ВЕДЬ ЭТО ТАК ПРОСТО!

Математика

СБОРНИК ЗАДАЧ

для
чайников

Основы арифметики, алгебры и геометрии

Анализ выражений и показателей степени

Практические примеры математических задач

Марк Зегарелли

Марк Зегарелли

Математика
Сборник задач

для
чайников®

УДК 510.2
З-47

Перевод с английского и редакция *И.В. Берштейна*

Зегарелли, М.

З-47 Математика для чайников. Сборник задач, /Марк Зегарелли; пер. с англ. И.В. Берштейна.

352 с. : ил. — Парал. тит. англ.

ISBN 978-617-7812-17-2 (укр.)
ISBN 978-1-119-35751-3 (англ.)

Этот сборник задач для начинающих окажет помощь в усвоении основных математических понятий, проработке примеров практических задач и поэтапном анализе их решений. Пользуясь этой книгой, вы можете смело вторгаться в неизведанную область простых и десятичных дробей, алгебраических уравнений и прочих предметов изучения математики.

Книга адресована всем желающим изучить математику и поможет им преодолеть невольный страх перед этой дисциплиной.

Оглавление

Содержание

Введение

При правильном подходе математика практически всегда бывает проще, чем кажется на первый взгляд. И бóльшая часть из того, что вас поначалу смущает в ней, в конечном итоге оказывается не таким уж и страшным. Многие учащиеся чувствуют себя потерявшимися где-то на полпути между умением считать до десяти и первым уроком алгебры, и это может случиться с каждым, сколько бы ему ни было лет: 14 или 104 года. Если и вы относитесь к их числу, то не отчаивайтесь — вы не одиноки, и эта книга придет вам на помощь!

Читая эту книгу, вы приобретете уверенность и навыки, которые вам потребуются в прохождении любого курса математики на пути к алгебре. Приобрести столь необходимую уверенность и навыки проще и быстрее всего, решая практические задачи. Данная книга служит для того, чтобы помочь вам найти свой ясный путь в мир математики. Во всех разделах каждой главы четко излагаются знания, которые вы должны приобрести, закрепив их на многочисленных примерах практических задач, решения которых подробно разъясняются. Итак, возьмите в руку карандаш, откройте эту книгу на любой странице и приступите к наращиванию своих математических мускулов!

Об этой книге

Эта книга адресована всем, кто стремится усовершенствовать свои математические навыки: от уже проходящих курс математики до готовящихся записаться на него или изучающих математику самостоятельно. Но в любом случае практика ведет к совершенству, и в этой книге вы найдете немало примеров решения практических математических задач.

Каждая глава этой книги посвящена отдельному предмету математики: отрицательным числам, дробям, десятичным числам, геометрии, построению графиков, элементарной алгебре. И в каждом разделе описываются практические задачи, решая которые вы приобретаете разные математические навыки. Каждый раздел характеризуется следующим содержанием.

- Краткое введение в предмет, рассматриваемый в данном разделе.
- Пояснение, как решать задачи, представленные в данном разделе.
- Примеры вопросов и ответов, демонстрирующие все стадии решения отдельной задачи.
- Практические задачи со свободным местом, специально оставленным вам для самостоятельного решения.

Смело пользуйтесь этой книгой как рабочей тетрадью по математике, поскольку именно для этого она и предназначена! Потрудившись над решением одной или ряда задач, перейдите в конец главы, где вы найдете правильный ответ и подробное, пошаговое разъяснение, как его получить.

Решать буквально все упражнения, приведенные в этой книге, совсем не обязательно, хотя это и можно, конечно, сделать. Вы вольны выбрать главу с теми математическими задачами, попрактиковаться в решении которых вам хотелось бы в первую очередь. Проработав в одном разделе задачи в достаточной для полного удовлетворения степени, можете перейти к другому разделу. Если же задачи в каком-нибудь разделе покажутся вам слишком сложными, вернитесь к предыдущему разделу или главе, чтобы приобрести необходимые практические навыки, следуя при этом по перекрестным ссылкам.

Предположения автора

Вы, вероятно, догадываетесь, что освоить математику лучше всего, занимаясь ею на практике. Чтобы войти в курс дела и применить свои математические навыки на практике, вам могут потребоваться лишь самые необходимые пояснения. В таком случае вы выбрали подходящую книгу. Если же вам требуется более подробное обсуждение математических понятий, включая рекомендации по их применению для решения практических задач, в таком случае обратитесь к базовой книге *Математика для чайников, 2-е издание*.

Мне бы хотелось побиться об заклад последней монетой в кармане, что вы готовы к чтению этой книги. При этом я предполагаю, что вы знакомы с основами десятичной числовой системы и четырьмя арифметическими операциями (сложение, вычитание, умножение и деление). Чтобы убедиться в своей готовности к чтению этой книги, рассмотрите приведенные ниже арифметические задачи и попробуйте их решить. Если вы сумеете их решить, значит, готовы читать эту книгу дальше!

$$3 + 4 = \qquad\qquad 5 \times 5 =$$
$$10 - 8 = \qquad\qquad 20 \div 2 =$$

Пиктограммы, используемые в книге

На полях книги вы обнаружите различные пиктограммы, которыми обозначены самые важные сведения. Ниже приведено краткое описание назначения каждой пиктограммы.

ЗАПОМНИ!

Этой пиктограммой обозначаются важные сведения. Обращайте особое внимание на эти подробности, поскольку их непременно нужно знать!

СОВЕТ

Эта пиктограмма помогает быстро и просто дойти до сути. Опробуйте приемы, обозначаемые этой пиктограммой, решая задачи, представленные в данном разделе.

ВНИМАНИЕ!

Предупреждения являются своего рода ловушками, в которые нередко попадают невнимательные обучающиеся математике. Внимательное чтение этих предупреждений поможет вам избежать ненужных хлопот.

ПРИМЕР!

Этой пиктограммой обозначаются примеры задач, демонстрирующие отдельные методики решения перед тем, как перейти к упражнениям.

Что делать дальше

Чтобы усовершенствовать свои навыки в математике, можете начать чтение этой книги практически с любой страницы. В главах 3–6 рассматриваются понятия, ставящие в затруднительное положение изучающих математику: отрицательные числа, порядок выполнения операций, множители, кратные и дробные величины. Эти важные понятия должны быть непременно усвоены, поскольку на них основывается бóльшая часть материала последующих глав. Свободно владея этими понятиями, вы получите настоящее преимущество на любых курсах по математике.

Итак, твердо усвоив упомянутые выше понятия, вы можете читать далее книгу в любом порядке, обращаясь по мере надобности за справкой к советам и приемам, приведенным в главах 3–6. Единственный совет: старайтесь сначала решать предлагаемые задачи самостоятельно и только *затем* смотреть ответ!

А за дополнительными разъяснениями и вопросами, не рассматриваемыми в этом справочном пособии, обратитесь к книге *Basic Math & Pre-Algebra For Dummies*. Обе эти книги позволят вам навалиться на любую математическую задачу с двух сторон, чтобы успешно положить ее на лопатки.

Об авторе

Марк Зегарелли — учитель математики, репетитор и автор восьми книг из серии *... для чайников*, в том числе *SAT Math For Dummies*, *ACT Math For Dummies* и *Calculus II For Dummies*. Он окончил Ратгерский университет по специальностям "английский язык" и "математика" и в настоящее время проживает в Лонг-Бранч, шт. Нью-Джерси, а также в Сан-Франциско, шт. Калифорния.

Посвящение

Моему доброму другу Михаилу Конопко с глубоким восхищением, любовью и кусочками мозаики, дополняющими общую картину наших взаимоотношений.

Благодарности

Работа над настоящим, третьим изданием этой книги дала мне немалый положительный опыт благодаря поддержке и руководству со стороны моего рецензента от издательства Wiley Линдсея Лефевра, редактора проекта и рукописи Крисси Гатри, а также технического редактора Пэта Барнеса. И, как всегда, выражаю благодарность своему помощнику Крису Марку за все, чем он помог мне в данном проекте.

Благодарю также завсегдатаев заведения Borderlands Café на улице Валенсии в Сан-Франциско за создание мирной и дружеской атмосферы для работы над этой книгой.

От издательства

Вы, читатель этой книги, и есть главный ее критик и комментатор. Мы ценим ваше мнение и хотим знать, что было сделано нами правильно, что можно было сделать лучше и что еще вы хотели бы увидеть изданным нами. Нам интересно услышать и любые другие замечания, которые вам хотелось бы высказать в наш адрес.

Мы ждем ваших комментариев и надеемся на них. Вы можете прислать нам бумажное или электронное письмо либо просто посетить наш веб-сайт и оставить свои замечания там. Одним словом, любым удобным для вас способом дайте нам знать, нравится или нет вам эта книга, а также выскажите свое мнение о том, как сделать наши книги более интересными для вас.

Посылая письмо или сообщение, не забудьте указать название книги и ее авторов, а также ваш обратный адрес. Мы внимательно ознакомимся с вашим мнением и обязательно учтем его при отборе и подготовке к изданию последующих книг.

Наши электронные адреса:

E-mail: `info@dialektika.com`
WWW: `http://www.dialektika.com`

1 Введение в математику

В ЭТОЙ ЧАСТИ...

- » Представление о разрядном значении
- » Применение четырех основных арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления
- » Вычисление с отрицательными числами
- » Упрощение выражений благодаря заданию порядка выполнения операций
- » Обращение с делителями и кратными чисел

Глава 1

Мы вас вычислили

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Представление о том, как разрядное значение превращает отдельные цифры в числа

» Округление чисел до ближайших десятков, сотен и тысяч

» Вычисление с помощью четырех основных арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления

» Повышение удобства деления столбиком

В этой главе делается краткий обзор самых основ математики. Большая часть представленного здесь материала вам, вероятнее всего, уже известна, поэтому рассматривайте его как небольшой экскурс в прошлое, чтобы вспомнить былое по сравнению с тем математическим аппаратом, которым вы, возможно, владеете ныне. Заложив довольно прочное основание в этой главе, вам будет намного легче усваивать материал последующих глав.

Рассмотрим сначала числовую систему, которая вам хорошо известна и называется *индоарабской*, или *десятичной*. В такой системе для выражения чисел применяются десятичные цифры и разрядное (или поместное) значение. Затем мы покажем, как округлять числа до ближайших десятков, сотен и тысяч.

После этого здесь описываются четыре основные арифметические операции: сложение, вычисление, умножение и деление. При этом будет показано, как с помощью числовой оси раскрывается смысл всех четырех арифметических операций. И в конце главы поясняется, как выполняется деление столбиком как с остатком, так и без остатка.

ЗАПОМНИ!

В литературе по математике для обозначения операции умножения часто употребляется знак точки (•). Здесь же для наглядности используется знак умножения (×).

Расположение по местам с помощью чисел и цифр

Во всем мире чаще всего применяется индоарабская числовая система, которая состоит из десяти *цифр*, т.е. символов подобных буквам A–Z. И они вам, без сомнения, хорошо известны:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

Подобно буквам алфавита, отдельные цифры не приносят особой пользы. Но совместно эти десять знаков могут составлять числа любой величины, используя *разрядное* (или *поместное*) *значение*. В частности, разрядное значение присваивает каждой цифре большее или меньшее значение в зависимости от ее местоположения в числе. И каждое разрядное значение оказывается в десять раз больше, чем разрядное значение, расположенное непосредственно справа.

ЗАПОМНИ!

Несмотря на то что цифра 0 не добавляет числу никакого значения, она может служить в качестве значащей. Когда цифра 0 оказывается справа хотя бы от *одной* ненулевой цифры, она является значащей. Важная функция значащих цифр состоит в том, что они обозначают соответствующий разряд числа. А если цифра 0 оказывается слева от ненулевой цифры, то она *не является значащей*. Указывать незначащие нули совсем не обязательно, поэтому их можно благополучно исключить из числа.

ПРИМЕР!

Задача. Выявите разряды единиц, десятков и сотен в числе 284.

Решение. Разряд единиц представлен цифрой 4, разряд десятков — цифрой 8, а разряд сотен — цифрой 2.

Задача. Расположите сначала число 5 672 таким образом, чтобы наглядно показать значение каждого его разряда. Затем воспользуйтесь этой таблицей и операцией сложения, чтобы продемонстрировать разбиение данного числа на отдельные цифры.

Решение.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
			5	6	7	2

Цифра 5 находится в разряде тысяч, цифра 6 — в разряде сотен, цифра 7 — в разряде десятков, цифра 2 — в разряде единиц. Ниже показано, каким образом данное число разбивается на отдельные цифры.

$$5\,000 + 600 + 70 + 2 = 5\,672$$

Задача. Расположите сначала число 040 120 таким образом, чтобы наглядно показать значение каждого его разряда. Затем воспользуйтесь этой таблицей и операцией сложения, чтобы продемонстрировать разбиение данного числа на отдельные цифры. Какие цифры 0 в данном числе оказываются значащими, а какие — нет?

Решение.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
	0	4	0	1	2	0

Первая цифра 0 находится в разряде сотен тысяч, цифра 4 — в разряде десятков тысяч, вторая цифра 0 — в разряде тысяч, цифра 1 — в разряде сотен, цифра 2 — в разряде десятков, а последняя цифра 0 — в разряде единиц. Таким образом, первая цифра 0 оказывается незначащим нулем, а остальные цифры 0 — значащими, как показано ниже:

$0 + 40\,000 + 0 + 100 + 20 + 0 = 40\,120.$

1. Выявите в числе 7 359 следующие цифры:
   а) цифра разряда единиц;
   б) цифра разряда десятков;
   в) цифра разряда сотен;
   г) цифра разряда тысяч.

2. Расположите сначала число 2 136 в таблице, чтобы продемонстрировать разрядное значение каждой его цифры. Затем воспользуйтесь этой таблицей, чтобы показать, каким образом данное число разбивается на отдельные цифры.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы

3 Расположите сначала число 03 809 в таблице, чтобы продемонстрировать разрядное значение каждой его цифры. Затем воспользуйтесь этой таблицей, чтобы показать, каким образом данное число разбивается на отдельные цифры. Какая из цифр 0 в данном числе является значащей, а какая из них — незначащим нулем?

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы

4 Расположите сначала число 0 450 900 в таблице, чтобы продемонстрировать разрядное значение каждой его цифры. Затем воспользуйтесь этой таблицей, чтобы показать, каким образом данное число разбивается на отдельные цифры. Какие из цифр 0 в данном числе являются значащими, а какие из них — незначащими нулями?

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы

Перекат: округление чисел в бо́льшую и меньшую сторону

ЗАПОМНИ!

Округление чисел упрощает обращение с многоразрядными длинными числами. Чтобы округлить двухразрядное число до ближайшего десятка, достаточно увеличить или уменьшить его до ближайшего числа, оканчивающегося цифрой 0, как поясняется ниже.

- Если число оканчивается на цифру 1, 2, 3 или 4, оно округляется в меньшую сторону, причем разряд десятков остается тем же самым, а разряд единиц приводится к нулю.
- Если число оканчивается на цифру 5, 6, 7, 8 или 9, оно округляется в бо́льшую сторону, причем разряд десятков увеличивается на 1, а разряд единиц приводится к нулю.

Округлить число больше, чем на две цифры до ближайшего десятка, можно тем же самым способом, уделив основное внимание только разрядам единиц и десятков. Ясно понимая, каким образом число округляется до ближайшего десятка, округлить число до ближайшей сотни, тысячи и далее не составит большого труда. В данном случае основное внимание следует уделить следующим двум цифрам: той, что находится на месте округляемого разряда, а также той, что находится непосредственно справа от него, указывая тем самым, в какую именно сторону (бо́льшую или меньшую) следует округлять число. Все цифры, находящиеся справа от округляемого числа, должны быть приведены к нулю.

При округлении числа в бо́льшую сторону иногда небольшие изменения в разрядах единиц и десятков оказывают влияние на другие разряды. Это очень похоже на переход показаний одометра в автомобиле с девяток на нули, например, с 11999 км на 12000 км.

ПРИМЕР!

Задача. Округлите числа 31; 58 и 95 до ближайшего десятка.

Решение. 30; 60 и **100**.

Число 31 оканчивается на 1, поэтому оно округляется в меньшую сторону:

31 → 30.

Число 58 оканчивается на 8, поэтому оно округляется в бо́льшую сторону:

58 → 60.

Число 95 оканчивается на 5, поэтому оно округляется в бо́льшую сторону:

95 → 100.

Задача. Округлите числа 742; 3 820 и 61 225 до ближайшего десятка.

Решение. 740; **3 820** и **61 230**.

Число 742 оканчивается на 2, поэтому оно округляется в меньшую сторону:

7<u>42</u> → 7<u>40</u>.

Число 3 820 уже оканчивается на 0, поэтому округлять его не требуется:

3 8<u>20</u> → 3 8<u>20</u>.

Число 61 225 оканчивается на 5, поэтому оно округляется в большую сторону:

61 2<u>25</u> → 61 2<u>30</u>.

5 Округлите приведенные ниже двухразрядные числа до ближайшего десятка:
а) 29;
б) 43;
в) 75;
г) 97.

6 Округлите приведенные ниже числа до ближайшего десятка:
а) 164;
б) 765;
в) 1989;
г) 9 999 995.

7 Округлите приведенные ниже числа до ближайшей сотни:
а) 439;
б) 562;
в) 2950;
г) 109 974.

8 Округлите приведенные ниже числа до ближайшей тысячи:
а) 5 280;
б) 77 777;
в) 1 234 567;
г) 1 899 999.

Применение числовой оси в четырех основных арифметических операциях

Числовая ось — это прямая линия с числами, расположенными через равные промежутки. Вам, вероятно, приходилось наблюдать числовую ось, когда вы учились считать до десяти. В этом разделе будет показано, как пользоваться этим надежным инструментальным средством для выполнения четырех основных арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) над относительно малыми числами.

Числовая ось может оказаться полезным инструментальным средством для сложения и вычитания малых чисел. В частности:

» для сложения следует сместиться по числовой оси *вправо*;

» для вычитания следует сместиться по числовой оси *влево*.

Чтобы выполнить умножение на числовой оси, следует начать с нуля и отсчитать *первое* умножаемое число столько раз, сколько обозначает *второе* число. Чтобы выполнить деление на числовой оси, следует выделить сначала отрезок числовой оси от нуля до *первого* делимого числа. Затем этот отрезок равномерно разделить на столько участков, сколько обозначает *второе* число. Длина каждого участка и дает результат деления.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните сложение 6 + 7 на числовой оси.

Решение. 13. Выражение 6 + 7 означает, что от числа 6 следует отсчитать 7 раз по числовой оси вправо, получив в итоге число 13 (рис. 1.1).

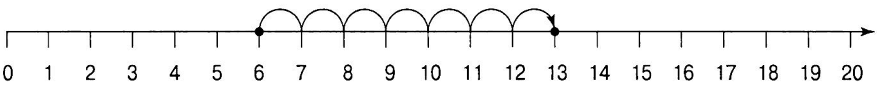


Рис. 1.1. Операция сложения 6 + 7 = 13 на числовой оси

Задача. Выполните вычитание 12 – 4 на числовой оси.

Решение. 8. Выражение 12 – 4 означает, что от числа 12 следует отсчитать 4 раза по числовой оси влево, получив в итоге число 8 (рис. 1.2).

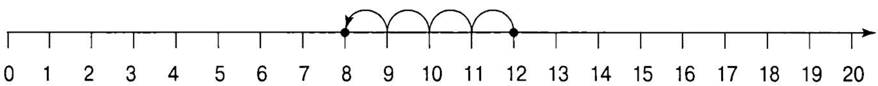


Рис. 1.2. Операция вычитания 12 – 4 = 8 на числовой оси

Задача. Выполните умножение 2×5 на числовой оси.

Решение. 10. Отсчитайте от нуля пять раз по два, чтобы получить в итоге число 10 (рис. 1.3).

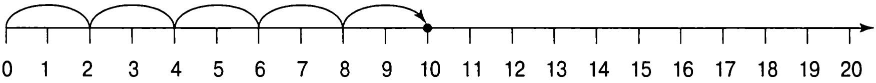


Рис. 1.3. Операция умножения 2×5 на числовой оси

Задача. Выполните деление $12 \div 3$ на числовой оси.

Решение. 4. Выделите сначала отрезок от 0 до 12 на числовой оси. Затем разделите этот отрезок поровну на три меньших участка, как показано на рис. 1.4. Длина каждого из этих участков оказывается равной 4, что и дает результат деления, а следовательно, решение данной задачи.

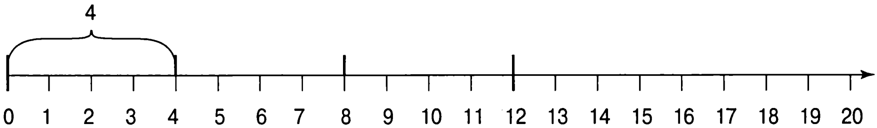


Рис. 1.4. Операция деления $12 \div 3$ на числовой оси

9 Сложите приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $4 + 7 = ?$

б) $9 + 8 = ?$

в) $12 + 0 = ?$

г) $4 + 6 + 1 + 5 = ?$

10 Вычтите приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $10 - 6 = ?$

б) $14 - 9 = ?$

в) $18 - 18 = ?$

г) $9 - 3 + 7 - 2 + 1 = ?$

11 Умножьте приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $2 \times 7 = ?$

б) $7 \times 2 = ?$

в) $4 \times 3 = ?$

г) $6 \times 1 = ?$

д) $6 \times 0 = ?$

е) $0 \times 10 = ?$

12 Разделите приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $8 \div 2 = ?$

б) $15 \div 5 = ?$

в) $18 \div 3 = ?$

г) $10 \div 10 = ?$

д) $7 \div 1 = ?$

е) $0 \div 2 = ?$

Сложение и вычитание столбиком

Чтобы сложить или вычесть большие числа, расположите их сначала друг за другом, чтобы одинаковые разряды (единиц, десятков, сотен и т.д.) образовали отдельные столбцы. Затем действуйте справа налево, выполняя соответствующую операцию. Производите вычисления по вертикали, начиная со столбца единиц, переходя к столбцу десятков и т.д.

» Если результат сложения в отдельном столбце превышает 10 и больше, запишите разряд единиц из этого результата, а разряд десятков перенесите вверх, расположив его над столбцом, расположенным непосредственно слева.

» Если при вычитании верхняя цифра в отдельном столбце оказывается меньше, чем нижняя, необходимо произвести заем из столбца, расположенного непосредственно слева.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните сложение 35 + 26 + 142.

Решение. 203. Расположите складываемые числа друг за другом и сложите столбцы справа налево.

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1}\\ 35\\ 26\\ +142\\ \hline 203\end{array}$$

Обратите внимание на то, что при сложении цифр в столбце единиц (5 + 6 + 2 = 13) ниже этого столбца записывается цифра 3, а цифра 1 переносится в столбец десятков, располагаясь над ним. И когда выполняется сложение в столбце десятков (1 + 3 + 2 + 4 = 10), ниже этого столбца записывается цифра 0, а цифра 1 переносится в столбец сотен, располагаясь над ним.

Задача. Выполните вычитание 843 – 91.

Решение. 752. Расположите вычитаемые числа друг за другом и вычтите столбцы справа налево.

$$\begin{array}{r} {}^{7\,1}\\ \cancel{8}43\\ -91\\ \hline 752\end{array}$$

При попытке выполнить вычитание в столбце десятков цифра 4 оказывается меньше цифры 9, поэтому производится заем 1 из столбца сотен. В итоге цифра 8 в столбце сотен уменьшается до 7, а занимаемая цифра 1 располагается над цифрой 4 в столбце десятков, образуя вместе с ней число 14. И теперь можно выполнить вычитание 14 – 9 = 5.

13 Выполните сложение 129 + 88 + 35.

14 Найдите сумму следующих чисел: 1734 + 620 + 803 + 32 = ?

15 Выполните вычитание 419 – 57.

16 Найдите разность следующих чисел: 41024 – 1786.

Умножение многоразрядных чисел

Чтобы умножить большие числа, расположите сначала первое умножаемое число над вторым. Затем умножьте каждый разряд нижнего числа справа налево на верхнее число. Иными словами, умножьте сначала верхнее число на разряд единиц нижнего числа. Затем добавьте значащую цифру 0 и умножьте верхнее число на разряд десятков нижнего числа. Продолжая данный процесс дальше, добавляйте значащие цифры 0 и умножайте верхнее число на следующий по очереди разряд нижнего числа.

Если в результате умножения получается двухразрядное число, запишите разряд единиц в одном столбце, а разряд десятков перенесите в следующий столбец, расположив его вверху. После умножения цифр в двух следующих разрядах сложите их произведение с перенесенным выше числом. И, наконец, сложите все промежуточные результаты умножения, чтобы получить окончательное решение рассматриваемой здесь задачи умножения.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните умножение 742 × 136.

Решение. 100 912. Расположите первое умножаемое число над вторым.

$$\begin{array}{r} 742 \\ \times 136 \\ \hline \end{array}$$

Затем умножьте на 6 каждый разряд числа 742, начиная справа. А поскольку в результате операции умножения 2 × 6 = 12 получается двухразрядное число, то запишите цифру 2 из его разряда единиц, а цифру 1 из разряда десятков перенесите в столбец десятков, расположив ее вверху. В следующем столбце выполните операцию умножения 4 × 6 = 24 и прибавьте к полученному результату перенесенную выше цифру 1, получив в итоге сумму 25. Запишите цифру 5 из этой суммы, а цифру 2 перенесите в столбец сотен, расположив ее вверху. И, наконец, выполните операцию умножения 7 × 6 = 42 и прибавьте к полученному результату перенесенную выше цифру 2, получив в итоге сумму 44.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,1} \\ 742 \\ \times 136 \\ \hline 4452 \end{array}$$

Далее запишите цифру 0 на правом краю ряда, расположенного ниже только что записанного вами ряда цифр. Умножьте на 3 каждый разряд числа 742, начиная справа и делая перенос по мере необходимости.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 742 \\ \times 136 \\ \hline 4452 \\ 22260 \end{array}$$

Запишите две цифры 0 на правом краю ряда, расположенного ниже только что записанного вами ряда цифр. Повторите данный процесс при умножении на последнюю цифру 1.

$$\begin{array}{r} 742 \\ \times 136 \\ \hline 4452 \\ 22260 \\ 74200 \end{array}$$

И, наконец, сложите все промежуточные результаты умножения.

$$\begin{array}{r} 742 \\ \times 136 \\ \hline 4452 \\ 22260 \\ 74200 \\ \hline 100912 \end{array}$$

Таким образом, $742 \times 136 = 100\,912$.

17 Выполните умножение 75×42.

18 Каков результат умножения 136×84?

19 Решите следующую задачу: 1728×405.

20 Выполните умножение $8\,912 \times 767$.

Циклический процесс деления столбиком

Большие числа обычно делятся *столбиком*. В отличие от остальных основных арифметических операций, процесс деления столбиком продвигается слева направо. При этом операции деления, умножения и вычитания циклически повторяются для каждого разряда *делимого* (т.е. того числа, которое делится).

Иногда деление не выполняется нацело, и тогда результат получается с *остатком*, который приходится каким-то образом принимать во внимание. В подобных случаях остаток записывается после результата деления нацело следующим образом: *ост (число в остатке)*.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните деление 956 ÷ 4.

Решение. 239. Начните решение данной задачи, записав ее следующим образом.

$$4\overline{)956}$$

Выясните сначала, сколько раз число 9 делится на 4, т.е. 9 ÷ 4? Оно делится 2 раза с небольшим остатком, поэтому запишите цифру 2 над цифрой 9. Затем выполните умножение 2 × 4, чтобы получить результат, равный 8. Запишите этот результат прямо под числом 9 и проведите под ним прямую линию.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4\overline{)956} \\ \underline{8} \end{array}$$

Выполните вычитание 9 – 8, чтобы получить результат, равный 1. (*Примечание:* результат вычитания должен быть меньше делителя; в данном случае — 4.) Затем снесите следующее число 5, чтобы получить в итоге новое число 15.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4\overline{)956} \\ \underline{-8} \\ 15 \end{array}$$

Упомянутые выше шаги составляют один полный цикл. Чтобы завершить решение рассматриваемой здесь задачи, достаточно повторить их. Итак, выясните, сколько раз число 15 делится на 4, т.е. 15 ÷ 4? Оно делится 3 раза с небольшим остатком, поэтому запишите цифру 3 над цифрой 5. Затем выполните умножение 3 × 4, чтобы получить результат, равный 12. Запишите этот результат прямо под числом 15 и проведите под ним прямую линию.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 4\overline{)956} \\ \underline{-8} \\ 15 \\ \underline{-12} \end{array}$$

Выполните вычитание 15 – 12, чтобы получить число 3. Затем снесите следующее число 6, чтобы получить в итоге новое число 36.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 4\overline{)956} \\ \underline{-8} \\ 15 \\ \underline{-12} \\ 36 \end{array}$$

Завершив очередной цикл деления, начните следующий цикл, выяснив, сколько раз число 36 делится на 4, т.е. 36 ÷ 4? Оно делится ровно 9 раз, поэтому запишите цифру 9 над цифрой 6, выполните умножение 9 × 4 и запишите полученный результат прямо под числом 36.

```
  239
4)956
 –8
  15
 –12
   36
   36
```

Далее выполните вычитание 36 – 36 = 0. В связи с тем, что чисел для сноса больше не осталось, процесс деления завершается, а результат (т.е. *частное* от деления) представлен самым верхним числом в столбце.

```
  239
4)956
 –8
  15
 –12
   36
  –36
    0
```

ПРИМЕР!

Задача. Выполните деление
3042 ÷ 5.

Решение. 608 ост (2). Начните решение данной задачи, записав ее следующим образом.

```
5)3042
```

Выясните сначала, сколько раз число 3 делится на 5? Оно не делится ни разу, поскольку число 3 меньше 5, а следовательно, запишите цифру 0 над цифрой 3. Затем выясните то же самое, но в отношении первых *двух* разрядов делимого, т.е. сколько раз число 30 делится на 5, или 30 ÷ 5? Оно делится 6 раз, поэтому запишите цифру 6 над цифрой 0. Ниже показано, как завершить первый цикл деления.

```
  06
5)3042
 –30
  04
```

Далее выясните, сколько раз число 4 делится на 5. Оно не делится ни разу, поскольку число 4 меньше 5, а следовательно, запишите цифру 0 над цифрой 4. После этого снесите следующее число (2), чтобы получить в итоге новое число 42.

```
  060
5)3042
 –30
  042
```

Выясните, сколько раз число 42 делится на 5, т.е. 42 ÷ 5? Оно делится 8 раз с небольшим остатком, и на этом данный цикл деления завершается.

```
  0608     ← частное
5)3042
 –30
  042
  –40
    2      ← остаток
```

В связи с тем, что чисел для сноса больше не осталось, процесс деления завершается, а результат (т.е. *частное* от деления) представлен самым верхним числом в столбце (начальный нуль можно опустить), тогда как остаток — самым нижним числом. Таким образом, $3042 \div 5 = 608$ ост (2), т.е. результат деления числа 3042 на 5 равен 608 с остатком 2.

21 Выполните деление $741 \div 3$.

22 Вычислите результат деления $3245 \div 5$.

23 Найдите результат деления $91\,390 \div 8$.

24 Найдите результат деления $792\,541 \div 9$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам попрактиковаться в анализе чисел и выполнении четырех основных арифметических операций над ними.

1. Выявите в числе 7359 цифры разрядов единиц, десятков и тысяч:
   а) цифра **9** в разряде единицы;
   б) цифра **5** в разряде десятков;
   в) цифра **3** в разряде сотен;
   г) цифра **7** в разряде тысяч.

2. 2000 + 100 + 30 + 6 = 2136.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
			2	1	3	6

3. 0 + 3000 + 800 + 0 + 9 = 3809. Первая цифра 0 является незначащим нулем, а второй 0 — значащим.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
		0	3	8	0	9

4. 0 + 400 000 + 50 000 + 0 + 900 + 0 + 0 = 0 450 900. Первая цифра 0 является незначащим нулем, а остальные три нуля — значащими.

Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы
0	4	5	0	9	0	0

5. Округлите приведенные ниже двухразрядные числа до ближайшего десятка.
   а) 29 → **30**. В разряде единиц находится цифра 9, поэтому она округляется в бо́льшую сторону.
   б) 43 → **40**. В разряде единиц находится цифра 3, поэтому она округляется в меньшую сторону.
   в) 75 → **80**. В разряде единиц находится цифра 5, поэтому она округляется в бо́льшую сторону.
   г) 97 → **100**. В разряде единиц находится цифра 7, поэтому она округляется в бо́льшую сторону, а следовательно, и цифра 9 в разряде десятков.

6. Округлите приведенные ниже числа до ближайшего десятка.
   а) 1<u>64</u> → **1<u>60</u>**. В разряде единиц находится цифра 4, поэтому она округляется в меньшую сторону.

б) 765 → **770**. В разряде единиц находится цифра 5, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону.

в) 1989 → **1990**. В разряде единиц находится цифра 9, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону.

г) 9 999 995 → **10 000 000**. В разряде единиц находится цифра 5, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону, а следовательно, и цифра 9 во всех остальных разрядах.

7 Округлите приведенные ниже числа до ближайшей сотни.

а) 439 → **400**. В разряде десятков находится цифра 3, поэтому она округляется в меньшую сторону.

б) 562 → **600**. В разряде десятков находится цифра 6, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону.

в) 2950 → **3000**. В разряде десятков находится цифра 5, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону.

г) 109 974 → **110 000**. В разряде десятков находится цифра 7, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону, а следовательно, и цифра 9 во всех последующих разрядах.

8 Округлите приведенные ниже двухразрядные числа до ближайшей тысячи.

а) 5280 → **5000**. В разряде сотен находится цифра 2, поэтому она округляется в меньшую сторону.

б) 77 777 → **78 000**. В разряде сотен находится цифра 7, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону.

в) 1 234 567 → **1 235 000**. В разряде сотен находится цифра 5, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону.

г) 1 899 999 → **1 900 000**. В разряде сотен находится цифра 9, поэтому она округляется в б*о*льшую сторону, а следовательно, и цифра 9 во всех последующих разрядах.

9 Сложите приведенные ниже числа на числовой оси.

а) 4 + 7 = **11**. Выражение 4 + 7 означает, что от числа 4 следует отсчитать 7 раз по числовой оси *вправо*, получив в итоге число 11.

б) 9 + 8 = **17**. Выражение 9 + 8 означает, что от числа 9 следует отсчитать 8 раз по числовой оси *вправо*, получив в итоге число 17.

в) 12 + 0 = **12**. Выражение 12 + 0 означает, что от числа 12 следует отсчитать 0 раз по числовой оси *вправо*, получив в итоге число 12.

г) 4 + 6 + 1 + 5 = **16**. Выражение 4 + 6 + 1 + 5 означает, что от числа 4 следует отсчитать сначала 6 раз, затем 1 раз и, наконец, 5 раз по числовой оси *вправо*, получив в итоге число 16.

10 Вычтите приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $10 - 6 =$ **4**. Выражение $10 - 6$ означает, что от числа 10 следует отсчитать 6 раз по числовой оси *влево*, получив в итоге число 4.

б) $14 - 9 =$ **5**. Выражение $14 - 9$ означает, что от числа 14 следует отсчитать 9 раз по числовой оси *влево*, получив в итоге число 5.

в) $18 - 18 =$ **0**. Выражение $18 - 18$ означает, что от числа 18 следует отсчитать 18 раз по числовой оси *влево*, получив в итоге число 0.

г) $9 - 3 + 7 - 2 + 1 =$ **12**. Выражение $9 - 3 + 7 - 2 + 1$ означает, что от числа 9 следует сначала отсчитать 3 раза по числовой оси *влево*, затем 7 раз *вправо*, далее 2 раза *влево* и, наконец, 1 раз *вправо*, получив в итоге число 12.

11 Умножьте приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $2 \times 7 =$ **14**. Отсчитайте от нуля семь раз по два, чтобы получить в итоге число 14.

б) $7 \times 2 =$ **14**. Отсчитайте от нуля два раза по семь, чтобы получить в итоге число 14.

в) $4 \times 3 =$ **12**. Отсчитайте от нуля три раза по четыре, чтобы получить в итоге число 12.

г) $6 \times 1 =$ **6**. Отсчитайте от нуля один раз по шесть, чтобы получить в итоге число 6.

д) $6 \times 0 =$ **0**. Отсчитайте от нуля нуль раз по шесть, чтобы получить в итоге число 0.

е) $0 \times 10 =$ **0**. Отсчитайте от нуля десять раз по нулю, чтобы получить в итоге число 0.

12 Разделите приведенные ниже числа на числовой оси.

а) $8 \div 2 =$ **4**. Выделите сначала отрезок от 0 до 8 на числовой оси. Затем разделите этот отрезок поровну на два меньших участка. Длина каждого из этих участков будет равна 4, что и даст результат деления, а следовательно, решение данной задачи.

б) $15 \div 5 =$ **3**. Выделите сначала отрезок от 0 до 15 на числовой оси. Затем разделите этот отрезок поровну на пять меньших участков. Длина каждого из этих участков будет равна 3, что и даст результат деления, а следовательно, решение данной задачи.

в) $18 \div 3 =$ **6**. Выделите сначала отрезок от 0 до 18 на числовой оси. Затем разделите этот отрезок поровну на три меньших участка. Длина каждого из этих участков будет равна 6, что и даст результат деления, а следовательно, решение данной задачи.

г) $10 \div 10 =$ **1**. Выделите сначала отрезок от 0 до 10 на числовой оси. Затем разделите этот отрезок поровну на десять меньших участков.

Длина каждого из этих участков будет равна 1, что и даст результат деления, а следовательно, решение данной задачи.

д) $7 \div 1 = \mathbf{7}$. Выделите сначала отрезок от 0 до 7 на числовой оси. Затем разделите этот отрезок ровно на 1 участок, т.е. вообще не делите его. Длина этого участка по-прежнему останется равной 7, что и даст результат деления, а следовательно, решение данной задачи.

е) $0 \div 2 = \mathbf{0}$. Выделите сначала отрезок от 0 до 0 на числовой оси. Длина этого отрезка окажется равной нулю, а следовательно, он не может быть меньше. Это означает, что в результате деления нуля на *любое* число все равно получается нуль.

13 **252**

```
  1 2
  129
   88
 +35
 ----
  252
```

14 **3 189**

```
  2
  1734
   620
   803
  +32
  ----
  3189
```

15 **362**

```
  3 1
  4̸19
 –57
 ---
  362
```

16 **39 238**

```
  3 10 9 11 1
  4̸ 1̸ 0̸ 2̸ 4
 –1 7 8 6
 ---------
  3 9 2 3 8
```

17 **3 150**

```
    75
   ×42
   150
  3000
  ----
  3150
```

18 **11 424**

```
    136
    ×84
  -----
    544
  10880
  -----
  11424
```

19 **699 840**

```
    1728
    ×405
  ------
    8640
   00000
  691200
  ------
  699840
```

20 **6 835 504**

```
     8912
     ×767
  -------
    62384
   534720
  6238400
  -------
  6835504
```

21 **247**

```
   247
  3)741
   –6
   --
    14
   –12
   ---
     21
    –21
    ---
      0
```

22 **649**

```
   0649
  5)3245
   –30
   ---
     24
    –20
    ---
     45
    –45
    ---
      0
```

23 **11 423 ост (6)**

```
   11423
  8) 91390
   –8
   --
    11
    –8
    --
     33
    –32
    ---
      19
     –16
     ---
       30
      –24
      ---
        6
```

24 **88 060 ост (1)**

```
   088060
  9)792541
   –72
   ---
     72
    –72
    ---
     054
     –54
     ---
       01
       –0
       --
        1
```

Глава 2

Притягательность четырех основных арифметических операций

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

- » Перезапись уравнений с помощью обратных операций и свойства коммутативности
- » Представление о свойствах ассоциативности и дистрибутивности
- » Вычисление неравенств вроде >, <, ≠ и ≈
- » Возведение в степень и извлечение корня

Четыре арифметические операции (сложения, вычитания, умножения и деления) являются основными, но весьма универсальными инструментальными средствами. В этой главе наглядно показано, что эти четыре операции попарно являются обратными, т.е. отменяющими друг друга. В ней также поясняется, каким образом свойство коммутативности позволяет переставлять числа в выражении. А самое главное — из этой главы вы узнаете, как преобразовывать уравнения в альтернативные формы, упрощающие решение математических задач.

Далее в главе поясняется, как пользоваться круглыми скобками для группирования чисел вместе с операциями и каким образом свойство ассоциативности гарантирует, что иногда круглые скобки не меняют решение задачи. Вы также узнаете, как обращаться с четырьмя разновидностями неравенств: $>$, $<$, $\neq$ и $\approx$. И, наконец, будет показано, что возведение в степень является сокращенной формой умножения, а также каким образом извлекается квадратный корень из числа.

Перегруппирование с помощью обратных операций и свойства коммутативности

Четыре основные арифметические операции на самом деле составляют две пары *обратных операций*. Это означает, что такие операции способны отменять друг друга.

- **Сложение и вычитание.** Операция вычитания отменяет операцию сложения. Так, если сложить сначала числа 3 и 4, получив в итоге число 7, а затем вычесть из него число 4, то первоначальная операция сложения будет, по существу, отменена, возвращая обратно к числу 3:

  $3 + 4 = 7 \to 7 - 4 = 3.$
- Такой принцип действия обратных операций приобретает немалый смысл, если посмотреть на числовую ось. Так, операция сложения 3 + 4 означает, что следует начать с трех и отсчитать четыре раза *вправо* по числовой оси, а операция (7 – 4) — начать с семи и отсчитать четыре раза *влево*. Таким образом, сначала прибавляя, а затем вычитая число 4, мы в конечном итоге возвращаемся к тому, с него начинали вычисление.
- **Умножение и деление.** Операция деления отменяет операцию умножения. Так, если умножить сначала число 6 на 2, получив в итоге число 12, а затем разделить его на 2, то первоначальная операция умножения будет, по существу, отменена, возвращая нас обратно к числу 6:

  $6 \times 2 = 12 \to 12 \div 2 = 6.$

ЗАПОМНИ!

Свойство коммутативности сложения дает возможность изменять порядок следования чисел в операции сложения, не меняя результат, а *свойство коммутативности умножения* — делать то же самое в операции умножения, не меняя результат. Ниже приведены характерные тому примеры.

$2 + 5 = 7 \to 5 + 2 = 7.$

$3 \times 4 = 12 \to 4 \times 3 = 12.$

Благодаря свойству коммутативности и обратным операциям каждое уравнение приобретает четыре альтернативные формы, содержащие одну и ту же, но немного иначе выраженную информацию. Например, 2 + 3 = 5 и 3 + 2 = 5 являются альтернативными формами одного и того же уравнения, хотя они и составлены с помощью свойства коммутативности. А уравнение 5 – 3 = 2 является обратной формой уравнения 2 + 3 = 5. И, наконец, уравнение 5 – 2 = 3 является обратной формой уравнения 3 + 2 = 5.

СОВЕТ

С помощью альтернативных форм уравнений можно решать задачи заполнения пробелов. Так, если в уравнении известны два числа, то можно всегда найти оставшееся число. Для этого достаточно выяснить, как перенести пробел на другую сторону уравнения. Ниже поясняется, как это делается.

» Если в любом уравнении отсутствует *первое* число, воспользуйтесь обратной операцией, чтобы перестроить уравнение:

  ________________ + 6 =10 → 10 – 6 = ________________.

» Если в операции сложения или умножения отсутствует *второе* число, воспользуйтесь сначала свойством коммутативности, а затем обратной операцией:

  9 + __________ = 17 __________ + 9 = 17 → 17 – 9 = _________.

» Если в операции вычитания или умножения отсутствует *второе* число, переставьте местами два значения, находящихся рядом со знаком равенства (т.е. пробелом и знаком равенства):

  15 – ________________ = 8 → 15 – 8 ________________.

ПРИМЕР!

Задача. Какое уравнение является обратным уравнению 16 – 9 = 7?

Решение. 7 + 9 = 16. В уравнении 16 – 9 = 7 следует начать с числа 16, вычтя из него 9, чтобы получить в итоге число 7. Обратное уравнение отменяет этот процесс, где следует начать с числа 7, прибавив к нему 9, чтобы вернуться обратно к числу 16:

16 – 9 = 7 → 7 + 9 = 16.

Задача. Какое уравнение является обратным уравнению $6 \times 7 = 42$?

Решение. 42 ÷ 7 = 6. В уравнении $6 \times 7 = 42$ следует начать с числа 6, умножив его на 7, чтобы получить в итоге число 42. Обратное уравнение отменяет этот процесс, где следует начать с числа 42, разделив его на 7, чтобы вернуться обратно к числу 6:

$6 \times 7 = 42 \rightarrow 42 \div 7 = 6$.

Задача. Найдите три альтернативные формы уравнения 7 – 2 = 5, используя обратные операции и свойство коммутативности.

Решение. 5 + 2 = 7; 2 + 5 = 7 и 7 – 5 = 2.

Прежде всего воспользуйтесь обратными операциями, чтобы сменить вычитание на сложение:

$7 - 2 = 5 \to 5 + 2 = 7$.

Затем воспользуйтесь свойством коммутативности, чтобы изменить порядок следования чисел в данной операции сложения:

$5 + 2 = 7 \to 2 + 5 = 7$.

И, наконец, смените сложение на вычитание, используя обратные операции:

$2 + 5 = 7 \to 7 - 5 = 2$.

Задача. Заполните пробел в следующем уравнении:

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \div 3 = 13$.

Решение. 39. Воспользуйтесь обратными операциями, чтобы сменить в данной задаче деление на умножение:

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \div 3 = 13 \to$

$\to 13 \times 3 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Теперь данную задачу можно решить, выполнив умножение:

$13 \times 3 = 39$.

Задача. Решите следующее уравнение, заполнив в нем пробел:

$16 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 47$.

Решение. 31. Воспользуйтесь сначала свойством коммутативности, чтобы обратить операцию сложения:

$16 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 47 \to$

$\to \_\_\_\_\_\_\_\_\_ + 16 = 47$.

Затем смените в данной задаче сложение на вычитание, используя обратные операции:

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + 16 = 47 \to$

$\to 47 - 16 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

А теперь данную задачу можно решить, выполнив вычитание:

$47 - 16 = 31$.

Задача. Заполните пробел в следующем уравнении:

$64 - \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 15$.

Решение. 49. Переставьте два последних числа в уравнении:

$64 - \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 15 \to$

$\to 64 - 15 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Теперь данную задачу можно решить, выполнив вычитание:

$64 - 15 = 49$.

1 Составьте альтернативную форму каждого из приведенных ниже уравнений, используя обратные операции.

а) $8 + 9 = 17$.

б) $23 - 13 = 10$.

в) $15 \times 5 = 75$.

г) $132 \div 11 = 12$.

2 Составьте альтернативную форму каждого из приведенных ниже уравнений, используя свойство коммутативности.

а) $19 + 35 = 54$.

б) $175 + 88 = 263$.

в) $22 \times 8 = 176$.

г) $101 \times 99 = 9\,999$.

3 Найдите три альтернативные формы каждого из приведенных ниже уравнений, используя обратные операции и свойство коммутативности.

а) $7 + 3 = 10$.

б) $12 - 4 = 8$.

в) $6 \times 5 = 30$.

г) $18 \div 2 = 9$.

4 Заполните пробелы в каждом из приведенных ниже уравнений.

а) ______________ $- 74 = 36$.

б) ______________ $\times 7 = 105$.

в) $45 +$ ____________ $= 132$.

г) $273 -$ _____________ $= 70$.

д) $8 \times$ ______________ $= 648$.

е) $180 \div$ ______________ $= 9$.

Группирование с помощью круглых скобок и свойства ассоциативности

ЗАПОМНИ!

Круглые скобки служат для группирования операций, указывая на необходимость выполнить любые заключенные в них операции *прежде* операций за их пределами. Круглые скобки способны существенно изменить результат, получаемый при решении математической задачи, особенно со смешанными операциями. Тем не менее круглые скобки не изменяют конечный результат при решении математической задачи в следующих двух важных случаях.

» Когда каждая операция является сложением, то *свойство ассоциативности сложения* гласит, что числа можно группировать как угодно, произвольно выбирая пары чисел, которые следует сложить в первую очередь. А перестановка круглых скобок не изменяет конечный результат.

» Когда каждая операция является умножением, то *свойство ассоциативности умножения* гласит, что пары чисел, которые следует умножить в первую очередь, можно выбирать произвольно. А перестановка круглых скобок не изменяет конечный результат.

СОВЕТ

Свойство ассоциативности вместе со свойством коммутативности, обсуждавшимся в предыдущем разделе, позволяют как угодно переставлять все числа в любой математической задаче, состоящей только из операций сложения или умножения.

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно $(21 - 6) \div 3$ и $21 - (6 \div 3)$?

Решение. 5 и 19. Чтобы вычислить значение выражения $(21 - 6) \div 3$, выполните сначала операцию в круглых скобках, т.е. вычитание $21 - 6 = 15$:

$(21 - 6) \div 3 = 15 \div 3$.

И, наконец, выполните деление:

$15 \div 3 = 5$.

Для того чтобы вычислить значение выражения $21 - (6 \div 3)$, выполните сначала операцию в круглых скобках, т.е. деление $6 \div 3 = 2$:

$21 - (6 \div 3) = 21 - 2$.

И, наконец, выполните вычитание $21 - 2 = 19$. Обратите внимание на то, что расстановка круглых скобок в обоих выражениях изменяет результат их вычисления.

Задача. Вычислите значение выражений $1 + (9 + 2)$ и $(1 + 9) + 2$.

Решение. 12 и 12. Чтобы найти значение выражения $1 + (9 + 2)$, выполните сначала операцию в круглых скобках, т.е. сложение $9 + 2 = 11$:

$1 + (9 + 2) = 1 + 11$.

И, наконец, выполните сложение:

$1 + 11 = 12$.

Для того чтобы найти значение выражения $(1 + 9) + 2$, выполните сначала операцию в круглых скобках, т.е. сложение $1 + 9 = 10$:

$(1 + 9) + 2 = 10 + 2$.

И, наконец, выполните сложение $10 + 2 = 12$. Обратите внимание на то, что оба выражения отличаются лишь расположением круглых скобок. Но поскольку оба эти выражения состоят только из операций сложения, то расстановка круглых круглых скобок в них никак не меняет результат вычисления.

Задача. Найдите значение выражений $2 \times (4 \times 3)$ и $(2 \times 4) \times 3$.

Решение. 24 и 24. Чтобы найти значение выражения $2 \times (4 \times 3)$, выполните сначала операцию в круглых скобках, т.е. умножение $4 \times 3 = 12$:

$2 \times (4 \times 3) = 2 \times 12$.

И, наконец, выполните умножение $2 \times 12 = 24$.

Для того чтобы найти значение выражения $(2 \times 4) \times 3$, выполните сначала операцию в круглых скобках, т.е. умножение $2 \times 4 = 8$:

$(2 \times 4) \times 3 = 8 \times 3$.

И, наконец, выполните умножение $8 \times 3 = 24$. Результат все равно получается одинаковым, как бы ни группировать операции умножения.

Задача. Найдите значение выражения $41 \times 5 \times 2$.

Решение. 410. Два последних числа в данном выражении невелики, поэтому заключите их в круглые скобки:

$41 \times 5 \times 2 = 41 \times (5 \times 2)$.

Выполните сначала операцию умножения в круглых скобках:

$41 \times (5 \times 2) = 41 \times 10$.

А теперь можно без особого труда выполнить умножение:

$41 \times 10 = 410$.

5 Найдите значение выражения $(8 \times 6) + 10$.

6 Найдите значение выражения $123 \div (145 - 144)$.

7 Найдите значение следующих выражений.

а) $(40 \div 2) + 6 = ?$

б) $40 \div (2 + 6) = ?$

Влияет ли расстановка круглых скобок на конечный результат?

8 Найдите значение следующих выражений.

а) $(16 + 24) + 19 = ?$

б) $16 + (24 + 19) = ?$

Влияет ли расстановка круглых скобок на конечный результат?

9 Найдите значение следующих выражений.

а) $(18 \times 25) \times 4 = ?$

б) $18 \times (25 \times 4) = ?$

Влияет ли расстановка круглых скобок на конечный результат?

10 Найдите значение выражения $93\,769 \times 2 \times 5$.

(*Подсказка:* воспользуйтесь свойством ассоциативности умножения, чтобы упростить решение данной задачи.)

Неравенства, вносящие неуравновешенность в уравнения

Если числа не равны, то их нельзя приравнять с помощью знака равенства (=). Вместо этого следует воспользоваться различными знаками, обозначающими их *неравенство*.

- Знак > обозначает операцию сравнения "больше", а знак < — операцию сравнения "меньше".
- Так, операция сравнения 6 > 3 обозначает, что число 6 *больше* числа 3.
- 7 < 10 обозначает, что число 7 *меньше* числа 10.

СОВЕТ

Если вы не знаете, каким знаком воспользоваться, > или <, для сравнения чисел, запомните, что знак > всегда указывает в сторону меньшего числа, тогда как знак < — в сторону большего числа, Например, 5 < 7, но 7 > 5.

- Знак ≠ обозначает операцию сравнения "не равно". Этот знак не столь полезен, как знаки > и <, поскольку он никак не сообщает, является ли одно сравниваемое число больше или меньше другого числа. Он, главным образом, обозначает ошибку или погрешность в вычислении арифметического выражения.
- Знак ≈ обозначает операцию сравнения "приблизительно равно". Он употребляется при округлении чисел и оценивании решений математических задач, т.е. в тех случаях, когда требуется найти достаточно близкое, хотя и не точное решение. С помощью этого знака можно вносить небольшие коррективы в числа, чтобы упростить обращение с ними. (Подробнее об оценивании и округлении чисел см. в главе 1.)

ПРИМЕР!

Задача. Укажите правильный знак (=, > или <) на месте пробела:
2 + 2 ____________ 5.

Решение. Знак <. Укажите знак <, обозначающий операцию сравнения "меньше", поскольку операция сложения 2 + 2 = 4 дает результат, равный 4 и поэтому меньший 5.

Задача. Укажите правильный знак (=, > или <) на месте пробела:
42 – 19 ____________ 5 × 4.

Решение. Знак >. Укажите знак >, обозначающий операцию сравнения "больше", поскольку операция вычитания 42 – 19 = 23 дает результат, равный 23, и поэтому больший, чем результат операции умножения 5 × 4, равный 20.

Задача. Сэм поработал на своих родителей 7 часов при ставке \$8 в час, а родители заплатили ему \$50. Укажите с помощью знака ≠ причину разочарования Сэма.

Решение. \$50 ≠ \$56. Сэм работал 7 часов при ставке \$8 в час, поэтому заработал следующую сумму:

$7 \times \$8 = \$56$.

Он был разочарован потому, что родители заплатили ему неверную сумму, которая оказалась меньше, чем он ожидал:

$\$50 \neq \$56$.

Задача. Найдите приблизительное значение выражения $2\,000\,398 + 6\,001\,756$.

Решение. 8 000 000. Оба числа в данном выражении порядка миллионов, поэтому их можно округлить до ближайшего миллиона:

$2\,000\,398 + 6\,001\,756 \approx$

$\approx 2\,000\,000 + 6\,000\,000$.

Теперь сложить эти большие числа не составит большого труда:

$2\,000\,000 + 6\,000\,000 = 8\,000\,000$.

11 Укажите правильный знак (=, > или <) на месте пробела в следующих выражениях:

а) $4 + 6$ ___________ 13;

б) 9×7 ___________ 62;

в) $33 - 16$ ___________ $60 \div 3$;

г) $100 \div 5$ ___________ $83 - 63$.

12 Замените знак ≠ на знак > или < в следующих выражениях:

а) $17 + 14 \neq 33$;

б) $144 - 90 \neq 66$;

в) $11 \times 14 \neq 98$;

г) $150 \div 6 \neq 20$.

13 Хозяин заплатил Тиму за его работу, выполненную в течение 40 часов на прошлой неделе. А Тим отчитался за свое рабочее время, сказав, что он потратил 19 часов на прием клиентов, 11 часов на разъезды на автомашине и 7 часов на работу с документами. Укажите с помощью знака $\neq$ причину, по которой хозяин остался недоволен работой Тима.

14 Найдите приблизительное значение выражения
10002 – 6007.

Особые случаи возведения в степень и извлечения квадратного корня

Возведение числа в *степень* — это быстрый способ умножить число на самое себя. Например, обозначение 2^5 означает "два в степени пять", т.е. умножение числа 2 пять раз на самое себя, как показано ниже. При этом число 2 называется *основанием*, а число 5 — *показателем степени*.

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$

СОВЕТ

Степени числа десять, т.е. степени числа по основанию 10, играют особую роль, поскольку на них основана десятичная система счисления. Правда, обращаться с ними совсем не трудно. Чтобы возвести число 10 в степень любого положительного числа, достаточно написать число 1 и количество нулей, равное показателю степени. Например, 10^3 равно 1000.

Ниже приведен ряд важных правил возведения в степени, содержащие число 0 или 1.

- Всякое число, возводимое в степень 1, равно самому себе.
- Всякое число, кроме нуля, возводимое в степень 0, равно 1. Например, 10^0 равно 1 *без* последующих нулей, т.е. 1.
- Число 0, возводимое в степень любого числа, кроме нуля, равно 0, потому что сколько бы ни умножать число 0 на самое себя, результат все равно будет равен нулю.

ВНИМАНИЕ!

Математики решили оставить обозначение 0^0 неопределенным. Это означает, что оно не равно ни одному из чисел.

- Число 1, возведенное в степень любого числа, равно 1, потому что сколько бы ни умножать число 1 на само себя, результат все равно будет равен единице.

Когда число умножается на само себя, в итоге получается *квадрат* этого числа. Следовательно, возведение любого числа в степень 2 дает его квадрат. Например, обозначение 5^2 означает "пять в квадрате":

$5^2 = 5 \times 5 = 25.$

Операция *извлечения квадратного корня* числа является обратной по отношению к возведению числа в квадрат (как пояснялось выше в разделе "Перегруппирование с помощью обратных операций и свойства коммутативности", обратные операции отменяют друг друга). Извлечение квадратного корня числа означает выявление нового числа, которое, будучи затем умноженным на самое себя, окажется равным исходному числу, из которого извлекался квадратный корень. В качестве примера ниже приведено извлечение квадратного корня из числа 25.

$\sqrt{25} = 5$ (поскольку $5 \times 5 = 25$).

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно 3^4?

Решение. 81. Выражение 3^4 предписывает умножить число 3 на самое себя 4 раза:

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$

Задача. Чему равно 10^6?

Решение. 1 000 000. По правилу возведения числа 10 в степень 10^6 оно равно 1 с шестью нулями, т.е. 1000000.

Задача. Чему равно $\sqrt{36}$?

Решение. 6. Чтобы извлечь квадратный корень из числа 36, необходимо найти такое число, умножение которого на самое себя даст в итоге исходное число 36. Как известно, $6 \times 6 = 36$, поэтому $\sqrt{36} = 6$.

Задача. Чему равно $\sqrt{256}$?

Решение. 16. Чтобы извлечь квадратный корень из числа 256, необходимо найти такое число, умножение которого на самое себя даст в итоге исходное число 256. Поэтому попробуйте сузить круг подходящих для этой цели чисел, начав с числа 10:

$10 \times 10 = 100$.

Поскольку $256 > 100$, квадратный корень из числа 256 больше 10. В таком случае попробуйте число 20:

$20 \times 20 = 400$.

Поскольку $256 < 400$, квадратный корень из числа 256 оказывается в пределах от 10 до 20. В таком случае попробуйте число 15:

$15 \times 15 = 225$.

Поскольку $256 > 225$, квадратный корень из числа 256 оказывается в пределах от **15** до 20. В таком случае попробуйте число 16:

$16 \times 16 = 256$.

Теперь все верно. Таким образом, $\sqrt{256} = 16$·

15 Найдите значения степеней следующих чисел:

а) 6^2;

б) 3^5;

в) 2^7;

г) 2^8. (*Подсказка:* данную задачу упростит решение задачи из предыдущего пункта.)

16 Найдите значения степеней следующих чисел:

а) 10^4;

б) 10^{10};

в) 10^{15};

г) 10^1.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике знания, приобретенные в этой главе.

1. Составьте альтернативную форму каждого из приведенных ниже уравнений, используя обратные операции.
   а) $8 + 9 = 17$: $\mathbf{17 - 9 = 8}$.
   б) $23 - 13 = 10$: $\mathbf{10 + 13 = 23}$.
   в) $15 \times 5 = 75$: $\mathbf{75 \div 5 = 15}$.
   г) $132 \div 11 = 12$: $\mathbf{12 \times 11 = 132}$.

2. Составьте альтернативную форму каждого из приведенных ниже уравнений, используя свойство коммутативности.
   а) $129 + 35 = 54$: $\mathbf{35 + 19 = 54}$.
   б) $175 + 88 = 263$: $\mathbf{88 + 175 = 263}$.
   в) $22 \times 8 = 176$: $\mathbf{8 \times 22 = 176}$.
   г) $101 \times 99 = 9999$: $\mathbf{99 \times 101 = 9999}$.

3. Найдите три альтернативные формы каждого из приведенных ниже уравнений, используя обратные операции и свойство коммутативности.
   а) $7 + 3 = 10$: $\mathbf{10 - 3 = 7}$; $\mathbf{3 + 7 = 10}$, а также $\mathbf{10 - 7 = 3}$.
   б) $12 - 4 = 8$: $\mathbf{8 + 4 = 12}$; $\mathbf{4 + 8 = 12}$, а также $\mathbf{12 - 8 = 4}$.
   в) $6 \times 5 = 30$: $\mathbf{30 \div 5 = 6}$; $\mathbf{5 \times 6 = 30}$, а также $\mathbf{30 \div 6 = 5}$.
   г) $18 \div 2 = 9$: $\mathbf{9 \times 2 = 18}$; $\mathbf{2 \times 9 = 18}$; $\mathbf{18 \div 9 = 2}$.

4. Заполните пробелы в каждом из приведенных ниже уравнений.
   а) **110**. Перепишите уравнение ____________ $- 74 = 36$ в его обратной форме:
   $36 + 74 =$ ____________.
   Следовательно, $36 + 74 = 110$.
   б) **15**. Перепишите уравнение __________ $\times 7 = 105$ в его обратной форме:
   $105 \div 7$ ____________.
   Следовательно, $105 \div 7 = 15$.
   в) **87**. Перепишите сначала уравнение $45 +$ __________ $= 132$, используя свойство коммутативности:
   ___________ $+ 45 = 132$.
   Затем перепишите данное уравнение в его обратной форме:
   $132 - 45 =$ __________.
   Следовательно, $132 - 45 = 87$.

г) **203**. Перепишите уравнение 273 – ___________ = 70, поменяв местами два его члена, находящиеся по обе стороны от знака равенства:
273 – 70 = ___________.
Следовательно, 273 – 70 = 203.

д) **81**. Перепишите уравнение 8 × ____________ = 648, используя свойство коммутативности:
____________ × 8 = 648.
Затем перепишите данное уравнение в его обратной форме:
648 ÷ 8 = ____________.
Следовательно, 648 ÷ 8 = 81.

е) **20**. Перепишите уравнение 180 ÷ ____________ = 9, поменяв местами два его члена, находящиеся по обе стороны от знака равенства:
180 ÷ 9 = ____________.
Следовательно, 180 ÷ 9 = 20.

5. **58**. Сначала выполните операцию умножения в круглых скобках:
(8 × 6) + 10 = 48 + 10.
Затем выполните операцию сложения: 48 + 10 = 58.

6. **123**. Сначала выполните операцию вычитания в круглых скобках:
123 ÷ (145 – 144) = 123 ÷ 1.
Затем выполните операцию деления: 123 ÷ 1 = 123.

7. Найдите решение следующих двух уравнений.
а) (40 ÷ 2) + 6 = 20 + 6 = **26**.
б) 40 ÷ (2 + 6) = 40 ÷ 8 = **5**.
в) **Да**, расстановка круглых скобок влияет на конечный результат.

8. Найдите решение следующих двух уравнений.
а) (16 + 24) + 19 = 40 + 19 = **59**.
б) 16 + (24 + 19) = 16 + 43 = **59**.
Нет, расстановка круглых скобок никак не влияет на конечный результат из-за свойства ассоциативности сложения.

9. Найдите решение следующих двух уравнений.
а) (18 × 25) × 4 = 450 × 4 = **1800**.
б) 18 × (25 × 4) = 18 × 100 = **1800**.
Нет, расстановка круглых скобок никак не влияет на конечный результат из-за свойства ассоциативности умножения.

10 $93\,769 \times 2 \times 5 =$ **937 690**. Данную задачу проще решить, заключив операцию умножения 2×5 в круглые скобки.
$93\,769 \times (2 \times 5) = 93\,769 \times 10 = 937\,690$.

11 Укажите правильный знак (**=**, **>** или **<**) на месте пробела в следующих выражениях.

а) $4 + 6 = 10$, поэтому $10 < 13$.

б) $9 \times 7 = 63$, поэтому $63 > 62$.

в) $33 - 16 = 17$, а также $60 \div 3 = 20$, поэтому $17 < 20$.

г) $100 \div 5 = 20$, а также $83 - 63 = 20$, поэтому $20 = 20$.

12 Замените знак **≠** на знак **>** или **<** в следующих выражениях.

а) $17 + 14 = 33$, поэтому $31 < 33$.

б) $144 - 90 = 66$, поэтому $54 < 66$.

в) $11 \times 14 = 154$, поэтому $154 > 98$.

г) $150 \div 6 = 25$, поэтому $25 > 20$.

13 $19 + 11 + 7 =$ **37 ≠ 40**.

14 $10\,002 - 6\,007$ **≈ 4000**.

15 Найдите значения степеней следующих чисел.

а) $6^2 = 6 \times 6 =$ **36**.

б) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ **243**.

в) $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ **128**.

г) $2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ **256**. Из упражнения в предыдущем пункте уже известно, что $2^7 = 128$, поэтому умножьте это число на 2, чтобы получить решение данной задачи: $128 \times 2 = 256$.

16 Найдите значения степеней следующих чисел.

а) $10^4 =$ **10 000**. Записывается как 1 с четырьмя нулями.

б) $10^{10} =$ **10 000 000 000**. Записывается как 1 с десятью нулями.

в) $10^{15} =$ **1 000 000 000 000 000**. Записывается как 1 с пятнадцатью нулями.

г) $10^1 =$ **10**. Любое число, возводимое в степень 1, равно самому себе.

Глава 3

Освоение отрицательных чисел

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Представление об отрицательных числах

» Определение абсолютного значения числа

» Сложение и вычитание отрицательных чисел

» Умножение и деление отрицательных чисел

Отрицательные числа, которыми обычно обозначается долг или низкая температура, представляют величины меньше нуля. Такие числа зачастую возникают при вычитании большой величины из меньшей. В этой главе поясняется, как выполнять четыре основные операции (сложения, вычитания, умножения и деления) над отрицательными числами.

О происхождении отрицательных чисел

Когда вы впервые открыли для себя операцию вычитания, то, вероятно, были предупреждены, что вычесть большее число из меньшего нельзя. Так, если у вас имеется четыре стеклянных шарика, то вам не удастся вычесть из них шесть шариков, поскольку вы не сможете изъять больше шариков, чем у вас есть на самом деле. Если это правило вполне справедливо для стеклянных шариков, то в других случаях большее число иногда *можно* вычесть из меньшего. Так, если у вас имеются 4 доллара и вы покупаете что-нибудь за 6 долларов, то тем самым совершаете покупку в долг на 2 доллара, т.е. в вашем распоряжении остается отрицательная денежная сумма.

Число со знаком "минус" (например, –2) называется *отрицательным*. Так, число –2 можно назвать как "минус два", или "отрицательная двойка". Отрицательные числа находятся на числовой оси слева от нуля, как показано на рис. 3.1.

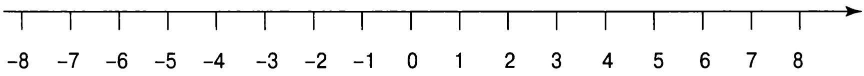


Рис. 3.1. Отрицательные числа на числовой оси

Вычитание большего числа из меньшего приобретает смысл на числовой оси. С этой целью воспользуйтесь правилом вычитания, пояснявшимся в главе 1, начав с первого вычитаемого числа и отсчитав влево по числовой оси столько раз, сколько составляет второе число.

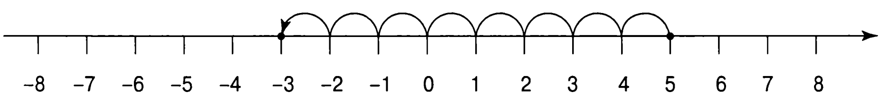
ЗАПОМНИ!

Если же в вашем распоряжении отсутствует числовая ось, то воспользуйтесь следующим правилом для вычитания большего числа из меньшего: переставьте местами оба числа, чтобы вычесть меньшее число из большего, а затем добавьте знак "минус" к полученному результату.

ПРИМЕР!

Задача. Воспользуйтесь числовой осью, чтобы выполнить вычитание 5 – 8.

Решение. –3. Вычитание 5 – 8 на числовой оси означает следующее: отсчитать 8 раз *влево*, начиная с числа 5.



Задача. Чему равно 11 – 19?

Решение. –8. В связи с тем что число 11 < 19, выполните вычитание 19 – 11 и добавьте знак "минус" к полученному результату, равному 8. Следовательно, 11 – 19 = –8.

1. Выполните вычитание следующих чисел, используя числовую ось.
   а) 1 – 4 = ____________.
   б) 3 – 7 = ____________.
   в) 6 – 8 = ____________.
   г) 7 – 14 = ____________.

2. Найдите решение следующих задач вычитания.
   а) 15 – 22 = ____________.
   б) 27 – 41 = ____________.
   в) 89 – 133 = ____________.
   г) 1000 – 1234 = ____________.

Смена знака: отрицание и абсолютное значение

ЗАПОМНИ!

Добавление знака "минус" к любому числу, означает *отрицание* этого числа. Отрицание числа означает смену его знака на противоположный. Из этого вытекает следующее.

» Добавление знака "минус" к положительному числу делает его отрицательным.

» Добавление знака "минус" к отрицательному числу делает его положительным. А два *подряд* знака "минус" упраздняются.

» Добавление знака "минус" к нулю не изменяет его значение, поэтому $-0 = 0$.

В отличие от отрицания, расположение числа между двумя вертикальными чертами указывает на его абсолютное значение. *Абсолютное значение* числа обозначается расстоянием от нуля до этого числа на числовой оси, т.е. положительное значение числа независимо от того, начинается ли отсчет отрицательного или положительного числа. Из этого вытекает следующее.

- Абсолютное значение положительного числа равно самому этому числу.
- Абсолютное значение отрицательного числа делает его положительным.
- Расположение числа между двумя вертикальными чертами не изменяет его значение, поэтому $|0| = 0$.
- Указание знака "минус" за пределами вертикальных черт, обозначающих абсолютное значение, дает отрицательный результат. Например, как $-|6| = -6$, так и $-|-6| = -6$.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните отрицание числа 7.

Решение. –7. Для отрицания числа 7 перед ним нужно поставить знак минус.

Задача. Чему равно $|9|$?

Решение. 9. Число 9 уже является положительным, поэтому абсолютное значение числа 9 также равно 9.

Задача. Найдите отрицательное значение числа **–3**.

Решение. 3. Отрицание числа –3 обозначается как $-(-3)$. А поскольку *два подряд* знака "минус" дают знак "плюс", в конечном итоге получается значение 3.

Задача. Чему равно $|-17|$?

Решение. 17. Исходное число –17 является отрицательным, поэтому абсолютное значение числа –17 равно 17.

Задача. Каково отрицание выражения $7 - 12$?

Решение. 5. Выполните сначала вычитание, чтобы получить в итоге $7 - 12 = -5$. Чтобы найти отрицательное значение числа –5, добавьте знак "минус" к полученному результату: $-(-5)$. А поскольку *два подряд* знака "минус" дают знак "плюс", то в конечном итоге получается число 5.

Задача. Каково абсолютное значение выражения $-|9 - 13| = ?$

Решение. –4. Выполните сначала вычитание: $9 - 13 = -4$, что дает отрицательное число. Поэтому абсолютное значение числа –4 равно 4. Но знак "минус", находящийся слева от вертикальной черты в исходном выражении, отрицает этот промежуточный результат, и поэтому окончательный результат равен –4.

3 Выполните отрицание каждого из следующих чисел и выражений, добавив сначала знак "минус", а затем упразднив по возможности знаки "минус".

а) 6.

б) –29.

в) 0.

г) 10 + 4.

д) 15 – 7.

е) 9 – 10.

4 Определите абсолютное значение в следующих выражениях.

а) $|7| = ?$

б) $|-11| = ?$

в) $|3 + 15| = ?$

г) $-|10 - 1| = ?$

д) $|1 - 10| = ?$

е) $|0| = ?$

Сложение отрицательных чисел

Понимая назначение отрицательных чисел, их можно складывать таким же обычным способом, как и положительные числа. И в этом поможет числовая ось, где любую арифметическую операцию можно интерпретировать как последовательность перемещений влево и вправо с подъемами и спадами (см. рисунки в главе 1). Так, при сложении на числовой оси отсчет начинается от отрицательного числа таким же образом, как и от положительного.

Сложить отрицательное число — это все равно, что вычесть положительное число, т.е. переместиться *влево* по числовой оси. Это правило действует независимо от того, с какого числа начинается отсчет: с положительного или отрицательного.

Уяснив, каким образом складывать отрицательные числа на числовой оси, вы сможете подготовиться к обращению с ними и без нее. И это особенно важно, когда дело доходит до больших чисел, не вмещающихся на числовой оси. Ниже перечислены некоторые особенности сложения отрицательных чисел.

СОВЕТ

» **Отрицательное число плюс положительное число.** Поменяйте оба числа (и их знаки) местами, превратив решаемую задачу в вычитание.

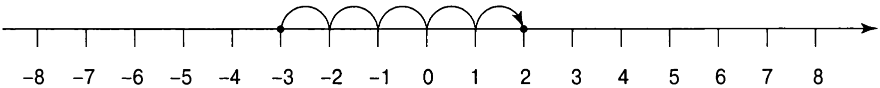
» **Положительное число плюс отрицательное число.** Опустите знак "плюс", превратив решаемую задачу в вычитание.

» **Сложение двух отрицательных чисел.** Опустите оба знака "минус", как будто складываются положительные числа, а затем добавьте знак "минус" к полученному результату.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните сложение –3 + 5, используя числовую ось.

Решение. 2. Сложение –3 + 5 на числовой оси означает следующее: начать с числа –3 и отсчитать 5 раз *вправо*, чтобы достичь в итоге числа 2, как показано ниже.

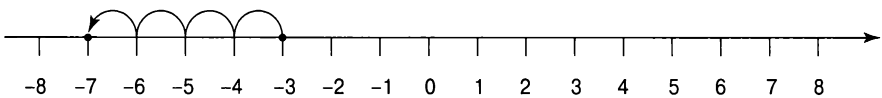


Задача. Выполните сложение 6 + (–2), используя числовую ось.

Решение. 4. Сложение 6 + (–2) на числовой оси означает следующее: начать с числа 6 и отсчитать 2 раза *влево*, чтобы достичь в итоге числа 4, как показано ниже.

Задача. Выполните сложение –3 + (–4), используя числовую ось.

Решение. –7. Сложение –3 + (–4) на числовой оси означает следующее: начать с числа –3 и отсчитать 4 раза *влево*, чтобы достичь в итоге числа –7, как показано ниже.



Задача. Выполните сложение $-23 + 39$.

Решение. 16. Сначала поменяйте оба числа местами вместе с их знаками:
$-23 + 39 = +39 - 23$.

Затем опустите знак “плюс” и воспользуйтесь знаком “минус” для вычитания:

$39 - 23 = 16$

5 Решите следующие задачи сложения, воспользовавшись числовой осью.

а) $-5 + 6$.

б) $-1 + (-7)$.

в) $4 + (-6)$.

г) $-3 + 9$.

д) $2 + (-1)$.

е) $-4 + (-4)$.

6 Решите следующие задачи сложения, не пользуясь числовой осью.

а) $-17 + 35$.

б) $29 + (-38)$.

в) $-61 + (-18)$.

г) $70 + (-63)$.

д) $-112 + 84$.

е) $-215 + (-322)$.

Вычитание отрицательных чисел

Вычесть отрицательное число — это все равно, что сложить положительное число, т.е. переместиться *вправо* по числовой оси. Это правило действует независимо от того, с какого числа начинается отсчет: с положительного или отрицательного.

ЗАПОМНИ!

Вычитая отрицательное число, не следует забывать, что два следующих подряд знака “минус” упраздняются, оставляя в итоге знак “плюс”. (Это можно сравнить с ситуацией, когда вы *не* можете *не* подсмеиваться над своими друзьями, поскольку они довольно смешны. В итоге вам *приходится* смеяться, потому что два отрицания подряд приводят к положительному результату.)

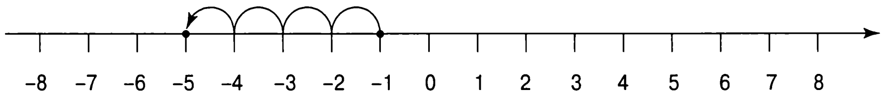
ЗАПОМНИ!

В литературе по математике отрицательное число всегда заключается в круглые скобки, если оно стоит после знака математической операции, чтобы знаки не сливались вместе: 3 – (–5).

Вычитая положительное число из отрицательного, опустите оба знака “минус” и сложите оба числа, как будто они положительные, а затем добавьте знак “минус” к полученному результату.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните вычитание –1 – 4, воспользовавшись числовой осью.
Решение. –5. Вычитание –1 – 4 на числовой оси означает следующее: начать с числа –1 и отсчитать 4 раза *влево*, чтобы достичь в итоге числа –5, как показано ниже.



7 Решите следующие задачи вычитания, воспользовавшись числовой осью.

а) –3 – 4.
б) 5 – (–3).
в) –1 – (–8).
г) –2 – 4.
д) –4 – 2.
е) –6 – (–10).

8 Решите следующие задачи вычитания, не пользуясь числовой осью.

а) 17 – (–26).
б) –21 – 45.
в) –42 – (–88).
г) –67 – 91.
д) 75 – (–49).
е) –150 – (–79).

Учет знаков при умножении и делении отрицательных чисел

Умножение и деление отрицательных чисел, по существу, выполняется таким же образом, как и положительных чисел. Наличие одного или больше знака “минус” не изменяет числовую часть получаемого результата. Нужно лишь решить, каким должен быть знак этого результата: положительным или отрицательным.

ЗАПОМНИ!

При умножении или делении отрицательных чисел необходимо помнить следующее.

» Если оба числа имеют *один и тот же* знак, то результат всегда положительный.

» Если оба числа имеют *противоположные* знаки, то результат всегда отрицательный.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните четыре следующие операции умножения.

а) $5 \times 6 =$ ____________.

б) $-5 \times 6 =$ ____________.

в) $5 \times (-6) =$ ____________.

г) $-5 \times (-6) =$ ____________.

Решение. Как следует из данного примера, числовая часть получаемого результата умножения 30 не меняется. При этом меняется лишь его знак в зависимости от знаков обоих умножаемых чисел.

а) $5 \times 6 = 30$.

б) $-5 \times 6 = -30$.

в) $5 \times (-6) = -30$.

г) $-5 \times (-6) = 30$.

Задача. Выполните четыре следующие операции деления.

а) $18 \div 3 =$ ____________.

б) $-18 \div 3 =$ ____________.

в) $18 \div (-3) =$ ____________.

г) $-18 \div (-3) =$ ____________.

Решение. Числовая часть получаемого результата деления 6 не меняется. При этом меняется лишь его знак в зависимости от знаков обоих делимых чисел.

а) $18 \div 3 = 6$.

б) $-18 \div 3 = -6$.

в) $18 \div (-3) = -6$.

г) $-18 \div (-3) = 6$.

Задача. Чему равно -84×21?

Решение. −1764. Сначала опустите знаки и умножьте оба числа:

$84 \times 21 = 1764$.

Числа −84 и 21 имеют разные знаки, поэтому результат их умножения отрицательный:

-1764.

Задача. Чему равно $-580 \div (-20)$?

Решение. 29. Опустите знаки и разделите одно число на другое (можете сделать это в столбик, как пояснялось в главе 1):

$580 \div 20 = 29$.

Числа −580 и −20 имеют одинаковые знаки, поэтому результат их деления положительный:

29.

9 Решите следующие задачи умножения.

а) $7 \times 11 =$ ____________.

б) $-7 \times 11 =$ ____________.

в) $7 \times (-11) =$ ____________.

г) $-7 \times (-11) =$ ____________.

10 Решите следующие задачи деления.

а) $32 \div (-8) =$ ____________.

б) $-32 \div (-8) =$ ____________.

в) $-32 \div 8 =$ ____________.

г) $32 \div 8 =$ ____________.

11 Чему равно -65×23?

12 Найдите значение выражения $-143 \times (-77)$.

13 Вычислите значение выражения $216 \div (-9)$.

14 Чему равно $-3375 \div (-25)$?

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1 Выполните вычитание следующих чисел, используя числовую ось.

а) 1 – 4 = **–3**. Начните с числа 1, отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.
б) 3 – 7 = **–4**. Начните с числа 3, отсчитав 7 раз *влево* по числовой оси.
в) 6 – 8 = **–2**. Начните с числа 6, отсчитав 8 раз *влево* по числовой оси.
г) 7 – 14 = **–7**. Начните с числа 7, отсчитав 14 раз *влево* по числовой оси.

2 Найдите решение следующих задач вычитания.

а) 15 – 22 = **–7**. Число 15 меньше числа 22, поэтому выполните вычитание 22 – 15 = 7, добавив знак “минус” к полученному результату: **–7**.
б) 27 – 41 = **–14**. Число 27 меньше числа 41, поэтому выполните вычитание 41 – 27 = 14, добавив знак “минус” к полученному результату: **–14**.
в) 89 – 133 = **–44**. Число 89 меньше числа 133, поэтому выполните вычитание 133 – 89 = 44, добавив знак “минус” к полученному результату: **–44**.
г) 1000 – 1234 = **–234**. Число 1000 меньше числа 1234, поэтому выполните вычитание 1234 – 1000 = 234, добавив знак “минус” к полученному результату: **–234**.

3 Выполните отрицание каждого из следующих чисел и выражений, добавив сначала знак “минус”, а затем упразднив по возможности знаки “минус”.

а) **–6**. Для отрицания числа 6 добавьте к нему знак “минус”: **–6**.
б) **29**. Для отрицания числа –29 сначала добавьте к нему знак “минус”: –(–29). Затем упраздните оба следующих подряд знака “минус”: –(–29) = **29**.
в) **0**. Нуль является собственным отрицанием.
г) **–14**. Сначала выполните сложение: 10 + 4 = 14, а затем отрицание полученного результата: **–14**.
д) **–8**. Сначала выполните вычитание: 15 – 7 = 8, а затем отрицание полученного результата: **–8**.
е) **1**. Сначала выполните вычитание: 9 – 10 = –1, а затем отрицание полученного результата: **1**.

4 Определите абсолютное значение в следующих выражениях.

а) $|7| = \mathbf{7}$. Число 7 уже положительное, поэтому и его абсолютное значение положительное: **7**.

б) $|-11| = \mathbf{11}$. Число –11 отрицательное, а его абсолютное значение положительное: **11**.

в) $|3 + 15| = \mathbf{18}$. Сначала выполните сложение чисел, находящихся между знаками вертикальной черты: $3 + 15 = 18$. В итоге будет получен положительный результат 18, поэтому его абсолютное значение также будет положительным: **18**.

г) $-|10 - 1| = \mathbf{-9}$. Сначала выполните вычитание чисел, находящихся между знаками вертикальной черты: $10 - 1 = 9$. В итоге будет получен положительный результат 9, поэтому его абсолютное значение также будет положительным: 9. Но поскольку перед знаками вертикальной черты стоит знак "минус", конечный результат придется отрицать, чтобы получить в итоге **–9**.

д) $|1 - 10| = \mathbf{9}$. Сначала выполните вычитание чисел, находящихся между знаками вертикальной черты: $1 - 10 = -9$. В итоге будет получен отрицательный результат. Но абсолютное значение числа –9 равно **9**.

е) $|0| = \mathbf{0}$. Абсолютное значение нуля равно **0**.

5 Решите следующие задачи сложения, воспользовавшись числовой осью.

а) $-5 + 6 = \mathbf{1}$. Начните с числа 5, отсчитав 6 раз *вправо* по числовой оси.

б) $-1 + (-7) = \mathbf{-8}$. Начните с числа 1, отсчитав 7 раз *влево* по числовой оси.

в) $4 + (-6) = \mathbf{-2}$. Начните с числа 4, отсчитав 6 раз *влево* по числовой оси.

г) $-3 + 9 = \mathbf{6}$. Начните с числа 3, отсчитав 9 раз *вправо* по числовой оси.

д) $2 + (-1) = \mathbf{1}$. Начните с числа 2, отсчитав 1 раз *влево* по числовой оси.

е) $-4 + (-4) = \mathbf{8}$. Начните с числа 4, отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.

6 Решите следующие задачи сложения, не пользуясь числовой осью.

а) $-17 + 35 = \mathbf{18}$. Поменяйте местами оба складываемых числа (вместе с их знаками), чтобы превратить решаемую задачу в вычитание: $-17 + 35 = 35 - 17 = \mathbf{18}$.

б) $29 + (-38) = \mathbf{-9}$. Опустите знак "плюс", чтобы превратить решаемую задачу в вычитание: $29 + (-38) = 29 - 38 = \mathbf{-9}$.

в) $-61 + (-18) = \mathbf{-79}$. Опустите знаки "минус", сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: $61 + 18 = 79$, а следовательно, $-61 + (-18) = \mathbf{-79}$.

г) 70 + (–63) = **7**. Превратите решаемую задачу в вычитание: 70 + (–63) = 70 – – 63 = **7**.

д) –112 + 84 = **–28**. Превратите решаемую задачу в вычитание: –112 + 84= = 84 – 112 = **–28**.

е) –215 + (–322) = **–537**. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: 215 + 322 = 537, а следовательно, –215 + (–322) = **–537**.

7 Решите следующие задачи вычитания, воспользовавшись числовой осью.

а) –3 – 4 = **7**. Начните с числа –3, отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.

б) 5 – (–3) = **8**. Начните с числа 5, отсчитав 3 раза *вправо* по числовой оси.

в) –1 – (–8) = **7**. Начните с числа –1, отсчитав 8 раз *вправо* по числовой оси.

г) –2 – 4 = **–6**. Начните с числа –2, отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.

д) –4 – 2 = **–6**. Начните с числа –4, отсчитав 2 раза *влево* по числовой оси.

е) –6 – (–10) = **4**. Начните с числа –6, отсчитав 10 раз *вправо* по числовой оси.

8 Решите следующие задачи вычитания, не пользуясь числовой осью.

а) 17 – (–26) = **43**. Упраздните два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: 17 – (–26) = 17 + 26 = **43**.

б) –21 – 45 = **–66**. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: 21 + 45 = 66, а следовательно, –21 – – 45 = **–66**.

в) –42 – (–88) = **46**. Опустите два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: –42 – (–88) = –42 + 88. Затем поменяйте местами складываемые числа (вместе с их знаками), чтобы превратить решаемую задачу обратно в вычитание: 88 – 42 = **46**.

г) –67 – 91 = **–158**. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: 67 + 91 = 158, а следовательно, –67 – 91 = **–158**.

д) 75 – (–49) = **124**. Упраздните два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: 75 – (–49) = 75 + 49 = **124**.

е) –150 – (–79) = **–71**. Упраздните два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: –150 – (–79) = –150 + 79. Затем поменяйте местами складываемые числа (вместе с их знаками), чтобы превратить решаемую задачу обратно в вычитание: 79 – 150 = **–71**.

9 Решите следующие задачи умножения:

а) 7 × 11 = **77**;

б) –7 × 11 = **–77**;

в) 7 × (–11) = **–77**;

г) –7 × (–11) = **77**.

10 Решите следующие задачи деления:

а) $32 \div (-8) = \mathbf{-4}$;
б) $-32 \div (-8) = \mathbf{4}$;
в) $-32 \div 8 = \mathbf{-4}$;
г) $32 \div 8 = \mathbf{4}$.

11 $-65 \times 23 = \mathbf{-1495}$. Сначала опустите знаки "минус" и перемножьте оба числа: $65 \times 23 = 1495$. Числа 65 и 23 имеют разные знаки, поэтому результат их умножения оказывается отрицательным: **–1495**.

12 $-143 \times (-77) = \mathbf{11\,011}$. Опустите знаки "минус" и перемножьте оба числа: $143 \times 77 = 11\,011$. Числа –143 и –77 имеют одинаковые знаки, поэтому результат их умножения положительный: **11 011**.

13 $216 \div (-9) = \mathbf{-24}$. Опустите знаки "минус" и выполните деление (можете сделать это в столбик, как пояснялось в главе 1: $216 \div 9 = 24$. Числа 216 и –9 имеют разные знаки, поэтому результат их деления отрицательный: **–24**.

14 $-3375 \div (-25) = \mathbf{135}$. Опустите знаки "минус" и выполните деление: $3375 \div 25 = 135$. Числа –3375 и –25 имеют одинаковые знаки, поэтому результат их деления оказывается положительным: **135**.

Глава 4

Просто выражение

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Вычисление выражений с четырьмя основными арифметическими операциями

» Вычисление степеней чисел

» Применение скобок в выражениях

» Порядок выполнения операций

Арифметическое выражение представляет собой любую символьную строку, состоящую из чисел и выполняемых над ними операций, которые иногда вычисляются просто. Например, выражение $2 + 2$ нетрудно вычислить в уме, получив результат, равный 4. Но выражения бывают и более сложными, что затрудняет их вычисление. Так, на вычисление выражения $2 \times 6 + 23 - 10 + 13$ может потребоваться больше времени, чтобы получить правильный результат, равный 38.

Вычислить что-нибудь означает получить конкретное *числовое* значение. Когда вычисляется выражение, оно преобразуется из символьной строки математических символов в единственное значение, т.е. в одно число. Но по мере усложнения выражений вероятность недоразумений только возрастает. Рассмотрим в качестве примера выражение $3 + 2 \times 4$. Если сложить сначала два первых числа, а затем умножить полученную сумму на последнее число, то в итоге будет получен результат, равный 20. Но если перемножить сначала два последних числа, а затем сложить полученное произведение с первым числом, то результат окажется равным 11.

В качестве выхода из этого затруднения математики пришли к согласию относительно *порядка выполнения операций*, иногда еще называемого *порядком предшествования*. Это ряд правил, по которым должно вычисляться арифметическое выражение независимо от его сложности. В этой главе порядок выполнения операций разъясняется на целом ряде примеров, в которых поочередно вводятся основные понятия. Проработав материал этой главы, вы сумеете вычислить практически любое выражение, которое может дать вам в качестве индивидуального задания ваш преподаватель математики!

Вычисление выражений с операциями сложения и вычитания

Если выражение состоит *только* из операций сложения, вычитания или любого их сочетания, вычислить его не составит большого труда. Для этого следует начать с первых двух чисел и продолжить вычисление слева направо. Даже если в выражение входят отрицательные числа, то в и этом случае процедура его вычисления остается той же самой. Нужно лишь применить подходящее правило сложения или вычитания отрицательных чисел, как пояснялось в главе 3.

ПРИМЕР!

Задача. Вычислите значение выражения $7 + (-3) - 6 - (-10)$.

Решение. 8. Начните слева, сложив два первых числа $(7 + (-3) = 4)$:

$\underline{7 + (-3)} - 6 - (-10) = \underline{4} - 6 - (-10)$.

Продолжите с вычитания двух следующих чисел $(4 - 6 = -2)$:

$\underline{4 - 6} - (-10) = \underline{-2} - (-10)$.

И завершите вычисление данного выражения операцией над двумя последними числами, помня, что вычитание отрицательного числа равнозначно сложению положительного числа:

$-2 - (-10) = -2 + 10 = 8$.

1 Чему равно выражение $9 - 3 + 8 - 7$?

2 Вычислите значение выражения $11 - 5 - 2 + 6 - 12$.

3 Найдите значение выражения $17 - 11 - (-4) + (-10) - 8$.

4 Чему равно выражение $-7 + -3 -(-11) + 8 -10 + (-20)=?$

Вычисление выражений с операциями умножения и деления

Если вы не упражняетесь в свободное время совершенствованием своих навыков чтения на персидском, арабском или древнееврейском языке, то, вероятно, привыкли читать слева направо. И именно в таком направлении следует решать задачи умножения и деления. Если выражение состоит только из операций умножения и деления или любого их сочетания, то вычислить его не составит большого труда. Для этого следует начать с первых двух чисел и продолжить вычисление слева направо.

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно выражение $15 \div 5 \times 8 \div 6$?

Решение. 4. Начните слева, разделив два первых числа ($15 \div 5 = 3$):

$\underline{15 \div 5} \times 8 \div 6 = \underline{3} \times 8 \div 6$.

Продолжите вычисление, перемножив два следующих числа ($3 \times 8 = 24$):

$\underline{3 \times 8} \div 6 = \underline{24} \div 6$.

И завершите вычисление, разделив два последних числа:

$24 \div 6 = 4$.

Задача. Вычислите значение выражения $-10 \times 2 \times (-3) \div (-4)$.

Решение. –15. Процедура вычисления остается той же самой и при наличии в выражении отрицательных чисел. Нужно лишь применить подходящее правило умножения или деления отрицательных чисел, как пояснялось в главе 3. Итак, начните слева, умножив два первых числа ($-10 \times 2 = -20$):

$\underline{-10 \times 2} \times (-3) \div (-4) =$
$= \underline{-20} \times (-3) \div (-4)$.

Продолжите вычисление, перемножив два следующих числа ($-20 \times (-3) = 60$):

$\underline{-20 \times (-3)} \div (-4) = \underline{60} \div (-4)$.

И завершите вычисление, разделив два последних числа:

$60 \div (-4) = 15$.

5. Найдите значение выражения
$18 \div 6 \times 10 \div 6$.

6. Вычислите значение выражения
$20 \div 4 \times 8 \div 5 \div (-2)$.

7. Чему равно выражение
$12 \div (-3) \times (-9) \div 6 \times (-7)$?

8. Найдите значение выражения
$-90 \div 9 \times (-8) \div (-10) \div 4 \times 15$.

Осмысление выражений со смешанными операциями

В этом разделе рассматриваются более сложные выражения, но и с ними можно вполне справиться. Выражение *со смешанными операциями* состоит по крайней мере из одной операции сложения или вычитания и хотя бы одной операции умножения или деления. Чтобы вычислить значение выражения со смешанными операциями, достаточно выполнить следующие простые действия.

СОВЕТ

1. **Выполните все операции умножения и деления слева направо.**

   Начните вычисление выражения со смешанными операциями, подчеркнув все имеющиеся в нем операции умножения и деления.

2. **Выполните операции сложения и деления слева направо.**

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно выражение $-15 \times 3 \div (-5) - (-3) \times (-4)$?

Решение. –3. Начните с подчеркивания всех операций умножения и деления, имеющихся в данном выражении, а затем выполните все эти операции слева направо:

$\underline{-15 \times 3 \div (-5)} - \underline{(-3) \times (-4)} =$

$= -45 \div (-5) - (-3) \times (-4) =$

$= 9 - (-3) \times (-4) = 9 - 12.$

Завершите вычисление данного выражения, выполнив вычитание слева направо:

$= -3.$

9. Вычислите значение выражения $8 - 3 \times 4 \div 6 + 1$.

10. Найдите значение выражения $10 \times 5 - (-3) \times 8 \div (-2)$.

11. Чему равно выражение $-19 - 7 \times 3 + (-20) \div 4 - 8$?

12. Чему равно выражение $60 \div (-10) -(-2) + 11 \times 8 \div 2$?

Ответственное отношение к возведению в степень

Вам, вероятно, приходилось не раз слышать, что власть портит людей, но порядок выполнения операций вынуждает математиков, наделенных властью, возводить числа в степень, держаться в рамках приличий. Так, если в выражении присутствует одна или несколько операций возведения в степень, все эти операции выполняются слева направо прежде основных четырех арифметических операций. Ниже приведена соответствующая последовательность действий.

1. **Выполните все операции возведения в степень слева направо.**

   Как пояснялось в главе 2, возведение в степень числа означает умножение этого числа на самое себя столько раз, сколько указано в показателе степени. Например, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Напомним, что результат возведения любого числа в нулевую степени равен 1.

2. **Выполните все операции умножения и деления слева направо.**
3. **Выполните операции сложения и вычитания слева направо.**

Если сравнить эту последовательность действий с упоминавшейся в предыдущем разделе, то можно заметить, что она отличается лишь одним новым правилом, указанным в самом начале.

ПРИМЕР!

Задача. Вычислите значение выражения
$7 - 4^2 \div 2^4 + 9 \times 2^3$.

Решение. 78. Выполните все операции возведения в степень слева направо, начиная с операции $4^2 = 4 \times 4 = 16$:

$= 7 - 16 \div 2^4 + 9 \times 2^3$.

Перейдите к выполнению двух оставшихся операций возведения в степень:

$= 7 - 16 \div 16 + 9 \times 8$.

Затем выполните все операции умножения и деления слева направо.

$= 7 - 1 + 9 \times 8 =$

$= 7 - 1 + 72$.

Завершите вычисление данного выражения, выполнив операции сложения и вычитания слева направо:

$= 6 + 72 = 78$.

13 Вычислите значение выражения
$3^2 - 2^3 \div 2^2$.

14 Найдите значение выражения
$5^2 - 4^2 - (-7) \times 2^2$.

15 Чему равно выражение
$70^1 - 3^4 \div (-9) \times (-7) + 123^0$?

16 Чему равно выражение
$11^2 - 2^7 + 3^5 \div 3^3$?

Назначение приоритетности с помощью скобок

Приходилось ли вам когда-нибудь оправлять почтой срочную посылку, чтобы она поступила по месту назначения как можно скорее? Подобным же образом действуют и круглые скобки. С их помощью можно назначить высокий приоритет для определенной части выражения, чтобы вычислить ее прежде всех остальных частей.

ЗАПОМНИ!

Если в выражении имеются круглые скобки, в которые заключены только четыре основные арифметические операции, выполните следующие действия.

1. **Вычислите все, что заключено в скобках.**
2. **Выполните четыре основные арифметические операции, как пояснялось ранее в разделе "Осмысление выражений со смешанными операциями".**

Если же в выражении не одна, а несколько пар круглых скобок, начните с вычисления того, что заключено в первую пару скобок, продолжив вычисление слева направо. Пара пустяков!

ПРИМЕР!

Задача. Вычислите значение выражения
$(6-2)+(15 \div 3)$.

Решение. 9. Начните с вычисления того, что заключено в первую пару скобок:

$(6-2)+(15 \div 3)=4+(15 \div 3)$.

Перейдите к следующей паре скобок, выполнив деление $(15 \div 3=5)$ и получив следующий промежуточный результат:

$=4+5$.

И в завершение выполните сложение $(4+5=9)$, получив окончательный результат:

$=9$.

Задача. Вычислите значение выражения $(6+1) \times (5-(-14) \div (-7))$.

Решение. 21. Если в скобки заключено выражение со смешанными операциями, вычислите *все*, что находится в скобках, по порядку выполнения операций (см. выше раздел "Осмысление выражений со смешанными операциями"). Итак, начните с вычисления того, что заключено в первую пару скобок:

$(6+1) \times (5-(-14) \div (-7)) =$
$= 7 \times (5-(-14) \div (-7))$.

Перейдите к следующей паре скобок. В них заключено выражение со смешанными операциями, поэтому начните с деления $(-14 \div (-7)=2)$, получив следующий промежуточный результат:

$=7 \times (5-2)$.

Завершите вычисление в скобках, выполнив вычитание ($5 - 2 = 3$) и получив такой промежуточный результат:

$= 7 \times 3$.

И в завершение выполните умножение (7×3), получив окончательный результат, равный 21.

17 Вычислите значение выражения $4 \times (3 + 4) - (16 \div 2)$.

18 Чему равно выражение $(5 + (-8) \div 2) + (3 \times 6)$?

19 Найдите решение в выражении $(4 + 12 \div 6 \times 7) - (3 + 8)$.

20 Чему равно выражение $(2 \times (-5)) - (10 - 7) \times (13 + (-8))$?

Раскрывание скобок и возведение в степень

Если в выражении имеются круглые скобки и операции возведения в степень, оно вычисляется в следующем порядке.

1. **Содержимое скобок.**

ЗАПОМНИ!

Выражение в *показателе степени*, обозначаемом верхним индексом справа от числа, возводимого в степень, группируется таким же образом, как и в круглых скобках. Это выражение вычисляется до единственного числа, которое и обозначает возводимую степень. Например, чтобы выяснить, в какую именно степень следует возвести число 5 в выражении 5^{3-1}, достаточно представить выражение в показателе степени таким образом, как будто оно заключено в круглые скобки, и затем вычислить его: $5^{(3-1)} = 5^2 = 25$.

Для группирования выражений как в круглых скобках имеется ряд других знаков. К их числу относится знак квадратного корня и знаки вертикальной черты, обозначающие абсолютные величины чисел (те и другие были представлены в главе 2 и 3 соответственно).

2. **Возведение в степень слева направо.**
3. **Умножение и деление слева направо.**
4. **Сложение и вычитание слева направо.**

Сравните эту последовательность действий с той, что была представлена в разделе "Ответственное отношение к возведению в степень". Она отличается лишь одним новым правилом, указанным в самом начале.

ПРИМЕР!

Задача. Вычислите значение выражения
$(8 + 6^2) \div (2^3 - 4)$.

Решение. 11. Начните с вычисления содержимого первой пары скобок. Выполните сначала возведение в степень, а затем сложение в этой паре скобок:

$(8 + 6^2) \div (2^3 - 4) = (8 + 36) \div (2^3 - 4) =$
$= 44 \div (2^3 - 4)$.

Перейдите к следующей паре скобок, выполнив сначала возведение в степень, а затем вычитание:

$= 44 \div (8 - 4) = 44 \div 4$.

И в завершение выполните деление:

$44 \div 4 = 11$.

Задача. Найдите значение выражения $-1 + (-20 + 3^3)^2$.

Решение. 48. Если все, что находится в скобках, возводится в степень, то сначала вычисляется содержимое скобок, а затем полученный результат возводится в указанную степень. Поэтому начните с вычисления выражения в скобках, выполнив сначала возведение в степень, а затем сложение:

$-1 + (-20 + 3^3)^2 = -1 + (-20 + 27)^2 =$
$= -1 + 7^2$.

Затем выполните возведение в степень ($7^2 = 7 \times 7 = 49$), получив следующий промежуточный результат:

$= -1 + 49$.

И в завершение выполните сложение:

$-1 + 49 = 48$.

21 Найдите значение выражения
$(6^2 - 12) \div (16 \div 2^3)$.

22 Вычислите значение выражения
$-10 - (2 + 3^2 \times (-4))$.

23 Чему равно выражение
$7^2 - (3 + 3^2 \div (-9))^5$?

24 Чему равно выражение
$(10 - 1^{14} \times 8)^{4 \div 4 + 5}$?

Разгадывание вложенных скобок

Приходилось ли вам когда-нибудь видеть вложенные друг в друга деревянные куклы, хорошо известные под названием *матрешка*? Любопытно, что единственная, на первый взгляд, вырезанная из дерева большая кукла на самом деле содержит внутри меньшую куклу, если открыть ее, а та, в свою очередь, еще меньшую куклу и т.д.

Подобно матрешкам, арифметические выражения содержат ряд *вложенных* скобок. Чтобы вычислить содержимое вложенных скобок, начните с их внутренней пары, продвигаясь далее наружу к внешним скобкам.

СОВЕТ

Скобки бывают круглыми — ( ), квадратными — [ ], а также фигурными — { }. Все эти разновидности скобок помогают выявлять и отслеживать начало и конец выражения, заключенного в скобки. В математике все эти разновидности скобок, как бы они ни выглядели внешне, являются просто скобками и поэтому трактуются одинаково.

ПРИМЕР!

Задача. Найдите значение выражения $\{3 \times [10 \div (6 - 4)]\} + 2$.

Решение. 17. Начните с вычисления того, что находится в самой внутренней паре скобок, т.е. вычислите значение выражения $6 - 4 = 2$, получив следующий промежуточный результат:

$\{3 \times [10 \div (6 - 4)]\} + 2 =$
$= \{3 \times [10 \div 2]\} + 2$.

В итоге останется выражение, где одна пара скобок вложена в другую. Поэтому вычислите сначала выражение $10 \div 2 = 5$, находящееся во внутренней паре скобок, получив такой промежуточный результат:

$= \{3 \times 5\} + 2$.

Далее вычислите значение выражения в оставшихся скобках, получив приведенный ниже промежуточный результат.

$= 15 + 2$.

И в завершение выполните сложение: $15 + 2 = 17$.

25 Вычислите значение выражения $7 + \{[(10 - 6) \times 5] + 13\}$.

26 Найдите значение выражения $[(2 + 3) - (30 \div 6)] + (-1 + 7 \times 6)$.

27 Чему равно выражение $-4 + \{[-9 \times (5 - 8)] \div 3\}$?

28 Вычислите значение выражения $\{(4 - 6) \times [18 \div (12 - 3 \times 2)]\} - (-5)$.

Сводя воедино: порядок выполнения операций

ЗАПОМНИ!

В этой главе были представлены самые разные правила вычисления арифметических выражений. Эти правила дают возможность выбрать правильный порядок вычисления выражений. А совместно эти правила составляют так называемый *порядок выполнения операций*, который иногда еще называют *порядком предшествования*. Ниже перечислен весь порядок выполнения операций в арифметике.

1. **Содержимое скобок изнутри наружу.**
2. **Возведение в степень слева направо.**
3. **Умножение и деление слева направо.**
4. **Сложение и вычитание слева направо.**

Этот порядок отличается от последовательности действий, приведенной ранее в разделе "Разделение скобок и возведения в степень", лишь правилом вычисления содержимого скобок, указанным в самом начале и разъяснявшимся в предыдущем разделе.

ПРИМЕР!

Задача. Вычислите значение выражения
$[(8 \times 4 + 2^3) \div 10]^{7-5}$.

Решение. 16. Начните вычисление с содержимого внутренней пары скобок, выполнив сначала возведение в степень, затем умножение, а далее сложение:

$[(8 \times 4 + 2^3) \div 10]^{7-5} = [(8 \times 4 + 8) \div 10]^{7-5} =$
$= [(32 + 8) \div 10]^{7-5} = [40 \div 10]^{7-5}$.

Далее вычислите то, что находится в скобках, а затем выражение, составляющее показатель степени, получив следующий промежуточный результат:

$= 4^{7-5} = 4^2$.

И в завершение выполните возведение в степень оставшегося числа: $4^2 = 16$.

29 Вычислите значение выражения
$1 + [(2^3 - 4) + (10 \div 2)^2]$.

30 Вычислите значение выражения
$(-7 \times (-2) + 6^2 \div 4)^{9 \times 2 - 17}$.

31 Чему равно выражение $\{6^2 - [12 \div (-13 + 14)^2] \times 2\}^2$?

32 Найдите значение выражения $[(123 - 11^2)^4 - (6^2 \div 2^{20-3\times6})]^2$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих применить на практике приобретенные знания.

1 $9 - 3 + 8 - 7 = \mathbf{7}$. Выполните сложение слева направо:
$9 - 3 + 8 - 7 =$
$= 6 + 8 - 7 =$
$= 14 - 7 = \mathbf{7}$.

2 $11 - 5 - 2 + 6 - 12 = \mathbf{-2}$.
$11 - 5 - 2 + 6 - 12 =$
$= 6 - 2 + 6 - 12 =$
$= 4 + 6 - 12 =$
$= 10 - 12 = \mathbf{-2}$.

3 $17 - 11 - (-4) + (-10) - 8 = \mathbf{-8}$.
$17 - 11 - (-4) + (-10) - 8 =$
$= 6 - (-4) + (-10) - 8 =$
$= 10 + (-10) - 8 =$
$= 0 - 8 = \mathbf{-8}$.

4 $-7 + (-3) - (-11) + 8 - 10 + (-20) = \mathbf{-21}$.
$-7 + (-3) - (-11) + 8 - 10 + (-20) =$
$= -10 - (-11) + 8 - 10 + (-20) =$
$= 1 + 8 - 10 + (-20) =$
$= 9 - 10 + (-20) =$
$= -1 + (-20) = \mathbf{-21}$.

5 $18 \div 6 \times 10 \div 6 = \mathbf{5}$. Выполните деление и умножение слева направо:
$18 \div 6 \times 10 \div 6 =$
$= 3 \times 10 \div 6 =$
$= 30 \div 6 = \mathbf{5}$.

6 $20 \div 4 \times 8 \div 5 \div (-2) = \mathbf{-4}$.
$20 \div 4 \times 8 \div 5 \div (-2) =$
$= 5 \times 8 \div 5 \div (-2) =$
$= 40 \div 5 \div (-2) =$
$= 8 \div (-2) = \mathbf{-4}$.

7 $12 \div (-3) \times (-9) \div 6 \times (-7) = \mathbf{-42}$.
$12 \div (-3) \times (-9) \div 6 \times (-7) =$
$= -4 \times (-9) \div 6 \times (-7) =$
$= 36 \div 6 \times (-7) =$
$= 6 \times (-7) = \mathbf{-42}$.

8 $-90 \div 9 \times (-8) \div (-10) \div 4 \times (-15) = \mathbf{30}$.
$-90 \div 9 \times (-8) \div (-10) \div 4 \times (-15) =$
$= -10 \times (-8) \div (-10) \div 4 \times (-15) =$
$= 80 \div (-10) \div 4 \times (-15) =$
$= -8 \div 4 \times (-15) =$
$= -2 \times (-15) = \mathbf{30}$.

9 $8 - 3 \times 4 \div 6 + 1 = \mathbf{7}$. Начните с подчеркивания и выполнения всех операций умножения и деления слева направо:
$8 - \underline{3 \times 4 \div 6} + 1 =$
$= 8 - \underline{12 \div 6} + 1 =$
$= 8 - \underline{2} + 1$.
А теперь выполните все операции сложения и вычитания слева направо:
$= 6 + 1 = \mathbf{7}$.

10 $10 \times 5 - (-3) \times 8 \div (-2) = \mathbf{38}$. Начните с подчеркивания и выполнения всех операций умножения и деления слева направо:
$\underline{10 \times 5} - \underline{(-3) \times 8 \div (-2) =}$
$= 50 - \underline{(-3) \times 8 \div (-2)} =$
$= 50 - \underline{(-24) \div (-2)}$
$= 50 - 12$.
Выполните вычитание:
$= \mathbf{38}$.

11 $-19 - 7 \times 3 + (-20) \div 4 - 8 = \mathbf{-53}$. Начните с подчеркивания и выполнения всех операций умножения и деления слева направо:

$-19 - \underline{7 \times 3} + \underline{(-20) \div 4} - 8 =$
$= -19 - 21 + \underline{(-20) \div 4} - 8 =$
$= -19 - 21 + (-5) - 8.$
Теперь выполните все операции сложения и вычитания слева направо:
$= -40 + (-5) - 8 = -45 - 8 = \mathbf{-53}.$

12 $60 \div (-10) - (-2) + 11 \times 8 \div 2 = \mathbf{40}$. Начните с подчеркивания и выполнения всех операций умножения и деления слева направо:
$\underline{60 \div (-10)} - (-2) + \underline{11 \times 8 \div 2 =}$
$= -6 - (-2) + \underline{11 \times 8 \div 2 =}$
$= -6 - (-2) + \underline{88 \div 2} =$
$= -6 - (-2) + 44.$
Теперь выполните все операции сложения и вычитания слева направо:
$= -4 + 44 = \mathbf{40}.$

13 $3^2 - 2^3 \div 2^2 = \mathbf{7}$. Сначала выполните все операции возведения в степень:
$3^2 - 2^3 \div 2^2 = 9 - 8 \div 4.$
Затем выполните деление $8 \div 4$:
$= 9 - 2.$
Наконец, выполните вычитание:
$= 9 - 2 = \mathbf{7}.$

14 $5^2 - 4^2 - (-7) \times 2^2 = \mathbf{37}$. Выполните сначала все операции возведения в степень:
$5^2 - 4^2 - (-7) \times 2^2 = 25 - 16 - (-7) \times 4.$
Затем выполните умножение:
$= 25 - 16 - (-28).$
Наконец, выполните вычитание слева направо:
$= 9 - (-28) = \mathbf{37}.$

15 $70^1 - 3^4 \div (-9) \times -7 + 123^0 = \mathbf{8}$. Выполните сначала все операции возведения в степень:
$70^1 - 3^4 \div (-9) \times -7 + 123^0 = 70 - 81 \div (-9) \times (-7) + 1.$
Затем выполните умножение и деление слева направо:
$= 70 - (-9) \times -7 + 1 = 70 - 63 + 1.$
И, наконец, выполните сложение и вычитание слева направо:
$= 7 + 1 = \mathbf{8}.$

16 $11^2 - 2^7 + 3^5 \div 3^3 = \mathbf{2}$. Выполните сначала все операции возведения в степень:
$11^2 - 2^7 + 3^5 \div 3^3 = 121 - 128 + 243 \div 27.$
Затем выполните деление:
$= 121 - 128 + 9.$
И, наконец, выполните сложение и вычитание слева направо:
$= -7 + 9 = \mathbf{2}.$

17 $4 \times (3 + 4) - (16 \div 2) = \mathbf{20}$. Начните с вычисления того, что находится в первой паре скобок:
$4 \times (3 + 4) - (16 \div 2) =$
$= 4 \times 7 - (16 \div 2)$.
Затем вычислите содержимое второй пары скобок:
$= 4 \times 7 - 8$.
И, наконец, выполните умножение, а затем вычитание:
$= 28 - 8 = \mathbf{20}$.

18 $(5 + (-8) \div 2) + (3 \times 6) = \mathbf{19}$. Выполните в первой паре скобок сначала деление, а затем сложение:
$(5 + (-8) \div 2) + (3 \times 6) =$
$= (5 + (-4)) + (3 \times 6) =$
$= 1 + (3 \times 6)$.
Далее вычислите содержимое второй пары скобок:
$= 1 + 18$.
И, наконец, выполните сложение:
$1 + 18 = \mathbf{19}$.

19 $(4 + 12 \div 6 \times 7) - (3 + 8) = \mathbf{7}$. Сначала выполните в первой паре скобок все операции умножение и деления слева направо:
$(4 + 12 \div 6 \times 7) - (3 + 8) =$
$= (4 + 2 \times 7) - (3 + 8) =$
$= (4 + 14) - (3 + 8)$.
Затем выполните сложение в первой паре скобок:
$= 18 - (3 + 8)$.
Далее вычислите содержимое второй пары скобок:
$= 18 - 11$.
Выполните вычитание:
$18 - 11 = \mathbf{7}$.

20 $(2 \times (-5)) - (10 - 7) \times (13 + (-8)) = \mathbf{-25}$. Вычислите содержимое сначала первой, затем второй и третьей пары скобок:
$(2 \times (-5)) - (10 - 7) \times (13 + (-8)) =$
$= -10 - (10 - 7) \times (13 + (-8)) =$
$= -10 - 3 \times (13 + (-8)) =$
$= -10 - 3 \times 5$.
Далее выполните умножение и вычитание:
$= -10 - 15 = \mathbf{-25}$.

21 $(6^2 - 12) \div (16 \div 2^3) = \mathbf{12}$. Выполните в первой паре скобок сначала возведение в степень, а затем вычитание:
$(6^2 - 12) \div (16 \div 2^3) =$
$= (36 - 12) \div (16 \div 2^3) =$
$= 24 \div (16 \div 2^3)$.
Далее выполните во второй паре скобок сначала возведение в степень, а затем деление:
$= 24 \div (16 \div 8) = 24 \div 2$.
И, наконец, выполните деление:
$= 24 \div 2 = \mathbf{12}$.

22 $-10 - (2 + 3^2 \times (-4)) = \mathbf{24}$. Прежде всего выполните в скобках возведение в степень, а затем умножение и сложение:
$-10 - (2 + 3^2 \times (-4)) =$
$= -10 - (2 + 9 \times (-4)) =$
$= -10 - (2 + (-36)) =$
$= -10 - (-34)$.
И в завершение выполните вычитание:
$= -10 - (-34) = \mathbf{24}$.

23 $7^2 - (3 + 3^2 \div (-9))^5 = \mathbf{17}$. Прежде всего выполните в скобках возведение в степень, а затем деление и сложение:
$7^2 - (3 + 3^2 \div (-9))^5 =$
$= 7^2 - (3 + 9 \div (-9))^5 =$
$= 7^2 - (3 + (-1))^5 =$
$= 7^2 - 2^5$.
Затем выполните возведение в степень слева направо:
$= 49 - 2^5 = 49 - 32$.
Выполните вычитание:
$49 - 32 = \mathbf{17}$.

24 $(10 - 1^{14} \times 8)^{4 \div 4 + 5} = \mathbf{64}$. Прежде всего выполните в скобках возведение в степень, а затем умножение и вычитание:
$(10 - 1^{14} \times 8)^{4 \div 4 + 5} =$
$= (10 - 1 \times 8)^{4 \div 4 + 5} =$
$= (10 - 8)^{4 \div 4 + 5} = 2^{4 \div 4 + 5}$.
Далее вычислите значение выражения в показателе степени, выполнив сначала деление, а затем сложение:
$2^{1+5} = 2^6$.
И в завершение выполните возведение в степень:
$2^6 = \mathbf{64}$.

25 $7 + \{[(10 - 6) \times 5] + 13\} = \mathbf{40}$. Прежде всего вычислите содержимое самых внутренних скобок:
$7 + \{[(10 - 6) \times 5] + 13\} =$
$= 7 + \{[4 \times 5] + 13\}$.
Продвигаясь наружу, перейдите затем к следующей паре скобок:
$= 7 + \{20 + 13\}$.
Далее вычислите содержимое оставшихся скобок:
$= 7 + 33$.
И, наконец, выполните сложение:
$7 + 33 = \mathbf{40}$.

26 $[(2 + 3) - (30 \div 6)] + (-1 + 7 \times 6) = \mathbf{41}$. Прежде всего уделите внимание первым скобкам. Они содержат две пары внутренних скобок, поэтому вычислите их содержимое слева направо:
$[(2 + 3) - (30 \div 6)] + (-1 + 7 \times 6) =$
$= [5 - (30 \div 6)] + (-1 + 7 \times 6) =$
$= [5 - 5] + (-1 + 7 \times 6)$.
Теперь в данном выражении остались две отдельные пары скобок, поэтому вычислите сначала содержимое первой пары:
$= 0 + (-1 + 7 \times 6)$.
Далее вычислите содержимое оставшейся пары скобок, выполнив сначала умножение, а затем сложение:
$= 0 + (-1 + 42) = 0 + 41$.
И, наконец, выполните сложение:
$0 + 41 = \mathbf{41}$.

27 $-4 + \{[-9 \times (5 - 8)] \div 3\} = \mathbf{5}$. Начните с вычисления содержимого самых внутренних скобок:
$-4 + \{[-9 \times (5 - 8)] \div 3\} =$
$= -4 + \{[-9 \times (-3)] \div 3\}$.
Продвигаясь наружу, перейдите затем к следующей паре скобок:
$= -4 + \{27 \div 3\}$.
Далее вычислите содержимое оставшейся пары скобок:
$= -4 + 9$.
И, наконец, выполните сложение:
$-4 + 9 = \mathbf{5}$.

28 $\{(4 - 6) \times [18 \div (12 - 3 \times 2)]\} - (-5) = \mathbf{-1}$. Прежде всего уделите внимание самой внутренней паре скобок: $(12 - 3 \times 2)$. Выполните в ней сначала умножение, а затем вычитание:
$\{(4 - 6) \times [18 \div (12 - 3 \times 2)]\} - (-5) =$

$= \{(4 - 6) \times [18 \div (12 - 6)]\} - (-5) =$
$= \{(4 - 6) \times [18 \div 6]\} - (-5).$
Теперь в данном выражении осталась одна наружная пара скобок с двумя внутренними парами. Вычислите содержимое этих внутренних пар скобок слева направо:
$= \{-2 \times [18 \div 6]\} - (-5) =$
$= \{-2 \times 3\} - (-5).$
Далее вычислите содержимое оставшихся скобок:
$= -6 - (-5).$
И в завершение выполните вычитание:
$-6 - (-5) = \mathbf{-1}.$

29 $1 + [(2^3 - 4) + (10 \div 2)^2] = \mathbf{30}$. Прежде всего уделите внимание первой из двух внутренних скобок: $(2^3 - 4)$. Выполните в них сначала возведение в степень, а затем вычитание:
$1 + [(2^3 - 4) + (10 \div 2)^2] =$
$= 1 + [(8 - 4) + (10 \div 2)^2] =$
$= 1 + [4 + (10 \div 2)^2].$
Затем перейдите к оставшимся внутренним скобкам, вычислив их содержимое:
$= 1 + [4 + 5^2].$
Далее вычислите содержимое последней пары скобок, выполнив сначала возведение в степень, а затем сложение:
$= 1 + [4 + 25] = 1 + 29.$
И в завершение сложите оставшиеся числа:
$1 + 29 = \mathbf{30}.$

30 $(-7 \times (-2) + 6^2 \div 4)^{9 \times 2 - 17} = \mathbf{23}$. Начните с первой пары скобок, выполнив сначала возведение в степень, затем умножение и деление слева направо и сложение:
$(-7 \times (-2) + 6^2 \div 4)^{9 \times 2 - 17} =$
$= (-7 \times (-2) + 36 \div 4)^{9 \times 2 - 17} =$
$= (14 + 36 \div 4)^{9 \times 2 - 17} =$
$= (14 + 9)^{9 \times 2 - 17} = 23^{9 \times 2 - 17}.$
Далее вычислите значение выражения в показателе степени, выполнив сначала умножение, а затем вычитание:
$= 23^{18 - 17} = 23^1.$
И, наконец, выполните возведение в степень:
$23^1 = \mathbf{23}.$

31 $\{6^2 - [12 \div (-13 + 14)^2] \times 2\}^2 =$ **144**. Начните с вычисления самых внутренних скобок $(-13 + 14)$:
$\{6^2 - [12 \div (-13 + 14)^2] \times 2\}^2 =$
$= \{6^2 - [12 \div 1^2] \times 2\}^2$.
Продвигаясь наружу, перейдите затем к следующей паре скобок: $[12 \div 1^2]$. Выполните в них сначала возведение в степень, а затем деление:
$= \{6^2 - [12 \div 1] \times 2\}^2 =$
$= \{6^2 - 12 \times 2\}^2$.
Далее вычислите содержимое оставшихся скобок, выполнив сначала возведение в степень, затем умножение и вычитание:
$= \{36 - 12 \times 2\}^2 =$
$= \{36 - 24\}^2 = 12^2$.
И, наконец, выполните возведение в степень:
$12^2 =$ **144**.

32 $[(123 - 11^2)^4 - (6^2 \div 2^{20-3\times6})]^2 =$ **49**. Начните с вычисления выражения $20 - 3 \times 6$ в показателе степени числа 2, выполнив сначала умножение, а затем вычитание:
$[(123 - 11^2)^4 - (6^2 \div 2^{20-3\times6})]^2 =$
$= [(123 - 11^2)^4 - (6^2 \div 2^{20-18})]^2 =$
$= [(123 - 11^2)^4 - (6^2 \div 2^2)]^2$.
В итоге получится выражение с двумя парами внутренних скобок. Уделите сначала внимание первой паре внутренних скобок, выполнив сначала возведение в степень, а затем вычитание:
$= [(123 - 121)^4 - (6^2 \div 2^2)]^2$.
Затем перейдите ко второй паре внутренних скобок, выполнив сначала возведение в степень слева направо, а затем деление:
$= [2^4 - (36 \div 2^2)]^2 =$
$= [2^4 - (36 \div 4)]^2 = [2^4 - 9]^2$.
Далее вычислите то, что осталось в скобках, выполнив сначала возведение в степень, а затем вычитание:
$= [16 - 9]^2 = 7^2$.
И, наконец, выполните возведение в степень:
$7^2 =$ **49**.

Глава 5

Разделение внимания: делимость, делители и кратные

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Проверка чисел на делимость без деления

» Понятие о делителях и кратных чисел

» Различение простых и составных чисел

» Нахождение делителей и кратных числа

» Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного

В этой главе наводится своеобразный мост между четырьмя основными арифметическими операциями, рассматривавшимися в предыдущих главах, а также следующей далее темой дробей. И сразу же раскроем большой секрет: дроби на самом деле являются обычной операцией деления. Поэтому, прежде чем заняться дробями, уделим внимание понятию *делимости*, которое обозначает возможность разделить одно число на другое нацело и без остатка.

Сначала в этой главе будут представлены удобные способы, позволяющие выявить возможность разделить одно число на другое, не прибегая непосредственно к делению. А далее будут представлены понятия *делителей* и *кратных*, тесно связанные с понятием делимости.

В ряде последующих разделов основное внимание уделяется делителям. В них будет показано, как различать *простые числа*, имеющие ровно два делителя, и *составные числа*, имеющие три делителя и больше. Далее будет показано, как находить делители числа и разлагать число на простые множители. А самое главное, что при этом будет показано, как находить *наибольший общий делитель* (НОД) ряда чисел.

После этого здесь подробно обсуждаются кратные, поясняется, как формируются кратные числа, а также представлен способ определения *наименьшего общего кратного* (НОК) ряда чисел. К концу этой главы вы будете вполне готовы к тому, чтобы разделять и властвовать над дробями, представленными в главах 6 и 7.

Проверка чисел на делимость без остатка

Если одно число *делится* на другое, это означает, что первое число можно разделить на второе число без остатка. Например, число 16 *делится* на число 8 без остатка, поскольку $16 \div 8 = 2$. Тем не менее имеется немало способов проверить делимость чисел, не прибегая непосредственно к делению.

СОВЕТ

Наиболее распространенной является проверка делимости чисел на 2, 3, 5 и 11. Если проверить делимость числа на 2 и 5 может и ребенок, то для проверки делимости числа на 11 потребуется больше усилий. Поэтому ниже приведен ряд быстрых проверок делимости чисел.

» **Делимость на 2.** Любое число, оканчивающееся на четную цифру 2, 4, 6, 8 или 0, является четным, т.е. делится на 2. А все числа, оканчивающиеся на нечетную цифру 1, 3, 5, 7 или 9, являются нечетными, т.е. они *не* делятся на 2.

» **Делимость на 3.** Любое число, цифровой корень которого равен 3, 6 или 9, делится на 3, тогда как все остальные числа, кроме нуля, на него *не* делятся. Чтобы найти *цифровой корень* числа, достаточно сложить все его цифры. Если в итоге получится многоразрядное число, данную процедуру следует повторить до тех пор, пока не получится единственная цифра.

» **Делимость на 5.** Любое число, оканчивающееся на 5 или 0, делится на 5, тогда как все остальные на него *не* делятся.

» **Делимость на 11.** Расставьте поочередно знаки "плюс" и "минус" перед *всеми* цифрами проверяемого числа и сложите их вместе. Если в итоге получится нуль или любое число, делящееся на 11 (даже если сумма цифр проверяемого числа окажется отрицательной), значит, данное число делится на 11, а иначе оно *не* делится на него. *Памятка:* не забывайте всегда ставить знак "плюс" перед *первой цифрой* проверяемого числа.

ПРИМЕР!

Задача. Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 3?

а) 31.

б) 54.

в) 768.

г) 2809.

Решение. Сложите цифры каждого проверяемого числа, чтобы определить его цифровой корень. Если цифровой корень проверяемого числа равен 3, 6 или 9, значит, данное число делится на 3.

а) Число 31 **не делится** на 3, поскольку $3 + 1 = 4$. Дополнительная проверка: $31 \div 3 = 10$ ост (1).

б) Число 54 **делится** на 3, поскольку $5 + 4 = 9$. Дополнительная проверка: $54 \div 3 = 18$.

в) Число 768 **делится** на 3, поскольку $7 + 6 + 8 = 21$ и $2 + 1 = 3$. Дополнительная проверка: $768 \div 3 = 256$.

г) Число 2809 **не делится** на 3, поскольку $2 + 8 + 0 + 9 = 19$, $1 + 9 = 10$ и $1 + 0 = 1$. Дополнительная проверка: $2809 \div 3 = 936$ ост (1).

Задача. Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 11?

а) 71.

б) 154.

в) 528.

г) 28 094.

Решение. Расставьте знаки "плюс" и "минус" перед всеми цифрами проверяемого числа и определите, равна ли их сумма нулю или числу, делящемуся на 11.

а) Число 71 **не делится** на 11, поскольку $+7 - 1 = 6$. Дополнительная проверка: $71 \div 11 = 6$ ост (5).

б) Число 154 **делится** на 11, поскольку $+1 - 5 + 4 = 0$. Дополнительная проверка: $154 \div 11 = 14$.

в) Число 528 **делится** на 11, поскольку $+5 - 2 + 8 = 11$. Дополнительная проверка: $528 \div 11 = 48$.

г) Число 28094 **делится** на 11, поскольку $+2 - 8 + 0 - 9 + 4 = -11$. Дополнительная проверка: $28094 \div 11 = 2554$.

1 Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 2? а) 37. б) 82. в) 111. г) 75 316.	**2** Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 5? а) 75. б) 103. в) 230. г) 9995.
3 Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 3? а) 81. б) 304. в) 986. г) 4 444 444.	**4** Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 11? а) 42. б) 187. в) 726. г) 1969.

Понятие о делителях и кратных

В предыдущем разделе было представлено понятие делимости. Например, число 12 делится на 3 без остатка, поскольку $12 \div 3 = 4$. Такое отношение чисел 12 и 3 можно также описать в терминах *делителя* и *кратного*. В частности, делитель положительных чисел всегда оказывается *наименьшим числом*, а кратное — *наибольшим числом*. Так, если число 12 делится на 3, это означает следующее:

» Число 3 является *делителем* числа 12.

» Число 12 является *кратным* числу 3.

ПРИМЕР!

Задача. Число 40 делится на 5. Какое из них является делителем и какое кратным?

Решение. Число **5** является **делителем**, а число **40** — **кратным** ему, поскольку первое из них меньше второго.

Задача. Какие из приведенных ниже утверждений означают то же самое, что и утверждение "число 18 кратно числу 6"?

а) Число 6 является делителем числа 18.

б) Число 18 делится на **6**.

в) Число 6 делится на 18.

г) Число 18 является делителем числа 6.

Решение. Правильными оказываются утверждения в пп. *а* и *б*. Число 6 является делителем, а число 18 — кратным ему, поскольку первое из них меньше второго, и поэтому утверждение в п. *а* оказывается верным. И поскольку 18 ÷ ÷ 6 = 3, то число 18 делится на 6, а следовательно, верным оказывается утверждение и в п. *б*.

---

5 Какие из приведенных ниже утверждений верны и какие неверны?

а) Число 5 является делителем числа 15.

б) Число 9 кратно 3.

в) Число 11 является делителем числа 12.

г) Число 7 кратно числу 14.

6 Какие из приведенных ниже утверждений означают то же самое, что и утверждение "число 18 делится на 6"?

а) Число 18 является делителем числа 6.

б) Число 18 кратно числу 6.

в) Число 6 является делителем числа 18.

г) Число 6 кратно числу 18.

7 Какие из приведенных ниже утверждений означают то же самое, что и утверждение "число 10 является делителем числа 50"?

а) Число 10 делится на 50.

б) Число 10 кратно числу 50.

в) Число 50 делится на 10.

г) Число 50 кратно числу 10.

8 Какие из приведенных ниже утверждений верны и какие из них неверны?

а) Число 3 является делителем числа 42.

б) Число 11 кратно числу 121.

в) Число 88 кратно числу 9.

г) Число 11 является делителем числа 121.

Различение простых и составных чисел

Всякое натуральное число, большее единицы, является простым или составным числом. У *простого числа* имеются ровно два делителя: 1 и само число. Например, число 5 является простым, потому что у него имеются лишь два делителя: 1 и 5. А у *составного числа* имеются по крайней мере три делителя. Например, у числа 4 имеются следующие три делителя: 1, 2 и 4.

ЗАПОМНИ!

Число 1 является единственным натуральным числом, которое не относится ни к простым, ни к составным числам, поскольку у него имеется *только* один делитель 1. Первыми шестью простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11 и 13.

СОВЕТ

Чтобы выяснить, является ли число простым или составным, следует выполнить проверку на делимость на перечисленные простые числа: 2, 5, 3, 11, 7 и 13. Если окажется, что проверяемое число делится на одно из этих чисел, то его можно считать составным, а иначе следует выполнить остальные проверки на делимость. Ниже поясняется, как выполнять подобные проверки.

» Если число меньше 121 и не делится на 2, 3, 5 или 7, то оно считается простым, а иначе — составным.

» Если число меньше 289 и не делится на 2, 3, 5, 7, 11 или 13, то оно считается простым, а иначе — составным.

Не следует, однако, забывать, что 2 является единственным четным простым числом, а следующие три простые числа, 3, 5 и 7, являются нечетными. Этот перечень можно продолжить, считая счастливым числа 7 и 11, но несчастливым число 13, причем все они простые.

ПРИМЕР!

Задача. Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие составными

а) 185.

б) 243.

в) 253.

г) 263.

Решение. Произведите проверку на делимость, чтобы выявить простые и составные числа.

а) Число **185** является **составным.** Оно оканчивается на цифру 5, а следовательно, делится на 5.

б) Число **243** является **составным.** Оно оканчивается на нечетную цифру, а следовательно, не делится на 2. Кроме того, оно не оканчивается на цифру 5 или 0 и поэтому не делится на 5. Его цифровой корень равен 9, поскольку $2 + 4 + 3 = 9$, а следовательно, оно делится на 3. Как показывает дополнительная проверка, $243 \div 3 = 81$.

в) Число **253** является **составным.** Оно оканчивается на нечетную цифру, а следовательно, не делится на 2. Кроме того, оно не оканчивается на цифру 5 или 0 и поэтому не делится на 5. Его цифровой корень равен 1, поскольку $2 + 5 + 3 = 10$ и $1 + 0 = 1$, а следовательно, оно не делится на 3. Но в то же время оно делится на 11, поскольку проходит следующую проверку на сумму разнозначных цифр: $+2 - 5 + 3 = 0$. Как показывает дополнительная проверка, $253 = 11 \times 23$.

г) Число **263** является **простым.** Оно оканчивается на нечетную цифру, а следовательно, не делится на 2. Кроме того, оно не оканчивается на цифру 5 или 0 и поэтому не делится на 5. Его цифровой корень равен 2, поскольку $2 + 6 + 3 = 11$ и $1 + 1 = 2$, а следовательно, оно не делится на 3. Не делится оно и на 11, поскольку не проходит следующую проверку на сумму разнозначных цифр: $+2 - 6 + 3 = -1$, т.е. не нуль и не число, делящееся на 11. Оно не делится и на 7, потому что $263 \div 7 = 37$ ост (2). Не делится оно и на 13, поскольку $263 \div 13 = 20$, ост (3).

9 Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие из них составными?

а) 3.

б) 9.

в) 11.

г) 14.

10 Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие из них составными?

а) 65.

б) 73.

в) 111.

г) 172.

11 Выявите среди перечисленных ниже чисел простые и составные.

а) 23.

б) 51.

в) 91.

г) 113.

12 Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие из них составными?

а) 143.

б) 169.

в) 187.

г) 283.

Поиск делителей чисел

Если одно число делится на другое, то последнее из них является *делителем* первого. Например, число 10 делится на 2, а следовательно, число 2 является делителем числа 10.

ЗАПОМНИ!

Чтобы найти все делители числа, целесообразно выявить *пары делителей* данного числа. *Пара делителей* числа представляет собой любую пару чисел, произведение которых дает данное число. Например, у числа 30 имеются следующие четыре пары делителей: 1×30, 2×15, 3×10 и 5×6, поскольку:

$1 \times 30 = 30;$
$2 \times 15 = 30;$
$3 \times 10 = 30;$
$5 \times 6 = 30.$

СОВЕТ

Ниже поясняется, как найти *все* пары делителей числа.

1. **Начните с произведения 1 на само число.**
2. **Попробуйте найти пару делителей, включающую в себя число 2, т.е. выяснить, делится ли данное число на 2 (о способах проверки чисел на делимость речь пойдет в главе 7).**

   Если данное число делится на 2, включите данную пару в перечень его делителей.
3. **Выполните аналогичную проверку для числа 3.**
4. **Продолжите проверку деления на остальные числа до тех пор, пока не обнаружите дополнительные пары делителей.**

ПРИМЕР!

Задача. Найдите все пары делителей числа 18.

Решение. 1×18, 2×9, 3×6. В соответствии с п. 1 приведенной выше процедуры начните с пары 1×18:

$1 \times 18.$

Число 18 является четным, а следовательно, делится на 2. И поскольку $18 \div 2 = 9$, следующей оказывается пара делителей 2×9:

$1 \times 18;$

$2 \times 9.$

Цифровой корень числа 18 равен 9, потому что $1 + 8 = 9$, а следовательно, число 18 делится на 3.

И поскольку $18 \div 3 = 6$, следующей оказывается пара делителей 3×6:

$1 \times 18;$

$2 \times 9;$

$3 \times 6.$

Число 18 не делится на 4, потому что $18 \div 4 = 4$, ост (2). Оно не делится и на 5, поскольку не оканчивается на 5 или 0. Таким образом, приведенный выше перечень пар делителей данного числа оказывается исчерпывающим. Ведь в промежутке между числами 3 и 6, составляющими последнюю пару делителей, отсутствуют числа, на которые делится число 18.

13 Найдите все пары делителей числа 12.

14 Определите все пары делителей числа 28.

15 Выявите все пары делителей числа 40.

16 Найдите все пары делителей числа 66.

Разложение чисел на простые множители

Всякое число является произведением особого ряда *простых множителей*, т.е. группы простых чисел, в том числе и повторяющихся, произведение которых равно данному числу. В этом разделе поясняется, как находить простые множители отдельного числа, т.е. выполнять процесс так называемого *разложения на простые множители*.

СОВЕТ

Чтобы разложить число на простые множители, проще всего построить дерево разложения на множители. Ниже поясняется, как это делается.

1. **Найдите два числа, произведение которых равно исходному числу. Запишите их в виде дерева, ответвляющегося от исходного числа.**

   В этом вам поможет знание таблицы умножения.

2. **Если любое из этих чисел является простым, обведите его кружком, чтобы завершить данную ветвь дерева.**

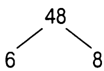
3. **Продолжите ответвление дерева от непростых чисел на два множителя. Те места, где ветвь достигает простого числа, обведите кружком, чтобы замкнуть данную ветвь.**

   Как только все ветви замкнутся на обведенных кружком числах, процесс построения дерева разложения на множители завершится. Останется лишь собрать вместе все обведенные кружком числа.

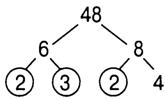
ПРИМЕР!

Задача. Разложите число 48 на простые множители.

Решение. 48 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3. Начните построение дерева разложения на множители с нахождения двух чисел, произведение которых равно числу 48.

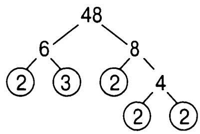


Продолжите ветвление дерева, делая то же самое для чисел 6 и 8.



Обведите кружком простые числа, чтобы замкнуть на них ветви дерева.

В данный момент разомкнутой остается лишь ветвь с числом 4. Разделите ее на две ветви с числами 2 и 2.



Каждая ветвь замыкается на обведенном кружком простом числе, и на этом процесс построения дерева разложения на множители завершается. Таким образом, у числа 48 следующие простые множители: 2, 2, 2, 2 и 3.

17 Разложите число 18 на простые множители.

18 Разложите число 42 на простые множители.

19 Разложите число 81 на простые множители.

20 Разложите число 120 на простые множители.

Нахождение наибольшего общего делителя

Наибольшим общим делителем (НОД) ряда чисел является такое наибольшее число, которое служит делителем для каждого числа в данном ряду. Нахождение НОД приносит пользу в том случае, когда требуется сократить дробь до ее наименьших членов (подробно об этом — в главе 6).

Найти НОД можно двумя способами. Первый способ состоит в том, чтобы перечислить все пары делителей чисел и выбрать среди них самый большой делитель, присутствующий в обоих (или во всех) перечнях пар делителей. (Подробнее о нахождении пар делителей см. в разделе “Поиск делителей чисел”.)

СОВЕТ

В другом способе используется разложение на простые множители, обсуждавшееся в предыдущем разделе. Ниже поясняется, как найти НОД.

1. **Разложите числа на их простые множители.**
2. **Подчеркните те множители, которые являются общими для всех исходных чисел.**
3. **Перемножьте подчеркнутые числа, чтобы получить НОД.**

ПРИМЕР!

Задача. Найдите НОД чисел 12 и 20.

Решение. 4. Запишите все пары делителей чисел 12 и 20.

Пары делителей числа 12:
$1 \times 12, 2 \times 6, 3 \times 4$.

Пары делителей числа 20:
$1 \times 20, 2 \times 10, 4 \times 5$.

Число 4 является наибольшим в обоих перечнях пар делителей, а следовательно, и НОД.

Задача. Найдите НОД чисел 24, 36 и 42.

Решение. 6. Разложите все три числа на простые множители.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$.

$42 = 2 \times 3 \times 7$.

Подчеркните те множители, которые являются общими для всех трех чисел.

$24 = \underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$.

$36 = \underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 3$.

$42 = \underline{2} \times \underline{3} \times 7$.

Перемножьте все подчеркнутые выше числа, чтобы получить искомый НОД:

$2 \times 3 = 6$.

21 Найдите НОД чисел 10 и 22.	22 Каков НОД чисел 8 и 32?
23 Найдите НОД чисел 30 и 45.	24 Выявите НОД чисел 27 и 72.
25 Найдите НОД чисел 15, 20 и 35.	26 Определите НОД чисел 44, 56 и 72.

Формирование кратных числа

Сформировать кратные числа проще, чем найти его делители. Для этого достаточно перемножить его на простые числа 1, 2, 3 и т.д. Но, в отличие от делителей, которые всегда меньше самого числа, что справедливо лишь для положительных чисел, кратные числа больше или равны ему. Следовательно, описать все кратные любого положительного числа вообще нельзя.

ПРИМЕР!

Задача. Найдите первые шесть (положительных) кратных числа 4.

Решение. 4, 8, 12, 16, 20, 24. Запишите число 4 и прибавляйте к нему 4 до тех пор, пока не запишите шесть чисел подряд.

Задача. Перечислите первые шесть кратных числа 12.

Решение. 12, 24, 36, 48, 60, 72. Запишите число 12 и прибавляйте к нему 12 до тех пор, пока не запишите шесть чисел подряд.

27 Перечислите первые шесть кратных числа 5.

28 Сформируйте первые шесть кратных числа 7.

29 Перечислите первые десять кратных числа 8.

30 Запишите первые шесть кратных числа 15.

Нахождение наименьшего общего кратного

Наименьшим общим кратным (НОК) ряда чисел является такое наименьшее число, которое кратно каждому числу в данном ряду. Для нахождения НОК небольших чисел достаточно указать первые несколько кратных каждого числа до тех пор, пока не будет обнаружено их совпадение.

При нахождении НОК двух чисел обычно сначала выявляют кратные большего из них и останавливаются в тот момент, когда количество записанных кратных сравняется с меньшим числом. Затем выявляют кратные меньшего числа и ищут их совпадение.

Но подобным способом можно было бы записать немало кратных, и этот его недостаток проявляется в еще большей степени при попытке найти НОК больших чисел. В связи с этим рекомендуется другой способ, в котором используется разложение на простые множители, когда требуется найти НОК больших или нескольких чисел. Ниже поясняется, как это делается.

1. **Разложите все исходные числа на простые множители.**

   Подробнее об этом см. в разделе "Разложение чисел на простые множители".

2. **Подчеркните наиболее часто встречающиеся экземпляры каждого простого множителя.**

   Иными словами, сравните результаты разложения чисел на простые множители. Так, если в разложении одного числа на простые множители имеются две двойки, а в разложении другого числа — три двойки, подчеркните три двойки. А если в разложении одного числа на простые множители имеется одна семерка, тогда как в разложении остальных чисел она вообще отсутствует, подчеркните именно эту семерку.

3. **Перемножьте подчеркнутые числа, чтобы получить в итоге искомый НОК.**

ПРИМЕР!

Задача. Найдите НОК чисел 6 и 8.

Решение. 24. Большим из этих двух чисел является число 8, поэтому запишите сначала шесть его кратных.

Кратные числа 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48.

Затем записывайте кратные числа 6 до тех пор, пока не найдете совпадающее с одним из кратных числа 8.

Кратные числа 6: 6, 12, 18, **24**.

Задача. Найдите НОК чисел 12, 15 и 18.

Решение. 180. Разложите сначала все три числа на простые множители. Затем найдите наиболее часто встречающиеся экземпляры каждого простого множителя и подчеркните их.

$12 = \underline{2} \times \underline{2} \times 3$

$15 = 3 \times \underline{5}$

$18 = 2 \times \underline{3} \times \underline{3}$

Обратите внимание на то, что число 2 чаще всего (дважды) появляется в разложении на простые множители числа 12, поэтому выше подчеркнуты обе двойки. Аналогично число 3 чаще всего (дважды) появляется в разложении на простые множители числа 18, тогда как в разложении числа 15 чаще всего (однажды) появляется число 5 (среди простых множителей двух других чисел оно отсутствует). А теперь перемножьте все подчеркнутые числа, чтобы получить искомый НОК:

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180.$

31 Найдите НОК чисел 4 и 10.	32 Найдите НОК чисел 7 и 11.
33 Найдите НОК чисел 9 и 12.	34 Найдите НОК чисел 18 и 22.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих применить на практике приобретенные знания.

1 Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 2?

а) 37: **не делится**, поскольку это нечетное число. Дополнительная проверка: $37 \div 2 = 18$, ост. (1).

б) 82: **делится**, поскольку это четное число. Дополнительная проверка: $82 \div 2 = 41$.

в) 111: **не делится**, поскольку это нечетное число. Дополнительная проверка: $111 \div 2 = 55$, ост. (1).

г) 75 316: **делится**, поскольку это четное число. Дополнительная проверка: $75\,316 \div 2 = 35\,658$.

2. Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 5?

а) 75: **делится**, поскольку оно оканчивается на 5. Дополнительная проверка: $75 \div 5 = 15$.

б) 103: **не делится**, поскольку оно оканчивается на 3. Дополнительная проверка: $103 \div 5 = 20$, ост. (3).

в) 230: **делится**, поскольку оно оканчивается на 0. Дополнительная проверка: $230 \div 5 = 46$.

г) 9995: **делится**, поскольку оно оканчивается на 5. Дополнительная проверка: $9995 \div 5 = 1999$.

3. Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 3? *Примечание:* числовой корень чисел, делящихся на 3, оканчивается на 3, 6 или 9.

а) 81: **делится**, поскольку $8 + 1 = 9$. Дополнительная проверка: $81 \div 3 = 27$.

б) 304: **не делится**, поскольку $3 + 0 + 4 = 7$. Дополнительная проверка: $304 \div 3 = 101$, ост. (1).

в) 986: **не делится**, поскольку $9 + 8 + 6 = 23$ и $2 + 3 = 5$. Дополнительная проверка: $986 \div 3 = 328$, ост. (2).

г) 4 444 444: **не делится**, поскольку $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$, $2 + 8 = 10$ и $1 + 0 = 1$. Дополнительная проверка: $4\,444\,444 \div 3 = 1\,481\,481$, ост (1).

4. Какие из перечисленных ниже чисел делятся на 11? *Примечание:* сумма разнозначных цифр чисел, делящихся на 11, должна быть равна 0 или числу, делящемуся на 11.

а) 42: **не делится**, поскольку $+4 - 2 + 2 = 2$. Дополнительная проверка: $42 \div 11 = 3$, ост. (9).

б) 187: **делится**, поскольку $+1 - 8 + 7 = 0$. Дополнительная проверка: $187 \div 11 = 17$.

в) 726: **делится**, поскольку $+7 - 2 + 6 = 11$. Дополнительная проверка: $726 \div 11 = 66$.

г) 1969: **делится**, поскольку $+1 - 9 + 6 - 9 = -11$. Дополнительная проверка: $1969 \div 11 = 179$.

5. Какие из приведенных ниже утверждений верны и какие из них неверны?

а) Число 5 является делителем числа 15. **Верно:** $5 \times 3 = 15$.

б) Число 9 кратно числу 3. **Верно:** $3 \times 3 = 9$.

в) Число 11 является делителем числа 12. **Неверно:** нет такого целого числа, умножив которое на 11 можно было бы получить в итоге число 12.

г) Число 7 кратно числу 14. **Неверно:** число 7 является делителем числа 14.

6. Какие из перечисленных утверждений означают то же самое, что и утверждение “число 18 делится на 6”? **Утверждения в пп. *б* и *в*.** Необходимо выяснить одно из двух: меньшее из этих чисел 6 является делителем большего числа, что и утверждается в п. *в*, или же большее число 18 кратно числу 6, что и утверждается в п. *б*.

7. Какие из приведенных ниже утверждений означают то же самое, что и утверждение “число 10 является делителем числа 50”? **Утверждения в пп. *в* и *г*.** Делителями являются числа, перемножая которые можно получить бо́льшие числа. Поэтому можно сказать, что число 50 делится на 10, как утверждается в п. *в*. А кратными являются бо́льшие числа, которые получаются в результате перемножения двух делителей. И можно сказать, что число 50 кратно числу 10, как утверждается в п. *г*, поскольку $10 \times 5 = 50$.

8. Какие из приведенных ниже утверждений верны и какие из них неверны?
   а) Число 3 является делителем числа 42. **Верно:** $3 \times 14 = 42$.
   б) Число 11 кратно числу 121. **Неверно:** число 11 является делителем числа 121.
   в) Число 88 кратно числу 9. **Неверно:** нет такого целого числа, умножив которое на 9 можно было бы получить в итоге число 88, поскольку $88 \div 9 = 9$, ост. (7).
   г) Число 11 является делителем числа 121. **Верно:** $11 \times 11 = 121$.

9. Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие из них составными?
   а) Число **3** является **простым.** У него лишь два делителя: 1 и 3.
   б) Число **9** является **составным.** У него имеются следующие делители: 1, 3 и 9.
   в) Число **11** является **простым.** У него лишь два делителя: 1 и 11.
   г) Число **14** является **составным.** Это четное число, делящееся не только на 7, но и на 2, и поэтому оно не может быть простым.

10. Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие из них составными?
   а) Число **65** является **составным.** Оно оканчивается на 5, а следовательно, и делится на 5.
   б) Число **73** является **простым.** Это нечетное число не оканчивается на 5 или 0 и не является кратным числу 7.

в) Число **111** является **составным.** Цифровой корень этого числа равен $1 + 1 + 1 = 3$, поэтому оно делится на 3. Дополнительная проверка: $111 \div 3 = 37$.

г) Число **172** является **составным.** Это четное число, делящееся на 2, и поэтому оно не может быть простым.

11 Выявите среди перечисленных ниже чисел простые и составные.

а) Число **23** является **простым.** Это нечетное число не оканчивается на 5 или 0, его цифровой корень равен 5, и оно не кратно числу 7.

б) Число **51** является **составным.** Его цифровой корень равен 6, и поэтому оно является кратным числу 3. Дополнительная проверка: $51 \div 3 = 17$.

в) Число **91** является **составным.** Оно является кратным числу 7: $7 \times 13 = 91$.

г) Число **113** является **простым.** Это нечетное число не оканчивается на 5 или 0, а его цифровой корень равен 5, и поэтому оно не делится на 2, 5 или 3. Кроме того, оно не является кратным числу 7: $113 \div 7 = 16$, ост. (1).

12 Какие из перечисленных ниже чисел являются простыми и какие из них составными?

а) Число **143** является **составным.** Оно делится на 11, поскольку $+1 - 4 + 3 = 0$.

б) Число **169** является **составным.** Его можно разделить без остатка на 13, и в итоге получится число 13.

в) Число **187** является **составным.** Оно является кратным числу 11, поскольку $+1 - 8 + 7 = 0$.

г) Число **283** является **простым.** Это нечетное число не оканчивается на 5 или 0, а его цифровой корень равен 4, и поэтому оно не делится на 2, 5 или 3. Кроме того, оно не делится на 7, 11 и 13, поскольку, во-первых, $283 \div 7 = 40$, ост (3); во-вторых, $+2 - 8 + 3 - 3 = 3$, что не кратно 11; и в-третьих, $283 \div 13 = 21$, ост. (10).

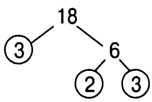
13 Пары делителей числа 12 таковы: **1** × **12**, **2** × **6 и 3** × **4**. Первой является пара делителей 1×12. А поскольку число 12 делится на 2: $12 \div 2 = 6$, то следующей оказывается пара делителей 2×6. И последней является пара делителей 3×4, поскольку число 12 делится на 3: $12 \div 3 = 4$.

14 Пары делителей числа 28 таковы: **1** × **28, 2** × **14 и 4** × **7**. Первой является пара делителей 1×28. А поскольку число 28 делится на 2: $28 \div 2 = 14$, то следующей оказывается пара делителей 2×14. И последней является пара делителей 4×7, поскольку число 28 делится на 4: $28 \div 4 = 7$. В то же время число 28 не делится на 3, 5 или 6.

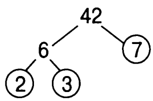
15 Пары делителей числа 40 таковы: **1 × 40, 2 × 20, 4 × 10 и 5 × 8**. Первой является пара делителей 1 × 40. А поскольку число 40 делится на 2: 40 ÷ 2 = = 20, то следующей оказывается пара делителей 2 × 20. И хотя число 40 не делится на 3, оно все же делится на 4, и поэтому следующей оказывается пара делителей 4 × 10. И последней является пара делителей 5 × 8, поскольку число 40 делится на 5: 40 ÷ 5 = 8. В то же время число 40 не делится на 6 или 7.

16 Пары делителей числа 66 таковы: **1 × 66, 2 × 33, 3 × 22 и 6 × 11**. Первой является пара делителей 1 × 66. А поскольку число 66 делится на 2: 66 ÷ 2 = 33, то следующей оказывается пара делителей 2 × 33. И хотя число 66 не делится на 4 или 5, оно все же делится на 3, и поэтому следующей оказывается пара делителей 3 × 22. И последней является пара делителей 6 × 11, поскольку число 66 делится на 6: 66 ÷ 6 = 11. В то же время число 66 не делится на 7, 8, 9 или 10.

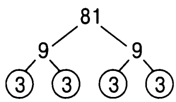
17 Разложите число 18 на простые множители. **18 = 2 × 2 × 3**. Ниже приведен один из возможных вариантов построения дерева разложения данного числа на простые множители.



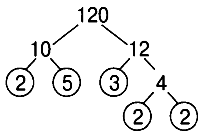
18 Разложите число 42 на простые множители. **42 = 2 × 3 × 7**. Ниже приведен один из возможных вариантов построения дерева разложения данного числа на простые множители.



19 Разложите число 81 на простые множители. **81 = 3 × 3 × 3 × 3**. Ниже приведен один из возможных вариантов построения дерева разложения данного числа на простые множители.



20 Разложите число 120 на простые множители. **120 = 2 × 2 × 2 × 3 × 5**. Ниже приведен один из возможных вариантов построения дерева разложения данного числа на простые множители.



21 НОД чисел 10 и 22 равен **2**. Запишите все пары делителей чисел 10 и 22:
10: 1×10, 2×5;
22: 1×22, 2×11.
Число 2 оказывается наибольшим в обоих перечнях пар делителей.

22 НОД чисел 8 и 32 равен **8**. Запишите все пары делителей чисел 8 и 32:
8: 1×8, 2×4;
32: 1×32, 2×16, 4×8.
Число 8 оказывается наибольшим в обоих перечнях пар делителей.

23 НОД чисел 30 и 45 равен **15**. Запишите все пары делителей чисел 30 и 45:
30: 1×30, 2×15, 3×10, 5×6;
45: 1×45, 3×15, 5×9;
Число 15 оказывается наибольшим в обоих перечнях пар делителей.

24 НОД чисел 27 и 72 равен **9**. Разложите числа 27 и 72 на простые множители и подчеркните каждый множитель, общий для обоих чисел:
$27 = \underline{3} \times \underline{3} \times 3$;
$72 = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{3}$.
Перемножьте подчеркнутые множители, чтобы получить искомый НОД:
$3 \times 3 = 9$.

25 НОД чисел 15, 20 и 35 равен **5**. Разложите числа 15, 20 и 35 на простые множители и подчеркните каждый множитель, общий для всех трех чисел:
$15 = 3 \times \underline{5}$;
$20 = 2 \times 2 \times \underline{5}$;
$35 = \underline{5} \times 7$.
Единственным общим делителем для всех трех чисел является число 5, которое и определяет их НОД.

26 НОД чисел 44, 56 и 72 равен **4**. Разложите числа 44, 56 и 72 на простые множители и подчеркните каждый множитель, общий для всех трех чисел:
$44 = \underline{2} \times \underline{2} \times 11$;
$56 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 7$;
$72 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3 \times 3$;
Перемножьте подчеркнутые множители, чтобы получить искомый НОД:
$2 \times 2 = 4$.

27 Первые шесть кратных числа 5 таковы: **5, 10, 15, 20, 25** и **30**. Запишите число 5 и продолжайте прибавлять к нему 5 до тех пор, пока не получите шесть чисел, кратных данному числу.

28 Первые шесть кратных числа 7 таковы: **7, 14, 21, 28, 35** и **42**.

29 Первые десять кратных числа 8 таковы: **8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72** и **80**.

30 Первые шесть кратных числа 15 таковы: **15, 30, 45, 60, 75** и **90**.

31 НОК чисел 4 и 10 равен **20**. Запишите сначала четыре кратных числа 10.
Кратные числа 10: 10, 20, 30, 40.
Затем формируйте кратные числа 4 до тех пор, пока не найдете число, совпадающее с одним из кратных числа 10.
Кратные числа 4: 4, 8, 12, 16, **20**.

32 НОК чисел 7 и 11 равен **77**. Запишите сначала семь кратных числа 11.
Кратные числа 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66 и 77.
Затем формируйте кратные числа 7 до тех пор, пока не найдете число, совпадающее с одним из кратных числа 11.
Кратные числа 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, **77**.

33 НОК чисел 9 и 12 равен **36**. Запишите сначала девять кратных числа 12.
Кратные числа 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 и 108.
Затем формируйте кратные числа 9 до тех пор, пока не найдете число, совпадающее с одним из кратных числа 12.
Кратные числа 9: 9, 18, 27, **36**.

34 НОК чисел 18 и 22 равен **198**. Сначала разложите оба числа на простые множители. Затем подчеркните наиболее часто встречающиеся экземпляры каждого простого множителя:
$18 = \underline{2} \times \underline{3} \times \underline{3}$;
$22 = 2 \times \underline{11}$.
Множитель 2 присутствует лишь однажды в разложении обоих чисел на простые множители, поэтому он подчеркнут один раз. А множитель 3 присутствует дважды в разложении числа 18, поэтому он подчеркнут два раза. И, наконец, множитель 11 присутствует лишь однажды в разложении числа 22, поэтому он подчеркнут один раз. А теперь перемножьте все подчеркнутые числа, чтобы получить искомый НОК:
$2 \times 3 \times 3 \times 11 = 198$.

2

Разложение на простые дроби, десятичные дроби и проценты

В ЭТОЙ ЧАСТИ...

- Представление о дробях, в том числе неправильных и смешанных
- Выполнение четырех основных арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) над простыми дробями, десятичными дробями и процентами
- Преобразование рациональных чисел в простые дроби, десятичные дроби или проценты
- Применение простых дробей, десятичных дробей и процентов для решения практических задач

Глава 6

Дроби просты как кусочки пирога

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Знание основ дробей

» Взаимное преобразование неправильных и смешанных дробей

» Приращение и сокращение членов дробей

» Сравнение дробей перекрестным умножением

Дроби вступают в действие, когда целый объект делится на равные части. Так, если разрезать пирог на четыре равные части, то каждая часть составит одну четвертую целого пирога. Обычно дроби применяются повсюду: от кулинарии до плотницкого дела. Им уделяется немало внимания и на уроках математики!

Эта глава начинается с изложения основ дробей, где верхнее число (*числитель*) и нижнее число (*знаменатель*) представляют часть целого объекта. Здесь вы узнаете, как распознавать три основных типа дробей: правильные, неправильные и смешанные, и как выполнять взаимное преобразование неправильных и смешанных дробей. Затем поясняется, как приращивать и сокращать члены дробей. И в завершение главы будет показано, как выполнять перекрестное умножение пар дробей, чтобы превратить их в две новые дроби с общим знаменателем. Подобным способом можно выяснить, какая из дробей больше, а какая меньше.

Усвоение основ дробей

Дроби представляют части целого, т.е. дробные величины в промежутках между целыми числами. Самой распространенной дробью, вероятно, является *одна вторая*. Разрезая пирог пополам и беря себе одну половину, вы получаете одну вторую пирога, чтобы утолить свой голод! Ваша часть пирога затенена на рис. 6.1.

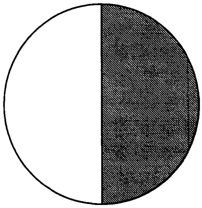


Рис. 6.1. Половина пирога

ЗАПОМНИ!

Дробь, представляющая кусок отрезанного вами пирога, состоит их двух чисел, каждое из которых обозначает нечто разное.

- Верхнее число, называемое *числителем*, обозначает количество *взятых себе* кусков пирога.
- Нижнее число, называемое *знаменателем*, обозначает *общее* количество отрезанных кусков пирога.

Если числитель дроби меньше ее знаменателя, такая дробь называется *правильной*. А если числитель дроби больше ее знаменателя, то такая дробь называется *неправильной*. Неправильные дроби можно преобразовать в смешанные, как поясняется в следующем разделе.

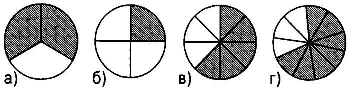
Некоторые дроби нетрудно представить как целые числа.

- Если знаменатель дроби равен 1, такая дробь оказывается равной ее числителю.
- Если числитель и знаменатель дроби одинаковы, такая дробь оказывается равной 1. (Это очень важно знать на тот случай, если требуется преобразовать члены дроби, как поясняется далее, в разделе "Приращение и сокращение членов дробей".)

Если поменять местами числитель и знаменатель дроби, то в итоге получится величина, *обратная* этой дроби. Обратные величины служат для деления на дроби, как поясняется в главе 7.

ПРИМЕР!

Задача. Определите дроби, обозначающие отдельные куски каждого показанного на рисунке пирога.



Решение. Расположите количество взятых себе (затененных на рисунке) кусков каждого пирогах вверху, а общее их количество внизу.

а) $\frac{2}{3}$. б) $\frac{1}{4}$. в) $\frac{5}{8}$. г) $\frac{7}{10}$.

Задача. Каковы величины, обратные перечисленным ниже дробям?

а) $\frac{3}{4}$. в) $\frac{22}{7}$.

б) $\frac{6}{11}$. г) $\frac{41}{48}$.

Решение. Чтобы найти обратную величину каждой дроби, поменяйте местами ее числитель и знаменатель.

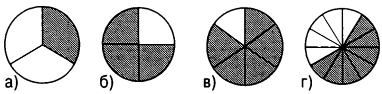
а) Обратная величина дроби $\frac{3}{4}$ равна $\frac{4}{3}$.

б) Обратная величина дроби $\frac{6}{11}$ равна $\frac{11}{6}$.

в) Обратная величина дроби $\frac{22}{7}$ равна $\frac{7}{22}$.

г) Обратная величина дроби $\frac{41}{48}$ равна $\frac{48}{41}$.

1 Определите дроби, обозначающие отдельные куски каждого показанного ниже пирога.



2 Какие из перечисленных ниже дробей являются правильными и какие из них неправильными?

а) $\frac{3}{2}$. в) $\frac{20}{23}$.

б) $\frac{8}{9}$. г) $\frac{75}{51}$.

3 Перепишите каждую из перечисленных ниже дробей как целое число.

а) $\frac{3}{3}$. в) $\frac{10}{10}$.

б) $\frac{10}{1}$. г) $\frac{81}{1}$.

4 Найдите величины, обратные перечисленным ниже дробям.

а) $\frac{5}{7}$. в) $\frac{12}{17}$.

б) $\frac{10}{3}$. г) $\frac{80}{91}$.

В разношерстной компании: взаимное преобразование неправильных и смешанных дробей

Если числитель (верхнее число) дроби больше знаменателя (нижнего ее числа), такая дробь называется *неправильной*. Другой формой неправильной дроби является смешанная дробь, чаще называемая *смешанным числом* и состоящая из целого числа и дроби.

Например, неправильную дробь $\frac{3}{2}$ можно представить равнозначным смешанным числом $1\frac{1}{2}$. Смешанное число $1\frac{1}{2}$ означает $1+\frac{1}{2}$. Чтобы понять, почему $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, достаточно представить себе, что *три вторых* пирога — это то же самое, что и *полтора* пирога, т.е. *один* целый пирог и еще *половина* пирога. У всякой неправильной дроби имеется равнозначное смешанное число, и наоборот.

Иногда первоначальное преобразование смешанного числа в неправильную дробь упрощает решение задачи на дроби. Ниже поясняется, как перейти от смешанного числа к неправильной дроби.

1. **Умножьте целую часть смешанного числа на знаменатель его дробной части (нижнее число).**
2. **Сложите числитель дробной части (верхнее число) с произведением, полученным в п. 1.**
3. **Расположите сумму, полученную в п. 2, над исходным знаменателем.**

Аналогично в конце решения некоторых задач на дроби может возникнуть потребность преобразовать неправильную дробь в смешанное число. Для этого достаточно разделить сначала числитель неправильной дроби на ее знаменатель, а затем составить смешанное число, как поясняется ниже.

» Частное от деления записывается в целой части смешанного числа.

» Остаток от деления записывается в числителе дробной части смешанного числа.

» А знаменатель остается тем же самым.

СОВЕТ

Считайте дробную черту знаком деления.

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте смешанное число $2\frac{3}{4}$ в неправильную дробь.

Решение. $\frac{11}{4}$. Умножьте сначала целую часть смешанного числа 2 на знаменатель его дробной части 4, а затем прибавьте числитель дробной части 3 к полученному произведению:

$2 \times 4 + 3 = 11.$

Расположите полученное в итоге число в числителе неправильной дроби, оставив прежним знаменатель:

$\frac{11}{4}.$

Задача. Преобразуйте смешанное число $3\frac{5}{7}$ в неправильную дробь.

Решение. $\frac{26}{7}$. Умножьте сначала целую часть смешанного числа 3 на знаменатель его дробной части 7, а затем прибавьте числитель дробной части 5 к полученному произведению. На этот раз весь процесс преобразования демонстрируется в течение одной стадии:

$3\frac{5}{7} = \frac{(3 \times 7 + 5)}{7} = \frac{26}{7}.$

Задача. Преобразуйте неправильную дробь $\frac{11}{2}$ в смешанное число.

Решение. $5\frac{1}{2}$. Разделите числитель 11 неправильной дроби на ее знаменатель 2.

$$\begin{array}{lr} \text{Частное} \rightarrow & 5 \\ & 2)\overline{\ 11} \\ & \underline{-10} \\ \text{Остаток} \rightarrow & 1 \end{array}$$

А теперь составьте смешанное число, записав частное от деления 5 в целой его части, а остаток 1 — в числителе дробной части, оставив прежний знаменатель 2:

$5\frac{1}{2}$.

Задача. Преобразуйте неправильную дробь $\frac{39}{5}$ в смешанное число.

Решение. $7\frac{4}{5}$. Разделите числитель 39 неправильной дроби на ее знаменатель 5:

$$\begin{array}{lr} \text{Частное} \rightarrow & 7 \\ & 5)\overline{\ 39} \\ & \underline{-35} \\ \text{Остаток} \rightarrow & 4 \end{array}$$

Составьте теперь смешанное число, записав частное от деления 7 в целой его части, а остаток 4 — в числителе дробной части, оставив прежний знаменатель 5:

$7\frac{4}{5}$.

5 Преобразуйте смешанное число $5\frac{1}{4}$ в неправильную дробь.

6 Преобразуйте смешанное число $7\frac{2}{9}$ в неправильную дробь.

7 Выразите смешанное число $10\frac{5}{12}$ в виде неправильной дроби.

8 Преобразуйте неправильную дробь $\frac{13}{4}$ в смешанное число.

9 Выразите смешанное число $\frac{29}{10}$ в виде неправильной дроби.

10 Преобразуйте неправильную дробь $\frac{100}{7}$ в смешанное число.

Приращение и сокращение членов дробей

Разрезав пирог на две части и взяв себе одну из них, вы оставляете себе одну вторую пирога. А если вы разрежете его на четыре части и возьмете себе две из них, то оставите себе две четвертых пирога. И, наконец, разрезав пирог на шесть частей и взяв себе три из них, вы оставите себе три шестых пирога. Обратите внимание на то, что во всех трех случаях вы получаете одно и то же количество пирога. Этим примером показывается, что дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{6}$ являются *равнозначными*, как, впрочем, и дроби $\frac{10}{20}$ и $\frac{1\,000\,000}{2\,000\,000}$.

Последнюю дробь лучше всего записать как $\frac{1}{2}$, поскольку в ее числителе и знаменателе присутствуют наименьшие из возможных чисел. Иными словами, дробь $\frac{1}{2}$ описывается наименьшими членами. В конце решения задачи нередко возникает потребность сократить дробь, т.е. описать ее наименьшими членами. Это можно сделать двумя способами: формальным и неформальным, как поясняется ниже.

» Неформальный способ сокращения дроби состоит в том, чтобы разделить ее числитель и знаменатель на одно и то же число.

  Преимущество: простота данного способа.

  Недостаток: подобным способом далеко не всегда можно сократить дробь до наименьших членов, хотя этого можно все же добиться, если разделить числитель и знаменатель дроби на наибольший общий делитель, обсуждавшийся в главе 5.

» Формальный способ сокращения дроби состоит в том, чтобы сначала разложить ее числитель и знаменатель на простые множители, а затем исключить из них общие множители.

Преимущество: подобным способом дробь всегда сокращается до наименьших членов.

Недостаток: данный способ требует больше времени, чем неформальный.

СОВЕТ

Начинайте решение каждой задачи на дроби с применения неформального способа. Если же дело не заладится и вы не уверены, сокращена ли дробь до наименьших членов, перейдите к формальному способу.

Иногда в начале решения задачи на дроби требуется прирастить члены дроби, т.е. описать эту дробь с помощью большего числителя и знаменателя. Чтобы прирастить члены дроби, перемножьте ее числитель и знаменатель на одно и то же число.

ПРИМЕР!

Задача. Прирастите дробь $\frac{4}{5}$ до такой дроби, знаменатель которой равен 15.

Решение. $\frac{12}{15}$. Прежде всего опишите данную задачу следующим образом:

$\frac{4}{5} = \frac{?}{15}$.

Знак вопроса в новой дроби обозначает числитель, который требуется заполнить. Разделите далее больший знаменатель 15 на меньший 5:

$15 \div 5 = 3$.

Умножьте полученный в итоге результат на знаменатель:

$3 \times 4 = 12$.

И, наконец, замените знак вопроса в числителе данной дроби полученным выше числом:

$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

Задача. Сократите дробь $\frac{18}{42}$ до наименьших членов.

Решение. $\frac{3}{7}$. Числитель и знаменатель данной дроби не слишком велики, поэтому воспользуйтесь неформальным способом. Прежде всего попытайтесь найти наименьшее число, на которое делятся числитель и знаменатель данной дроби, обратив внимание на то, что оба они делятся на 2. Поэтому разделите их на 2:

$\frac{18}{42} = \frac{18 \div 2}{42 \div 2} = \frac{9}{21}$.

Обратите далее внимание на то, что числитель и знаменатель делятся на 3 (подробнее о том, как выяснить, делится ли число на 3, см. в главе 5), поэтому разделите их на 3:

$$\frac{9}{21}=\frac{9\div 3}{21\div 3}=\frac{3}{7}.$$

На данном этапе отсутствует число, кроме 1, на которое без остатка делится как числитель, так и знаменатель, поэтому полученная выше дробь и дает окончательное решение.

Задача. Сократите дробь $\frac{135}{196}$ до наименьших членов.

Решение. $\frac{135}{196}$. Числитель и знаменатель данной дроби больше 100, поэтому воспользуйтесь формальным способом для ее сокращения. Прежде всего разложите числитель и знаменатель на простые множители:

$$\frac{135}{196}=\frac{3\times 3\times 3\times 5}{2\times 2\times 7\times 7}.$$

У числителя и знаменателя данной дроби отсутствуют общие множители, и поэтому она уже описана наименьшими членами.

---

11 Прирастите члены дроби $\frac{2}{3}$, чтобы ее знаменатель стал равным 18.

12 Прирастите члены дроби $\frac{4}{9}$, изменив ее знаменатель на 54.

13 Сократите дробь $\frac{12}{60}$ до наименьших членов.

14 Сократите дробь $\frac{45}{75}$ до наименьших членов.

15 Сократите дробь $\frac{135}{180}$ до наименьших членов.	**16** Сократите дробь $\frac{108}{217}$ до наименьших членов.

Сравнение дробей перекрестным умножением

Перекрестное умножение служит удобным средством для получения общего делителя двух дробей, что очень важно для выполнения многих операций, включающих дроби. В этом разделе показывается, как выполнять перекрестное умножение для сравнения пары дробей с целью выявить наибольшую или наименьшую из них. (В главе 7 будет показано, как с помощью перекрестного умножения складывать дроби, а в главе 15 — как решать алгебраические уравнения.)

Ниже поясняется, как выполнить перекрестное умножение двух дробей.

1. **Умножьте числитель (верхнее число) первой дроби на знаменатель (нижнее число) второй дроби, записав полученный результат ниже первой дроби.**
2. **Умножьте числитель второй дроби на знаменатель первой дроби, записав полученный результат ниже второй дроби.**

В итоге ниже каждой дроби должно появиться новое число. Большее из этих чисел окажется ниже большей дроби.

СОВЕТ

Используя перекрестное умножение, можно переписать пару дробей в виде новых дробей с общим знаменателем, как поясняется ниже.

1. **Выполните перекрестное умножение двух исходных дробей, чтобы найти числители новых дробей.**
2. **Перемножьте знаменатели двух дробей, чтобы найти знаменатели новых дробей.**

Если у обеих дробей одинаковый знаменатель, то большей окажется дробь с бо́льшим числителем.

ПРИМЕР!

Задача. Какая из дробей $\frac{5}{8}$ или $\frac{6}{11}$ больше?

Решение. $\frac{5}{8}$. Выполните перекрестное умножение обеих дробей.

$$\frac{5}{8} \times \frac{6}{11}$$

55 48

Дробь $\frac{5}{8}$ оказывается больше дроби $\frac{6}{11}$, поскольку $55 > 48$.

Задача. Какая из дробей $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$ или $\frac{8}{11}$ меньше?

Решение. $\frac{7}{10}$. Выполните перекрестное умножение первых двух дробей.

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{10}$$

30 28

Дробь $\frac{7}{10}$ оказывает меньше дроби $\frac{3}{4}$, поскольку $28 < 30$, а следовательно, дробь $\frac{3}{4}$ можно отбросить. А теперь сравните аналогичным способом дроби $\frac{7}{10}$ и $\frac{8}{11}$.

$$\frac{7}{10} \times \frac{8}{11}$$

77 80

Дробь $\frac{7}{10}$ оказывается меньше $\frac{8}{11}$, поскольку $77 < 80$. Следовательно, дробь $\frac{7}{10}$ оказывается самой меньшей среди всех трех сравниваемых здесь дробей.

17 Какая из дробей $\frac{1}{5}$ или $\frac{2}{9}$ больше?

18 Найдите меньшую из двух дробей: $\frac{3}{7}$ или $\frac{5}{12}$.

19 Какая из трех дробей $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{21}$ или $\frac{3}{29}$ больше?

20 Выясните, какая из следующих дробей меньше: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{13}$ или $\frac{8}{25}$.

Понятие об отношениях и пропорциях

Отношение является математической операцией сравнения двух чисел на основании деления. Допустим, вы взяли с собой в командировку три рубашки и пять галстуков. Ниже перечислен ряд способов выразить отношение рубашек и галстуков.

3:5	3 к 5	$\frac{3}{5}$

Для обращения с отношением его удобнее преобразовать в дробь. При этом необходимо сохранить следующий порядок: первое число из отношения указывается вверху дроби, а второе число — внизу ее. Отношение можно использовать для решения математических задач, составляя *уравнение пропорций*, т.е. такое уравнение, которое включает в себя два отношения.

ПРИМЕР!

Задача. У Кларенс одна дочь и четыре сына. Составьте уравнение пропорций на основании данного отношения.

Решение. $\frac{\text{Дочери}}{\text{Сыновья}} = \frac{1}{4}$.

Задача. В школе английского языка отношение европейских и азиатских учащихся составляет 3:7. Если эту школу посещают 28 учащихся из Азии, то сколько учащихся из Европы посещают ее?

Решение. 12 учащихся. Прежде всего составьте пропорцию на основании отношения европейских и азиатских учащихся, сохранив в ней такой же порядок следования чисел, как и в исходном отношении, т.е. на трех европейских учащихся семь азиатских учащихся:

$$\frac{\text{Европа}}{\text{Азия}} = \frac{3}{7}.$$

Прирастите далее члены дроби $\frac{3}{7}$, чтобы число, обозначающее количество азиатских учащихся, стало равным 28:

$$\frac{\text{Европа}}{\text{Азия}} = \frac{3\times4}{7\times4} = \frac{12}{28}.$$

Таким образом, школу английского языка посещают 12 европейских учащихся, если известно, что ее посещают 28 азиатских учащихся.

21 Отношение овощей и фруктов, продаваемых на сельскохозяйственном рынке, составляет 4 к 5. Если на этом рынке продается 35 разных видов фруктов, то сколько на нем продается разных видов овощей?

22 Отношение скульптур и картин, выставленных в художественной галерее, составляет 2:7. Если в художественной галерее выставлено 18 скульптур, то сколько в ней выставлено картин?

23 Отношение девочек и мальчиков, отдыхающих в летнем лагере, составляет 7 к 9. Если в летнем лагере находится 117 мальчиков, то сколько в нем находится девочек?

24 Отношение финансирования бюджета небольшого города из государственного и муниципального источников составляет 3:8. Если за последний год город получил финансирование из муниципального источника на 600 000 долларов, то каким был его общий бюджет, финансируемый как из государственного, так и из муниципального источника?

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих применить на практике приобретенные знания.

1. Определите дроби, обозначающие отдельные куски каждого показанного на рисунке пирога.
   а) Имеется 1 затененный кусок, а всего 3 куска, составляющих дробь $\mathbf{\frac{1}{3}}$.
   б) Имеются 3 затененных куска, а всего 4 куска, составляющих дробь $\mathbf{\frac{3}{4}}$.
   в) Имеются 5 затененных кусков, а всего 6 кусков, составляющих дробь $\mathbf{\frac{5}{6}}$.
   г) Имеются 7 затененных кусков, а всего 12 кусков, составляющих дробь $\mathbf{\frac{7}{12}}$.

2. Какие из перечисленных ниже дробей являются правильными и какие из них неправильными?
   а) Числитель 3 больше знаменателя 2, поэтому дробь $\frac{3}{2}$ является **неправильной**.
   б) Числитель 8 меньше знаменателя 9, поэтому дробь $\frac{8}{9}$ является **правильной**.
   в) Числитель 20 меньше знаменателя 23, поэтому дробь $\frac{20}{23}$ является **правильной**.
   г) Числитель 75 больше знаменателя 51, поэтому дробь $\frac{75}{51}$ является **неправильной**.

3. Перепишите каждую из перечисленных ниже дробей как целое число.
   а) Числитель и знаменатель одинаковы, поэтому $\frac{3}{3} = \mathbf{1}$.
   б) Знаменатель равен 1, поэтому $\frac{10}{1} = \mathbf{10}$.
   в) Числитель и знаменатель одинаковы, поэтому $\frac{10}{10} = \mathbf{1}$.
   г) Знаменатель равен 1, поэтому $\frac{81}{1} = \mathbf{81}$.

4. Найдите величины, обратные перечисленным ниже дробям.
   а) Величиной, обратной дроби $\frac{5}{7}$, является дробь $\mathbf{\frac{7}{5}}$.
   б) Величиной, обратной дроби $\frac{10}{3}$, является дробь $\mathbf{\frac{3}{10}}$.
   в) Величиной, обратной дроби $\frac{12}{17}$, является дробь $\mathbf{\frac{17}{12}}$.
   г) Величиной, обратной дроби $\frac{80}{91}$, является дробь $\mathbf{\frac{91}{80}}$.

❺ $5\frac{1}{4}=\frac{5\times4+1}{4}=\mathbf{\frac{21}{4}}$.

❻ $7\frac{2}{9}=\frac{7\times9+2}{9}=\mathbf{\frac{65}{9}}$.

❼ $10\frac{5}{12}=\frac{10\times12+5}{12}=\mathbf{\frac{125}{12}}$.

❽ $\frac{13}{4}=\mathbf{3\frac{1}{4}}$. Разделите числитель 13 на знаменатель 4.

$$\begin{array}{lr} \text{Частное} \rightarrow & 3 \\ & 4\overline{)\ 13} \\ & \underline{-12} \\ \text{Остаток} \rightarrow & 1 \end{array}$$

Составьте смешанное число, указав частное 3 в целой его части, а остаток 1 — в числителе дробной части, оставив тот же самый знаменатель 4: $3\frac{1}{4}$.

❾ $\frac{29}{10}=\mathbf{2\frac{9}{10}}$. Разделите числитель 29 на знаменатель 10.

$$\begin{array}{lr} \text{Частное} \rightarrow & 2 \\ & 10\overline{)\ 29} \\ & \underline{-20} \\ \text{Остаток} \rightarrow & 9 \end{array}$$

Составьте смешанное число, указав частное 2 в целой его части, а остаток 9 — в числителе дробной части, оставив тот же самый знаменатель 10: $2\frac{9}{10}$.

❿ $\frac{100}{7}=\mathbf{14\frac{2}{7}}$. Разделите числитель 100 на знаменатель 7.

$$\begin{array}{lr} \text{Частное} \rightarrow & 14 \\ & 7\overline{)\ 100} \\ & \underline{-7} \\ & 30 \\ & \underline{-28} \\ \text{Остаток} \rightarrow & 2 \end{array}$$

Составьте смешанное число, указав частное 14 в целой его части, а остаток 2 — в числителе дробной части, оставив тот же самый знаменатель 7: $14\frac{2}{7}$.

11 $\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{12}{18}}$. Прежде всего перепишите данную задачу следующим образом:

$\frac{2}{3} = \frac{?}{18}$.

Умножьте больший знаменатель 18 на числитель 2, а затем разделите полученный результат на меньший знаменатель 3:

$(18 \times 2) \div 3 = 12$.

Замените числом 12 знак вопроса в числителе, чтобы получить в итоге дробь $\frac{12}{18}$.

12 $\frac{4}{9} = \mathbf{\frac{24}{54}}$. Прежде всего перепишите данную задачу следующим образом:

$\frac{4}{9} = \frac{?}{54}$.

Умножьте больший знаменатель 54 на числитель 4, а затем разделите полученный результат на меньший знаменатель 9:

$(54 \times 4) \div 9 = 24$.

Замените числом 24 знак вопроса в числителе, чтобы получить в итоге дробь $\frac{24}{54}$.

13 $\frac{12}{60} = \mathbf{\frac{1}{5}}$. В числителе 12 и знаменателе 60 данной дроби присутствуют четные числа, поэтому их можно разделить на 2:

$\frac{12}{60} = \frac{6}{30}$.

Они по-прежнему остаются четными, поэтому их можно еще раз разделить на 2:

$= \frac{3}{15}$.

Оба числа, оставшихся в числителе и знаменателе, теперь кратны 3, поэтому их можно разделить еще и на 3:

$= \frac{1}{5}$.

14 $\frac{45}{75} = \mathbf{\frac{3}{5}}$. В числителе 45 и знаменателе 75 данной дроби присутствуют нечетные числа, кратные 5, поэтому их можно разделить на 5:

$\frac{45}{75} = \frac{9}{15}$.

Оба числа, оставшихся в числителе и знаменателе, теперь кратны 3, поэтому их можно разделить еще и на 3:

$= \frac{3}{5}$.

15 $\frac{135}{180} = \mathbf{\frac{3}{4}}$. В числителе 135 и знаменателе 180 данной дроби присутствуют нечетные числа, кратные 5, поэтому их можно разделить на 5:

$\frac{135}{180} = \frac{27}{36}$.

Оба числа, оставшихся в числителе и знаменателе, теперь кратны 3, поэтому их можно разделить на 3:

$= \frac{9}{12}$.

Они по-прежнему остаются кратными 3, поэтому их можно еще раз разделить на 3:

$= \frac{3}{4}$.

16 $\frac{108}{217} = \mathbf{\frac{108}{217}}$. Оба числа в числителе и знаменателе данной дроби большие, поэтому ее лучше сократить формальным способом. Прежде всего разложите числа, находящиеся в числителе и знаменателе, на простые множители:

$\frac{108}{217} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}{7 \times 31}$.

В числителе и знаменателе отсутствуют общие множители, поэтому данная дробь уже описана наименьшими членами.

17 Дробь $\mathbf{\frac{2}{9}}$ **больше** дроби $\mathbf{\frac{1}{5}}$. Сравните обе дроби их перекрестным умножением.

$\frac{2}{9} \times \frac{1}{5}$

10 9

Дробь $\frac{2}{9}$ больше дроби $\frac{1}{5}$, поскольку $10 > 9$.

18 Дробь $\mathbf{\frac{5}{12}}$ **меньше** дроби $\mathbf{\frac{3}{7}}$. Сравните обе дроби их перекрестным умножением.

$\frac{5}{12} \times \frac{3}{7}$

35 36

Дробь $\frac{5}{12}$ меньше дроби $\frac{3}{7}$, поскольку $35 < 36$.

19 Дробь $\mathbf{\frac{3}{29}}$ **больше** дробей $\mathbf{\frac{1}{10}}$ и $\mathbf{\frac{2}{21}}$. Сравните сначала первые две дроби их перекрестным умножением.

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{10} & \frac{2}{21} \\ 21 & 20 \end{array}$$

Дробь $\frac{1}{10}$ больше дроби $\frac{2}{21}$, поскольку $21 > 20$, а следовательно, дробь $\frac{2}{21}$ можно отбросить. Затем сравните дроби $\frac{1}{10}$ и $\frac{3}{29}$ их перекрестным умножением.

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{10} & \frac{3}{29} \\ 29 & 30 \end{array}$$

Дробь $\frac{3}{29}$ больше дроби $\frac{1}{10}$, поскольку $30 > 29$.

20 Дробь $\mathbf{\frac{2}{7}}$ **меньше** дробей $\mathbf{\frac{1}{3}}$, $\mathbf{\frac{4}{13}}$ и $\mathbf{\frac{8}{25}}$**.** Сравните сначала первые две дроби их перекрестным умножением:

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{2}{7} \\ 7 & 6 \end{array}$$

Дробь $\frac{2}{7}$ меньше дроби $\frac{1}{3}$, поскольку $6 < 7$, а следовательно, дробь $\frac{1}{3}$ можно отбросить. Затем сравните дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{4}{13}$ их перекрестным умножением:

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{7} & \frac{4}{13} \\ 26 & 28 \end{array}$$

Дробь $\frac{2}{7}$ меньше дроби $\frac{4}{13}$, поскольку $26 < 28$, а следовательно, дробь $\frac{4}{13}$ можно отбросить. И, наконец, сравните дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{8}{25}$ их перекрестным умножением.

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{7} & \frac{8}{25} \\ 50 & 56 \end{array}$$

Дробь $\frac{2}{7}$ меньше дроби $\frac{8}{25}$, поскольку $50 < 56$. Таким образом, дробь $\frac{2}{7}$ — наименьшая из всех четырех сравниваемых здесь дробей.

21 **28**. Составьте сначала пропорцию на основании отношения овощей и фруктов, продаваемых на рынке:

$$\frac{\text{Овощи}}{\text{Фрукты}} = \frac{4}{5}.$$

Затем прирастите члены дроби $\frac{4}{5}$, чтобы число, обозначающее количество видов фруктов, стало равным 35:

$$\frac{\text{Овощи}}{\text{Фрукты}} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}.$$

Следовательно, если на рынке продается 35 разных видов фруктов, то на нем продается 28 разных видов овощей.

22 **63**. Составьте сначала пропорцию на основании отношения выставленных в художественной галерее скульптур и картин:

$$\frac{\text{Скульптуры}}{\text{Картины}} = \frac{2}{7}.$$

Затем прирастите члены дроби $\frac{2}{7}$, чтобы число, обозначающее количество скульптур, стало равным 18:

$$\frac{\text{Скульптуры}}{\text{Картины}} = \frac{2 \times 9}{7 \times 9} = \frac{18}{63}.$$

Таким образом, в художественной галерее выставлены 63 картины.

23 **208**. Составьте сначала пропорцию на основании отношения девочек и мальчиков, отдыхающих в летнем лагере:

$$\frac{\text{Девочки}}{\text{Мальчики}} = \frac{7}{9}.$$

Затем прирастите члены дроби $\frac{7}{9}$, чтобы число, обозначающее количество мальчиков, стало равным 117. При этом следует иметь в виду, что $117 \div 9 = 13$, поэтому $9 \times 13 = 117$.

$$\frac{\text{Девочки}}{\text{Мальчики}} = \frac{7 \times 13}{9 \times 13} = \frac{91}{117}.$$

Таким образом, в летнем лагере находится 91 девочка и 117 мальчиков, а всего — 208 детей.

24 **825 000 долларов**. Составьте сначала пропорцию на основании отношения финансирования бюджета города из государственного и муниципального источников:

$$\frac{\text{Государство}}{\text{Муниципалитет}} = \frac{3}{8}.$$

Затем прирастите члены дроби $\frac{3}{8}$, чтобы число, обозначающее сумму финансирования из муниципального источника, стало равным 600 000. При этом следует иметь в виду, что $600\,000 \div 8 = 75\,000$, поэтому $8 \times 75\,000 = 600\,000$.

$$\frac{\text{Государство}}{\text{Муниципалитет}} = \frac{3 \times 75\,000}{8 \times 75\,000} = \frac{225\,000}{600\,000}.$$

Таким образом, бюджет города финансируется на сумму 225 000 долл. из государственного источника и на сумму 600 000 долл. из муниципального источника, а всего он составляет 825 000 долл.

Глава 7

Основные арифметические операции над дробями

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Умножение и деление дробей

» Представление о различных способах сложения и вычитания дробей

» Выполнение основных арифметических операций над смешанными числами

Итак, усвоив основы дробей, изложенные в главе 6, вам потребуется знать, как выполнять четыре основные арифметические операции (сложения, вычитания, умножения и деления) над дробями и смешанными числами. И в этом вам поможет материал данной главы. Сначала в этой главе будет показано, как умножать и делить дроби (как ни странно, выполнить эти две операции проще всего). Затем поясняется, как складывать дроби с общим знаменателем (т.е. с одинаковым числом внизу дроби). Далее будут представлены способы сложения дробей с разными знаменателями, а затем пояснено, как вычитать дроби.

После этого основное внимание здесь будет сосредоточено на смешанных числах. Сначала будет рассмотрено умножение и деление, а затем более сложные операции сложения и вычитания смешанных чисел. Проработав материал этой главы, вы должны твердо знать, как выполнять основные арифметические операции над дробями и смешанными числами.

Умножение дробей — проще простого

Если бы в жизни все было так же просто, как и умножение дробей! Чтобы перемножить две дроби, достаточно выполнить следующие действия.

- Перемножьте *числители* (верхние числа) обеих дробей, чтобы получить числитель результирующей дроби.
- Перемножьте *знаменатели* (нижние числа) обеих дробей, чтобы получить знаменатель результирующей дроби.

ЗАПОМНИ!

Если умножаются правильные дроби, в итоге всегда получается правильная дробь, и поэтому ее не нужно преобразовывать в смешанное число, хотя и придется, возможно, сократить. (Подробнее о сокращении дробей см. в главе 6.)

СОВЕТ

Прежде чем перемножать дроби, выясните, можно ли сократить общие множители как в числителях, так и в знаменателях обеих дробей. (Это делается таким же образом, как при сокращении дробей.) Сократив общие множители перед умножением дробей, можно получить результирующую дробь, уже сокращенную до ее наименьших членов.

ПРИМЕР!

Задача. Перемножьте дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{9}$.

Решение. $\mathbf{\frac{8}{45}}$. Перемножьте сначала числители (верхние числа) обеих дробей, чтобы получить числитель результирующей дроби. Затем перемножьте знаменатели (нижние числа) обеих дробей, чтобы получить знаменатель результирующей дроби:

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{2\times4}{5\times9}=\frac{8}{45}.$$

В данном случае сокращать результирующую дробь не требуется.

Задача. Найдите произведение дробей $\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}$.

Решение. $\mathbf{\frac{5}{14}}$. Прежде чем перемножать дроби, обратите внимание на то, что числитель 4 и знаменатель 8 являются четными числами. Поэтому разделите эти числа на 2 таким же образом, как и при сокращении дробей:

$\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{4}.$

Числитель 2 и знаменатель 4 по-прежнему остаются четными числами, поэтому повторите процесс их сокращения:

$=\frac{1}{7}\times\frac{5}{2}.$

Теперь ни числители, ни знаменатели обеих дробей больше не содержат общие множители, поэтому они готовы к умножению. Итак, перемножьте сначала числители обеих дробей, чтобы получить числитель результирующей дроби, а затем знаменатели, чтобы получить ее знаменатель:

$\frac{1\times 5}{2\times 7}=\frac{5}{14}.$

Полученная в итоге дробь сокращена до наименьших членов, поскольку все общие множители исходных дробей уже сокращены.

1. Перемножьте дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{9}$.

2. Найдите произведение дробей $\frac{3}{8}\times\frac{6}{11}$.

3. Перемножьте дроби $\frac{2}{9}$ и $\frac{3}{10}$.

4. Найдите произведение дробей $\frac{9}{14}\times\frac{8}{15}$.

Переход к делению дробей

Математики постарались сделать деление дробей не таким сложным, как обычное деление целых чисел, изобретя способ перемножать их вместо того, чтобы делить. Следовательно, чтобы разделить одну дробь на другую, необходимо сменить постановку данной задачи с деления на умножение, как поясняется ниже.

1. **Смените знак деления на знак умножения.**
2. **Замените *вторую* дробь на обратную ей величину.**

   Поменяйте местами числитель (верхнее число) и знаменатель (нижнее число) второй дроби.
3. **Решите данную задачу, перемножив обе дроби.**

ЗАПОМНИ!

Результат деления дробей, возможно, придется сократить или преобразовать из неправильной дроби в смешанное число, как пояснялось в главе 6.

ПРИМЕР!

Задача. Разделите дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{7}$.

Решение. $1\frac{11}{24}$. Смените деление этих дробей на умножение:

$$\frac{5}{8} \div \frac{3}{7} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{3}.$$

Решите данную задачу, перемножив обе дроби:

$$\frac{5 \times 7}{8 \times 3} = \frac{35}{24}.$$

В итоге получается неправильная дробь, поскольку ее числитель больше знаменателя, поэтому преобразуйте ее в смешанное число. Для этого разделите числитель на знаменатель и расположите остаток слева вверху от знаменателя:

$$= 1\frac{11}{24}.$$

Задача. Разделите дроби $\frac{7}{10}$ и $\frac{2}{5}$.

Решение. $1\frac{3}{4}$. Смените деление этих дробей на умножение:

$$\frac{7}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{5}{2}.$$

Обратите внимание на то, что в знаменателе одной из дробей находится число 5, а в знаменателе другой — число 10. Поэтому их общий множитель 5 можно сократить, чтобы сменить данную задачу на следующую: $\frac{7}{2} \times \frac{1}{2}$. С другой стороны, можно перемножить сначала дроби, а затем сократить полученную в итоге дробь, как делается здесь. Поэтому перемножьте сначала обе дроби:

$$\frac{7 \times 5}{10 \times 2} = \frac{35}{20}.$$

На этот раз числа, находящиеся в числителе и знаменателе данной дроби, кратны 5, поэтому ее можно сократить:

$= \frac{7}{4}$.

Числитель результирующей дроби больше ее знаменателя, поэтому она является неправильной. Следовательно, преобразуйте ее в смешанное число:

$1\frac{3}{4}$.

5 Разделите дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{6}{7}$.

6 Найдите результат деления дробей $\frac{3}{5} \div \frac{9}{10}$.

7 Разделите дроби $\frac{8}{9}$ и $\frac{3}{10}$.

8 Решите задачу деления дробей $\frac{14}{15} \div \frac{7}{12}$.

Нахождение общего знаменателя при сложении дробей

В этом разделе сначала поясняется простой, а затем более сложный способ сложения дробей. Сложить дроби с одинаковым, или *общим*, знаменателем очень просто. Для этого достаточно сложить числители обеих дробей, оставив тот же самый знаменатель. Иногда полученную в итоге дробь, возможно, придется сократить до наименьших членов или преобразовать ее из неправильной дроби в смешанное число.

СОВЕТ

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, придется потрудиться чуть больше. В этом случае необходимо, по существу, прирастить члены одной или обеих дробей, чтобы согласовать знаменатели, прежде чем складывать дроби. И сделать это проще всего с помощью перекрестного умножения, автоматически переставляющего члены дроби. Ниже поясняется, как это делается.

1. **Выполните перекрестное умножение двух дробей, как пояснялось в главе 6.**

   Умножьте сначала числитель первой дроби на знаменатель второй дроби, а затем числитель второй дроби на знаменатель первой дроби.

2. **Составьте две дроби, имеющие общий знаменатель.**

   Перемножьте знаменатели обеих исходных дробей, чтобы получить новый общий знаменатель. Составьте две новые дроби, расположив над этим новым знаменателем результаты, полученные в п. 1.

3. **Сложите дроби, полученные в п. 2.**

   Сложите числители обеих дробей, оставив тот же самый знаменатель.

СОВЕТ

Если один знаменатель является кратным другому, найти общий знаменатель складываемых дробей можно очень быстро. Достаточно прирастить члены только той дроби, знаменатель которой меньше, чтобы знаменатели обеих дробей стали одинаковыми.

ПРИМЕР!

Задача. Найдите сумму дробей $\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$.

Решение. $1\frac{1}{2}$. У обеих складываемых дробей общий знаменатель 8, поэтому сложите их числители 5 и 7, чтобы получить числитель результирующей дроби, оставив тот же самый знаменатель:

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{5+7}{8}=\frac{12}{8}.$$

Числитель результирующей дроби больше ее знаменателя, поэтому она получается неправильной. Преобразуйте ее сначала в смешанное число, а затем сократите, как пояснялось в главе 6:

$$=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}.$$

Задача. Сложите дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{14}{15}$.

Решение. $1\frac{8}{15}$. Знаменатели у обеих складываемых дробей разные, но поскольку число 15 кратно 5, то в данном случае можно воспользоваться описанным ранее быстрым способом приведения к общему знаменателю. Итак, прирастите члены дроби $\frac{3}{5}$, чтобы ее знаменатель стал равным 15. Для этого умножьте числитель и знаменатель данной дроби на одно и то же число (в данном случае — на 3):

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times 3}{5\times 3}=\frac{9}{15}.$$

Теперь обе складываемые дроби имеют общий знаменатель, поэтому сложите их числители:

$$=\frac{9}{15}+\frac{14}{15}=\frac{9+14}{15}=\frac{23}{15}.$$

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$$=1\frac{8}{15}.$$

Задача. Чему равна сумма дробей $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$?

Решение. $\frac{9}{10}$. Выполните сначала перекрестное умножение складываемых дробей и сложите полученные результаты, чтобы найти числитель результирующей дроби.

Затем перемножьте знаменатели складываемых дробей, чтобы найти знаменатель результирующей дроби:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5+4}{10}=\frac{9}{10}$$

9 Сложите дроби $\frac{7}{9}$ и $\frac{8}{9}$.

10 Решите задачу сложения дробей $\frac{3}{7}+\frac{4}{11}$.

11 Найдите сумму дробей $\frac{5}{6}+\frac{7}{10}$.

12 Сложите дроби $\frac{8}{9}+\frac{17}{18}$.

⑬ Найдите сумму дробей $\frac{12}{13} + \frac{9}{14}$.

⑭ Сложите дроби $\frac{9}{10}$ и $\frac{47}{50}$.

⑮ Найдите сумму дробей $\frac{3}{17}$ и $\frac{10}{19}$.

⑯ Сложите дроби $\frac{3}{11} + \frac{5}{99}$.

Нахождение общего знаменателя при вычитании дробей

Дроби с одинаковым, или *общим*, знаменателем вычитать так же просто, как и складывать. Для этого достаточно вычесть числитель второй дроби из числителя первой дроби, оставив тот же самый знаменатель. Иногда получаемую в итоге дробь, возможно, придется сократить до наименьших членов.

СОВЕТ

Чтобы вычесть дроби с разными знаменателями, придется потрудиться чуть больше. В этом случае необходимо, по существу, прирастить члены одной или обеих дробей, чтобы привести их к общему знаменателю, прежде чем вычитать. И сделать это проще всего с помощью перекрестного умножения, как поясняется ниже.

1. **Выполните сначала перекрестное умножение обеих дробей, как пояснялось в главе 6, а затем составьте две дроби с общим знаменателем.**
2. **Вычтите результаты, полученные в п. 1.**

СОВЕТ

Если знаменатель одной из вычитаемых дробей является кратным знаменателю другой дроби, воспользуйтесь быстрым способом нахождения общего знаменателя. В частности, прирастите члены только той дроби, знаменатель которой меньше, чтобы сделать знаменатели обеих дробей одинаковыми.

ПРИМЕР!

Задача. Найдите разность дробей $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$.

Решение. $\frac{2}{3}$. Знаменатели обеих дробей одинаковы и равны 6, поэтому вычтите их числители 5 и 1, чтобы получить новый числитель, оставив тот же самый знаменатель:

$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}$.

Числитель и знаменатель результирующей дроби содержат четные числа, поэтому ее можно сократить на множитель 2:

$=\frac{2}{3}$

Задача. Найдите разность дробей $\frac{6}{7}-\frac{17}{28}$.

Решение. $\frac{1}{4}$. Знаменатели у обеих вычитаемых дробей разные, но поскольку число 28 кратно 7, в таком случае можно воспользоваться описанным выше быстрым способом приведения к общему знаменателю.

В частности, прирастите члены дроби $\frac{6}{7}$, чтобы ее знаменатель стал равным 28. А поскольку $28 \div 7 = 4$, то умножьте как числитель, так и знаменатель данной дроби на 4:

$$\frac{6}{7}=\frac{6\times 4}{7\times 4}=\frac{24}{28}.$$

Теперь обе дроби имеют одинаковый знаменатель, поэтому вычтите их числители, оставив тот же знаменатель:

$$=\frac{24}{28}-\frac{17}{28}=\frac{24-17}{28}=\frac{7}{28}.$$

Числитель и знаменатель результирующей дроби делятся на 7, поэтому ее можно сократить на множитель 7:

$$=\frac{1}{4}.$$

17 Вычтите дроби $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$.

18 Найдите разность дробей $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$.

19 Решите задачу вычитания дробей $\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$.

20 Вычтите дроби $\frac{10}{11}-\frac{4}{7}$.

21 Решите задачу вычитания дробей $\frac{1}{4}-\frac{5}{22}$.

22 Найдите разность дробей $\frac{13}{15}-\frac{14}{45}$.

23 Решите задачу вычитания дробей $\frac{11}{12}-\frac{73}{96}$.

24 Чему равна разность дробей $\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$.

Умножение и деление смешанных чисел

Чтобы перемножить или разделить два смешанных числа, их следует преобразовать сначала в неправильные дроби (см. главу 6), а затем перемножить или разделить таким же образом, как и любые другие дроби. И, наконец, результирующую дробь, возможно, придется сократить до наименьших членов или преобразовать обратно в смешанное число.

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно произведение смешанных чисел $2\frac{1}{5}\times 3\frac{1}{4}$?

Решение. $7\frac{3}{20}$. Прежде всего преобразуйте перемножаемые смешанные числа в неправильные дроби. С этой целью умножьте целую часть каждого смешанного числа на знаменатель его дробной части и сложите их произведение с числителем, расположив полученный результат над знаменателем:

$$2\frac{1}{5}=\frac{2\times5+1}{5}=\frac{11}{5},$$

$$3\frac{1}{4}=\frac{3\times4+1}{4}=\frac{13}{4}.$$

А теперь перемножьте обе дроби:

$$\frac{11}{5}\times\frac{13}{4}=\frac{11\times13}{5\times4}=\frac{143}{20}.$$

Полученная в итоге дробь является неправильной, поэтому преобразуйте ее обратно в смешанное число.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 20\overline{)143} \\ \underline{-140} \\ 3 \end{array}$$

Окончательный результат равен $7\frac{3}{20}$.

Задача. Чему равен результат деления смешанных чисел $3\frac{1}{2}\div 1\frac{1}{7}$?

Решение. $3\frac{1}{16}$. Прежде всего преобразуйте перемножаемые смешанные числа в неправильные дроби:

$$3\frac{1}{2}=\frac{3\times2+1}{2}=\frac{7}{2},$$

$$1\frac{1}{7}=\frac{7\times1+1}{7}=\frac{8}{7}.$$

А теперь разделите обе дроби:

$$\frac{7}{2}\div\frac{8}{7}=\frac{7}{2}\times\frac{7}{8}=\frac{49}{16}.$$

Полученная в итоге дробь является неправильной, поэтому преобразуйте ее обратно в смешанное число.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16\overline{)49} \\ \underline{-48} \\ 1 \end{array}$$

Окончательный результат равен $3\frac{1}{16}$.

25 Умножьте смешанные числа $2\frac{1}{3}$ и $1\frac{3}{7}$.

26 Найдите произведение смешанных чисел $2\frac{2}{5}\times 1\frac{5}{6}$.

27 Умножьте смешанные числа $4\frac{4}{5}$ и $3\frac{1}{8}$.

28 Вычислите результат деления смешанных чисел $4\frac{1}{2} \div 1\frac{5}{8}$.

29 Разделите смешанные числа $2\frac{1}{10}$ и $2\frac{1}{4}$.

30 Найдите результат деления смешанных чисел $1\frac{2}{7} \div 6\frac{3}{10}$.

Сложение смешанных чисел с переносом

Сложить смешанные числа на самом деле не труднее, чем дроби.

1. **Сложите дробные части смешанных чисел, сократив, если требуется, полученный результат.**
2. **Если в п. 1 получена неправильная дробь, преобразуйте ее в смешанное число, запишите его дробную часть, а целую часть перенесите влево на место целого числа.**
3. **Сложите целые части смешанных чисел, включая любое число, перенесенное из дробной части.**

ПРИМЕР!

Задача. Сложите смешанные числа $4\frac{1}{8} + 2\frac{3}{8}$.

Решение. $6\frac{1}{2}$. Прежде всего запишите слагаемые смешанные числа в столбик.

$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{8} \\ +2\frac{3}{8} \\ \hline \end{array}$$

Сложите дробные части смешанных чисел и сократите полученный результат:

$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Результирующая дробь оказывается правильной, поэтому перенос в целую часть суммарного целого числа не требуется. Далее сложите целые части смешанных чисел:

$4 + 2 = 6$.

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{8} \\ +2\frac{3}{8} \\ \hline 6\frac{1}{2} \end{array}$$

Задача. Сложите смешанные числа $5\frac{3}{4} + 4\frac{7}{9}$.

Решение. $10\frac{19}{36}$. Прежде всего запишите слагаемые смешанные числа в столбик.

$$\begin{array}{r} 5\frac{3}{4} \\ +4\frac{7}{9} \\ \hline \end{array}$$

Чтобы сложить дробные части смешанных чисел, приведите их к общему знаменателю, используя перекрестное умножение, как показано ниже. Новые числители таковы: $3 \times 9 = 27$ и $7 \times 4 = 28$, а новый общий знаменатель следующий: $4 \times 9 = 36$.

$$\begin{array}{cc} \frac{3}{4} & \frac{7}{9} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{27}{36} & \frac{28}{36} \end{array}$$

Теперь дробные части смешанных чисел можно сложить:

$\frac{27}{36} + \frac{28}{36} = \frac{55}{36}$.

Результирующая дробь оказывается неправильной, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$= 1\frac{19}{36}$.

Перенесите 1 из целой части этого смешанного числа в целую часть складываемого результата и сложите ее с целыми частями исходных смешанных чисел:

$1 + 5 + 4 = 10$.

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{5}\frac{27}{36} \\ +4\frac{28}{36} \\ \hline 10\frac{19}{36} \end{array}$$

31 Сложите смешанные числа $3\frac{1}{5}$ и $4\frac{2}{5}$.

32 Найдите сумму смешанных чисел $7\frac{1}{3}+1\frac{1}{6}$.

33 Сложите смешанные числа $12\frac{4}{9}$ и $7\frac{8}{9}$.

34 Найдите сумму смешанных чисел $5\frac{2}{3}$ и $9\frac{3}{5}$.

35 Сложите смешанные числа $13\frac{6}{7}+2\frac{5}{14}$.

36 Найдите сумму смешанных чисел $21\frac{9}{10}+38\frac{3}{4}$.

Вычитание смешанных чисел с займом

Следует признать, что большинству учащихся трудно дается вычитание смешанных чисел. Поэтому в текущем разделе предпринимается попытка сделать данный процесс как можно более простым и понятным.

ЗАПОМНИ!

Вычесть смешанные числа всегда проще, если знаменатели их дробных частей одинаковы. Если же они разные, то на первой стадии данного процесса следует *всегда* приводить дробные части смешанных чисел к общему знаменателю. (В главе 6 представлены два способа сделать это. Выберите тот, который вам больше всего подходит.)

Если оба вычитаемых смешанных числа имеют общий знаменатель, они уже готовы к вычитанию. Сначала в этом разделе будет рассмотрен простейший способ вычитания смешанных чисел. Ниже поясняется, как это сделать в том случае, если дробная часть первого смешанного числа *больше*, чем у второго числа.

1. **Найдите разность дробных частей смешанных чисел, сократив результат по мере надобности.**
2. **Найдите разность целых частей смешанных чисел.**

Вычесть смешанные числа становится труднее, если требуется заем из целой части в дробную. Такой заем делается таким же образом, как и при вычитании целых чисел (подробнее об этом см. в главе 1).

Ниже поясняется, как вычесть смешанные числа, если дробная часть первого из них меньше, чем у второго.

1. **Займите 1 из целой части первого смешанного числа и прибавьте ее к дробной части этого числа, преобразовав последнюю в смешанное число.**
2. **Преобразуйте это новое смешанное число в неправильную дробь.**
3. **Вычтите дробные части смешанных чисел, сократив результат по мере надобности.**
4. **Вычтите целые части смешанных чисел.**

ПРИМЕР!

Задача. Вычтите смешанные числа $8\frac{4}{5} - 6\frac{3}{5}$.

Решение. $2\frac{1}{5}$. Прежде всего запишите вычитаемые смешанные числа в столбик.

$$\begin{array}{r} 8\frac{4}{5} \\ -6\frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Дробные части вычитаемых смешанных чисел уже имеют общий знаменатель, поэтому вычтите их:

$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

Затем вычтите целые части смешанных чисел:

$8 - 6 = 2$.

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 8\frac{4}{5} \\ -6\frac{3}{5} \\ \hline 2\frac{1}{5} \end{array}$$

Задача. Вычтите смешанные числа $9\frac{1}{6} - 3\frac{5}{6}$.

Решение. $5\frac{1}{3}$. Прежде всего запишите вычитаемые смешанные числа в столбик.

$$\begin{array}{r} 9\frac{1}{6} \\ -3\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$$

Дробные части вычитаемых смешанных чисел уже имеют общий знаменатель, поэтому вычтите их. Обратите внимание на то, что дробная часть $\frac{1}{6}$ первого смешанного числа меньше дробной части $\frac{5}{6}$ второго числа, поэтому займите 1 из целой части 9 первого числа, как показано ниже.

$$\begin{array}{r} \overset{8}{\cancel{9}}1\frac{1}{6} \\ -3\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$$

Далее преобразуйте смешанное число $1\frac{1}{6}$ в неправильную дробь.

$$\begin{array}{r} 8\frac{7}{6} \\ -3\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$$

А теперь можно вычесть дробные части смешанных чисел и сократить полученный результат:

$\frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Далее вычтите целые части обоих смешанных чисел:

$8 - 3 = 5$.

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 8\frac{7}{6} \\ -3\frac{5}{6} \\ \hline 5\frac{1}{3} \end{array}$$

Задача. Вычтите смешанные числа $19\frac{4}{11} - 6\frac{3}{8}$.

Решение. $12\frac{87}{88}$. Прежде всего запишите вычитаемые смешанные числа в столбик.

$$\begin{array}{r} 19\frac{4}{11} \\ -6\frac{3}{8} \\ \hline \end{array}$$

Дробные части вычитаемых смешанных чисел имеют разные знаменатели, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением, как показано ниже. В итоге новые числители должны стать следующими:
$4 \times 8 = 32$ и $11 \times 3 = 33$, а новый общий знаменатель таким:
$11 \times 8 = 88$.

$$\begin{array}{cc} \frac{4}{11} & \frac{3}{8} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{32}{88} & \frac{33}{88} \end{array}$$

Ниже данная задача снова записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 19\frac{32}{88} \\ -6\frac{33}{88} \\ \hline \end{array}$$

Дробная часть $\frac{32}{88}$ первого смешанного числа меньше дробной части $\frac{33}{88}$ второго числа, поэтому займите 1 из целой части 19 первого числа, прежде чем выполнять вычитание, как показано ниже.

$$\begin{array}{r} \overset{18}{\cancel{19}}1\frac{32}{88} \\ -6\frac{33}{88} \\ \hline \end{array}$$

Далее преобразуйте смешанное число $1\frac{32}{88}$ в неправильную дробь:

$\frac{120}{88}$.

А теперь можно вычесть дробные и целые части обоих смешанных чисел, чтобы получить искомый результат.

$$\begin{array}{r} 18\frac{120}{88} \\ -6\frac{33}{88} \\ \hline 12\frac{87}{88} \end{array}$$

37 Вычтите смешанные числа $5\frac{7}{9}-2\frac{4}{9}$.

38 Найдите разность смешанных чисел $9\frac{1}{8}-7\frac{5}{8}$.

39 Вычтите смешанные числа $11\frac{3}{4}-4\frac{2}{3}$.

40 Выявите разность смешанных чисел $16\frac{2}{5}-8\frac{4}{9}$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1. $\frac{2}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{2\times 7}{3\times 9}=\mathbf{\frac{14}{27}}$.

2. $\frac{3}{8}\times\frac{6}{11}=\mathbf{\frac{9}{44}}$. Перемножьте числители и знаменатели обеих дробей:

   $\frac{3}{8}\times\frac{6}{11}=\frac{3\times 6}{8\times 11}=\frac{18}{88}$.

   В числителе и знаменателе результирующей дроби находятся четные числа, поэтому сократите их на множитель 2:

   $=\frac{9}{44}$.

3. $\frac{2}{9}\times\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{1}{15}}$. Сначала сократите общие множители. В числителе первой дроби и знаменателе второй дроби находятся четные числа 2 и 10 соответственно, поэтому разделите их на 2:

   $\frac{2}{9}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{5}$.

   Еще раз сократите общие множители. В знаменателе первой дроби и в числителе второй дроби находятся нечетные числа, кратные 3, поэтому разделите их на 3:

   $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$.

   А теперь перемножьте числители и знаменатели обеих дробей:

   $=\frac{1\times 1}{3\times 5}=\frac{1}{15}$.

   Полученная в итоге дробь уже сокращена, поскольку были предварительно сокращены перемножаемые дроби.

4. $\frac{9}{14}\times\frac{8}{15}=\mathbf{\frac{12}{35}}$. Сначала сократите общие множители. В частности, четные числа 14 и 8 кратны 2, а нечетные числа 9 и 15 кратны 3, поэтому разделите их на 2 и 3 соответственно.

   $\frac{9}{14}\times\frac{8}{15}=$

   $=\frac{9}{7}\times\frac{4}{15}=$

   $=\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}$.

   А теперь перемножьте числители и знаменатели обеих дробей:

   $=\frac{3\times 4}{7\times 5}=\frac{12}{35}$.

5 $\frac{1}{4} \div \frac{6}{7} = \mathbf{\frac{7}{24}}$. Прежде всего смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$\frac{1}{4} \div \frac{6}{7} = \frac{1}{4} \times \frac{7}{6}$.

А теперь решите данную задачу, перемножив обе дроби:

$= \frac{1 \times 7}{4 \times 6} = \frac{7}{24}$.

6 $\frac{3}{5} \div \frac{9}{10} = \mathbf{\frac{2}{3}}$. Прежде всего смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$\frac{3}{5} \div \frac{9}{10} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$.

А теперь решите данную задачу, перемножив обе дроби:

$= \frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{30}{45}$.

Оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе результирующей дроби, кратны 5, поэтому разделите их на 5:

$= \frac{6}{9}$.

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе результирующей дроби, кратны 3, поэтому разделите их на 3, чтобы сократить данную дробь окончательно:

$= \frac{2}{3}$.

7 $\frac{8}{9} \div \frac{3}{10} = \mathbf{2\frac{26}{27}}$. Прежде всего смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$\frac{8}{9} \div \frac{3}{10} = \frac{8}{9} \times \frac{10}{3}$.

А теперь решите данную задачу, перемножив обе дроби:

$= \frac{8 \times 10}{9 \times 3} = \frac{80}{27}$.

Числитель результирующей дроби больше ее знаменателя, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$= 2\frac{26}{27}$.

8 $\frac{14}{15} \div \frac{7}{12} = \mathbf{1\frac{3}{5}}$. Прежде всего смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$\frac{14}{15} \div \frac{7}{12} = \frac{14}{15} \times \frac{12}{7}$.

А теперь решите данную задачу, перемножив обе дроби:

$= \frac{14 \times 12}{15 \times 7} = \frac{168}{105}$.

Числитель результирующей дроби больше ее знаменателя, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$=1\frac{63}{105}$.

Оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 3, поэтому разделите их на 3:

$=1\frac{21}{35}$.

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 7, поэтому разделите их на 7, чтобы получить окончательный результат:

$=1\frac{3}{5}$.

9 $\frac{7}{9}+\frac{8}{9}=\mathbf{1\frac{2}{3}}$. Знаменатели обеих дробей одинаковы, поэтому сложите их числители:

$\frac{7}{9}+\frac{8}{9}=\frac{15}{9}$.

Оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе результирующей дроби, кратны 3, поэтому разделите их на 3:

$=\frac{5}{3}$.

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число, чтобы получить окончательный результат:

$=1\frac{2}{3}$.

10 $\frac{3}{7}+\frac{4}{11}=\mathbf{\frac{61}{77}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: 3 × 11 = 33 и 4 × 7 = 28, а новый общий знаменатель таким: 7 × 1 = 77.

$$\begin{array}{cc} \frac{3}{7} & \frac{4}{11} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{33}{77} & \frac{28}{77} \end{array}$$

А теперь можете сложить обе дроби:

$\frac{33}{77}+\frac{28}{77}=\frac{61}{77}$.

11 $\frac{5}{6}+\frac{7}{10}=\mathbf{1\frac{8}{15}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: 5 × 10 = 50 и 7 × 6 = 42, а новый общий знаменатель таким: 6 × 10 = 60.

$$\begin{array}{cc} \frac{5}{6} & \frac{7}{10} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{50}{60} & \frac{42}{60} \end{array}$$

А теперь можете сложить обе дроби:

$$\frac{50}{60}+\frac{42}{60}=\frac{92}{60}.$$

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 2, поэтому разделите их на 2:

$$=\frac{46}{30}.$$

Они по-прежнему кратны 2, поэтому разделите их снова на 2:

$$=\frac{23}{15}.$$

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число, чтобы получить окончательный результат:

$$=1\frac{8}{15}.$$

12 $\frac{8}{9}+\frac{17}{18}=\mathbf{1\frac{5}{6}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, но поскольку число 18 кратно 9, то сложить обе дроби можно быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{8}{9}$, умножив их на 2, чтобы ее знаменатель стал равным 18:

$$\frac{8}{9}=\frac{8\times 2}{9\times 2}=\frac{16}{18}.$$

Теперь обе дроби имеют одинаковый знаменатель, поэтому сложите их числители, оставив тот же самый знаменатель:

$$=\frac{16}{18}+\frac{17}{18}=\frac{33}{18}.$$

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 3, поэтому разделите их на 3:

$$=\frac{11}{6}.$$

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число, чтобы получить окончательный результат:

$$=1\frac{5}{6}.$$

13 $\frac{12}{13}+\frac{9}{14}=\mathbf{1\frac{103}{182}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $12 \times 14 = 168$ и $13 \times 9 = 117$, а новый общий знаменатель таким: $13 \times 14 = 182$.

$$\begin{array}{cc} \frac{12}{13} & \frac{9}{14} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{168}{182} & \frac{117}{182} \end{array}$$

А теперь можете сложить обе дроби:

$$\frac{168}{182}+\frac{117}{182}=\frac{285}{182}.$$

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число, чтобы получить окончательный результат:

$$=1\frac{103}{182}.$$

14 $\frac{9}{10}+\frac{47}{50}=\mathbf{1\frac{21}{25}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, но поскольку число 50 кратно 10, то сложить обе дроби можно быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{9}{10}$, умножив их на 5, чтобы ее знаменатель стал равным 50:

$$\frac{9}{10}=\frac{9\times5}{10\times5}=\frac{45}{50}.$$

Теперь можете сложить обе дроби, поскольку у них одинаковый знаменатель:

$$=\frac{45}{50}+\frac{47}{50}=\frac{92}{50}.$$

Оба четных числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 2, поэтому разделите их на 2:

$$=\frac{46}{25}.$$

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число, чтобы получить окончательный результат:

$$=1\frac{21}{25}.$$

15 $\frac{3}{17}+\frac{10}{19}=\mathbf{\frac{227}{323}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $3\times19=57$ и $10\times17=170$, а новый общий знаменатель таким: $17\times19=323$.

$$\begin{array}{cc} \frac{3}{17} & \frac{10}{19} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{57}{323} & \frac{170}{323} \end{array}$$

Теперь можете сложить обе дроби:

$$\frac{57}{323}+\frac{170}{323}=\frac{227}{323}.$$

16 $\frac{3}{11}+\frac{5}{99}=\mathbf{\frac{32}{99}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, но поскольку число 99 кратно 11, то сложить обе дроби можно быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{3}{11}$, умножив их на 9, чтобы ее знаменатель стал равным 99:

$\frac{3}{11}=\frac{3\times9}{11\times9}=\frac{27}{99}$.

А теперь можете сложить обе дроби:

$\frac{27}{99}+\frac{5}{99}=\frac{32}{99}$.

17 $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{2}{5}}$. Знаменатели обеих вычитаемых дробей одинаковы, поэтому вычтите их числители, оставив тот же самый знаменатель:

$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$.

Оба четных числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 2, поэтому разделите их на 2, чтобы получить окончательный результат:

$=\frac{2}{5}$.

18 $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{7}{15}}$. Знаменатели вычитаемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: 4 × 3 = 12 и 1 × 5 = 5, а новый общий знаменатель таким: 5 × 3 = 15.

$$\begin{array}{cc} \frac{4}{5} & \frac{1}{3} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{12}{15} & \frac{5}{15} \end{array}$$

Теперь можете вычесть обе дроби:

$\frac{12}{15}-\frac{5}{15}=\frac{7}{15}$.

19 $\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\mathbf{\frac{1}{4}}$. Знаменатели вычитаемых дробей отличаются, но поскольку число 12 кратно 6, то вычесть обе дроби можно быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{5}{6}$, умножив их на 2, чтобы ее знаменатель стал равным 12:

$\frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}$.

Теперь обе дроби имеют одинаковый знаменатель, поэтому вычтите их:

$\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}$.

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 3, поэтому разделите их на 3, чтобы получить окончательный результат:

$=\frac{1}{4}.$

20 $\frac{10}{11}-\frac{4}{7}=\mathbf{\frac{26}{77}}$. Знаменатели вычитаемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $10 \times 7 = 70$ и $4 \times 11 = 44$, а новый общий знаменатель таким: $11 \times 7 = 77$.

$$\begin{array}{cc} \frac{10}{11} & \frac{4}{7} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{70}{77} & \frac{44}{77} \end{array}$$

Теперь можете вычесть обе дроби:

$\frac{70}{77}-\frac{44}{77}=\frac{26}{77}.$

21 $\frac{1}{4}-\frac{5}{22}=\mathbf{\frac{1}{44}}$. Знаменатели вычитаемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $1 \times 22 = 22$ и $5 \times 4 = 20$, а новый общий знаменатель таким: $4 \times 22 = 88$.

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{5}{22} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{22}{88} & \frac{20}{88} \end{array}$$

Теперь можете вычесть обе дроби:

$\frac{22}{88}-\frac{20}{88}=\frac{2}{88}.$

Оба четных числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 2, поэтому разделите их на 2, чтобы получить окончательный результат:

$=\frac{1}{44}.$

22 $\frac{13}{15}-\frac{14}{45}=\mathbf{\frac{5}{9}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, но поскольку число 45 кратно 15, то вычесть обе дроби можно быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{13}{15}$, умножив их на 3, чтобы ее знаменатель стал равным 45:

$\frac{13}{15}=\frac{13 \times 3}{15 \times 3}=\frac{39}{45}.$

Теперь обе дроби имеют одинаковый знаменатель, поэтому вычтите их:

$$\frac{39}{45}-\frac{14}{45}=\frac{25}{45}.$$

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 5, поэтому разделите их на 5, чтобы получить окончательный результат:

$$=\frac{5}{9}.$$

23 $\frac{11}{12}-\frac{73}{96}=\mathbf{\frac{5}{32}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, но поскольку число 96 кратно 12, то вычесть обе дроби можно быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{11}{12}$, умножив их на 8, чтобы ее знаменатель стал равным 96:

$$\frac{11}{12}=\frac{11\times 8}{12\times 8}=\frac{88}{96}.$$

Теперь обе дроби можно вычесть:

$$\frac{88}{96}-\frac{73}{96}=\frac{15}{96}.$$

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 3, поэтому разделите их на 3, чтобы получить окончательный результат:

$$=\frac{5}{32}.$$

24 $\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}=\mathbf{\frac{1}{999000}}$. Знаменатели складываемых дробей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением.

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{999} & \frac{1}{100} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{1000}{999000} & \frac{999}{999000} \end{array}$$

Теперь можете вычесть обе дроби:

$$\frac{1000}{999000}-\frac{999}{999000}=\frac{1}{999000}.$$

25 $2\frac{1}{3}\times 1\frac{3}{7}=\mathbf{3\frac{1}{3}}$. Преобразуйте оба смешанных числа в неправильные дроби:

$$2\frac{1}{3}=\frac{2\times 3+1}{3}=\frac{7}{3},$$

$$1\frac{3}{7}=\frac{1\times 7+3}{7}=\frac{10}{7}.$$

А теперь подготовьте обе дроби к умножению:

$$\frac{7}{3}\times\frac{10}{7}.$$

Прежде чем умножать обе дроби, числитель первой из них и знаменатель второй можно сократить на 7:

$=\frac{1}{3}\times\frac{10}{1}=\frac{10}{3}$.

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3\overline{)\,10} \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$$

Окончательно получается смешанное число $3\frac{1}{3}$.

26 $2\frac{2}{5}\times1\frac{5}{6}=\mathbf{4\frac{2}{5}}$. Преобразуйте оба смешанных числа в неправильные дроби:

$2\frac{2}{5}=\frac{2\times5+2}{5}=\frac{12}{5}$,

$1\frac{5}{6}=\frac{1\times6+5}{6}=\frac{11}{6}$.

А теперь подготовьте обе дроби к умножению:

$\frac{12}{5}\times\frac{11}{6}$.

Прежде чем умножать обе дроби, числитель первой из них и знаменатель второй можно сократить на 6:

$=\frac{12}{5}\times\frac{11}{6}=\frac{22}{5}$.

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\overline{)\,22} \\ \underline{-20} \\ 2 \end{array}$$

Окончательно получается смешанное число $4\frac{2}{5}$.

27 $4\frac{4}{5}\times3\frac{1}{8}=\mathbf{15}$. Преобразуйте оба смешанных числа в неправильные дроби:

$4\frac{4}{5}=\frac{4\times5+4}{5}=\frac{24}{5}$,

$3\frac{1}{8}=\frac{3\times8+1}{8}=\frac{25}{8}$.

А теперь подготовьте обе дроби к умножению:

$\frac{24}{5}\times\frac{25}{8}$.

Прежде чем умножать обе дроби, их числители и знаменатели можно сократить на 8 и 5 соответственно:

$=\frac{24}{1}\times\frac{5}{8}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{1}=15$.

28 $4\frac{1}{2} \div 1\frac{5}{8} = \mathbf{2\frac{10}{13}}$. Преобразуйте оба смешанных числа в неправильные дроби:

$$4\frac{1}{2} = \frac{4 \times 2 + 1}{2} = \frac{9}{2},$$

$$1\frac{5}{8} = \frac{1 \times 8 + 5}{8} = \frac{13}{8}.$$

А теперь подготовьте обе дроби к делению:

$\frac{9}{2} \div \frac{13}{8}$.

Смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$\frac{9}{2} \times \frac{8}{13}$.

Сократите знаменатель первой дроби и числитель второй на 2, а затем перемножьте их:

$= \frac{9}{1} \times \frac{4}{13} = \frac{36}{13}$.

В итоге получается неправильная дробь, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$= 2\frac{10}{13}$.

29 $2\frac{1}{10} \div 2\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{14}{15}}$. Преобразуйте оба смешанных числа в неправильные дроби:

$$2\frac{1}{10} = \frac{2 \times 10 + 1}{10} = \frac{21}{10},$$

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}.$$

А теперь подготовьте обе дроби к делению:

$\frac{21}{10} \div \frac{9}{4}$.

Смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$= \frac{21}{10} \times \frac{4}{9}$.

Прежде чем умножать обе дроби, их числители и знаменатели можно сократить на 2 и 3 соответственно:

$= \frac{21}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{15}$.

30 $1\frac{2}{7} \div 6\frac{3}{10} = \mathbf{\frac{10}{49}}$. Преобразуйте оба смешанных числа в неправильные дроби:

$$1\frac{2}{7} = \frac{1 \times 7 + 2}{7} = \frac{9}{7},$$

$$6\frac{3}{10} = \frac{6 \times 10 + 3}{10} = \frac{63}{10}.$$

$$1\frac{2}{7} = \frac{1 \times 7 + 2}{7} = \frac{9}{7},$$

$$6\frac{3}{10} = \frac{6 \times 10 + 3}{10} = \frac{63}{10}.$$

А теперь подготовьте обе дроби к делению:

$$\frac{9}{7} \div \frac{63}{10}.$$

Смените деление этих дробей на умножение, чтобы умножить первую дробь на величину, обратную второй дроби:

$$= \frac{9}{7} \times \frac{10}{63}.$$

Прежде чем умножать обе дроби, их числители и знаменатели можно сократить на 9:

$$= \frac{1}{7} \times \frac{10}{7} = \frac{10}{49}.$$

31 $3\frac{1}{5} + 4\frac{2}{5} = \mathbf{7\frac{3}{5}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{5} \\ +4\frac{2}{5} \\ \hline \end{array}$$

Сложите дробные части смешанных чисел:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Полученная в итоге дробь оказывается правильной, и поэтому перенос в целую часть суммарного целого числа не требуется. Далее сложите целые части смешанных чисел:

$3 + 4 = 7.$

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{5} \\ +4\frac{2}{5} \\ \hline 7\frac{3}{5} \end{array}$$

32 $7\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6} = \mathbf{8\frac{1}{2}}$. Прежде всего подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 7\frac{1}{3} \\ +1\frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Затем сложите дробные части смешанных чисел. Знаменатели дробных частей складываемых смешанных чисел отличаются, но поскольку число 6 кратно 3, то дробные части обоих чисел можно сложить быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{1}{3}$, умножив их на 2, чтобы ее знаменатель стал равным 6:

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}.$

Теперь дробные части обоих смешанных чисел можно сложить, сократив полученный результат:

$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

Полученная в итоге дробь оказывается правильной, и поэтому перенос в целую часть суммарного целого числа не требуется. Далее сложите целые части смешанных чисел:

$7 + 1= 8.$

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 7\frac{2}{6} \\ +1\frac{1}{6} \\ \hline 8\frac{1}{2} \end{array}$$

33 $12\frac{4}{9}+7\frac{8}{9}=\mathbf{20\frac{1}{3}}$. Прежде всего подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 12\frac{4}{9} \\ +7\frac{8}{9} \\ \hline \end{array}$$

Сложите дробные части обоих смешанных чисел, сократив полученный результат:

$\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$

Полученная в итоге дробь оказывается неправильной, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$=1\frac{1}{3}.$

Перенесите 1 из целой части этого смешанного числа в целую часть складываемого результата и сложите ее с целыми частями исходных смешанных чисел:

$1 + 12 + 7 = 20.$

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}2\frac{4}{9} \\ +7\frac{8}{9} \\ \hline 20\frac{1}{3} \end{array}$$

34 $5\frac{2}{3}+9\frac{3}{5}=\mathbf{15\frac{4}{15}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 5\frac{2}{3} \\ +9\frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Сложите сначала дробные части обоих смешанных чисел. Знаменатели складываемых дробных частей отличаются, поэтому приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $5 \times 2 = 10$ и $3 \times 3 = 9$, а новый общий знаменатель таким: $3 \times 5 = 15$.

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{10}{15} & \frac{9}{15} \end{array}$$

Теперь можете сложить дробные части обоих смешанных чисел:

$\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{19}{15}.$

Полученная в итоге дробь оказывается неправильной, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$=1\frac{4}{15}.$

Перенесите 1 из целой части этого смешанного числа в целую часть складываемого результата и сложите ее с целыми частями исходных смешанных чисел:

$1 + 5 + 9 = 15.$

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{5}\,\frac{10}{15} \\ +9\,\frac{9}{15} \\ \hline 15\,\frac{4}{15} \end{array}$$

35 $13\frac{6}{7}+2\frac{5}{14}=\mathbf{16\frac{3}{14}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 13\,\frac{6}{7} \\ +2\,\frac{5}{14} \\ \hline \end{array}$$

Сложите сначала дробные части обоих смешанных чисел. Знаменатели складываемых дробных частей отличаются, но поскольку число 14 кратно 7, то дробные части обоих чисел можно сложить быстрым способом. С этой целью прирастите члены дроби $\frac{6}{7}$, умножив их на 2, чтобы ее знаменатель стал равным 14:

$\frac{6}{7}=\frac{12}{14}$.

Теперь можно сложить дробные части обоих смешанных чисел:

$\frac{12}{14}+\frac{5}{14}=\frac{17}{14}$.

Полученная в итоге дробь оказывается неправильной, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$1\frac{3}{14}$.

Перенесите 1 из целой части этого смешанного числа в целую часть складываемого результата и сложите ее с целыми частями исходных смешанных чисел:

$1 + 13 + 2 = 16$.

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 1\overset{1}{3}\,\frac{12}{14} \\ +2\,\frac{5}{14} \\ \hline 16\,\frac{3}{14} \end{array}$$

36 $21\frac{9}{10}+38\frac{3}{4}=\mathbf{60\frac{13}{20}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 21\frac{9}{10} \\ +38\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

Чтобы сложить дробные части обоих смешанных чисел, приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $9 \times 4 = 36$ и $3 \times 10 = 30$, а новый общий знаменатель таким: $10 \times 4 = 40$.

$$\begin{array}{cc} \frac{9}{10} & \frac{3}{4} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{36}{40} & \frac{30}{40} \end{array}$$

Теперь можете сложить дробные части обоих смешанных чисел:

$\frac{36}{40}+\frac{30}{40}=\frac{66}{40}$.

Оба числа, оставшиеся в числителе и знаменателе дробной части результирующего смешанного числа, кратны 2, поэтому разделите их на 2:

$=\frac{33}{20}$.

Полученная в итоге дробь оказывается неправильной, поэтому преобразуйте ее в смешанное число:

$=1\frac{13}{20}$.

Перенесите 1 из целой части этого смешанного числа в целую часть складываемого результата и сложите ее с целыми частями исходных смешанных чисел:

$1 + 21 + 38 = 60$.

Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{21}\frac{36}{40} \\ +38\frac{30}{40} \\ \hline 60\frac{13}{20} \end{array}$$

37 $5\frac{7}{9}-2\frac{4}{9}=\mathbf{3\frac{1}{3}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 5\frac{7}{9} \\ -2\frac{4}{9} \\ \hline \end{array}$$

Вычтите дробные части обоих смешанных чисел, сократив полученный результат:
$\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.
Вычтите целые части обоих смешанных чисел:
$5-2=3$.
Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 5\frac{7}{9} \\ -\,2\frac{4}{9} \\ \hline 3\frac{1}{3} \end{array}$$

38 $9\frac{1}{8}-7\frac{5}{8}=\mathbf{1\frac{1}{2}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 9\frac{1}{8} \\ -7\frac{5}{8} \\ \hline \end{array}$$

Дробная часть первого смешанного числа $\frac{1}{8}$ меньше дробной части второго числа $\frac{5}{8}$, поэтому необходимо занять 1 из целой части 9 первого числа, прежде чем выполнять вычитание.

$$\begin{array}{r} \overset{8}{\cancel{9}}1\frac{1}{8} \\ -\,7\frac{5}{8} \\ \hline \end{array}$$

Преобразуйте смешанное число $1\frac{1}{8}$ в неправильную дробь.

$$\begin{array}{r} 8\,\frac{9}{8} \\ -7\,\frac{5}{8} \\ \hline \end{array}$$

Теперь можно вычесть дробные части обоих смешанных чисел и сократить полученный результат:
$\frac{9}{8}-\frac{5}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.
Вычтите целые части обоих смешанных чисел:
$8-7=1$.
Ниже вся решаемая задача записана в столбик.

$$\begin{array}{r} 8\frac{9}{8} \\ -\,7\frac{5}{8} \\ \hline 1\frac{1}{2} \end{array}$$

39 $11\frac{3}{4} - 4\frac{2}{3} = \mathbf{7\frac{1}{12}}$. Подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 11\frac{3}{4} \\ -4\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

Чтобы вычесть дробные части обоих смешанных чисел, приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $3 \times 3 = 9$ и $2 \times 4 = 8$, а новый общий знаменатель таким: $4 \times 3 = 12$.

$$\begin{array}{cc} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{9}{12} & \frac{8}{12} \end{array}$$

Дробная часть первого смешанного числа $\frac{9}{12}$ больше дробной части второго числа $\frac{8}{12}$, и поэтому заем из целой части первого числа перед вычитанием не требуется.

$$\begin{array}{r} 11\frac{9}{12} \\ -4\frac{8}{12} \\ \hline 7\frac{1}{12} \end{array}$$

40 $16\frac{2}{5} - 8\frac{4}{9} = \mathbf{7\frac{43}{45}}$. Прежде всего подготовьте данную задачу к решению в столбик.

$$\begin{array}{r} 16\frac{2}{5} \\ -8\frac{4}{9} \\ \hline \end{array}$$

Чтобы вычесть дробные части обоих смешанных чисел, приведите их к общему знаменателю перекрестным умножением. В итоге новые числители должны стать следующими: $2 \times 9 = 18$ и $4 \times 5 = 20$, а новый общий знаменатель таким: $5 \times 9 = 45$.

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{5} & \frac{4}{9} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{18}{45} & \frac{20}{45} \end{array}$$

Дробная часть первого смешанного числа $\frac{18}{45}$ меньше дробной части второго числа $\frac{20}{45}$, и поэтому необходимо занять 1 из целой части 16 первого числа, прежде чем выполнять вычитание.

$$\begin{array}{r} \overset{15}{\cancel{16}}\,1\frac{18}{45} \\ -8\frac{20}{45} \\ \hline \end{array}$$

Преобразуйте смешанное число $1\frac{18}{45}$ в неправильную дробь.

$$\begin{array}{r} 15\frac{63}{45} \\ -8\frac{20}{45} \\ \hline \end{array}$$

А теперь можно выполнить вычитание.

$$\begin{array}{r} 15\frac{63}{45} \\ -8\frac{20}{45} \\ \hline 7\frac{43}{45} \end{array}$$

Глава 8

Освоение десятичных дробей

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Представление о принципе действия разрядного значения в десятичных дробях

» Перемещение десятичной запятой при умножении и делении десятичных дробей на степень числа десять

» Округление с точностью до заданного десятичного знака

» Выполнение основных арифметических операций над десятичными дробями

» Взаимное преобразование простых и десятичных дробей

Десятичные дроби, как и простые, служат для обозначения отдельных частей целого, т.е. положительных чисел меньше 1. Десятичной дробью можно обозначить любую дробную величину. Как правило, десятичные дроби служат для представления денежных сумм, и поэтому вам, вероятно, хорошо известно, что такое десятичная запятая, обозначающая значение меньше одной денежной единицы в национальной валюте.

Сначала в этой главе приводятся основные сведения о десятичных дробях и показывается, как выполняется взаимное преобразование простых и десятичных дробей. После этого поясняется, как выполнять четыре основные операции (сложения, вычитания, умножения и деления) над десятичными дробями.

И в завершение главы на примерах взаимного преобразования простых и десятичных дробей поясняются отличия *конечной десятичной дроби* (с ограниченным числом разрядов) от *периодической десятичной дроби* (с бесконечно повторяющейся последовательностью разрядов).

Введение в основы десятичных дробей

Обращаться с десятичными дробями проще, чем с простыми, поскольку первые больше похожи на целые числа, чем последние. Разрядное значение применяется в десятичных дробях таким же образом, как и в целых числах. Но в десятичной дроби каждый разряд обозначает часть целого. Рассмотрим приведенную ниже таблицу.

Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы	Десятичная запятая	Десятые	Сотые	Тысячные
				,			

Обратите внимание на то, что наименования разрядов десятичной дроби слева направо связаны с наименованиями разных простых дробей: десятых $\left(\frac{1}{10}\right)$, сотых $\left(\frac{1}{100}\right)$, тысячных $\left(\frac{1}{1000}\right)$ и т.д.

Используя приведенную выше таблицу, можно *развернуть* десятичную дробь в виде суммы. Такое развертывание позволяет лучше понять, каким образом составляется десятичная дробь. Например, число 12,011 равнозначно числу $10+2+\frac{0}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$.

В десятичной дроби любой нуль, находящийся справа как от десятичной запятой, так и от последней ненулевой цифры, называется *незначащим нулем*. Например, последний нуль в десятичной дроби 0,070 является незначащим. Этот нуль можно благополучно опустить, не меняя значение десятичной дроби. Но первый нуль после десятичной запятой в данной дроби является *значащим*, и поэтому его нельзя опустить.

СОВЕТ

Любое целое число можно выразить десятичной дробью, добавив к нему справа десятичную запятую и конечный нуль. Например:

7 = 7,0;	12 = 12,0;	1568 = 1568,0.

В главе 2 были представлены степени числа десять: 1, 10, 100, 1000 и т.д. Перемещение десятичной запятой *вправо* равнозначно умножению десятичной дроби на степень числа десять. Например:

» Перемещение десятичной запятой на один разряд вправо равнозначно умножению на 10.

» Перемещение десятичной запятой на два разряда вправо равнозначно умножению на 100.

» Перемещение десятичной запятой на три разряда вправо равнозначно умножению на 1000.

Аналогично перемещение десятичной запятой *влево* равнозначно делению десятичной дроби на степень числа десять. Например:

» Перемещение десятичной запятой на один разряд влево равнозначно делению на 10.

» Перемещение десятичной запятой на два разряда влево равнозначно делению на 100.

» Перемещение десятичной запятой на три разряда влево равнозначно делению на 1000.

СОВЕТ

Чтобы умножить десятичную дробь на любую степень числа 10, отсчитайте соответствующее количество нулей и переместите десятичную запятую на такое же количество разрядов вправо. А для того чтобы разделить десятичную дробь на любую степень числа 10, отсчитайте соответствующее количество нулей и переместите десятичную запятую на такое же количество разрядов влево.

Десятичные дроби округляются таким же образом, как и целые числа (подробнее об этом см. в главе 1). Вообще говоря, чтобы округлить число с точностью до заданного десятичного знака (или разряда), следует перейти сначала к находящемуся справа от него десятичному знаку, а затем округлить таким же образом, как и целое число:

» **Округление в меньшую сторону.** Если справа от округляемого десятичного числа находится цифра 0, 1, 2, 3 или 4, опустите эту и каждую следующую справа от него цифру.

» **Округление в большую сторону.** Если справа от округляемого десятичного числа находится цифра 5, 6, 7, 8 или 9, прибавьте 1 к округляемой цифре и опустите каждую следующую справа от нее цифру.

ЗАПОМНИ!

Округление с точностью до первых трех десятичных знаков нередко обозначается двумя разными способами: по числу десятичных знаков или по наименованию, как поясняется ниже.

» Округление до *одного десятичного знака* равнозначно округлению до *ближайших десятков.*

» Округление до *двух десятичных знаков* равнозначно округлению до *ближайших сотен.*

» Округление до *трех десятичных знаков* равнозначно округлению до *ближайших тысяч.*

Для округления с точностью до четырех или больше десятичных знаков требуются более длинные наименования, поэтому они, как правило, не употребляются.

ПРИМЕР!

Задача. Разверните десятичную дробь 7358,293.

Решение. $\mathbf{7358{,}293 = 7000 + 300 + 50 + 8 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}}$.

Задача. Выполните умножение 3,458 × 100.

Решение. 345,8. У числа 100 два нуля, поэтому для умножения на 100 переместите десятичную запятую на два разряда *вправо.*

Задача. Упростите десятичную дробь 0400,0600. Исключите все незначащие нули.

Решение. 400,06. Первый нуль в данной дроби является незначащим, поскольку он находится слева от всех ненулевых цифр. А два последних нуля — также незначащие, поскольку они находятся справа от всех ненулевых цифр. Остальные три нуля являются значащими.

Задача. Выполните деление 29,81 ÷ 10 000.

Решение. 0,002 981. У числа 10 000 четыре нуля, поэтому для деления на 10 000 переместите десятичную запятую на четыре разряда *влево.*

1. Разверните следующие десятичные дроби.
   а) 2,7. г) 103,759.
   б) 31,4. д) 1040,0005.
   в) 86,52. е) 16 821,1384.

2. Упростите следующие десятичные дроби, исключив все незначащие нули там, где это возможно, но не удаляя значащие.
   а) 5,80. г) 9 000,005.
   б) 7,030. д) 0 108,006 0.
   в) 90,0400. е) 00 100,010 200 0

3. Выполните умножение и деление следующих десятичных чисел, перемещая десятичную запятую в соответствующую сторону на нужное число знаков.
   а) $7,32 \times 10$.
   б) $9,04 \times 100$.
   в) $51,6 \times 100\,000$.
   г) $2,786 \div 1000$.
   д) $943,812 \div 1\,000\,000$.

4. Округлите следующие десятичные числа до указанного числа знаков.
   а) 4,777 до одного десятичного знака.
   б) 52,305 до ближайших десятых.
   в) 191,2839 до двух десятичных знаков.
   г) 99,995 до ближайших сотых.
   д) 0,00791 до трех десятичных знаков.
   е) 909,9996 до ближайших тысячных.

Простые операции взаимного преобразования дробей

Операции взаимного преобразования некоторых десятичных и простых дробей выполняются довольно просто. В табл. 8.1 приведены настолько распространенные операции взаимного преобразования десятичных и простых дробей, что их стоит запомнить. Аналогичным образом можно также преобразовать десятичные числа больше единицы в смешанные числа, и наоборот.

Таблица 8.1. Равнозначные десятичные и простые дроби

Десятые	Восьмые	Пятые	Четвертые	Половины
$0{,}1 = \frac{1}{10}$	$0{,}125 = \frac{1}{8}$			
		$0{,}2 = \frac{1}{5}$	$0{,}25 = \frac{1}{4}$	
$0{,}3 = \frac{3}{10}$	$0{,}375 = \frac{3}{8}$			
		$0{,}4 = \frac{2}{5}$		
				$0{,}5 = \frac{1}{2}$
	$0{,}625 = \frac{5}{8}$	$0{,}6 = \frac{3}{5}$		
$0{,}7 = \frac{7}{10}$			$0{,}75 = \frac{3}{4}$	
	$0{,}875 = \frac{7}{8}$	$0{,}8 = \frac{4}{5}$		
$0{,}9 = \frac{9}{10}$				

Задача. Преобразуйте десятичное число 13,7 в смешанное.

Решение. $13\frac{7}{10}$. Целая часть десятичного числа 13 становится целой частью смешанного числа. Для преобразования его дробной части 0,7 в простую дробь воспользуйтесь табл. 8.1.

Задача. Преобразуйте смешанное число $9\frac{4}{5}$ в десятичное.

Решение. 9,8. Целая часть смешанного числа 9 становится целой частью десятичного числа. Для преобразования его дробной части $\frac{4}{5}$ в десятичную дробь воспользуйтесь табл. 8.1.

5 Преобразуйте следующие десятичные дроби в простые.

а) 0,7. г) 0,125.

б) 0,4. д) 0,1.

в) 0,25. е) 0,75.

6 Преобразуйте следующие простые дроби в десятичные.

а) $\frac{9}{10}$. г) $\frac{3}{8}$.

б) $\frac{2}{5}$. д) $\frac{7}{8}$.

в) $\frac{3}{4}$. е) $\frac{1}{2}$.

7 Преобразуйте следующие десятичные числа в смешанные.

а) 1,6. г) 20,75.

б) 3,3. д) 100,625.

в) 14,5. е) 375,375.

8 Преобразуйте следующие смешанные числа в десятичные.

а) $1\frac{1}{5}$. г) $5\frac{1}{4}$.

б) $2\frac{1}{10}$. д) $7\frac{1}{8}$.

в) $3\frac{1}{2}$. е) $12\frac{5}{8}$.

Выравнивание по-новому: сложение и вычитание десятичных дробей

Чтобы научиться складывать и вычитать десятичные дроби, вам не придется проводить ночи напролет, готовясь к контрольной работе по математике, поскольку эти операции выполняются так же просто, как и над целыми числами. Для этого достаточно выровнять десятичные дроби в столбик по десятичным запятым, а затем сложить или вычесть их, как и целые числа. Десятичная запятая указывается в решении прямо под аналогичными запятыми исходных чисел.

ЗАПОМНИ!

Чтобы избежать ошибок (и тем самым порадовать своего преподавателя математики), аккуратно расположите исходные десятичные дроби в столбик друг за другом. Ради удобства можете дополнить десятичные дроби незначащими нулями, чтобы они имели одинаковое число знаков (или разрядов). Эти нули, возможно, придется добавить в том случае, если вычитаемые десятичные дроби имеют разное число десятичных разрядов.

ПРИМЕР!

Задача. Сложите следующие десятичные дроби: 321,81 + 24,5 + + 0,006.

Решение. 346,316. Расположите исходные десятичные числа одно под другим, как при сложении целых чисел в столбик, выровняв их десятичные запятые.

$$\begin{array}{r} 321{,}810 \\ 24{,}500 \\ \underline{+0{,}006} \end{array}$$

Обратите внимание на то, что десятичная запятая результата выровнена по десятичным запятым складываемых чисел. Как видите, пустые разряды складываемых чисел заполнены незначащими нулями. И хотя делать это совсем не обязательно, но полезно для точного выравнивания складываемых в столбик чисел.

А теперь сложите десятичные дроби таким же образом, как и целые числа, произведя перенос по мере надобности (подробнее о переносе при сложении см. в главе 2).

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\phantom{00{,}000} \\ 321{,}810 \\ 24{,}500 \\ \underline{+0{,}006} \\ 346{,}316 \end{array}$$

Задача. Вычтите следующие десятичные дроби: 978,245 – 29,03.

Решение. 949,215. Расположите исходные десятичные числа одно под другим, выровняв их десятичные запятые, а прямо под ними — десятичную запятую результата.

$$\begin{array}{r} 978{,}245 \\ \underline{-29{,}030} \end{array}$$

А теперь вычтите десятичные дроби таким же образом, как и целые числа, произведя заем по мере надобности (подробнее о заеме при вычитании см. в главе 2).

$$\begin{array}{r} \overset{6}{\cancel{7}}\overset{1}{8},245 \\ -29,030 \\ \hline 949,215 \end{array}$$

9 Сложите следующие десятичные дроби: 17,4 + 2,18.

10 Выполните сложение следующих десятичных чисел: 0,0098 + 10,101 + 0,07 + 33.

11 Сложите следующие десятичные дроби: 1000,001 + 75 + 0,03 + 800,2.

12 Вычтите следующие десятичные дроби: 0,748 – 0,23.

13 Вычислите следующую разность: 674,9 – 5,0001.

14 Найдите решение следующей задачи на десятичное вычитание: 100,009 – 0,68.

Подсчет десятичных знаков при умножении десятичных дробей

Чтобы перемножить две десятичные дроби, совсем не обязательно выравнивать их десятичные запятые. На самом деле десятичными запятыми следует сначала пренебречь. Ниже поясняется, каким образом выполняется умножение десятичных дробей.

1. **Выполните умножение десятичных дробей таким же образом, как и целых чисел.**
2. **По окончании подсчитайте количество цифр справа от десятичной запятой в каждом множителе и сложите полученные результаты.**
3. **Расположите десятичную запятую таким образом, чтобы в результате оказалось такое же количество цифр после десятичной запятой.**

ЗАПОМНИ!

Даже если последняя цифра в результате умножения оказывается нулем, ее все равно следует принимать в расчет, размещая десятичную запятую в результирующем числе. Но как только десятичная запятая будет установлена на своем месте, незначащие нули можно удалить.

ПРИМЕР!

Задача. Умножьте следующие десятичные дроби: 74,2 × 0,35.

Решение. 25,97. Пренебрегая десятичными запятыми исходных дробей, перемножьте их как целые числа.

$$\begin{array}{r} 74{,}2 \\ \times\underline{0{,}35} \\ 3710 \\ +\underline{22260} \\ 25970 \end{array}$$

А теперь найдите место для расположения десятичной запятой в результате умножения. С этой целью подсчитайте число знаков после десятичной запятой в обоих исходных множителях 74,2 и 0,35, сложите эти числа (1 + 2 = 3) и расположите десятичную запятую в результирующем числе таким образом, чтобы справа от нее оказалось три цифры.

$$\begin{array}{rl} 74{,}2 & \leftarrow 1 \text{ цифра после десятичной запятой} \\ \times\underline{\ 0{,}35} & \leftarrow 2 \text{ цифры после десятичной запятой} \\ 3710 & \\ +\underline{22260} & \\ 25970 & \\ 25{,}970 & \leftarrow 1+2=3 \text{ цифры после десятичной запятой} \end{array}$$

15 Умножьте следующие десятичные дроби: $0{,}635 \times 0{,}42$.

16 Выполните следующее десятичное умножение: $0{,}675 \times 34{,}8$.

17 Найдите решение следующей задачи на десятичное умножение: $943 \times 0{,}0012$.

18 Найдите решение следующей задачи на десятичное умножение: $1{,}006 \times 0{,}0807$.

Перемещение десятичных запятых при делении десятичных дробей

Десятичные дроби делятся таким же образом, как и целые числа, за исключением того, что десятичную запятую необходимо переместить, прежде чем приступать к делению. Ниже поясняется поэтапная процедура деления десятичных дробей.

1. **Переместите десятичную запятую в делителе и делимом.**

   Преобразуйте *делитель* (т.е. число, на которое производится деление) в целое число, переместив десятичную запятую на самый край вправо. Одновременно переместите десятичную запятую в *делимом* (т.е. числе, которое делится) на такое же число десятичных знаков вправо.

2. **Расположите десятичную запятую в частном от деления непосредственно над десятичной запятой в делимом.**

3. **Выполните деление, как обычно, аккуратно выровняв частное от деления, чтобы расположить десятичную запятую на своем месте.**

Выровняйте каждую цифру в частном от деления по последней цифре в делимом. Подробнее о делении столбиком см. в главе 1.

ЗАПОМНИ!

Десятичные дроби, как и целые числа, далеко не всегда делятся нацело. Но в результате деления десятичных дробей вообще не записывается остаток, а вместо этого добавляются незначащие нули, чтобы округлить частное от деления с точностью до определенного числа десятичных знаков. Цифра, находящаяся справа от округляемой цифры, указывает, в какую именно сторону следует выполнять округление: в бо́льшую или меньшую. Это позволяет всегда учитывать один лишний разряд, как показано в приведенной ниже таблице. (Подробнее об округлении десятичных дробей см. выше раздел “Введение в основы десятичных дробей”.)

Округление десятичной дроби	**Дополнение делимого нулями**
До целого числа	До одного десятичного знака
До одного десятичного знака	До двух десятичных знаков
До двух десятичных знаков	До трех десятичных знаков

ПРИМЕР!

Задача. Разделите следующие десятичные дроби: 9,152 ÷ 0,8.

Решение. 11,44. Прежде всего запишите решаемую задачу, как обычно.

```
     ______
0,8)9,152
```

Преобразуйте десятичную дробь 0,8 в целое число 8, переместив десятичную запятую на один разряд вправо. Одновременно переместите десятичную запятую на один разряд вправо в десятичной дроби 9,1526. И, наконец, расположите десятичную запятую в частном от деления непосредственно над ее местоположением в делимом (91,25).

```
     __,___
8,)91,52
```

Теперь все готово к делению. Аккуратно выровняйте частное от деления, чтобы десятичная запятая оказалась на своем месте.

```
    11,44
8,)91,52
  -8
  ----
   11
   -8
   ----
    35
   -32
   ----
     32
    -32
    ----
      0
```

Задача. Разделите следующие десятичные дроби: 21,9 ÷ 0,015.

Решение. 1460. Подготовьте решаемую задачу, как обычно.

$0{,}015\overline{)21{,}900}$

Обратите внимание на то, что к делимому добавлены два незначащих нуля. Это сделано в связи с потребностью переместить десятичные запятые в каждом числе, принимающем участие в операции деления, на три разряда вправо. И в этом случае десятичная запятая в частном от деления располагается непосредственно над ее местоположением в делимом 21900.

$$\begin{array}{r} ,\\ 15,\overline{)21900,} \end{array}$$

Теперь все готово к делению. Аккуратно выровняйте частное от деления, чтобы десятичная запятая оказалась на своем месте.

$$\begin{array}{r} 1460,\\ 15,\overline{)21900,}\\ \underline{-15}\\ 69\\ \underline{-60}\\ 90\\ \underline{-90}\\ 0 \end{array}$$

Несмотря на то что деление в данном случае выполняется нацело даже после записи цифры 6 в частном от деления, значащий нуль все же требуется добавить, чтобы десятичная запятая оказалась на нужном месте.

19 Разделите следующие десятичные дроби: 9,345 ÷ 0,05.

20 Найдите решение следующей задачи на десятичное деление: 3,15 ÷ 0,021.

21 Выполните следующее десятичное деление, округлив полученный результат с точностью до одного десятичного знака: 6,7 ÷ 10,1.

22 Найдите решение следующей задачи на десятичное деление, округлив полученный результат до ближайших сотых: 9,13 ÷ 4,25.

Преобразование десятичных дробей в простые дроби

В одних случаях операции преобразования самых распространенных десятичных дробей в простые дроби выполняются довольно просто (см. выше раздел “Простые операции взаимного преобразования дробей”). А в других случаях для этого приходится прилагать чуть больше усилий. Ниже поясняется, как преобразовать любую десятичную дробь в простую.

1. **Составьте “дробь” из десятичной в числителе и числа 1,0 в знаменателе.**

   Это не настоящая дробь, ведь последняя всегда содержит целые числа как в числителе, так и в знаменателе, но она все же будет преобразована в настоящую дробь в п. 2 данной процедуры.

   Преобразуя десятичное число больше 1 в дробь, отделите сначала его целую часть, а затем оперируйте только дробной частью. В результате преобразования должно получиться смешанное число.

2. **Переместите десятичную запятую в числителе на такое число разрядов вправо, которого должно быть достаточно для преобразования числителя в целое число, а в знаменателе — на такое же число разрядов.**
3. **Опустите десятичные запятые и любые незначащие нули.**
4. **Сократите полученную в итоге дробь до наименьших членов, если потребуется.**

   Подробнее о сокращении дробей см. в главе 6.

СОВЕТ

Чтобы получить простую дробь из десятичной, проще всего воспользоваться наименованием десятичного разряда в данной десятичной дроби, как поясняется ниже.

- Наименьший десятичный разряд в десятичной дроби 0,3 находится на месте десятков, и поэтому ей равнозначна простая дробь $\frac{3}{10}$.
- Наименьший десятичный разряд в десятичной дроби 0,29 находится на месте сотен, и поэтому ей равнозначна простая дробь $\frac{29}{100}$.
- Наименьший десятичный разряд в десятичной дроби 0,817 находится на месте тысяч, и поэтому ей равнозначна простая дробь $\frac{817}{1000}$.

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте десятичную дробь 0,83 в простую.

Решение. $\frac{83}{100}$. Составьте "дробь" с числом 0,83 в числителе и числом 1,0 в знаменателе:

$\frac{0{,}83}{1{,}0}$.

Переместите десятичную запятую в десятичной дроби 0,83 на два разряда вправо, чтобы преобразовать ее в целое число, а затем сделайте то же самое и в знаменателе:

$\frac{0{,}83}{1{,}0} = \frac{8{,}3}{10{,}0} = \frac{83{,}0}{100{,}0}$.

А теперь можете опустить десятичные запятые и незначащие нули как в числителе, так и в знаменателе результирующей дроби.

Задача. Преобразуйте десятичную дробь 0,0205 в простую.

Решение. $\frac{41}{2000}$. Составьте "дробь" с числом 0,0205 в числителе и числом 1,0 в знаменателе:

$\frac{0{,}0205}{1{,}0}$.

Переместите десятичную запятую в десятичной дроби 0,0205 на четыре разряда вправо, чтобы преобразовать ее в целое число, а затем сделайте то же самое и в знаменателе.

$\frac{0{,}0205}{1{,}0} =$

$= \frac{0{,}205}{10{,}0} =$

$= \frac{02{,}05}{100{,}0} =$

$= \frac{020{,}5}{1000{,}0} =$

$= \frac{0205{,}0}{10000{,}0}$.

А теперь можете опустить десятичные запятые, начальные и конечные незначащие нули как в числителе, так и в знаменателе результирующей дроби:

$= \frac{205}{10000}$.

Оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе результирующей дроби, кратны 5, поэтому сократите ее на этот множитель:

$= \frac{41}{2000}$.

23 Преобразуйте десятичную дробь 0,27 в простую.

24 Преобразуйте десятичную дробь 0,0315 в простую.

25 Преобразуйте десятичную дробь 45,12 в смешанное число.

26 Преобразуйте десятичную дробь 100,001 в смешанное число.

Преобразование простых дробей в десятичные дроби

Чтобы преобразовать любую простую дробь в десятичную, достаточно разделить ее числитель на знаменатель. Нередко требуется найти точное десятичное значение простой дроби. Каждую простую дробь можно представить в виде конечной или периодической десятичной дроби, как поясняется ниже.

» **Конечная десятичная дробь.** Это такая десятичная дробь, которая содержит конечное (ограниченное) число разрядов. Например, десятичная дробь 0,125 является конечной, поскольку у нее три разряда. Аналогично десятичная дробь 0,983 759 694 488 338 3 является конечной с 16 разрядами.

» **Периодическая десятичная дробь.** Это такая десятичная дробь, в которой одни и те же цифры повторяются бесконечно. Например, десятичная дробь 0,(7) является периодической. Цифра 7 в скобках обозначает, что число 7 в этой периодической дроби повторяется бесконечное число раз: 0,777 777 777... Аналогично десятичная дробь 0,345(91) является периодической. Цифры 9 и 1 в скобках обозначают, что число 91 в этой периодической дроби повторяется бесконечное число раз: 0,345 919 191 919 191 9...

ЗАПОМНИ!

Всякий раз, когда решение задачи на деление дает в итоге периодическую дробь, в процессе самого деления постоянно обнаруживается повторяющаяся последовательность цифр. В таком случае проверьте, имеется ли в частном от деления повторяющаяся последовательность цифр, и если обнаружите такую, заключите повторяющиеся числа в скобки в периодической дроби.

Если требуется найти точное десятичное значение простой дроби, можете смело дописать необходимое количество нулей в младшие разряды *делимого* (т.е. того числа, которое делится). Продолжайте деление до тех пор, пока оно не завершится нацело, и тогда в частном от деления окажется конечная десятичная дробь, или же возникнет повторяющаяся последовательность цифр, обозначающая периодическую дробь.

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте дробь $\frac{9}{16}$ в ее точное десятичное значение.

Решение. 0,5625.

Выполните деление $9 \div 16$.

$16\overline{)9{,}0000}$

Число 16 больше числа 9, поэтому добавьте сначала десятичную запятую и незначащие нули к числу 9, а затем выполните деление.

$$
\begin{array}{r}
0{,}5625 \\
16\overline{)9{,}0000} \\
\underline{-80} \\
100 \\
\underline{-96} \\
40 \\
\underline{-32} \\
80 \\
\underline{-80} \\
0
\end{array}
$$

Задача. Каково точное десятичное значение дроби $\frac{5}{6}$?

Решение. 0,8(3). Выполните деление $5 \div 6$.

Число 6 больше числа 5, поэтому добавьте сначала десятичную запятую и незначащие нули к числу 5, а затем выполните деление.

$$\begin{array}{r} 0{,}8333 \\ 6\overline{)5{,}0000} \\ \underline{-48} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array}$$

Как видите, в результате деления появилась повторяющаяся последовательность цифр. И сколько бы незначащих нулей ни добавлялось к частному от деления, последнее никогда не завершится нацело. Вместо этого в частном от деления оказывается периодическая дробь 0,8(3). Цифра 3 в скобках указывает на на бесконечное повторение числа 3 в данной периодической дроби: 0,833 333 33...

27 Преобразуйте дробь $\frac{13}{16}$ в ее точное десятичное значение.

28 Выразите дробь $\frac{7}{9}$ в виде десятичной дроби.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1 Разверните следующие десятичные дроби.

а) $2{,}7 = \mathbf{2} + \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$.

б) $31{,}4 = \mathbf{30} + \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}$.

в) $86{,}52 = \mathbf{80} + \mathbf{6} + \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} + \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{100}}$.

г) $103{,}759 = \mathbf{100} + \mathbf{3} + \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} + \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{100}} + \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{1000}}$.

д) $1040{,}0005 = \mathbf{1000} + \mathbf{40} + \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{10000}}$.

е) $16821{,}1384 = \mathbf{10000} + \mathbf{6000} + \mathbf{800} + \mathbf{20} + \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{100}} + \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{1000}} + \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{10000}}$.

2 Упростите следующие десятичные дроби, исключив все незначащие нули там, где это возможно, но не удаляя значащие нули.

а) 5,80 = **5,8**.

б) 7,030 = **7,03**.

в) 90,0400 = **90,04**.

г) 9000,005 = **9000,005**.

д) 0108,0060 = **108,006**.

е) 00100,0102000 = **100,0102**.

3 Выполните умножение и деление следующих десятичных чисел.

а) $7{,}32 \times 10 = \mathbf{73{,}2}$.

б) $9{,}04 \times 100 = \mathbf{904}$.

в) $51{,}6 \times 100000 = \mathbf{5\,160\,000}$.

г) $183 \div 100 = \mathbf{1{,}83}$.

д) $2{,}786 \div 1000 = \mathbf{0{,}002\,786}$.

е) $943{,}812 \div 1000000 = \mathbf{0{,}000\,943\,812}$.

4 Округлите следующие десятичные числа до указанного числа знаков.

а) До одного десятичного знака: **4,8**.

б) До ближайших десятых: **52,3**.

в) До двух десятичных знаков: **191,28**.

г) До ближайших сотых: 99,9<u>95</u> → **100,00**.

д) До трех десятичных знаков: 0,007<u>91</u> → **0,008**.

е) До ближайших тысячных: 909,99<u>96</u> → **910,000**.

5 Преобразуйте следующие десятичные дроби в простые.

а) $0{,}7 = \mathbf{\frac{7}{10}}$.

б) $0{,}4 = \mathbf{\frac{4}{10}}$.

в) $0{,}25 = \mathbf{\frac{1}{4}}$.

г) $0{,}125 = \mathbf{\frac{1}{8}}$.

д) $0{,}1 = \mathbf{\frac{1}{10}}$.

е) $0{,}75 = \mathbf{\frac{3}{4}}$.

6 Преобразуйте следующие простые дроби в десятичные.

а) $\frac{9}{10} = \mathbf{0{,}9}$.

б) $\frac{2}{5} = \mathbf{0{,}4}$.

в) $\frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$.

г) $\frac{3}{8} = \mathbf{0{,}375}$.

д) $\frac{7}{8} = \mathbf{0{,}875}$.

е) $\frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$.

7 Преобразуйте следующие десятичные числа в смешанные.

а) $1{,}6 = \mathbf{1\frac{3}{5}}$.

б) $3{,}3 = \mathbf{3\frac{3}{10}}$.

в) $14{,}5 = \mathbf{14\frac{1}{2}}$.

г) $20{,}75 = \mathbf{20\frac{3}{4}}$.

д) $100{,}625 = \mathbf{100\frac{5}{8}}$.

е) $375{,}375 = \mathbf{375\frac{3}{8}}$.

8 Преобразуйте следующие смешанные числа в десятичные.

а) $1\frac{1}{5} = \mathbf{1{,}2}$.

б) $2\frac{1}{10} = \mathbf{2{,}1}$.

в) $3\frac{1}{2} = \mathbf{3{,}5}$.

г) $5\frac{1}{4} = \mathbf{5{,}25}$.

д) $7\frac{1}{8} = \mathbf{7{,}125}$.

е) $12\frac{5}{8} = \mathbf{12{,}625}$.

9 Сложите следующие десятичные дроби: 17,4 + 2,18 = **19,58**. Расположите складываемые десятичные дроби в столбик, как и при сложении целых чисел, но выровняв их десятичные запятые. Для выравнивания складываемые в столбик числа полезно дополнить незначащими нулями.

$$\begin{array}{r} 17{,}40 \\ +2{,}18 \\ \hline 19{,}58 \end{array}$$

Обратите внимание на выравнивание десятичных запятых исходных чисел и результирующего числа.

10 0,0098 + 10,101+ 0,07 + 33 = **43,1808**. Выровняйте десятичные запятые и выполните сложение в столбик.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 0{,}0098 \\ 10{,}1010 \\ 0{,}0700 \\ +33{,}0000 \\ \hline 43{,}1808 \end{array}$$

11 1000,001 + 75 + 0,03 + 800,2 = **1875,231**. Расположите складываемые числа в столбик, выровняв их десятичные запятые.

$$\begin{array}{r} 1000{,}001 \\ 75{,}000 \\ 0{,}030 \\ +800{,}200 \\ \hline 1875{,}231 \end{array}$$

12 0,748 – 0,23 = **0,518**. Расположите первое число над вторым, выровняв их десятичные запятые. Кроме того, второе число можно дополнить справа незначащими нулями для выравнивания вычитаемых чисел в столбик.

$$\begin{array}{r} 0{,}748 \\ -\underline{0{,}230} \\ 0{,}518 \end{array}$$

Обратите внимание на выравнивание десятичных запятых исходных чисел и результирующего числа.

13 674,9 – 5,0001= **669,8999**. Расположите первое число над вторым, выровняв их десятичные запятые. Кроме того, второе число можно дополнить справа незначащими нулями для выравнивания вычитаемых чисел в столбик.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ \ 1\ \ 8\,9\,9\,1\ \ } \\ 6\,\cancel{7}\,4,\cancel{9}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,0 \\ -\underline{5,0\,0\,0\,1} \\ 6\ 6\ 9,8\,9\,9\,9 \end{array}$$

14 100,009 – 0,68 = **99,329**. Расположите первое число над вторым, выровняв их десятичные запятые.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 1\ \ \ } \\ \cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{0},\cancel{0}\,0\,9 \\ -\underline{0,6\,8\,0} \\ 9\,9,3\,2\,9 \end{array}$$

15 0,635 × 0,42 = **0,2667**. Расположите первое число над вторым, проигнорировав их десятичные запятые. Выполните их умножение таким же образом, как и целых чисел.

$$\begin{array}{rl} 0{,}635 & \leftarrow \text{3 цифры после десятичной запятой} \\ \times\underline{0{,}42} & \leftarrow \text{2 цифры после десятичной запятой} \\ 1270 & \\ \underline{+25400} & \\ 0{,}26670 & \leftarrow 3+2=5 \text{ цифр после десятичной запятой} \end{array}$$

А теперь найдите место для расположения десятичной запятой в результате умножения. С этой целью подсчитайте число знаков после десятичной запятой в обоих исходных множителях, сложите эти числа (3 + 2 = 5) и расположите десятичную запятую в результирующем числе таким образом, чтобы справа от нее оказалось пять цифр. После расположения десятичной запятой опустите незначащие нули.

16 0,675 × 34,8 = **23,49**. Расположите первое число над вторым, проигнорировав их десятичные запятые. Выполните их умножение таким же образом, как и целых чисел.

$$
\begin{array}{r}
0{,}675 \\
\times\underline{34{,}8} \\
5400 \\
27000 \\
+\underline{202500} \\
23{,}4900
\end{array}
$$

Подсчитайте число знаков после десятичной запятой в обоих исходных множителях, сложите эти числа (3 + 1 = 4) и расположите десятичную запятую в результирующем числе таким образом, чтобы справа от нее оказалось четыре цифры. И, наконец, опустите незначащие нули.

17 943 × 0,0012 = **1,1316**. Выполните умножение десятичных дробей таким же образом, как и целых чисел.

$$
\begin{array}{rl}
943 & \leftarrow \text{0 цифр после десятичной запятой} \\
\times\underline{0{,}0012} & \leftarrow \text{4 цифры после десятичной запятой} \\
1886 & \\
+\underline{9430} & \\
1{,}1316 & \leftarrow 0+4=4 \text{ цифры после десятичной запятой}
\end{array}
$$

После десятичной запятой в первом множителе отсутствуют цифры, во втором множителе их четыре и всего получается четыре (0 + 4 = 4). Поэтому расположите десятичную запятую в результирующем числе таким образом, чтобы после нее следовало четыре цифры.

18 1,006 × 0,0807 = **0,081 184 2**. Выполните умножение десятичных дробей таким же образом, как и целых чисел.

$$
\begin{array}{rl}
1{,}006 & \leftarrow \text{3 цифры после десятичной запятой} \\
\times\underline{0{,}0807} & \leftarrow \text{4 цифры после десятичной запятой} \\
7042 & \\
+\underline{804800} & \\
0{,}0811842 & \leftarrow 3+4=7 \text{ цифр после десятичной запятой}
\end{array}
$$

После десятичной запятой следует в общем семь цифр: три в первом множителе и четыре во втором (3 + 4 = 7). Поэтому расположите десятичную запятую в результирующем числе таким образом, чтобы после нее следовало семь цифр. Обратите внимание на необходимость ввести в данном случае дополнительный десятичный разряд, добавив начальный нуль.

19 9,345 ÷ 0,05 = **186,9**. Подготовьте задачу для решения в столбик.

$0{,}05\overline{)9{,}345}$

Преобразуйте десятичную дробь 0,05 делителя в целое число 5, переместив десятичную запятую на два разряда вправо. Одновременно переместите десятичную запятую на два разряда вправо в десятичной дроби

9,345 делимого. И, наконец, расположите десятичную запятую в частном от деления непосредственно над ее местоположением в делимом.

$$5,\overline{)934,5}$$

Теперь все готово к делению. Аккуратно выровняйте частное от деления, чтобы десятичная запятая оказалась на своем месте.

```
    186,9
5,)934,5
  -5
   43
  -40
    34
   -30
     45
    -45
      0
```

20 3,15 ÷ 0,021 = **150**. Подготовьте задачу для решения в столбик.

$0,021\overline{)3,15}$

В делителе 0,021 необходимо переместить десятичную запятую на три разряда вправо, поэтому добавьте к делимому 3,15 дополнительный незначащий нуль справа, чтобы расширить его до трех разрядов после десятичной запятой.

$0,021\overline{)3,150}$

Теперь десятичные запятые можно переместить на три разряда вправо. Расположите десятичную запятую в частном от деления непосредственно над ее местоположением в делимом.

$21,\overline{)3150,}$

Выполните деление, аккуратно выровняв частное от деления.

```
     150,
 21,)3150,
    -21
     105
    -105
       0
```

Не забудьте вставить значащий нуль в частном от деления, чтобы окончательно расположить десятичную запятую на своем месте.

21 6,7 ÷ 10,1 = **0,7**. Подготовьте задачу для решения в столбик.

$10,1\overline{)6,7}$

Преобразуйте десятичную дробь в делителе 10,1 в целое число, переместив десятичную запятую на один разряд вправо. Одновременно переместите десятичную запятую на один разряд вправо в делимом 6,7.

$$\begin{array}{r} , \\ 101,\overline{)67,} \end{array}$$

В данной задаче требуется округлить частное от деления с точностью до одного десятичного знака, поэтому дополните делимое до двух десятичных знаков незначащими нулями справа.

$$\begin{array}{r} , \\ 101,\overline{)67,00} \end{array}$$

А теперь можно приступить к делению.

$$\begin{array}{r} 0,66 \\ 101,\overline{)67,00} \\ \underline{-606} \\ 640 \\ \underline{-606} \\ 34 \end{array}$$

И, наконец, округлите частное от деления с точностью до одного десятичного знака:

$0,\underline{66} \to 0,7$.

22 $9,13 \div 4,25 =$ **2,15**. Прежде всего подготовьте задачу для решения в столбик:

$$4,25\overline{)9,13}$$

Преобразуйте десятичную дробь в делителе 4,25 в целое число, переместив десятичную запятую на два разряда вправо. Одновременно переместите десятичную запятую на два разряда вправо в делимом 9,13.

$$\begin{array}{r} , \\ 425\overline{)913,} \end{array}$$

В данной задаче требуется округлить частное от деления с точностью до сотых, поэтому дополните делимое до трех десятичных знаков после запятой незначащими нулями.

$$\begin{array}{r} , \\ 425,\overline{)913,000} \end{array}$$

А теперь можно приступить к делению, аккуратно выровняв частное от деления.

$$\begin{array}{r} 2,148 \\ 425,\overline{)913,000} \\ \underline{-850} \\ 630 \\ \underline{-425} \\ 2050 \\ \underline{-1700} \\ 3500 \\ \underline{-3400} \\ 100 \end{array}$$

И, наконец, округлите частное от деления с точностью до двух десятичных знаков:

$2,1\underline{48} \to 2,15$.

23 $0{,}27 = \mathbf{\frac{27}{100}}$. Составьте сначала “дробь” с числом 0,27 в числителе и числом 1,0 в знаменателе. Затем перемещайте десятичные запятые вправо до тех пор, пока не получите целые числа в числителе и знаменателе данной дроби:

$$\frac{0{,}27}{1{,}0} = \frac{2{,}7}{10{,}0} = \frac{27{,}0}{100{,}0}.$$

Теперь можете опустить десятичные запятые и незначащие нули как в числителе, так и в знаменателе результирующей дроби.

24 $0{,}0315 = \mathbf{\frac{63}{2000}}$. Составьте сначала “дробь” с числом 0,0315 в числителе и числом 1,0 в знаменателе. Затем перемещайте десятичные запятые вправо до тех пор, пока не получите целые числа в числителе и знаменателе данной дроби:

$$\frac{0{,}0315}{1{,}0} = \frac{0{,}315}{10{,}0} = \frac{3{,}15}{100{,}0} = \frac{31{,}5}{1000{,}0} = \frac{315{,}0}{10000{,}0}.$$

Теперь можете опустить десятичные запятые и незначащие нули как в числителе, так и в знаменателе результирующей дроби. Оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе результирующей дроби, кратны 5, поэтому сократите ее на этот множитель:

$$\frac{315}{10000} = \frac{63}{2000}.$$

25 $45{,}12 = \mathbf{45\frac{3}{25}}$. Прежде всего отделите целую часть 45 от десятичной дроби. Затем составьте “дробь” с числом 0,12 в числителе и числом 1,0 в знаменателе. А далее перемещайте десятичные запятые вправо до тех пор, пока не получите целые числа в числителе и знаменателе данной дроби:

$$\frac{0{,}12}{1{,}0} = \frac{1{,}2}{10{,}0} = \frac{12{,}0}{100{,}0}.$$

Теперь можете опустить десятичные запятые и незначащие нули как в числителе, так и в знаменателе результирующей дроби. Оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе результирующей дроби, кратны 2, поэтому сократите ее на этот множитель:

$$\frac{12}{100} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}.$$

И, наконец, соедините отделенную ранее целую часть с полученной выше дробной частью, чтобы составить в итоге смешанное число.

26 $100{,}001 = \mathbf{100\frac{1}{1000}}$. Отделите целую часть 100 от десятичной дроби и составьте "дробь" с числом 0,001 в числителе и числом 1,0 в знаменателе. Затем перемещайте десятичные запятые вправо до тех пор, пока не получите целые числа в числителе и знаменателе данной дроби:

$$\frac{0{,}001}{1{,}0} = \frac{0{,}01}{10{,}0} = \frac{0{,}1}{100{,}0} = \frac{1{,}0}{1000{,}0}.$$

Опустите десятичные запятые и незначащие нули как в числителе, так и в знаменателе результирующей дроби, а затем соедините отделенную ранее целую часть с полученной выше дробной частью, чтобы составить в итоге смешанное число:

$$100\frac{1}{1000}.$$

27 $\frac{13}{16} = \mathbf{0{,}8125}$. Выполните деление 13 ÷ 16, добавив целый ряд незначащих нулей к числу 13:

```
   0,8125
16)13,00000
  -12 8
     20
    -16
      40
     -32
       80
      -80
        0
```

Данная операция деления в конечном итоге завершается, и поэтому в частном от деления оказывается конечная десятичная дробь.

28 $\frac{7}{9} = \mathbf{0{,}(7)}$. Выполните деление 7 ÷ 9, добавив целый ряд незначащих нулей к числу 7.

```
  0,77
9)7,000
 -6 3
    70
   -63
     70
     ...
```

При вычитании 70 – 63 и последующем сносе очередного нуля снова получается число 70, т.е. образуется бесконечно повторяющаяся последовательность чисел. Поэтому в частном от деления оказывается периодическая десятичная дробь.

Глава 9

Использование процентов

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Взаимное преобразование процентов и десятичных дробей

» Взаимное преобразование процентов и простых дробей

» Решение трех видов задач на проценты

Подобно простым и десятичных дробям, обсуждавшимся в главах 6–8, проценты служат для описания отдельных частей целого. Слово *процент* буквально означает "на сотню", но на практике — "из сотни". Следовательно, когда я говорю, что 50 процентов моих рубашек голубого цвета, это означает, что 50 из 100, т.е. половина моих рубашек голубого цвета. Разумеется, для такого утверждения мне совсем не обязательно владеть таким количеством рубашек. Так, если вы владеете 8 рубашками и 50 процентов из них голубого цвета, то в вашем распоряжении фактически имеется 4 рубашки голубого цвета.

В этой главе поясняется, как выполнять взаимное преобразование процентов, десятичных и простых дробей. А в последнем разделе этой главы показывается, как преобразовывать три основных вида задач на проценты в уравнения, чтобы упростить их решение. Освоив проценты, вы сможете без особого труда рассчитывать скидки, налоги с продаж, чаевые официантам, а самое главное — процентные ставки по ссудам и вкладам в банке.

Преобразование процентов в десятичные дроби

Проценты и десятичные дроби являются весьма сходными формами выражения чисел, поэтому все, что вы узнали о десятичных дробях из главы 8, пригодится вам для обращения с процентами. И для этого достаточно преобразовать конкретный процент в десятичную дробь.

Чтобы преобразовать целочисленный процент в десятичную дробь, сначала замените знак процента десятичной запятой, а затем переместите десятичную запятую на два разряда влево. После этого можете опустить любые незначащие нули. Ниже приведены типичные примеры преобразования процентов в десятичные дроби.

100% = 1	75% = 0,75	50% = 0,5
25% = 0,25	20% = 0,2	10% = 0,1

Иногда проценты оказываются дробными и содержат десятичную запятую. В таком случае опустите знак процента и переместите десятичную запятую на два разряда влево. Например, 12,5% = 0,125.

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте 80% в десятичную дробь.

Решение. 0,8. Замените сначала знак процента десятичной запятой, изменив 80% на 80,. Затем переместите десятичную запятую на два разряда влево:

80% = 0,80.

И, наконец, можете опустить незначащий нуль, чтобы получить десятичную дробь 0,8.

Задача. Преобразуйте 37,5% в десятичную дробь.

Решение. 0,375. Опустите знак процента и переместите десятичную запятую на два разряда влево: 37,5% = 0,375.

1. Преобразуйте 90% в десятичную дробь.

2. Типичная процентная ставка по капиталовложениям (например, 4% по ценным бумагам). Преобразуйте 4% в десятичную дробь.

3. Найдите десятичный эквивалент 99,44%.

4. Как выразить 243,1% в виде десятичной дроби?

Преобразование десятичных дробей в проценты

Производить расчеты в процентах намного проще, если преобразовать их сначала в десятичные дроби. Но по завершении расчетов нередко требуется преобразовать полученный результат обратно в проценты. Это особенно справедливо для обращения с процентными ставками, налогами или вероятностью крупного снегопада в ночь перед важным испытанием. Все эти величины обычно выражаются в процентах.

Чтобы преобразовать десятичную дробь в проценты, переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента. Если в итоге получится целое число, десятичную запятую можно опустить.

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте десятичную дробь 0,6 в проценты.

Решение. 60%. Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента: 0,6 = 60%.

5. Преобразуйте десятичную дробь 0,57 в проценты.

6. Как выразить десятичную дробь 0,3 в процентах?

7 Преобразуйте десятичную дробь 0,015 в проценты.

8 Как выразить десятичную дробь 2,222 в процентах?

Преобразование процентов в простые дроби

Некоторые проценты совсем не трудно преобразовать в простые дроби. Ниже приведен ряд примеров быстрого преобразования процентов в простые дроби, которые стоит запомнить.

$$1\% = \frac{1}{100} \qquad 5\% = \frac{1}{20} \qquad 10\% = \frac{1}{10} \qquad 20\% = \frac{1}{5}$$

$$25\% = \frac{1}{4} \qquad 50\% = \frac{1}{2} \qquad 75\% = \frac{3}{4} \qquad 100\% = 1$$

За исключением этих простых примеров, преобразовывать проценты в простые дроби редко приходится за пределами курса математики. Ведь использовать десятичные дроби намного проще, чем простые.

Тем не менее преподаватели математики нередко проверяют знания и умение учащихся обращаться с процентами, поэтому о преобразовании процентов в простые дроби необходимо знать следующее: указать преобразуемые проценты без их знака в *числителе* (т.е. верхнем числе) простой дроби, а число 100 — в *знаменателе* (т.е. нижнем числе) простой дроби. При необходимости эта дробь сокращается до наименьших членов или преобразуется в смешанное число. (Подробнее о сокращении дробей см. в главе 6.)

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте 35% в простую дробь.

Решение. $\frac{7}{20}$. Расположите число 35 в числителе, а число 100 — в знаменателе:

$$35\% = \frac{35}{100}.$$

Полученную в итоге дробь можно сократить, поскольку оба числа, находящиеся в числителе и знаменателе, кратны 5:

$$= \frac{7}{20}.$$

9 Преобразуйте 19% в простую дробь.	**10** Типичная процентная ставка по кредитным карточкам и другим видам ссуд и займов составляет 8%. Как выразить процентную ставку 8% в виде простой дроби?
11 Преобразуйте 123% в простую дробь.	**12** Преобразуйте 375% в простую дробь.

Преобразование простых дробей в проценты

Знание ряда несложных примеров преобразования простых дробей в проценты может пригодиться на практике. Поэтому ниже приведены наиболее распространенные примеры преобразования простых дробей в проценты.

$$\frac{1}{100}=1\% \qquad \frac{1}{20}=5\% \qquad \frac{1}{10}=10\% \qquad \frac{1}{5}=20\%$$

$$\frac{1}{4}=25\% \qquad \frac{1}{2}=50\% \qquad \frac{3}{4}=75\% \qquad 1=100\%$$

За исключением этих простых примеров, преобразовывать простые дроби в проценты редко приходится за пределами курса математики. Но ведь пройти курс математики не менее важно, поэтому в текущем разделе поясняется, как выполнять преобразование подобного рода.

Процесс преобразования простых дробей в проценты выполняется в две следующие стадии:

1. **Преобразуйте простую дробь в десятичную, как пояснялось в главе 8.**

   В некоторых математических задачах выполнение первой стадии данного процесса может привести к появлению периодической дроби. Но в данном случае это вполне допустимо, поскольку проценты также будут содержать периодическую дробь.

2. **Преобразуйте полученную выше десятичную дробь в проценты.**

   Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента.

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте простую дробь $\frac{1}{9}$ в проценты.

Решение. 11,(1)%. Сначала преобразуйте простую дробь $\frac{1}{9}$ в десятичную.

$$\begin{array}{r} 0{,}111 \\ 9\overline{)1{,}000} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$$

В результате получается периодическая десятичная дробь 0,(1). Преобразуйте ее далее в проценты:

0,(1) = 11,(1)%.

---

13 Выразите простую дробь $\frac{2}{5}$ в процентах.

14 Преобразуйте простую дробь $\frac{3}{20}$ в проценты.

15 Преобразуйте простую дробь $\frac{7}{8}$ в проценты.	**16** Преобразуйте простую дробь $\frac{2}{11}$ в проценты.

Решение различных задач на проценты с помощью уравнений

В этом разделе сначала поясняется, как распознавать три основных вида задач на проценты. Затем показывается, как решать все эти задачи, используя словесные уравнения.

В задачах на проценты даются два фрагмента исходной информации и спрашивается, как найти третий фрагмент. Все три фрагмента информации представлены ниже в виде вопросов, в которых запрашивается каждый из этих фрагментов.

» **Проценты.** В такой задаче могут быть заданы начальные и конечные числа и задан вопрос, как найти проценты. Ниже приведены некоторые примеры формулирования такой задачи.

Какую долю в процентах составляет число 1 в числе 4?

Сколько процентов число 1 составляет в числе 4?

Сколько процентов от числа 4 приходится на число 1?

Решение. 25%, поскольку 25% × 4 = 1.

- **Начальное число.** В такой задаче могут быть заданы проценты и конечное число и спрашивается, как найти начальное число:

  От какого числа составляет 10% число 40?

  Чему равно число, 10% от которого составляет число 40?

  Число 40 составляет 10% от какого числа?

  Решение. 400, поскольку 10% × 40 = 400.

- **Конечное число.** В этой самой распространенной задаче задаются проценты и начальное число и спрашивается, как найти конечное число:

  Чему равно число, составляющее 50% от числа 6?

  Какому числу соответствуют 50% от числа 6?

  Сумеете ли вы найти 50% от числа 6?

  Решение. 3, поскольку 50% × 6 = 3. Обратите внимание на наличие условия: 50% от числа 6, как бы ни формулировалась данная задача.

ЗАПОМНИ!

Как упоминалось выше, в каждой задаче на проценты даются два фрагмента исходной информации и спрашивается, как найти третий фрагмент. Поэтому из указанных фрагментов информации можно составить уравнение, используя следующие преобразования из слов в символы.

Чему, сколько (число) → n

Равно (составляет) → =

Проценты → × 0,01

От → ×

ПРИМЕР!

Задача. Составьте уравнение из утверждения: *25% от 12 равно 3.*

Решение. 25 × 0,01 × 12 = 3. Это прямое преобразование выполняется следующим образом:

25	%	от	12	равно	3;
25	× 0,01	×	12	=	3.

Задача. Чему равно 18% от числа 90?

Решение. 16,2. Преобразуйте формулировку данной задачи в приведенное ниже уравнение.

Чему	равно	18	%	от	90;
n	=	18	× 0,01	×	90.

Решите это уравнение:

$n = 18 \times 0{,}01 \times 90 = 16{,}2$.

17 Составьте уравнение из утверждения: *20% от 350 равно 70*. Проверьте свое решение, упростив уравнение.

18 Сколько процентов от числа 150 составляет число 25,5?

19 Чему равно 79% от числа 11?

20 От какого числа составляет 30% число 10?

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1 **0,9**. Замените сначала знак процента десятичной запятой, а затем переместите ее на два разряда влево:
90% = 0,90.
Опустите незначащий нуль, чтобы получить в итоге число 0,9.

2 **0,04**. Замените сначала знак процента десятичной запятой, а затем переместите ее на два разряда влево:
4% = 0,04.

3 **0,9944**. Опустите знак процента и переместите десятичную запятую на два разряда влево:
99,44% = 0,9944.

4 **2,431**. Опустите знак процента и переместите десятичную запятую на два разряда влево:
243,1% = 2,431.

5 **57%**. Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента:
0,57 = 057%.
Опустите незначащий нуль, чтобы получить в итоге проценты: 57%.

6 **30%**. Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента:
0,3 = 030%.
Опустите незначащий нуль, чтобы получить в итоге проценты: 30%.

7 **1,5%**. Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента:
0,015 = 01,5%.
Опустите незначащий нуль, чтобы получить в итоге проценты: 1,5%.

8 **222,2%**. Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и добавьте знак процента:
2,222 = 222,2%.

9 $\mathbf{\frac{19}{100}}$. Расположите число 19 в числителе, а число 100 в знаменателе искомой дроби.

10 $\mathbf{\frac{2}{25}}$. Расположите число 8 в числителе, а число 100 в знаменателе искомой дроби:
$\frac{8}{100}$.
Эту дробь можно дважды сократить на множитель 2:
$=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$.

11 $\mathbf{1\frac{23}{100}}$. Расположите число 123 в числителе, а число 100 в знаменателе искомой дроби:
$\frac{123}{100}$.
Эту неправильную дробь можно преобразовать в смешанное число:
$=1\frac{23}{100}$.

12 $3\frac{3}{4}$. Расположите число 375 в числителе, а число 100 в знаменателе искомой дроби:

$\frac{375}{100}$.

Преобразуйте полученную в итоге неправильную дробь в смешанное число:

$= 3\frac{75}{100}$.

Дважды сократите дробную часть полученного в итоге смешанного числа на 5:

$= 3\frac{15}{20} = 3\frac{3}{4}$.

13 **40%**. Сначала преобразуйте простую дробь $\frac{2}{5}$ в десятичную:

$2{,}0 \div 5 = 0{,}4$.

Затем преобразуйте десятичную дробь 0,4 в проценты, переместив десятичную запятую на два разряда вправо и добавив знак процента:

$0{,}4 = 40\%$.

14 **15%**. Сначала преобразуйте простую дробь $\frac{3}{20}$ в десятичную:

$3{,}00 \div 20 = 0{,}15$.

Затем преобразуйте десятичную дробь 0,15 в проценты:

$0{,}15 = 15\%$.

15 **87,5%**. Сначала преобразуйте простую дробь $\frac{7}{8}$ в десятичную:

$7{,}000 \div 8 = 0{,}875$.

Затем преобразуйте десятичную дробь 0,875 в проценты:

$0{,}875 = 87{,}5\%$.

16 **18,(18)%**. Сначала преобразуйте простую дробь $\frac{2}{11}$ в десятичную.

```
    0,1818
11)0,20000
  -11
    90
   -88
     20
    -11
      90
     -88
       2
       ...
```

В итоге получается периодическая десятичная дробь 0,(18). Преобразуйте эту дробь в проценты:

$0{,}(18) = 18{,}(18)\%$.

17 $20 \times 0{,}01 \times 350 = \mathbf{70}$. Преобразуйте формулировку данной задачи в следующее уравнение.

20 процентов от 350 равно 70;

$20 \quad \times 0{,}01 \quad \times \quad 350 \quad = \quad 70.$

Проверьте данное уравнение:

$$20 \times 0{,}01 \times 350 = 70;$$
$$0{,}2 \times 350 = 70;$$
$$70 = 70.$$

18 **17%**. Преобразуйте формулировку данной задачи в следующее уравнение:

Сколько процентов от 150 составляет 25,5.

$n \quad \times 0{,}01 \quad \times \quad 150 \quad = \quad 70.$

Решите данное уравнение для n:

$$n \times 0{,}01 \times 150 = 25{,}5;$$
$$1{,}5n = 25{,}5;$$
$$\frac{1{,}5n}{1{,}5} = \frac{25{,}5}{1{,}5};$$
$$n = 17.$$

19 **8,69**. Преобразуйте формулировку данной задачи в следующее уравнение:

Чему равно 79 процентов от 11.

$n \quad = \quad 79 \quad \times 0{,}01 \quad \times \quad 1.$

Решите данное уравнение для n, чтобы получить искомый результат:

$n = 79 \times 0{,}01 \times 11 = 8{,}69.$

20 **33,(3)**. Преобразуйте формулировку данной задачи в следующее уравнение.

30 % от какого числа составляет 10;

$30 \quad \times 0{,}01 \quad \times \quad n \quad = \quad 10.$

Решите данное уравнение для n, чтобы получить искомый результат:

$$30 \times 0{,}01 \times n = 10;$$
$$0{,}3n = 10;$$
$$\frac{0{,}3n}{0{,}3} = \frac{10}{0{,}3};$$
$$n = 33{,}(3).$$

В итоге получается периодическая десятичная дробь 33,(3).

3 Гигантский шаг вперед к продвинутым темам

В ЭТОЙ ЧАСТИ...

- » Экспоненциальное представление очень больших и очень малых чисел
- » Обращение с весами и мерами в английской и метрической системах мер
- » Решение основных геометрических задач, включая углы, фигуры и объемные геометрические тела
- » Применение двумерных графиков типа

Глава 10

Повышение степени чисел в экспоненциальном представлении

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Представление о степенях числа 10

» Умножение и деление степеней числа 10

» Преобразование чисел в экспоненциальное представление, и обратно

» Умножение и деление чисел в экспоненциальном представлении

Степени числа 10, т.е. произведения, получаемые умножением этого числа на самое себя сколько угодно раз, образуют основу известной вам индоарабской (десятичной) числовой системы. В главе 1 пояснялось, каким образом нули употребляются в этой числовой системе в качестве значащих разрядов единиц, десятков, сотен, тысяч и т.д. Но такая система вполне пригодна для представления лишь относительно малых чисел, и по мере их роста пользоваться нулями становится неудобно. Например, десять квинтиллионов в такой системе обозначаются числом 10 000 000 000 000 000 000.

Аналогичным образом нули употребляются в качестве значащих цифр и в десятичных дробях, как пояснялось в главе 8. В этом случае десятичная система оказывается вполне пригодной для представления не очень точных десятичных дробей, но она становится неудобной, когда требуется высокая точность. Например, две триллионных обозначаются десятичной дробью 0,000 000 000 002.

А поскольку людям вечно некогда, то кто будет тратить время на написание больших чисел со всеми значащими нулями, когда можно понаблюдать за птицами, спечь пирог, разработать систему защиты с помощью акулы-робота или заняться каким-нибудь другим интересным делом? Опустить значащие нули и посвятить освободившееся время более важным занятиям действительно можно. И в этой главе раскрывается истинный потенциал *экспоненциального представления* как удобного способа записи очень больших и очень малых десятичных чисел. И не удивительно, что экспоненциальное представление чисел чаще всего применяется в научных дисциплинах, где приходится постоянно оперировать очень большими и очень малыми числами с немалой степенью точности.

Представление о степенях числа 10 с подсчетом нулей

Как пояснялось в главе 2, возведение числа в *степень* означает умножение числа в основании степени (т.е. нижнего числа) на самое себя столько раз, сколько указано в показателе степени (т.е. в верхнем числе). Например, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Для вычисления степеней чисел нередко требуется немало времени, поскольку такие числа быстро растут. Например, число 7^6 может показаться на первый взгляд небольшим, но на самом деле оно равно 117 649. Но проще всего вычислить степени по основанию 10, которые, естественно, называются *степенями числа 10*. Каждую степень числа можно записать двумя способами, как поясняется ниже.

- **Стандартная форма представления.** Например, в виде числа 100 000 000.
- **Показательная форма представления.** В виде числа 10, возведенного в степень, например 10^8.

СОВЕТ

Степени числа 10 легко распознаются, поскольку в стандартной форме представления каждая степень числа 10 просто обозначается цифрой 1 и последующими нулями. Чтобы возвести число 10 в любую степень, достаточно записать 1 и столько нулей, сколько обозначает данная степень. Например:

$10^0 = 1$ 1 без нулей;
$10^1 = 10$ 1 с одним нулем;
$10^2 = 100$ 1 с двумя нулями;
$10^3 = 1000$ 1 с тремя нулями.

Чтобы перейти от стандартной к показательной форме представления, достаточно подсчитать количество нулей после 1 и указать его в показателе степени числа 10. Число 10 можно возвести и в отрицательную степень. В результате такой операции всегда получается десятичная дробь, где соответствующее количество нулей указывается перед 1. Например:

$10^{-1} = 0{,}1$ 1 с одним нулем;
$10^{-2} = 0{,}01$ 1 с двумя нулями;
$10^{-3} = 0{,}001$ 1 с тремя нулями;
$10^{-4} = 0{,}0001$ 1 с четырьмя нулями.

ЗАПОМНИ!

Выражая отрицательную степень числа 10 в стандартной форме представления, следует всегда принимать в расчет начальный нуль, находящийся слева от десятичной запятой. Например, степень числа $10^{-3} = 0{,}001$ содержит три нуля, считая от начального нуля.

ПРИМЕР!

Задача. Запишите степень числа 10^6 в стандартной форме представления.

Решение. 1 000 000. Показатель степени данного числа равен 6, поэтому в стандартной форме представления оно обозначается единицей с шестью нулями.

Задача. Запишите степень числа 10^{-5} в стандартной форме представления.

Решение. 0,000 01. Показатель степени данного числа равен –5, поэтому в стандартной форме представления оно обозначается десятичной дробью с пятью нулями, включая начальный, и последующей единицей.

Задача. Запишите число 100 000 в показательной форме представления.

Решение. 10^5. В данном числе насчитывается пять нулей, поэтому показатель степени данного числа в показательной форме представления равен 5.

Задача. Запишите число 0,000 000 1 в показательной форме представления.

Решение. 10^{-7}. В данном числе насчитывается семь нулей, включая начальный, поэтому показатель степени данного числа в показательной форме представления равен –7.

1. Запишите следующие степени числа 10 в стандартной форме представления:
   а) 10^4;
   б) 10^7;
   в) 10^{14};
   г) 10^{22}.

2. Запишите следующие степени числа 10 в показательной форме представления:
   а) 1 000 000 000;
   б) 1 000 000 000 000;
   в) 10 000 000 000 000 000;
   г) 100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

3. Запишите следующие степени числа 10 в стандартной форме представления:
   а) 10^{-1};
   б) 10^{-5};
   в) 10^{-11};
   г) 10^{-16}.

4. Запишите следующие степени числа 10 в показательной форме представления:
   а) 0,01;
   б) 0,000 001;
   в) 0,000 000 000 001;
   г) 0,000 000 000 000 000 001.

Арифметика порядков: умножение и деление степеней числа 10

СОВЕТ

Умножение и деление степеней числа 10 в показательной форме представления выполняется довольно просто, поскольку для этого вообще не нужно никакого умножения или деления, а достаточно лишь сложения или вычитания, как поясняется ниже.

» **Умножение.** Чтобы перемножить две степени числа 10 в показательной форме представления, найдите сначала сумму показателей степени обоих чисел, а затем запишите степень числа 10, указав полученную сумму в ее показателе.

» **Деление.** Чтобы разделить одну степень числа 10 на другую, вычтите сначала показатель второй степени из показателя первой степени, а затем запишите степень числа 10, указав полученную разность в ее показателе.

Приведенные выше правила распространяются и на отрицательные показатели степеней числа 10. Нужно лишь применить правила сложения и вычитания отрицательных чисел, обсуждавшиеся в главе 3.

ПРИМЕР!

Задача. Выполните умножение $10^7 \times 10^4$.

Решение. 10^{11}. Сложите показатели степени ($7 + 4 = 11$) обоих чисел и укажите полученную сумму в показателе результирующей степени числа 10:

$10^7 \times 10^4 = 10^{11}$.

Задача. Выполните деление $10^9 \div 10^6$.

Решение. 10^3. Вычтите показатели степени ($9 - 6 = 3$) обоих чисел и укажите полученную разность в показателе результирующей степени числа 10:

$10^9 \div 10^6 = 10^3$.

5 Перемножьте следующие показатели степени числа 10:

а) $10^9 \times 10^2$;

б) $10^5 \times 10^5$;

в) $10^{13} \times 10^{-16}$;

г) $10^{100} \times 10^{21}$;

д) $10^{-15} \times 10^0$;

е) $10^{-10} \times 10^{-10}$.

6 Разделите следующие показатели степени числа 10:

а) $10^6 \div 10^4$;

б) $10^{12} \div 10^1$;

в) $10^{-7} \div 10^{-7}$;

г) $10^{18} \div 10^0$;

д) $10^{100} \div 10^{-19}$;

е) $10^{-50} \div 10^{50}$.

Экспоненциальное представление чисел

Оперировать числами со многими нулями неудобно, поскольку в них легко сделать ошибки. Поэтому имеется другой, более удобный способ обозначения больших и малых чисел, называемый *экспоненциальным представлением*. Всякое число может быть представлено в экспоненциальной форме в виде *произведения* двух перемножаемых чисел, которые могут быть следующими.

» Десятичное число большее 1 и меньшее 10.

» Степень числа 10 в показательной форме представления.

Чтобы записать любое число в экспоненциальной форме представления, выполните следующие действия.

1. **Запишите число в форме десятичной дроби, если оно еще не представлено в таком виде, добавив десятичную запятую и один незначащий нуль.**
2. **Переместите десятичную запятую на достаточное число разрядов, чтобы получить в итоге десятичное число в пределах от 1 до 10. (Подсчитайте, на сколько разрядов была перемещена десятичная запятая.)**

   Слева от десятичной запятой должна остаться одна ненулевая цифра.
3. **Умножьте вновь полученное десятичное число на степень числа 10, равную числу разрядов, на которое была перемещена десятичная запятая в п. 2.**
4. **Если в п. 2 десятичная запятая была перемещена влево, то показатель степени оказывается положительным. А если она была перемещена вправо, т.е. исходное число было меньше 1, укажите показатель степень со знаком "минус".**

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте число 70 000 в экспоненциальную форму представления.

Решение. $7{,}0\times10^4$. Сначала запишите исходное число в форме десятичной дроби:

70 000,0

Затем переместите десятичную запятую на достаточное число разрядов, чтобы получить в итоге десятичное число в пределах от 1 до 10. В данном случае десятичную запятую следует переместить на четыре разряда влево, опустив все нули, кроме одного незначащего:

7,0.

Итак, десятичная запятая была перемещена на четыре разряда влево, поэтому умножьте вновь полученное число на степень числа 10 с положительным показателем 4, и дело сделано:

$7{,}0\times10^4$.

Задача. Преобразуйте число 0,000 000 439 в экспоненциальную форму представления.

Решение. $\mathbf{4{,}39 \times 10^{-7}}$. Исходное число уже находится в форме десятичной дроби, поэтому оно не требует дополнительного преобразования в эту форму:

0,000 000 439.

Чтобы привести данное число к десятичному числу в пределах от 1 до 10, переместите десятичную запятую на семь разрядов вправо, опустив начальные нули:

4,39.

А поскольку десятичная запятая была перемещена на семь разрядов вправо, умножьте вновь полученное число на степень числа 10 с отрицательным показателем 7:

$4{,}39 \times 10^{-7}$.

7. Преобразуйте число 2 591 в экспоненциальную форму представления.

8. Запишите десятичную дробь 0,087 в экспоненциальном представлении.

9. Запишите число 1,000 007 83 в экспоненциальном представлении.

10. Преобразуйте число 20 002,000 02 в экспоненциальную форму представления.

Умножение и деление чисел в экспоненциальном представлении

Благодаря тому что в экспоненциальном представлении добавление значащих нулей в числа осуществляется автоматически, умножать и делить большие и малые числа в этом представлении намного проще, чем в их стандартном представлении со многими нулями.

СОВЕТ

Чтобы перемножить два числа в экспоненциальном представлении, выполните следующие действия.

1. **Перемножьте десятичные дробные части обоих чисел, чтобы найти десятичную дробную часть произведения.**

   Подробнее об умножении десятичных дробей см. в главе 8.

2. **Сложите показатели степеней числа 10, чтобы найти степень числа 10 в произведении.**

   В этом случае просто умножаются степени числа 10, как пояснялось выше, в разделе "Арифметика порядков: умножение и деление степеней числа 10".

3. **Если десятичная дробная часть произведения равна или больше 10, скорректируйте ее, переместив десятичную запятую на один разряд влево и прибавив 1 к показателю степени.**

СОВЕТ

Ниже поясняется, как разделить два числа в экспоненциальном представлении.

1. **Разделите десятичную дробную часть первого числа на аналогичную часть второго числа, чтобы найти десятичную дробную часть частного от деления.**

2. **Вычтите второй показатель степени числа 10 из первого показателя, чтобы найти степень числа 10 частного от деления.**

   В этом случае степени числа 10 просто делятся одно на другое, как пояснялось в разделе "Арифметика порядков: умножение и деление степеней числа 10" ранее в этой главе.

3. **Если десятичная дробная часть произведения меньше 1, скорректируйте ее, переместив десятичную запятую на один разряд вправо и вычтя 1 из показателя степени.**

ПРИМЕР!

Задача. Умножьте число $2{,}0\times10^3$ на число $4{,}1\times10^4$.

Решение. $8{,}2\times10^7$. Перемножьте десятичные дробные части обоих чисел:

$2{,}0 \times 4{,}1 = 8{,}2$.

Затем перемножьте степени числа 10, сложив их показатели:

$10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$.

В данном случае корректировать полученный результат не требуется, поскольку его десятичная дробная часть меньше 10.

Задача. Разделите число $3{,}4\times10^4$ на число $2{,}0\times10^9$.

Решение. $1{,}7\times10^{-5}$. Разделите десятичную дробную часть первого числа на аналогичную часть второго числа:

$3{,}4 \div 2{,}0 = 1{,}7$.

Затем разделите первую степень числа 10 на вторую, вычтя их показатели:

$10^4 \div 10^9 = 10^{4-9} = 10^{-5}$.

В данном случае корректировать полученный результат не требуется, поскольку его десятичная дробная часть больше 1.

11 Умножьте число $1{,}5\times10^7$ на число $6{,}0\times10^5$.

12 Разделите число $6{,}6\times10^8$ на число $1{,}1\times10^3$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1. В каждом случае запишите цифру 1 и столько последующих нулей, сколько указано в показатели степени числа:
   а) $10^4 = \mathbf{10\,000}$;
   б) $10^7 = \mathbf{10\,000\,000}$;
   в) $10^{14} = \mathbf{100\,000\,000\,000\,000}$;
   г) $10^{22} = \mathbf{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$.

2. В каждом случае подсчитайте сначала количество нулей, а затем запишите степень числа 10 с этим количеством в ее показателе:
   а) $1\,000\,000\,000 = \mathbf{10^9}$;
   б) $1\,000\,000\,000\,000 = \mathbf{10^{12}}$;
   в) $10\,000\,000\,000\,000\,000 = \mathbf{10^{16}}$;
   г) $100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = \mathbf{10^{32}}$.

3. Запишите десятичную дробь, начинающуюся с нулей, количество которых, включая начальный нуль, указано в показателе степени, и оканчивающуюся 1:
   а) $10^{-1} = \mathbf{0{,}1}$;
   б) $10^{-5} = \mathbf{0{,}000\,01}$;
   в) $10^{-11} = \mathbf{0{,}000\,000\,000\,01}$;
   г) $10^{-16} = \mathbf{0{,}000\,000\,000\,000\,000\,1}$.

4. В каждом случае подсчитайте сначала количество нулей, включая начальный, а затем запишите степень числа 10 с этим количеством в ее *отрицательном* показателе (со знаком "минус"):
   а) $0{,}01 = \mathbf{10^{-2}}$;
   б) $0{,}000\,001 = \mathbf{10^{-6}}$;
   в) $0{,}000\,000\,000\,001 = \mathbf{10^{-12}}$;
   г) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = \mathbf{10^{-18}}$.

5. Сложите показатели степени обоих чисел, указав полученную сумму в показателе результирующей степени числа 10:
   а) $10^9 \times 10^2 = 10^{9+2} = \mathbf{10^{11}}$;
   б) $10^5 \times 10^5 = 10^{5+5} = \mathbf{10^{10}}$;
   в) $10^{13} \times 10^{-16} = 10^{13-16} = \mathbf{10^{3}}$;
   г) $10^{100} \times 10^{21} = 10^{100+21} = \mathbf{10^{121}}$;

д) $10^{-15} \times 10^{0} = 10^{-15+0} = \mathbf{10^{-15}}$;
е) $10^{-10} \times 10^{-10} = 10^{-10+(-10)} = \mathbf{10^{-20}}$.

6 В каждом случае вычтите показатель второй степени числа 10 из первой, указав полученную разность в показателе результирующей степени числа 10:
а) $10^{6} \div 10^{4} = 10^{6-4} = \mathbf{10^{2}}$;
б) $10^{12} \div 10^{1} = 10^{12-1} = \mathbf{10^{11}}$;
в) $10^{-7} \div 10^{-7} = 10^{-7-(-7)} = \mathbf{10^{0}}$;
г) $10^{18} \div 10^{0} = 10^{18-0} = \mathbf{10^{18}}$;
д) $10^{100} \div 10^{-19} = 10^{100-(-19)} = \mathbf{10^{119}}$;
е) $10^{-50} \div 10^{50} = 10^{-50-50} = \mathbf{10^{-100}}$.

7 2591 = $\mathbf{2{,}591 \times 10^{3}}$. Запишите сначала число 2591 в форме десятичной дроби:
2591,0.
Переместите десятичную запятую на три разряда влево и опустите начальный нуль, чтобы привести десятичную дробь 2591,0 к десятичному числу в пределах от 1 до 10:
2,591.
Умножьте вновь полученное в итоге десятичное число на 10^{3}, поскольку вы переместили десятичную запятую на три разряда влево, получив искомый результат с положительным показателем степени числа 10:
$2{,}591 \times 10^{3}$.

8 0,087 = $\mathbf{8{,}7 \times 10^{-2}}$. Переместите десятичную запятую на два разряда вправо и опустите незначащий начальный нуль, чтобы привести десятичную дробь 0,087 к десятичному числу в пределах от 1 до 10:
8,7.
Умножьте вновь полученное в итоге десятичное число на 10^{-2}, поскольку вы переместили десятичную запятую на два разряда вправо, получив искомый результат с отрицательным показателем степени числа 10:
$8{,}7 \times 10^{-2}$.

9 1,000 007 83 = **1,000 007 83**. Десятичная дробь уже находится в пределах от 1 до 10 и поэтому не требует никаких изменений в экспоненциальном представлении.

10 20 002,000 02 = $\mathbf{2{,}000\,200\,002 \times 10^{4}}$. Число 20 002,000 02 уже представлено в форме десятичной дроби. Но для того чтобы привести его к десятичной дроби в пределах от 1 до 10, переместите десятичную запятую на четыре разряда влево:
2,000 200 002.

Умножьте вновь полученное в итоге десятичное число на 10^4, поскольку вы переместили десятичную запятую на три разряда влево, получив искомый результат с положительным показателем степени числа 10: $2{,}000\,200\,002 \times 10^4$.

11 $(1{,}5 \times 10^7) \times (6{,}0 \times 10^5) = \mathbf{9{,}0 \times 10^{12}}$. Перемножьте сначала десятичные дробные части обоих чисел:
$1{,}5 \times 6{,}0 = 9{,}0$.
Затем перемножьте степени числа 10:
$10^7 \times 10^5 = 10^{7+5} = 10^{12}$.
В данном случае коррекция полученного в итоге произведения не требуется, поскольку его десятичная дробная часть меньше 10.

12 $(6{,}6 \times 10^8) \div (1{,}1 \times 10^3) = \mathbf{6{,}0 \times 10^5}$. Разделите сначала десятичную дробную часть первого числа на аналогичную часть второго числа:
$6{,}6 \div 1{,}1 = 6{,}0$.
Затем разделите первую степень числа 10 на вторую, вычтя их показатели:
$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$.
В данном случае коррекция полученного в итоге частного от деления не требуется, поскольку его десятичная дробная часть больше 1.

Глава 11

Тяжелые вопросы мер и весов

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Краткий обзор английской системы мер

» Представление о метрической системе мер

» Описание некоторых приемов приблизительного представления единиц измерения метрической системы мер в английской системе мер

» Более точное взаимное преобразование единиц измерения метрической и английской систем мер

Единицы измерения связывают числа с реальным миром. Например, число 2 остается лишь отвлеченным понятием до тех пор, пока оно не будет привязано к конкретной единице измерения: 2 яблока, 2 ребенка, 2 дома, 2 гигантских кальмара и т.д. В этом случае выполнять математические операции над яблоками, детьми, домами и гигантскими кальмарами намного проще, поскольку все они являются дискретными, обособленными понятиями. Так, если требуется оперировать корзиной яблок, то выполнить четыре основные арифметические операции над ними довольно просто. В частности, яблоки можно добавить в корзину, разделить их на отдельные кучки или же выполнить любую другую операцию над ними.

Но немало вещей в мире являются не дискретными, а *непрерывными*, т.е. их трудно разделить и подсчитать по одному. Следовательно, чтобы измерить длину дороги, объем воды в ведре, вес ребенка, время выполнения задания или температуру на горе Эребус (одном из вулканов в Антарктике), потребуются соответствующие *единицы измерения*.

Двумя наиболее распространенными системами мер являются английская (применяется в США и Великобритании) и метрическая (употребляется во всем остальном мире). В этой главе сначала будут представлены обе системы мер, а затем показано, как выполнять взаимное преобразование единиц измерения в них.

Основы английской системы мер

Английская система мер чаще всего применяется в Соединенных Штатах Америки. Тем, кто родился и вырос в США, вероятно, знакомо большинство единиц измерения из этой системы мер. Наиболее употребительные единицы измерения в английской системе мер вместе с уравнениями для их взаимного преобразования приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1. Наиболее употребительные единицы измерения в английской системе мер

Единица измерения	В английской системе мер	Уравнения для преобразования
Расстояние (длина)	Дюймы (in.)	
	Футы (ft.)	12 дюймов = 1 фут
	Ярды (yd.)	3 фута = 1 ярд
	Мили (mi.)	5280 футов = 1 миля
Объем жидкости (емкость)	Жидкие унции (fl. oz.)	
	Чашки (c.)	8 жидких унций = 1 чашка
	Пинты (pt.)	2 чашки = 1 пинта
	Кварты (qt.)	2 пинты = 1 кварта
	Галлоны (gal.)	4 кварты = 1 галлон

Единица измерения	В английской системе мер	Уравнения для преобразования
Вес	Унции (oz.)	
	Фунты (lb.)	16 унций = 1 фунт
	Тонны	2000 фунтов = 1 тонна
Время	Секунды	
	Минуты	60 секунд = 1 минута
	Часы	60 минут = 1 час
	Дни	24 часа = 1 день
	Недели	7 дней = 1 неделя
	Годы	365 дней = 1 год
Температура	Градусы Фаренгейта (^{0}F)	
Скорость	Миль в час (mph)	

Чтобы пользоваться табл. 11.1, необходимо помнить следующие правила.

» Преобразование крупной единицы измерения в мелкую всегда производится умножением. Например, в 1 кварте вмещаются 2 пинты, поэтому для преобразования 10 кварт в пинты их количество следует умножить на 2:

 10 кварт × 2 = 20 пинт.

» Преобразование мелкой единицы измерения в крупную всегда производится делением. Например, в 1 ярде насчитывается 3 фута, поэтому для преобразования 12 футов в ярды их количество следует разделить на 3:

 12 футов ÷ 3 = 4 ярда.

Когда крупные единицы измерения преобразуются в очень мелкие (например, тонны в унции), умножение, возможно, придется выполнить несколько раз. Аналогично при преобразовании мелких единиц измерения в намного более крупные (например, минут в дни) деление, возможно, придется выполнить несколько раз.

СОВЕТ

По завершении преобразования единиц измерения следует произвести *смысловую проверку* полученного результата, т.е. убедиться в том, что достигнутый результат имеет смысл. Например, в результате преобразования футов в дюймы результирующее число должно получиться намного бо́льшим, чем исходное, поскольку в футе насчитывается немало дюймов.

ПРИМЕР!

Задача. Сколько минут в одном дне?

Решение. 1440 минут. В данном случае необходимо перейти от более крупной единицы измерения (дня) к более мелкой (минутам). Так, если в одном часе насчитывается 60 минут, а в одном дне — 24 часа, то эти величины следует перемножить:

60 × 24 = 1440 минут.

Таким образом, в одном дне насчитывается 1440 минут.

Задача. Если имеется 32 жидких унций, то в каком количестве пинт они вмещаются?

Решение. В **2 пинтах**. В одной чашке вмещается 8 унций, поэтому выполните деление следующим образом:

32 жидкие унции ÷ 8 = 4 чашки.

А две чашки вмещаются в одной пинте, поэтому выполните деление снова:

4 чашки ÷ 2 = 2 пинты.

Задача. 5 пинт = ___ жидких унций.

Решение. 80 жидких унций. В одной чашке вмещается 8 жидких унций, а в одной пинте — 2 чашки, поэтому в одной пинте:

8 × 2 = 16 жидких унций.

Так как в одной пинте 16 жидких унций, поэтому:

5 пинт = 5 × 16 жидких унций =

= 80 fl. oz.

Задача. 504 часа = ___ недель.

Решение. 3 недели. В одном дне насчитывается 24 часа, поэтому выполните деление следующим образом:

504 часа ÷ 24 = 21 день.

А в одной неделе насчитывается 7 дней, поэтому выполните деление снова:

21 день ÷ 7 = 3 недели.

Таким образом, 504 часам соответствуют 3 недели.

1. Найдите правильный ответ на следующие вопросы?
   а) Сколько дюймов в одном ярде?
   б) Сколько часов в одной неделе?
   в) Сколько унций в одной тонне?
   г) Сколько чашек в одном галлоне?

2. Вычислите следующие уравнения:
   а) 7 кварт = _____ чашек;
   б) 5 миль = _____ дюймов;
   в) 3 галлона = _____ жидких унций;
   г) 4 дня = _____ секунд.

3. Найдите правильный ответ на следующие вопросы?
   а) Если имеется 420 минут, то сколько часов они составляют?
   б) Если имеется 144 дюйма, то сколько ярдов они составляют?
   в) Если имеется 22 000 фунтов, то сколько тонн они составляют?
   г) Если имеется 256 жидких унций, то сколько галлонов они составляют?

4. Вычислите следующие уравнения:
   а) 168 дюймов = ____ футов;
   б) 100 кварт = _____ галлонов;
   в) 288 унций = _____ фунтов;
   г) 76 чашек = _____ кварт.

Переход к международной метрической системе

Метрическая система мер является наиболее распространенной во всем мире. Ученые и те, кто предпочитает придерживаться современной терминологии, начиная с 1960-х годов нередко называют ее *Международной системой единиц*, или *СИ*. В отличие от английской системы мер, метрическая система мер основывается исключительно на степенях числа 10 (см. главу 10). Именно это свойство метрической системы мер упрощает ее применение (естественно, после того, как она будет усвоена!) по сравнению с английской системой мер, поскольку многие расчеты в этой системе осуществляются простым перемещением десятичной запятой в соответствующую сторону.

Метрическая система мер состоит из пяти основных единиц измерения, перечисленных в табл. 11.2.

Таблица 11.2. Основные единицы измерения в метрической системе мер

Единица измерения	В метрической системе мер
Расстояние (длина)	Метры (м)
Объем жидкости (емкость)	Литры (л)
Масса (вес)	Граммы (г)
Время	Секунды (с)
Температура	Градусы Цельсия (^{0}C)

Каждую из основных метрических единиц измерения можно видоизменить с помощью соответствующих префиксов, перечисленных в табл. 11.3. Зная, каким образом действуют префиксы в метрической системе мер, можно воспользоваться ими, чтобы стали более понятными даже неизвестные единицы измерения.

Таблица 11.3. Префиксы, употребляемые в метрической системе мер

Префикс	Назначение	Число	Степень числа 10
Тера-	1 триллион	1 000 000 000 000	10^{12}
Гига-	1 миллиард	1 000 000 000	10^9

Окончание табл. 11.3

Префикс	Назначение	Число	Степень числа 10
Мега-	1 миллион	1 000 000	10^6
Кило-	1 тысяча	1000	10^3
Гекта-	1 сотня	100	10^2
Дека-	1 десяток	10	10^1
(Отсутствует)	Единица	1	10^0
Деци-	Одна десятая	0,1	10^{-1}
Санти-	Одна сотая	0,01	10^{-2}
Милли-	Одна тысячная	0,001	10^{-3}
Микро-	Одна миллионная	0,000 001	10^{-6}
Нано-	Одна миллиардная	0,000 000 001	10^{-9}

ПРИМЕР!

Задача. Сколько миллиметров в одном метре?

Решение. 1000. Префикс *милли-* означает *одну тысячную* $\left(\frac{1}{1000}\right)$, поэтому в одном метре насчитывается 1000 миллиметров.

Задача. Сила, воздействующая на объект, измеряется в старых единицах, называемых *динами*. Воспользуйтесь префиксами метрической системы мер, чтобы выяснить, сколько дин насчитывается в 14 терадинах?

Решение. 14 000 000 000 000 (14 триллионов). Префикс *тера-* означает *один триллион*, поэтому в одной терадине насчитывается 1 000 000 000 000 дин. Следовательно:

14 терадин = 14 × 1 000 000 000 000 =
= 14 000 000 000 000 дин

5 Назовите основные метрические единицы измерения для каждого из перечисленных ниже видов измерения.

а) Количество растительного масла в рецепте блюда.
б) Вес слона.
в) Объем воды в плавательном бассейне.
г) Температура воды в плавательном бассейне.
д) Длительность задержки дыхания, на которую вы способны.
е) Ваш рост.
ж) Ваш вес.
з) Дальность пробежки, на которую вы способны.

6 Запишите целое число или десятичную дробь, связав их со следующими префиксами метрической системы мер:

а) кило-;
б) милли-;
в) санти-;
г) мега-;
д) микро-;
е) гига-;
ж) нано-;
з) без префикса.

7 Найдите ответ на следующие вопросы.

а) Сколько сантиметров в одном метре?

б) Сколько миллилитров в одном литре?

в) Сколько миллиграмм в одном килограмме?

г) Сколько сантиметров в одном километре?

8 Используя известные вам префиксы метрической системы мер, вычислите каждое из следующих уравнений.

а) 75 киловатт = ____ ватт.

б) 12 секунд = ____ микросекунд.

в) 7 мегатонн = ____ тонн.

г) 400 гигагерц = ____ герц.

Взаимное преобразование единиц измерения метрической и английской систем мер

Для взаимного преобразования единиц измерения метрической и английской систем мер можно воспользоваться четырьмя уравнениями, перечисленными в первом столбце табл. 11.4.

Таблица 11.4. Переводные коэффициенты для единиц измерения метрической и английской систем мер

Уравнение преобразования	Из английской системы мер в метрическую	Из метрической системы мер в английскую
1 метр ≈ 3,26 фута	$\frac{1\ \text{м}}{3{,}26\ \text{фута}}$	$\frac{3{,}26\ \text{фута}}{1\ \text{м}}$
1 километр ≈ 0,62 мили	$\frac{1\ \text{км}}{0{,}62\ \text{мили}}$	$\frac{0{,}62\ \text{мили}}{1\ \text{км}}$
1 литр ≈ 0,26 галлона	$\frac{1\ \text{л}}{0{,}26\ \text{галлона}}$	$\frac{0{,}26\ \text{галлона}}{1\ \text{л}}$
1 килограмм ≈ 2,20 фунта	$\frac{1\ \text{кг}}{2{,}20\ \text{фунта}}$	$\frac{2{,}20\ \text{фунта}}{1\ \text{кг}}$

В остальных столбцах табл. 11.4 перечислены переводные коэффициенты (в виде простых дробей), на которые следует умножать единицы измерения при их преобразовании из английской системы мер в метрическую, и обратно. Для этого достаточно умножить преобразуемую единицу измерения на переводной коэффициент, сократив совпадающие единицы измерения как в числителе, так и в знаменателе соответствующей дроби.

СОВЕТ

Пользуйтесь всегда тем переводным коэффициентом, где *исходно* преобразуемые единицы измерения указаны в *знаменателе*. Например, чтобы преобразовать мили в километры, воспользуйтесь переводным коэффициентом с милями, указанными в знаменателе дроби $\frac{1\ \text{км}}{0{,}62\ \text{мили}}$.

Иногда возникает потребность во взаимном преобразовании таких единиц измерения, для которых прямой переводной коэффициент отсутствует. В подобных случаях следует составить *цепочку преобразований* через одну или больше промежуточных единиц измерения. Например, чтобы преобразовать сантиметры в дюймы, можно сначала перевести сантиметры в метры, затем метры в футы и, наконец, футы в дюймы. Если цепочка преобразований составлена правильно, из нее сокращаются все единицы измерения, кроме той, в которую выполняется преобразование. Для решения конкретной задачи можно составить цепочку преобразований любой длины.

СОВЕТ

Если цепочка преобразований оказывается длинной, то ее иногда стоит дополнительно преобразовать в единую дробь. С этой целью расположите все числители над единой дробной чертой, а все знаменатели под ней, сохранив знаки умножения между числами.

В цепочку преобразований могут также входить переводные коэффициенты, полученные из любых уравнений, упоминаемых в этой главе. Так, из раздела "Основы английской системы мер" в самом начале этой главы следует, что в 1 одной кварте вмещается 2 пинты, поэтому в цепочке преобразований можно воспользоваться двумя следующими переводными коэффициентами:

$$\frac{2\ \text{пинты}}{1\ \text{кварта}};\ \frac{1\ \text{кварта}}{2\ \text{пинты}}.$$

Аналогично из раздела "Переход к международной метрической системе" ранее в этой главе известно, что в 1 килограмме содержится 1000 грамм, поэтому в цепочке преобразований можно воспользоваться двумя следующими переводными коэффициентами:

$$\frac{1\ \text{кг}}{1000\ \text{г}};\ \frac{1000\ \text{г}}{1\ \text{кг}}.$$

ПРИМЕР!

Задача. Преобразуйте 5 километров в мили.

Решение. 3,1 мили. Чтобы преобразовать *исходные* километры, умножьте 5 км на переводной коэффициент с единицей измерения *км* в знаменателе:

$$5\ \text{км} \times \frac{0{,}62\ \text{мили}}{1\ \text{км}}.$$

Теперь можно сократить единицу измерения *км* в числителе и знаменателе:

$$5\ \cancel{\text{км}} \times \frac{0{,}62\ \text{мили}}{1\ \cancel{\text{км}}}$$

Вычислите конечный результат:

$$= 5 \times \frac{0{,}62\ \text{мили}}{1} = 3{,}1\,\text{мили}.$$

Имейте в виду, что если преобразование составлено правильно, то об единицах измерения можно вообще не думать. Так, километры переходят в мили автоматически!

Задача. Преобразуйте 21 грамм в фунты.

Решение. 0,0462 фунта. Преобразовать граммы непосредственно в фунты нельзя, поэтому составьте цепочку следующих преобразований:

граммы → килограммы → фунты.

Чтобы преобразовать граммы в килограммы, воспользуйтесь уравнением 1000 г = 1 кг. Умножьте исходное количество граммов на переводной коэффициент с килограммами в числителе и граммами в знаменателе дроби:

$$21\,\text{г} \times \frac{1\ \text{кг}}{1000\text{г}}.$$

Чтобы преобразовать килограммы в фунты, воспользуйтесь уравнением 1 кг = 2,2 фунта и умножьте исходное количество килограмм на переводной коэффициент с фунтами в числителе и килограммами в знаменателе дроби:

$$= 21\ \text{г} \times \frac{1\ \text{кг}}{1000\text{г}} \times \frac{2{,}2\ \text{фунта}}{1\ \text{кг}}.$$

Сократите *граммы* и *килограммы* в числителе и знаменателе:

$$= 21\ \cancel{г} \times \frac{1\ \cancel{кг}}{1000\ \cancel{г}} \times \frac{2{,}2\ \text{фунта}}{1\ \cancel{кг}}.$$

И, наконец, вычислите конечный результат:

$$= 21 \times \frac{1}{1000} \times \frac{2{,}2\ \text{фунта}}{1} =$$

$$= 0{,}021 \times 2{,}2\ \text{фунта} = 0{,}0462\ \text{фунта}.$$

По завершении преобразования единиц измерения следует произвести *смысловую проверку* полученного результата, т.е. убедиться в том, что достигнутый результат имеет смысл. Например, в результате преобразования граммов в килограммы результирующее число должно получиться намного меньшим, чем исходное, поскольку в килограмме содержится немало граммов.

9 Преобразуйте 8 километров в мили.

10 Если вы весите 72 килограмма, то каким окажется ваш вес в фунтах с точностью до ближайшего целого фунта?

11 Если ваш рост 1,8 метра, то каким он будет в дюймах с точностью до ближайшего целого дюйма?

12 Преобразуйте 100 чашек в литры, округлив результат с точностью до ближайшего целого литра.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1. Во всех заданных здесь вопросах предлагается преобразовать крупную единицу измерения в мелкую, поэтому воспользуйтесь для этой цели умножением.

   а) Сколько дюймов в одном ярде? **36 дюймов**. Если в одном футе 12 дюймов, а в одном ярде три фута, то
   $3 \times 12 = 36$ дюймов.

   б) Сколько часов в одной неделе? **168 часов**. Если в одном дне 24 часа, а в одной неделе 7 дней, то
   $24 \times 7 = 168$ часов.

   в) Сколько унций в одной тонне? **32 000 унций**. Если в одном фунте 16 унций, а в одной тонне 2000 фунтов, то
   $16 \times 2000 = 32000$ унций.

   г) Сколько чашек в одном галлоне? **16 чашек**. Если в одной пинте 2 чашки, в одной кварте 2 пинты, а в одном галлоне 4 кварты, то
   $2 \times 2 \times 4 = 16$ чашек.

2. Во всех заданных здесь уравнениях предлагается преобразовать крупную единицу измерения в мелкую, поэтому воспользуйтесь для этой цели умножением.

   а) 7 кварт = **28 чашек**. В одной пинте 2 чашки, а в одной кварте 2 пинты, поэтому
   $2 \times 2 = 4$ чашки.
   Итак, в одной кварте оказывается 4 чашки, следовательно,
   7 кварт = 7×4 чашки = 28 чашек.

   б) 5 миль = **316 800 дюймов**. В одном футе 12 дюймов, а в одной миле 5280 футов, поэтому
   $12 \times 5280 = 63\,360$ дюймов.
   Итак, в одной миле оказывается 63360 дюймов, следовательно,
   5 миль = $5 \times 63\,360$ дюймов = 316 800 дюймов.

   в) 3 галлона = **384 жидкие унции**. В одной чашке 8 жидких унций, в одной пинте 2 чашки, в одной кварте 2 пинты, а в одном галлоне 4 кварты, поэтому
   $8 \times 2 \times 2 \times 4 = 128$ жидких унций.
   Итак, в одном галлоне 128 жидких унций, следовательно,
   3 галлона = 3×128 жидких унций = 384 жидкие унции.

г) 4 дня = **345 600 секунд**. В одной минуте 60 секунд, в одном часе 60 минут, а в одном дне 24 часа, поэтому

$60 \times 60 \times 24 = 86\,400$ секунд.

Итак, в одном дне 86 400 секунд, следовательно,

4 дня = $4 \times 86\,400$ секунд = 345 600 секунд.

3 Во всех заданных здесь вопросах предлагается преобразовать мелкую единицу измерения в крупную, поэтому воспользуйтесь для этой цели делением.

а) Если имеется 420 минут, то сколько часов они составляют? **7 часов**. В одном часе 60 минут, поэтому разделите исходное количество минут на 60:

420 минут $\div$ 60 = 7 часов.

б) Если имеется 144 дюйма, то сколько ярдов они составляют? **4 ярда**. В одном футе 12 дюймов, поэтому разделите исходное количество дюймов на 12:

144 дюйма $\div$ 12 = 12 футов.

В одном ярде 3 фута, поэтому разделите полученное выше количество футов на 3:

12 футов $\div$ 3 = 4 ярда.

в) Если имеется 22 000 фунтов, то сколько тонн они составляют? **11 тонн**. В одной тонне 2000 фунтов, поэтому разделите исходное количество фунтов на 2000:

22 000 фунтов $\div$ 2000 = 11 тонн.

г) Если имеется 256 жидких унций, то сколько галлонов они составляют? **2 галлона**. В одной чашке 8 жидких унций, поэтому разделите исходное количество жидких унций на 8:

256 жидких унций $\div$ 8 = 32 чашки.

В одной пинте 2 чашки, поэтому разделите полученное выше количество чашек на 2:

32 чашки $\div$ 2 = 16 пинт.

В одной кварте 2 пинты, поэтому разделите полученное выше количество пинт на 2:

16 пинт $\div$ 2 = 8 кварт.

В одном галлоне 4 кварты, поэтому разделите полученное выше количество кварт на 4:

8 кварт $\div$ 4 = 2 галлона.

4 Во всех заданных здесь уравнениях предлагается преобразовать мелкую единицу измерения в крупную, поэтому воспользуйтесь для этой цели делением.

а) 168 дюймов = **14 футов**. В одном футе 12 дюймов, поэтому разделите исходное количество дюймов на 12:
168 дюймов ÷ 12 = 14 футов.

б) 100 кварт = **25 галлонов**. В одном галлоне 4 кварты, поэтому разделите исходное количество кварт на 4:
100 кварт ÷ 4 = 25 галлонов.

в) 288 унций = **18 фунтов**. В одном фунте 16 унций, поэтому разделите исходное количество унций на 16:
288 унций ÷ 16 = 18 фунтов.

г) 76 чашек = **19 кварт**. В одной пинте 2 чашки, поэтому разделите исходное количество чашек на 2:
76 чашек ÷ 2 = 38 пинт.
В одной кварте 2 пинты, поэтому разделите полученное выше количество пинт на 2:
38 пинт ÷ 2 = 19 кварт.

5 Назовите основные метрические единицы измерения для каждого из перечисленных ниже видов измерения. Имейте в виду, что в данном случае употребляются *только* основные метрические единицы без всяких префиксов.

а) Количество растительного масла в рецепте блюда: **в литрах**.
б) Вес слона: **в граммах**.
в) Объем воды в плавательном бассейне: **в литрах**.
г) Температура воды в плавательном бассейне: **в градусах Цельсия**.
д) Длительность задержки дыхания, на которую вы способны: **в секундах**.
е) Ваш рост: **в метрах**.
ж) Ваш вес: **в граммах**.
з) Дальность пробежки, на которую вы способны: **в метрах**.

6 Запишите целое число или десятичную дробь, связав их со следующими префиксами метрической системы мер:

а) кило-: **1000 (одна тысяча или 10^3)**;
б) милли-: **0,001 (одна тысячная или 10^{-3})**;
в) санти-: **0,01 (одна сотая или 10^{-2})**;
г) мега-: **1 000 000 (один миллион или 10^6)**;
д) микро-: **0,000 001 (одна миллионная или 10^{-6})**;
е) гига-: **1 000 000 000 (один миллиард или 10^9)**;
ж) нано-: **0,000 000 001 (одна миллиардная или 10^{-9})**;
з) без префикса: **1 (один или 10^0)**.

7. Найдите ответ на следующие вопросы.

а) Сколько сантиметров в одном метре? **100 сантиметров**.

б) Сколько миллилитров в одном литре? **1000 миллилитров**.

в) Сколько миллиграмм в одном килограмме? **1 000 000 миллиграмм**. В одном грамме 1000 миллиграмм, а в одном килограмме 1000 грамм, поэтому $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$ мг.

Следовательно, в одном килограмме содержится 1 000 000 миллиграмм.

г) Сколько сантиметров в одном километре? **100 000 сантиметров**. В одном метре 100 сантиметров, а в одном километре 1000 метров, поэтому $100 \times 1000 = 100\,000$ см

Следовательно, в одном километре содержится 100 000 сантиметров.

8. Используя известные вам префиксы метрической системы мер, вычислите каждое из следующих уравнений.

а) 75 киловатт = **75 000 ватт**. Префикс *кило-* означает *одну тысячу*, поэтому в одном киловатте насчитывается 1000 ватт; следовательно,
75 киловатт = 75×1000 ватт = 75 000 ватт.

б) 12 секунд = **12 000 000 микросекунд**. Префикс *микро-* означает *одну миллионную*, поэтому микросекунда составляет одну миллионную секунды. Таким образом, в одной секунде содержится 1 000 000 микросекунд, а следовательно,
12 секунд = $12 \times 1\,000\,000$ микросекунд = 12 000 000 микросекунд.

в) 7 мегатонн = **7 000 000 тонн**. Префикс *мега-* означает *один миллион*, поэтому в одной мегатонне содержится 1 000 000 тонн; следовательно,
7 мегатонн = $7 \times 1\,000\,000$ тонн = 7 000 000 тонн.

г) 400 гигагерц = **400 000 000 000 герц**. Префикс *гига-* означает *один миллиард*, поэтому в одном гигагерце насчитывается 1 000 000 000 герц; следовательно,
400 ГГц = $400 \times 1\,000\,000\,000$ Гц = 400 000 000 000 Гц.

9. 8 километров = **4,96 мили**. Чтобы преобразовать километры в мили, умножьте исходное количество километров на переводной коэффициент с милями в числителе и километрами в знаменателе дроби:

$$8\text{ км} \times \frac{0{,}62\text{ мили}}{1\text{ км}}.$$

Сократите единицу измерения *км* как в числителе, так и в знаменателе дроби:

$$= 8\ \cancel{\text{км}} \times \frac{0{,}62\text{ мили}}{1\ \cancel{\text{км}}}.$$

А теперь вычислите окончательный результат:

$= 8 \times 0{,}62$ мили $= 4{,}96$ мили.

10 72 килограмма = **158 фунтов** с точностью до ближайшего целого фунта. Чтобы преобразовать килограммы в фунты, умножьте исходное количество килограмм на переводной коэффициент с фунтами в числителе и килограммами в знаменателе дроби:

$72\ \text{кг} \times \frac{2{,}2\ \text{фунта}}{1\ \text{кг}}.$

Сократите единицу измерения *кг* как в числителе, так и в знаменателе дроби:

$= 72\ \cancel{\text{кг}} \times \frac{2{,}2\ \text{фунта}}{1\ \cancel{\text{кг}}} =$

$= 72 \times 2{,}2$ фунта.

Далее выполните умножение, чтобы получить следующий результат:

= 158,4 фунтов.

Округлите этот результат до ближайшего целого фунта:

≈ 158 фунтов.

11 1,8 метра ≈ **70 дюймов** с точностью до ближайшего целого дюйма. Преобразовать метры непосредственно в дюймы нельзя, поэтому составьте сначала цепочку следующих преобразований:

метры → футы → дюймы.

Затем преобразуйте метры в футы с помощью переводного коэффициента, где в знаменателе дроби указаны метры:

$1{,}8\ \text{м} \times \frac{3{,}26\ \text{фута}}{1\ \text{м}}.$

Далее преобразуйте футы в дюймы с помощью переводного коэффициента, где в знаменателе дроби указаны футы:

$= 1{,}8\ \text{м} \times \frac{3{,}26\ \text{фута}}{1\ \text{м}} \times \frac{12\ \text{дюймов}}{1\ \text{фут}}.$

Сократите единицы измерения *м* и *фут* как в числителе, так и в знаменателе дроби:

$= 1{,}8\ \cancel{\text{м}} \times \frac{3{,}26\ \cancel{\text{фута}}}{1\ \cancel{\text{м}}} \times \frac{12\ \text{дюймов}}{1\ \cancel{\text{фут}}}.$

После этого выполните умножение, чтобы получить следующий результат:

= 70,416 дюйма.

Округлите этот результат до ближайшего целого дюйма:

≈ 70 дюймов.

12 100 чашек ≈ **24 литра** с точностью до ближайшего целого литра. Преобразовать чашки непосредственно в литры нельзя, поэтому составьте сначала цепочку следующих преобразований:

чашки → пинты → кварты → галлоны → литры.

Затем преобразуйте чашки в пинты:

$$100 \text{ чашек} \times \frac{1 \text{ пинта}}{2 \text{ чашки}}.$$

Далее преобразуйте пинты в кварты:

$$= 100 \text{ чашек} \times \frac{1 \text{ пинта}}{2 \text{ чашки}} \times \frac{1 \text{ кварта}}{2 \text{ пинты}}.$$

После этого преобразуйте кварты в галлоны:

$$= 100 \text{ чашек} \times \frac{1 \text{ пинта}}{2 \text{ чашки}} \times \frac{1 \text{ кварта}}{2 \text{ пинты}} \times \frac{1 \text{ галлон}}{4 \text{ кварты}}.$$

И, наконец, преобразуйте галлоны в литры:

$$= 100 \text{ чашек} \times \frac{1 \text{ пинта}}{2 \text{ чашки}} \times \frac{1 \text{ кварта}}{2 \text{ пинты}} \times \frac{1 \text{ галлон}}{4 \text{ кварты}} \times \frac{1 \text{ л}}{0{,}26 \text{ галлона}}.$$

А теперь сократите все единицы измерения, кроме *литров*:

$$= 100 \cancel{\text{ чашек}} \times \frac{1 \cancel{\text{ пинта}}}{2 \cancel{\text{ чашки}}} \times \frac{1 \cancel{\text{ кварта}}}{2 \cancel{\text{ пинты}}} \times \frac{1 \cancel{\text{ галлон}}}{4 \cancel{\text{ кварты}}} \times \frac{1 \text{ л}}{0{,}26 \cancel{\text{ галлона}}} =$$

$$= 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1 \text{ л}}{0{,}26}.$$

Во избежание путаницы составьте приведенную выше цепочку преобразований в виде единой дроби:

$$\frac{100 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \text{ л}}{2 \times 2 \times 4 \times 0{,}26} = \frac{100 \text{ л}}{4{,}16}.$$

Выполните десятичное деление, чтобы получить следующий результат с точностью хотя бы до одного десятичного знака:

$\approx 24{,}04$ л.

Округлите этот результат до ближайшего целого литра:

≈ 24 л.

Глава 12

Обретение формы с помощью геометрии

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Определение площади треугольника

» Применение теоремы Пифагора

» Нахождение площади круга и длины окружности

» Вычисление объема различных геометрических тел

Геометрия — дисциплина, изучающая формы и фигуры. Она широко распространена еще со времен Древней Греции среди архитекторов, инженеров, плотников, конструкторов роботов и преподавателей математики в средней школе.

Форма — это любая замкнутая двухмерная геометрическая фигура, имеющая внутреннее и внешнее пространство, а *геометрическое тело* отличается от формы лишь тем, что оно трехмерно. В этой главе рассматриваются три главные формы: четырехугольники, треугольники и окружности. В ней будет показано, как найти площадь, а в некоторых случаях — *периметр* (общую длину границы) этих форм. Здесь будет также уделено внимание различным геометрическим телам и пояснено, как находить объем каждого из них.

Вхождение в форму: основы многоугольников и немногоугольников

Формы можно разделить на два основных типа: многоугольники и немногоугольники. У *многоугольников* прямые стороны, их можно легко разделить на категории по количеству сторон, как показано ниже.

Многоугольник	Количество сторон
Треугольник	3
Четырехугольник	4
Пятиугольник	5
Шестиугольник	6
Семиугольник	7
Восьмиугольник	8

Любая форма, имеющая хотя бы одну кривую сторону, называется *немногоугольником*. Наиболее распространенным типом немногоугольника является окружность.

ЗАПОМНИ!

Площадь формы (ее внутреннее пространство) обычно измеряется в таких квадратных единицах, как квадратные дюймы (in.^{2}), квадратные метры (м^2) или квадратные километры (км^2). Если в решаемой задаче употребляются разные единицы измерения (например, дюймы и футы), придется выполнить их взаимное преобразование, прежде чем выполнять математические операции (подробнее о взаимном преобразовании единиц измерения см. в главе 11).

Обтесывание четырехугольников со всех сторон

Любая форма с четырьмя сторонами называется *четырехугольником*. К категории четырехугольников относятся квадраты, прямоугольники, ромбы, параллелограммы и трапеции, а также целый ряд неправильных форм. В этом разделе поясняется, как найти площадь (S), а в некоторых случаях — периметр (P) этих пяти типов четырехугольников.

У *квадрата* имеются четыре прямых угла и четыре равные стороны. Чтобы найти площадь и периметр квадрата, достаточно воспользоваться приведенными ниже формулами, где l — длина стороны квадрата (рис. 12.1).

$$S = l^2$$
$$P = 4 \times l$$

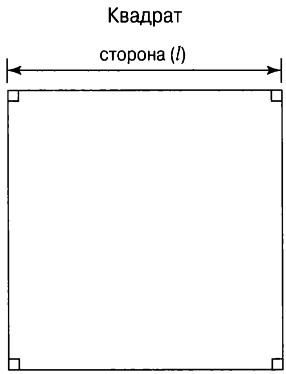


Рис. 12.1. Площадь и периметр квадрата определяются по длине его стороны (l)

У прямоугольника имеются четыре прямых угла и противоположные равные стороны. Длинная сторона прямоугольника называется его *длиной*, а короткая сторона — *шириной*. Чтобы найти площадь и периметр прямоугольника, достаточно воспользоваться приведенными ниже формулами, где l — длина стороны, а w — ширина (рис. 12.2).

$$S = l \times w$$
$$P = 2 \times (l + w)$$

Рис. 12.2. Площадь и периметр прямоугольника определяются по его длине (l) и ширине (w)

Ромб похож на скошенный квадрат. У него имеются четыре равные стороны, но не все его углы обязательно прямые. Аналогично *параллелограмм* похож на скошенный прямоугольник. Его противоположные стороны равны, но не все его углы обязательно прямые. Чтобы найти площадь ромба или параллелограмма, достаточно воспользоваться приведенной ниже формулой, где b — длина основания (т.е. нижней или верхней стороны), а h — высота (кратчайшее расстояние между двумя сторонами; см. также рис. 12.3).

$$S = b \times h$$

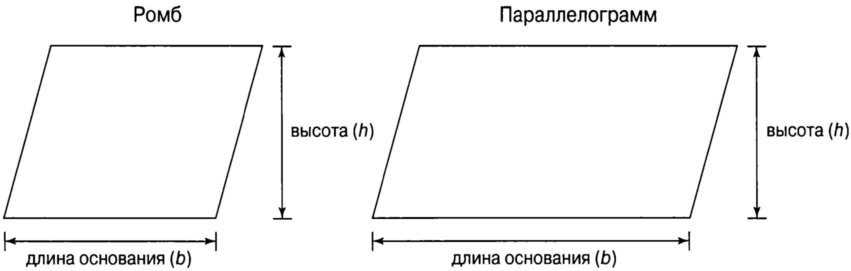


Рис. 12.3. Площадь ромба или параллелограмма определяется по длине его основания (b) и высоте (h)

Трапеция — это такой четырехугольник, который отличается наличием двух параллельных оснований (верхней и нижней сторон). Чтобы найти площадь трапеции, достаточно воспользоваться приведенной ниже формулой, где b_1 и b_2 — длины двух оснований, а h — высота (кратчайшее расстояние между двумя сторонами; см. также рис. 12.4).

$$S = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

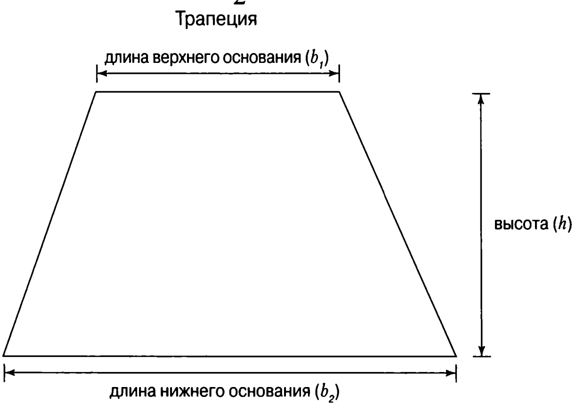


Рис. 12.4. Площадь трапеции определяется по длине двух оснований (b_1 и b_2) и высоте (h)

ПРИМЕР!

Задача. Найдите площадь и периметр квадрата со стороной 5 дюймов.

Решение. Площадь квадрата равна 25 кв. дюймов, а периметр — 20 дюймов.

$A = l^2 = (5 \text{ дюймов})^2 = 25$ кв. дюймов.

$P = 4 \times l = 4 \times 5$ дюймов $= 20$ дюймов.

Задача. Найдите площадь параллелограмма с основанием 4 фута и высотой 3 фута.

Решение. Площадь равна 12 кв. футов.

$S = b \times h = 4$ фута $\times$ 3 фута $= 12$ кв. футов

Задача. Найдите площадь и периметр прямоугольника длиной 9 см и шириной 4 см.

Решение. Площадь прямоугольника равна 36 см², а периметр — 26 см.

$S = l \times w = 9 \text{ см} \times 4 \text{ см} = 36 \text{ см}^2$;

$P = 2 \times (l + w) = 2 \times (9 \text{ см} + 4 \text{ см}) =$
$= 2 \times 13 \text{ см} = 26 \text{ см}$.

Задача. Найдите площадь трапеции с основаниями 3 и 5 метров и высотой 2 метра.

Решение. Площадь равна 8 м^2.

$$S = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h =$$
$$= \frac{1}{2} \times (3 \text{ м} + 5 \text{ м}) \times 2 \text{ м} =$$
$$= \frac{1}{2} \times (8\text{м} \times 2\text{м}) = 8 \text{ м}^2$$

---

1. Какова площадь и периметр квадрата со стороной 9 миль?

2. Найдите площадь и периметр квадрата со стороной 31 сантиметр.

3. Найдите площадь и периметр прямоугольника длиной 10 дюймов и шириной 5 дюймов.

4. Определите площадь и периметр прямоугольника длиной 23 км и шириной 19 км.

5. Какова площадь ромба с основанием 9 м и высотой 6 м?

6. Найдите площадь параллелограмма с основанием 17 ярдов и высотой 13 ярдов.

7. Определите площадь трапеции с длиной оснований 6 и 8 футов и высотой 5 футов.

8. Какова площадь трапеции с длиной оснований 15 и 35 миллиметров и высотой 21 миллиметр?

Тройная польза от треугольников

Любая форма с тремя сторонами является *треугольником*. Чтобы найти площадь треугольника, достаточно воспользоваться приведенной ниже формулой, где b — длина основания (одной стороны треугольника), а h — высота треугольника (кратчайшее расстояние от основания до противоположного угла; см. также рис. 12.5).

$$S = \frac{1}{2} \times b \times h$$

Любой треугольник, один угол которого равен 90 градусам, называется *прямоугольным*. Прямоугольный треугольник относится к числу самых главных форм в геометрии. В действительности дисциплина под названием *тригонометрия*, всецело посвященная изучению треугольников, начинается с формулирования основных выводов и наблюдений, сделанных в отношении прямоугольных треугольников.

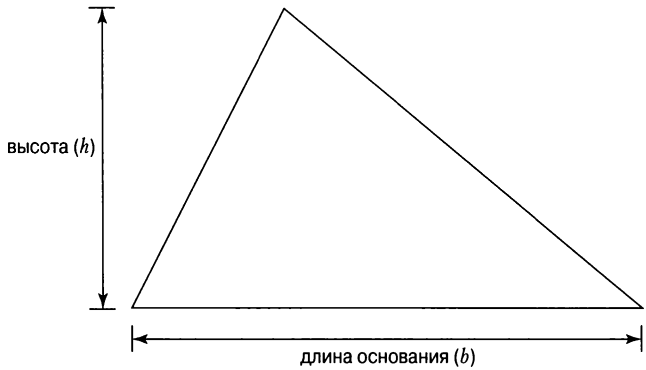


Рис. 12.5. Площадь треугольника определяется по длине его основания (б) и высоте (h)

Самая длинная сторона (c) прямоугольного треугольника называется *гипотенузой*, а обе короткие стороны (a и b) — *катетами*. Самая главная формула прямоугольного треугольника, называемая *теоремой Пифагора*, позволяет найти длину гипотенузы, при условии, что задана длина его катетов:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Действие теоремы Пифагора наглядно показано на рис. 12.6.

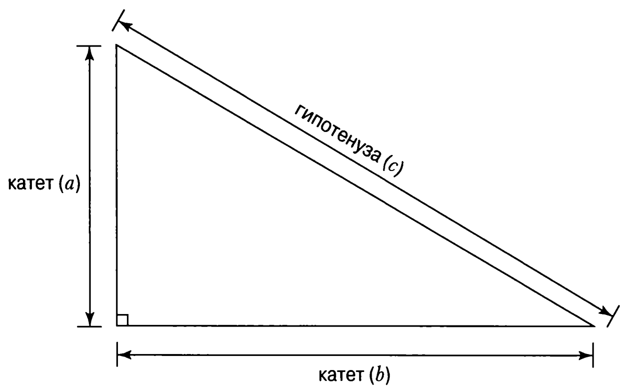


Рис. 12.6. Определение длины гипотенузы (с) прямоугольного треугольника по теореме Пифагора

ПРИМЕР!

Задача. Найдите площадь треугольника с основанием 5 метров и высотой 6 метров.

Решение. 15 м².

$S=\frac{1}{2}\times 5\text{м}\times 6\text{м}=15\ \text{м}^2$

Задача. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника по длине его катетов 6 и 8 дюймов.

Решение. 10 дюймов. Воспользуйтесь теоремой Пифагора, чтобы найти длину гипотенузы (c):

$$a^2 + b^2 = c^2;$$
$$6^2 + 8^2 = c^2;$$
$$36 + 64 = c^2;$$
$$100 = c^2.$$

Таким образом, длина гипотенузы (c) равна 10 дюймам, поскольку $10 \times 10 = 100$ (c^2).

9 Какова площадь треугольника с основанием 7 сантиметров и высотой 4 сантиметра?

10 Найдите площадь треугольника с основанием 10 километров и высотой 17 километров.

11 Найдите площадь треугольника с основанием 2 фута и высотой 33 дюйма.

12 Определите длину гипотенузы прямоугольного треугольника по длине его катетов 3 и 4 мили.

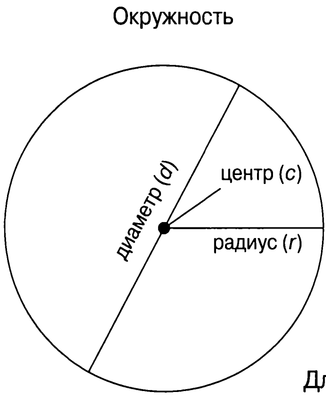
13 Какова длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами длиной 5 и 12 миллиметров?

14 Вычислите длину гипотенузы прямоугольного треугольника по длине его катетов 8 и 15 футов.

Хождение по кругу, измеряя окружность

Окружность — это совокупность точек, находящихся на одинаковом расстоянии от расположенной внутри точки (центра). Ниже поясняется ряд терминов, которыми удобно пользоваться, обсуждая окружности (рис. 12.7).

- *Центр* (c) окружности — это точка, находящаяся на одинаковом расстоянии от любой точки, расположенной на самой окружности.
- *Радиус* (r) окружности — это расстояние от любой точки, расположенной на самой окружности, до ее центра.
- *Диаметр* (d) окружности — это расстояние от одной точки на окружности, проложенное через центр к противоположной точке на окружности.



$d = 2 \times r$

Площадь круга $= \pi \times r^2$

Длина окружности $= 2 \times \pi \times r$

Рис. 12.7. Определение площади круга и длины окружности по ее радиусу (r)

Чтобы найти площадь (S) круга, достаточно воспользоваться следующей формулой.

$$S = \pi \times r^2$$

ЗАПОМНИ!

Знак π обозначает число *пи*. Его можно выразить в виде бесконечной десятичной дроби. Поэтому точного значения числа π не существует. Тем не менее число 3,14 служит неплохим приближением, которым можно пользоваться для решения задач по расчету параметров окружностей. (Однако если в решении задачи используется приближение, то вместо знака = употребляется знак $\approx$.)

Периметр окружности имеет специальное название: *длина окружности* (C). Ниже перечислены формулы для определения длины окружности.

$$C = 2 \times \pi \times r$$

$$C = \pi \times d$$

Эти формулы одинаково служат для определения длины окружности, поскольку диаметр окружности всегда в два раза больше ее радиуса, как следует из рис. 12.7. И это обстоятельство приводит к следующей формуле.

$$d = 2 \times r$$

ПРИМЕР!

Задача. Каков диаметр окружности радиусом 3 дюйма?

Решение. 6 дюймов.

$d = 2 \times r = 2 \times 3$ дюйма $= 6$ дюймов.

Задача. Какова приблизительная длина окружности радиусом 4 фута?

Решение. 25,12 фута.

$C = 2\pi \times r;$
$\approx 2 \times 3{,}14 \times 4$ фута$=$
$= 25{,}12$ футов.

Задача. Какова приблизительная площадь круга радиусом 10 миллиметров?

Решение. 314 мм².

$S = \pi \times r^2;$
$\approx 3{,}14 \times (10\ \text{мм})^2 =$
$= 3{,}14 \times 100\ \text{мм}^2 =$
$= 3{,}14\ \text{мм}^2.$

15 Какова приблизительная площадь круга и длина окружности радиусом 3 километра?

16 Определите приблизительную площадь круга и длину окружности радиусом 12 ярдов.

17. Найдите приблизительную площадь круга и длину окружности диаметром 52 сантиметра.

18. Рассчитайте приблизительную площадь круга и длину окружности диаметром 86 дюймов.

Приобретение навыков вычисления объема геометрических тел

Геометрические тела возвращают нас к реальности, внося третье измерение. К простейшим формам геометрических тел относится *куб*, состоящий из шести одинаковых граней. Чтобы найти объем куба, следует воспользоваться приведенной ниже формулой, где l — длина стороны любой грани куба (рис. 12.8).

$$V = l^3$$

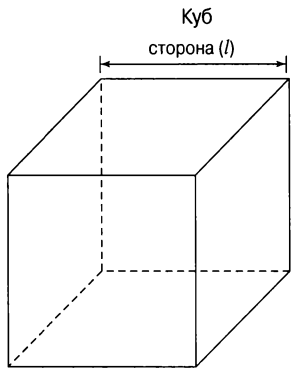


Рис. 12.8. Объем куба определяется по длине стороны (l) любой его грани

Параллелепипед — это геометрическое тело с шестью прямоугольными гранями. Чтобы найти объем параллелепипеда, достаточно воспользоваться приведенной ниже формулой, где l — длина, w — ширина, а h высота (рис. 12.9).

$$V = l \times w \times h$$

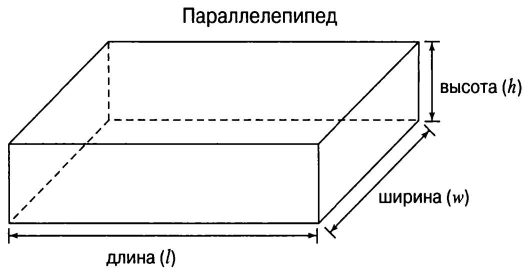


Рис. 12,9. Объем параллелепипеда определяется по длине (l), ширине (w) и высоте (h)

Призма — это геометрическое тело с двумя одинаковыми параллельными основаниями и постоянным поперечным сечением. Это означает, что, как бы ни разрезать призму параллельно ее основаниям, поперечное сечение всегда будет такого же размера и формы, как и у ее оснований. А *цилиндр* — это геометрическое тело с двумя одинаковыми параллельными круглыми основаниями и постоянным поперечным сечением. Чтобы найти объем призмы или цилиндра, достаточно воспользоваться приведенной ниже формулой, где S_b — площадь основания, а h — высота (рис. 12.10). Соответствующие формулы для определения объема разных геометрических тел и площади фигур приведены на протяжении всей этой главы.

$$V = S_b \times h$$

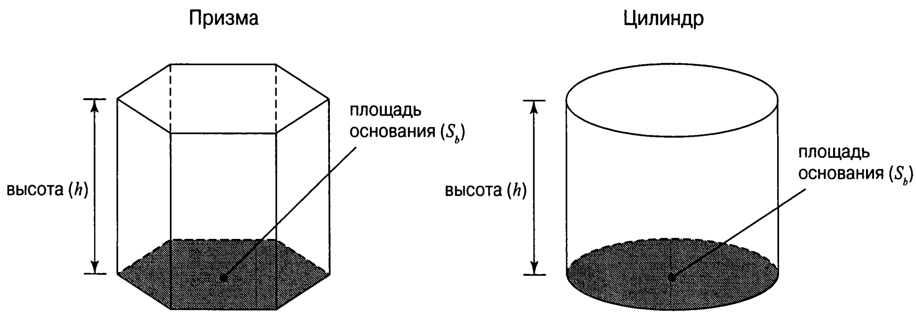


Рис. 12.10. Объем призмы или цилиндра определяется по площади основания (S_b) и высоте (h)

Пирамида — это геометрическое тело с многоугольником (т.е. формой с прямыми сторонами) в основании и прямыми линиями, исходящими из сторон основания и сходящимися в одной точке. Аналогично *конус* — это геометрическое тело с окружностью в основании и прямыми линиями, исходящими из каждой точки на краю основания и сходящимися в одной точке. Объем пирамиды определяется по такой же формуле, как и объем конуса. Эта формула приведена ниже, где S_b — площадь основания, а h — высота (рис. 12.11).

$$V = \frac{1}{3} \times S_b \times h$$

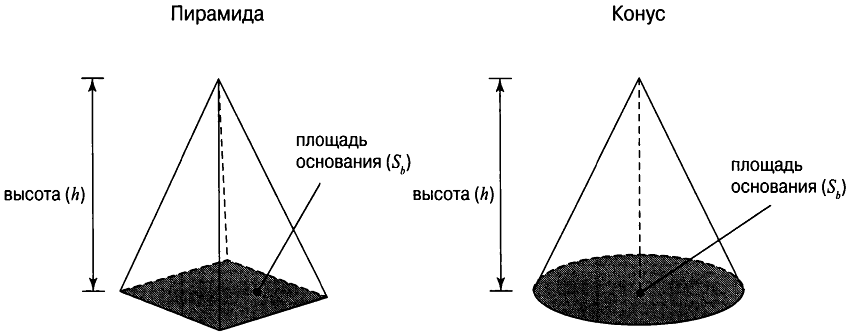


Рис. 12.11. Объем пирамиды или конуса определяется по площади основания (S_b) и высоте (h)

ЗАПОМНИ!

Объем, как правило, измеряется в таких единицах, как кубические сантиметры (см^3) или кубические футы (ft.^{3}).

ПРИМЕР!

Задача. Каков объем куба со стороной 4 сантиметра.

Решение. 64 см^3.

$V = l^3 = (4\ \text{см})^3 = 4\ \text{см} \times 4\ \text{см} \times 4\ \text{см} = 64\ \text{см}^3$.

Задача. Найдите объем пирамиды с квадратным основанием, сторона которого равна 10 дюймам, и высотой 6 дюймов.

Решение. 200 куб. дюймов. Сначала найдите площадь основания пирамиды по формуле для определения площади квадрата.

$S_b = l^2 = (10\ \text{дюймов})^2 = 100\ \text{кв. дюймов}$

А теперь подставьте полученный выше результат в формулу для определения объема пирамиды.

$$V = \frac{1}{3} \times S_b \times h;$$

$$= \frac{1}{3} \times 100\ \text{кв. дюймов} \times 6\ \text{дюймов} = 200\ \text{куб. дюймов}.$$

Задача. Определите объем параллелепипеда, размеры которого составляют 7 дюймов в длину, 4 дюйма в ширину и 2 дюйма в высоту.

Решение. 56 куб. дюймов.

$V = l \times w \times h =$ 7 дюймов × 4 дюйма × × 2 дюйма = 56 куб. дюймов.

Задача. Найдите объем призмы с основанием, площадь которого равна 6 квадратным сантиметрам, и высотой 3 сантиметра.

Решение. 18 см^3.

$V = S_b \times h = 6 \text{ см}^2 \times 3 \text{ см} = 18 \text{ см}^3$.

Задача. Определите приблизительный объем цилиндра с основанием, радиус окружности которого равен 2 футам, и высотой 8 футов.

Решение. 100,48 куб. футов.

Сначала найдите приблизительную площадь основания цилиндра по формуле для определения площади круга.

$S_b = \pi \times r^2;$

$\approx 3{,}14 \times (2 \text{ фута})^2 =$

$= 3{,}14 \times 4$ кв. фута $=$

$= 12{,}56$ кв. футов.

А теперь подставьте полученный выше результат в формулу для определения объема призмы и цилиндра.

$V = S_b \times h;$

$= 12{,}56$ кв. футов $\times 8$ футов $=$

$= 100{,}48$ куб. футов.

Задача. Найдите приблизительный объем конуса с основанием, радиус окружности которого равен 2 метрам, и высотой 3 метра.

Решение. 12,56 м^3.

Сначала найдите приблизительную площадь основания конуса по формуле для определения площади круга.

$S_b = \pi \times r^2;$

$\approx 3{,}14 \times (2 \text{ м})^2 =$

$= 3{,}14 \times 4 \text{ м}^2 =$

$= 12{,}56 \text{ м}^2.$

А теперь подставьте полученный выше результат в формулу для определения объема пирамиды и конуса.

$V = \frac{1}{3} \times S_b \times h;$

$= \frac{1}{3} \times 12{,}56 \text{ м}^2 \times 3 \text{ м} =$

$= 12{,}56 \text{ м}^3.$

19. Найдите объем куба со стороной 19 метров.

20. Найдите объем параллелепипеда длиной 18 сантиметров, шириной 14 сантиметров и высотой 10 сантиметров.

21. Определите приблизительный объем цилиндра с основанием, радиус окружности которого равен 7 миллиметрам, и высотой 16 миллиметров.

22. Определите приблизительный объем конуса с основанием, радиус окружности которого равен 3 дюймам, и высотой 8 дюймов.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

1. **Площадь равна 81 кв. миле, а периметр — 36 милям.** Для определения площади и периметра квадрата воспользуйтесь следующими формулами.

$$S = l^2 = (9 \text{ миль})^2 = 81 \text{ кв. миля}.$$
$$P = 4 \times l = 4 \times 9 \text{ миль} = 36 \text{ миль}.$$

2. **Площадь равна 961 см², а периметр — 124 см**. Подставьте заданное значение длины стороны квадрата вместо параметра l в приведенных ниже формулах для определения площади и периметра квадрата.

$$S = l^2 = (31 \text{ см})^2 = 961 \text{ см}^2.$$
$$P = 4 \times l = 4 \times 31 \text{ см} = 124 \text{ см}.$$

3. **Площадь равна 50 кв. дюймам, а периметр — 30 дюймам**. Подставьте заданные значения длины и ширины вместо параметров l и w соответственно в приведенных ниже формулах для площади и периметра прямоугольника.

$$S = l \times w = 10 \text{ дюймов} \times 5 \text{ дюймов} = 50 \text{ кв. дюймов}.$$
$$P = 2 \times (l + w) = 2 \times (10 \text{ дюймов} + 5 \text{ дюймов}) = 30 \text{ дюймов}.$$

4. **Площадь равна 437 км², а периметр — 84 км**. Воспользуйтесь формулами для определения площади и периметра прямоугольника, как показано ниже.

$$S = l \times w = 23 \text{ км} \times 19 \text{ км} = 437 \text{ км}^2.$$
$$P = 2 \times (l + w) = 2 \times (23 \text{ км} + 19 \text{ км}) = 84 \text{ км}.$$

5. **Площадь равна 54 м²**. Воспользуйтесь формулой для определения площади параллелограмма и ромба, как показано ниже.

$$S = b \times h = 9 \text{ м} \times 6 \text{ м} = 54 \text{ м}^2.$$

6. **Площадь равна 221 кв. ярд**. Воспользуйтесь формулой для определения площади параллелограмма и ромба, как показано ниже.

$$S = b \times h = 17 \text{ ярдов} \times 13 \text{ ярдов} = 221 \text{ кв. ярд}.$$

7. **Площадь равна 35 кв. футам**. Подставьте заданные значения длины оснований и высоты вместо соответствующих параметров в приведенной ниже формуле для определения площади трапеции.

$$S = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h;$$
$$= \frac{1}{2} \times (6 \text{ футов} + 8 \text{ футов}) \times 5 \text{ футов} =$$
$$= \frac{1}{2} \times 14 \text{ футов} \times 5 \text{ футов} =$$
$$= 35 \text{ кв. футов.}$$

8. **Площадь равна 525 мм²**. Подставьте заданные значения длины оснований и высоты вместо соответствующих параметров в приведенной ниже формуле для определения площади трапеции.

$$S = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h;$$
$$= \frac{1}{2} \times (15 \text{ мм} + 35 \text{ мм}) \times 21 \text{ мм} =$$
$$= \frac{1}{2} \times 50 \text{ мм} \times 21 \text{ мм} =$$
$$= 525 \text{ мм}^2.$$

9. **Площадь равна 14 см²**. Воспользуйтесь формулой для определения площади треугольника, как показано ниже.

$$S = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 7 \text{ см} \times 4 \text{ см} = 14 \text{ см}^2.$$

10. **Площадь равна 85 км²**. Воспользуйтесь формулой для определения площади треугольника, как показано ниже.

$$S = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 10 \text{ км} \times 17 \text{ км} = 85 \text{ км}^2.$$

11. **Площадь равна 396 кв. дюймам**. Сначала преобразуйте футы в дюймы, принимая во внимание, что в одном футе насчитывается 12 дюймов:
2 фута = 24 дюйма.
Теперь воспользуйтесь формулой для определения площади треугольника, как показано ниже.

$$S = \frac{1}{2} \times b \times h;$$
$$= \frac{1}{2} \times 24 \text{ дюйма} \times 33 \text{ дюйма} =$$
$$= 396 \text{ кв. дюймов.}$$

Примечание: если вместо этого вы преобразовали дюймы в футы, то искомая площадь треугольника должна быть равна 2,75 кв. фута, что также правильно.

⓬ **5 миль**. Воспользуйтесь теоремой Пифагора, чтобы определите длину гипотенузы (c) прямоугольного треугольника, как показано ниже.

$$a^2 + b^2 = c^2;$$
$$3^2 + 4^2 = c^2;$$
$$9 + 16 = c^2;$$
$$25 = c^2.$$

Таким образом, длина гипотенузы (c) равна 5 милям, поскольку $5 \times 5 = 25$ (c^2).

⓭ **13 мм**. Воспользуйтесь теоремой Пифагора, чтобы определить длину гипотенузы (c) прямоугольного треугольника, как показано ниже.

$$a^2 + b^2 = c^2;$$
$$5^2 + 12^2 = c^2;$$
$$25 + 144 = c^2;$$
$$169 = c^2.$$

Таким образом, длина гипотенузы (c) равна 13 мм, поскольку гипотенуза длиннее самого длинного катета и методом проб и ошибок можно установить, что $13 \times 13 = 169$ (c^2).

⓮ **17 футов**. Воспользуйтесь теоремой Пифагора, чтобы определить длину гипотенузы (c) прямоугольного треугольника, как показано ниже.

$$a^2 + b^2 = c^2;$$
$$8^2 + 15^2 = c^2;$$
$$64 + 225 = c^2;$$
$$289 = c^2.$$

Таким образом, длина гипотенузы (c) равна 17 мм, поскольку гипотенуза длиннее самого длинного катета и методом проб и ошибок можно установить, что $17 \times 17 = 289$ (c^2).

⓯ **Площадь круга приблизительно равна 28,26 км^2, а длина окружности — 18,84 км**. Воспользуйтесь сначала формулой для определения площади круга, как показано ниже.

$$S = \pi \times r^2;$$
$$\approx 3{,}14 \times (3 \text{ км})^2 =$$
$$= 3{,}14 \times 9 \text{ км}^2 =$$
$$= 28{,}26 \text{ км}^2.$$

Затем воспользуйтесь формулой для определения длины окружности, как показано ниже.

$$C = 2\pi \times r;$$
$$\approx 2 \times 3{,}14 \times 3 \text{ км} =$$
$$= 18{,}84 \text{ км}.$$

16 **Площадь круга приблизительно равна 452,16 кв. ярда, а длина окружности — 75,36 ярда**. Воспользуйтесь сначала формулой для определения площади круга, как показано ниже.

$$S = \pi \times r^2;$$
$$\approx 3{,}14 \times (12 \text{ ярдов})^2 =$$
$$= 3{,}14 \times 144 \text{ кв. ярда} =$$
$$= 452{,}16 \text{ кв. ярда.}$$

Затем воспользуйтесь формулой для определения длины окружности, как показано ниже.

$$C = 2\pi \times r;$$
$$\approx 2 \times 3{,}14 \times 12 \text{ ярдов} =$$
$$= 75{,}36 \text{ ярдов.}$$

17 **Площадь круга приблизительно равна 2122,64 см^2, а длина окружности — 163,28 см**. Если диаметр окружности равен 52 см, то ее радиус в два раза меньше, т.е. 26 см. Воспользуйтесь сначала формулой для определения площади круга.

$$S = \pi \times r^2;$$
$$\approx 3{,}14 \times (26 \text{ см})^2 =$$
$$= 3{,}14 \times 676 \text{ см} =$$
$$= 2122{,}64 \text{ см}^2.$$

Затем воспользуйтесь формулой для определения длины окружности.

$$C = 2\pi \times r;$$
$$\approx 2 \times 3{,}14 \times 26 \text{ см} =$$
$$= 163{,}28 \text{ см.}$$

18 **Площадь круга приблизительно равна 5805,86 кв. дюйма, а длина окружности — 270,04 дюйма**. Если диаметр окружности равен 86 дюймам, то ее радиус в два раз меньше, т.е. 43 дюйма. Воспользуйтесь сначала формулой для определения площади круга, как показано ниже.

$$S = \pi \times r^2;$$
$$\approx 3{,}14 \times (43 \text{ дюйма})^2 =$$
$$= 3{,}14 \times 1849 \text{ дюймов} =$$
$$= 5805{,}86 \text{ кв. дюймов.}$$

Затем воспользуйтесь формулой для определения длины окружности.

$$C = 2\pi \times r;$$
$$\approx 2 \times 3{,}14 \times 43 \text{ дюйма} =$$
$$= 270{,}04 \text{ дюймов.}$$

19 **Объем равен 6859 м³**. Подставьте заданное значение длины стороны квадрата вместо параметра l в приведенной ниже формуле для определения объема куба.

$$V = l^3 = (19\ \text{м})^3 = 6859\ \text{м}^3.$$

20 **Объем равен 2520 см³**. Воспользуйтесь формулой для определения объема параллелепипеда, как показано ниже.

$$V = l \times w \times h = 18\ \text{см} \times 14\ \text{см} \times 10\ \text{см} = 2520\ \text{см}^3.$$

21 **Объем равен 2461,76 мм³**. Сначала воспользуйтесь формулой для определения площади круга, образующего основание цилиндра.

$$\begin{aligned} S_b &= \pi \times r^2; \\ &\approx 3{,}14 \times (7\ \text{мм})^2 = \\ &= 3{,}14 \times 49\ \text{мм} = \\ &= 153{,}86\ \text{мм}^2. \end{aligned}$$

Затем подставьте полученный выше результат в формулу для определения объема призмы и цилиндра, как показано ниже.

$$\begin{aligned} V &= S_b \times h; \\ &= 153{,}86\ \text{мм}^2 \times 16\ \text{мм} = 2461{,}76\ \text{мм}^3. \end{aligned}$$

22 **Объем равен 75,36 куб. дюйма**. Сначала воспользуйтесь формулой для определения площади круга, образующего основание конуса.

$$\begin{aligned} S_b &= \pi \times r^2; \\ &\approx 3{,}14 \times (3\ \text{дюйма})^2 = \\ &= 3{,}14 \times 9\ \text{кв. дюймов} = \\ &= 28{,}26\ \text{кв. дюймов}. \end{aligned}$$

Затем подставьте полученный выше результат в формулу для определения объема пирамиды и конуса, как показано ниже.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times S_b \times h; \\ &= \frac{1}{3} \times 28{,}26\ \text{кв. дюймов} \times 8\ \text{дюймов} = \\ &= 75{,}36\ \text{куб. дюймов}. \end{aligned}$$

Глава 13

Построение двумерных графиков

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

- » Представление о двумерных графиках
- » Нанесение точек и проведение линий на двумерных графиках

График служит удобным средством наглядного представления сведений о числах. Графики зачастую применяются в отчетах по работе, рекламных брошюрах, газетах и журналах, т.е. везде, где требуется ясно и доходчиво представить числовые данные. В этой главе поясняется, как обращаться с двумерным графиком как наиболее распространенным в математике.

Представление о двумерных графиках

Как упоминалось выше, в математике чаще применяются двумерные графики, которые строятся на *координатной плоскости* в так называемой *прямоугольной* или *декартовой системе координат*. По существу, двумерный график состоит из двух числовых осей, пересекающихся под прямым углом в нулевой точке. Эти числовые оси носят названия *оси абсцисс*, или *оси* x, проходящей по горизонтали, а также *оси ординат*, или *оси* y, проходящей по вертикали. Обе эти оси пересекаются в точке, называемой *началом координат*.

Каждая точка на двумерном графике обозначается парой чисел в круглых скобках, называемых *координатами* $(x; y)$ данной точки или *упорядоченной* *парой*. Первое число в такой паре называется *координатой x*, а второе число — *координатой y*.

ЗАПОМНИ!

Чтобы *нанести* точку на двумерный график, начните с координаты (0; 0) и следуйте далее по соответствующей оси координат, как поясняется ниже.

- **Координата** x**.** Это первое число, обозначающее, насколько далеко вправо (если это число положительное) или влево (если оно отрицательное) следует переместиться по оси x.
- **Координата** y**.** Это второе число, обозначающее, насколько далеко вверх (если это число положительное) или вниз (если оно отрицательное) следует переместиться по оси y.

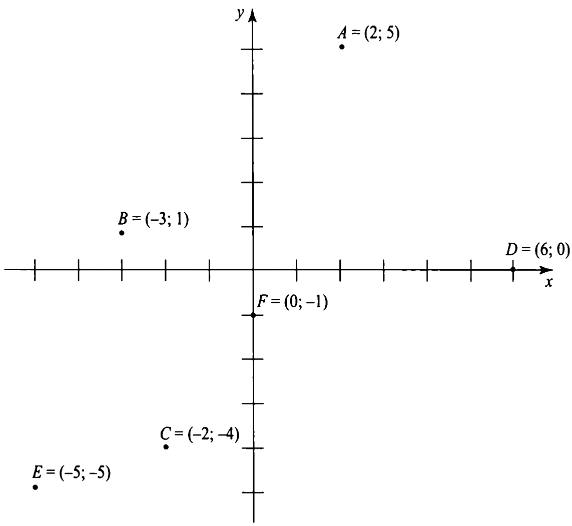
Например, чтобы нанести точку $P = (3; -4)$ на графике, отсчитайте сначала три позиции от начала координат по оси x вправо, а затем четыре позиции по оси y вниз и далее нанесите точку в месте пересечения отсчитанных позиций.

ПРИМЕР!

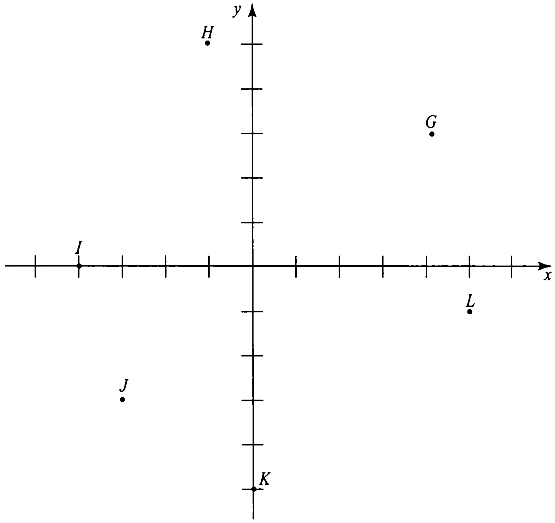
Задача. Нанесите указанные ниже точки на координатную плоскость.

а) $A = (2; 5)$.
б) $B = (-3; 1)$.
в) $C = (-2; -4)$.
г) $D = (6; 0)$.
д) $E = (-5; -5)$.
е) $F = (0; -1)$.

Решение. См. приведенный ниже рисунок.



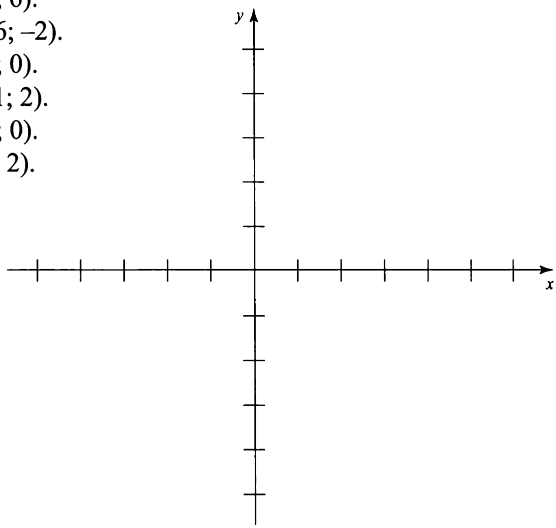
Задача. Определите координаты точек G–L, нанесенных на приведенной ниже координатной плоскости.



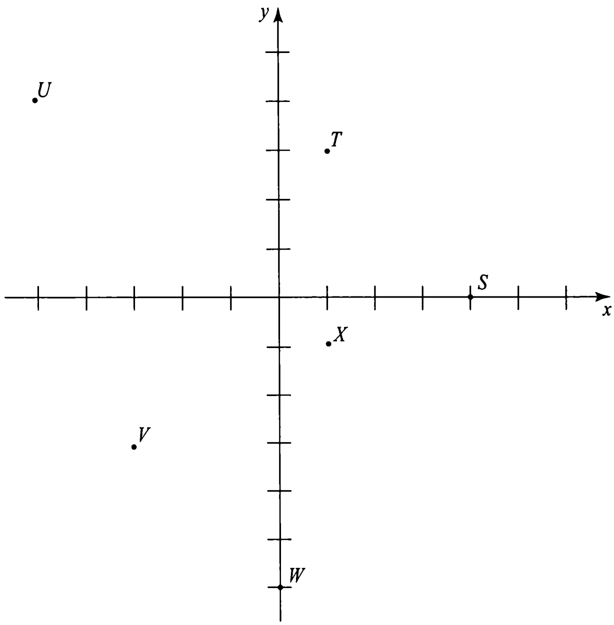
Решение. $G = (4; 3)$, $H = (-1; 5)$, $I = (-4; 0)$, $J = (-3; -3)$, $K = (0; -5)$ и $L = (5; -1)$.

1 Нанесите каждую из перечисленных ниже точек на координатную плоскость.

а) $M = (5; 6)$.
б) $N = (-6; -2)$.
в) $O = (0; 0)$.
г) $P = (-1; 2)$.
д) $Q = (3; 0)$.
е) $R = (0; 2)$.



2 Определите координаты точек S–X, нанесенных на приведенную ниже координатную плоскость.



Изображение прямых на двумерном графике

Итак, уяснив, каким образом точки наносятся на двумерный график (см. предыдущий раздел), этими знаниями и навыками можно воспользоваться для изображения прямых линий, наглядно представляющих уравнения с помощью графика. Чтобы лучше понять, как это делается, целесообразно усвоить понятие функции.

Функция — математическое средство преобразования одного числа в другое (зачастую в такой форме: y = некоторое выражение от x). Число, с которого начинается вычисление функции, называется ее *аргументом*, а вновь получаемое число — *значением*. На графике аргументом обычно служит координата x, а значением — координата y.

Полезным средством для лучшего понимания функций служит ее *таблица значений*. В такой таблице различные значения x подставляются в формулу и затем выполняются необходимые вычисления для нахождения соответствующих значений y.

По координатам (x; y) из таблицы значений можно нанести точки график, как пояснялось в предыдущем разделе. Как только все эти точки будут нанесены, через них можно провести прямую линию, наглядно представляющую функцию на графике. *Примечание:* чтобы выяснить, где именно следует провести прямую, формально требуется нанести лишь две точки. Тем не менее рекомендуется нанести на координатной плоскости больше точек, что особенно важно, если графиком функции является не прямая линия.

ПРИМЕР!

Задача. Составьте сначала таблицу значений функции $y = x + 2$ для аргументов 0; 1; 2; 3 и 4. Затем определите координаты (x;y) пяти точек этой функции.

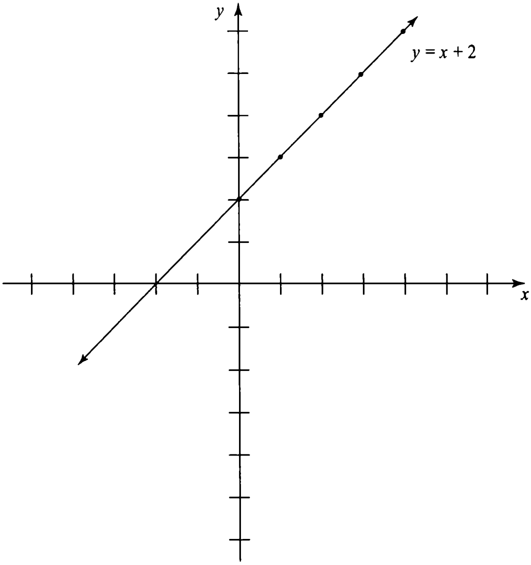
Решение. (0; 2), (1; 3), (2; 4), (3; 5) и **(4; 6)**. Ниже приведена таблица значений функции $y = x + 2$.

Аргумент x	$x + 2$	Значение y
0	0 + 2	2
1	1 + 2	3
2	2 + 2	4
3	3 + 2	5
4	4 + 2	6

Как видите, в первом столбце таблицы значений функции указаны пять аргументов 0; 1; 2; 3 и 4. Во втором столбце данной таблицы значение каждого из этих аргументов подставляется вместо переменной x в выражении $x + 2$. А в третьем столбце приведены значения функции, получаемые в результате вычисления данного выражения. Чтобы получить координаты для рисования графика рассматриваемой здесь функции, достаточно объединить в пары значения из первого и третьего столбцов таблицы: (0; 2), (1; 3), (2; 4), (3; 5) и (4; 6).

Задача. Постройте график функции $y = x + 2$ на координатной плоскости в виде прямой линии по точкам со следующими координатами: (0; 2), (1; 3), (2; 4), (3; 5) и (4; 6).

Решение. См. приведенный ниже рисунок.



3 Постройте график функции $y = x - 1$.

а) Составьте таблицу значений функции $y = x - 1$ для аргументов 0; 1; 2; 3 и 4.

б) Определите из этой таблицы координаты $(x;\ y)$ пяти точек для данной функции.

в) Нанесите эти пять точек на координатную плоскость и постройте по ним график функции $y = x - 1$.

4 Постройте график функции $y = 2x$.

а) Составьте таблицу значений функции $y = 2x$ для аргументов 0; 1; 2; 3 и 4. (Обозначение $2x$ означает $2 \times x$.)

б) Определите из этой таблицы координаты $(x;y)$ пяти точек для данной функции.

в) Нанесите эти пять точек на координатную плоскость и постройте по ним график функции $y = 2x$.

5 Постройте график функции $y = 3x - 5$.

а) Составьте таблицу значений функции $y = 3x - 5$ для аргументов 0; 1; 2; 3 и 4. (Обозначение $3x$ означает $3 \times x$.)

б) Определите из этой таблицы координаты $(x; y)$ пяти точек для данной функции.

в) Нанесите эти пять точек на координатную плоскость и постройте по ним график функции $y = 3x - 5$.

6 Постройте график функции $y = \frac{x}{2} + 3$.

а) Составьте таблицу значений функции $y = \frac{x}{2} + 3$ для аргументов −2; 0; 2 и 4.

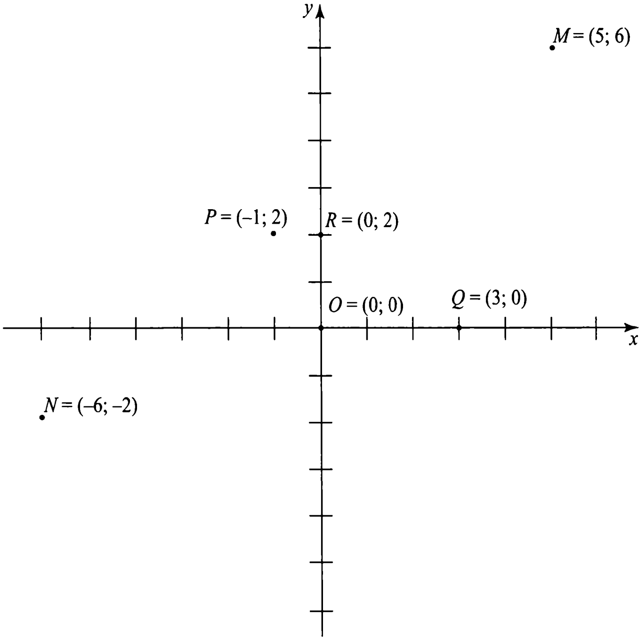
б) Определите из этой таблицы координаты $(x; y)$ четырех точек для данной функции.

в) Нанесите эти четыре точек на координатную плоскость и постройте по ним график функции $y = \frac{x}{2} + 3$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих применить на практике приобретенные знания.

1 См. приведенный ниже рисунок.



2 S = **(4; 0)**, T = **(1; 3)**, U = **(–5; 4)**, V = **(–3; –3)**, W = **(0; –6)** и X = **(1, –1)**.

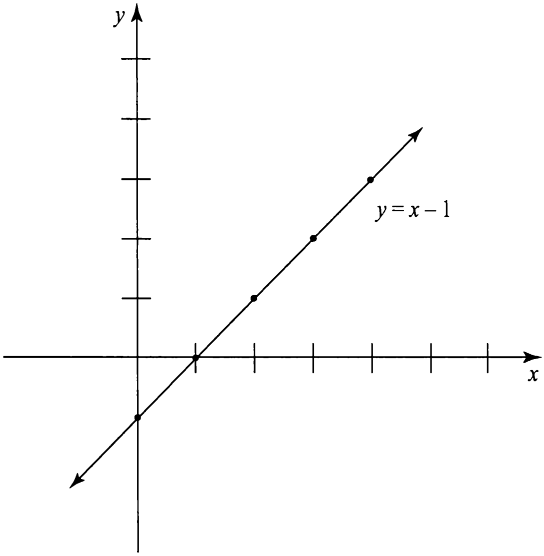
3 Постройте график функции $y = x - 1$.

а) Ниже приведена таблица значений функции $y = x - 1$.

Аргумент x	$x - 1$	**Значение** y
0	0 – 1	–1
1	1 – 1	0
2	2 – 1	1
3	3 – 1	2
4	4 – 1	3

б) Координаты пяти точек, полученные по данной функции, следующие: **(0; –1)**, **(1; 0)**, **(2; 1)**, **(3; 2)** и **(4; 3)**.

в) См. приведенный ниже рисунок.



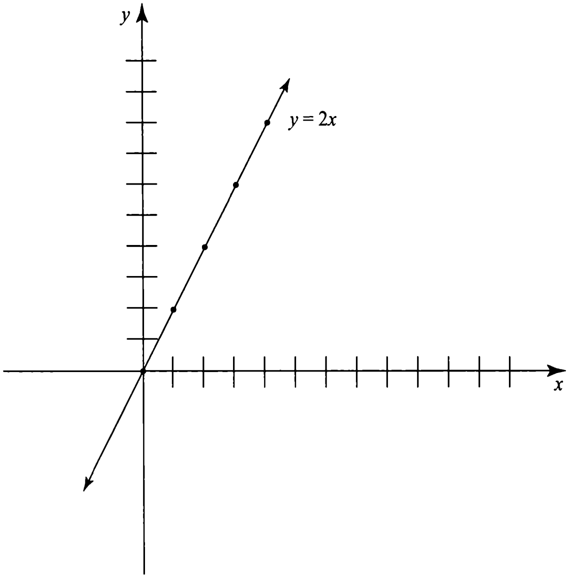
4 Постройте график функции $y = 2x$.

а) Составьте таблицу значений функции $y = 2x$, как показано ниже.

Аргумент x	**2**x	Значение y
0	2×0	0
1	2×1	2
2	2×2	4
3	2×3	6
4	2×4	8

б) Координаты пяти точек, полученные по данной функции, следующие: **(0; 0)**, **(1; 2)**, **(2; 4)**, **(3; 6)** и **(4,8)**.

в) См. приведенный ниже рисунок.



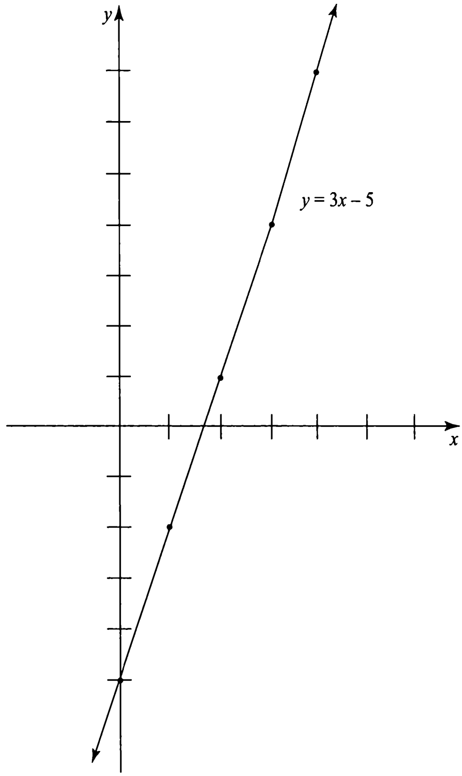
❺ Постройте график функции $y = 3x - 5$.

а) Ниже приведена таблица значений функции $y = 3x - 5$.

Аргумент x	**$3x - 5$**	**Значение y**
0	$(3 \times 0) - 5$	–5
1	$(3 \times 1) - 5$	–2
2	$(3 \times 2) - 5$	1
3	$(3 \times 3) - 5$	4
4	$(3 \times 4) - 5$	7

б) Координаты пяти точек, полученные по данной функции, следующие: **(0; –5)**, **(1; –2)**, **(2; 1)**, **(3; 4)** и **(4; 7)**.

в) См. приведенный ниже рисунок.



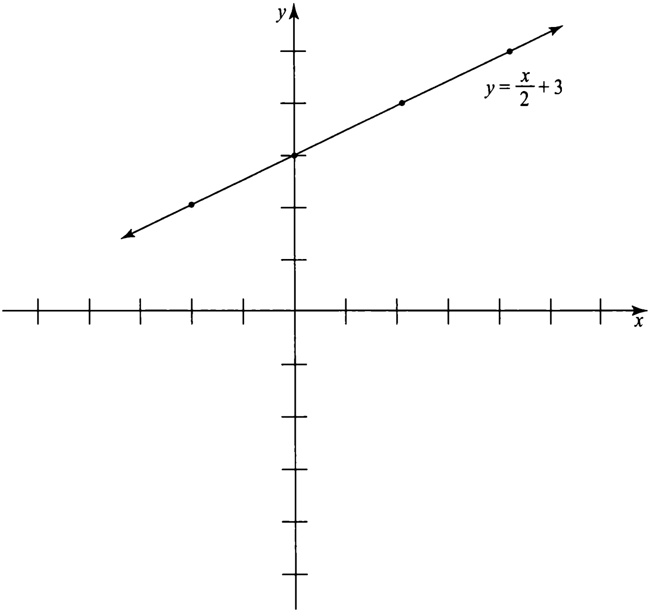
6 Постройте график функции $y = \frac{x}{2} + 3$.

а) Составьте таблицу значений функции $y = \frac{x}{2} + 3$, как показано ниже.

Аргумент x	$\frac{x}{2}+3$	**Значение** y
–2	$-\frac{2}{2}+3$	2
0	$\frac{0}{2}+3$	3
2	$\frac{2}{2}+3$	4
4	$\frac{4}{2}+3$	5

б) Координаты пяти точек, полученные по данной функции, следующие: **(–2; 2)**, **(0; 3)**, **(2; 4)** и **(4; 5)**.

в) См. приведенный ниже рисунок.



4
Фактор неизвестного: введение в алгебру

В ЭТОЙ ЧАСТИ...

» Вычисление алгебраических выражений подстановкой чисел вместо переменных

» Упрощение алгебраических выражений путем исключения скобок и объединения подобных членов

» Вынесение за скобки НОД всех членов алгебраического выражения

» Решение алгебраических выражений отделением переменных

» Решение алгебраических выражений с дробями перекрестным умножением

Глава 14

Самовыражение в алгебраических выражениях

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Вычисление алгебраических выражений

» Анализ алгебраических выражений и выявление подобных членов

» Выполнение основных арифметических операций над членами алгебраических выражений

» Упрощение и решение алгебраических выражений по правилу FOIL

В арифметике прямоугольником, пустым местом или знаком вопроса обозначается неизвестное число, как, например, $2 + 3 = \square$, $9 - \underline{\quad} = 5$ или $? \times 6 = 18$. Но в алгебре неизвестное число обозначается буквой x. *Переменные* обозначаются в алгебре буквами потому, что их значения могут изменяться в зависимости от решаемой задачи. Например, в уравнении $10 - x = 8$ переменная x принимает значение 2, поскольку $10 - 2 = 8$. Но в уравнении $2x = 12$ переменная x принимает значение 6, поскольку $2 \times 6 = 12$.

Ниже приведены несколько условных обозначений, принятых в алгебре, которые следует знать.

» **Умножение.** Для умножения на переменную в алгебре редко употребляется знак операции $\cdot$ или $\times$. Но, как и в арифметике, для выражения операции умножения можно воспользоваться скобками без указания данной операции. Например, обозначение $3(x)$ означает операцию умножения $3 \times x$. Зачастую операция умножения вообще опускается в алгебраических выражениях. Например, $3x$ означает $3 \times x$.

» **Деление.** В алгебре дробная черта заменяет знак деления, поэтому операцию деления $x \div 5$ следует записать как $\frac{x}{5}$.

» **Возведение в степень.** Как правило, для обозначения чисел, умножаемых на самих себя, в алгебре употребляются показатели степени. Следовательно, чтобы выразить операцию $x \times x$, следует написать x^2, а не xx. А для того чтобы выразить операцию xxx, следует написать x^3.

ЗАПОМНИ!

Показатель степени применяется *только* к той переменной, после которой он следует, поэтому в выражении $2xy^2$ в квадрат возводится только переменная y. А для того чтобы применить показатель степени к обеим переменным, их придется заключить в скобки, как, например, в выражении $2(xy)^2$.

В этой главе поясняется, как читать, анализировать, вычислять и упрощать элементарные алгебраические выражения, а также выполнять операции сложения, вычитания и умножения в алгебраических выражениях.

Вычисление алгебраических выражений методом подстановки

Арифметическое выражение представляет собой любую последовательность чисел и операций, приобретающих определенный смысл, когда они располагаются по одну сторону от знака равенства. Алгебраическое выражение подобно арифметическому, за исключением того, что оно включает в себя хотя бы одну переменную (например, x). Как и арифметическое, алгебраическое выражение может быть *вычислено*, т.е. сведено к единственному числу. Но в алгебре такое вычисление зависит от значения переменной.

Ниже поясняется, как вычислить алгебраическое выражение, если задано значение каждой входящей в него переменной.

1. **Подставьте значение каждой переменной в выражение.**
2. **Вычислите выражение по порядку следования операций, как пояснялось в главе 4.**

ПРИМЕР!

Задача. Вычислите алгебраическое выражение $x^2 - 2x + 5$, если $x = 3$.

Решение. 8. Сначала подставьте значение 3 вместо переменной x в данном выражении:

$x^2 - 2x + 5 = 3^2 - 2(3) + 5.$

Затем вычислите данное выражение по порядку следования операций, начав с возведения в степень:

$= 9 - 2(3) + 5.$

Далее выполните операцию умножения:

$= 9 - 6 + 5.$

И, наконец, выполните операции сложения и вычитания слева направо:

$= 3 + 5 = 8.$

Задача. Вычислите алгебраическое выражение $3x^2 + 2xy^4 - y^3$, если $x = 5$ и $y = 2$.

Решение. 227. Сначала подставьте значение 5 вместо переменной x, а значение 2 вместо переменной y в данном выражении:

$3x^2 + 2xy^4 - y^3 = 3(5^2) + 2(5)(2^4) - (2^3).$

Затем вычислите данное выражение по порядку следования операций, начав с трех операций возведения в степень:

$= 3(25) + 2(5)(16) - (8).$

Далее выполните операцию умножения:

$= 75 + 160 - 8.$

И, наконец, выполните операции сложения и вычитания слева направо:

$= 235 - 8 = 227.$

1 Вычислите алгебраическое выражение $x^2 + 5x + 4$, если $x = 3$.

2 Вычислите алгебраическое выражение $5x^4 + x^3 - x^2 + 10x + 8$, если $x = -2$.

3 Вычислите алгебраическое выражение $x(x^2 - 6)(x - 7)$, если $x = 4$.

4 Вычислите алгебраическое выражение $\frac{(x-9)^4}{(x+4)^3}$, если $x = 6$.

5 Вычислите алгебраическое выражение $3x^2 + 5xy + 4y^2$, если $x = 5$ и $y = 7$.

6 Вычислите алгебраическое выражение $x^6y - 5xy^2$, если $x = -1$ и $y = 9$.

Разделение алгебраического выражения на члены

Алгебраические выражения начинают приобретать больший смысл, если понять, каким образом они составляются. А для того чтобы разобраться в этом, алгебраические выражения лучше всего разделить на части и выяснить, как называется каждая из них. Каждое алгебраическое выражение можно разделить на один или больше членов. *Членом* является любой ряд символов, отделяемых от остальной части алгебраического выражения знаком операции сложения или вычитания. Например:

- Алгебраическое выражение $-7x + 2xy$ состоит из двух членов: $-7x$ и $2xy$.
- Алгебраическое выражение $x^4 - \frac{x^2}{5} - 2x + 2$ состоит из четырех членов: x^4, $\frac{-x^2}{5}$, $-2x$ и 2.
- Алгебраическое выражение $8x^2y^3z^4$ состоит из единственного члена: $8x^2y^3z^4$.

ЗАПОМНИ!

Разделяя алгебраическое выражение на отдельные члены, сгруппируйте знаки "плюс" и "минус" вместе с членами, которые следуют сразу же после них. И тогда вы сможете переставлять члены алгебраического выражения в любом порядке. После разделения членов знаки "плюс" можно опустить.

Член алгебраического выражения, у которого отсутствует переменная, называется *константой*. (Замысловатым термином *константа* обозначается обыкновенное *число*, если речь идет о членах алгебраического выражения.) А если член алгебраического выражения содержит переменную, то он называется *алгебраическим*. Всякий алгебраический член состоит из следующих двух частей.

- **Коэффициент** — это числовая часть члена со знаком, т.е. число и сопутствующий ему знак (+ или −). Как правило, коэффициенты 1 и −1 опускаются из члена, и поэтому член, указываемый без коэффициента, на самом деле имеет коэффициент 1 или −1 в зависимости от сопутствующего ему знака. Коэффициент константы является самой константой.
- **Переменная часть** — это любая часть алгебраического выражения, отличающаяся от коэффициента.

ЗАПОМНИ!

Если два члена алгебраического выражения содержат одинаковую переменную часть, они называются *подобными членами*. Для того чтобы два члена алгебраического выражения были подобными, буквы, обозначающие переменные, и показатели степени должны в них совпадать. Например, члены $2x$, $12x$ и $834x$ считаются подобными, поскольку все они содержат одну и ту же переменную x, хотя и разные коэффициенты. Аналогично подобными являются члены $17xy$, $1,000xy$ и $0,625xy$, поскольку все они содержат переменные x и y.

ПРИМЕР!

Задача. Выявите алгебраические члены и константы в выражении $3x^2 - 2x - 9$.

Решение. Члены $\mathbf{3x^2}$ и $\mathbf{-2x}$ являются алгебраическими, а член **−9** — константой.

Задача. Выявите коэффициенты в выражении $2x^4 - 5x^3 + x^2 - x - 9$.

Решение. 2; −5; 1; −1 и −9. Данное выражение состоит из следующих пяти членов: $2x^4$, $-5x^3$, x^2, $-x$, -9. У члена $2x^4$ коэффициент 2, а у члена $-5x^3$ — коэффициент −5. Поскольку у членов x^2 и $-x$ отсутствуют явно указанные коэффициенты, то они равны 1 и −1 соответственно. И, наконец, член −9 является константой, поэтому его коэффициент равен −9.

7 Выявите все члены в алгебраическом выражении $7x^2yz - 10xy^2z + 4xyz^2 + y - z + 2$. Какие из них являются алгебраическими членами, а какие — константами?

8 Определите коэффициент в каждом члене выражения $-2x^5 + 6x^4 + x^3 - x^2 - 8x + 17$.

9 Определите коэффициент в каждом члене выражения $-x^3y^3z^3 - x^2y^2z^2 + xyz - x$.

10 Выявите любые подобные члены в выражении $12x^3 + 7x^2 - 2x - x^2 - 8x^4 + 99x + 99$.

Сложение и вычитание подобных членов

Складывать и вычитать можно только подобные алгебраические члены (см. предыдущий раздел). Иными словами, переменные части алгебраического выражения должны совпадать. Чтобы сложить два подобных члена, достаточно сложить их коэффициенты, оставив переменные части без изменения. Аналогичным образом вычитаются подобные члены. Для этого достаточно найти разность их коэффициентов, оставив без изменения переменные части.

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно выражение $3x + 5x$?

Решение. $8x$. Переменная часть x обоих членов данного выражения одинакова, поэтому их можно сложить:

$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.

Задача. Чему равно выражение $24x^3 - 7x^3$?

Решение. $17x^3$. Вычтите коэффициенты обоих членов данного выражения:

$24x^3 - 7x^3 = (24 - 7)x^3 = 17x^3$.

11 Сложите подобные члены выражения $4x^2y + (-9x^2y)$.

12 Сложите подобные члены выражения $x^3y^2 + 20x^3y^2$.

13 Вычтите подобные члены выражения $-2xy^4 - 20xy^4$.

14 Вычтите подобные члены выражения $-xyz - (-xyz)$.

Умножение и деление алгебраических членов

В отличие от сложения и деления, умножить можно два *любых* алгебраических члена, будь то подобные или неподобные члены. Для этого достаточно перемножить их коэффициенты и свести все переменные из исходных членов в единый член. (Сводя переменные вместе, нужно сложить показатели степени одинаковых перемножаемых переменных, таких как x или y и т.д., и указать полученную сумму в показателе степени результирующего члена.)

СОВЕТ

Чтобы быстро перемножить переменные алгебраических членов с показателями степени, достаточно сложить показатели степени одинаковых переменных.

Кроме того, два алгебраических члена можно разделить. Операция деления в алгебре, как правило, обозначается знаком дроби. Само же деление выполняется подобно сокращению дроби до ее наименьших членов, как поясняется ниже.

1. **Сократите коэффициенты до наименьших членов, как и в любой другой дроби (см. главу 6).**
2. **Исключите переменные, присутствующие как в числителе, так и в знаменателе.**

СОВЕТ

Чтобы быстро разделить переменные алгебраических членов с показателями степени, достаточно вычесть показатели степени одинаковых переменных. Показатель степени каждой переменной в знаменателе следует вычесть из показателя ее степени в числителе. Если в результирующем показателе степени получится отрицательное число, переместите данную переменную в знаменатель и удалите знак "минус".

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно выражение $2x(6y)$?

Решение. $12xy$. Чтобы получить коэффициент результирующего члена, перемножьте исходные коэффициенты: $2 \times 6 = 12$.

А для того чтобы получить переменную часть результирующего члена, объедините переменные x и y:

$2x(6y) = 2(6)xy = 12xy$.

Задача. Чему равно выражение $4x(-9x)$?

Решение. $-36x^2$. Чтобы получить коэффициент результирующего члена, перемножьте исходные коэффициенты: $4 \times (-9) = -36$. А для того чтобы получить переменную часть результирующего члена, сведите переменные x в единый член:

$4x(-9x) = 4(-9)xx$.

Напомним, что x^2 является сокращенным обозначением операции xx, поэтому перепишите окончательное решение данной задачи следующим образом:

$-36x^2$.

Задача. Чему равно выражение $2x(4xy)(5y^2)$?

Решение. $40x^2y^3$. Перемножьте все три коэффициента и объедините переменные в результирующем члене:

$2x(4xy)(5y^2) = 2(4)(5)xxyy^2 = 40x^2y^3$.

Задача. Чему равно выражение $(x^2y^3)(xy^5)(x^4)$?

Решение. x^7y^8. Сложите сначала показатели степени трех переменных x: $2 + 1 + 4 = 7$, чтобы получить показатель степени переменной x в результирующем члене (напомним, что x означает x^1).

Затем сложите показатели степени двух переменных y, чтобы получить показатель степени переменной y в результирующем члене:

$3+5=8$.

Задача. Чему равно выражение $\frac{6x^3y^2}{3xy^2}$?

Решение. $2x^2$. Показатели степени обозначают повторяющееся умножение:

$$\frac{6x^3y^2}{3xy^2} = \frac{6xxxyy}{3xyy}.$$

Коэффициенты как в числителе, так и в знаменателе кратны 3, поэтому сократите их таким же образом, как сокращаются дроби:

$$= \frac{2xxxyy}{xyy}.$$

Теперь исключите любые повторяющиеся переменные как в числителе, так и в знаменателе, т.е. одну переменную x и две переменные y как выше, так и ниже дробной черты:

$$= \frac{2xx\cancel{x}\cancel{y}\cancel{y}}{\cancel{x}\cancel{y}\cancel{y}} = 2xx.$$

И, наконец, перепишите окончательный результат следующим образом: $2x^2$.

15 Перемножьте члены выражения $4x(7x^2)$.

16 Перемножьте члены выражения $-xy^3z^4(10x^2y^2z)(-2xz)$.

17 Разделите члены выражения $\frac{6x^4y^5}{8x^4y^4}$.

18 Разделите члены выражения $\frac{7x^2y}{21xy^3}$.

Упрощение алгебраических выражений путем объединения подобных членов

Несмотря на то что алгебраическое выражение может состоять из любого количества членов, иногда его можно сократить, чтобы было легче обращаться с ним. Такой процесс называется *упрощением* выражения. Чтобы упростить алгебраическое выражение, следует *объединить* его *подобные члены*, а это означает сложение или вычитание любых членов с одинаковыми переменными частями. (О том, как выявлять подобные алгебраические члены, см. в разделе “Разделение алгебраического выражения на члены” ранее в этой главе, а о том, как выполнять математические операции над подобными членами, — в разделе “Сложение и вычитание подобных членов”.)

В некоторых алгебраических выражениях не все подобные члены располагаются рядом. В таком случае их придется переставить, прежде чем объединять вместе.

Не забывайте переставлять члены алгебраического выражения *вместе* с сопутствующим им знаком (+ или –).

ВНИМАНИЕ!

И в завершение данного процесса окончательный результат обычно реорганизуется в алфавитном порядке от бóльших показателей степени к меньшим, а константы располагаются в последнюю очередь. Так, если в итоге получено алгебраическое выражение $-5 + 4y^3 + x^2 + 2x - 3xy$, его можно реорганизовать в выражение $x^2 + 2x - 3xy + 4y^3 - 5$. (Эта мера никоим образом не меняет окончательный результат, но делает его более ясным и аккуратным, что не может не радовать преподавателей математики.)

ПРИМЕР!

Задача. Упростите выражение $x^2 + 2x - 7x + 1$.

Решение. x^2 –5x + 1. Члены $2x$ и $-7x$ являются подобными, поэтому их можно объединить:

$$x^2 + \underline{2x - 7x} + 1 = x^2 + (2 - 7)x + 1 =$$
$$= x^2 - 5x + 1$$

Задача. Упростите выражение $4x^2 - 3x + 2 + x - 7x^2$.

Решение. –3x^2 – 2x + 2. Сначала подчеркните все пять членов данного выражения:

$\underline{4x^2}\ \underline{-3x}\ \underline{+2}\ \underline{+x}\ \underline{-7x^2}$.

Затем переставьте эти члены таким образом, чтобы подобные члены оказались рядом:

$\underline{4x^2 - 7x^2}\ \underline{-3x + x} + 2$.

И, наконец, объедините подчеркнутые пары подобных членов:

$(4 - 7)x^2\ (-3 + 1)x + 2 = -3x^2 - 2x + 2$.

19 Упростите выражение
$3x^2 + 5x^2 + 2x - 8x - 1$.

20 Упростите выражение
$6x^3 - x^2 + 2 - 5x^2 - 1 + x$.

21 Упростите выражение
$2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 9 + x + 7x^2$.

22 Упростите выражение
$x^5 - x^3 + xy - 5x^3 - 1 + x^3 - xy + x$.

Упрощение алгебраических выражений со скобками

Если алгебраическое выражение содержит скобки, необходимо избавиться от них, прежде чем упрощать его. Ниже описаны четыре возможных при этом случая.

» **Знак “плюс” перед скобками.** Просто удалите эти скобки. После этого, возможно, придется дополнительно упростить алгебраическое выражение, объединив подобные члены, как пояснялось в предыдущем разделе.

» **Знак “минус” перед скобками.** Сначала измените знак каждого алгебраического члена в скобках на противоположный, а затем удалите эти скобки. После удаления скобок объедините подобные члены.

» **Член, но не знак перед скобками.** Сначала умножьте член, стоящий перед скобками, на каждый член в скобках, не забыв дополнить получаемые в итоге члены знаком “плюс” или “минус”, а затем опустите скобки. И, наконец, упростите алгебраическое выражение, объединив подобные члены.

Чтобы перемножить одинаковые переменные, просто сложите их показатели степени. Например, $x(x^2) = x^{1+2} = x^3$. Аналогично, $-x^3(x^4) = -(x^{3+4}) = -x^7$.

» **Две пары соседних скобок.** Этот случай подробнее рассматривается в следующем разделе.

ПРИМЕР!

Задача. Упростите выражение $7x + (x^2 - 6x + 4) - 5$.

Решение. $x^2 + x - 1$. В этом выражении скобкам предшествует знак “плюс”, поэтому скобки можно опустить:

$7x + (x^2 - 6x + 4) - 5 = 7x + x^2 - 6x + 4 - 5$.

Теперь объедините подобные члены. Это можно сделать в два этапа:

$= \underline{7x - 6x} + x^2 + \underline{4 - 5.}$

И, наконец, реорганизуйте окончательный результат, расположив переменные по порядку убывания показателей степени:

$= x^2 + x - 1$

Задача. Упростите выражение $x - 3x(x^3 - 4x^2 + 2) + 8x^4$.

Решение. $5x^4 + 12x^3 - 5x$. В этом выражении скобкам предшествует член $-3x$ без знака между ним и скобками, поэтому умножьте сначала каждый член в скобках на $-3x$, а затем опустите скобки:

$x - 3x(x^3 - 4x^2 + 2) + 8x^4 =$
$= x + (-3x)(x^3) + (-3x)(-4x^2) + (-3x)(2) + 8x^4 = x - 3x^4 + 12x^3 - 6x + 8x^4$.

Теперь объедините подобные члены. Это можно сделать в два этапа:

$= \underline{x - 6x} - \underline{3x^4 + 8x^4} + 12x^3 =$
$= -5x + 5x^4 + 12x.^3$

И, наконец, реорганизуйте окончательный результат, расположив переменные по порядку убывания показателей степени:

$= 5x^4 + 12x^3 - 5x$.

23 Упростите выражение
$3x^3 + (12x^3 - 6x) + (5 - x)$.

24 Упростите выражение
$2x^4 -(-9x^2 + x) + (x + 10)$.

25 Упростите выражение
$x - (x^3 - x - 5) + 3(x^2 - x)$.

26 Упростите выражение
$-x^3(x^2 + x) - (x^5 - x^4)$.

Раскрытие смежных пар скобок по правилу FOIL

Если в алгебраическом выражении имеются пары смежных скобок, то каждый член в первых скобках необходимо умножить на каждый член во вторых скобках по правилу FOIL, где сокращение *FOIL* обозначает *First (Первый)*, *Outside (Крайний)*, *Inside (Внутренний)*, *Last (Последний)*, т.е. первый член с первым, крайние, внутренние, последний член с последним. Это правило помогает соблюдать порядок умножения, когда в обеих парах смежных скобок присутствуют два члена.

Если две пары смежных скобок являются частью более крупного выражения, то содержимое обеих пар смежных скобок следует перемножить по правилу FOIL и заключить полученные результаты в одни скобки. Затем эти скобки можно удалить по одному из правил, описанных в предыдущем разделе.

ПРИМЕР!

Задача. Упростите выражение $(x+4)(x-3)$.

Решение. $\boldsymbol{x^2+x-12}$**.** Сначала перемножьте два первых члена в обеих парах смежных скобок:

$(\underline{x}+4)(\underline{x}-3) \to x \times x = x^2$.

Затем перемножьте два крайних члена в обеих парах соседних скобок:

$(\underline{x}+4)(x\underline{-3}) \to x \times (-3) = -3x$.

Далее перемножьте два внутренних члена в обеих парах смежных скобок:

$(x+\underline{4})(\underline{x}-3) \to 4 \times x = 4x$.

Перемножьте два последних члена в обеих парах соседних скобок:

$(x+\underline{4})(x\underline{-3}) \to 4 \times (-3) = -12$.

Сложите все четыре полученные выше произведения и упростите окончательное выражение, объединив подобные члены:

$(x+4)(x-3) = x^2 \underline{-3x+4x} - 12 =$
$= x^2 + x - 12$.

Задача. Упростите выражение $x^2-(-2x+5)(3x-1)+9$.

Решение. $\boldsymbol{7x^2-17x+14}$**.** Сначала перемножьте два первых члена в обеих парах смежных скобок:

$(\underline{-2x}+5)(\underline{3x}-1) \to -2x \times 3x = -6x^2$.

Затем перемножьте два крайних члена в обеих парах соседних скобок:

$(\underline{-2x}+5)(3x\underline{-1}) \to -2x \times (-1) = 2x$.

Далее перемножьте два внутренних члена в обеих парах смежных скобок:

$(-2x+\underline{5})(\underline{3x}-1) \to 5 \times 3x = 15x$.

Перемножьте два последних члена в обеих парах соседних скобок:

$(-2x+\underline{5})(3x\underline{-1}) \to 5 \times (-1) = -5$.

Сложите все полученные выше произведения и заключите результат в одни скобки, заменив ними две исходные пары скобок:

$x^2 - (-2x + 5)(3x - 1) + 9 =$
$= x^2 - (-6x^2 + 2x + 15x - 5) + 9.$

Перед оставшимися в итоге единственными скобками стоит знак "минус", поэтому поменяйте знак каждого члена в этих скобках на противоположный и опустите скобки:

$= x^2 + 6x^2 - 2x - 15x + 5 + 9.$

А теперь можете упростить окончательное выражение, объединив подобные члены:

$= \underline{x^2 - 6x^2} - \underline{2x - 15x} + \underline{5 + 9} =$
$= 7x^2 - 17x + 14.$

27 Упростите выражение $(x + 7)(x - 2)$.

28 Упростите выражение $(x - 1)(-x - 9)$.

29 Упростите выражение $6x - (x - 2)(x - 4) + 7x^2$.

30 Упростите выражение $3 - 4x(x^2 + 1)(x - 5) + 2x^3$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющие применить на практике приобретенные знания.

1. $x^2 + 5x + 4 = \mathbf{28}$. Подставьте сначала значение 3 вместо переменной x в заданном выражении, как показано ниже.
   $x^2 + 5x + 4 = 3^2 + 5(3) + 4$.
   Затем вычислите полученное выше выражение по порядку следования операций, начав с возведения в степень:
   $= 9 + 5(3) + 4$.
   Выполните далее умножение:
   $= 9 + 15 + 4$.
   Сложите оставшиеся числа слева направо:
   $= 24 + 4 = 28$.

2. $5x^4 + x^3 - x^2 + 10x + 8 = \mathbf{56}$. Подставьте сначала значение –2 вместо переменной x в заданном выражении:
   $5x^4 + x^3 - x^2 + 10x + 8 = 5(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + 10(-2) + 8$.
   Затем вычислите полученное выше выражение по порядку следования операций, начав с возведения в степень:
   $= 5(16) + (-8) - 4 + 10(-2) + 8$.
   Выполните далее умножение:
   $= 80 + (-8) - 4 + (-20) + 8$.
   И, наконец, сложите и вычтите оставшиеся числа слева направо:
   $= 72 - 4 + (-20) + 8 = 68 + (-20) + 8 = 48 + 8 = 56$.

3. $x(x^2 - 6)(x - 7) = \mathbf{-120}$. Подставьте сначала значение 4 вместо переменной x в заданном выражении, как показано ниже.
   $x(x^2 - 6)(x - 7) = 4(4^2 - 6)(4 - 7)$.
   Затем вычислите полученное выше выражение по порядку следования операций, начав с первой пары скобок, где выполните сначала возведение в степень, а затем вычитание:
   $= 4(16 - 6)(4 - 7) = 4(10)(4 - 7)$.
   Найдите разность во вторых скобках:
   $= 4(10)(-3)$.
   Выполните умножение слева направо:
   $= 40(-3) = -120$.

4 $\frac{(x-9)^4}{(x+4)^3} = \mathbf{\frac{81}{1000}}$, или (**0,081**). Подставьте сначала значение 6 вместо переменной x в заданном выражении, как показано ниже:

$\frac{(x-9)^4}{(x+4)^3} = \frac{(6-9)^4}{(6+4)^3}$.

Затем выполните по порядку операции в полученном выше выражении, вычислив сначала выражение в числителе, а затем в знаменателе дроби:

$= \frac{(-3)^4}{(6+4)^3} = \frac{(-3)^4}{10^3}$.

Продолжите возведение в степень сначала в числителе, а затем в знаменателе дроби:

$= \frac{81}{10^3} = \frac{81}{1000}$.

Полученную в итоге простую дробь можно также преобразовать в десятичную дробь 0,081.

5 $3x^2 + 5xy + 4y^2 =$ **446**. Подставьте сначала значения 5 и 7 вместо переменных x и y в заданном выражении:

$3x^2 + 5xy + 4y^2 = 3(5)^2 + 5(5)(7) + 4(7)^2$.

Затем выполните по порядку операции в полученном выше выражении, начав с возведения в степень:

$= 3(25) + 5(5)(7) + 4(49)$.

Выполните умножение слева направо:

$= 75 + 175 + 196$.

Сложите оставшиеся числа слева направо:

$= 250 + 196 = 446$.

6 $x^6y - 5xy^2 =$ **414**. Подставьте сначала значения –1 и 9 вместо переменных x и y в заданном выражении, как показано ниже:

$x^6y - 5xy^2 = (-1)^6(9) - 5(-1)(9)^2$.

Затем вычислите полученное выше выражение по порядку следования операций, начав с возведения в степень:

$= 1(9) - 5(-1)(81)$.

Выполните далее умножение слева направо:

$= 9 - 5(-1)(81) = 9 - (-405)$.

И, наконец, выполните вычитание:

$= 414$

7 В выражении $7x^2yz - 10xy^2z + 4xyz^2 + y - z + 2$ присутствуют следующие алгебраические члены: $\mathbf{7x^2yz}$, $\mathbf{-10xy^2z}$, $\mathbf{4xyz^2}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, а также константа **2**.

8 В выражении $-2x^5 + 6x^4 + x^3 - x^2 - 8x + 17$ присутствуют шесть коэффициентов, расположенных в следующем порядке: **–2**, **6**, **1**, **–1**, **–8** и **17**.

9 В выражении $-x^3y^3z^3 - x^2y^2z^2 + xyz - x$ присутствуют четыре коэффициента, расположенные в следующем порядке: **–1**, **–1**, **1** и **1**.

10 В выражении $12x^3 + 7x^2 - 2x - x^2 - 8x^4 + 99x + 99$ присутствуют подобные члены $\mathbf{7x^2}$ и $\mathbf{-x^2}$ (в переменной части x^2), а также $\mathbf{-2x}$ и $\mathbf{99x}$ (в переменной части x).

11 $4x^2y + (-9x^2y) = (4 + (-9))x^2y = \mathbf{-5x^2y}$.

12 $x^3y^2 + 20x^3y^2 = (1+20)x^3y^2 = \mathbf{21x^3y^2}$.

13 $-2xy^4 - 20xy^4 = (-2 - 20)xy^4 = \mathbf{-22xy^4}$.

14 $-xyz - (-xyz) = [-1 - (-1)]xyz = (-1 + 1)xyz = \mathbf{0}$.

15 $4x(7x^2) = \mathbf{28x^3}$. Сначала перемножьте два коэффициента, чтобы получить результирующий коэффициент, а затем объедините обе переменные в едином результирующем члене, как показано ниже.
$4x(7x^2) = 4(7)xx^2 = 28x^3$.

16 $-xy^3z^4(10x^2y^2z)(-2xz) = \mathbf{20x^4y^5z^6}$. Сначала перемножьте коэффициенты, чтобы получить результирующий коэффициент. Затем сложите показатели степени $(1+2+1=4)$, чтобы найти результирующий показатель степени переменной x. Далее сложите показатели степени $(3 + 2 = 5)$, чтобы выявить результирующий показатель степени переменной y. И, наконец, сложите показатели степени $(4+1+1=6)$, чтобы определить результирующий показатель степени переменной z.

17 $\dfrac{6x^4y^5}{8x^4y^4} = \mathbf{\dfrac{3y}{4}}$. Сократите коэффициенты в числителе и знаменателе заданного выражения таким же образом, как и в дроби:
$\dfrac{6x^4y^5}{8x^4y^4} = \dfrac{3x^4y^5}{4x^4y^4}$.
Чтобы получить результирующий показатель степени переменной x, вычтите показатель степени в знаменателе из показателя степени в числителе: $4 - 4 = 0$, в результате чего переменная x исключается из данного выражения:
$= \dfrac{3y^5}{y^4}$.

Чтобы получить результирующий показатель степени переменной y, вычтите показатель степени в знаменателе из показателя степени в числителе: $5 - 4 = 1$, в результате чего в переменной части данного выражения останется только y^1 или просто y в числителе:

$$=\frac{3y}{4}.$$

18 $\frac{7x^2y}{21xy^3} = \mathbf{\frac{x}{3y^2}}$. Сократите коэффициенты в числителе и знаменателе заданного выражения таким же образом, как и в дроби:

$$\frac{7x^2y}{21xy^3} = \frac{x^2y}{3xy^3}.$$

Чтобы получить результирующий показатель степени переменной x, вычтите показатель степени в знаменателе из показателя степени в числителе: $(2 - 1 = 1)$:

$$=\frac{xy}{3y^3}.$$

Чтобы получить результирующий показатель степени переменной y, вычтите показатель степени в знаменателе из показателя степени в числителе: $1 - 3 = -2$:

$$=\frac{xy^{-2}}{3}.$$

И, наконец, удалите знак "минус" из показателя степени переменной y и переместите ее в знаменатель результирующего выражения:

$$=\frac{x}{3y^2}.$$

19 $3x^2 + 5x^2 + 2x - 8x - 1 = \mathbf{8x^2 - 6x - 1}$. Объедините подчеркнутые ниже подобные члены.

$\underline{3x^2 + 5x^2} + \underline{2x - 8x} - 1 = 8x^2 - 6x - 1.$

20 $6x^3 - x^2 + 2 - 5x^2 - 1 + x = \mathbf{6x^3 - 6x^2 + x + 1}$. Переставьте члены заданного выражения, чтобы расположить подобные члены рядом:

$6x^3 - x^2 + 2 - 5x^2 - 1 + x = 6x^3 \underline{- x^2 - 5x^2} + x + \underline{2 - 1}.$

А теперь объедините подобные члены:

$= 6x^3 - 6x^2 + x + 1.$

21 $2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 9 + x + 7x^2 = \mathbf{2x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 9}$. Переставьте члены заданного выражения, чтобы расположить подобные члены рядом:

$2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 9 + x + 7x^2 =$

$= 2x^4 - 2x^3 + \underline{2x^2 + 7x^2} \underline{- x + x} + 9.$

А теперь объедините подобные члены:
$= 2x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 9$.
Обратите внимание на то, что оба члена x упраздняются.

22 $x^5 - x^3 + xy - 5x^3 - 1 + x^3 - xy + x = \mathbf{x^5 - 5x^3 + x - 1}$. Переставьте члены заданного выражения, чтобы расположить подобные члены рядом:
$x^5 - x^3 + xy - 5x^3 - 1 + x^3 - xy + x = x^5 \underline{- x^3 - 5x^3 + x^3} + \underline{xy - xy} + x - 1$.
А теперь объедините подобные члены:
$= x^5 - 5x^3 + x - 1$.
Обратите внимание на то, что оба члена xy упраздняются.

23 $3x^3 + (12x^3 - 6x) + (5 - x) = \mathbf{15x^3 - 7x + 5}$. Обе пары скобок в заданном выражении можно опустить, поскольку им предшествует знак "плюс":
$3x^3 + (12x^3 - 6x) + (5 - x) = 3x^3 + 12x^3 - 6x + 5 - x$.
Объедините подобные члены, чтобы упростить данное выражение:
$\underline{3x^3 + 12x^3} - \underline{6x - x} + 5 = 15x^3 - 7x + 5$.

24 $2x^4 - (-9x^2 + x) + (x + 10) = \mathbf{2x^4 + 9x^2 + 10}$. Первой паре скобок предшествует знак "минус", поэтому измените сначала знак каждого члена в них на обратный, а затем опустите эти скобки:
$2x^4 - (-9x^2 + x) + (x + 10) = 2x^4 + 9x^2 - x + (x + 10)$.
Второй паре скобок предшествует знак "плюс", поэтому опустите их, как показано ниже.
$= 2x^4 + 9x^2 - x + (x + 10) = 2x^4 + 9x^2 - x + x + 10$.
А теперь объедините подобные члены, чтобы упростить данное выражение:
$= 2x^4 + 9x^2 + 10$.

25 $x - (x^3 - x - 5) + 3(x^2 - x) = \mathbf{-x^3 + 3x^2 - x + 5}$. Первой паре скобок предшествует знак "минус", поэтому измените сначала знак каждого члена в них на обратный, а затем опустите эти скобки:
$x - (x^3 - x - 5) + 3(x^2 - x) = x - x^3 + x + 5 + 3(x^2 - x)$.
Между коэффициентом 3 и второй парой скобок отсутствует знак, поэтому умножьте сначала каждый член в этих скобках на 3, а затем опустите их:
$= x - x^3 + x + 5 + 3(x^2 - x) = x - x^3 + x + 5 + 3x^2 - 3x$.
А теперь объедините подобные члены, чтобы упростить данное выражение:
$= \underline{x + x - 3x} - x^3 + 5 + 3x^2 = -x - x^3 + 5 + 3x^2$.
Реорганизуйте окончательное выражение по порядку следования показателей степени переменной x, как показано ниже.
$= -x^3 + 3x^2 - x + 5$.

26 $-x^3(x^2 + x) - (x^5 - x^4) = \mathbf{-2x^5}$. Между членом $-x^3$ и второй парой скобок отсутствует знак, поэтому умножьте сначала каждый член в этих скобках на $-x^3$, а затем опустите их:
$-x^3(x^2 + x) - (x^5 - x^4) = -x^5 - x^4 - (x^5 - x^4)$.
Второй паре скобок предшествует знак "минус", поэтому измените сначала знак каждого члена в них на обратный, а затем опустите эти скобки:
$= -x^5 - x^4 - (x^5 - x^4) = -x^5 - x^4 - x^5 + x^4$.
Объедините подобные члены, чтобы упростить данное выражение:
$= -x^5 - x^4 - x^5 + x^4 = \underline{-x^5 - x^5}\ \underline{-x^4 + x^4} = -2x^5$.

27 $(x + 7)(x - 2) = \mathbf{x^2 + 5x - 14}$. Перемножьте члены в обеих парах скобок по правилу FOIL. Сначала перемножьте два первых члена:
$(\underline{x} + 7)(\underline{x} - 2) \to x \times x = x^2$.
Затем перемножьте два крайних члена:
$(\underline{x} + 7)(x \underline{- 2}) \to x \times (-2) = -2x$.
Перемножьте два внутренних члена:
$(x + \underline{7})(\underline{x} - 2) \to 7 \times x = 7x$.
Перемножьте два последних члена:
$(x + \underline{7})(x \underline{- 2}) \to 7 \times (-2) = -14$.
Сложите все четыре полученные выше произведения и упростите окончательное выражение, объединив подобные члены:
$x^2 \underline{- 2x + 7x} - 14 = x^2 + 5x - 14$.

28 $(x - 1)(-x - 9) = \mathbf{-x^2 - 8x + 9}$. Перемножьте члены в обеих парах скобок по правилу FOIL. Сначала перемножьте два первых члена, затем два крайних, далее два внутренних члена и, наконец, два последних:
$(\underline{x} - 1)(\underline{-x} - 9) \to x \times (-x) = -x^2$;
$(\underline{x} - 1)(-x \underline{- 9}) \to x \times (-9) = -9x$;
$(x \underline{- 1})(\underline{-x} - 9) \to -1 \times (-x) = x$;
$(x \underline{- 1})(-x \underline{- 9}) \to -1 \times (-9) = 9$.
Сложите все четыре полученные выше произведения и упростите окончательное выражение, объединив подобные члены:
$-x^2 \underline{-9x + x} + 9 = -x^2 - 8x + 9$.

29 $6x - (x - 2)(x - 4) + 7x^2 = \mathbf{6x^2 + 12x - 8}$. Перемножьте члены в обеих парах скобок по правилу FOIL. Сначала перемножьте два первых члена, затем два крайних, далее два внутренних члена и, наконец, два последних:
$(\underline{x} - 2)(\underline{x} - 4) \to x \times x = x^2$;
$(\underline{x} - 2)(x \underline{- 4}) \to x \times (-4) = -4x$;
$(x \underline{- 2})(\underline{x} - 4) \to (-2) \times x = -2x$;
$(x \underline{- 2})(x \underline{- 4}) \to -2 \times (-4) = 8$.

Сложите все четыре полученные выше произведения в одних скобках, заменив ими обе пары исходных скобок:
$6x - (x - 2)(x - 4) + 7x^2 = 6x - (x^2 - 4x - 2x + 8) + 7x^2$.
Оставшейся в итоге паре скобок предшествует знак "минус", поэтому измените сначала знак каждого члена в них на обратный, а затем опустите эти скобки:
$= 6x - (x^2 - 4x - 2x + 8) + 7x^2 = 6x - x^2 + 4x + 2x - 8 + 7x^2$.
Упростите окончательное выражение, объединив подобные члены:
$= \underline{6x + 4x + 2x}\ \underline{- x^2 + 7x^2} - 8 = 6x^2 + 12x - 8$.

30 $3 - 4x(x^2 + 1)(x - 5) + 2x^3 = \mathbf{-4x^4 + 22x^3 - 4x^2 + 20x + 3}$. Перемножьте члены в обеих парах скобок по правилу FOIL. Сначала перемножьте два первых члена, затем два крайних, далее два внутренних члена и, наконец, два последних:
$(\underline{x}^2 + 1)(\underline{x} - 5) \to x^2 \times x = x^3$;
$(\underline{x}^2 + 1)(x \underline{- 5}) \to x^2 \times (-5) = -5x^2$;
$(x^2 + \underline{1})(\underline{x} - 5) \to 1 \times x = x$;
$(x^2 + \underline{1})(x - \underline{5}) \to 1 \times (-5) = -5$.
Сложите все четыре полученные выше произведения в одних скобках, заменив ими обе пары исходных скобок:
$3 - 4x(x^2 + 1)(x - 5) + 2x^3 = 3 - 4x(x^3 - 5x^2 + x - 5) + 2x^3$.
Оставшейся в итоге паре скобок предшествует член $-4x$ со знаком "минус", поэтому умножьте сначала каждый член в этих скобках на $-4x$, а затем опустите их:
$= 3 - 4x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 20x + 2x^3$.
И, наконец, упростите окончательное выражение, объединив подобные члены:
$= -4x^4 + \underline{20x^3 + 2x^3} - 4x^2 + 20x + 3 = -4x^4 + 22x^3 - 4x^2 + 20x + 3$.

Глава 15

Нахождение правильного равновесия при решении алгебраических уравнений

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Решение алгебраических уравнений без алгебры

» Представление о методе рычажных весов

» Перемещение членов уравнения по разные стороны от знака равенства

» Упрощение алгебраических уравнений перекрестным умножением

В этой главе вам представится возможность воспользоваться навыками выполнения основных арифметических операций и упрощения алгебраических выражений, приобретенными в главе 14, для решения алгебраических уравнений, т.е. таких уравнений, которые содержат одну или несколько переменных (например, x и y). Решение алгебраических уравнений означает нахождение значений переменных. Сначала в этой главе будет показано, как решать самые простые уравнения для переменной x, не прибегая к методам алгебры. Затем будут представлены различные методы нахождения значений переменных в алгебраических уравнениях.

Решение простых алгебраических уравнений

Для решения простого алгебраического уравнения сама алгебра требуется далеко не всегда. Ниже поясняются три способа решения простых алгебраических уравнений.

» **Осмотр.** Достаточно посмотреть на простейшее алгебраическое уравнение, чтобы сразу же найти его решение.

» **Переписывание уравнения.** Чуть более сложное уравнение, возможно, придется переписать иначе, чтобы найти его решение. В одних случаях это делается с помощью обратных операций, а в других — с помощью той же самой операции с переставленными числами. (Подробнее об обратных операциях см. в главе 2.)

» **Предположение и проверка.** Если алгебраическое уравнение оказывается еще более сложным, можно попробовать предположить сначала его решение, а затем проверить правильность своего предположения, подставив предполагаемое значение вместо переменной x.

СОВЕТ

Если предполагаемое значение окажется неверным, то зачастую можно судить, насколько оно завышено или занижено, и на основании этого сделать следующее предположение.

Иногда алгебраическое уравнение можно упростить, прежде чем приступить к его решению. В частности, члены алгебраического уравнения, находящиеся по обе стороны от знака “равно”, можно реорганизовать, а подобные члены — объединить, как пояснялось в главе 14. И как только алгебраическое уравнение будет упрощено, можно воспользоваться любым методом, чтобы найти значение переменной x.

ПРИМЕР!

Задача. Чему равно значение переменной x в уравнении $x + 3 = 10$?

Решение. $x = 7$. Это уравнение можно решить простым осмотром. В частности, $x = 7$, поскольку $7 + 3 = 10$.

Задача. Решите уравнение $7x = 224$ для переменной x.

Решение. $x = 32$. Перепишите данное уравнение, используя операцию деления, обратную умножению:

$7 \times x = 224$ означает $224 \div 7 = x$.

Теперь данное уравнение решается простым делением в столбик (эта операция здесь не показана, но вы вольны поупражняться в делении столбиком, обратившись за справкой к главе 1):

$224 \div 7 = 32$.

Задача. Найдите значение переменной x в уравнении $8x - 20 = 108$.

Решение. $x = 16$. Предположите решение данного уравнения, допустив, что $x = 10$:

$8(10) - 20 = 80 - 20 = 60$.

Первое предположение оказалось заниженным, поскольку число 60 меньше 108. Попробуйте теперь выбрать большее число, допустив, что $x = 20$:

$8(20) - 20 = 160 - 20 = 140$.

Второе предположение оказалось завышенным, поскольку число 140 больше 108. Попробуйте далее выбрать меньшее значение, допустив, что $x = 15$:

$8(15) - 20 = 120 - 20 = 100$.

Число 100 лишь немногим меньше 108, поэтому третье предположение оказалось лишь немного заниженным. И, наконец, попробуйте предположить, что $x = 16$:

$8(16) - 20 = 128 - 20 = 108$.

Проверка дает верный результат, поэтому $x = 16$.

Задача. Решите уравнение $8x^2 - x + x^2 + 4x - 9x^2 = 18$ для переменной x.

Решение. $x = 6$. Реорганизуйте выражение слева от знака равенства, чтобы все подобные члены оказались рядом:

$8x^2 + x^2 - 9x^2 - x + 4x = 18$.

Объедините подобные члены:

$3x = 18$.

Обратите внимание на то, что члены x^2 упраздняются в данном уравнении. Таким образом, $x = 6$, поскольку $3 \times 6 = 18$, а $18 \div 3 = 6$.

1 Решите каждое из приведенных ниже уравнений только методом их осмотра.

а) $x + 5 = 13$.

б) $18 - x = 12$.

в) $4x = 44$.

г) $\frac{30}{x} = 3$.

2 Решите каждое из приведенных ниже уравнений, предварительно переписав его с помощью подходящей обратной операции.

а) $x + 41 = 97$.

б) $100 - x = 58$.

в) $13x = 273$.

г) $\frac{238}{x} = 17$.

3 Найдите значение переменной x в каждом из приведенных ниже уравнений методом предположения и проверки.

а) $19x + 22 = 136$.

б) $12x - 17 = 151$.

в) $19x - 8 = 600$.

г) $x^2 + 3 = 292$.

4 Сначала упростите, а затем решите каждое из приведенных ниже уравнений любым избранным вами методом.

а) $x^5 - 16 + x + 20 - x^5 = 24$.

б) $5xy + x - 2xy + 27 - 3xy = 73$.

в) $6x - 3 + x^2 - x + 8 - 5x = 30$.

г) $-3 + x^3 + 4 + x - x^3 - 1 =$
$= 2xy + 7 - x - 2xy + x$.

Равенство для всех: выделение переменной *x* методом рычажных весов

СОВЕТ

Алгебраическое уравнение можно наглядно представить в виде рычажных весов с горизонтальным коромыслом и двумя небольшими чашами, подвешенными на каждом его конце. В частности, знак равенства означает, что по обе стороны уравнения находятся одинаковые величины, а следовательно, они уравновешивают друг друга. Чтобы сохранить знак равенства, придется каким-то образом поддерживать равновесие в уравнении. Поэтому все, что ни делается по одну сторону уравнения, должно быть сделано и по другую его сторону.

Например, уравнение $4 + 2 = 6$ уравновешено, поскольку обе его стороны равны. Если же требуется добавить 1 с одной стороны данного уравнения, то же самое придется сделать и с другой стороны, чтобы сохранить равновесие, поскольку обе его стороны равны 7:

$4 + 2 + 1 = 6 + 1.$

В алгебраическом уравнении можно выполнить любую из четырех основных арифметических операций, при условии, что уравнение все время остается уравновешенным. В качестве примера ниже показано, как умножить обе стороны уравнения на 10. Обратите внимание на то, что уравнение остается уравновешенным, поскольку каждая его сторона равна 60:

$10(4 + 2) = 10(6).$

ЗАПОМНИ!

Простое понятие рычажных весов образует главную часть алгебры. Зная, как поддерживать равновесие рычажных весов, можно решать алгебраические уравнения, *выделяя* переменную x, т.е. располагая ее отдельно по одну сторону уравнения, а все остальное — по другую. Для решения большинства простых алгебраических уравнений процесс выделения переменной x выполняется в три следующие стадии.

1. **Прибавьте или вычтите одно и то же число с каждой стороны уравнения, чтобы все константы (т.е. члены без переменной *x*) оказались по одну сторону уравнения.**

   По другую сторону уравнения константы должны упраздниться, став равными нулю.

2. **Сложите или вычтите члены *x*, чтобы все они оказались по другую сторону уравнения.**

   Член x, находящийся по ту же сторону уравнения, что и константа, должен быть упразднен.

3. **Выполните деление, чтобы выделить переменную *x*.**

ПРИМЕР!

Задача. Найдите значение переменной x в уравнении $5x - 6 = 3x + 8$ методом рычажных весов.

Решение. $\boldsymbol{x = 7}$. Чтобы все константы оказались по правую сторону уравнения, прибавьте 6 с обеих его сторон, в результате чего число 6 упразднится с левой стороны уравнения.

$$\begin{array}{rcl} 5x - 6 & = & 3x + 8 \\ \underline{\quad +6} & & \underline{+6} \\ 5x & = & 3x + 14 \end{array}$$

По правую сторону данного уравнения по-прежнему находится член $3x$. Чтобы все члены x оказались по левую сторону уравнения, вычтите член $3x$ по обе стороны уравнения.

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 3x + 14 \\ \underline{-3x} & & \underline{-3x \quad\;\;} \\ 2x & = & 14 \end{array}$$

Выполните деление на 2, чтобы выделить переменную x.

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

5 Найдите значение переменной x в уравнении $9x - 2 = 6x + 7$ методом рычажных весов.

6 Решите уравнение $10x - 10 = 8x + 12$ методом рычажных весов.

7 Найдите значение переменной x в уравнении $4x - 17 = x + 22$ методом рычажных весов.

8 Решите уравнение $15x - 40 = 11x + 4$ для переменной x методом рычажных весов.

Смена сторон: реорганизация уравнений для выделения переменной x

Зная, как поддерживать равновесие в алгебраических уравнениях (см. предыдущий раздел), их можно решать более быстрым методом. Он состоит в *реорганизации уравнения* таким образом, чтобы все члены x оказались по одну сторону от знака равенства, а все константы (т.е. члены без переменной x) — по другую. Это, по существу, означает неявное выполнение сложения и вычитания, позволяющее выделить затем переменную x.

Как и метод рычажных весов, реорганизация алгебраического уравнения с целью решить его для переменной x выполняется в три этапа описываемого ниже процесса, хотя они обычно отнимают меньше времени.

1. **Реорганизуйте уравнение таким образом, чтобы все члены *x* оказались по одну сторону уравнения, а все константы (без членов *x*) — по другую.**

   ЗАПОМНИ!

   Перемещая член из одной стороны от знака равенства в другую, поменяйте его знак на обратный. Так, если член положительный, сделайте его отрицательным, а если он отрицательный, сделайте его положительным.

2. **Объедините подобные члены уравнения.**
3. **Выполните деление, чтобы выделить переменную *x*.**

Если по одну или обе стороны уравнения находятся скобки, сначала удалите их, как пояснялось в главе 14, а затем выполните три описанных выше этапа, чтобы решить уравнение для переменной x.

ПРИМЕР!

Задача. Найдите значение переменной x в уравнении $7x - 6 =$ $= 4x + 9$.

Решение. $x = 5$. Реорганизуйте члены данного уравнения таким образом, чтобы все переменные x оказались по одну его сторону, а все константы — по другую сторону. Сделайте это в два этапа:

$7x - 6 = 4x + 9;$

$7x = 4x + 9 + 6;$

$7x - 4x = 9 + 6.$

Объедините сходные члены по обе стороны уравнения:

$3x = 15.$

Разделите на 3, чтобы выделить переменную x:

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3};$

$x = 5.$

Задача. Найдите значение переменной x в уравнении
$3 - (7x - 13) = 5(3x - x) - x$.

Решение. $\boldsymbol{x = 1}$. Прежде чем приступать к реорганизации данного уравнения, удалите скобки с обеих его сторон. Скобкам слева предшествует знак "минус", поэтому измените знак каждого члена в этих скобках на противоположный:

$3 - 7x + 13 = 5(3x - x) - x$.

Между коэффициентом 5 и скобками справа отсутствует знак, поэтому умножьте сначала каждый член в этих скобках на 5, а затем удалите скобки:

$3 - 7x + 13 = 15x - 5x - x$.

Теперь можно решить уравнение в три этапа. Сначала расположите все члены x по одну сторону уравнения, а все константы — по другую, не забыв изменить их знаки на противоположные:

$-7x = 15 - 5x - x - 3 - 13$;

$-7x + 5x + x = 15 - 3 - 13$.

Затем объедините подобные члены по обе стороны уравнения:

$-x = -1$.

И, наконец, разделите на -1, чтобы выделить переменную x:

$\frac{-x}{-1} = \frac{-1}{-1}$;

$x = 1$.

9 Реорганизуйте уравнение $10x + 5 = 3x + 19$, чтобы решить его для переменной x.

10 Найдите значение переменной x, реорганизовав и решив уравнение $4 + (2x + 6) = 7(x - 5)$.

11 Решите уравнение $-[2(x + 7) + 1] = x - 12$ для переменной x.

12 Найдите значение переменной x в уравнении $-x^3 + 2(x^2 + 2x + 1) = 4x^2 - (x^3 + 2x^2 - 18)$.

Упрощение дробных уравнений методом перекрестного умножения

Дробные черты, как и скобки, служат для группирования символов. Одна группа находится в числителе, другая — в знаменателе. Но, как и скобки, дробные черты могут препятствовать реорганизации алгебраического уравнения и объединению подобных членов. Правда, удалить дробные черты из алгебраического уравнения совсем не трудно методом перекрестного умножения.

Используя перекрестное умножение, можно сравнивать дроби, как пояснялось в главе 6. Чтобы выяснить, равны ли дроби, достаточно умножить их перекрестно, т.е. умножить числитель одной дроби на знаменатель другой. В качестве примера ниже приведены две равные дроби. Как видите, в результате их перекрестного умножения получается другое, но полностью уравновешенное уравнение. Подобным способом можно упростить алгебраические уравнения, содержащие дроби.

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10};$$

$$\frac{2(10)}{20}=\frac{4(5)}{20}.$$

ПРИМЕР!

Задача. Решите уравнение $\frac{2x}{3}=x-3$, используя перекрестное умножение.

Решение. $x = 9$. Выполните перекрестное умножение, чтобы избавиться от дроби в данном уравнении. С этой целью преобразуйте правую часть уравнения в дробь, введя 1 в знаменатель:

$$\frac{2x}{3}=\frac{x-3}{1}.$$

Затем выполните перекрестное умножение:

$$2x(1) = 3(x - 3).$$

Далее удалите скобки по обе стороны уравнения, как пояснялось в главе 14:

$$2x = 3x - 9.$$

А теперь можно реорганизовать данное уравнение и решить его для переменной x, как пояснялось ранее в этой главе:

$$2x-3x=-9;$$
$$-x=-9;$$
$$\frac{-x}{-1}=\frac{-9}{-1};$$
$$x=9.$$

Задача. Решите уравнение $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{6x}{3x+1}$, используя перекрестное умножение.

Решение. $\boldsymbol{x = 1}$. Иногда после перекрестного умножения может возникнуть потребность упростить обе стороны результирующего уравнения по правилу FOIL. Итак, выполните сначала перекрестное умножение, чтобы избавиться от дроби в данном уравнении:

$(2x - 1)(3x + 1) = 6x(x + 1)$.

Затем удалите скобки с левой стороны уравнения, перемножив находящиеся в них члены по правилу FOIL, как пояснялось в главе 14:

$6x^2 + 2x + 3x + 1 = 6x(x + 1)$.

Чтобы удалить скобки с левой стороны уравнения, умножьте сначала каждый член в этих скобках на $6x$, а затем опустите скобки:

$6x^2 + 2x + 3x + 1 = 6x^2 + 6x$.

А теперь можно реорганизовать данное уравнение и решить его для переменной x:

$1 = 6x^2 - 6x^2 + 6x - 2x - 3$.

Обратите внимание на то, что члены x^2 упраздняются:

$1=6x-2x=3x$;

$1=x$.

13 Реорганизуйте уравнение $\frac{x+5}{2}=\frac{-x}{8}$, чтобы решить его для переменной x.

14 Найдите значение переменной x, реорганизовав уравнение $\frac{3x+5}{7}=x-1$.

15 Решите уравнение $\frac{x}{2x-5} = \frac{2x+3}{4x-7}$.

16 Найдите значение переменной x в уравнении $\frac{2x+3}{4-8x} = \frac{6-x}{4x+8}$.

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих применить на практике приобретенные знания.

1 Решите каждое из приведенных ниже уравнений только методом их осмотра.

а) $x + 5 = 13$; $\boldsymbol{x = 8}$, поскольку $8 + 5 = 13$.

б) $18 - x = 12$; $\boldsymbol{x = 6}$, поскольку $18 - 6 = 12$.

в) $4x = 44$; $\boldsymbol{x = 11}$, поскольку $4 \times 11 = 44$.

г) $\frac{30}{x} = 3$; $\boldsymbol{x = 10}$, поскольку $\frac{30}{10} = 3$.

2 Решите каждое из приведенных ниже уравнений, предварительно переписав его с помощью подходящей обратной операции.

а) $x + 41 = 97$; $\boldsymbol{x = 56}$. Смените операцию сложения на вычитание: $x = 97 - 41$, получив в итоге $x = 56$.

б) $100 - x = 58$, $\boldsymbol{x = 42}$. Смените операцию вычитания на сложение, но с учетом смены знака на противоположный при перестановке членов уравнения: $100 - 58 = x$, получив в итоге $x = 42$.

в) $13x = 273$; $\boldsymbol{x = 21}$. Смените операцию умножения на деление: $x = \frac{273}{13}$, получив в итоге $x = 21$.

г) $\frac{238}{x} = 17$; $\boldsymbol{x = 14}$. Смените операцию деления на противоположную $\frac{238}{17} = x$, получив в итоге $x = 14$.

3 Найдите значение переменной x в каждом из приведенных ниже уравнений методом предположения и проверки.

а) $19x + 22 = 136$; $\boldsymbol{x = 6}$. Попробуйте сначала предположить, что $x = 10$:
$19(10) + 22 = 190 + 22 = 212$.
Число 212 больше 136, поэтому данное предположение завышено. Попробуйте затем предположить, что $x = 5$:
$19(5) + 22 = 95 + 22 = 117$.
Число 117 лишь ненамного меньше 136, поэтому данное предположение немного занижено. Попробуйте далее предположить, что $x = 6$:
$19(6) + 22 = 114 + 22 = 136$.
Данное предположение оказалось верным, и поэтому $x = 6$.

б) $12x - 17 = 151$; $\boldsymbol{x = 14}$. Попробуйте сначала предположить, что $x = 10$:
$12(10) - 17 = 120 - 17 = 103$.
Число 103 меньше 151, поэтому данное предположение занижено. Попробуйте затем предположить, что $x = 20$:
$12(20) - 17 = 240 - 17 = 223$.
Число 223 больше 151, поэтому данное предположение завышено. Следовательно, значение переменной x находится где-то в пределах от 10 до 20. Попробуйте далее предположить, что $x = 15$:
$12(15) - 17 = 180 - 17 = 163$.
Число 163 чуть больше 151, поэтому данное предположение немного завышено. Попробуйте теперь предположить, что $x = 14$:
$12(14) - 17 = 168 - 17 = 151$.
Данное предположение оказалось верным, и поэтому $x = 14$.

в) $19x - 8 = 600$; $\boldsymbol{x = 32}$. Попробуйте сначала предположить, что $x = 10$:
$19(10) - 8 = 190 - 8 = 182$.
Число 182 намного меньше 600, поэтому данное предположение занижено. Попробуйте затем предположить, что $x = 30$:
$19(30) - 8 = 570 - 8 = 562$.
Число 562 немного меньше 600, поэтому данное предположение несколько занижено. Попробуйте далее предположить, что $x = 35$:

$19(35) - 8 = 665 - 8 = 657$.

Число 657 больше 600, поэтому данное предположение несколько завышено. Следовательно, значение переменной x находится где-то в пределах от 30 до 35. Попробуйте теперь предположить, что $x = 32$:

$19(32) - 8 = 608 - 8 = 600$

Данное предположение оказалось верным, и поэтому $x = 32$.

г) $x^2 + 3 = 292$; $\boldsymbol{x = 17}$. Попробуйте сначала предположить, что $x = 10$:

$10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$.

Число 103 меньше 292, поэтому данное предположение занижено. Попробуйте затем предположить, что $x = 20$:

$20^2 + 3 = 400 + 3 = 403$.

Число 403 больше 292, поэтому данное предположение несколько завышено. Следовательно, значение переменной x находится где-то в пределах от 10 до 20. Попробуйте далее предположить, что $x = 15$:

$15^2 + 3 = 225 + 3 = 228$.

Число 228 меньше 292, поэтому данное предположение занижено. Следовательно, значение переменной x находится где-то в пределах от 15 до 20. Попробуйте теперь предположить, что $x = 17$:

$17^2 + 3 = 289 + 3 = 292$.

Данное предположение оказалось верным, и поэтому $x = 17$.

4 Сначала упростите, а затем решите каждое из приведенных ниже уравнений любым избранным вами методом.

а) $x^5 - 16 + x + 20 - x^5 = 24$; $\boldsymbol{x = 20}$. Реорганизуйте заданное уравнение с левой стороны, чтобы расположить подобные члены рядом:

$\underline{x^5 - x^5} + x + \underline{20 - 16} = 24$.

Объедините подобные члены:

$x + 4 = 24$.

Обратите внимание на то, что члены x^5 и $-x^5$ упраздняются. А поскольку $20 + 4 = 24$, то в итоге получается, что $x = 20$.

б) $5xy + x - 2xy + 27 - 3xy = 73$; $\boldsymbol{x = 46}$. Реорганизуйте заданное уравнение с левой стороны, чтобы расположить подобные члены рядом:

$\underline{5xy - 2xy - 3xy} + x + 27 = 73$.

Объедините подобные члены:

$x + 27 = 73$.

Обратите внимание на то, что все члены xy упраздняются. А поскольку $x + 27 = 73$ равнозначно $x = 73 - 27$, то итоге получается, что $x = 46$.

в) $6x - 3 + x^2 - x + 8 - 5x = 30$; $\boldsymbol{x = 5}$. Реорганизуйте заданное уравнение с левой стороны, чтобы расположить подобные члены рядом:

$\underline{6x - x - 5x} + x^2 + \underline{8 - 3} = 30$.

Объедините подобные члены:

$x^2 + 5 = 30$.

Обратите внимание на то, что все члены x упраздняются. Попробуйте сначала предположить, что $x = 10$:

$10^2 + 5 = 30$.

Число 105 больше 30, поэтому данное предположение несколько завышено. Следовательно, значение переменной x находится в пределах от 0 до 10. Попробуйте затем предположить, что $x = 5$:

$5^2 + 5 = 30$.

Данное предположение оказалось верным, и поэтому $x = 5$.

г) $-3 + x^3 + 4 + x - x^3 - 1 = 2xy + 7 - x - 2xy + x$; $\mathbf{x = 7}$. Реорганизуйте заданное уравнение с левой стороны, чтобы расположить подобные члены рядом:

$\underline{-3 + 4 - 1} + \underline{x^3 - x^3} + x = 2xy + 7 - x - 2xy + x$.

Объедините подобные члены:

$x = 2xy + 7 - x - 2xy + x$.

Обратите внимание на то, что все константы и члены x^3 упраздняются. А теперь реорганизуйте приведенное выше уравнение с правой стороны, чтобы расположить подобные члены рядом:

$x = \underline{2xy - 2xy} + 7 \underline{- x + x}$.

Объедините подобные члены:

$x = 7$.

Обратите внимание на то, что все члены xy и x упраздняются. Таким образом, $x = 7$.

5 $\mathbf{x = 3}$. Прибавьте 2 по обе стороны заданного уравнения, чтобы все константы оказались с его правой стороны.

$$\begin{array}{rcl} 9x - 2 & = & 6x + 7 \\ \underline{\quad +2} & \underline{=} & \underline{\quad +2} \\ 9x \quad & = & 6x + 9 \end{array}$$

Вычтите $6x$ по обе стороны данного уравнения, чтобы все члены x оказались с левой стороны уравнения.

$$\begin{array}{rcr} 9x & = & 6x + 9 \\ \underline{-6x} & & \underline{-6x \quad\;\;} \\ 3x & = & 9 \end{array}$$

Разделите на 3, чтобы выделить переменную x:

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$;

$x = 3$.

6 $\boldsymbol{x = 11}$. Прибавьте 10 по обе стороны заданного уравнения, чтобы все константы оказались с его правой стороны.

$$\begin{array}{rcl} 10x-10 &=& 8x+12 \\ \underline{\quad +10} && \underline{\quad +10} \\ 10x &=& 8x+22 \end{array}$$

Вычтите $8x$ по обе стороны данного уравнения, чтобы все члены x оказались с левой стороны уравнения.

$$\begin{array}{rcl} 10x &=& 8x+22 \\ \underline{-8x} && \underline{-8x\quad} \\ 2x &=& 22 \end{array}$$

Разделите на 2, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{2x}{2}=\frac{22}{2};$$

$$x = 11.$$

7 $\boldsymbol{x = 13}$. Прибавьте 17 по обе стороны заданного уравнения, чтобы все константы оказались с его правой стороны.

$$\begin{array}{rcl} 4x-17 &=& x+22 \\ \underline{\quad +17} && \underline{\quad +17} \\ 4x &=& x+39 \end{array}$$

Вычтите x по обе стороны данного уравнения, чтобы все члены x оказались с левой стороны уравнения.

$$\begin{array}{rcl} 4x &=& x+39 \\ \underline{-x} && \underline{-x\quad} \\ 3x &=& 39 \end{array}$$

Разделите на 3, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{3x}{3}=\frac{39}{3};$$

$$x = 13.$$

8 $\boldsymbol{x = 11}$. Прибавьте 40 по обе стороны заданного уравнения, чтобы все константы оказались с его правой стороны.

$$\begin{array}{rcl} 15x-40 &=& 11x+\ \ 4 \\ \underline{\quad +40} && \underline{\quad +40} \\ 15x &=& 11x+44 \end{array}$$

Вычтите x по обе стороны данного уравнения, чтобы все члены x оказались с левой стороны уравнения.

$$\begin{array}{rcl} 15x &=& 11x+44 \\ \underline{-11x} && \underline{-11x\quad} \\ 4x &=& 44 \end{array}$$

Разделите на 4, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{4x}{4} = \frac{44}{4};$$

$$x = 11.$$

9 $\boldsymbol{x = 2}$. Реорганизуйте члены заданного уравнения таким образом, чтобы все переменные x оказались по одну его сторону, а все константы — по другую. Сделайте это в два этапа:

$$10x + 5 = 3x + 19;$$

$$10x = 3x + 19 - 5;$$

$$10x - 3x = 19 - 5.$$

Объедините подобные члены по обе стороны уравнения:

$$7x = 14.$$

Разделите на 7, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{7x}{7} = \frac{14}{7};$$

$$x = 2.$$

10 $\boldsymbol{x = 9}$. Прежде чем приступать к реорганизации заданного уравнения, удалите скобки с обеих его сторон. Скобкам слева от знака равенства предшествует знак "плюс", поэтому просто опустите их:

$$4 + (2x + 6) = 7(x - 5);$$

$$4 + 2x + 6 = 7(x - 5).$$

Между коэффициентом 7 и скобками в правой части уравнения отсутствует знак, поэтому умножьте сначала каждый член в этих скобках на 7, а затем удалите скобки:

$$4 + 2x + 6 = 7x - 35.$$

Теперь можно решить приведенное выше уравнение для переменной x, реорганизовав его. С этой целью сгруппируйте члены x по одну сторону данного уравнения, а константы — по другую. Сделайте это в два этапа, как показано ниже.

$$4 + 6 = 7x - 35 - 2x;$$

$$4 + 6 + 35 = 7x - 2x.$$

Объедините подобные члены по обе стороны уравнения:

$$45 = 5x.$$

Разделите на 5, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{45}{5} = \frac{5x}{5};$$

$$9 = x.$$

11 $x = -1$. Прежде чем приступать к реорганизации заданного уравнения, удалите скобки в его левой части. Начните с внутренних скобок, умножив на 2 все находящиеся в них члены:

$-[2(x+7)+1] = x-12;$

$-[2x+14+1] = x-12.$

Затем удалите оставшиеся скобки, изменив знак каждого находящегося в них члена на противоположный:

$-2x - 14 - 1 = x - 12.$

Теперь можно решить приведенное выше уравнение для переменной x, реорганизовав его:

$-2x-14-1+12 = x;$

$-14-1+12 = x+2x.$

Объедините подобные члены по обе стороны уравнения:

$-3 = 3x.$

Разделите на 3, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{-3}{3} = \frac{3x}{3};$$

$$-1 = x.$$

12 $x = 4$. Прежде чем приступать к реорганизации заданного уравнения, умножьте на 2 члены в скобках слева и удалите скобки по обе стороны уравнения:

$-x^3+2(x^2+2x+1) = 4x^2-(x^3+2x^2-18);$

$-x^3+2x^2+4x+2 = 4x^2-(x^3+2x^2-18);$

$-x^3+2x^2+4x+2 = 4x^2-x^3-2x^2+18.$

Реорганизуйте полученное в итоге уравнение, как показано ниже:

$-x^3+2x^2+4x+2-4x^2+x^3+2x^2 = 18;$

$-x^3+x^3+2x^2-4x^2+2x^2+4x = 18-2.$

Объедините подобные члены по обе стороны уравнения, обратив внимание на то, что все члены x^3 и x^2 упраздняются:

$4x = 16.$

Разделите на 4, чтобы выделить переменную x:

$$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4};$$

$$x = 4.$$

13 $x = -4$. Удалите дробь из заданного уравнения перекрестным умножением, как показано ниже.

$$\frac{x+5}{2}=\frac{-x}{8};$$

$$8(x+5)=-2x$$

Умножьте на 8 члены в скобках слева и удалите эти скобки:

$8x + 40 = -2x.$

Теперь можно решить приведенное выше уравнение для переменной x:

$$40=-2x-8x;$$

$$40=-10x;$$

$$\frac{40}{-10}=\frac{-10x}{-10};$$

$$-4=x.$$

14 $\boldsymbol{x = 3}$. Преобразуйте правую часть заданного уравнения в дробь, введя знаменатель с 1. Удалите дробь из полученного в итоге уравнения перекрестным умножением, как показано ниже:

$$\frac{3x+5}{7}=\frac{x-1}{1};$$

$$3x+5=7(x-1).$$

Умножьте на 7 члены в скобках справа, чтобы удалить эти скобки из уравнения:

$3x + 5 = 7x - 7.$

А теперь можно решить приведенное выше уравнение для переменной x:

$$5=7x-7-3x;$$

$$5+7=7x-3x;$$

$$12=4x;$$

$$3=x.$$

15 $\boldsymbol{x = 5}$. Удалите дроби из заданного уравнения перекрестным умножением, как показано ниже:

$$\frac{x}{2x-5}=\frac{2x+3}{4x-7};$$

$$x(4x-7)=(2x+3)(2x-5).$$

Удалите сначала скобки слева, умножив находящиеся в них члены на x, а затем скобки справа, перемножив находящиеся в них члены по правилу FOIL:

$4x^2 - 7x = 4x^2 - 10x + 6x - 15.$

Реорганизуйте приведенное выше уравнение:

$4x^2 - 4x^2 - 7x + 10x - 6x = -15.$

Обратите внимание на то, что оба члена x^2 упраздняются, а остальные подобные члены объединяются:

$$-7x+10x-6x=-15;$$
$$-3x=-15;$$
$$\frac{-3x}{-3}=\frac{-15}{-3};$$
$$x=5.$$

16 $\boldsymbol{x = 0}$. Удалите дроби из заданного уравнения перекрестным умножением, как показано ниже.

$$\frac{2x+3}{4-8x}=\frac{6-x}{4x+8};$$
$$(2x+3)(4x+8)=(6-x)(4-8x).$$

Перемножьте члены, находящиеся в скобках справа и слева, по правилу FOIL, удалив в итоге скобки:

$8x^2 + 16x + 12x + 24 = 24 - 48x - 4x + 8x^2$.

Реорганизуйте полученное в итоге уравнение, чтобы решить его для переменной x, как показано ниже. Обратите внимание на упразднение констант и членов x^2:

$$16x+12x+48x+4x=0;$$
$$80x=0;$$
$$\frac{80x}{80}=\frac{0}{80};$$
$$x=0.$$

5
Великолепные десятки

В ЭТОЙ ЧАСТИ...

- Древние числовые системы, включая египетскую, римскую и систему чисел древних майя
- Простые числа, включая простые числа Мерсенна и Ферма

Глава 16

Десять других способов и систем представления чисел

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Описание числовых систем вавилонян, египтян, римлян и древних майя

» Сравнение десятичной системы с двоичной и шестнадцатеричной системами

» Проникновение в область простых чисел

Отличия чисел от цифр незначительны, но важны. Число — это понятие, выражающее количество или величину. А цифра — это письменный знак или символ, выражающий число.

В этой главе описываются десять способов и систем представления чисел, отличающихся от индоарабской (десятичной) системы. В одних из этих систем употребляются символы, совершенно отличающиеся от тех, к которым вы привыкли, а в других — символы, которые вам так или иначе известны. Одни из описываемых здесь числовых систем находят полезное применение, а другие просто вызывают любопытство. (Ими можно, например, пользоваться для отправки секретных сообщений!) Но в любом случае вам будет полезно знать, сколько разных способов изобрело человечество для представления столь привычных чисел.

Отдельные засечки

Числа являются абстракциями реальных вещей. Первые числа появились с развитием товарно-денежных отношений, поскольку людям нужно было каким-то образом вести учет количества товаров, в том числе животных, собранного урожая или орудий труда. Поначалу торговцы пользовались глиняными или каменными знаками, упрощавшими задачу подсчета. Первые числа, вероятно, были попыткой упростить такую систему учета. Со временем учетные засечки, делавшиеся на кости или глине, пришли на смену знакам.

Если проанализировать причины появления засечек вместо знаков, то они указывают на повышение сложности учета. И если раньше один настоящий предмет (каменный знак) представлял другой предмет (например, овцу или початок кукурузы), то в дальнейшем реальный объект стали обозначать некоторой *абстракцией* в виде отдельной засечки.

Групповые засечки

По мере того как древнее человечество освоилось с засечками, обозначавшими реальные объекты, на следующей стадии развития системы учета засечки стали делать *группами* по 5 (т.е. по числу пальцев на руке), по 10 (т.е. по числу пальцев на обеих руках) или по 20 (т.е. по числу пальцев на руках и ногах). Группирование засечек обеспечило простой способ подсчета объектов в крупных количествах.

Безусловно, такая система учета была более простой для понимания, чем отдельные засечки, поскольку она позволяла легко умножить на пять или посчитать по пять, чтобы получить итог. И даже в наше время люди подсчитывают очки в играх, используя подобные группы засечек.

Египетские цифры

Древнеегипетские цифры относятся к самым старым числовым системам, употребляемым до сих пор. Для обозначения египетских цифр служат семь символов, поясняемых в табл. 16.1.

Числа образуются путем накапливания достаточного количества символов. Например:

7 = 7 черт
24 = 2 ярма, 4 черты
1536 = 1 лотос, 5 витков веревки, 3 ярма, 6 черт

В египетской числовой системе символ, обозначающий число 1 000 000, обозначает также бесконечность (∞).

Таблица 16.1. Египетские цифры

Число	Символ
1	Черта
10	Ярмо
100	Виток веревки
1000	Лотос
10 000	Палец
100 000	Лягушка
1 000 000	Человек с поднятыми руками

Вавилонские цифры

В вавилонской числовой системе, появившейся около 4 тысяч лет назад, употребляются два перечисленных ниже символа.

1 = Y 10 = <

Числа меньше 60 образуются путем накапливания достаточного количества символов. Например:

6 = YYYYYY;
34 = <<<YYYY;
59 = <<<<<YYYYYYYYY.

А для обозначения чисел от 60 и больше употребляется разрядное значение, основанное на числе 60. Например:

61= Y Y (одно число 60 и одно число 1);
124 = YY YYYY (два числа 60 и четыре числа 1);
611 = < < Y (десять чисел 60 и одиннадцать чисел 1).

В отличие от привычной для вас десятичной системы, в вавилонской числовой системе отсутствовал символ для обозначения значащего нуля, что приводило к неоднозначности в интерпретации чисел. Например, число 60 обозначалось тем же символом, что и число 1.

Древнегреческие цифры

Древнегреческая числовая система основывалась на буквах греческого алфавита. В частности, числа от 1 до 999 образовывались с помощью символов, перечисленных в табл. 16.2.

Таблица 16.2. Древнегреческие цифры

Единицы	Десятки	Сотни
1 = α (альфа)	10 = ι (йота)	100 = ρ (ро)
2 = β (бета)	20 = κ (каппа)	200 = σ (сигма)
3 = γ (гамма)	30 = λ (лямбда)	300 = τ (тау)
4 = δ (дельта)	40 = μ (мю)	400 = υ (ипсилон)
5 = ε (эпсилон)	50 = ν (ню)	500 = φ (фи)
6 = ς (дигамма)	60 = ξ (кси)	600 = χ (хи)
7 = ζ (зета)	70 = ο (омикрон)	700 = ψ (пси)
8 = η (эта)	80 = π (пи)	800 = ω (омега)
9 = θ (тета)	90 = ϟ (коппа)	900 = ϡ (сампи)

Римские цифры

Несмотря на то что римским цифрам больше 2000 лет, они по-прежнему употребляются как в изобразительных целях (например, на циферблатах часов, краеугольных камнях и в памятных датах), так и в тех случаях, когда требуется обозначение не десятичными, а другими цифрами (например, в планах, схемах, очерках). Для обозначения римских цифр служат семь символов, в качестве которых выбраны прописные буквы латинского алфавита.

I = 1	V = 5	X = 10	L = 50
C = 100	D = 500	M = 1000	

Большинство чисел образуются в римской числовой системе путем накапливания достаточного количества символов. В общем, символы перечисляются по порядку от старших к младшим. Ниже приведены некоторые тому примеры.

3 = III	8 = VIII	20 = XX	70 = LXX
300 = CCC	600 = DC	2000 = MM	

Числа, содержащие цифры 4 или 9 в десятичной системе, образуются путем перестановки двух чисел для обозначения операции вычитания. Так, если младшая цифра следует прежде старшей, меньшее число необходимо вычесть из последующего большего числа, как показано ниже.

4 = IV	9 = IX	40 = XL
90 = XC	400 = CD	900 = CM

Этих двух способов образования чисел оказывается достаточно, чтобы представить римскими цифрами все десятичные числа от 1 до 3999.

37 = XXXVII	664 = DCLXIV
1776 = MDCCLXXVI	1999 = MCMXCIX

И хотя большие числа редко обозначаются римскими цифрами, их можно все же образовать, указав горизонтальную черту над соответствующим символом, начиная с цифры V с чертой сверху, обозначающей 5000, и кончая цифрой M с чертой сверху, обозначающей 1 000 000. При этом горизонтальная черта сверху указывает на необходимость умножить на 1000.

Цифры Майя

Числовая система древних майя была разработана в Южной Америке приблизительно в тот же период времени, что и римская числовая система в Европе. В числовой системе древних майя для обозначения чисел от 1 до 19 служат два символа: точка и горизонтальная черта, причем горизонтальная черта равна 5, а точка — 1. Числа от 1 до 19 образуются путем накапливания достаточного количества точек и горизонтальных черт. Например:

3 = 3 точки;
7 = 2 точки над одной чертой;
19 = 4 точки над тремя чертами.

Числа от 20 до 399 образуются с помощью тех же самых сочетаний точек и черт, но приподнятых для обозначения разрядного значения. Например:

21 = 1 приподнятая точка, 1 точка (одно число 20 + одно число 1);
86 = 4 приподнятые точки, 1 точка над одной чертой (четыре числа 20 + + одно число 5 + одно число 1);
399 = 4 приподнятые точки над тремя чертами, 4 точки над тремя чертами (девятнадцать чисел 20 + три числа 5 + четыре числа 1).

Как видите, разрядное значение в числовой системе древних майя основывалось на числе 20, а не на привычном для нас числе 10. Аналогично образуются числа от 400 до 7999, но с дополнительным разрядным значением для четырех сотен.

Самой передовой особенностью числовой системы майя является включение в ее состав символа пустой ракушки, обозначавшего нуль и употреблявшегося по мере надобности в качестве значащего. А поскольку в числовой системе древних майя используется разрядное значение, то на выражение величины чисел в ней не накладывается никаких ограничений. Благодаря этому числовая система древних майя с точки зрения математики более совершенна, чем египетская или римская числовая система. Например, цифрами майя можно выразить такие астрономические величины, как число звезд в изведанной вселенной или число атомов в вашем теле, не меняя основных правил построения данной числовой системы. Такого рода числовые величины невозможно представить египетскими или римскими числами.

Двоичная система (по основанию 2)

Для обозначения двоичных чисел служат лишь два символа: 0 и 1. Благодаря такой простоте представления двоичная система употребляется в вычислительной технике для обозначения сохраняемых и обрабатываемых данных.

Как и в хорошо знакомой вам десятичной системе, разрядное значение употребляется и в двоичной системе (подробнее о разрядном значении см. в главе 1). Но, в отличие от десятичной системы, разрядное значение в двоичной системе основывается не на степенях числа 10 (1, 10, 100, 1000 и т.д.), а на степенях числа 2 (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9 и т.д.), как указано в табл. 16.3 (подробнее о степенях чисел см. в главе 2).

Таблица 16.3. Значения разрядов в двоичной системе

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Обратите внимание на то, что каждое число, приведенное в табл. 16.3, ровно в два раз больше числа, находящегося справа от него. Следует также заметить, что *основанием* двоичной системы счисления служит ряд показателей степени числа 2. Используя это обстоятельство, можно найти десятичное значение двоичного числа. Допустим, требуется представить двоичное число 1101101 в десятичном виде. С этой целью расположите данное число по двоичной схеме, приведенной в табл. 16.4.

Таблица 16.4. Поразрядное разбиение двоичного числа

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
			1	1	0	1	1	0	1

Как следует из табл. 16.4, рассматриваемое здесь число состоит из одного числа 64, одного числа 32, ни одного числа 16, одного числа 8, одного числа 4, ни одного числа 2 и одного числа 1. Сложив все эти числа, можно найти десятичное 109, равнозначное двоичному числу 1101101:

$64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109.$

Чтобы преобразовать десятичное число в его двоичный эквивалент, выполните целочисленное деление и определите частное и остаток, как пояснялось в главе 1. Начните с деления преобразуемого десятичного числа на ближайшую к нему наибольшую степень числа 2 и продолжайте делить его дальше на следующие по порядку меньшие степени числа 2. В качестве примера ниже показано, как представить десятичное число 83 в двоичном виде.

83 ÷ 64 = 1 ост (19);
19 ÷ 32 = 0 ост (19);
19 ÷ 16 = 1 ост (3);
3 ÷ 8 = 0 ост (3);
3 ÷ 4 = 0 ост (3);
3 ÷ 1 = 1 ост (1);
1 ÷ 1 = 1 ост (0).

Таким образом, десятичному числу 83 соответствует равнозначное двоичное число 1010011, поскольку 64 + 16 + 2 +1 = 83.

Шестнадцатеричная система (по основанию 16)

Двоичные числа являются первым языком программирования компьютеров. Но на практике двоичные числа любой значительной длины оказываются неудобочитаемыми. В этом отношении более удобные шестнадцатеричные числа, которые легко преобразуются в двоичные. Поэтому программисты пользуются шестнадцатеричными числами в качестве своего рода общепринятого языка, когда им приходится взаимодействовать с компьютерами на низком уровне аппаратных и программных средств.

В шестнадцатеричной системе счисления применяются все десять цифр от 0 до 9 из десятичной системы и дополнительно — шесть букв, как показано ниже.

A = 10	**B** = 11	**C** =12
D = 13	**E** = 14	**F** = 15

Шестнадцатеричная система разрядных значений основывается на степенях числа 16, как показано в табл. 16.5.

Таблица 16.5. Значения разрядов в шестнадцатеричной системе

1 048 576	65 536	4096	256	16	1

Ниже приведены некоторые примеры шестнадцатеричных чисел и равнозначных им десятичных чисел:

3B = (3 × 16) + 11 = 59;
289 = (2 × 256) + (8 × 16) + 9 = 649;
ABBA = (10 × 4096) + (11 × 256) + (11 × 16) + 10 = 43 962;
B00B00= (11 × 1 048 576) + (11 × 256) = 11 537 152.

Система простых чисел

Простые числа являются еще одним необычным способом представления чисел, отличающимся от всех способов, упоминавшихся ранее в этой главе. Такие числа подобны десятичным, двоичным и шестнадцатеричным числам в том отношении, что разрядное значение применяется в них для определения значений отдельных цифр. Но, в отличие от других числовых систем, система простых чисел основывается не на сложении, а на умножении. Схема разрядных значений в системе простых чисел приведена в табл. 16.6.

Таблица 16.6. Значения разрядов в системе простых чисел

31	29	23	19	17	13	11	7	5	3	2

Используя табл. 16.6, можно найти десятичное значение числа, преставленного в системе простых чисел. Допустим, требуется перевести число 1204 из системы простых чисел в десятичный вид. Сначала расположите данное число по схеме, приведенной в табл. 16.7.

Таблица 16.7. Поразрядное разбиение на простые числа

31	29	23	19	17	13	11	7	5	3	2
							1	2	0	4

Как нетрудно догадаться по табл. 16.7, рассматриваемое здесь число состоит из одного числа 7, двух чисел 5, ни одного числа 3 и четырех чисел 2. Но вместо того чтобы складывать все эти числа, их следует *перемножить*:

$7 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2800.$

Чтобы преобразовать десятичное число в равнозначное ему число в системе простых чисел, его необходимо разложить его на простые множители и расположить их по схеме поразрядного разбиения. Допустим, требуется представить десятичное число 60 в системе простых чисел. Сначала разложите число 60 на простые множители, как пояснялось в главе 5:

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$

Затем подсчитайте количество двоек, троек и пятерок, расположив их по отдельным разрядным значениям, приведенным в табл. 16.6. Полученный в итоге результат представлен в табл. 16.8. Таким образом, десятичному числу 60 соответствует равнозначное число 112 в системе простых чисел.

Таблица 16.8. Представление числа 60 в системе простых чисел

31	29	23	19	17	13	11	7	5	3	2
								1	1	2

Любопытно, что умножение чисел, представленных в системе простых чисел, подобно сложению десятичных чисел. Например, в десятичной системе $9 \times 10 = 90$. Множителям 9 и 10 и произведению 90 этих десятичных чисел равнозначны числа 20, 101 и 121 в системе простых чисел. Ниже показано, как выполнить то же самое умножение в системе простых чисел:

$20 \times 101 = 121.$

Как видите, умножение в системе простых чисел в большей степени похоже на сложение. Более того, единица в десятичной системе представлена нулем в системе простых чисел. И в этом есть свой смысл, поскольку умножение на 1 очень похоже на прибавление нуля.

Глава 17

Десять любопытных типов чисел

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

» Освоение квадратов чисел, треугольных и кубических чисел

» Представление о совершенных числах

» Знакомство с дружественными числами

» Овладение простыми числами

У всех чисел, по-видимому, имеются свои особенности. Например, четные числа принято считать делящимися надвое, что делает их более удобными в обращении. А нечетные числа менее податливы и не так-то просто делятся. Степенями числа 10 обозначаются большие числа, что упрощает их сложение и умножение, тогда как большинство других чисел более трудны в обращении и требуют особого внимания. В этой главе представлены некоторые любопытные типы чисел, наделенные особыми свойствами, отсутствующими у других чисел.

Квадраты целых чисел

Если умножить любое число на самое себя, то в итоге получится *квадрат* этого *числа*. Например:

$1^2 = 1 \times 1 = 1$;
$2^2 = 2 \times 2 = 4$;
$3^2 = 3 \times 3 = 9$;
$4^2 = 4 \times 4 = 16$;
$5^2 = 5 \times 5 = 25$.

Таким образом, последовательность квадратов чисел начинается следующим образом:

1; 4; 9; 16; 25...

Чтобы стало понятнее, почему такие числа называются квадратами чисел, на рис. 17.1 наглядно показано расположение монет квадратами.

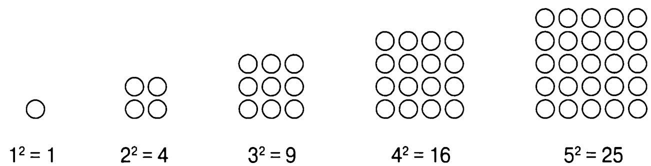


Рис. 17.1. Первые пять квадратов целых чисел

Но самое замечательное, что последовательность квадратов целых чисел можно получить, сложив каждое нечетное число (3, 5, 7, 9, 11, 13...) с квадратом предыдущего числа, как показано ниже.

Квадрат числа	Квадрат предыдущего числа + + нечетное число	Сумма
2^2	$1^2 + 3$	$1 + 3 = 4$
3^2	$2^2 + 5$	$4 + 5 = 9$
4^2	$3^2 + 7$	$9 + 7 = 16$
5^2	$4^2 + 9$	$16 + 9 = 25$
6^2	$5^2 + 11$	$25 + 11 = 36$
7^2	$6^2 + 13$	$36 + 13 = 49$

Треугольные числа

Если сложить любую последовательность положительных чисел, начиная с 1, то в конечном итоге получится *треугольное число*. Например:

$1 = 1;$
$1 + 2 = 3;$
$1 + 2 + 3 = 6;$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10;$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$

Таким образом, последовательность треугольных чисел начинается следующим образом:

1; 3; 6; 10; 15...

Треугольная форма подобных чисел начинает приобретать смысл, если складывать монеты треугольниками, как показано на рис. 17.2.

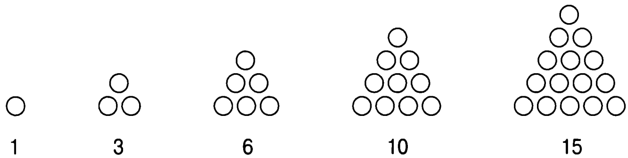


Рис. 17.2. Первые пять треугольных чисел

Кубические числа

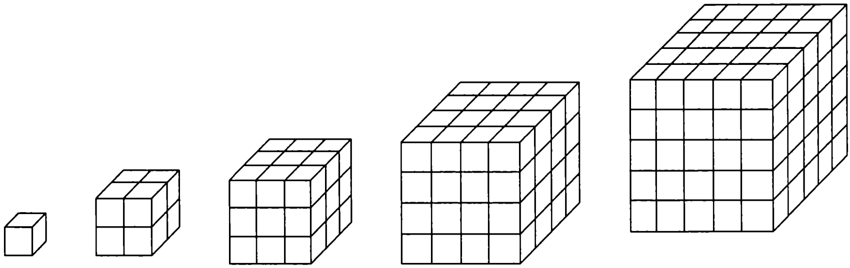
Если квадраты чисел и треугольные числа покажутся вам слишком плоскими, в таком случае можете добавить еще одно измерение, чтобы приступить к экспериментированию с *кубическими числами*. Для того чтобы сформировать кубическое число, достаточно три раза умножить любое число на самое себя, как показано ниже:

$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1;$
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8;$
$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27;$
$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64;$
$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125.$

Таким образом, последовательность кубических чисел начинается следующим образом:

1; 8; 27; 64; 125...

Кубические числа вполне оправдывают свое название, как демонстрируют кубы, приведенные на рис. 17.3.



$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$

Рис. 17.3. Первые пять кубических чисел

Факториальные числа

Восклицательным знаком (!) в математике обозначается факториал числа, поэтому обозначение 1! означает *единица факториал*. Чтобы получить факториал конкретного числа, достаточно перемножить последовательность положительных чисел, начиная с 1 и заканчивая данным числом. Например:

$1! = 1;$
$2! = 1 \times 2 = 2;$
$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6;$
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24;$
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$

Таким образом, последовательность факториалов чисел начинается следующим образом:

1; 2; 6; 24; 120...

Факториалы чисел находят широкое применение в *теории вероятности* — математической дисциплине, позволяющей определить вероятность наступления некоторого события. Задачи на вероятность позволяют выяснить возможность выиграть в лотерею или оценить шансы угадать комбинацию цифр для открытия замка в камере хранения с пяти первых попыток.

Степени числа 2

Последовательно умножая число 2 на самое себя, можно получить *степени числа 2*. Например:

$2^1 = 2$;
$2^2 = 2 \times 2 = 4$;
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$;
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$;
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Степени числа 2 служат основанием двоичной системы счисления (см. главу 16), играющей важную роль в вычислительной технике. Они помогают также лучше понять числа Ферма, обсуждаемые далее в этой главе.

Совершенные числа

Любое число, равное сумме его собственных делителей, кроме него самого, называется *совершенным*. Чтобы стало понятнее, каким образом получаются совершенные числа, определите сначала все делители числа 6 (о том, как это делается, см. в главе 5):

6: 1; 2; 3; 6.

Затем сложите все эти делители, кроме числа 6:

$1 + 2 + 3 = 6$.

Сумма этих делителей дает исходное число, а следовательно, число 6 является совершенным. Следующим по очереди совершенным является число 28. Чтобы убедиться в этом, найдите сначала все делители числа 28:

28: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Затем сложите все эти делители, кроме числа 28:

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

И в этом случае сумма всех делителей, кроме последнего, дает исходное число, поэтому число 28 является совершенным. Совершенные числа редки и немногочисленны. Их последовательность начинается со следующих пяти чисел:

6; 28; 496; 8 128; 33550336...

Описанным выше способом можно определить и другие совершенные числа.

Дружественные числа

Дружественные числа подобны совершенным числам, за исключением того, что они следуют парами. Сумма делителей одного числа в такой паре, кроме него самого, равна второму числу, и наоборот. Например, парой дружественных являются числа 220 и 284. Чтобы убедиться в этом, найдите сначала все делители каждого числа из данной пары:

220: 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110; 220;
284: 1; 2; 4; 71; 142; 284.

Затем сложите все делители каждого числа, кроме него самого:

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$
$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$

Обратите внимание на то, что сумма делителей числа 220, кроме последнего, дает число 284, а сумма делителей числа 284, кроме последнего, дает число 220. Именно поэтому они и образуют пару дружественных чисел.

Следующую по очереди пару составляют дружественные числа 1184 и 1210. Можете мне поверить или убедитесь в этом сами, выполнив вычисления описанным выше способом.

Простые числа

Любое число, имеющее ровно два делителя (1 и само это число), называется *простым*. В качестве примера ниже приведены пять первых простых чисел:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19...

Имеется бесконечное множество простых числе, т.е. их последовательный ряд бесконечен. Подробнее о простых числах см. в главе 5.

Числа Мерсенна

Любое число, равное степени числа 2 (см. соответствующий раздел ранее в этой главе) за вычетом 1, называется числом Мерсенна (в честь французского математика Марена Мерсенна). Таким образом, всякое число Мерсенна может быть представлено в следующей форме: $2^n - 1$, где n — неотрицательное целое число.

Если число Мерсенна является также простым (см. предыдущий раздел), в таком случае оно называется *простым числом Мерсенна*. Например:

$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3;$
$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7;$
$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31;$
$2^7 - 1 = 128 - 1 = 127;$
$2^{13} - 1 = 8192 - 1 = 8191.$

Простые числа Мерсенна представляют интерес для математиков потому, что они обладают такими свойствами, которые отсутствуют у обычных простых чисел. Одно из таких свойств состоит в том, что простые числа Мерсенна легче найти, чем другие простые числа. Именно поэтому поиск самого большого среди известных простых чисел обычно превращается в поиск простого числа Мерсенна.

Числа Ферма

Число Ферма, названное в честь еще одного французского математика Пьера де Ферма, может быть представлено в следующей форме: $2^{2\wedge n} + 1$, где n — неотрицательное целое число.

Знак ^ обозначает возведение в степень, поэтому в соответствии с приведенной выше формулой сначала находится степень числа 2^n, а затем полученный результат используется в качестве показателя степени числа 2. В качестве примера ниже приведены первые пять чисел Ферма:

$2^{2\wedge 0} - 1 = 2^1 + 1 = 3;$
$2^{2\wedge 1} - 1 = 2^2 + 1 = 5;$
$2^{2\wedge 2} - 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17;$
$2^{2\wedge 3} - 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257;$
$2^{2\wedge 4} - 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537.$

Как видите, числа Ферма растут очень быстро. Если же число Ферма оказывается также простым (см. соответствующий раздел ранее в этой главе), в таком случае оно называется *простым числом Ферма*. И оказывается, что первые пять чисел Ферма являются простыми. Убедиться в этом очень просто в отношении первых четырех чисел Ферма, но *намного* труднее в отношении пятого числа.

Предметный указатель

К

М

Н

О

П

Р

С

У

Ф

Ч

Э

Математика доступна всем!

Страх перед математикой вполне реален. Четкие пояснения и практические примеры задач помогут вам избавиться от этого недуга, выявить слабые места и устранить пробелы в знании математики. Этот сборник задач для начинающих окажет помощь в усвоении основных математических понятий, проработке примеров практических задач и поэтапном анализе их решений. Пользуясь этой книгой вы можете смело вторгаться в неизведанную область простых и десятичных дробей, алгебраических уравнений и прочих предметов изучения математики.

В книге...

- Основные арифметические операции
- Степени числа 10
- Множители и кратные числа
- Анализ выражений и показателей степени
- Алгебраические уравнения и экспоненциальное представление чисел
- Практические примеры математических задач

Марк Зегарелли является учителем математики, репетитором и автором целого ряда книг из серии *...для чайников.*

Изображение на обложке:
®Depositphotos.com/4016014
Автор: massonforstock

Комп'ютерне видавництво
"ДІАЛЕКТИКА"
www.dialektika.com

Математика: арифметика, основы алгебры и геометрии

ISBN 978-617-7812-17-2

19110

9 786177 812172

для чайников®