный интервал следующим образом. Неравенство $|T| < t_{\alpha,k}$ с учетом выражения (12.36) равносильно неравенству

$$m_x^* - t_{\alpha,k}\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} < m_x < m_x^* + t_{\alpha,k}\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, соотношение (12.37) может быть представлено в виде

$$\alpha = P\left(m_x^* - t_{\alpha,k}\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}, m_x^* + t_{\alpha,k}\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом, интервал

$$I\left(m_x^* - t_{\alpha,k}\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}, m_x^* + t_{\alpha,k}\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}\right) \qquad (12.38)$$

накрывает неизвестное значение m_x с вероятностью α, т. е. является искомым доверительным интервалом.

Последовательность решения задач определения доверительного интервала и доверительной вероятности такая же, как и в первом случае, но значение $t_{\alpha,k}$ выбирают из таблицы Стьюдента, входом в которую является вероятность α и число степеней свободы k.

Для определения математического ожидания с заданной точностью и достоверностью требуется вполне определенное число измерений $n_{тр}$.

Разрешив относительно n уравнение (12.33), получим

$$n_{тр} \geq \left(\frac{\sigma_x}{\gamma} y_\alpha\right)^2. \qquad (12.39)$$

Для определения необходимого числа испытаний данную зависимость можно использовать:

- при любом необходимом числе реализаций, если распределение результатов измерений описывается нормальным законом и характеристика точности измерений σ_x известна;
- при большом необходимом числе реализаций ($n > 30$), если закон распределения результатов измерений произволь-

ный и характеристика точности измерений σ_x неизвестна. В этом случае вместо σ_x в формуле (12.39) подставляется σ_x^*.

При малом необходимом числе испытаний в условиях, когда характеристика точности результатов измерений σ_x неизвестна и вместо нее используют оценку σ_x^*, потребный для определения математического ожидания объем выборки удовлетворяет неравенству:

$$n_{\text{тр}} \geq \left(\frac{\sigma_x^*}{\gamma} t_{\alpha,k} \right)^2. \tag{12.40}$$

Поскольку правая часть неравенства (12.40) зависит от n (через $t_{\alpha,k}$ и σ_x^*), то потребный объем выборки $n_{\text{тр}}$ находят методом последовательных приближений и он равен наименьшему из значений n, обеспечивающих выполнение неравенства (12.40).

12.5.4. Оценивание стандартного отклонения

Ограничимся рассмотрением методики оценки стандартного отклонения с помощью доверительного интервала, отвечающего доверительной вероятности α, только для случая, когда результаты измерений описываются нормальным законом распределения.

Для определения границ доверительного интервала воспользуемся тем, что случайная величина

$$T = k \frac{\sigma_x^{*2}}{\sigma_x^2} \tag{12.41}$$

имеет χ^2 (хи-квадрат)-распределение. Плотность распределения χ^2 имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\dfrac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t \leq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(*)$ — гамма-функция.

χ^2 (хи-квадрат)-распределение имеет один единственный параметр — число степеней свободы k. Причем, если при известном математическом ожидании m_x используется оценка дисперсии в форме (12.15), то в (12.41) следует положить $k = n$. Если же дисперсия оценивается при неизвестном математическом ожидании, то число степеней свободы k следует принять равным $(n - 1)$. График плотности χ^2-распределения показан на рис. 12.10.

Для χ^2-распределения составлена таблица (табл. 11 приложения), в которой приведены значения вероятностей

$$q = P(T \geq t_q) = \int_{t_q}^{\infty} f(t)dt. \tag{12.42}$$

С помощью этой таблицы находят два значения t_1 и t_2 которые удовлетворяют условию

$$P(t_1 \leq T < t_2) = \alpha. \tag{12.43}$$

С учетом соотношения (12.41) неравенство

$$t_1 \leq T < t_2$$

запишем в виде

$$t_1 < k\frac{\sigma_x^{*2}}{\sigma_x^2} < t_2.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\sigma_x^*\sqrt{\frac{k}{t_2}} < \sigma_x < \sigma_x^*\sqrt{\frac{k}{t_1}}.$$

Поэтому выражение (12.43) запишем в виде

$$P\left(\sigma_x^*\sqrt{\frac{k}{t_2}} < \sigma_x < \sigma_x^*\sqrt{\frac{k}{t_1}}\right) = \alpha.$$

Таким образом, интервал

$$I_{\alpha,k}\left(\sigma_x^*\sqrt{\frac{k}{t_2}} < \sigma_x < \sigma_x^*\sqrt{\frac{k}{t_1}}\right) \tag{12.44}$$

накрывает искомое значение σ_x с вероятностью α.

Условию (12.43) удовлетворяет бесчисленное множество пар значений (t_1, t_2). Для устранения неоднозначности доверительного интервала (12.44) используют отмеченные в п. 12.5.1 способы.

Границы центрального интервала выбирают из условия (рис. 12.11)

$$P(T > t_2) = P(T < t_1) = \frac{1-\alpha}{2}. \qquad (12.45)$$

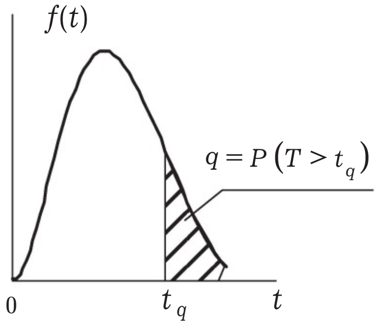


Рис. 12.10. Плотность χ^2-распределения

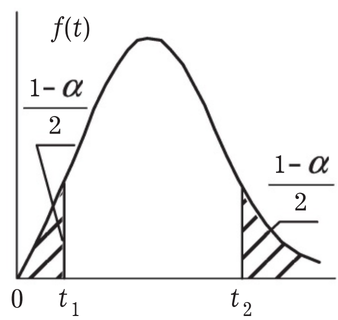


Рис. 12.11. Центральный доверительный интервал

Значение t_1 находят из таблицы χ^2-распределения при заданном числе степеней свободы k и доверительной вероятности α из условия

$$q_1 = P(T > t_1) = 1 - \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2}, \qquad (12.46)$$

значение t_2 — из условия

$$q_2 = P(T > t_2) = \frac{1-\alpha}{2}. \qquad (12.47)$$

На рис. 12.11 показаны границы t_1 и t_2 и заштрихованы области, соответствующие вероятностям $P(T < t_1)$ и $P(T > t_2)$.

Таким образом, порядок работы при отыскании центрального доверительного интервала для стандартного отклонения следующий:

• вычисляют оценку σ_x^* стандартного отклонения σ_x;

• определяют число степеней свободы k;

• по доверительной вероятности α из (12.46) и (12.47) находят значения q_1 и q_2, по которым входят в таблицу χ^2-распределения с соответствующим числом степеней свободы, где отыскивают значения t_1 и t_2;

• вычисляют левую и правую границы доверительного интервала $I_{\alpha,k}$:

$$I_{\alpha,k}^{(\text{л})} = \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_2}}, \quad I_{\alpha,k}^{(\text{п})} = \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_1}}. \tag{12.48}$$

Для построения центрального доверительного интервала можно использовать табл. 10 приложения. Эта таблица позволяет легко построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения для четырех наиболее часто употребляемых значений доверительной вероятности. В этом случае достаточно из таблицы выбрать два значения коэффициентов z_1 и z_2, на которые необходимо умножить полученную оценку σ_x^*, и получить левую и правую границы доверительного интервала.

Из выражений (12.48) видно, что длина интервала является случайной, поскольку зависит от оценки σ_x^*. Кроме того, сам интервал оказывается несимметричным относительно σ_x^*. Поэтому нельзя утверждать, что с вероятностью α ошибка определения неизвестного значения σ_x на основе оценки (12.15) не превышает половины длины такого интервала. Его можно использовать лишь как интервал значений σ_x, согласующихся с результатами измерений.

Границы симметричного интервала выбирают следующим образом.

Значения t_1 и t_2 в выражении (12.44) принимают равными:

$$t_1 = k\frac{\sigma_x^{*2}}{(\sigma_x^* + \gamma)^2}, \quad t_2 = k\frac{\sigma_x^{*2}}{(\sigma_x^* - \gamma)^2}. \tag{12.49}$$

В этом случае границы доверительного интервала определяются соотношениями

$$I_{\alpha,k}^{(л)} = \sigma_x^* - \gamma, \quad I_{\alpha,k}^{(п)} = \sigma_x^* + \gamma. \qquad (12.50)$$

Значения γ определяют по таблице вероятностей

$$\alpha = P(\sigma_x^* - \gamma < \sigma_x < \sigma_x^* + \gamma) = L(q,k), \qquad (12.51)$$

составленной на основе χ^2-распределения (табл. 12 приложения). Входом в таблицу является число степеней свободы k и величина q, определяемая по формуле

$$q = \gamma / \sigma_x^*. \qquad (12.52)$$

При определении доверительного интервала γ по заданным значениям α и k из таблицы $L(q, k)$ находят значение q. Границы доверительного интервала для σ_x определяют из равенств (12.50) при $\gamma = q\sigma_x^*$ или из равенств

$$I_{\alpha,k}^{(л)} = \sigma_x^*(1-q), \quad I_{\alpha,k}^{(п)} = \sigma_x^*(1+q). \qquad (12.53)$$

Полученный доверительный интервал имеет случайный центр и случайную длину. Ошибка определения неизвестного значения стандартного отклонения σ_x на основе оценки σ_x^* с вероятностью α не превышает по абсолютной величине половины длины симметричного доверительного интервала, т. е. γ. Таблицы указанных в данном параграфе статистических распределений опубликованы в целом ряде источников, например [3, 5, 14].

Задачи для самостоятельного решения

1. При измерении дальности до объекта получено два значения 3524 м и 3506 м. Определить приближенное значение расстояния до объекта и его среднее квадратическое отклонение, если точность измерения характеризуется средним квадратическим отклонением равным 10 м.

2. Расстояние до ориентира измерено тремя способами, которые характеризуются средними квадратическими отклонениями равными 75, 30, и 15 м. Результаты измерений соответственно равны 3425, 3575 и 3520 м. Найти:

а) приближенное значение расстояния;

б) вероятность того, что ошибка в определении расстояния не превысит 25 м.

3. В результате пяти равноточных измерений получены следующие значения измеряемой величины (м): 63, 57, 64, 66, 60. Найти:

а) приближенные значения расстояния и среднего квадратического отклонения;

б) вероятности того, что ошибки определения расстояния среднего квадратического отклонения не превысят 5 м и 0,5 м.

4. Для оценки точности работы омметра произведено пять измерений эталонного резистора, имеющего номинальное сопротивление 1000 Ом. Результаты измерений оказались равными 1008, 1012, 986, 1018, 995 Ом. Систематической погрешности омметр не имеет. Определить приближенное значение характеристики точности омметра.

5. Деталь измерялась 16 раз. Величина среднего квадратического отклонения, полученная по результатам измерений, оказалась равной 1,4 мм. Найти границы доверительного интервала при доверительной вероятности равной 0,9.

6. Величина напряжения в сети определялась по результатам 40 измерений вольтметром, точность которого характеризуется средним квадратическим отклонением 0,4 В. Приближенное значение напряжения оказалось равным 221,4 В. Определить границы доверительного интервала для напряжения при доверительной вероятности 0,9.

7. Точность измерения напряжения характеризуется средним квадратическим отклонением равным 2 В. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что ошибка в определении напряжения не превышает по абсолютной величине 2 В?

8. По результатам 16 независимых равноточных измерений получено приближенное значение расстояния между двумя объектами 130 м. Точность измерений характеризуется средним квадратическим отклонением 2 м. Определить границы доверительного интервала при доверительной вероятности 0,95.

9. Сколько следует произвести независимых измерений неизвестного расстояния, чтобы ошибка определения его среднего квадратического отклонения не выходила за пределы $\pm 0{,}25\sigma_x^*$ при доверительной вероятности 0,9.

10. Точность измерения температуры в лаборатории характеризуется средним квадратическим отклонением 0,5°С. Сколько необходимо произвести независимых измерений, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что ошибка в измерении температуры не выходит за пределы ±0,2 °С?

Вопросы для самопроверки

1. Поясните сущность задачи оценивания характеристик параметров.
2. Что является результатом точечного оценивания числовой характеристики случайной величины по результатам испытаний?
3. Что определяют при интервальном оценивании параметра?
4. Что подразумевает требование несмещенности оценки?
5. Как называется несмещенная оценка с минимальной дисперсией и почему?
6. Что означает требование состоятельности оценки?
7. В чем смысл прочной (робастной) оценки?
8. В чем заключается цель первого этапа обработки результатов испытаний?
9. Что называется вариационным рядом и рангом?
10. Поясните правила построения гистограммы и статистической функции распределения.
11. Какой переменной описывается результат каждого испытания?
12. Каким свойствам соответствует частота как оценка вероятности наступления случайного события?
13. Какие оценки математического ожидания случайной величины применяются при анализе результатов испытаний и в чем их отличие?

14. Какие статистики кроме выборочного среднего используются для оценивания математического ожидания?

15. В чем отличие оценивания характеристик рассеивания при известном и неизвестном математическом ожидании?

16. Как оцениваются числовые характеристики при большом числе испытаний?

17. Поясните сущность понятий доверительного интервала и доверительной вероятности.

18. Какие задачи решаются при интервальном оценивании и что должно быть известно для успешного решения этих задач?

19. Какому закону подчиняется частота наступления случайного события?

20. При каком значении вероятности наступления случайного события требуется наибольшее число испытаний для достижения требуемой точности и почему?

21. Какими таблицами необходимо пользоваться при интервальном оценивании математического ожидания и почему?

22. На основе какого распределения строится интервальное оценивание среднего квадратического отклонения? В чем особенность полученного доверительного интервала?

13. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

13.1. Сущность проверки статистических гипотез

Определение неизвестных значений параметров с помощью их оценок является начальным этапом статистического анализа результатов испытаний. Последующим его этапом может быть сравнение действительных значений параметров на основе полученных оценок этих параметров. Например, изготовлена партия жидкостных ракетных двигателей (ЖРД). Десять двигателей из этой партии прошли испытания на стенде. По результатам этих испытаний получена оценка математического ожидания секундного расхода окислителя m_1^*. Следующие десять двигателей работали в реальных условиях, и также получена оценка математического ожидания секундного расхода окислителя m_2^*. Требуется установить, изменяется ли значение секундного расхода окислителя в зависимости от условий работы двигателя. Решение данной задачи заключается в сравнении друг с другом истинных значений секундных расходов окислителя m_1 и m_2 по их оценкам m_1^* и m_2^*.

Аналогичные задачи могут быть поставлены для сравнения истинных значений других числовых характеристик, истинного закона распределения случайного параметра с тем или иным теоретическим законом.

Во всех этих задачах суждения о соотношении истинных значений параметров вырабатывают на основе сравнения их оценок, которые, как известно, являются случайными величинами. Поэтому эти суждения носят вероятностный характер. Для решения таких задач разработан специальный метод, суть которого сводится к следующему. Относительно соотношения сравниваемых параметров выдвигается гипотеза. Затем проводятся испытания, по результатам которых проверяется справедливость выдвинутой гипотезы (гипотеза принимается либо отклоняется). Этот метод называют статистической проверкой гипотез. Он разработан в двух вариантах: *классический метод* и *метод последовательного анализа* [2, 8, 10, 15].

Общий подход к решению задачи проверки гипотез включает в себя следующие этапы:

1. Выдвигается гипотеза о соотношении сравниваемых величин.

2. Выбирается показатель согласованности (ПС), который в дальнейшем будем обозначать буквой u.

3. Выбирается критерий проверки гипотезы (критерий согласия), т. е. правило, указывающее при каких значениях ПС, гипотеза принимается, а при каких — отклоняется.

4. В соответствии с принятым критерием все множество значений ПС разбивается на два подмножества таким образом, что при попадании возможного значения ПС в одно из этих подмножеств означает принятие гипотезы, а в другое — ее отклонение.

5. Проводятся испытания, по результатам которых вычисляется значение ПС. Определяется, к какому из подмножеств относится вычисленное значение ПС, на основании чего принимается решение о приеме или отклонении гипотезы.

Рассмотрим содержание каждого из указанных этапов.

В общем случае под гипотезой понимают любое предположение относительно какого-либо свойства изучаемого явления. При обработке результатов испытаний рассматривают гипотезы о виде закона распределения исследуемой переменной, о параметрах закона распределения и т. п. Поскольку такие гипотезы проверяют по результатам испытаний, то их называют статистическими.

Наряду с выдвинутой гипотезой, которую называют *нулевой* (основной) и обозначают H_0, рассматривают несовместную с ней (одну или несколько) гипотезу, называемую *альтернативной* гипотезой. Альтернативную гипотезу обозначают H_1. Например, проверяется предположение о том, что исследуемая переменная распределена по показательному закону. Это предположение выдвигается как нулевая гипотеза H_0. Альтернативных к ней гипотез может быть выдвинуто несколько (переменная распределена не по показательному закону, переменная имеет какой-либо другой закон распределения).

Для записи нулевой и альтернативной гипотез используют специальное обозначение. Предположим, что нулевая гипотеза состоит в проверке предположения о равенстве математического ожидания случайной переменной X некоторому числу Θ, а альтернативная — математическое ожидание не равно Θ. Записывают гипотезы следующим образом:

$$H_0\colon m_x = \Theta,$$
$$H_1\colon m_x \neq \Theta$$

Различают гипотезы простые и сложные. Гипотеза простая, если она содержит одно предположение. Например, $H_0\colon m_x = 10$. Если гипотеза содержит конечное или бесконечное число предположений, то ее называют сложной. Например, гипотеза $m_x > 10$.

Эта гипотеза содержит бесконечное число гипотез вида

$$H_i\colon m_x = \Theta_i,$$

где Θ_i — любое число, превосходящее 10.

В качестве ПС выбирают случайную величину u, которая должна быть функцией гипотетических данных и данных результатов испытаний. Конкретный вид ПС может быть различным для различных гипотез.

Например, при проверке гипотезы о законе распределения случайной переменной X показатель согласованности задается в виде зависимости от гипотетической функции распределения $F(x)$ (функции распределения, выдвинутой в качестве нулевой гипотезы) и статистической функции распределения $F^*(x)$, полученной по результатам испытаний

$$u = \varphi\left[F(x), F^*(x)\right].$$

При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий двух случайных переменных X и Y показатель согласованности должен быть функцией оценок математических ожиданий и дисперсий, полученных по результатам испытаний

$$u = \psi\left(m_x^*, m_y^*, D_x^*, D_y^*\right).$$

Показатель согласованности должен удовлетворять следующим требованиям.

1. Закон распределения ПС должен зависеть от нулевой и альтернативной гипотез.

2. Закон распределения должен быть известен полностью, включая и его параметры.

Наибольшее распространение получили ПС, распределенные по нормальному закону, законам хи-квадрат, Стьюдента, Фишера.

Следует отметить, что в литературе по математической статистике используют обозначение ПС различными буквами. Например, ПС, распределенный по нормальному закону, часто обозначают буквой Y или Z, по закону хи-квадрат — χ^2, по закону Стьюдента — T, по закону Фишера — F.

3. Закон распределения ПС должен быть инвариантен к виду закона распределения исследуемой случайной переменной (не должен изменяться при смене закона распределения случайной переменной).

4. Закон распределения ПС должен быть критичен по отношению к проверяемой гипотезе. Это означает, что условные плотности распределения $f(u/H_0)$ и $f(u/H_1)$ должны существенно отличаться друг от друга.

Полученное по результатам испытаний значение ПС называют частным значением и обозначают u^*.

Для проверки гипотезы необходимо задать правило, на основе которого множество возможных значений u^* ПС разбивается на два подмножества: подмножество u_0, при попадании в которое принимается гипотеза H_0, и подмножество u_0, при попадании в которое гипотеза H_0 отклоняется (принимается гипотеза H_1). Область, соответствующую подмножеству u_0, называют *областью допустимых значений* (областью принятия гипотезы H_0), а область, соответствующую подмножеству u_1, *критической областью ПС*.

Показатель согласованности представляет собой скалярную случайную величину. Поэтому допустимая и критическая области представляют интервалы возможных значений ПС и, следовательно, существует точка, которая их разделяет. Эту точку называют *критической точкой* (границей).

Кривые плотностей распределения ПС $f\,(u/H_0)$ и $f\,(u/H_1)$ могут располагаться друг относительно друга тремя различными способами:

- кривая плотности распределения $f\,(u/H_1)$ сдвинута относительно $f\,(u/H_0)$ только вправо (рис. 13.1, а);
- кривая плотности распределения $f\,(u/H_1)$ сдвинута относительно $f\,(u/H_0)$ только влево (рис. 13.1, б);
- сдвиг кривой плотности распределения $f\,(u/H_1)$ неизвестен, т. е. она может быть сдвинута относительно $f\,(u/H_0)$ как вправо, так и влево (рис. 13.1, в).

Очевидно, что вид критической области для каждого способа должен быть различен. В первом случае выбирается *правосторонняя критическая область*, во втором — *левосторонняя* и в третьем — *двусторонняя*.

Правосторонняя критическая область определяется неравенством $u > u_\alpha$ левосторонняя — неравенством $u < u_\alpha$ и двусторонняя — неравенствами $u > u_\alpha$, $u < -u_a$, где $|u| > u_a$.

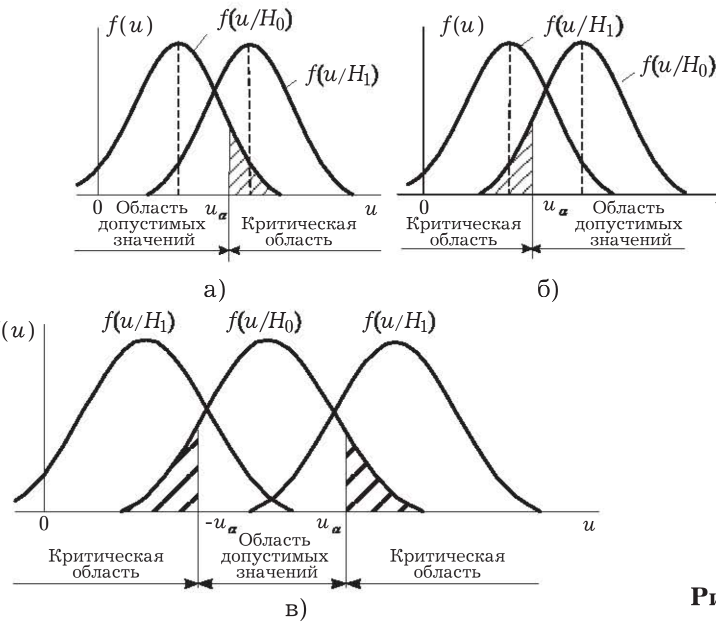


Рис. 13.1

Критические точки выбирают таким образом, чтобы при справедливой нулевой гипотезе H_0 вероятность попадания возможного значения ПС в критическую область была бы достаточно малой.

Следовательно, при справедливой гипотезе H_0 попадание значения ПС в критическую область является весьма редким событием. Если теперь вычислить вероятность попадания значения ПС в критическую область в предположении, что справедлива гипотеза H_1, то вероятность может оказаться больше аналогичной вероятности при условии справедливой гипотезы H_0. В этом случае при попадании значения ПС в критическую область следует отдать предпочтение альтернативной гипотезе H_1.

Для определения границы, разделяющей область допустимых значений и критическую область, необходимо задать вероятность того, что значение ПС попадает в критическую область при справедливой H_0, которую будем обозначать α. Вероятность α называют уровнем значимости критерия и принимают ее равной 0,01 … 0,05.

При известном законе распределения ПС можно найти его критические значения u_α из условия (см. рис. 13.1):

- для правосторонней критической области

$$P(u \geq u_\alpha) = \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u / H_0) du = \alpha;$$

- для левосторонней критической области

$$P(u < -u_\alpha) = \int_{-\infty}^{-u_\alpha} f(u / H_0) du = \alpha;$$

- для двусторонней критической области

$$P(u < -u_\alpha) + P(u \geq u_\alpha) = \int_{-\infty}^{-u_\alpha} f(u / H_0) du + \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u / H_0) du = \alpha.$$

В последнем случае, как правило, выбирают симметрично расположенные критические точки, т. е.

$$P(u < -u_\alpha) = P(u \geq u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

В зависимости от вида закона распределения ПС критические точки находят по соответствующим таблицам.

При статистической проверке гипотез можно совершить два рода ошибок.

Под ошибкой первого рода понимают принятие решения об отклонении нулевой гипотезы в случае, когда в действительности она оказывается справедливой. Вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости критерия α. Действительно, при уровне значимости α вычисленное значение ПС u^* в среднем в $100 \times \alpha$ случаях из каждой сотни может оказаться в критической области при истинной H_0.

Под ошибкой второго рода понимают принятие решения о справедливости нулевой гипотезы в случае, когда в действительности она оказывается неверной (справедлива в действительности H_1, но она отклоняется). Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Для уяснения сущности ошибок первого и второго рода на рис. 13.2 показаны условные плотности $f\,(u/H_0)$, $f\,(u/H_1)$ и правосторонняя критическая область с критической границей u_α.

Из определения ошибки первого рода следует, что ее вероятность численно равна вероятности попадания ПС u в критическую область при справедливой нулевой гипотезе

$$\alpha = \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u/H_0)du.$$

Чем меньше уровень значимости α, тем реже будет допускаться ошибка первого рода, т. е. отвергаться правильная гипотеза H_0.

По смыслу вероятность ошибки второго рода численно равна вероятности попадания ПС в область допустимых значений при условии справедливой альтернативной гипотезы H_1, т. е.

$$\beta = \int_{-\infty}^{u_\alpha} f(u/H_1)du.$$

Как видно из рис. 13.2 уменьшение вероятности ошибки первого рода приводит к возрастанию ошибки второго рода и наоборот.

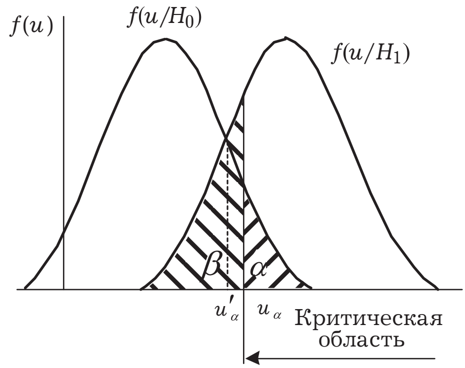


Рис. 13.2

Для уменьшения вероятности ошибки при принятии гипотезы критическую границу необходимо выбирать таким образом, чтобы сумма вероятностей ошибок первого и второго рода была минимальной. В случае, если показатель согласованности распределен по нормальному закону, то минимум суммы вероятностей ошибок α и β достигается при выборе критической границы в абсциссе точки пересечения кривых плотностей распределения $f\ (u/H_0)$ и $f\ (u/H_1)$ (на рис. 13.2 точка u'_α). Однако, не всегда такой подход к выбору критической границы u_α является целесообразным.

Часто при решении практических задач при выборе u_α исходят из анализа последствий от неверно принятого решения ("тяжести" последствий ошибок первого и второго рода для конкретной задачи). Например, если ошибка первого рода повлечет большие потери, а второго рода — малые, то целесообразно назначить возможно меньшее значение α.

Критерий проверки гипотезы принято характеризовать мощностью показателя согласованности. *Под мощностью показателя согласованности понимают вероятность попадания ПС в критическую область, при условии что справедлива альтернативная гипотеза* H_1. В соответствии с данным определением можно записать

$$1-\beta=\int\limits_{u_\alpha}^{\infty} f(u/H_1)du.$$

Из данного выражения видно, что мощность ПС это есть вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

Таким образом, для уменьшения ошибки второго рода критическую область надо выбирать так, чтобы мощность ПС при заданном уровне значимости была максимальной.

Следует отметить, что мощность ПС позволяет обоснованно подойти к выбору односторонних критических областей. Если характер альтернативной гипотезы неясен, то целесообразно в качестве критической выбирать двустороннюю симметричную область.

Для того чтобы одновременно уменьшить ошибки первого и второго рода, необходимо увеличивать объем выборки, по результатам которой проверяют гипотезу.

13.2. Методы проверки гипотез о законах распределения

13.2.1. Постановка задачи

При обосновании закона распределения случайной переменной по результатам испытаний обычно решают две задачи:

1. Задача выравнивания (сглаживания) полученного при испытании статистического ряда. При решении данной задачи подбирают теоретическую кривую распределения, которая выражает лишь существенные черты статистического распределения.

2. Задача проверки гипотезы о законе распределения. В результате решения устанавливают причины расхождения между подобранной теоретической кривой распределения и статистическим распределением. Расхождение может быть обусловлено либо случайными отклонениями, либо тем, что подобранная кривая плохо описывает статистическое распределение.

Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую кривую распределения, которая с той или иной точки зрения наилучшим образом описывает данное статистическое распределение. Выбранный в результате решения данной задачи теоретический закон распределения принимается в качестве нулевой гипотезы. Для ее решения используют метод моментов, систему кривых К. Пирсона, систему кривых Н. А. Бородачева и ряд других методов.

Для выбора нулевой гипотезы может быть использована следующая методика. По результатам испытаний находят оценки коэффициентов асимметрии a_x^* и эксцесса e_x^*

$$a_x^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_x^{*3}}; \quad e_x^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_x^{*4}} - 3; \tag{13.1}$$

где σ_x^* — оценка стандартного отклонения исследуемой случайной переменной X,

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2}{n-1}};$$

μ_3^* (μ_4^*) — оценка центрального момента третьего (четвертого) порядка случайной переменной X,

$$\mu_3^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^3; \quad \mu_4^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^4.$$

Доказано, что каждому закону распределения соответствует вполне определенное соотношение между коэффициентами асимметрии и эксцесса. На основе данного свойства строят диаграмму, на которой могут быть выделены точки, прямые и области, отвечающие соответствующему распределению. Такая диаграмма показана на рис. 13.3.

С помощью этой диаграммы можно приближенно определить гипотетический закон распределения, который следует выдвигать в качестве нулевой гипотезы. Для этого на диаграмму наносится точка с координатами (a_x^{*2}, e_x^*), которые получены по формулам (13.1). Если она окажется вблизи от точки, прямой или области, соответствующей одному из распределений, то его и следует выдвигать в качестве нулевой гипотезы.

На диаграмме (рис. 13.3) выделены характерные точки, прямые и области, которые соответствуют следующим распределениям:

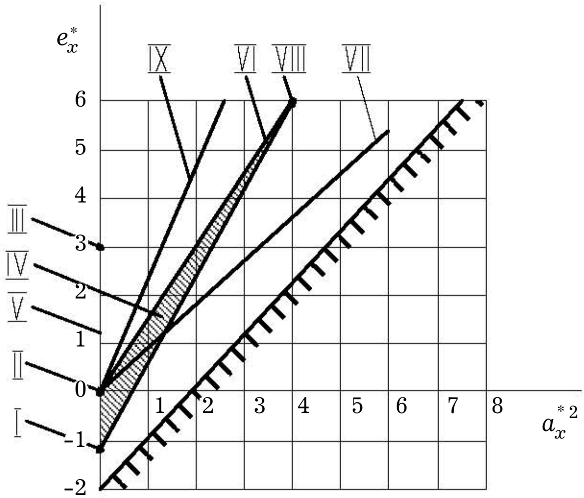


Рис. 13.3

- точки с координатами:
  (0; −1,2), (точка I) — равномерному;
  (0, 0), (точка II) — нормальному;
  (0, 3), (точка III) — распределению Лапласа;
  (4, 6), (точка VIII) — показательному;
- прямые:
  V — Стьюдента;
  VI — гамма-распределению;
  VII — Пуассона;
  IX — логарифмически-нормальному;
- область IV — бета-распределению.

После выдвижения нулевой гипотезы приступают к решению второй задачи, т. е. к проверке справедливости выдвинутой гипотезы.

13.2.2. Проверка гипотез о законе распределения

Задача проверки гипотезы о законе распределения формулируется следующим образом.

Предположим, в результате испытания получена случайная выборка $X_1, X_2, ..., X_n$. Для этой выборки подобран теоретический закон распределения, который представлен функцией распределения $F(x)$ либо плотностью распределения $f(x)$.

Требуется на основании анализа полученной выборки проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что исследуемая случайная переменная X подчинена выбранному закону распределения.

На практике наиболее часто для проверки нулевой гипотезы применяют методы А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова и К. Пирсона.

Эти методы различаются видом меры рассогласования между статистическим и теоретическим (выбранным в качестве нулевой гипотезы) законом распределения. В методах Колмогорова и Смирнова в качестве меры рассогласования используется функция разности между статистической функцией распределения $F^*(x)$ и функцией распределения $F(x)$ теоретического закона, т. е.

$$d = \varphi_1[F^*(x) - F(x)], \qquad (13.2)$$

а в методе Пирсона — функция разности между частотой P^* и вероятностью попадания P случайной переменной X в заданные интервалы, т. е.

$$d = \varphi_2[P_j^* - P_j], \qquad (13.3)$$

где j — номер интервала.

Рассмотрим содержание указанных методов проверки нулевой гипотезы.

Проверка гипотез методом А. Н. Колмогорова

При проверке гипотез данным методом в качестве показателя согласованности (ПС) принимают случайную величину

$$u = \sqrt{n}\max_x |F^*(x) - F(x)|, \qquad (13.4)$$

где n — объем выборки;

$F^*(x)$, $F(x)$ — соответственно статистическая и теоретическая функции распределения исследуемой случайной переменной X.

Независимо от вида закона распределения случайной переменной X функция распределения ПС при $n \to \infty$ имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k exp(-2k^2u^2), \qquad (13.5)$$

где k — число степеней свободы;

u — показатель согласованности.

В качестве критической области используется правосторонняя область, границу u_α которой определяют из условия

$$\alpha = P(u \geq u_\alpha) = 1 - P(u < u_\alpha) = 1 - F(u = u_a),$$

т. е. она равна квантилю случайной величины u при аргументе

$$u_\alpha = F^{-1}(*)(1 - \alpha) \qquad (13.6)$$

где $F^{-1}(*)$ — функция, обратная функции распределения показателя согласованности.

Для определения u_α в соответствии с формулой (13.6) составлена специальная табл. 13.1.

Таблица 13.1

α	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
u_α	0,828	1,224	1,258	1,627	1,950

Проверка нулевой гипотезы методом А. Н. Колмогорова производится следующим образом.

1. По результатам испытаний строят статистическую функцию распределения $F^*(x)$ (рис. 13.4).

2. На том же графике строят функцию $F(x)$ теоретического закона распределения, принятого в качестве нулевой гипотезы.

3. По графику определяют максимальную величину модуля разности ординат статистической и теоретической функций распределения и вычисляют значение показателя согласованности u по формуле (13.4).

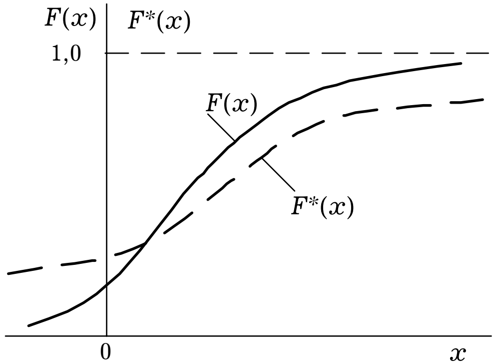


Рис. 13.4

4. Назначают уровень значимости критерия α и по табл. 13.1 определяют критическое значение показателя согласованности u_α.

5. Проверяют справедливость выдвинутой гипотезы H_0. Если выполняется неравенство $u \geq u_\alpha$, то гипотезу H_0 бракуют, в противном случае делают вывод, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о том, что исследуемая случайная переменная X подчинена закону распределения с функцией $F(x)$.

Достоинством метода А. Н. Колмогорова является его простота и отсутствие сложных расчетов. Однако для его применения необходимо знать не только вид теоретического закона распределения, но и его параметры. Кроме того, метод учитывает только максимальное отклонение статистической функции распределения от теоретической функции, а не закон изменения отклонения по всему размаху выборки.

Проверка гипотез методом Н. В. Смирнова

При проверке гипотезы данным методом в качестве меры рассогласования теоретического и статистического законов распределения принимается функция разности статистической и теоретической функции распределения. В качестве показателя согласованности используется среднее значение разности по всей области определения функции распределения.

Если исследуемая случайная переменная X непрерывного типа, то ПС определяется выражением

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} [F^*(x) - F(x)]^2 f(x) dx. \qquad (13.7)$$

Для дискретной случайной величины выражение (13.7) запишется в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n} [F^*(x) - F(x)]^2 P_i, \qquad (13.8)$$

где P_i — вероятность появления в выборке значения x_i.

На практике для удобства вычислений выражение (13.8) преобразуют к виду

$$u = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F^*(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \qquad (13.9)$$

Значения критической границы u_α в зависимости от уровня значимости критерия α приведены в табл. 13.2. Они рассчитываются в соответствии с законом распределения ПС по формуле

$$u_\alpha = F^{-1}(1 - \alpha),$$

где $F^{-1}(*)$ — функция, обратная функции распределения показателя согласованности.

Таблица 13.2

α	0,5	0,1	0,05	0,02	0,001
u_α	0,118	0,347	0,461	0,620	0,744

Проверка нулевой гипотезы методом Н. В. Смирнова производится в следующем порядке:

1. Вычисляют по результатам испытаний значение показателя согласованности u в соответствии с (13.9).

2. Назначают уровень значимости α и по таблице 13.2 определяют значение границы критической области u_α.

3. Проверяют справедливость нулевой гипотезы H_0. Если выполняется неравенство $u > u_\alpha$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Если же $u \le u_\alpha$, то делается вывод о том, что результаты испытания не противоречат гипотезе о распределении переменной X по предполагаемому закону с функцией $F(x)$.

Проверка гипотез методом К. Пирсона

В качестве меры расхождения теоретического и статистического законов распределения принята сумма квадратов разностей между частотой и вероятностью попадания исследуемой случайной переменной X в интервалы, на которые разбивается множество возможных значений этой переменной

$$u = \sum_{j=1}^{m} C_j (P_j^* - P_j)^2, \tag{13.10}$$

где m — число интервалов, на которые разбивается множество возможных значений при построении статистической функции распределения.

Коэффициенты C_j вводятся для того, чтобы учесть неравнозначность абсолютных значений разностей $(P_j^* - P_j)$ при различных значениях вероятности P_j. Поскольку одно и то же значение разности $(P_j^* - P_j)$ является малозначимым при большой вероятности P_j и представляет собой заметную величину, когда P_j мала.

К. Пирсон показал, что если коэффициенты C_j определять в соответствии с выражением

$$C_j = \frac{n}{P_j}$$

то при большом объеме выборки закон распределения случайной величины u, определяемой формулой (13.10), практически не зависит от вида закона распределения случайной переменной X и объема выборки n, а зависит только от числа интервалов m. При этом при увеличении m закон распределения случайной величины u приближается к χ^2 (хи-квадрат)-распределению с числом степеней свободы $k = m - 1$.

На практике в качестве ПС используют и случайную величину

$$u = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j - nP_j)^2}{nP_j}, \tag{13.11}$$

где n_j — число результатов испытаний, попавших в j-й интервал;

P_j — вероятность попадания результата испытания в j-й интервал при теоретическом законе распределения исследуемой переменной X.

В зависимости от формы представления результатов испытаний (исходными данными для проверки гипотезы являются P_j^* или n_j) в качестве ПС принимают выражение (13.10) либо (13.11).

В дальнейшем будем рассматривать ПС вида (13.11).

Если параметры теоретического закона, который принят в качестве нулевой гипотезы, неизвестны, то вычисление вероятностей P_j не представляется возможным. Оказывается, что если при определении этих вероятностей вместо неизвестных значений параметров теоретического распределения $\Theta_{x_1}, \Theta_{x_2}, \ldots \Theta_{x_s}$ подставить соответствующие их оценки $\Theta^*_{x_1}, \Theta^*_{x_2}, \ldots \Theta^*_{x_s}$, полученные по результатам испытаний, то случайная величина

$$u = \sum_{j=1}^{m} \frac{[n_j - nP_j(\Theta^*_{x_1}, \Theta^*_{x_2}, \ldots, \Theta^*_{x_s})]^2}{nP_j(\Theta^*_{x_1}, \Theta^*_{x_2}, \ldots, \Theta^*_{x_s})}, \qquad (13.12)$$

при $n \to \infty$ также будет иметь χ^2-распределение, но с числом степеней свободы

$$k = m - 1 - s, \qquad (13.13)$$

где s — число неизвестных параметров теоретического закона распределения.

Так, например, для нормального закона распределения $s = 2$ (параметры — математическое ожидание и дисперсия), для показательного — $s = 1$ (параметр — коэффициент λ) и т. д.

Таким образом, для проверки нулевой гипотезы в качестве показателя согласованности принимают случайную величину (13.12). При этом неизвестные значения параметров теоретического распределения определяют с помощью статистических оценок.

При группировании результатов испытаний по интервалам для нахождения оценок математического ожидания и дисперсии обычно используют формулы

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_{cpj} n_j, \qquad (13.14)$$

$$D_x^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_{cpj}^2 \cdot n_j - m_x^{*2}, \qquad (13.15)$$

где x_{cpj} — абсцисса середины j-го интервала.

В работе [8] показано, что в качестве критической целесообразно выбирать правостороннюю критическую область. Для выделения значений критической границы u_α можно использовать таблицу χ^2 (хи-квадрат)-распределения (табл. 11 приложения), входами в которую являются уровень значимости α и число степеней свободы k.

Проверка гипотезы методом К. Пирсона производится в следующем порядке.

1. Результаты испытаний представляют в виде таблицы

$I = [x_j, x_{j+1}]$	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_j, x_{j+1}	...	x_{m-1}, x_m
n_j	n_1	n_2	...	n_j	...	n_m

2. Находят оценки параметров теоретического закона распределения по результатам испытаний (формулы (13.14), (13.15)).

3. Определяют вероятности P_j попадания случайной величины X в соответствии с теоретическим законом распределения в j-й интервал.

$$P_j = P(x_j \le x < x_{j+1}) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx.$$

4. Рассчитывают значение показателя согласованности u по формуле (13.12).

5. По формуле (13.13) определяют число степеней свободы k для входа в таблицу χ^2-распределения.

6. Назначают уровень значимости α и по таблицам χ^2-распределения находят значение критической границы u_α. Входами в таблицу служат уровень значимости α и число степеней свободы k.

7. Проверяется условие $u < u_\alpha$. Если оно выполняется, то расхождение между экспериментальным (статистическим) и теоретическим законами распределения несущественно (гипотеза H_0 принимается). В противном случае гипотеза H_0 бракуется.

Достоинством метода К. Пирсона является то, что его можно применять и в том случае, когда известен только вид теоретического распределения, но не известны параметры распределения.

В этом случае параметры распределения заменяются их оценками, полученными по результатам испытаний, а число степеней свободы χ^2-распределения ПС уменьшается на число заменяемых параметров.

К недостаткам метода К. Пирсона относят следующее:

- метод применим при большом объеме выборки ($n \geq 100$), так как распределение ПС описывается χ^2-распределением только при достаточно большом n;
- достоверность выводов существенно зависит от способа разбиения выборки на интервалы. Число интервалов должно быть не менее 10, а количество попаданий исследуемой переменной X в любой из интервалов — не менее 5. Если это условие не выполняется, то интервалы объединяют.

Пример 13.1. Радиоактивное вещество наблюдалось в 1300 испытаниях, при каждом из которых регистрировалось число частиц, попавших в счетчик за один и тот же промежуток времени.

Результаты испытаний представлены в табл.13.3.

Таблица 13.3

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_j	31	102	191	258	266	205	136	68	22	13	8

Установить закон распределения числа частиц, выделяющихся при радиоактивном распаде за данный промежуток времени.

Решение

Исходя из сущности рассматриваемого явления, предполагаем, что распределение числа частиц подчиняется закону Пуассона, и проверяем выдвинутую гипотезу с помощью соответствующего ПС.

1. По формуле (13.14) при $x_{срj} = j$ находим значение параметра α распределения Пуассона, соответствующее полученным результатам:

$$\alpha^* = 3{,}385.$$

2. По формуле (13.13) определяем число степеней свободы ПС k, приняв $m = 11$ и $s = 1$

$$k = 11 - 1 - 1 = 9.$$

3. Принимаем уровень значимости ПС $\alpha = 0{,}10$ вероятностей χ^2-распределения, и по табл. 13 приложения находим соответствующее критическое значение $u_\alpha = 14{,}7$.

4. Рассчитываем по формуле (13.12) значение ПС u^*, соответствующее результатам испытаний. При этом случайные величины N_j заменяем числами n_j, а вероятности $Pj(\alpha^*)$ определяем с помощью таблицы вероятностей (см. приложение табл. 6) распределения Пуассона при $m = \alpha^*$ и $k = j = 0, 1, 2, \ldots, 10$ (см. табл. 13.4).

Таблица 13.4

j	n_j	$P_j(a^*)$	$nP_j(a^*)$	$n_j - nP_j(a^*)$	$[n_j - nP_j(a^*)]^2$	$\dfrac{[n_j - nP_j(a^*)]^2}{nP_j(a^*)}$
0	31	0,023	29,9	1,1	1,2	0,0
1	102	0,084	109,2	-7,2	51,8	0,5
2	191	0,158	205,4	-14,4	207,4	1,0
3	258	0,200	260,0	-2,0	4,0	0,0
4	266	0,193	250,9	15,1	228,0	0,9
5	205	0,148	192,4	12,6	158,8	0,8
6	136	0,096	124,8	11,2	125,4	1,0
7	68	0,054	70,2	-2,2	4,8	0,1
8	22	0,027	35,1	-13,1	171,6	4,9

j	n_j	$P_j(a^*)$	$nP_j(a^*)$	$n_j - nP_j(a^*)$	$[n_j - nP_j(a^*)]^2$	$\dfrac{[n_j - nP_j(a^*)]^2}{nP_j(a^*)}$
9	13	0,012	15,6	-2,6	6,8	0,4
10	8	0,005	6,5	1,5	2,2	0,3
$\sum$	1300	1,0	—	—	—	$u = 9{,}9$

5. Сопоставляя значения $u = 9{,}9$ и $u_\alpha = 14{,}7$, приходим к выводу о том, что результаты испытаний не противоречат выдвинутой нами гипотезе о виде закона распределения.

13.3. Методы проверки гипотез о параметрах законов распределения

13.3.1. Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий

Предположим, что имеются две нормально распределенные случайные переменные X и Y, математические ожидания которых неизвестны. Над этими переменными производят соответственно n_1 и n_2 наблюдений, т. е. получают случайные выборки $\left(X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}\right)$, $\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}\right)$. По этим выборкам находят оценки математических ожиданий

$$m_x^* = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad m_y^* = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i. \tag{13.16}$$

Требуется по полученным оценкам проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий m_x и m_y.

Такая задача ставится потому, что, как правило, оценки математических ожиданий оказываются различными. Это обусловлено тем, что отличны и оценки и математические ожидания, либо математические ожидания одинаковы, а различие оценок вызвано случайными причинами.

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. m_x и m_y одинаковы, то различие в оценках m_x^* и m_y^* будет за счет действия случайных причин. В противном случае это различие обусловлено отличием математических ожиданий.

При проверке гипотез о равенстве математических ожиданий следует различать два случая: в первом — точность результатов измерений известна (известны стандартные отклонения σ_x и σ_y), во втором — точность неизвестна.

Точность результатов измерений известна

При проверке нулевой гипотезы в этом случае в качестве показателя согласованности принимают случайную величину

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}. \qquad (13.17)$$

Показатель согласованности (13.17) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, при условии, что справедлива нулевая гипотеза и дисперсия равна единице, т. е. $u \in N(0,1)$.

Критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы, которая может быть сформулирована тремя способами:

$$H_1\colon m_x \neq m_y;\ H_1\colon m_x > m_y;\ H_1\colon m_x < m_y.$$

Рассмотрим методику проверки гипотезы H_0 для первого способа, как наиболее часто встречающегося при решении практических задач

$$H_0\colon m_x = m_y;\ H_1\colon m_x \neq m_y.$$

В этом случае строят двустороннюю критическую область так, чтобы вероятность попадания в нее значений ПС при предположении о справедливости H_0 была равна принятому уровню значимости $\alpha/2$ (рис. 13.5).

Наибольшая мощность критерия обеспечивается в том случае, когда левая и правая границы критической области выбраны так, что вероятность попадания ПС в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$, т. е.

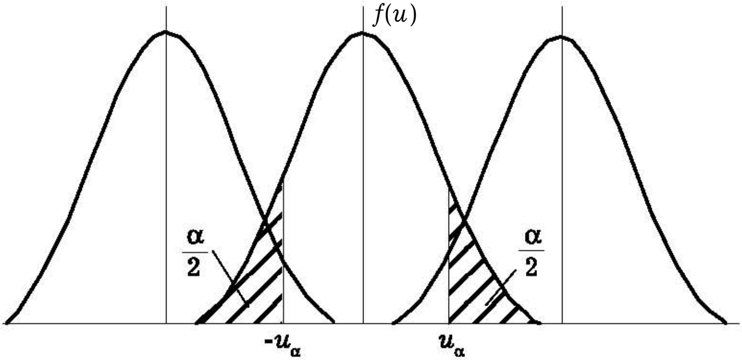


Рис. 13.5

$$P(u < u_\alpha) = P(u > u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

Вероятность попадания ПС в критическую область можно определить с использованием табличной функции Лапласа

$$P(|u| < u_\alpha) = 1 - \Phi_T(u_\alpha) = \alpha \quad (13.18)$$

или табличной функции нормального закона распределения

$$P(|u| < u_\alpha) = 1 - F_T(u_\alpha) = 1 - \alpha/2.$$

Откуда находим

$$u_\alpha = \Phi_{\text{T}}^{-1}(1 - \alpha) \quad (13.19)$$

или

$$u_\alpha = F_{\text{T}}^{-1}(1 - \alpha / 2).$$

Из таблицы функции Лапласа или функции нормального закона распределения по аргументу $(1 - \alpha)$ или $(1 - \alpha/2)$ выбираем значение u_α.

Таким образом, проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий для рассматриваемого случая производится в следующем порядке:

1. В соответствии с формулами (13.16) по результатам испытаний находят оценки математических ожиданий m_x^*, m_y^*.

2. По формуле (13.17) вычисляют значение показателя согласованности u.

3. Назначают уровень значимости α, и по таблицам функции Лапласа или нормального закона распределения в соответствии с формулой (13.19) находят границы критической области u_α.

4. Проверяют условие $|u| < u_\alpha$. Если оно выполняется, то гипотезу H_0 принимают как справедливую, т. е. считают, что математические ожидания m_x и m_y равны. В противном случае гипотезу H_0 отклоняют.

Пример 13.2. Производится контрольный отстрел двух партий снарядов, причем из первой партии проверяется 10 снарядов, а из второй — 15. После обработки результатов отстрела получены оценки математических ожиданий отклонения точек падения снарядов от точки прицеливания по дальности: для первой партии $m_x^* = -0{,}8$ м, для второй партии $m_y^* = -0{,}4$ м. Стандартные отклонения по дальности для снарядов первой и второй партий известны и соответственно равны 2 и 1,5 м. Необходимо проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий отклонения точек падения снарядов m_x и m_y.

Решение

1. Выдвигаем нулевую и альтернативную гипотезы:

$$H_0\colon m_x = m_y;\ H_1\colon m_x \neq m_y.$$

2. Вычисляем значение показателя согласованности

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_2}}} = \frac{-0{,}8 - 0{,}4}{\sqrt{\dfrac{4}{10} + \dfrac{2{,}25}{12}}} = -1{,}62.$$

3. Задаемся уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, и по таблице функции Лапласа находим границу критической области $u_\alpha = 1{,}96$.

Так как $|u| < u_\alpha$, то нулевая гипотеза $m_x = m_y$ не противоречит данным контрольного отстрела.

Для задания альтернативной гипотезы по второму ($H_1\colon m_x > m_y$) и третьему ($H_1\colon m_x < m_y$) способам необходима априорная информация о том, что математическое ожидание случайной переменной X больше или меньше математического ожидания случайной переменной Y. Сущность проверки нулевой гипотезы аналогична вышеописанной, но в этих случаях строят правостороннюю и левостороннюю критические области соответственно.

Определение границы u_α покажем на примере определения границы правосторонней критической области

$$P(u \geq u_\alpha) = \alpha. \tag{13.20}$$

Перепишем выражение (13.5) в виде

$$P(u_\alpha \leq u < \infty) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{\text{Т}}\left(\frac{\infty - m_u}{\sigma_u}\right) - \Phi_{\text{Т}}\left(\frac{u_\alpha - m_u}{\sigma_u}\right)\right].$$

Поскольку $\Phi_{\text{Т}}(\infty) = 1$ и $m_u = 0$, $\sigma_u = 1$, то

$$P(u \geq u_\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi_{\text{Т}}(u_\alpha)\right) = \alpha.$$

Следовательно, $\Phi_{\text{Т}}(u_\alpha) = 1 - 2\alpha$

и

$$u_\alpha = \Phi_{\text{Т}}^{-1}\left(1 - 2\alpha\right).$$

Граница критической области u_α определяется по таблице функции Лапласа, входом в которую является величина $(1 - 2\alpha)$.

Аналогично определяется граница левосторонней критической области.

Описанный метод проверки гипотез можно применять, если случайные переменные X и Y распределены по нормальному закону и характеристики точности результатов измерений известны. При нарушении одного из этих предположений метод не применим.

Однако если объем выборок большой ($n \geq 30$), то распределение оценок математических ожиданий m_x^* и m_y^* приближенно можно считать нормальным. Следовательно, и показатель согласованности, в качестве которого принимают случайную величину

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^{*2}}{n_1} + \frac{\sigma_y^{*2}}{n_2}}},$$

будет иметь нормальное распределение. Проверку гипотезы можно проводить по описанной выше методике, но к полученным выводам следует относиться с осторожностью.

Точность результатов измерений неизвестна

Решать задачу проверки гипотезы, в случае если число измерений будет менее 30 ($n < 30$), описанным выше методом нельзя, так как распределение ПС

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^{*2}}{n_1} + \frac{\sigma_y^{*2}}{n_2}}}$$

будет отлично от нормального.

Задачу проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий можно решить лишь при наличии дополнительной информации о соотношении дисперсий

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = a.$$

В частном случае дисперсии случайных величин X и Y σ_x^2 и σ_y^2 могут быть равны ($\alpha = 1$).

Если соотношение дисперсий известно, то в качестве ПС принимают случайную величину

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{a(n_1 - 1)\sigma_x^{*2} + (n_2 - 1)\sigma_y^{*2}}} \sqrt{\frac{an_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{an_1 + n_2}}. \qquad (13.21)$$

Данный показатель согласованности имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы

$$K = n_1 + n_2 - 2. \qquad (13.22)$$

Аналогично, как и при проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий при известной точности результатов измерений, критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы. Например,

при H_0: $m_x = m_y$, H_1: $m_x \neq m_y$

строят двустороннюю критическую область. Поскольку кривая плотности распределения Стьюдента симметрична относительно нуля, то критическая область является симметричной. Границы критической области $\pm u_\alpha$ могут быть определены либо с помощью таблицы распределения Стьюдента (табл. 8 приложения), в которой представлены значения вероятности

$$\alpha = 2\int_{0}^{u_\alpha} f(u)du,$$

где $f(u)$ — плотность распределения Стьюдента,
либо с помощью таблицы функции распределения Стьюдента (табл. 12 приложения).

Порядок проверки гипотезы такой же, как и при проверке гипотезы в случае, если точность результатов измерений известна.

13.3.2. Проверка гипотез о равенстве дисперсий

Задачи проверки гипотез о равенстве дисперсий приходится решать при сравнении точности приборов, методов измерений, погрешности показаний измерительных устройств и т. д.

Подобные задачи формулируются следующим образом. Предположим, имеются две нормально распределенные случайные величины X и Y, математические ожидания и дисперсии которых неизвестны.

При наблюдении за этими переменными получены случайные выборки ($X_1, X_2, ..., X_n$,) и ($Y_1, Y_2, ..., Y_n$) соответственно.

При обработке результатов наблюдений найдены оценки дисперсий

$$D_x^* = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_x^*)^2;$$

$$D_y^* = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - m_y^*)^2,$$

где m_x^*, m_y^* — оценки математических ожиданий случайных переменных X и Y.

По полученным оценкам D_x^* и D_y^* необходимо вынести суждение о равенстве истинных значений дисперсий D_x и D_y, т. е. проверить нулевую гипотезу H_0: $D_x = D_y$.

Если нулевая гипотеза будет справедлива, то это означает, что выборочные оценки D_x^* и D_y^* представляют собой оценки одной и той же дисперсии, а их различие обусловлено случайными причинами. В противном случае различие дисперсий существенно.

В качестве показателя согласованности проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий принимают случайную величину

$$u = \frac{D_x^*}{D_y^*}. \tag{13.23}$$

Показатель согласованности (13.23) имеет распределение Фишера (F-распределение) с числами степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$. Известно, что распределение Фишера зависит только от значений чисел степеней свободы и не зависит от других параметров. Плотность распределения Фишера показана на рис. 13.6.

Для распределения Фишера составлена таблица значений u_p, удовлетворяющих равенству

$$P = \int_{u_p}^{\infty} f(u)du. \tag{13.24}$$

при различных комбинациях k_1, k_2 и значениях вероятности P, равных 0,01 и 0,05 (табл.14 приложения).

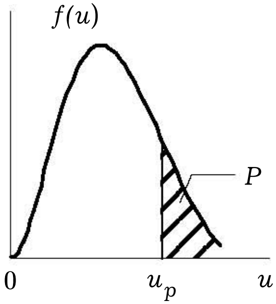


Рис. 13.6

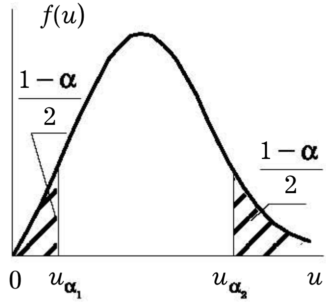


Рис. 13.7

Альтернативная гипотеза H_1 может быть задана тремя способами:

$$H_1\colon D_x \neq D_y;$$
$$H_1\colon D_x > D_y;$$
$$H_1\colon D_x < D_y.$$

В зависимости от способа задания гипотезы H_1 имеют место особенности в определении границ критической области. Определение границы критической области рассмотрим в наиболее общем случае, когда альтернативная гипотеза задается в виде $H_1\colon D_x \neq D_y$, т. е. необходимо построить двустороннюю критическую область. В этом случае при заданном уровне значимости необходимо определить два значения u_α: левое u_{α_1} и правое u_{α_2} (рис. 13.7).

Наибольшая мощность критерия проверки гипотезы обеспечивается тогда, когда вероятности попадания ПС в каждый из двух интервалов критической области будут одинаков и равны $\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, при построении критической области должны выполняться следующие условия

$$P(u < u_{\alpha_1}) = P(u > u_{\alpha_2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Правая критическая точка u_{α_2} может быть найдена непосредственно из таблицы распределения Фишера, при этом входом в таблицу будут

$$P = \frac{\alpha}{2}, k_1 = n_1 - 1, k_2 = n_2 - 1.$$

Однако левых критических точек эта таблица не содержит и поэтому непосредственно по ним найти u_{α_1} невозможно, поскольку таблицы Фишера составлены лишь для малых значений вероятностей. Поэтому для проверки нулевой гипотезы с использованием ПС (13.23) используют следующий искусственный прием.

Если окажется, что $D_x^* > D_y^*$, то из таблицы вероятностей распределения Фишера находят значение u_p при числах степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ и $P = \frac{\alpha}{2}$. При этом значение ПС рассчитывают по формуле

$$u = \frac{D_x^*}{D_y^*}. \tag{13.25}$$

Если же $D_x^* < D_y^*$, то для вычисления ПС используют формулу

$$u = \frac{D_y^*}{D_x^*}, \tag{13.26}$$

а из таблицы вероятностей находят значение u_p при числах степеней свободы $k_1 = n_2 - 1$, $k_2 = n_1 - 1$ и $P = \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, значение ПС, отвечающее результатам наблюдений, получают, подставляя в числитель выражения (12.23) большее из значений оценок D_x^* и D_y^*.

Нулевую гипотезу отклоняют, если вычисленное значение ПС превзойдет выбранное таким образом значение u_p, т. е. если $u > u_p$. В противном случае гипотезу H_0 считают справедливой.

Описанный прием проверки нулевой гипотезы H_0: $D_x = D_y$ позволяет отклонить или принять ее как в случае, когда $D_x^* < D_y^*$, так и в случае, когда $D_x^* > D_y^*$.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий проводится в следующем порядке:

1. По результатам наблюдений находят оценки дисперсий D_x^*, D_y^*.

2. Вычисляют значение показателя согласованности по формуле (13.25) или (13.26) в зависимости от соотношения оценок дисперсий.

3. Задают уровень значимости α и находят по таблице вероятностей Фишера критическое значение показателя согласованности u_p. Входами в таблицу являются числа степеней свободы k_1, k_1 и $\frac{\alpha}{2}$.

4. Проверяют справедливость нулевой гипотезы. Если выполняется неравенство $u < u_p$, то нулевую гипотезу принимают. В противном случае ее отклоняют как несправедливую.

Показатель согласованности (13.23) можно использовать при сравнении дисперсий и в том случае, когда одна из них известна, т. е. для нее найдена не оценка, а точное значение.

При этом число степеней свободы закона распределения Фишера в числителе или знаменателе ПС следует устремить к бесконечности. В остальном, методика проверки гипотезы остается прежней.

Пример 13.3. По результатам измерений при стендовых испытаниях десяти ЖРД определены числовые характеристики секундного расхода окислителя, значения которых оказались равными:

$$m_x^* = 150{,}5\, кг/с \text{ и } \sigma_x^* = 2{,}1\, кг/с.$$

При летных испытаниях десяти ракет с двигателями той же партии получены значения числовых характеристик:

$$m_y^* = 149{,}6\, кг/с \text{ и } \sigma_y^* = 1{,}9\, кг/с.$$

Требуется установить, изменяются ли действительные значения числовых характеристик в зависимости от того, в каких условиях работают двигатели (на стенде или в полете), если для измерения секундного расхода при стендовых и летных испытаниях использовались однотипные датчики.

Решение

1. Проверяем гипотезу о равенстве средних квадратических отклонений (дисперсий) секундного расхода, окислителя, для чего:

а) принимаем уровень значимости ПС равным 0,1 и по таблице F-распределения при числах степеней свободы $k_1 = k_2 = 9$ и $P = 0{,}05$ находим критическое значение $u_p = 3{,}18$;

б) по формуле (13.25), заменяя в ней D_x^* и D_y^* на σ_x^{*2} и σ_y^{*2}, вычисляем значение ПС u, отвечающее результатам испытаний:

$$u = (2{,}1/1{,}9)^2 = 1{,}22.$$

Поскольку вычисленное значение ПС оказывается в области допустимых значений при достаточно высоком уровне значимости, можно считать, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о равенстве средних квадратических отклонений секундного расхода окислителя при работе двигателей на стенде и в полете.

2. Проверяем гипотезу о равенстве математических ожиданий секундного расхода окислителя. Для этого, принимая во внимание результаты проверки гипотезы о равенстве дисперсий, используем ПС вида (13.21):

а) по формуле (13.22) вычисляем число степеней свободы показателя согласованности

$$k = 10 + 10 - 2 = 18;$$

б) принимаем уровень значимости ПС равным 0,1 и по таблице распределения Стьюдента при числе степеней свободы $k = 18$ находим критическое значение ПС $|u_\alpha| = 1{,}734$;

в) определяем значение ПС, отвечающее результатам испытаний

$$u = \frac{150{,}5 - 149{,}6}{\sqrt{(2{,}1)^2 \cdot 9 + (1{,}9)^2 \cdot 9}} \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot (10 + 10 - 2)}{10 + 10}} = 1{,}005.$$

Сопоставляя вычисленное значение ПС с критическим, приходим к выводу о том, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о равенстве математических ожиданий секундного расхода окислителя при работе двигателей на стенде и в полете.

13.4. Проверка гипотез методом последовательного анализа

13.4.1. Сущность метода последовательного анализа

В пунктах 13.2 и 13.3 были изложены методы проверки гипотез по классической схеме, когда все множество возможных значений ПС разбивалось на два подмножества (две области): область допустимых значений и критическую область (рис. 13.8) [2].

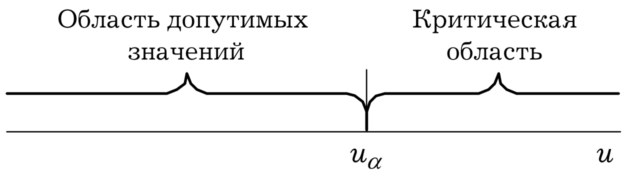


Рис. 13.8

Решение о принятии или отклонении нулевой гипотезы принимается в зависимости от того, в какую область попало вычисленное по результатам испытаний значение ПС.

Классическим методам присущи два недостатка:

• при малых объемах выборок принятие решения связано со значительной долей риска. Это обусловлено тем, что при уменьшении объема выборок увеличиваются вероятности ошибок первого и второго рода;

• не существует подходов к обоснованию оптимальных объемов выборок, что затрудняет планирование и проведение экспериментов.

Метод последовательного анализа, разработанный А. Вальдом в некоторой степени свободен от этих недостатков. В отличие от классических методов в методе последовательного анализа вводится еще одна область — область продолжения испытаний (рис. 13.9).

При попадании значения ПС в эту область принимается решение на необходимость проведения еще одного испытания. Испытания проводятся до тех пор, пока не будет приня-

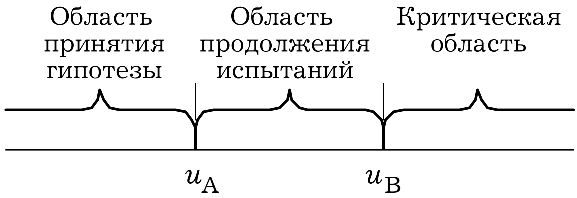


Рис. 13.9

то решение на принятие или отклонение нулевой гипотезы. Число испытаний в методе последовательного анализа заранее не фиксируется. Оно зависит от конкретных полученных результатов испытаний, т. е. число испытаний является случайным.

Предпочтительными критериями принятия или отклонения нулевой гипотезы должны быть такие, чтобы при фиксированных вероятностях ошибок первого и второго рода обеспечивался минимум математического ожидания необходимого объема выборки. При использовании таких критериев метод последовательного анализа оказывается более экономичным по сравнению с классическим, так как в среднем требует для реализации меньшего числа испытаний.

При проверке гипотез методом последовательного анализа выделяют два этапа:

- выбирают показатель согласованности $u(n)$;
- устанавливают решающее правило, в соответствии с которым после каждого испытания принимают одно из трех решений:
  - – нулевую гипотезу принять;
  - – нулевую гипотезу отклонить;
  - – провести еще одно испытание.

В качестве показателя согласованности при проверке гипотез данным методом принимают предложенный Вальдом последовательный показатель отношения вероятностей

$$u(n) = \frac{P_{1n}}{P_{0n}}, \qquad (13.27)$$

где P_{0n} — вероятность появления результатов испытаний $x_1, x_2, ..., x_n$ при условии справедливости проверяемой гипотезы;

P_{1n} — вероятность появления этих результатов при условии, что проверяемая гипотеза неверна.

Проверяемая гипотеза принимается, если после n-го испытания выполняется условие

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}, \tag{13.28}$$

или отклоняется, если окажется, что

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \geq \frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{13.29}$$

Если же вычисленное значение показателя согласованности после n-го испытания будет удовлетворять неравенству

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{P_{1n}}{P_{0n}} < \frac{1-\beta}{\alpha}, \tag{13.30}$$

то проводят еще одно испытание. После проведения испытания вычисляют новое значение ПС и проверяют неравенства (13.28–13.30).

Такой пошаговый процесс проверки гипотезы продолжают до тех пор, пока не будет принято решение: проверяемая гипотеза принимается либо отклоняется.

Метод последовательного анализа в окончательном виде разработан для решения лишь отдельных задач статистической проверки гипотез. Рассмотрим некоторые из этих задач.

13.4.2. Проверка гипотезы о вероятности наступления события

Решение данной задачи рассмотрим на примере контроля качества готовой продукции по доле в ней дефектных изделий. Из партии готовой продукции по одному извлекают изделие и подвергают контролю. Изделие может оказаться годным или дефектным. Совокупность результатов испытаний за n шагов можно описать числом m дефектных изделий среди n подвергнутых контролю. Вероятность извлечения дефектного изделия из партии при большом ее объеме численно равна доле таких изделий в партии.

Введем обозначения:

P_0 — наибольшая доля дефектных изделий в партии, при которой партия считается еще годной;

P_1 — наименьшая доля дефектных изделий, при которой она считается уже негодной.

Последовательный показатель отношения вероятностей после n-го шага будет определяться выражением

$$u_n = \frac{C_n^m P_1^m (1-P_1)^{n-m}}{C_n^m P_0^m (1-P_0)^{n-m}} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)^{n-m}. \tag{13.31}$$

С учетом (13.31) неравенства (13.28)–(13.30) запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)^{n-m} \le \frac{\beta}{1-\alpha};$$

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)^{n-m} \ge \frac{1-\beta}{\alpha};$$

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)^{n-m} < \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Прологарифмировав эти выражения, получим

$$\left.\begin{aligned} m &\le a_n; \\ m &\ge r_n; \\ a_n < m &< r_{n,} \end{aligned}\right\} \tag{13.32}$$

где

$$a_n = \frac{\ln\dfrac{\beta}{1-\alpha} + n\ln\dfrac{1-P_0}{1-P_1}}{\ln\dfrac{P_1}{P_0} - \ln\dfrac{1-P_1}{1-P_0}}; \tag{13.33}$$

$$r_n = \frac{\ln\dfrac{1-\beta}{\alpha} + n\ln\dfrac{1-P_0}{1-P_1}}{\ln\dfrac{P_1}{P_0} - \ln\dfrac{1-P_1}{1-P_0}}. \tag{13.34}$$

Значения a_n и r_n, которые принято называть приемочным и браковочным числами, при фиксированных P_0, P_1, α и β зависят только от n и могут быть вычислены заранее.

На практике решение такого типа задач обычно производят графически. В прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают номер шага испытания n, а по оси ординат — число бракованных изделий m, появившихся после n испытаний. Перед проведением испытаний рассчитывают коэффициенты уравнений (13.33) и (13.34) и проводят на графике соответствующие прямые a_n и r_n (рис. 13.10).

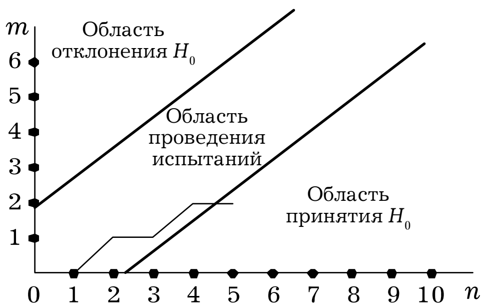


Рис. 13.10

Эти прямые выделяют на плоскости три области: область принятия гипотезы H_0; область отклонения гипотезы H_0; область продолжения испытаний.

При испытании после каждого его шага на график наносят точку с координатами (n, m). В зависимости от того, в какую область попала точка, проверяемую гипотезу либо принимают, либо отклоняют, либо продолжают испытание.

На рис. 13.10 представлен случай, когда гипотеза после пятого шага испытаний оказалась принятой.

13.4.3. Проверка гипотезы о математическом ожидании

Предположим, что случайная переменная X распределена по нормальному закону с известной дисперсией σ_x^2. Необходимо проверить гипотезу о том, что математическое ожидание этой переменной не превышает значения m_x'.

Гипотеза может быть проверена путем последовательного проведения испытания с регистрацией на каждом его шаге значений $x_1, x_2, ..., x_n$, которые приняла случайная величина X.

Если граничные точки m_{x0} и m_{x1} областей принятия гипотезы, критической и продолжения испытаний определены, а испытания независимы, вероятность получения совокупности результатов $x_1, x_2, ..., x_n$, при условии что $m_x = m_{x0}$, будет равна

$$P_{0n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_x^n} exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_{x0})^2\right)(dx)^n,$$

а при условии, что $m_x = m_{x1}$.

$$P_{1n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_x^n} exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_{x1})^2\right)(dx)^n.$$

Следовательно, показатель согласованности проверки нулевой гипотезы запишется в виде

$$u_n = \frac{P_{1n}}{P_{0n}} = \frac{exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_{x1})^2\right)}{exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_{x0})^2\right)}. \tag{13.35}$$

При выбранных значениях вероятностей ошибок первого α и второго β рода условия принятия, отклонения и продолжения испытаний будут определяться неравенствами

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i \le a_n; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \ge r_n; \\ a_n < \sum_{i=1}^{n} x_i < r_n. \end{aligned}\right\} \tag{13.36}$$

Приемочное и браковочное числа a_n и r_n в неравенствах (13.36) определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{\sigma_x^2}{m_{x1} - m_{x0}} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + n \frac{m_{x1} + m_{x0}}{2}; \\ r_n &= \frac{\sigma_x^2}{m_{x1} - m_{x0}} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + n \frac{m_{x1} + m_{x0}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{13.37}$$

Задачу удобно решать с помощью графика, на котором заблаговременно проведены прямые a_n и r_n согласно уравнениям (13.37), а после каждого шага испытания наносится точка с координатами $\left(n, \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Угол между двумя ориентирами измерялся осенью и весной. По результатам шести независимых измерений получены приближенные значения угла $42^\circ\ 30'\ 30''$ (осенью) и $42^\circ 30' 38''$ (весной). Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением, равным $10''$. При $\alpha = 0{,}05$ установить, изменился ли угол за время, прошедшее между этими измерениями.

2. При стендовых испытаниях десяти ракетных двигателей были определены характеристики тяги двигателя: 280,5 кг, 0,8 кг. При летных испытаниях десяти ракет с двигателями той же партии получены значения тех же характеристик: 279,6 кг, 0,6 кг. При $\alpha = 0{,}05$ установить изменяются ли характеристики тяги двигателя в зависимости от условий испытания.

3. Для контроля правильности работы станка-автомата произведены две выборки по 10 деталей в начале и в конце смены и измерены их диаметры. По результатам измерений получено: по первой выборке $d_1 = 24{,}59$ мм, $\sigma_1 = 0{,}49$ мм, по второй выборке $d_2 = 24{,}55$ мм, $\sigma_2 = 0{,}96$ мм. Определить, нуждается ли станок в наладке при $\alpha = 0{,}05$.

4. Радиолокатор, точность работы которого характеризуется средним квадратическим отклонением, равным 30 м, определяет дальность до корабля. Результаты двух измерений через некоторый промежуток времени оказались 15220 и 15110 м. При $\alpha = 0{,}05$ установить приближается ли корабль к радиолокатору.

5. При контроле высоты орбиты космического аппарата через заданный промежуток времени получены следующие результаты (км):

1-я серия	201,58	200,00	199,75	197,38	200,58	200,41	198,54
2-я серия	200,90	198,09	200,06	198,46	197,92	200,76	200,82

При $\alpha = 0{,}05$ установить, изменилась ли высота орбиты.

6. Результаты 1000 измерений сопротивлений резисторов (Ом) приведены в таблице. Проверить гипотезу о нормальном законе распределения по методу Колмогорова при $\alpha = 0{,}1$.

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границы интервала	95–96	96–97	97–98	98–99	99–100	100–101	101–102	102–103	103–104	104–105
Число резисторов	2	14	68	170	236	284	148	60	14	4

7. Резерфордом и Гейгером в течение 2608 периодов по 7,5 с подсчитывалось число частиц, излучаемых радиоактивным объектом. В таблице приведены результаты наблюдения числа i интервалов времени в течение которых в счетчик попало ровно k частиц. Используя метод Пирсона, при $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о том, что число интервалов подчиняется закону Пуассона.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

8. По каждой из 100 мишеней произведено по 10 выстрелов. Фиксировались только попадания и промахи. Результаты стрельб приведены в таблице.

Число попаданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число мишеней	0	2	4	10	22	26	18	12	4	2	0

Используя метод Пирсона, проверить гипотезу о биномиальном распределении числа мишеней при $\alpha = 0{,}1$.

9. Семь монет подбрасывались одновременно 1536 раз, и отмечалось число выпавших гербов. В таблице приведены числа i случаев, когда число выпавших гербов было равно k.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
i	12	78	270	456	386	252	69	13

Используя метод Пирсона, проверить гипотезу о биномиальном распределении числа выпавших гербов при $\alpha = 0{,}05$.

10. В таблице представлено появление цифр среди 800 первых десятичных знаков числа π.

Цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Числа	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

Используя метод Пирсона, проверить гипотезу о равномерном распределении цифр при $\alpha = 0{,}10$.

Вопросы для самопроверки

1. Поясните этапы проверки статистических гипотез классическим методом.

2. Что такое гипотеза и какие гипотезы вы знаете? В чем их отличие друг от друга?

3. Какие требования предъявляются к показателю согласованности?

4. Поясните сущность ошибок первого и второго рода.

5. Что понимают под мощностью показателя согласованности?

6. Какие задачи решают при обосновании закона распределения случайной переменной?

7. С помощью чего можно приближенно определить гипотетический закон распределения?

8. Сформулируйте задачу проверки гипотезы о виде закона распределения?

9. Какие методы проверки гипотезы о виде закона распределения вы знаете? В чем их суть?

10. Какие два случая выделяют при проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий?

11. Какова последовательность проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий?

12. В чем заключается особенность проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий при неизвестной точности измерений?

13. Какова последовательность проверки гипотезы о равенстве дисперсий?

14. В чем заключается принципиальное отличие проверки гипотез методом последовательного анализа от классического?

15. Какие этапы выделяют при проверке гипотез методом последовательного анализа?

16. Какая подготовительная работа должна быть проведена до начала проверки гипотез методом последовательного анализа?

Литература к разделу II

1. *Андронов А. М., Копытов Е. А., Гринглаз Л. Я.* Теория вероятностей и математическая статистика. — СПб.: Питер, 2004.

2. *Беляев Ю. К.* Вероятностные методы выборочного контроля. — М.: Наука. 1975.

3. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.

4. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962.

5. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000.

6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1961.

7. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.

8. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

9. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.

10. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.

11. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.

12. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979.

13. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — М.: Наука, 1989.

14. *Румшинский Л. З.* Математическая обработка результатов эксперимента. — М.: Наука, 1971.

15. *Шмойлова Р. А. и др.* Теория статистики. — М.: Финансы и статистика, 2005.

Приложение

Таблица 1

Значения функции $F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-2,9	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
-2,8	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
-2,7	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
-2,6	0,005	0,005	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
-2,5	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
-2,4	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,006
-2,3	0,011	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008
-2,2	0,014	0,014	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011
-2,1	0,018	0,017	0,017	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018
-1,9	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023
-1,8	0,036	0,035	0,034	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029
-1,7	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
-1,6	0,055	0,054	0,053	0,052	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,046
-1,5	0,067	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,057	0,057	0,056
-1,4	0,081	0,079	0,078	0,076	0,075	0,074	0,072	0,071	0,069	0,068
-1,3	0,097	0,095	0,093	0,093	0,090	0,089	0,087	0,085	0,084	0,082
-1,2	0,115	0,113	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,100	0,099
-1,1	0,136	0,134	0,131	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,119	0,117
-1,0	0,159	0,156	0,154	0,151	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138
-0,9	0,184	0,181	0,179	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,198	0,195	0,192	0,189	0,187
-0,7	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,215
-0,6	0,274	0,271	0,268	0,264	0,261	0,258	0,255	0,251	0,248	0,245
-0,5	0,309	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278
-0,4	0,345	0,341	0,337	0,334	0,330	0,326	0,323	0,319	0,316	0,312
-0,3	0,382	0,378	0,374	0,371	0,367	0,363	0,359	0,356	0,352	0,348
-0,2	0,421	0,417	0,413	0,409	0,405	0,401	0,397	0,394	0,390	0,386
-0,1	0,460	0,456	0,452	0,448	0,443	0,440	0,436	0,432	0,429	0,425
-0,0	0,500	0,496	0,492	0,488	0,484	0,480	0,476	0,472	0,468	0,464

Окончание табл. 1

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,568	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,913
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,866	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,930	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,967	0,968	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999

Таблица 2

Значения функции Лапласа $\Phi(y) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,008	0,016	0,024	0,032	0,040	0,056	0,064	0,072	0,080
0,1	0,080	0,088	0,096	0,103	0,111	0,119	0,127	0,135	0,143	0,151
0,2	0,159	0,166	0,174	0,182	0,190	0,197	0,205	0,213	0,221	0,228
0,3	0,236	0,243	0,251	0,259	0,266	0,274	0,281	0,289	0,303	0,303
0,4	0,311	0,318	0,326	0,333	0,340	0,347	0,354	0,362	0,369	0,376
0,5	0,383	0,390	0,397	0,404	0,411	0,418	0,425	0,431	0,438	0,445
0,6	0,451	0,458	0,465	0,471	0,478	0,484	0,491	0,497	0,504	0,510
0,7	0,516	0,522	0,528	0,535	0,541	0,547	0,553	0,559	0,565	0,570
0,8	0,576	0,582	0,588	0,593	0,599	0,605	0,610	0,616	0,621	0,627
0,9	0,632	0,637	0,642	0,648	0,653	0,658	0,663	0,668	0,673	0,678
1,0	0,683	0,688	0,692	0,697	0,702	0,706	0,711	0,715	0,720	0,724
1,1	0,729	0,733	0,737	0,742	0,746	0,750	0,754	0,758	0,762	0,766
1,2	0,770	0,774	0,778	0,781	0,785	0,789	0,792	0,796	0,799	0,803
1,3	0,806	0,810	0,813	0,816	0,820	0,823	0,826	0,829	0,832	0,835
1,4	0,838	0,841	0,844	0,847	0,850	0,853	0,856	0,859	0,861	0,864
1,5	0,866	0,867	0,871	0,874	0,876	0,879	0,881	0,884	0,886	0,888
1,6	0,890	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,905	0,907	0,909
1,7	0,911	0,913	0,914	0,916	0,918	0,920	0,922	0,923	0,925	0,927
1,8	0,928	0,930	0,931	0,933	0,934	0,936	0,937	0,939	0,940	0,941
1,9	0,943	0,944	0,945	0,946	0,948	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953
2,0	0,954	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
2,1	0,964	0,965	0,966	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,971	0,971
2,2	0,972	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978
2,3	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983
2,4	0,984	0,984	0,984	0,985	0,985	0,986	0,986	0,986	0,987	0,987
2,5	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990
2,6	0,990	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993
2,7	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995
2,8	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,9	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997

Таблица 3

Значения функции $P(X = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}$

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	0 (2)	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1 (1)	0,1098	0,0950	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
	2 (0)	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500
3	0 (3)	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1 (2)	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
	2 (1)	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
	3 (0)	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250
4	0 (4)	0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
	1 (3)	0,0388	0,1715	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500
	2 (2)	0,0006	0,0135	0,0486	0,1536	0,2646	0,3456	0,3750
	3 (1)	0,0000	0,0005	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500
	4 (0)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
5	0 (5)	0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
	1 (4)	0,0480	0,2037	0,3280	0,4096	0,3601	0,2592	0,1563
	2 (3)	0,0010	0,0214	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125
	3 (2)	0,0000	0,0011	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125
	4 (1)	0,0000	0,0000	0,0005	0,0064	0,0284	0,0768	0,1563
	5 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0312
6	0 (6)	0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
	1 (5)	0,0571	0,2321	0,3543	0,3933	0,3025	0,1866	0,0938
	2 (4)	0,0014	0,0306	0,0984	0,2458	0,3240	0,3110	0,2344
	3 (3)	0,0000	0,0021	0,0146	0,0819	0,1852	0,2765	0,3124
	4 (2)	0,0000	0,0001	0,0012	0,0154	0,0595	0,1382	0,2344
	5 (1)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0102	0,0369	0,0938
	6 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0041	0,0156
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
7	0 (7)	0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
	1 (6)	0,0659	0,2573	0,3720	0,3670	0,2471	0,1307	0,0547
	2 (5)	0,0020	0,0406	0,1240	0,2752	0,3176	0,2613	0,1641
	3 (4)	0,0000	0,0036	0,0230	0,1147	0,2269	0,2903	0,2734
	4 (3)	0,0000	0,0002	0,0025	0,0287	0,0972	0,1935	0,2734
	5 (2)	0,0000	0,0000	0,0002	0,0043	0,0250	0,0774	0,1641
	6 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0036	0,0172	0,0547
	7 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0078
8	0 (8)	0,9927	0,6634	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
	1 (7)	0,0746	0,2793	0,3826	0,3355	0,1977	0,0896	0,0312
	2 (6)	0,0026	0,0515	0,1488	0,2936	0,2965	0,2090	0,1094
	3 (5)	0,0001	0,0054	0,0331	0,1468	0,2541	0,2787	0,2188
	4 (4)	0,0000	0,0004	0,0046	0,0459	0,1361	0,2323	0,2734
	5 (3)	0,0000	0,0000	0,0004	0,0092	0,0467	0,1287	0,2188
	6 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0100	0,0413	0,1094
	7 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0079	0,0312
	8 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0039
9	0 (9)	0,9135	0,6303	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0019
	1 (8)	0,0830	0,2985	0,3874	0,3020	0,1557	0,0605	0,0176
	2 (7)	0,0034	0,0629	0,1722	0,3020	0,2668	0,1613	0,0703
	3 (6)	0,0001	0,0077	0,0447	0,1762	0,2668	0,2508	0,1641
	4 (5)	0,0000	0,0006	0,0074	0,0661	0,1715	0,2508	0,2461
	5 (4)	0,0000	0,0000	0,0008	0,0165	0,0735	0,1672	0,2461
	6 (3)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0027	0,0210	0,0743	0,1641
	7 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0039	0,0212	0,0703
	8 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0035	0,0176
	9 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0019
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Продолжение табл. 3

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	0 (10)	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
	1 (9)	0,0913	0,3151	0,3874	0,2684	0,1211	0,0403	0,0098
	2 (8)	0,0042	0,0746	0,1937	0,3020	0,2335	0,1209	0,0439
	3 (7)	0,0001	0,0105	0,0574	0,2013	0,2668	0,2150	0,1172
	4 (6)	0,0000	0,0010	0,0112	0,0881	0,2001	0,2508	0,2051
	5 (5)	0,0000	0,0001	0,0015	0,0264	0,1029	0,2007	0,2460
	6 (4)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0055	0,0368	0,1115	0,2051
	7 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0090	0,0425	0,1172
	8 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0106	0,0439
	9 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0098
	10 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010
11	0 (11)	0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0198	0,0036	0,0005
	1 (10)	0,0995	0,3293	0,3835	0,2362	0,0932	0,0266	0,0054
	2 (9)	0,0050	0,0867	0,2131	0,2953	0,1998	0,0887	0,0268
	3 (8)	0,0002	0,0137	0,0710	0,2215	0,2568	0,1774	0,0805
	4 (7)	0,0000	0,0014	0,0158	0,1107	0,2201	0,2365	0,1611
	5 (6)	0,0000	0,0001	0,0025	0,0388	0,1321	0,2207	0,2257
	6 (5)	0,0000	0,0000	0,0003	0,0097	0,0566	0,1471	0,2257
	7 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0173	0,0701	0,1611
	8 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0037	0,0234	0,0805
	9 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0052	0,0268
	10 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0054
	11 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
12	0 (12)	0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0138	0,0022	0,0002
	1 (11)	0,1075	0,3413	0,3766	0,2062	0,0712	0,0174	0,0029
	2 (10)	0,0058	0,0988	0,2301	0,2835	0,1678	0,0639	0,0161
	3 (9)	0,0002	0,0173	0,0852	0,2662	0,2397	0,1419	0,0537
	4 (8)	0,0000	0,0137	0,0213	0,1329	0,2312	0,2128	0,1209
	5 (7)	0,0000	0,0014	0,0038	0,0532	0,1585	0,2270	0,1934
	6 (6)	0,0000	0,0001	0,0005	0,0155	0,0792	0,1766	0,2256
	7 (5)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0033	0,0291	0,1009	0,1934
	8 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0078	0,0420	0,1209
	9 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0125	0,0537
	10 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0025	0,0161
	11 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0029
	12 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
13	0 (13)	0,8775	0,5134	0,2542	0,0550	0,0097	0,0013	0,0001
	1 (12)	0,1152	0,3512	0,3672	0,1787	0,0540	0,0113	0,0016
	2 (11)	0,0070	0,1109	0,2448	0,2680	0,1388	0,0453	0,0095
	3 (10)	0,0003	0,0214	0,0997	0,2457	0,2181	0,1107	0,0349
	4 (9)	0,0000	0,0028	0,0277	0,1535	0,2337	0,1845	0,0873
	5 (8)	0,0000	0,0003	0,0055	0,0691	0,1803	0,2213	0,1571
	6 (7)	0,0000	0,0000	0,0008	0,0230	0,1030	0,1967	0,2095
	7 (6)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0058	0,0442	0,1312	0,2095
	8 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0142	0,0656	0,1571
	9 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0034	0,0243	0,0873
	10 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0065	0,0349
	11 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0095
	12 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016
	13 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Продолжение табл. 3

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
14	0 (14)	0,8687	0,4877	0,2288	0,0440	0,0068	0,0008	0,0001
	1 (13)	0,1229	0,3594	0,3558	0,1539	0,0407	0,0073	0,0008
	2 (12)	0,0081	0,1229	0,2570	0,2501	0,1134	0,0317	0,0056
	3 (11)	0,0003	0,0259	0,1142	0,2501	0,1943	0,0845	0,0222
	4 (10)	0,0000	0,0037	0,0349	0,1720	0,2290	0,1549	0,0611
	5 (9)	0,0000	0,0004	0,0078	0,0860	0,1963	0,2066	0,1221
	6 (8)	0,0000	0,0000	0,0013	0,0322	0,1262	0,2066	0,1833
	7 (7)	0,0000	0,0000	0,0002	0,0092	0,0619	0,1574	0,2095
	8 (6)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0232	0,0918	0,1833
	9 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0066	0,0408	0,1221
	10 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0136	0,0611
	11 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0033	0,0222
	12 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0056
	13 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008
	14 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0 (15)	0,8001	0,4633	0,2059	0,0352	0,0048	0,0005	0,0000
	1 (14)	0,1303	0,3558	0,3432	0,1319	0,0305	0,0047	0,0005
	2 (13)	0,0092	0,1348	0,2669	0,2390	0,0916	0,0219	0,0032
	3 (12)	0,0004	0,0307	0,1285	0,1700	0,0634	0,0634	0,0139
	4 (11)	0,0000	0,0048	0,0428	0,2186	0,1268	0,1268	0,0417
	5 (10)	0,0000	0,0006	0,0105	0,2061	0,1859	0,1859	0,0916
	6 (9)	0,0000	0,0000	0,0019	0,1472	0,2066	0,2066	0,1527
	7 (8)	0,0000	0,0000	0,0003	0,0811	0,1771	0,1771	0,1964
	8(7)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0347	0,1181	0,1181	0,1964
	9 (6)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0116	0,0612	0,0612	0,1527
	10 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0030	0,0245	0,0245	0,0916
	11 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0074	0,0074	0,0417
	12 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0016	0,0139
	13 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0003	0,0032
	14 (1)	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
	15 (0)	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
20	0 (20)	0,8180	0,3585	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
	1 (19)	0,1652	0,3774	0,2102	0,0577	0,0068	0,0005	0,0000
	2 (18)	0,0158	0,1887	0,2852	0,1369	0,0278	0,0031	0,0002
	3 (17)	0,0010	0,0596	0,1901	0,2053	0,0716	0,0124	0,0011
	4 (16)	0,0000	0,0133	0,0898	0,2182	0,1304	0,0350	0,0046
	5 (15)	0,0000	0,0022	0,0319	0,1746	0,1789	0,0746	0,0148
	6 (14)	0,0000	0,0003	0,0089	0,1091	0,1916	0,1244	0,0370
	7 (13)	0,0000	0,0000	0,0020	0,0546	0,1643	0,1659	0,0739
	8 (12)	0,0000	0,0000	0,0003	0,0222	0,1144	0,1797	0,1201
	9 (11)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0074	0,0654	0,1597	0,1602
	10 (10)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0308	0,1171	0,1762
	11 (9)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0120	0,0710	0,1602
	12 (8)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0039	0,0355	0,1201
	13 (7)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0146	0,0739
	14 (6)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0049	0,0370
	15 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0148
	16 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0046
	17 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011
	18 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Таблица 4

Значения функции $P_N(X=k)=\sum_{i=0}^{k} C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9100	0,8400	0,7500
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,7840	0,6480	0,5000
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9992	0,9730	0,9360	0,8750
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
	1	0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,6517	0,4752	0,3125
	2	1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9163	0,8208	0,6875
	3	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9919	0,9744	0,9375
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
	1	0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,5282	0,3370	0,1875
	2	1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8369	0,6826	0,5000
	3	1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9692	0,9130	0,8125
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9976	0,9898	0,9688
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
	1	0,9986	0,9672	0,8857	0,6554	0,4202	0,2333	0,1094
	2	1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,7443	0,5443	0,3438
	3	1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9295	0,8208	0,6562
	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9891	0,9590	0,8906
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9959	0,9444
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Продолжение табл. 4

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
7	0	0,9321	0,6984	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
	1	0,9980	0,9557	0,8503	0,5767	0,3294	0,1586	0,0625
	2	1,0000	0,9963	0,9743	0,8520	0,6471	0,4199	0,2266
	3	1,0000	0,9999	0,9973	0,9667	0,8740	0,7102	0,5000
	4	1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9712	0,9037	0,7734
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9962	0,9812	0,9375
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9922
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
	1	0,9973	0,9427	0,8131	0,5033	0,2553	0,1064	0,0352
	2	0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,5518	0,3154	0,1445
	3	1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8059	0,5941	0,3633
	4	1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9420	0,8263	0,6367
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9887	0,9502	0,8554
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9915	0,9648
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9961
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0020
	1	0,9965	0,9287	0,7748	0,4362	0,1960	0,0705	0,0195
	2	0,9999	0,9915	0,9470	0,7382	0,4628	0,2318	0,0898
	3	1,0000	0,9993	0,9917	0,9144	0,7297	0,4826	0,2539
	4	1,0000	0,9999	0,9991	0,9804	0,9012	0,7334	0,5000
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9747	0,9006	0,7461
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9957	0,9750	0,9102
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9962	0,9805
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
7	0	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0188	0,0038	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0963	0,0287	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,2898	0,1260	0,0334	0,0027	0,0002	0,0000
	4	0,5801	0,3529	0,1481	0,0257	0,0038	0,0000
	5	0,8414	0,6706	0,4233	0,1497	0,0444	0,0020
	6	0,9720	0,9176	0,7903	0,5217	0,3017	0,0679
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0085	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0498	0,0113	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,1737	0,0580	0,0104	0,0004	0,0000	0,0000
	4	0,4059	0,1941	0,0563	0,0050	0,0004	0,0000
	5	0,6846	0,4482	0,2031	0,0381	0,0058	0,0000
	6	0,8936	0,7447	0,4967	0,1869	0,0572	0,0027
	7	0,9832	0,9424	0,8322	0,5695	0,3366	0,0773
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0038	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0250	0,0043	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0994	0,0253	0,0031	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,2666	0,0988	0,0196	0,0009	0,0000	0,0000
	5	0,5174	0,2703	0,0856	0,0083	0,0006	0,0000
	6	0,7682	0,5372	0,2618	0,0530	0,0086	0,0001
	7	0,9295	0,8040	0,5638	0,2252	0,0712	0,0034
	8	0,9899	0,9596	0,8658	0,6126	0,3698	0,0865
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	0	0,9044	0,5988	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
	1	0,9958	0,9139	0,7361	0,3758	0,1493	0,0464	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,3828	0,1673	0,0547
	3	1,0000	0,9999	0,9917	0,8791	0,6496	0,3823	0,1719
	4	1,0000	1,0000	0,9991	0,9672	0,8497	0,6331	0,3770
	5	1,0000	1,0000	0,9998	0,9936	0,9526	0,8338	0,6230
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9894	0,9452	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9877	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0	0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0198	0,0036	0,0005
	1	0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1130	0,0302	0,0059
	2	0,9998	0,9848	0,9104	0,6171	0,3127	0,1189	0,0327
	3	1,0000	0,9985	0,9815	0,8389	0,5696	0,2963	0,1133
	4	1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,7897	0,5328	0,2744
	5	1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9218	0,7535	0,5000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9784	0,9006	0,7256
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9957	0,9707	0,8867
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9941	0,9673
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9941
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Продолжение табл. 4

N	k \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	0	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,1662	0,0474	0,0064	0,0002	0,,0000	0,0000
	5	0,3669	0,1503	0,0033	0,0016	0,0001	0,0000
	6	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128	0,0010	0,0000
	7	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702	0,0115	0,0001
	8	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639	0,0861	0,0043
	9	0,9939	0,9718	0,8926	0,6513	0,4013	0,0956
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0059	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0293	0,0043	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0994	0,0216	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,2465	0,0782	0,0116	0,0003	0,0000	0,0000
	6	0,4672	0,2103	0,0504	0,0228	0,0000	0,0000
	7	0,7037	0,4304	0,1611	0,0185	0,0002	0,0000
	8	0,8811	0,6873	0,3826	0,0896	0,0022	0,0002
	9	0,9698	0,8870	0,6779	0,3026	0,0196	0,0052
	10	0,9964	0,9802	0,9141	0,6862	0,1184	0,1047
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
12	0	0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0138	0,0022	0,0002
	1	0,9939	0,8817	0,6590	0,2749	0,0850	0,0196	0,0032
	2	0,9997	0,9805	0,8891	0,5583	0,2528	0,0834	0,0193
	3	0,9999	0,9978	0,9744	0,7946	0,4925	0,2253	0,0730
	4	1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,7237	0,4382	0,1938
	5	1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,8822	0,6652	0,3872
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9961	0,9614	0,8418	0,6128
	7	1 ,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9905	0,9427	0,8062
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9847	0,9270
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9972	0,9807
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9968
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0	0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0097	0,0013	0,0001
	1	0,9927	0,8645	0,6214	0,2336	0,0637	0,0126	0,0017
	2	0,9997	0,9754	0,8661	0,5016	0,2025	0,0579	0,0112
	3	1,0000	0,9968	0,9658	0,7473	0,4206	0,1686	0,0461
	4	1,0000	0,9996	0,9935	0,9009	0,6543	0,3530	0,1334
	5	1,0000	0,9999	0,9991	0,9700	0,8346	0,5744	0,2905
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9376	0,7712	0,5000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9818	0,9023	0,7095
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9960	0,9679	0,8666
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9922	0,9539
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9888
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Продолжение табл. 4

N	k \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
12	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0028	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0153	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0573	0,0095	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,1582	0,0386	0,0039	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,3348	0,1178	0,0194	0,0005	0,0000	0,0000
	7	0,5618	0,2763	0,0726	0,0043	0,0002	0,0000
	8	0,7747	0,5075	0,2054	0,0256	0,0022	0,0000
	9	0,9166	0,7472	0,4416	0,1109	0,0196	0,0002
	10	0,9804	0,9150	0,7251	0,3410	0,1184	0,0062
	11	0,9978	0,9862	0,9313	0,7176	0,4596	0,1136
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0078	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0321	0,0040	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0977	0,0182	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,2288	0,0624	0,0070	0,0001	0,0000	0,0000
	7	0,4256	0,1654	0,0300	0,0009	0,0000	0,0000
	8	0,6470	0,3457	0,0991	0,0065	0,0003	0,0000
	9	0,8314	0,5794	0,2527	0,0342	0,0031	0,0000
	10	0,9421	0,7975	0,4984	0,1339	0,0245	0,0003
	11	0,9874	0,9363	0,7664	0,3787	0,1354	0,0072
	12	0,9987	0,9903	0,9450	0,7458	0,4867	0,1225
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	0	0,8687	0,4877	0,2288	0,0440	0,0068	0,0008	0,0001
	1	0,6199	0,8471	0,5846	0,1979	0,0475	0,0081	0,0009
	2	0,9997	0,9700	0,8416	0,4480	0,1608	0,0398	0,0065
	3	1,0000	0,9959	0,9569	0,6982	0,3552	0,1243	0,0287
	4	1,0000	0,9996	0,9908	0,8702	0,5842	0,2793	0,0898
	5	1,0000	1,0000	0,9985	0,9561	0,7805	0,4858	0,2120
	6	1,0000	1,0000	0,9998	0,9884	0,9067	0,6924	0,3953
14	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9976	0,9685	0,8499	0,6047
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9917	0,9417	0,7880
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9825	0,9102
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9961	0,9713
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9935
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	09999
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,8601	0,4633	0,2059	0,0352	0,0048	0,0005	0,0000
	1	0,9904	0,8291	0,5490	0,1671	0,0353	0,0052	0,0005
	2	0,9996	0,9639	0,8159	0,3980	0,1268	0,0271	0,0037
	3	1,0000	0,9946	0,9444	0,6482	0,2969	0,0905	0,0176
	4	1,0000	0,9994	0,9873	0,8558	0,5155	0,2173	0,0592
	5	1,0000	1,0000	0,9978	0,9390	0,7216	0,4032	0,1509
	6	1,0000	1,0000	0,9997	0,9819	0,8689	0,6098	0,3036
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9958	0,9500	0,7869	0,5000
15	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9848	0,9050	0,6964
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9964	0,9662	0,8491
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	09906	0,9408
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9963
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

N	k \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
14	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0039	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0175	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0583	0,0083	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,1501	0,0315	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,3076	0,0933	0,0116	0,0002	0,0000	0,0000
	8	0,5141	0,2195	0,0438	0,0015	0,0000	0,0000
	9	0,7207	0,4158	0,1298	0,0092	0,0004	0,0000
	10	0,8757	0,6448	0,3081	0,0441	0,0042	0,0000
	11	0,9602	0,8392	0,5520	0,1584	0,0300	0,0003
	12	0,9919	0,9525	0,8021	0,4154	0,1530	0,0084
	13	0,9992	0,9932	0,9560	0,7712	0,5123	0,1312
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0094	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0338	0,0036	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003	0,0000	0,0000
	9	0,5968	0,2784	0,0610	0,0022	0,0000	0,0000
	10	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127	0,0006	0,0000
	11	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556	0,0055	0,0000
	12	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841	0,0362	0,0004
	13	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510	0,1710	0,0096
	14	0,9995	0,9952	0,9648	0,7941	0,5367	0,1399
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Продолжение табл. 4

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
20	0	0,8179	0,3585	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
	1	0,9831	0,7359	0,3918	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000
	2	0,9990	0,9246	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002
	3	1,0000	0,9842	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013
	4	1,0000	0,9975	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059
	5	1,0000	0,9997	0,9888	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207
	6	1,0000	1,0000	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577
	7	1,0000	1,0000	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9790	0,8684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Окончание табл. 4

N	k \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
20	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000
	11	0,4044	0,1133	0,0100	0,0000	0,0000	0,0000
	12	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004	0,0000	0,0000
	13	0,7500	0,3120	0,0867	0,0024	0,0000	0,0000
	14	0,8744	0,5836	0,1958	0,0112	0,0003	0,0000
	15	0,9490	0,7625	0,3703	0,0432	0,0026	0,0000
	16	0,9840	0,8929	0,5885	0,1330	0,0159	0,0000
	17	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231	0,0755	0,0010
	18	0,9995	0,9924	0,9308	0,6082	0,2642	0,0169
	19	1,0000	0,9992	0,9885	0,8784	0,6415	0,1821
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Таблица 5

Значения вероятности $P_N(X \geq 1) = 1 - (1-p)^N$

p / N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
0,10	0,190	0,271	0,344	0,410	0,469	0,552	0,570	0,613	0,651	0,718
0,12	0,226	0,359	0,400	0,472	0,536	0,591	0,640	0,684	0,722	0,784
0,14	0,260	0,364	0,453	0,530	0,595	0,652	0,701	0,743	0,779	0,836
0,16	0,294	0,407	0,502	0,582	0,649	0,705	0,752	0,792	0,825	0,877
0,18	0,328	0,449	0,548	0,629	0,696	0,751	0,796	0,832	0,862	0,908
0,20	0,360	0,488	0,590	0,672	0,738	0,790	0,832	0,866	0,893	0,931
0,22	0,392	0,525	0,630	0,729	0,775	0,824	0,863	0,893	0,917	0,949
0,24	0,422	0,561	0,666	0,746	0,807	0,854	0,889	0,915	0,936	0,963
0,26	0,452	0,595	0,700	0,778	0,836	0,887	0,910	0,933	0,951	0,973
0,28	0,482	0,627	0,731	0,806	0,861	0,900	0,928	0,948	0,963	0,981
0,30	0,510	0,657	0,760	0,832	0,882	0,918	0,942	0,960	0,972	0,986
0,32	0,538	0,686	0,786	0,855	0,901	0,933	0,954	0,969	0,979	0,990
0,34	0,564	0,712	0,810	0,875	0,917	0,945	0,964	0,976	0,984	0,992
0,36	0,590	0,738	0,832	0,893	0,931	0,956	0,972	0,982	0,988	0,994
0,38	0,616	0,762	0,852	0,908	0,943	0,965	0,978	0,986	0,992	0,995
0,40	0,640	0,784	0,870	0,922	0,953	0,972	0,983	0,990	0,994	0,997
0,42	0,664	0,805	0,887	0,934	0,962	0,978	0,987	0,993	0,996	0,998
0,44	0,686	0,824	0,902	0,945	0,969	0,983	0,990	0,995	0,997	0,999
0,46	0,708	0,843	0,915	0,954	0,975	0,987	0,993	0,996	0,999	0,999
0,48	0,730	0,859	0,927	0,962	0,980	0,990	0,995	0,997	0,999	0,999
0,50	0,750	0,875	0,938	0,969	0,984	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999
0,52	0,770	0,889	0,947	0,975	0,988	0,994	0,998	0,999	0,999	0,999
0,54	0,788	0,903	0,955	0,979	0,991	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999
0,56	0,806	0,915	0,963	0,984	0,993	0,997	0,999	0,999	0,999	0,999
0,58	0,824	0,926	0,969	0,987	0,995	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999

Окончание табл. 5

N \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
0,60	0,840	0,936	0,974	0,990	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
0,62	0,856	0,945	0,979	0,992	0,997	0,999				
0,64	0,870	0,953	0,983	0,994	0,998					
0,66	0,884	0,961	0,987	0,995	0,998					
0,68	0,898	0,967	0,990	0,997	0,999					
0,70	0,910	0,973	0,992	0,998						
0,72	0,922	0,978	0,994	0,998						
0,74	0,932	0,982	0,995	0,999						
0,76	0,942	0,986	0,997							
0,78	0,952	0,989	0,998							
0,80	0,960	0,992	0,998							
0,82	0,968	0,994	0,999							
0,84	0,974	0,996								
0,86	0,980	0,997								
0,88	0,986	0,998								
0,90	0,990	0,999								
0,92	0,994									
0,94	0,996									
0,96	0,998									
0,98	0,999									

Таблица 6

Распределение Пуассона $P(k,m) = \dfrac{m^k}{k!} e^{-m}$

k \ m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,610	0,549	0,497	0,449	0,410	0,368
1	0,090	0,164	0,222	0,268	0,300	0,329	0,348	0,360	0,366	0,368
2	0,005	0,016	0,033	0,054	0,076	0,099	0,122	0,144	0,165	0,184
3		0,002	0,003	0,007	0,013	0,020	0,028	0,038	0,049	0,061
4				0,001	0,002	0,003	0,005	0,008	0,011	0,015
5							0,001	0,001	0,002	0,003

Окончание табл. 6

k \ m	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,271	0,224	0,146	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,004	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9		0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10		0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11			0,002	0,008	0,022	0,045	0,072	0,097	0,114
12			0,001	0,003	0,013	0,026	0,048	0,073	0,095
13				0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14					0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15					0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16						0,001	0,004	0,011	0,022
17							0,002	0,006	0,013
18							0,001	0,003	0,007
19								0,001	0,004
20									0,002

Таблица 7

Значения вероятности $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{m^k}{k!} e^{-m}$

k \ m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,905	0,819	0,741	0670	0,606	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736
2	0,999	0,999	0,999	0,992	0,986	0,978	0,968	0,953	0,937	0,920
3				0,999	0,998	0,998	0,994	0,991	0,988	0,981
4					0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,996
5								0,999	0,999	0,999

Окончание табл. 7

k \ m	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000
2	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003
3	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010
4	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,099	0,055	0,029
5	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067
6	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130
7	0,998	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220
8	0,999	0,996	0,992	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333
9		0,999	0,997	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458
10			0,999	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583
11				0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697
12				0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792
13				0,999	0,996	0,983	0,966	0,926	0,864
14					0,999	0,943	0,983	0,959	0,917
15						0,976	0,992	0,978	0,951
16						0,990	0,996	0,989	0,973
17						0,996	0,998	0,995	0,986
18						0,999	0,999	0,998	0,993
19								0,999	0,997
20									0,998

Таблица 8

Значения t_α из выражения $\alpha = 2\int_0^{t_\alpha} S(t,k)dt$

k \ α	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,510	1,000	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	636,6
2	0,142	0,445	0,816	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,60
3	0,137	0,424	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,94
4	0,134	0,414	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,408	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,404	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,402	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,399	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,398	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,397	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,396	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,395	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,394	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,393	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,393	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,392	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,392	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,392	0,688	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,391	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,391	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	0,127	0,390	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,495	2,787	3,725
30	0,127	0,389	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,388	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,386	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,386	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,385	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблица 9

Значения коэффициента q для построения доверительного интервала $(1-q)\sigma_x^* < \sigma_x < (1+q)\sigma_x^*$

k \ α	0,80	0,90	0,95	0,99
2	1,125	2,083	3,400	8,500
3	0,730	1,270	1,938	4,200
4	0,563	0,941	1,382	2,700
5	0,475	0,765	1,100	2,000
6	0,416	0,652	0,921	1,650
7	0,380	0,576	0,800	1,393
8	0,356	0,516	0,713	1,225
9	0,329	0,476	0,650	1,094
10	0,304	0,442	0,596	0,920
12	0,276	0,388	0,518	0,840
14	0,252	0,357	0,468	0,740
16	0,236	0,325	0,422	0,671
18	0,222	0,297	0,390	0,600
20	0,210	0,282	0,370	0,567
25	0,187	0,247	0,317	0,485
30	0,172	0,226	0,276	0,425
35	0,156	0,207	0,256	0,400
40	0,146	0,193	0,242	0,375
45	0,139	0,184	0,228	0,350
50	0,133	0,174	0,212	0,331
60	0,132	0,155	0,193	0,283
70	0,112	0,144	0,180	0,250
80	0,103	0,138	0,167	0,236
90	0,096	0,131	0,151	0,230
100	0,092	0,125	0,146	0,200

Таблица 10

Значения множителей z_1 и z_2 для построения доверительного интервала $z_1\sigma_x^* < \sigma_x < z_2\sigma_x^*$

k	$\alpha = 0{,}90$		$\alpha = 0{,}95$		$\alpha = 0{,}98$		$\alpha = 0{,}99$	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
1	0,510	15,95	0,446	31,91	0,388	79,79	0,356	159,6
2	0,578	4,42	0,521	6,28	0,466	9,97	0,434	14,12
3	0,620	2,92	0,566	3,73	0,514	5,11	0,483	6,47
4	0,649	2,37	0,599	2,87	0,549	3,67	0,519	4,40
5	0,672	2,09	0,624	2,45	0,576	3,00	0,546	3,48
6	0,690	1,92	0,644	2,20	0,597	2,62	0,569	2,98
7	0,705	1,80	0,661	2,04	0,616	2,38	0,588	2,66
8	0,718	1,71	0,675	1,92	0,631	2,20	0,604	2,44
9	0,729	1,65	0,688	1,83	0,645	2,08	0,618	2,28
10	0,739	1,59	0,699	1,75	0,656	1,98	0,630	2,15
11	0,748	1,55	0,708	1,70	0,667	1,90	0,641	2,06
12	0,755	1,52	0,717	1,65	0,677	1,83	0,651	1,98
13	0,762	1,49	0,725	1,61	0,685	1,78	0,660	1,91
14	0,769	1,46	0,732	1,58	0,693	1,73	0,669	1,85
15	0,775	1,44	0,739	1,55	0,700	1,69	0,676	1,81
16	0,780	1,42	0,745	1,52	0,707	1,66	0,683	1,76
17	0,785	1,40	0,750	1,50	0,713	1,63	0,690	1,73
18	0,790	1,38	0,756	1,48	0,719	1,60	0,696	1,70
19	0,794	1,37	0,760	1,46	0,725	1,58	0,702	1,67
20	0,798	1,36	0,765	1,44	0,730	1,56	0,707	1,64
21	0,802	1,35	0,769	1,43	0,734	1,54	0,712	1,62
22	0,805	1,34	0,773	1,42	0,739	1,52	0,717	1,60
23	0,809	1,33	0,777	1,40	0,743	1,50	0,722	1,58
24	0,812	1,32	0,781	1,39	0,747	1,49	0,726	1,56
25	0,815	1,31	0,784	1,38	0,751	1,47	0,730	1,54
30	0,828	1,27	0,799	1,34	0,768	1,42	0,748	1,48
40	0,847	1,23	0,821	1,28	0,792	1,34	0,774	1,39
50	0,861	1,20	0,837	1,24	0,810	1,30	0,793	1,34
100	0,897	1,13	0,879	1,16	0,858	1,19	0,845	1,22

Таблица 11

Значения вероятностей $P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2)$

χ_α^2 \ k	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18
1	0,910	0,963	0,986	0,995	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000
2	0,736	0,849	0,920	0,960	0,981	0,992	0,996	0,999	1,000	1,000
3	0,558	0,700	0,809	0,885	0,934	0,964	0,981	0,996	0,999	1,000
4	0,406	0,549	0,677	0,780	0,857	0,911	0,947	0,983	0,998	0,999
5	0,287	0,416	0,544	0,660	0,758	0,834	0,891	0,958	0,992	0,999
6	0,199	0,306	0,424	0,540	0,647	0,740	0,815	0,916	0,980	0,996
7	0,136	0,220	0,321	0,429	0,537	0,637	0,725	0,858	0,958	0,990
8	0,092	0,156	0,238	0,333	0,434	0,534	0,629	0,785	0,924	0,979
9	0,061	0,109	0,174	0,253	0,342	0,437	0,532	0,703	0,878	0,960
10	0,040	0,075	0,125	0,189	0,265	0,350	0,440	0,616	0,820	0,932
11	0,027	0,051	0,088	0,139	0,202	0,276	0,358	0,529	0,753	0,894
12	0,017	0,035	0,062	0,101	0,151	0,213	0,285	0,444	0,679	0,847
13	0,011	0,023	0,043	0,072	0,112	0,163	0,224	0,369	0,602	0,792
14	0,007	0,016	0,030	0,051	0,082	0,122	0,173	0,301	0,526	0,662
15	0,005	0,010	0,020	0,036	0,059	0,091	0,132	0,241	0,451	0,592
16	0,003	0,007	0,014	0,025	0,042	0,067	0,100	0,191	0,382	0,523
17	0,002	0,004	0,010	0,017	0,030	0,049	0,074	0,150	0,319	0,456
18	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,035	0,055	0,116	0,263	0,392
19	0,001	0,002	0,004	0,008	0,015	0,025	0,040	0,088	0,214	0,333
20	0,000	0,001	0,003	0,006	0,010	0,018	0,029	0,067	0,172	0,279
21	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007	0,013	0,021	0,050	0,137	0,232
22	0,000	0,000	0,001	0,002	0,005	0,009	0,015	0,038	0,108	0,191
23	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,006	0,011	0,028	0,084	0,155
24	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,020	0,065	0,125
25	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,015	0,050	0,100
30	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,012	0,037

Таблица 12

Значения функции $L(q, k)$

q \ k	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
1	0,097	0,193	0,289	0,379	0,458	0,520	0,556	0,579	0,599	0,617
2	0,147	0,290	0,423	0,538	0,623	0,675	0,707	0,734	0,759	0,779
3	0,184	0,359	0,515	0,636	0,714	0,759	0,792	0,819	0,842	0,861
4	0,214	0,414	0,583	0,703	0,774	0,815	0,847	0,872	0,893	0,910
5	0,241	0,461	0637	0,752	0,816	0,856	0,885	0,908	0,926	0,940
6	0,264	0,501	0,681	0,791	0,849	0,886	0,913	0,933	0,948	0,959
7	0,286	0,536	0,717	0,821	0,874	0,908	0,932	0,950	0,963	0,972
8	0,305	0,567	0,748	0,845	0,895	0,926	0,948	0,963	0,974	0,981
9	0,323	0,595	0,774	0,865	0,911	0,940	0,960	0,972	0,981	0,987
10	0,340	0,620	0,797	0,882	0,925	0,951	0,968	0,979	0,986	0,991
12	0,371	0,664	0,833	0,909	0,946	0,968	0,980	0,988	0,993	0,996
14	0,399	0,701	0,862	0,929	0,960	0,978	0,988	0,993	0,996	0,998
16	0,425	0,733	0,885	0,944	0,971	0,985	0,992	0,996	0,998	0,999
18	0,448	0,760	0,903	0,955	0,980	0,990	0,995	0,998	0,999	0,999
20	0,470	0,784	0,918	0,964	0,984	0,993	0,997	0,999	0,999	1,000
25	0,518	0,832	0,944	0,979	0,992	0,997	0,999	1,000	1,000	
30	0,559	0,867	0,962	0,988	0,996	0,999	1,000			
35	0,597	0,893	0,969	0,990	0,997	0,999				
40	0,628	0,913	0,978	0,994	0,999	1,000				
45	0,657	0,929	0,984	0,996	0,999					
50	0,682	0,942	0,988	0,998	0,999					
60	0,726	0,960	0,993	0,999	1,000					
70	0,762	0,972	0,996	1,000						
80	0,792	0,980	0,998							
90	0,818	0,986	0,999							
100	0,840	0,990	0,999							
150	0,914	0,998	1,000							
200	0,951	1,000								
250	0,972									
500	0,998									
1000	1,000									

Таблица13

Критическиезначения $\chi_{\alpha}^{2}(k,\alpha)$

k \ α	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99
1	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635
2	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210
3	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345
4	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277
5	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086
6	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812
7	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475
8	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090
9	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666
10	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209
11	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725
12	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217
13	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688
14	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141
15	19,311	22,362	24,996	27,488	30,578
16	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000
17	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409
18	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805
19	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191
20	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566
22	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289
24	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980
26	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642
28	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278
30	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892
35	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342
40	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691
45	52,729	57,505	61,656	65,410	69,957
50	58,164	63,167	67,505	71,420	76,154
100	111,67	118,50	124,34	129,56	135,81

Таблица 14

Значения f_α для распределения Фишера

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
При $p = 0{,}05$										
1	161,4	199,5	215,6	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,84	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,99	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	5,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,00	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,21	2,13	2,08	2,04
60	4,00	3,15	2,74	2,52	2,37	2,23	2,17	2,10	2,04	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,12	2,03	1,99	1,94
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,10	2,00	1,96	1,90
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,97	1,91	1,87
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83

Продолжение табл.14

k_2 \ k_1	12	15	20	24	30	40	50	100	200	∞
1	243,9	245,9	248,0	249,0	250,1	251,1	252,0	253,2	253,8	254,3
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50
3	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,71	5,67	5,65	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,40	4,38	4,37
6	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
7	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,28	3,25	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,97	2,95	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
10	2,91	2,84	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,57	2,54
11	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,46	2,43	2,40
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,41	2,37	2,34	2,30
13	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,28	2,24	2,21
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,25	2,20	2,17	2,13
15	2,47	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,13	2,10	2,07
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,94	1,89	1,84
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,70	1,66	1,62
40	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,60	1,54	1,51
50	1,96	1,88	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,54	1,49	1,45
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,45	1,39
100	1,86	1,78	1,69	1,66	1,59	1,54	1,50	1,42	1,36	1,26
150	1,81	1,74	1,64	1,61	1,54	1,48	1,44	1,34	1,28	1,18
200	1,79	1,70	1,61	1,56	1,49	1,43	1,39	1,27	1,21	1,14
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,21	1,15	1,00

Значения f_{α} для распределения Фишера

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
При $p = 0{,}05$										
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,27	10,16	10,05
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	3,96	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,93
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,04	2,89	2,80	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,85	2,72	2,62	2,53
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,78	2,64	2,52	2,44
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,74	2,60	2,47	2,39
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

Окончание табл. 14

k_2 \ k_1	12	15	20	24	30	40	50	100	200	∞
1	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6200	63	63	6366
2	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,48	99,49	99,50
3	27,05	26,87	26,69	26,60	26,51	26,41	26,36	26,24	26,18	26,12
4	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,74	13,70	13,60	13,52	13,46
5	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,25	9,16	9,08	9,02
6	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,10	7,01	6,93	6,88
7	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,87	5,76	5,69	5,65
8	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	4,98	4,91	4,86
9	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,44	4,37	4,31
10	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,16	4,12	4,04	3,97	3,91
11	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,82	3,73	3,66	3,60
12	4,15	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,58	3,50	3,42	3,36
13	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,42	3,38	3,30	3,23	3,17
14	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,23	3,15	3,07	3,00
15	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,09	3,01	2,93	2,87
20	3,09	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,56	2,48	2,42
30	2,70	2,70	2,62	2,47	2,39	2,30	2,25	2,17	2,09	2,01
40	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	1,97	1,88	1,80
50	2,58	2,43	2,28	2,21	2,12	2,03	1,98	1,89	1,78	1,68
60	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,89	1,77	1,68	1,60
100	2,39	2,24	2,11	2,01	1,92	1,85	1,78	1,69	1,61	1,39
150	2,28	2,13	2,00	1,92	1,83	1,76	1,68	1,60	1,38	1,27
200	2,22	2,07	1,94	1,84	1,76	1,67	1,52	1,39	1,26	1,21
∞	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,41	1,28	1,19	1,00

Главный редактор — *А. Е. Илларионова*
Редактор — *В. Н. Рогожин*
Художник — *В. А. Антипов*
Верстка — *Н. В. Байкова*
Корректор — *О. А. Рогачева*

Ответственный за выпуск — *О. Б. Юсова*

Учебное издание

Математика для гуманитариев

Под общей редакцией доктора экономических наук,
профессора К. В. Балдина

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 20.08.2010. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная. Печ. л. 32,0.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
Для писем: 129347, Москва, п/о И-347;
Тел./факс: 8(495) 741-34-28,
8(499) 182-01-58, 182-42-01, 182-11-79, 183-93-01.

E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис;
http://www.dashkov.ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел.: 554-21-86