Н.Х. ИБРАГИМОВ

ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

дифференциальных уравнений и математического моделирования

Классические и новые методы
Нелинейные математические модели
Симметрия и принципы инвариантности

Издание второе,
дополненное и исправленное

Перевод с английского
И.С. Емельяновой

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2012

УДК 519.8+517.9+519.46
ББК В18+В161.6+В151.5
И 15

Ибрагимов Н. Х. **Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности** / Пер. с англ. И.С. Емельяновой. — 2-е изд., доп. и испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 332 с. — ISBN 978-5-9221-1377-9.

Настоящий учебник охватывает обширный материал, включающий составление и анализ математических моделей различных процессов и явлений из области физики, техники, биологии, медицины и экономики. Рассматриваемые модели описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями с частными производными и их системами. Излагаются классические и современные методы решения дифференциальных уравнений. При этом широко представлен инвариантный подход, связанный с привлечением локальных групп Ли и позволяющий находить решения нелинейных задач в аналитической форме. Применение этого подхода продемонстрировано, в частности, на математических моделях, представленных в начальных главах.

Учебник предназначен студентам, аспирантам и преподавателям естественнонаучных факультетов классических, технических и педагогических университетов, а также специалистам в области чистой и прикладной математики.

Учебное издание

ИБРАГИМОВ Наиль Хайруллович

ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. КЛАССИЧЕСКИЕ И НОВЫЕ МЕТОДЫ. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. СИММЕТРИЯ И ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

Редактор *В.С. Аролович*, корректор *В.Р. Игнатова*,
оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*, оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 28.05.2012. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,8. Уч.-изд. л. 30. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература» МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90 E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

ISBN 978-5-9221-1377-9

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ГУП «ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

9 785922 113779

ISBN 978-5-9221-1377-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Названия	Буквы	Названия	Буквы	Названия
$A\,\alpha$	альфа	$I\,i$	йота	$P\,\rho$	ро
$B\,\beta$	бета	$K\,\varkappa$	каппа	$\Sigma\,\sigma$	сигма
$\Gamma\,\gamma$	гамма	$\Lambda\,\lambda$	лямбда	$T\,\tau$	тау
$\Delta\,\delta$	дельта	$M\,\mu$	мю	$\Upsilon\,\upsilon$	ипсилон
$E\,\varepsilon$	эпсилон	$N\,\nu$	ню	$\Phi\,\phi\,\varphi$	фи
$Z\,\zeta$	дзета	$\Xi\,\xi$	кси	$X\,\chi$	хи
$H\,\eta$	эта	$O\,o$	омикрон	$\Psi\,\psi$	пси
$\Theta\,\theta$	тета	$\Pi\,\pi$	пи	$\Omega\,\omega$	омега

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Перед Вами второе издание перевода учебника Н.Х. Ибрагимова «Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования» на русский язык. За три года (2004–2006) учебник успешно выдержал три издания на английском языке, в 2007 году он был переведен в Нижегородском университете на русский язык, и тираж быстро разошелся. Настоящее издание незначительно отличается от предыдущего: мы убрали раздел «Дифференциальные уравнения. В помощь студенту», содержание которого учтено автором при подготовке и выпуске в 2008 году сборника задач. Автор учебника, профессор Наиль Хайруллович Ибрагимов, работает в Технологическом институте шведского города Карлскрона. Он преподавал в университетах России, Турции, ЮАР, неоднократно читал лекции в США, Франции, Италии и в других странах. Учеба в МФТИ и Новосибирском государственном университете сформировала круг его научных интересов: групповой анализ дифференциальных уравнений, риманова геометрия и теория относительности, математическое моделирование широкого спектра процессов и явлений. Его научные достижения отмечены Государственной премией СССР (1985), званием «Исследователь года» научного общества Блекинга, Швеция (2004). Наиль Хайруллович — первый номинант международного «Приза Лагранжа» за достижения в области нелинейных наук (2008) и имеет другие награды.

Автор остановил свой выбор на Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского в качестве базового для перевода учебника на русский язык не случайно: нашему сотрудничеству несколько десятков лет. В Нижнем Новгороде состоялась по инициативе академика Л.В. Овсянникова, профессора Н.Х. Ибрагимова и нижегородских ученых одна из международных конференций серии «Современный групповой анализ и его приложения». В Нижегородском университете более 30 лет переводчик книги практикует чтение курса «Современный групповой анализ и его приложения», печатаются учебники и учебные пособия по этой тематике.

Учебник Н.Х. Ибрагимова отличается логической цельностью построения и широтой охвата материала. Нередко в наших вузах курсы «Дифференциальные уравнения», «Математическая физика», «Математическое моделирование» и, тем более, специальные курсы «Группы и алгебры Ли», «Обобщенные функции и пространства Соболева», «Групповой анализ дифференциальных уравнений» и другие — слабо связаны между собой. В предлагаемом Вашему вниманию учебнике неразрывная связь между этими и другими темами книги выдержана от первых строк до последней страницы. Сформированные в главе 2 математические модели исследуются в последующих главах; на наглядных примерах демонстрируется, что групповой анализ дифференциальных уравнений служит естественным (и нередко единственным!) инструментом для решения нелинейных уравнений, обыкновенных и с частными производными, описывающих реальные процессы.

Сам выбор математических моделей превращен в увлекательное занятие: — как описать математически падение дождевых капель? — как поступить фермеру, если разбился градусник, необходимый ему для пастеризации молока? — почему шляпка гриба имеет такую форму? — как развивается злокачественная опухоль? — как происходит ценообразование пакета акций на бирже?

Осваивать современные математические знания по учебнику Н.Х. Ибрагимова интересно еще и потому, что автор постоянно требует от читателя со-творчества, задавая ему вопросы, предлагая задачи и не просто сопровождая их ответами в конце учебника, но нередко помогая получить ответ с помощью комментариев, доступных внимательному читателю и «запрятанных» в тексте. Учебник может быть использован на разных стадиях обучения в вузе. Он содержит материал для начинающих, для бакалавров, магистров и аспирантов. При этом заинтересованный читатель может самостоятельно осваивать материал, поскольку весь учебник так методически выстроен, что допускает углубленное изучение любого вопроса с привлечением рекомендуемой литературы. Нет сомнения, что этот учебник займет достойное место среди пособий для вузов по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.

И.С. Емельянова,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Основу этой книги составляют лекции, читаемые автором в Технологическом институте Блекинга. Книга используется в качестве основного учебника для нескольких курсов. А именно,

Дифференциальные уравнения: курс объединяет основные классические методы, применяемые для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, и новые методы решения нелинейных уравнений в аналитической форме. Курс рассчитан на начинающих; студенты получают навыки нахождения симметрий дифференциальных уравнений с помощью решения определяющих уравнений и осваивают пакеты символьной компьютерной алгебры.

Аналитические методы математического моделирования: основное содержание этого курса — нелинейные математические модели, описывающие явления в физике, биологии и технике; курс включает такие темы, как нелинейная суперпозиция, симметрия и законы сохранения, групповые инвариантные решения.

Групповой анализ дифференциальных уравнений: курс представляет студентам математических и инженерных специальностей те разделы теории групп и алгебр Ли, которые наиболее важны в практических приложениях; в ходе изучения курса студенты знакомятся с аналитическим аппаратом и приобретают практические навыки использования современных методов решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Распределения и принципы инвариантности в задачах с начальными условиями: достаточно просто вводятся основные концепции теории распределений; основное внимание уделяется полезным с практической точки зрения математическим приемам; инфинитезимальная техника Софуса Ли обобщается на случай пространства распределений и используется совместно с принципом инвариантности для нахождения фундаментальных решений и при исследовании задач с начальными условиями в случаях уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

Третье издание содержит дополнительный материал. Это в основном относится к главам 6 и 7. В частности, я добавил недавно опубликованный мною материал по теории интегрирующих множителей в случае обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (раздел 6.6.2), доказательство Софуса Ли основной теоремы о нелинейной суперпозиции (в разделе 6.7.2) и вычисление симметрий для уравнений с частными производными (в разделе 7.1.1). Кроме того, я пересмотрел главы 3 и 5, а также перечень задач ко всем главам.

Внесенные в третье издание учебника частичные изменения сформировались в результате обсуждений со студентами, и я хочу поблагодарить их за большой интерес к новым методам. Выражаю глубокую признательность Раисе за постоянную помощь.

Карлскрона, 17 ноября 2006 г. Наиль Х. Ибрагимов

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание содержит значительные изменения и дополнения практически во всех главах. Добавлены новые разделы, в частности по нелинейным суперпозициям и законам сохранения.

В приложении к дифференциальным уравнениям это означает, что предусмотрена возможность выяснения того, выполняются ли условия интегрируемости уравнения в замкнутой форме и построения этого решения наиболее простым способом. Чтобы сформулировать сущность моего опыта решения дифференциальных уравнений различного типа, я перефразировал известный французский афоризм *cherchez la femme* следующим образом: *Если вы не можете решить нелинейное дифференциальное уравнение, cherchez le group* (ищите группу).

С этой целью я добавил раздел о вычислении симметрий с помощью решения так называемых *определяющих уравнений*. Это поможет читателю понять суть вопроса. Освоив метод определяющих уравнений, студент легко сможет находить симметрии, используя пакеты компьютерной алгебры и применяя методы интегрирования, представленные в этом учебнике.

Расширено и обсуждается со значительной общностью изложение теоретико-группового подхода к распределениям и фундаментальным решениям с акцентом на приложения.

Центральную роль в этой книге играет групповой анализ. Я надеюсь, что группы Ли интересны в первую очередь в связи с их применением для решения дифференциальных уравнений. Было ошибкой изолировать их от естественных приложений и использовать лишь как ветвь абстрактной математики. «*Изолировать математику от практических потребностей науки — это то же самое, что предлагать стерилизацию коровы, чтобы оградить ее от быков*» (П.Л. Чебышёв, 1821–1894).

Карлскрона, 31 августа 2005 г. Наиль Х. Ибрагимов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

История современной математики насчитывает более 300 лет. С самого зарождения она фокусировала внимание на дифференциальных уравнениях как главном инструменте математического моделирования. Бóльшая часть математических моделей в физике, инженерных науках, биоматематике и т. д. приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Перед современными студентами и исследователями в области науки и техники обычно ставятся задачи математического моделирования, содержащие приемы решения дифференциальных уравнений. Иногда эти решения могут быть получены аналитически с помощью многочисленных традиционных для этих задач методов, пригодных для интегрирования уравнений частного вида. Чаще, однако, решения не могут быть получены этими методами, несмотря на то, что, например, с помощью частных подходов были получены и собраны в объемные справочники более 400 типов интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

С другой стороны, фундаментальные законы природы и технологические задачи, сформулированные в терминах дифференциальных уравнений, могут быть успешно рассмотрены и решены с помощью метода групп Ли. Например, анализ групп Ли сводит классические 400 типов уравнений всего лишь к 4 типам! Развитие группового анализа содержит многочисленные факты, свидетельствующие о том, что эта теория дает универсальный аппарат для решения дифференциальных уравнений даже в том случае, когда другие средства интегрирования оказываются безуспешными. Фактически групповой анализ является единственным универсальным и эффективным методом аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений. Старые методы интегрирования существенно опираются на линейность и на постоянство коэффициентов. Групповой анализ с одинаковой легкостью обходится с *линейными* и *нелинейными* уравнениями, точно так же как с уравнениями с постоянными и переменными коэффициентами. Например, с традиционной точки зрения линейное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\,\frac{dy}{dx} + a_n\,y = 0$$

с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ отличается от уравнения

$$\overline{x}^n\,\frac{d^n\overline{y}}{d\overline{x}^n} + a_1\,\overline{x}^{n-1}\,\frac{d^{n-1}\overline{y}}{d\overline{x}^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\,\overline{x}\,\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} + a_n\,\overline{y} = 0,$$

известного как *уравнение Эйлера*. С позиции теории групп, однако, эти уравнения — всего лишь два различных представления одного и того же уравнения, допускающего две известные коммутирующие симметрии, а именно

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y} \qquad \overline{X}_1 = \overline{x}\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}}, \quad \overline{X}_2 = \overline{y}\,\frac{\partial}{\partial \overline{y}}$$

для первого и второго уравнения соответственно. Эти симметрии дают две подобные алгебры Ли и без труда приводят к преобразованию $x = \ln|\overline{x}|$, переводящему уравнение Эйлера в уравнение с постоянными коэффициентами.

В наши дни групповой анализ становится частью программы курса «Дифференциальные уравнения и нелинейное математическое моделирование» и привлекает новых и новых студентов. Например, курс «*Дифференциальные уравнения в частных производных*» в Московском физико-техническом институте привлек более 100 студентов, когда я использовал метод групп Ли, по сравнению с 10 студентами, которые выбрали традиционный курс. То же самое произошло, когда я читал подобные лекции для студентов-теоретиков в Южной Африке и Швеции.

Настоящий учебник основан на лекциях и, в известной мере, отражает мои пристрастия и опыт. Он соответствует курсу «Дифференциальные уравнения» в Технологическом институте Блекинга для студентов — будущих инженеров, математиков и теоретиков. По моему представлению, я стремлюсь сделать групповой анализ дифференциальных уравнений более доступным для будущих инженеров и теоретиков. Следовательно, основной смысл этой книги не столько в вычислении симметрий, сколько в их приложениях.

Карлскрона, 31 августа 2004 г. Наиль Х. Ибрагимов

Глава 1
НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИЗА

Эта предварительная глава предназначена для начинающих и содержит основы элементарной математики и математического анализа, которые требуются для освоения основных разделов учебника.

Дополнительная литература: Гурса Э. [5], Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д. [12, 13].

1.1. Элементарная математика

1.1.1. Числа, переменные и элементарные функции. Действительные числа возникают в нашей практической деятельности (к примеру, при измерении расстояний, веса и т. д.) как приближенные десятичные числа. Например, расстояние до Луны в перигее равно S км, где число S приблизительно равно 356630. Более точное приближение этого расстояния равно 356629 км 744 м. Таким образом,

$$S \approx 356629{,}744 \equiv 356629 + \frac{744}{1000} = 356629 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}\,.$$

Если продолжить этот процесс, можно получить еще более точные аппроксимации и представить число S как бесконечную десятичную дробь. Итак, мы получили следующее определение.

Определение 1.1.1. *Действительные числа* отождествляются с бесконечными десятичными дробями

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \tag{1.1.1}$$

где a_0 — целое число, а $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ — разряды (однозначные числа), которые могут принимать значения от 0 до 9. Уравнение (1.1.1) означает, что

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \tag{1.1.2}$$

Замечание 1.1.1. Если (1.1.1) — периодическая (в частности, конечная) десятичная дробь, и только в этом случае, a является *рациональным* числом, то есть $a = p/q$, где p и q — целые числа, $q \neq 0$. Действительные числа, определяемые непериодическими бесконечными десятичными дробями, называются *иррациональными* числами.

Замечание 1.1.2. Числа 0,(9) и 1 отождествляются.

Пример 1.1.1. Известными примерами иррациональных чисел являются:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1{,}4142136\ldots &&\approx 1{,}41\\
\pi &= 3{,}1415926535\ldots &&\approx 3{,}14\\
e &= 2{,}718281828459045\ldots &&\approx 2{,}72\\
\gamma &= \lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\Bigr) &&\approx 0{,}58,
\end{aligned}$$

где γ известно как *число Эйлера*.

Замечание 1.1.3. Исторически сложилось, что мы представляем действительные числа в десятичной системе счисления. Если бы вавилонская цивилизация просуществовала гораздо дольше, мы, возможно, могли бы пользоваться вавилонской шестидесятиричной системой и применяли бы, вместо (1.1.2), представление

$$a = a_0 + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \cdots + \frac{a_n}{60^n} + \cdots \tag{1.1.3}$$

Определение 1.1.2. *Переменная* x есть величина, которой может быть присвоено любое численное значение. Величина, принимающая фиксированное значение, называется *константой* (*постоянной*). *Произвольные* константы (*произвольные* постоянные) отличают от *абсолютных* констант. Произвольная постоянная сохраняет любое заданное значение в ходе данного исследования, в то время как абсолютная константа сохраняет одно и то же значение во всех задачах.

Пример 1.1.2. В уравнении окружности, $x^2 + y^2 = R^2$, x и y — переменные, представляющие координаты точки, движущейся вдоль кривой, в то время как радиус R — произвольная постоянная. С другой стороны, формула $C = 2\pi R$ длины окружности содержит, наряду с произвольной постоянной R, две абсолютные константы, 2 и $\pi \approx 3{,}14$.

Теорема 1.1.1. Любое действительное число a есть предел последовательности рациональных чисел $r_n = p_n/q_n$, где p_n и $q_n \neq 0$ — целые числа:

$$a = \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{1.1.4}$$

Доказательство. Пусть действительное число a задано равенством (1.1.1). Выберем в качестве r_n конечные суммы соответствующего бесконечного ряда (1.1.2):

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},\ r_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100},\ \ldots,\ r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\,.$$

Они образуют последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, удовлетворяющую уравнению (1.1.4).

Нижеследующее определение основано на теореме 1.1.1.

Определение 1.1.3. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ — любое действительное число, определяется следующими уравнениями:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}, \quad n = 2, 3 \ldots \qquad (\text{здесь} \;\; x = n);$$

$$a^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a; \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad (\text{здесь} \;\; x = p/q);$$

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt[q_n]{a^{p_n}} \quad (\text{здесь} \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x_n = p_n/q_n).$$

Основные свойства показательных функций:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Пример 1.1.3. Рассмотрим число $10^{\sqrt{2}} = 25{,}954\ldots$ Мы имеем: $\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} x_n$, где $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 1{,}41, \ldots$ Соответственно, $10^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} y_n$, где $y_0 = 10^{x_0} = 10$, $y_1 = 10^{x_1} \approx 25{,}12$, $y_2 = 10^{x_2} \approx 25{,}70, \ldots$

При решении дифференциальных уравнений часто встречается экспоненциальная функция

$$y = e^x. \tag{1.1.5}$$

Здесь e — действительное число, определяемое одним из наиболее важных пределов математического анализа:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.1.6}$$

Его значение с точностью до пятнадцати десятичных знаков приведено в примере 1.1.1.

Функция (1.1.5) является представителем так называемых *элементарных функций*, определяемых следующим образом.

Определение 1.1.4. В число *основных элементарных функций* входят:

$$\begin{aligned}
&y = C, \quad C = \text{const};\\
&y = x^\alpha, \quad \text{где} \;\; x > 0, \quad \alpha \text{ — действительное число};\\
&y = a^x, \quad \text{где} \;\; a > 0, \quad a \neq 1;\\
&y = \ln_a x, \quad \text{где} \;\; x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1;\\
&y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x;\\
&y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.
\end{aligned}$$

Функция $y = f(x)$ называется *элементарной функцией*, если она получена из основных элементарных функций с помощью конечного числа операций, включая *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление* и *композицию*.

Замечание 1.1.4. Логарифм $\ln_a x$ при основании $a = e$ называется *натуральным* и обозначается $\ln x$.

Замечание 1.1.5. Основные тригонометрические функции могут быть получены из одной из них, например из $\sin x$, в комбинации с другими основными элементарными функциями. Действительно,

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\,, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}\cdot$$

Подобные соотношения существуют также между обратными тригонометрическими функциями, например

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \tag{1.1.7}$$

Пример 1.1.4. Примеры элементарных функций, не относящихся к классу основных, представляют гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\cdot \tag{1.1.8}$$

Подобным образом получают элементарные функции многих переменных.

Пример 1.1.5. Следующая функция $\psi(t,x,z)$ является элементарной функцией трех переменных, t, x, z:

$$\psi = -\frac{1}{4}\,\ln\left|M + \frac{1}{t}\Big(2\sin^2 x + l_1 e^{-z}\sin x + l_2 e^{-2z}\Big)\right|, \tag{1.1.9}$$

содержащей три произвольные постоянные, l_1, l_2 и M.

Пример 1.1.6. Следующие функции, которые часто встречаются в приложениях, задаются с помощью интегралов и не являются элементарными:

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{(интегральный синус)}, \tag{1.1.10}$$

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad \text{(интегральный косинус)}, \tag{1.1.11}$$

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \text{(функция ошибок)}, \tag{1.1.12}$$

$$\mathrm{Ei}\,(x) = -\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt, \quad \mathrm{li}\,(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \equiv \mathrm{Ei}(\ln\,x), \tag{1.1.13}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}dt \qquad \text{(гамма-функция)}. \tag{1.1.14}$$

Гамма-функция играет важную роль в анализе и дифференциальных уравнениях. Она обладает интересными общими свойствами, например

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \tag{1.1.15}$$

и принимает численные значения (см., например, [30]):

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2\pi^{n/2}}{\omega_n}, \quad \Gamma(n+1) = n!, \tag{1.1.16}$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве.

1.1.2. Квадратные и кубические уравнения. Задачи элементарной математики часто могут быть решены методом преобразований. Начнем с элементарной алгебры.

Напомним, что корни $x = x_1$ и $x = x_2$ квадратного уравнения общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{1.1.17}$$

задаются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \tag{1.1.18}$$

Выражение

$$b^2 - 4ac \tag{1.1.19}$$

известно как *дискриминант* квадратного уравнения (1.1.17). Из (1.1.18) с очевидностью следует, что обращение в нуль дискриминанта (1.1.19),

$$b^2 - 4ac = 0, \tag{1.1.20}$$

является условием того, что уравнение (1.1.17) имеет два равных корня, $x_1 = x_2$.

По традиции студенты умеют со школы находить решение (1.1.18) методом выделения полного квадрата. Между тем этот метод прост, но не подходит для решения кубического уравнения общего вида, а также уравнений более высоких степеней.

Идея преобразования уравнений, в отличие от метода выделения полного квадрата, пригодного только для квадратного уравнения, формирует общий метод, пригодный как для решения квадратного уравнения, так и для упрощения уравнений более высоких степеней. Простейшее преобразование уравнений дает линейное преобразование переменной x:

$$y = x + \varepsilon. \tag{1.1.21}$$

Оно превращает уравнение степени n в уравнение той же степени. В частности, квадратное уравнение (1.1.17) после подстановки $x = y - \varepsilon$ становится $ay^2 + (b - 2a\varepsilon)y + a\varepsilon^2 - b\varepsilon + c = 0$. Следовательно, преобразование (1.1.21) превращает (1.1.17) в новое квадратное уравнение,

$$\overline{a}\,y^2 + \overline{b}\,y + \overline{c} = 0,$$

где

$$\overline{a} = a, \quad \overline{b} = b - 2a\varepsilon, \quad \overline{c} = c + a\varepsilon^2 - b\varepsilon. \tag{1.1.22}$$

Определяя ε из $b - 2a\varepsilon = 0$, получаем $\overline{b} = 0$ и $\overline{c} = c - b^2/(4a)$. Таким образом, замена

$$y = x + \frac{b}{2a} \tag{1.1.23}$$

преобразует (1.1.17) в уравнение

$$ay^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Подставляя его корни

$$y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

в уравнение (1.1.23), приходим к корням (1.1.18) уравнения (1.1.17).

Рассмотрим теперь общий случай кубического уравнения, представленного для удобства вычислений в форме с биномиальными коэффициентами:

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0, \quad a \neq 0. \tag{1.1.24}$$

После линейного преобразования

$$y = ax + b \tag{1.1.25}$$

оно принимает форму

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \tag{1.1.26}$$

где

$$p = ac - b^2, \quad 2q = a^2d - 3abc + 2b^3. \tag{1.1.27}$$

Приведенное уравнение (1.1.26) легко решается. Достаточно положить

$$y = \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{l}\,.$$

Тогда

$$y^3 - 3\sqrt[3]{kl}\;y - (k + l) = 0$$

и уравнение (1.1.26) дает

$$k + l = -2q, \quad \sqrt[3]{kl} = -p.$$

Из этого следует, что k и l — корни квадратного уравнения

$$z^2 + 2qz - p^3 = 0.$$

Отсюда вытекает, что один из корней, например k, определяется выражением

$$k = -q + \sqrt{q^2 + p^3}\,.$$

Пусть

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$$

— одно из трех значений этого кубического корня. Тогда все три значения $\sqrt[3]{k}$ могут быть представлены в виде u, εu, $\varepsilon^2 u$. Здесь ε — комплексный кубический корень из единицы, то есть решение уравнения $\varepsilon^3 = 1$, и имеет следующий вид (см. раздел 1.2.6, пример 1.2.1):

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{где} \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

Квадрат ε представляет собой комплексно сопряженный кубический корень из единицы:

$$\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Поскольку $\sqrt[3]{kl} = -p$, соответствующие значения $\sqrt[3]{l}$ равны

$$-\frac{p}{u}, \quad -\frac{p}{u}\,\varepsilon^2, \quad -\frac{p}{u}\,\varepsilon.$$

Они могут быть переписаны в форме v, $v\varepsilon^2$, $v\varepsilon$, где

$$v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}\,.$$

В итоге мы приходим к так называемому *решению Кардано* кубического уравнения. А именно, корни уравнения (1.1.26) задаются следующим образом:

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v, \tag{1.1.28}$$

где

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}\,, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}\,. \tag{1.1.29}$$

Выражение

$$q^2 + p^3 \tag{1.1.30}$$

называется *дискриминантом* кубического уравнения (1.1.26). Из (1.1.29) следует, что обращение в нуль дискриминанта является условием того, что уравнение (1.1.26) имеет два равных корня. Корни кубического уравнения общего вида (1.1.24) получаются подстановкой (1.1.28) в уравнение (1.1.25) с учетом (1.1.27).

Пример 1.1.7. Уравнение $y^3 - 6y + 4 = 0$ имеет форму (1.1.26), где $p = -2$ и $q = 2$. Здесь $q^2 + p^3 = -4$, и, следовательно, соотношения (1.1.29) принимают вид

$$u = \sqrt[3]{2(-1+i)}\,, \quad v = \sqrt[3]{2(-1-i)}\,.$$

Расчет показывает, что $u = 1 + i$, $v = 1 - i$, и формулы (1.1.28) дают три различных действительных корня:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -(1 + \sqrt{3}\,), \quad y_3 = -1 + \sqrt{3}\,. \tag{1.1.31}$$

Замечание 1.1.6. Дискриминант кубического уравнения общего вида (1.1.24) имеет вид

$$(ad)^2 - 6abcd + 4ac^3 - 3(bc)^2 + 4b^3 d = -9 \begin{vmatrix} 3a & 2b & c & 0 \\ 3b & 2c & d & 0 \\ 0 & a & 2b & 3c \\ 0 & b & 2c & 3d \end{vmatrix}. \tag{1.1.32}$$

Обращение в нуль дискриминанта (1.1.32) является условием того, что уравнение (1.1.24) имеет два равных корня. Более того, все три корня уравнения (1.1.24) равны, если выполняются следующие два уравнения (ср. (1.1.20)):

$$b^2 - ac = 0, \quad b^3 - a^2 d = 0. \tag{1.1.33}$$

Инвариантное описание дискриминанта (1.1.32) и уравнений (1.1.33) дано в [40, раздел 10.1.3].

1.1.3. Площади подобных фигур. Эллипс в качестве примера.

Определение 1.1.5. Преобразования

$$\overline{x} = x\cos\theta + y\sin\theta + a_1, \quad \overline{y} = y\cos\theta - x\sin\theta + a_2, \tag{1.1.34}$$

являющиеся комбинацией вращений и сдвигов, не изменяют расстояния между точками и, как следствие, площади геометрических фигур на плоскости (x, y). По этой причине преобразования (1.1.34) называются *изометрическими*, или *твердыми* движениями на плоскости (x, y). В геометрии говорят, что две фигуры *равны*, если одна может быть наложена на другую подходящим изометрическим перемещением.

Рассмотрим *масштабное преобразование*

$$\overline{x} = ax, \quad \overline{y} = by, \tag{1.1.35}$$

известное также как *преобразование подобия*, или *растяжение*. Произвольные постоянные $a \neq 0$ и $b \neq 0$ называются параметрами преобразования. Масштабное преобразование определяет *однородное* расширение (сжатие) от начала координат, если $a = b$, и *неоднородное* расширение (сжатие) в противном случае.

Определение 1.1.6. Говорят, что две геометрические фигуры, получающиеся одна из другой с помощью масштабного преобразования (1.1.35), *подобны*.

Пример 1.1.8. В этом смысле любой прямоугольник подобен единичному квадрату

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Действительно, имея прямоугольник со сторонами a и b, мы сначала перемещаем его с помощью подходящих смещения и поворота в «стандартное положение», при котором он удовлетворяет условиям $\{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$. Затем растяжение $\overline{x} = x/a$, $\overline{y} = y/b$ превращает прямоугольник в единичный квадрат $\{0 \leqslant \overline{x} \leqslant 1,\ 0 \leqslant \overline{y} \leqslant 1\}$.

Теорема 1.1.2. Пусть две плоские геометрические фигуры, $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$, подобны и пусть вторая получается из первой с помощью масштабного преобразования $\overline{x} = ax,\ \overline{y} = by$. Тогда площади S и $\overline{S}$ фигур $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$, соответственно, связаны соотношением

$$\overline{S} = abS. \tag{1.1.36}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала прямоугольник со сторонами m и n по направлениям осей x и y соответственно. После растяжения получается прямоугольник со сторонами $\overline{m} = am$ и $\overline{n} = bn$. Таким образом, площади первоначального и нового прямоугольников, $S = mn$ и $\overline{S} = \overline{m}\,\overline{n}$, связаны соотношением (1.1.36). Произвольную фигуру можно покрыть (полагая, что это не слишком сложно выполнить) решеткой, состоящей из прямоугольных площадок, и применить (1.1.36) к этим прямоугольникам. Теперь представим, что мы многократно повторяем этот процесс, делая сетку этой решетки все мельче и мельче. Для завершения доказательства достаточно учесть, что площадь S рассматриваемой фигуры есть предел сумм площадей накрывающих фигуру прямоугольников.

Хороший пример такой фигуры представляет собой эллипс. *Эллипс* на плоскости (x, y) есть геометрическое место точек, равноудаленных от двух фиксированных точек (называемых *фокусами* эллипса). Воспользуемся стандартным уравнением эллипса в прямоугольных декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.1.37}$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$ — произвольные константы, называемые *большой* и *малой* полуосями эллипса соответственно.

Теорема 1.1.2 дает элементарный метод вычисления площади эллипсов. Заметим, что любой эллипс (в частности, окружность) подобен единичной окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Действительно, растяжение

$$\overline{x} = \frac{x}{a}, \quad \overline{y} = \frac{y}{b}$$

деформирует эллипс (1.1.37) в единичную окружность

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1,$$

ограничивающую круг площадью $\overline{S} = \pi$. Воспользуемся формулой (1.1.36)

$$\overline{S} = \frac{S}{ab},$$

где S — площадь эллипса. Таким образом, площадь эллипса (1.1.37) есть

$$S = \pi ab. \tag{1.1.38}$$

1.1.4. Алгебраические кривые второго порядка. Прямые, эллипсы (в частности, окружности), гиперболы и параболы — это известные примеры алгебраических кривых на плоскости. Примерами неалгебраических кривых служат тригонометрические кривые, например синус, косинус, тангенс:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$

логарифмическая, экспоненциальная, вероятностная кривые:

$$y = \ln x, \quad y = e^x, \quad y = e^{-x^2}$$

и различные спирали, такие как спираль Архимеда, логарифмическая, гиперболическая и параболическая спирали:

$$r = a\theta, \quad \ln r = a\theta, \quad r\theta = a, \quad (r - c)^2 = a\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ и a, $c = \mathrm{const}$.

В общем случае алгебраические кривые на плоскости (x, y) определяются уравнениями $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ — полином произвольной степени от двух переменных, x и y. Рассмотрим уравнения второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + ax + by + c = 0, \tag{1.1.39}$$

где $A, \ldots, c$ — произвольные константы. Если $A = B = C = 0$, то уравнение (1.1.39) сводится к линейному уравнению $ax + by + c = 0$, определяющему прямые линии. Мы обсудим свойства кривых второго порядка при условии, что уравнение (1.1.39) содержит по крайней мере один из квадратичных членов Ax^2, $2Bxy$ и Cy^2.

Линейное преобразование общего вида

$$x = \alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y} + \mu, \quad y = \gamma\,\overline{x} + \delta\,\overline{y} + \nu \tag{1.1.40}$$

на плоскости преобразует уравнение (1.1.39) в уравнение той же формы. Рассмотрим обратимые преобразования (1.1.40), т. е. такие, что выполнено

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{1.1.41}$$

Определение 1.1.7. Два уравнения, имеющие форму (1.1.39), связанные линейным преобразованием (1.1.40), называются *эквивалентными*. Кривые, определяемые эквивалентными уравнениями, также называют эквивалентными кривыми.

Будем классифицировать алгебраические кривые в соответствии с их эквивалентностью. Отметим, что линейное преобразование (1.1.40) складывается из преобразования

$$x = \alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y}, \quad y = \gamma\,\overline{x} + \delta\,\overline{y}, \tag{1.1.42}$$

называемого *однородным* линейным преобразованием, и преобразования сдвига

$$x = \overline{x} + \mu, \quad y = \overline{y} + \nu. \tag{1.1.43}$$

Термин *однородное* отражает тот факт, что преобразование (1.1.42) содержит слагаемые первого порядка в $\overline{x}$, $\overline{y}$ и, следовательно, преобразует главную часть уравнения (1.1.39), т. е. квадратичную форму

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{1.1.44}$$

вновь в квадратичную форму, а именно в форму

$$\widetilde{A}\,\overline{x}^2 + 2\widetilde{B}\,\overline{x}\,\overline{y} + \widetilde{C}\,\overline{y}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \alpha^2 A + 2\alpha\gamma B + \gamma^2 C, \\ \widetilde{B} &= \alpha\beta A + (\alpha\delta + \beta\gamma)B + \gamma\delta C, \\ \widetilde{C} &= \beta^2 A + 2\beta\delta B + \delta^2 C. \end{aligned} \tag{1.1.45}$$

Более того, смещение (1.1.43) не изменяет квадратичные члены уравнения (1.1.39). Итак, мы начали классификацию алгебраических кривых по признаку эквивалентности квадратичных форм (1.1.44) по отношению к линейным однородным преобразованиям (1.1.42).

Вначале мы попытаемся избавиться одновременно от коэффициентов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{C}$ в (1.1.45). Для этого запишем уравнения $\widetilde{A}=0$ и $\widetilde{C}=0$, разделив их на γ^2 и δ^2, соответственно, и обозначив величины α/γ и β/δ через λ, как следующее квадратное уравнение:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0. \tag{1.1.46}$$

Если $B^2 - AC \neq 0$, то уравнение (1.1.46) имеет два различных корня, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и можно положить $\alpha/\gamma = \lambda_1$ и $\beta/\delta = \lambda_2$ и заметить, что уравнения $\alpha = \lambda_1\gamma$ и $\beta = \lambda_2\delta$ при $\gamma \neq 0, \delta \neq 0$ совместны с условием (1.1.41), поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Итак, мы убедились, что можно положить равными нулю одновременно $\widetilde{A}$ и $\widetilde{C}$. Выражение $B^2 - AC$ называют *дискриминантом* квадратичной формы (1.1.44). Из уравнений (1.1.45) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1.1. Однородное линейное преобразование (1.1.42) изменяет дискриминант следующим образом:

$$\widetilde{B}^2 - \widetilde{A}\widetilde{C} = \Delta^2(B^2 - AC), \tag{1.1.47}$$

где Δ определено выражением (1.1.41).

В соответствии с леммой 1.1.1 каждое из следующих трех условий:

$$B^2 - AC > 0, \quad B^2 - AC = 0, \quad B^2 - AC < 0 \tag{1.1.48}$$

остается неизменным при преобразовании (1.1.42) и, следовательно, при линейном преобразовании общего вида (1.1.40). Итак, рассмотрим каждый из случаев (1.1.48) в отдельности.

Пусть $\boldsymbol{B^2 - AC > 0}$. Тогда уравнение (1.1.46) имеет два различных действительных корня

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Обратим в нуль $\widetilde{A}$ и $\widetilde{C}$ одновременно, потребовав $\alpha/\gamma = \lambda_1$ и $\beta/\delta = \lambda_2$. Затем положим, например, $\gamma = \delta = 1$, подставив $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \lambda_2$ в (1.1.45) и, учитывая, что $\lambda_1\,\lambda_2 = C/A$, $\lambda_1 + \lambda_2 = -2B/A$, получим

$$\widetilde{B} = \frac{2(AC - B^2)}{A} \neq 0.$$

Итак, переписывая уравнение (1.1.39) в переменных $\overline{x}$, $\overline{y}$, определенных уравнениями (1.1.42):

$$x = \lambda_1\,\overline{x} + \lambda_2\,\overline{y}, \quad y = \overline{x} + \overline{y}, \tag{1.1.49}$$

получаем после деления на $\widetilde{B}$ следующее уравнение гиперболы:

$$\overline{x}\,\overline{y} + \widetilde{a}\,\overline{x} + \widetilde{b}\,\overline{y} + \widetilde{c} = 0. \tag{1.1.50}$$

Следовательно, мы говорим, что уравнение (1.1.39) при $B^2 - AC > 0$ описывает алгебраические кривые *гиперболического типа*.

Далее можно упростить уравнение (1.1.50) с помощью сдвига (1.1.43)

$$\overline{x} = \widetilde{x} + \mu, \quad \overline{y} = \widetilde{y} + \nu.$$

А именно, полагая $\mu = -\widetilde{b}$ и $\nu = -\widetilde{a}$, приводим уравнение (1.1.50) к стандартному виду

$$\widetilde{x}\,\widetilde{y} = k, \quad k = \mathrm{const}.$$

Если $k = 0$, гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых, $\widetilde{x} = 0$ и $\widetilde{y} = 0$. Отметим, что замена переменных $\widetilde{x} = \xi + \eta$, $\widetilde{y} = \xi - \eta$ позволяет получить следующую вторую стандартную форму гиперболы:

$$\xi^2 - \eta^2 = k, \quad k = \mathrm{const}.$$

Замечание 1.1.7. Выше предполагалось, что $A \neq 0$. Если $A = 0$ и $C \neq 0$, мы меняем местами x и y и вновь предполагаем $A \neq 0$. Наконец, если $A = C = 0$, тогда $B \neq 0$ и уравнение (1.1.39) приобретает вид (1.1.50).

Пусть $\boldsymbol{B^2 - AC = 0}$. Тогда уравнение (1.1.46) имеет двойной корень $\lambda = -B/A$. Полагая $\beta/\delta = \lambda$, получаем $\widetilde{C} = 0$. Более того, выбор $\beta = \lambda\delta$ приводит к тому, что $\widetilde{B} = 0$ и $\widetilde{A} \neq 0$. Можно положить, например, $\gamma = \delta = 1$. Тогда из условия (1.1.41) вытекает, что $\alpha \neq \lambda$. Следовательно, переписывая уравнение (1.1.39) в переменных $\overline{x}$, $\overline{y}$, определенных в соответствии с (1.1.42):

$$x = \alpha\,\overline{x} + \lambda\,\overline{y}, \quad y = \overline{x} + \overline{y} \quad (\alpha \neq \lambda), \tag{1.1.51}$$

приходим после деления на $\widetilde{A}$ к следующему уравнению:

$$\overline{x}^{\,2} + \widetilde{a}\,\overline{x} + \widetilde{b}\,\overline{y} + \widetilde{c} = 0. \tag{1.1.52}$$

Теперь преобразование трансляции $\overline{x} = \widetilde{x} - (\widetilde{a}/2)$, $\overline{y} = \widetilde{y}$ приводит последнее уравнение к стандартной форме уравнения параболы:

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{b}\,\widetilde{y} + k = 0.$$

Следовательно, мы говорим, что уравнение (1.1.39) при условии $B^2 - AC = 0$ представляет алгебраические кривые *параболического типа*.

Пусть $\boldsymbol{B^2 - AC < 0}$. Тогда уравнение (1.1.46) имеет два комплексных корня, $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$, где

$$p = -\frac{B}{A}, \quad q = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}\,.$$

Обратим в нуль коэффициенты $\widetilde{A}$ и $\widetilde{C}$ одновременно, полагая $\alpha/\gamma = \lambda_1$ и $\beta/\delta = \lambda_2$ в уравнениях (1.1.45). Можно потребовать, например, $\gamma = \delta = 1$ и получить комплексную замену переменных

$$x = (p + iq)\,x' + (p - iq)\,y', \quad y = x' + y', \tag{1.1.53}$$

превращая уравнение (1.1.39) в уравнение гиперболы (1.1.50). Мы хотим, однако, не применять комплексные преобразования переменных и использовать только действительные переменные. При этом условии мы решаем уравнения (1.1.53) относительно x' и y':

$$x' = \frac{y}{2} + i\,\frac{py - x}{2q}, \quad y' = \frac{y}{2} - i\,\frac{py - x}{2q}$$

и рассматриваем действительную и мнимую части этих комплексно сопряженных переменных (умноженных для простоты на 2) как новые действительные переменные:

$$\overline{x} = y, \quad \overline{y} = \frac{py - x}{q}\cdot$$

Разрешая последние уравнения относительно x, y, мы получаем следующее действительное преобразование, имеющее структуру уравнений (1.1.42):

$$x = p\overline{x} - q\overline{y}, \quad y = \overline{x}. \tag{1.1.54}$$

Оно преобразует уравнение (1.1.39) в уравнение вида

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \widetilde{a}\,\overline{x} + \widetilde{b}\,\overline{y} + \widetilde{c} = 0. \tag{1.1.55}$$

От членов первого порядка можно избавиться с помощью преобразования сдвига $\overline{x} = \widetilde{x} - (\widetilde{a}/2)$, $\overline{y} = \widetilde{y} - (\widetilde{b}/2)$, что приведет уравнение (1.1.55) к стандартной форме

$$\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = k.$$

Это уравнение описывает окружность, если $k > 0$, точку, если $k = 0$, и не имеет точек в действительной области, если $k < 0$. Итак, мы говорим, что уравнение (1.1.55) описывает окружность, понимая, что могут быть вышеуказанные случаи вырождения. Поскольку окружность — это частный случай эллипса, мы можем сказать, что уравнение (1.1.39) при условии $B^2 - AC < 0$ описывает алгебраические кривые *эллиптического типа*.

Резюмируем полученные выше результаты в виде следующих утверждений.

Теорема 1.1.3. Любое уравнение (1.1.39) второго порядка описывает кривую *гиперболического типа* и может быть приведено с помощью однородного линейного преобразования к форме (1.1.50):

$$\overline{x}\,\overline{y} + \widetilde{a}\,\overline{x} + \widetilde{b}\,\overline{y} + \widetilde{c} = 0, \quad \text{если} \quad B^2 - AC > 0, \tag{1.1.56}$$

параболического типа и может быть приведено к форме (1.1.52):

$$\overline{x}^2 + \widetilde{a}\,\overline{x} + \widetilde{b}\,\overline{y} + \widetilde{c} = 0, \quad \text{если} \quad B^2 - AC = 0, \tag{1.1.57}$$

и *эллиптического типа* и может быть приведено к форме (1.1.55):

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \widetilde{a}\,\overline{x} + \widetilde{b}\,\overline{y} + \widetilde{c} = 0, \quad \text{если} \quad B^2 - AC < 0. \tag{1.1.58}$$

Замечание 1.1.8. Из преобразования (1.1.53) следует, что эллиптические и гиперболические кривые связаны комплексными линейными преобразованиями.

1.2. Дифференциальное и интегральное исчисление

1.2.1. Правила дифференцирования. Пусть $f(x)$ — функция одной переменной. Ее производная $f'(x)$ в точке x есть по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,. \tag{1.2.1}$$

Принято обозначать производную $y = f(x)$ также

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad D(y) = D_x(y), \quad D\Big(f(x)\Big) = D_x\Big(f(x)\Big).$$

Пусть $u = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — функция n переменных. Ее частная производная по одной из переменных, например по x^i, определяется таким образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^i + \Delta x^i, \ldots, x^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\Delta x^i}\,. \tag{1.2.2}$$

Она нередко обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad u_i = u_{x^i}, \quad D_i(u) = D_{x^i}(u), \quad D_i\Big(f(x)\Big),$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Основные правила дифференцирования:

а) формулы

$$\begin{aligned} &D(au + bv) = aD(u) + bD(v),\\ &D(uv) = vD(u) + uD(v),\\ &D(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1} D(u),\\ &D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD(u) - uD(v)}{v^2}, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

где a, b и α — константы, u, v — функции и D — обыкновенная или частная производные;

б) правило дифференцирования обратной функции:

$$D_x(y) = \frac{1}{D_y(x)}\,; \tag{1.2.4}$$

в) правило дифференцирования сложной функции применяется, если $y = y(u)$, $u = u(x)$. Тогда

$$D_x(y) = D_u(y) \cdot D_x(u). \tag{1.2.5}$$

Правило дифференцирования сложной функции допускает возможность итерации (1.2.5), например, если $y = y(u)$, $u = u(v)$ и $v = v(x)$, то

$$D_x(y) = D_u(y) \cdot D_v(u) \cdot D_x(v).$$

1.2.2. Теорема о среднем значении. Имеется в виду следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в пределах замкнутого промежутка $[a, b]$. Тогда для любых точек x_1, x_2, удовлетворяющих условию $a < x_1 < x_2 < b$, существует по крайней мере одна точка $\xi \in [x_1, x_2]$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(\xi). \tag{1.2.6}$$

Следующее следствие теоремы о среднем значении является ключевым в интегральном исчислении, а также в теории дифференциальных уравнений.

Теорема 1.2.2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на замкнутом промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда $y' = 0$ во всех точках этого замкнутого промежутка $[a, b]$, если и только если $y = C = \text{const}$.

Доказательство. Если $y = C$, тогда очевидно из определения (1.2.1), что $y' = 0$. Предположим теперь, что $y' = 0$. Согласно теореме 1.2.1 имеем

$$y(x_2) - y(x_1) = (x_2 - x_1)y'(\xi)$$

для любых x_1, x_2 из замкнутого промежутка $[a, b]$, где $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$. По предположению $y' = 0$ во всех точках промежутка $[a, b]$, и, следовательно, $y'(\xi) = 0$. Итак, из приведенного выше уравнения следует, что $y(x_2) = y(x_1)$, то есть $y = \text{const}$ на всем замкнутом промежутке $[a, b]$.

Следствие 1.2.1. Две функции имеют одну производную, если и только если их разность является константой. Другими словами, $f'(x) = g'(x)$, если и только если

$$f(x) = g(x) + C, \quad C = \text{const}.$$

1.2.3. Инвариантность дифференциала. Дифференциал функции $y = f(x)$ одной переменной есть

$$dy = y'\, dx.$$

Аналогично, дифференциал функции $u = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ нескольких переменных определяется так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x^1}\, dx^1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x^n}\, dx^n \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Мы часто будем использовать обычное *правило суммирования*, избавляясь от знака суммирования в том случае, когда индекс суммирования повторяется (в верхнем и нижнем индексах). Например, вышеприведенное уравнение можно представить в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Инвариантность дифференциала основана на следующем свойстве дифференциала функции $f(u)$. Если $u = u(x)$, то

$$df = \frac{df(u)}{du}\,du = \frac{df\Big(u(x)\Big)}{dx}\,dx. \tag{1.2.7}$$

Общее утверждение состоит в следующем.

Теорема 1.2.3. Пусть $u = f(x)$ — функция n переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и пусть $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ — функции s переменных $t = (t^1, \ldots, t^s)$. Тогда дифференциал u, рассматриваемый как функция $u = f(x)$ от x, совпадает с дифференциалом функции $u = f\Big(x(t)\Big)$ от t, т. е.

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\,dx^i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial f\Big(x(t)\Big)}{\partial t^k}\,dt^k. \tag{1.2.8}$$

В частности, если $u = f(x, y)$ — функция двух переменных, тогда произвольная замена переменных

$$x = \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \quad y = \psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})$$

не изменяет дифференциал, т. е.

$$\frac{\partial f\Big(\varphi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})\Big)}{\partial \widetilde{x}}\,d\widetilde{x} + \frac{\partial f\Big(\varphi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})\Big)}{\partial \widetilde{y}}\,d\widetilde{y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy$$

или коротко:

$$du = \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}}\,d\widetilde{x} + \frac{\partial u}{\partial \widetilde{y}}\,d\widetilde{y} = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

1.2.4. Правила интегрирования. Вычисление интегралов основано на следующих основных правилах.

1. *Интегрирование — операция, обратная дифференцированию*:

$$\int df(x) = f(x) + C \quad \text{или} \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C, \tag{1.2.9}$$

где C — произвольная постоянная, называемая *константой интегрирования* (ср. со следствием 1.2.1).

2. *Интегрирование — линейная операция*:

$$\int [au(x) + bv(x)]dx = a\int u(x)\,dx + b\int v(x)\,dx, \quad a, b = \text{const}. \tag{1.2.10}$$

3. *Замена переменных в интегралах* (см. уравнение (1.2.7)):

$$\int f(x)\,dx = \int f\Big(\varphi(t)\Big) \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{1.2.11}$$

4. *Интегрирование по частям*:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.2.12}$$

5. *Дифференцирование определенных интегралов*:

а) $$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(s)\,ds = f(x), \tag{1.2.13}$$

б) $$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(s,x)\,ds = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\,ds + \psi'(x)\,g\Big(\psi(x),x\Big) - \varphi'(x)\,g\Big(\varphi(x),x\Big).$$

1.2.5. Ряд Тейлора. *Ряд Тейлора* разложения $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ имеет следующий вид:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots\,, \tag{1.2.14}$$

где $f^{(n)}(a)$ — значение n-й производной от $f(x)$ при $x = a$. Если $a = 0$, ряд Тейлора (1.2.14) известен как *ряд Маклорена* и имеет вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots\,. \tag{1.2.15}$$

Вычислим разложение в ряд Маклорена экспоненциальной функции $f(x) = e^x$. Поскольку $f'(x) = e^x$, мы имеем $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$ и разложение (1.2.15) приобретает вид

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Нижеследующая таблица содержит разложения в ряд Маклорена и Тейлора для некоторых часто используемых функций.

а) Экспоненциальная функция и логарифм

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\,; \quad a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \cdots \tag{1.2.16}$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots \quad (0 < x \leqslant 2) \tag{1.2.17}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1) \tag{1.2.18}$$

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right] \quad (-1 \leqslant x < 1) \tag{1.2.19}$$

б) Алгебраические функции (ниже считается, что α — произвольное действительное положительное число)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \tag{1.2.20}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \tag{1.2.21}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \cdots \tag{1.2.22}$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \cdots \tag{1.2.23}$$

$$(1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x \pm \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 \pm \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \tag{1.2.24}$$

$$(1 \pm x)^{-\alpha} = 1 \mp \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 \mp \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \tag{1.2.25}$$

в) Тригонометрические и гиперболические функции

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{1.2.26}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{1.2.27}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{1.2.28}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{1.2.29}$$

г) Некоторые неэлементарные функции (см. пример 1.1.6)

$$\operatorname{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots \tag{1.2.30}$$

$$\operatorname{Ci}(x) = \gamma - \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \cdots \tag{1.2.31}$$

$$\operatorname{Ei}(x) = \gamma + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \cdots \tag{1.2.32}$$

$$\operatorname{li}(x) = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \cdots \tag{1.2.33}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right), \tag{1.2.34}$$

где γ — постоянная Эйлера, определенная в примере 1.1.1.

1.2.6. Комплексные переменные. Комплексное число имеет вид

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

где x и y — действительные числа, называемые *действительной* и *мнимой* частью z соответственно. *Комплексно сопряженным* к z является комплексное число $\overline{z} = x - iy$.

Комплексные числа записывают также в тригонометрическом представлении

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \tag{1.2.35}$$

а также в эквивалентном полярном представлении (см. далее формулу Эйлера (1.2.41)):

$$z = re^{i\theta}, \tag{1.2.36}$$

где r и θ — действительные числа, называемые модулем и аргументом z соответственно. Из (1.2.35) следует, что угол θ определен только с точностью до произвольного слагаемого, равного произведению целого числа на 2π. Учитывая эту неоднозначность вычисления, z записывают, например, в полярном представлении (1.2.36) в форме

$$z = re^{i(\theta+2\pi k)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2.37}$$

Значение θ в интервале $-\pi < \theta \leqslant \pi$ называют *главным аргументом*.

Нижеследующие функции комплексного переменного определяются как расширения рядов Маклорена (1.2.16), (1.2.26) и (1.2.27) на комплексную область:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{1.2.38}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{1.2.39}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{1.2.40}$$

Отсюда получаем: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ и, как следствие, *формулу Эйлера*:

$$e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y). \tag{1.2.41}$$

Применяя формулу Эйлера, нетрудно показать, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.2.42}$$

Более того, формула Эйлера (1.2.41) и полярное представление (1.2.36) комплексного числа $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ приводят к формуле Муавра

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]. \tag{1.2.43}$$

Заменяя в уравнении (1.2.43) n на $1/n$ и используя представление (1.2.37) от z, получаем n значений $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right], \quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{1.2.44}$$

Пример 1.2.1. Получим кубические корни из единицы, т. е. решим уравнение $w^3 = 1$. Представив действительное число 1 в тригонометрической форме:

$$1 = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)$$

и применяя уравнение (1.2.44) при $k = 0, 1$ и 2, мы получим три следующих кубических корня из единицы:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad w_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Гиперболические функции (1.1.8) также обобщаются на комплексную область обычным образом:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} &\sin z = -i\operatorname{sh}(iz), \quad \cos z = \operatorname{ch}(iz), \quad \operatorname{tg} z = -i\operatorname{th}(iz),\\ &\operatorname{sh} z = -i\sin(iz), \quad \operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg}(iz). \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

Производные от комплексных экспоненциальной, тригонометрической и гиперболической функций имеют следующий вид:

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \qquad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Используя полярное представление (1.2.37) функции z, можно ввести (многозначную) *логарифмическую функцию* комплексной переменной:

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2.46}$$

Наконец, экспоненциальная функция a^z, где a — любое комплексное число, определяется следующим образом:

$$a^z = e^{z\ln a}. \tag{1.2.47}$$

1.2.7. Приближенное представление функций

Определение 1.2.1. Говорят, что функция $\alpha(x,\varepsilon)$ имеет порядок меньше, чем ε^p (где $p \geqslant 1$ — целое), и записывают

$$\alpha(x,\varepsilon) = o(\varepsilon^p), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.2.48}$$

если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(x,\varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0. \tag{1.2.49}$$

Уравнение (1.2.49) эквивалентно любому из следующих двух условий:

$$\alpha(x,\varepsilon) = \varepsilon^{p+1}\phi(x,\varepsilon), \quad \phi(x,\varepsilon) \neq \infty \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0$$

и

$$|\alpha(x,\varepsilon)| \leqslant C\,|\varepsilon|^{p+1}, \quad C = \text{const}.$$

Определение 1.2.2. Говорят, что функции $f(x,\varepsilon)$ и $g(x,\varepsilon)$ *равны приближенно* с точностью $o(\varepsilon^p)$ при $\varepsilon \to 0$, если

$$f(x,\varepsilon) - g(x,\varepsilon) = o(\varepsilon^p).$$

Чтобы обозначить приближенное равенство, используют либо обозначение $g \approx f$, либо, более конкретно,

$$g(x,\varepsilon) = f(x,\varepsilon) + o(\varepsilon^p).$$

Согласно разложению Тейлора (1.2.14), приближенное представление функции $f(x)$ с погрешностью $o\Big((x-a)^n\Big)$ при $x \to a$ определяется следующим выражением:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n. \tag{1.2.50}$$

Например, разложение в ряд (1.2.34) дает следующую аппроксимацию функции погрешности:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + o(x^4).$$

Замечание 1.2.1. Приближенно равные функции f и g часто называют *эквивалентными* функциями и обозначают $f \sim g$.

1.2.8. Якобиан. Функциональная независимость. Замена переменных в многомерных интегралах.

Определение 1.2.3. Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$. Говорят, что функции

$$u^\alpha = u^\alpha(x), \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (m \leqslant n), \tag{1.2.51}$$

функционально зависимы, если существует по крайней мере одно соотношение $\Phi\Big(u^1(x), \dots, u^m(x)\Big) = 0$, и *функционально независимы* в противном случае.

Удобная проверка независимости функций (1.2.51) формулируется в терминах их *матрицы Якоби*

$$\left\|\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right\|,$$

где индексы α и i обозначают строку и столбец, соответственно. А именно, функции (1.2.51) функционально независимы, если и только если ранг матрицы Якоби равен m. Если $n = m$, то признак функциональной независимости можно сформулировать в терминах определителя

$$J = \det\left\|\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right\|,$$

известного как *якобиан*.

Теорема 1.2.4. Функции $u^1(x)$, …, $u^n(x)$ от n переменных $x = (x^1, \dots, x^n)$ функционально независимы, если и только если их якобиан отличен от нуля.

Якобиан полезен также при обобщении правила замены переменных (1.2.11) в случае кратных интегралов. А именно, пусть функции (1.2.51) функционально независимы и пусть $m = n$. Тогда (1.2.51) производит замену переменных $y = u(x)$ с якобианом $J \neq 0$. Эта замена переменных приводит к следующему *правилу замены переменных в кратных интегралах*:

$$\int f\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right) dy^1\, dy^2 \ldots dy^n = \tag{1.2.52}$$
$$= \int f\left(u^1(x), u^2(x), \ldots, u^n(x)\right) |J|\, dx^1\, dx^2 \ldots\, dx^n.$$

1.2.9. Линейная независимость функций. Вронскиан.

Определение 1.2.4. Рассмотрим m функций одной переменной x:

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_m = y_m(x). \tag{1.2.53}$$

Говорят, что функции (1.2.53) линейно зависимы, если существуют константы $c_1, \ldots, c_m$, отличные от нуля, такие, что

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_m y_m(x) = 0, \tag{1.2.54}$$

и *линейно независимы*, если не существует соотношений (1.2.54).

Удобный тест линейной независимости формулируется в терминах определителя $m \times m$:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}, \tag{1.2.55}$$

называемого *вронскианом* функций (1.2.53).

Теорема 1.2.5. Функции (1.2.53) линейно независимы, если и только если их вронскиан отличен от нуля,

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \neq 0. \tag{1.2.56}$$

1.2.10. Интегрирование в квадратурах. Практическое интегрирование дифференциальных уравнений предполагает знание общего решения для простейшего дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.2.57}$$

Согласно теореме 1.2.2, общее решение уравнения (1.2.57) есть

$$y = C.$$

Остановимся подробно на фундаментальном дифференциальном уравнении интегрального исчисления, решенном в пионерских работах Ньютона и Лейбница. Пусть дана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти функцию $y = F(x)$, производная от которой равна $f(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Функция $F(x)$ называется *интегралом* $f(x)$ *по* x. Таким образом, требуется решить *обыкновенное дифференциальное уравнение* первого порядка:

$$y' = f(x). \tag{1.2.58}$$

Его *общее решение* записывается в виде

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{1.2.59}$$

где $\int f(x)\,dx = F(x)$ — любой интеграл от $f(x)$ по x и C — произвольная постоянная, известная как *константа интегрирования*. Выбирая константу интегрирования, получаем *частное решение*. Таким образом, уравнение (1.2.58) имеет бесконечно много решений, которые образуют однопараметрическое семейство интегралов (1.2.59).

Обозначение. В дифференциальном исчислении символ $\int f(x)\,dx$ *неопределенного интеграла* представляет собой стандартное обозначение всех решений уравнения (1.2.58), т. е. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ обозначает частный интеграл от $f(x)$. В теории дифференциальных уравнений, однако, обычно используется другая интерпретация. А именно, $\int f(x)\,dx$ отождествляется с любым частным интегралом $F(x)$ от функции $f(x)$. Это именно та интерпретация, которая используется в настоящей книге.

Например, в обозначении (1.2.59) общего решения уравнения второго порядка,

$$y'' = f(x), \tag{1.2.60}$$

содержатся две произвольные постоянные C_1 и C_2, и оно записывается так:

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2, \tag{1.2.61}$$

где $\int dx \int f(x)\,dx = \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx$.

Замечание 1.2.2. В классической литературе для формулы интеграла (1.2.59) применяется термин *квадратура*. Следовательно, говорят, что дифференциальное уравнение (1.2.58) *интегрируемо в квадратурах*. Та же терминология применяется к уравнению

$$y' = h(y),$$

решение которого дается в виде формулы интеграла, подобно (1.2.59),

$$x = \int \frac{dy}{h(y)} + C \equiv H(y) + C,$$

откуда $y = H^{-1}(x - C)$, где H^{-1} обозначает функцию, обратную H.

1.2.11. Дифференциальные уравнения для семейства кривых. Рассмотрим семейство кривых на плоскости (x, y),

$$y = f(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{1.2.62}$$

задаваемое, в общем случае, неявно в виде

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0. \tag{1.2.63}$$

Согласно определению неявных функций, уравнение (1.2.63), в котором y заменено на функцию f согласно (1.2.62), тождественно удовлетворяется при значениях x (выбранных из некоторого интервала) для допустимых значений параметров C_k, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, это тождество можно дифференцировать по x. Повторяя эту процедуру n раз, имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, y' = 0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\, y' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\, y'^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, y'' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, y^{(n)} = 0.
\end{aligned} \tag{1.2.64}$$

Исключение параметров C_k из уравнений (1.2.63) и (1.2.64) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению порядка n

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.2.65}$$

Функция (1.2.62) дает решение дифференциального уравнения (1.2.65), зависящее от n произвольных постоянных C_i. Соответственно (1.2.65) представляет собой дифференциальное уравнение семейства кривых (1.2.62) или (1.2.63).

Приведенную процедуру можно упростить, используя следующее *дифференциально-алгебраическое* обозначение (см. раздел 1.4).

Обозначение. *Полный дифференциал* D_x функций, зависящих от конечного числа переменных x, y, y', y'', …, определяется следующим образом:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\,\frac{\partial}{\partial y} + y''\,\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + y^{(s+1)}\,\frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + \ldots \tag{1.2.66}$$

Применение этого обозначения позволяет записать уравнения (1.2.64) в компактной форме:

$$D_x\Phi = 0, \quad D_x^2\Phi = 0, \ldots, \quad D_x^n\Phi = 0. \tag{1.2.67}$$

Более того, таким образом можно избавиться от необходимости обращаться n раз к уравнению (1.2.63) при дифференцировании уравнений (1.2.64).

Упражнение 1.2.1. Получить дифференциальное уравнение семейства прямых $y = ax + b$, содержащее два параметра, a и b.

Решение. Используя в качестве Φ функцию $\Phi = y - ax - b$, составим уравнения (1.2.67):
$$D_x\Phi \equiv y' - a = 0, \quad D_x^2\Phi \equiv y'' = 0.$$

Последнее уравнение не содержит параметров. Следовательно, дифференциальное уравнение (1.2.65) прямых линий является простейшим *линейным* уравнением второго порядка:
$$y'' = 0. \tag{1.2.68}$$

Упражнение 1.2.2. Построить дифференциальное уравнение семейства парабол, задаваемых в форме $\Phi \equiv y - ax^2 - bx - c = 0$ и зависящих от трех параметров, a, b и c.

Решение. Запишем уравнения (1.2.67):
$$D_x\Phi \equiv y' - 2ax - b = 0, \quad D_x^2\Phi \equiv y'' - 2a = 0, \quad D_x^3\Phi \equiv y''' = 0.$$

Итак, дифференциальное уравнение парабол является простейшим линейным уравнением третьего порядка:
$$y''' = 0. \tag{1.2.69}$$

Упражнение 1.2.3. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, заданных в виде $\Phi \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0$.

Решение. Уравнения (1.2.67) дают:
$$x - a + (y-b)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0, \quad 3y'y'' + (y-b)y''' = 0.$$

Здесь уравнение третьего порядка не содержит параметры a и c, и этого достаточно для того, чтобы подставить в него выражение $y - b = -(1 + y'^2)/y''$, которое можно найти из второго уравнения. Таким образом, семейство кривых описывается *нелинейным* уравнением:
$$y''' - 3\,\frac{y'y''^2}{1 + y'^2} = 0. \tag{1.2.70}$$

Упражнение 1.2.4. Построить дифференциальное уравнение семейства гипербол, задаваемое в форме $\Phi \equiv (y-a)(b-cx) - 1 = 0$.

Решение. Уравнения (1.2.67) дают:
$$(b-cx)y' - c(y-a) = 0, \quad (b-cx)y'' - 2cy' = 0, \quad (b-cx)y''' - 3cy'' = 0.$$

Из второго уравнения мы находим $b - cx = 2cy'/y''$ и подставляем это в третье уравнение, чтобы получить следующее дифференциальное уравнение гипербол:
$$y''' - \frac{3}{2}\,\frac{y''^2}{y'} = 0. \tag{1.2.71}$$

1.3. Векторный анализ

Векторный анализ располагает естественными и лаконичными обозначениями для формулировки геометрических и физических задач. Благодаря этому он входит в учебную программу студентов, обучающихся фундаментальным и прикладным дисциплинам, в качестве одного из базовых разделов. Он широко используется в механике Ньютона, механике сплошных сред, релятивистской механике, электродинамике и т. д. В этом разделе содержатся основные обозначения и формулы векторного анализа.

1.3.1. Векторная алгебра. *Скалярное произведение* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ есть скаляр (т. е. действительное число), определяемый следующим образом:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta, \tag{1.3.1}$$

где θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В литературе скалярное произведение также обозначают $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ или просто $\mathbf{ab}$.

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представлены в декартовых координатах:

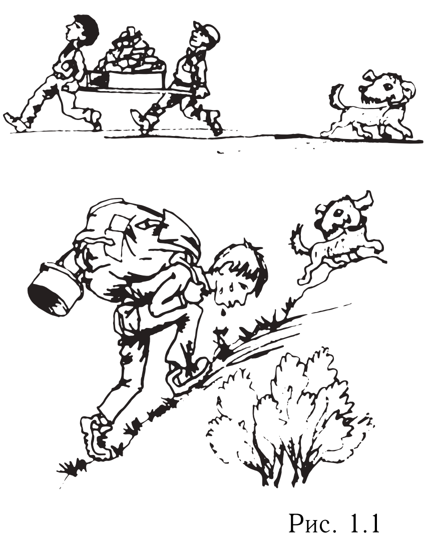
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a^1\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^3\mathbf{k} = (a^1, a^2, a^3), \\ \mathbf{b} &= b^1\mathbf{i} + b^2\mathbf{j} + b^3\mathbf{k} = (b^1, b^2, b^3), \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль первой, второй и третьей координатной оси соответственно. Тогда их скалярное произведение задается формулой

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i. \tag{1.3.3}$$

Например, в механике скалярное произведение силы $\mathbf{F}$ на перемещение $\mathbf{x}$ дает *работу*

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{x}. \tag{1.3.4}$$



Эти парни
не работают

Вот этот работает

Рис. 1.1

Из уравнения (1.3.4) следует, что в частном случае, когда перемещение $\mathbf{x}$ перпендикулярно силе $\mathbf{F}$, *работа не совершается*. В частности, когда кто-то перемещает груз в поле силы тяжести по горизонтальной плоскости, он не совершает работы (опровергая мнение грузчика (рис. 1.1)).

Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ есть вектор, определяемый следующим образом:

а) величина $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ равна $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$, где θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

б) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен плоскости, натянутой на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и составляет вместе с исходными векторами правую тройку: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Векторное произведение обозначается также $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $[\mathbf{ab}]$. Величина $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ векторного произведения равна площади параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Таким образом, векторное произведение представляет собой направленную площадь. По этой причине оно называется в литературе *векторной площадью*.

Векторное произведение двух векторов (1.3.2) в декартовых координатах записывается в виде

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \tag{1.3.5}$$

где

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = (a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{i} + (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{j} + (a^1b^2 - a^2b^1)\,\mathbf{k}.$$

Из уравнения (1.3.5) следует, что векторное произведение антикоммутативно:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ могут образовывать *тройные произведения*

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}), \quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Вектор тройного произведения $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ удобно вычислять, используя формулу

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}. \tag{1.3.6}$$

Смешанное произведение $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ есть *вектор-скалярное произведение*, иногда называемое *скалярным тройным произведением*. Оно представляет собой скаляр и равно объему параллелепипеда с ребрами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, с учетом того, что триплет $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образует правую тройку векторов. Смешанное произведение удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{1.3.7}$$

Смешанное произведение записывается в декартовых координатах следующим образом. Пусть

$$\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3), \quad \mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3), \quad \mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3).$$

Тогда

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \tag{1.3.8}$$

1.3.2. Вектор-функции. *Вектор-функция* $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$ от *скалярной переменной* t — это переменный вектор, зависящий от t. В координатах его можно представить как триплет скалярных функций

$$a^1 = f_1(t), \quad a^2 = f_2(t), \quad a^3 = f_3(t)$$

и записывать следующим образом:

$$\mathbf{a} = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}.$$

Производная от вектор-функции определяется так:

$$\mathbf{a}' \equiv \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}\,.$$

В координатах:

$$\mathbf{a}' = f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j} + f_3'(t)\,\mathbf{k}.$$

Аналогично вычисляется вторая производная:

$$\mathbf{a}'' = f_1''(t)\,\mathbf{i} + f_2''(t)\,\mathbf{j} + f_3''(t)\,\mathbf{k}.$$

Вектор-функции удовлетворяют обычным правилам дифференцирования, т. е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}', \quad (\varphi\mathbf{a})' = \varphi'\mathbf{a} + \varphi\mathbf{a}',$$
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}', \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'.$$

Пусть вектор $\mathbf{a}$ — функция скалярной переменной φ и пусть $\varphi = \varphi(t)$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}\Big(\varphi(t)\Big).$$

Тогда для вектор-функции записывается правило дифференцирования сложной функции в обычной форме:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

1.3.3. Векторные поля. Приведем краткие сведения о дифференциальном исчислении векторных полей. Все вычисления будут проводиться в прямоугольной декартовой системе отсчета. Следовательно, роль независимых переменных будут играть координаты x, y, z положения вектора $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Будем предполагать, что все функции непрерывно дифференцируемы.

Скалярное поле ϕ есть функция положения вектора $\mathbf{x} = (x, y, z)$:

$$\phi = \phi(x, y, z).$$

Векторное поле $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ есть вектор-функция

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z),$$

зависящая от положения вектора $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Частные производные скалярного и векторного полей определяются так же, как это сделано выше для вектор-функции одной переменной.

Оператор Гамильтона, или *символический дифференциальный оператор* ∇ — это вектор, задаваемый в прямоугольных декартовых координатах (x, y, z) с помощью

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.3.9}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей x, y и z соответственно. Иными словами, ∇ — векторный оператор с компонентами

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3.10}$$

вдоль осей x, y, z. Семейство операторов градиент, дивергенция и ротор записывается с помощью оператора Гамильтона следующим образом.

Градиент скалярного поля $\phi = \phi(x, y, z)$ — это произведение вектора ∇ на скаляр:

$$\operatorname{grad}\phi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{1.3.11}$$

Дивергенция векторного поля $\mathbf{a}$ — это скалярное произведение векторов ∇ и $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\cdot\mathbf{a} = \nabla_x a^1 + \nabla_y a^2 + \nabla_z a^3 \equiv \frac{\partial a^1}{\partial x} + \frac{\partial a^2}{\partial y} + \frac{\partial a^3}{\partial z}\cdot \tag{1.3.12}$$

Ротор, или *вращение* векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ есть векторное произведение векторов ∇ и $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{curl}\mathbf{a} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix}, \tag{1.3.13}$$

или

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a^3}{\partial y} - \frac{\partial a^2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a^1}{\partial z} - \frac{\partial a^3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a^2}{\partial x} - \frac{\partial a^1}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{1.3.14}$$

Оператор ∇ вместе с формулами *векторной алгебры* позволяет проводить операции дифференцирования векторных полей. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и ϕ, ψ —

векторные и скалярные поля, соответственно, и пусть α, β — произвольные константы. Оператор ∇ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&1.\quad \nabla(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha\nabla\phi + \beta\nabla\psi,\\
&2.\quad \nabla\cdot(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\nabla\cdot\mathbf{a} + \beta\nabla\cdot\mathbf{b},\\
&3.\quad \nabla\times(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\nabla\times\mathbf{a} + \beta\nabla\times\mathbf{b},\\
&4.\quad \nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi,\\
&5.\quad \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{a} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{a}),\\
&6.\quad \nabla\times(\phi\,\mathbf{a}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{a} + \phi\nabla\times\mathbf{a},\\
&7.\quad \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}),\\
&8.\quad \nabla\cdot(\nabla\phi) \equiv \nabla^2\phi \equiv \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2},\\
&9.\quad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0, \qquad 10.\ \nabla\times(\nabla\phi) = 0.
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Эти свойства часто записывают в обозначениях (1.3.11)–(1.3.13). Например, свойства 5, 9 и 10 записывают так:

$$5'.\ \operatorname{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\phi, \quad 9'.\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0, \quad 10'.\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0.$$

1.3.4. Три классические теоремы об интегралах. *Теорема Грина*: Пусть V — произвольная область на плоскости (x, y) с границей ∂V. Тогда

$$\int\limits_{\partial V} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{V} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{1.3.16}$$

для любых (дифференцируемых) функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Теорема Стокса: Пусть V — (ориентируемая) поверхность в пространстве (x, y, z) с границей ∂V, и пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — произвольные (дифференцируемые) функции. Тогда

$$\int\limits_{\partial V} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \tag{1.3.17}$$

$$= \int\limits_{V} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx.$$

Уравнение (1.3.17) в векторном виде записывается следующим образом:

$$\int\limits_{\partial V} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int\limits_{V} \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dS}.$$

Здесь $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, $d\mathbf{x} = (dx, dy, dz)$ и $\mathbf{dS} = \boldsymbol{\nu}\,dS$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности V.

Теорема о дивергенции (теорема Гаусса–Остроградского): Пусть V — некоторый объем в пространстве (x, y, z) с замкнутой границей ∂V и $\mathbf{A}$ — произвольное векторное поле. Тогда

$$\int_{\partial V} (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nu})\, dS = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{A})\, dx\, dy\, dz \equiv \int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\, dx\, dy\, dz, \tag{1.3.18}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к границе ∂V объема V.

1.3.5. Уравнение Лапласа. Дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.3.19}$$

называется *лапласианом*. *Уравнение Лапласа* в случае трех переменных:

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.3.20}$$

является одним из наиболее важных уравнений математической физики. Это — линейное уравнение в частных производных второго порядка.

Пример 1.3.1. Сферически симметричное решение уравнения Лапласа (1.3.20) имеет форму (см. задачу 1.21)

$$\phi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и C_1, $C_2 = \text{const}$.

1.3.6. Дифференцирование детерминантов. Производная от детерминантов дается следующей формулой:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}(x) & a_{i2}(x) & \cdots & a_{in}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

где $a'_{ij}(x) = da_{ij}(x)/dx$.

1.4. Представление дифференциальной алгебры

Исчисление дифференциальной алгебры предоставляет нам *удобный язык и эффективные средства* для решения дифференциальных уравнений. В классическом математическом анализе обычно принято иметь дело с *функциями* $u^\alpha(x)$, где $\alpha = 1, \ldots, m$, и $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Производные

$$u_i^\alpha(x) = \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha(x) = \frac{\partial^2 u^\alpha(x)}{\partial x^i \partial x^j}, \ldots$$

также рассматриваются как функции от x.

Дифференциальная алгебра предполагает проводить операции с величинами u^α, u_i^α, $u_{ij}^\alpha, \ldots$, рассматриваемыми в качестве переменных, и иметь дело со сложными функциями $f\Big(x, u(x)\,, \partial u(x)/\partial x, \ldots\Big)$ как с функциями $f(x, u, u_{(1)}, \ldots)$ независимых переменных $x, u, u_{(1)}, \ldots$

1.4.1. Дифференциальные переменные. Полное дифференцирование. Начнем с одномерного случая. А именно, рассмотрим одну независимую переменную x и одну зависимую переменную y с последовательными производными $y', y'', \ldots, y^{(s)}, \ldots$ *Полная производная* (см. (1.2.66))

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\,\frac{\partial}{\partial y} + y''\,\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + y^{(s+1)}\,\frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + \ldots \tag{1.4.1}$$

действует на *дифференциальные функции*, т. е. функции

$$f(x, y, y_{(1)}, \ldots) \tag{1.4.2}$$

любого конечного числа *независимых переменных*

$$x, \quad y, \quad y_{(1)} = y', \quad y_{(2)} = y'', \ldots \tag{1.4.3}$$

Совокупность всех дифференциальных функций будем обозначать $\mathcal{A}$.

Проиллюстрируем отличие между D_x и частным дифференцированием $\partial/\partial x$ по переменной x, рассматривая действие обеих операций на следующие функции из $\mathcal{A}$:

$$f = x, \quad f = y, \quad f = xy'.$$

Полное дифференцирование дает:

$$D_x(x) = 1, \quad D_x(y) = y', \quad D_x(xy') = y' + xy''$$

в то время как частные производные суть:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (xy')}{\partial x} = y'.$$

1.4.2. Производные высших порядков от произведения и от сложных функций. Формула для производных высших порядков от произведения функций применима также к произвольным дифференцируемым функциям. А именно, если $f, g \in \mathcal{A}$, тогда

$$D_x^k(fg) = D_x^k(f)g + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-s)!s!}\, D_x^{k-s}(f)\, D_x^s(g) + fD_x^k(g). \tag{1.4.4}$$

Более того, существует формула Бруно (Faà de Bruno (1857)) для вычисления производных высокого порядка от сложных функций. Она обобщает правило дифференцирования сложной функции (1.2.5). А именно, рассмотрим дифференциальную функцию вида $f(y)$. Тогда ее производная порядка k может быть выражена в терминах $y', \ldots, y^{(k)}$ и

$$f' = \frac{df}{dy}, \quad f'' = \frac{d^2 f}{dy^2}, \quad \ldots, \quad f^{(k)} = \frac{d^k f}{dy^k}$$

следующей формулой:

$$D_x^k(f) = \sum \frac{k!}{l_1!\,l_2!\dots l_k!}\, f^{(p)} \left(\frac{y'}{1!}\right)^{l_1} \left(\frac{y''}{2!}\right)^{l_2} \dots \left(\frac{y^{(s)}}{s!}\right)^{l_s} \dots \left(\frac{y^{(k)}}{k!}\right)^{l_k}, \tag{1.4.5}$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целым числам $l_1, \dots, l_k$ так, что

$$l_1 + 2l_2 + \dots + kl_k = k, \tag{1.4.6}$$

и p — положительное целое число, равное

$$p = l_1 + l_2 + \dots + l_k, \tag{1.4.7}$$

где $l_1, \dots, l_k$ удовлетворяют условию (1.4.6). Следует найти все решения системы (1.4.6) и (1.4.7).

Например, для нахождения третьей производной решаем уравнения (1.4.6), (1.4.7) при $k = 3$, т. е.

$$\begin{gathered} l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 3, \\ p = l_1 + l_2 + l_3. \end{gathered}$$

Они дают три системы решений со следующими значениями l_1, l_2, l_3 (отличными от нуля) и p:

$$1)\ l_1 = 3,\ p = 3; \qquad 2)\ l_1 = 1,\ l_2 = 1,\ p = 2; \qquad 3)\ l_3 = 1,\ p = 1.$$

Таким образом, мы имеем:

$$D_x^3(f) = f'''\, y'^3 + 3f''\, y'\, y'' + f'\, y'''.$$

1.4.3. Дифференциальные функции нескольких переменных. Пусть мы имеем дело с несколькими алгебраически независимыми переменными:

$$x = \{x^i\}, \quad u = \{u^\alpha\}, \quad u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}, \quad u_{(2)} = \{u_{ij}^\alpha\}, \dots, \tag{1.4.8}$$

где индекс i пробегает все значения от 1 до n, а α — от 1 до m. Предполагается, что переменные u_{ij}^α, и т. д. симметричны по нижнему индексу, т. е. $u_{ij}^\alpha = u_{ji}^\alpha$.

Для любого $i = 1, \dots, n$ мы вводим оператор

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \cdots \tag{1.4.9}$$

и называем его *полное дифференцирование* по x^i. Оператор D_i — это формальная сумма бесконечного числа слагаемых. Однако он обрезается, действуя на любую функцию конечного числа переменных x, u, $u_{(1)}, \dots$ В результате полное дифференцирование D_i однозначно определено на множестве всех функций, зависящих от конечного числа переменных x, u, $u_{(1)}, \dots$ Например, нетрудно убедиться, что

$$D_i(x^k) = \delta_i^k, \quad D_i(u^\beta) = u_i^\beta, \quad D_i(u_k^\beta) = u_{ik}^\beta, \quad D_i\bigl(f(u^1)\bigr) = \frac{df}{du^1}\, u_i^1,$$

где δ_i^k — символы Кронекера, задаваемые с помощью выражений

$$\delta_i^k = 1 \ \text{ при } \ i = k; \qquad \delta_i^k = 0 \ \text{ при } \ i \neq k.$$

Итак, хотя переменные (1.4.8) *алгебраически независимы*, они связаны следующими *дифференциальными соотношениями*:

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), \quad u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \ldots \tag{1.4.10}$$

Величины x^i называются *независимыми переменными*, тогда как u^α называются *дифференциальными переменными* с последовательными *производными* $u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha, \ldots$ первого, второго и последующих порядков, в соответствии с соотношениями (1.4.10). Я называю аналитическую функцию конечного числа переменных $x, u, u_{(1)}, \ldots$ *дифференциальной функцией*. Максимальный порядок p производной, входящей в дифференциальную функцию $f = f(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(p)})$, называется *порядком* этой функции и обозначается $\operatorname{ord} f$. Если f — дифференциальная функция порядка p, тогда ее полные производные D_i — дифференциальные функции порядка $p+1$. Множество всех дифференциальных функций конечного порядка, наделенных операторами дифференцирования dD_i (1.4.9), называется *пространством дифференциальных функций* и обозначается $\mathcal{A}$.

1.4.4. Наглядное представление дифференциальных уравнений. Пусть $F \in \mathcal{A}$ — дифференциальная функция порядка p. Уравнение

$$F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(p)}) = 0 \tag{1.4.11}$$

определяет поверхность в пространстве переменных $x, u, \ldots, u_{(p)}$. Концепция дифференциального уравнения заключает в себе две совершенно разные составляющие, а именно:

а) *поверхность* (1.4.11) в пространстве $x, u, \ldots, u_{(p)}$ назовем *каркасом дифференциального уравнения* (см. рис. 1.2) [1]);

б) *класс решений* диктуется математическим или физическим содержанием дифференциального уравнения.

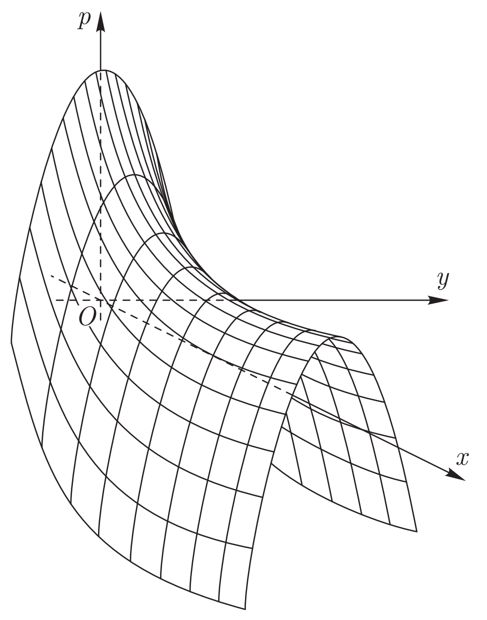


Рис. 1.2. Каркас уравнения Риккати $y' + y^2 - 2/x^2 = 0$, $p = y'$

В классической литературе решения дифференциальных уравнений связывали исключительно с функциями, дифференцируемыми достаточное число раз. Задачи современной математики и физики требуют, чтобы концепция решений была расширена путем рассмотрения *обобщенных решений* (распределений) вместо классических решений.

[1]) Каркас (frame) представляет собой криволинейную поверхность (1.4.11) в фазовом пространстве $x, u, \ldots, u_{(p)}$ и дает наглядное представление об ограничениях, накладываемых на движение изображающей точки этого пространства при выполнении уравнения (1.4.11). — *Прим. ред.*

Решающим приемом, используемым для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, является упрощение формы каркаса с помощью замены переменных. Групповой анализ, введенный Софусом Ли, дает метод нахождения необходимой замены переменных. Получив инфинитезимальные симметрии, мы просто вводим так называемые *канонические переменные*. Это упрощает уравнение, преобразуя его каркас в цилиндр. При этом явная зависимость от одной из переменных, x или y, исчезает.

В качестве примера рассмотрим уравнение Риккати (рис. 1.2). Мы выпрямим криволинейную поверхность, изображенную на рис. 1.2, в цилиндр, показанный на рис. 1.3. Уравнение Риккати

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

является инвариантом при растяжении

$$\overline{x} = ax, \quad \overline{y} = \frac{y}{a} \cdot$$

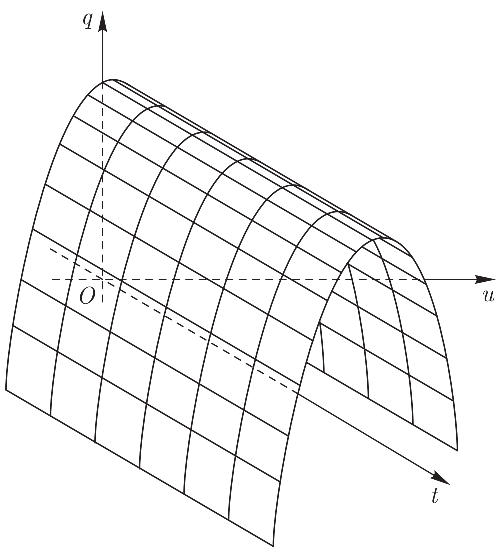


Рис. 1.3. Каркас уравнения $u' + u^2 - u - 2 = 0,\ q = u'$

Групповой анализ Ли позволяет без труда найти канонические переменные t и u, определяемые заменой

$$t = \ln x, \quad u = xy.$$

В этих переменных уравнение Риккати приобретает вид

$$u' + u^2 - u - 2 = 0.$$

Каркас полученного уравнения в координатах t, u, $u' = q$, — параболический цилиндр $q + u^2 - u - 2 = 0$ с образующей вдоль t. Итак, гиперболический параболоид рисунка 1.2 выпрямляется с помощью перехода к каноническим переменным.

Подобный подход продуктивен для всех уравнений (обыкновенных и с частными производными) с известными симметриями. Для этой цели в нашей книге применяется метод группового анализа Ли.

1.4.5. Преобразование производных. Начнем со случая одной независимой переменной x и одной зависимой переменной y. Рассмотрим замену переменных

$$\overline{x} = \varphi(x, y), \quad \overline{y} = \psi(x, y). \tag{1.4.12}$$

Теорема 1.4.1. Замена переменных (1.4.12) предполагает изменение полного дифференциала:

$$D_x = D_x(\varphi)\, D_{\overline{x}}, \tag{1.4.13}$$

где D_x и $D_{\overline{x}}$ — операторы полного дифференцирования по x и $\overline{x}$, соответственно, и следующие преобразования последовательного ряда производных:

$$\overline{y}' = \frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}, \quad \overline{y}'' = \frac{D_x(\varphi)D_x^2(\psi) - D_x(\psi)D_x^2(\varphi)}{[D_x(\varphi)]^3}, \ldots, \tag{1.4.14}$$

где $\overline{y}' = d\overline{y}/d\overline{x}$, $\overline{y}'' = d\overline{y}'/d\overline{x}$.

Доказательство. Изменение полного дифференциала (1.4.13) получается из первого уравнения (1.4.12) с помощью правила дифференцирования сложной функции. Чтобы доказать первое уравнение (1.4.14), достаточно применить правило (1.4.13) ко второму уравнению (1.4.12) и получить $D_x(\varphi)D_{\overline{x}}(\overline{y}) = D_x(\psi)$. С другой стороны, можно провести следующие вычисления:

$$\frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}} = \frac{\psi_x\,dx + \psi_y\,dy}{\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy} = \frac{(\psi_x + y'\psi_y)\,dx}{(\varphi_x + y'\varphi_y)\,dx} = \frac{\psi_x + y'\psi_y}{\varphi_x + y'\varphi_y} = \frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}\,.$$

Второе уравнение (1.4.14) и производные более высокого порядка получаются применением процедуры итерации:

$$\frac{d\overline{y}'}{d\overline{x}} = \frac{D_x(\overline{y}')}{D_x(\varphi)} = \frac{1}{D_x(\varphi)}\,D_x\left(\frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}\right).$$

Пример 1.4.1. Правило дифференцирования обратной функции (1.2.4) просто вытекает из формулы (1.4.14), примененной после замены переменных

$$\overline{x} = y, \quad \overline{y} = x.$$

Действительно, поскольку $\varphi = y$, $\psi = x$, уравнения (1.4.13) и (1.4.14) записываются так:

$$D_x = y'\,D_{\overline{x}}$$

и

$$\overline{y}' = \frac{1}{y'}, \quad \overline{y}'' = -\frac{y''}{y'^3}$$

соответственно.

Вернемся к общему случаю нескольких переменных и рассмотрим замену переменных

$$\overline{x}^i = \varphi^i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4.15}$$

$$\overline{u}^\alpha = \psi^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{1.4.16}$$

В дифференциальной алгебре соответствующая замена производных легко получается следующим образом. Заметим, что изменение независимых переменных (1.4.15) приводит к следующему соотношению между полными дифференцированиями D_i и $\overline{D}_i$ по отношению к старым и новым переменным соответственно (см. (1.4.13)):

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} D_i(\varphi^j)\,\overline{D}_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.4.17}$$

Затем мы дифференцируем обе части уравнения (1.4.16), используя уравнение $\overline{u}_i^\alpha = \overline{D}_i(\overline{u}^\alpha)$, и, опуская знак суммирования, записываем результат в форме

$D_i(\psi^\alpha) = D_i(\varphi^j)\,\overline{D}_j(\overline{u}^\alpha) = \overline{u}_j^\alpha\, D_i(\varphi^j)$. Таким образом, замена в производных первого порядка определяется соотношением

$$\overline{u}_j^\alpha D_i(\varphi^j) = D_i(\psi^\alpha), \tag{1.4.18}$$

или

$$\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} + u_i^\beta\, \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^\beta}\right)\overline{u}_j^\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta\, \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^\beta}\,.$$

Остается решить последнее уравнение относительно $\overline{u}_j^\alpha$. Повторное дифференцирование уравнения (1.4.18) приводит к преобразованиям производных второго порядка и т. д.

Пример 1.4.2. Пусть t, x — две независимые переменные и u — зависимая переменная. Введем новые независимые переменные τ, ξ и зависимую переменную v, используя замену

$$\tau = t, \quad \xi = u, \quad v = x.$$

Уравнения (1.4.17) и (1.4.18) дают:

$$D_t = D_\tau + u_t D_\xi, \quad D_x = u_x D_\xi$$

и

$$0 = v_\tau + u_t\, v_\xi, \quad 1 = u_x\, v_\xi$$

соответственно. Таким образом, замена производных первого порядка имеет вид

$$u_t = -\frac{v_\tau}{v_\xi}, \quad u_x = \frac{1}{v_\xi}\,.$$

1.5. Вариационное исчисление

1.5.1. Принцип наименьшего действия. *Вариационный принцип Гамильтона* или *принцип наименьшего действия* гласит: движение механической системы, обладающей *кинетической энергией* $T(t,q,v)$ и *потенциальной энергией* $U(t,q)$, подчиняется требованию: траектории частиц системы [1]) соответствуют экстремуму *интеграла действия*

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t,q,v)\,dt, \tag{1.5.1}$$

где $L(t,q,v) = T - U$ называется *лагранжианом* системы. Здесь t — время, за $q = (q^1,\ldots,q^s)$ обозначены координаты точек системы, а $v = \dot{q} \equiv dq/dt$ — их скорости. Действие определено на совокупности функций $q^\alpha = q^\alpha(t)$ таких, что интеграл существует на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

---

[1]) Под траекториями частиц системы автор имеет в виду траектории изображающей точки в пространстве координат, точнее, обобщенных координат, число которых равно минимальному числу геометрических параметров, однозначно определяющих положение механической системы, и соответствующих им обобщенных скоростей. — *Прим. ред.*

Рассмотрим вариацию координаты q точки, когда она перемещается в положение $q + \delta q$. Предполагается, что приращение есть функция $\delta q = \delta q(t)$ такая, что она мала на всем интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и обращается в нуль на границе, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Дифференцирование дает $\delta v = d\big[\delta q(t)\big]/dt$. Это вызывает следующую вариацию интеграла действия (1.5.1): $\int\limits_{t_1}^{t_2}[L(t, q + \delta q, v + \delta v) - L(t, q, v)]dt$. Разложение подынтегрального выражения в ряд по приращениям δq и δv дает главную линейную часть δS (суммирование по $\alpha = 1, \ldots, s$):

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\,\delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\,\delta v^\alpha\right) dt.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, имеем:

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right)\right] \delta q^\alpha\, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\delta q^\alpha\right]_{t_1}^{t_2},$$

или, учитывая граничные условия $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$:

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right)\right] \delta q^\alpha\, dt, \quad \text{где} \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + v^\alpha\,\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot{v}^\alpha\,\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\,.$$

Необходимое условие того, что интеграл (1.5.1) принимает экстремальное значение, состоит в том, что $\delta S = 0$. Поскольку интервал времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и малые приращения δq^α произвольны, отсюда следует:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s. \tag{1.5.2}$$

Дифференциальные уравнения (1.5.2) называют *уравнениями Эйлера–Лагранжа*. Таким образом, траектория $q = q(t)$ механической системы [1)] с лагранжианом $L(t, q, v)$ находится в результате решения уравнений Эйлера–Лагранжа (1.5.2).

1.5.2. Уравнения Эйлера–Лагранжа в случае нескольких переменных. Случай нескольких независимых переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и зависимых (дифференциальных) переменных $u = (u^1, \ldots, u^m)$ описывается подобным образом. Будем использовать дифференциально-алгебраические обозначения и терминологию.

[1)] См. предыдущее примечание. — *Прим. ред.*

Пусть $L \in \mathcal{A}$ — дифференциальная функция первого порядка. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный n-мерный объем в пространстве независимых переменных x с границей ∂V. *Действие* есть интеграл

$$l[u] = \int\limits_V L(x, u, u_{(1)})\, dx. \tag{1.5.3}$$

Он называется также *вариационным интегралом*. Вариация $\delta l[u]$ интеграла (1.5.3), вызванная вариацией $u + h(x)$ от первоначального значения u, определяется как главная линейная часть (по h) интеграла $\int\limits_V [L(x, u + h, u_{(1)} + h_{(1)}) - L(x, u, u_{(1)})]\, dx$ и имеет вид:

$$\delta l[u] = \int\limits_V \left[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\, h^\alpha + \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\, h_i^\alpha\right] dx.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, имеем:

$$\delta l[u] = \int\limits_V \left[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)\right] h^\alpha\, dx + \int\limits_V D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\, h^\alpha\right) dx.$$

Используя теорему о дивергенции (1.3.18), получаем:

$$\delta l[u] = \int\limits_V \left[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)\right] h^\alpha\, dx + \int\limits_{\partial V} \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\, h^\alpha \nu^i\, dx,$$

где $\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$ — единичная внешняя нормаль к ∂V. Учитывая, что функции $h^\alpha(x)$ обращаются в нуль на границе ∂V, мы приходим к следующему:

$$\delta l[u] = \int\limits_V \left[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)\right] h^\alpha\, dx.$$

Функция $u = u(x)$ называется *экстремумом* вариационного интеграла (1.5.3), если $\delta l[u(x)] = 0$ для любого объема V и любого инкремента $h = h(x)$, обращающегося в нуль на ∂V. Из вышеприведенного выражения для $\delta l[u]$ следует, что необходимым условием того, чтобы u принимало экстремальное значение, является выполнение *уравнений Эйлера–Лагранжа*:

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{1.5.4}$$

Уравнения (1.5.4) представляют собой в общем случае систему m уравнений с частными производными второго порядка. $\delta L/\delta u^\alpha$ называют *вариационной производной*.

Задачи к главе 1

1.1. Во сколько раз площадь поверхности северной полусферы Земли больше площади ее экваториального сечения?

1.2. Найти обратные гиперболические функции

$$\text{а)}\quad t = \operatorname{arcsh} x, \qquad \text{б)}\quad t = \operatorname{arcth} x, \qquad \text{в)}\quad t = \operatorname{arcch} x,$$

решая следующие уравнения относительно t:

$$x = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad x = \operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot$$

1.3. Доказать формулу (1.1.7):

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot$$

Найти отношение, подобное (1.1.7), между обратными гиперболическими функциями $\operatorname{arcsh} x$ и $\operatorname{arcth} x$.

1.4. Решить кубическое уравнение $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$.

1.5. Вычислить каждый из следующих интегралов ($k, m \geqslant 0$ — любые целые числа):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx, \quad m \neq k,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx, \quad m \neq k,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(mx)\,dx, \quad m, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

1.6. Получить разложение Маклорена (1.2.20) для функции $1/(1 - x)$.

1.7. Получить разложение Маклорена (1.2.34) для функции ошибки $\operatorname{erf}(x)$, используя ее определение (1.1.12).

1.8. Проверить выполнение условия функциональной независимости для следующих функций f, g и h от трех переменных x, y, z:

$$\text{а)}\quad f = \sqrt{x^2 - y^2}\,, \quad g = \sqrt{y^2 - z^2}\,, \quad h = x^2 - z^2;$$

$$\text{б)}\quad f = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad g = \sqrt{y^2 + z^2}\,, \quad h = x^2 + z^2;$$

$$\text{в)}\quad f = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad g = \sqrt{y^2 + z^2}\,, \quad h = x^2 - z^2.$$

1.9. Продифференцировать гиперболические функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{th} x$.

1.10. Проверить, являются ли линейно независимыми следующие функции:

а) $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x};$

б) $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \operatorname{ch} x, \quad y_3(x) = \operatorname{sh} x;$

в) $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = \operatorname{sh} x;$

г) $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \operatorname{ch} x, \quad y_3(x) = \operatorname{th} x;$

д) $y_1(x) = \operatorname{sh} x, \quad y_2(x) = \operatorname{ch} x, \quad y_3(x) = \operatorname{th} x.$

1.11. Вычислить: а) $e^{i\pi}$, б) $e^{i(\pi/2)}$, в) $i^{\,i}$.

1.12. Найти дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{x}$ и ротор $\nabla \times \mathbf{x}$ вектора положения $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

1.13. Пусть ϕ, ψ и $\mathbf{a}$ — скалярные и векторное поля соответственно. Вычислить

а) $\nabla \times (\nabla\, \phi) \equiv \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi),$

б) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \equiv \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}),$

в) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \equiv \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{x}),$

г) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \equiv \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{a}),$

д) $\nabla \cdot (\phi\, \nabla\, \psi - \psi\, \nabla\, \phi).$

1.14. Преобразовать в поверхностный интеграл следующий интеграл по объему:

$$\int\limits_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi)\, dx\, dy\, dz.$$

1.15. Получить выражения (1.4.14) для изменения первой и второй производной.

1.16. Найти преобразование первой и второй производной при замене переменных $\overline{x} = e^x$, $\overline{y} = 1/y$.

1.17. Найти преобразование третьей производной y''' при замене переменных $\overline{x} = y$, $\overline{y} = x$ (см. пример (1.4.1)).

1.18. Решить уравнение $w^3 + 1 = 0$.

1.19. Доказать теорему о главном значении для определенных интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b - a), \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

1.20. Доказать, что если $g(x)$ не меняет знак при $a \leqslant x \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\, dx$, для некоторого ξ, такого, что $a \leqslant \xi \leqslant b$.

1.21. Получить сферически инвариантное решение для уравнения Лапласа, рассмотренного в примере 1.3.1, для функций $\phi = \phi(r)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа (1.3.20), $\Delta\phi = 0$.

1.22. Продифференцировать уравнения (1.2.45).

1.23. Доказать лемму 1.1.1.

1.24. Показать, что преобразование (1.1.54) отображает уравнение (1.1.39) на уравнение вида (1.1.55).

1.25. В соответствии с замечанием 1.1.8, эллиптические и гиперболические кривые связаны комплексными линейными преобразованиями. Следовательно, уравнение (1.2.70) для окружностей и уравнение (1.2.71) для гипербол должны быть связаны комплексным преобразованием. Найти это комплексное преобразование.

1.26. Доказать правило дифференцирования детерминантов, приведенное в разделе 1.3.6.

1.27. Согласно уравнениям (1.1.16), площадь поверхности ω_n единичной сферы в n-мерном пространстве записывается в терминах гамма-функции следующим образом:

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Пусть при этом $n = 2$ и $n = 3$. Получить широко известное выражение для длины окружности единичного радиуса на плоскости и для площади поверхности единичной сферы в трехмерном пространстве соответственно.

1.28. Доказать первое уравнение (1.1.15), $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

1.29. Вычислить $\Gamma(-1/2)$.

1.30. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-s^2} ds$ подстановкой $t = s^2$ в определение (1.1.14) функции $\Gamma(x)$, полагая $x = 1/2$.

1.31. Объяснить, почему формула (1.2.52) замены переменных в кратных интегралах содержит абсолютное значение якобиана J, в то время как подобная формула (1.2.11) в одномерном случае не содержит.

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Дифференциальные уравнения, в полном смысле слова, возникли в математике в 1680-е годы в работах создателей дифференциального и интегрального исчисления. Термин *дифференциальное уравнение* был впервые упомянут Г.В. Лейбницем в письме к И. Ньютону (1676) и затем использовался в публикациях Лейбница, начиная с 1684 года. *Начала* [20] Ньютона содержат многочисленные дифференциальные уравнения, полученные и проинтегрированные в рамках элементарной геометрии. С тех пор формулировка фундаментальных законов природы и задач техники в форме строгих математических моделей часто, точнее, преимущественно дается в терминах дифференциальных уравнений.

Дополнительная литература: Курант Р., Гильберт Д. [14, 15], Неймарк Ю.И. [18], Greenberg M.D. [36], Ibragimov N.H. [40], Мари Дж. [17, 45], Simmons G.F. [46].

2.1. Введение

Дифференциальные уравнения содержат независимые и зависимые переменные, а также их производные. Говорят, что дифференциальное уравнение имеет порядок n, если оно включает производные этого порядка, но не более высокого. Если зависимые переменные являются функциями одной независимой переменной, уравнения называют *обыкновенными дифференциальными уравнениями* (ОДУ). Широко известный второй закон Ньютона для частицы во внешнем силовом поле $\mathbf{F}$

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \tag{2.1.1}$$

точно относится к этой категории. Здесь время t — независимая переменная, m и $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ обозначают массу частицы (в общем случае m может не быть постоянной) и вектор ее скорости соответственно. Уравнение Ньютона (2.1.1) — это система трех уравнений первого порядка относительно компонент скорости v^i, выступающих в роли зависимых переменных, если предположить, что сила $\mathbf{F}$ зависит только от t и $\mathbf{v}$. Однако если $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, то мы имеем уравнение второго порядка (2.1.1) для каждой из компонент вектора положения частицы $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Действительно, рассмотрим для простоты случай постоянной массы m и подставим $\mathbf{v} = \mathbf{x}'$, где штрих обозначает дифференцирование по t. Тогда уравнение (2.1.1) перепишется в виде следующей системы трех уравнений второго порядка:

$$m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{2.1.2}$$

Если, с другой стороны, неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных, то тогда рассматриваемые уравнения содержат независимые переменные, зависимые переменные и их частные производные и мы имеем дело с *дифференциальными уравнениями с частными производными* (ЧДУ). Известным представителем уравнений этой категории является уравнение Д'Аламбера для малых поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.1.3}$$

где k^2 — положительная константа. Это дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка имеет в качестве независимых переменных время t и координату x вдоль струны. Его также называют одномерным волновым уравнением.

Модель малых поперечных колебаний однородного тонкого стержня описывается дифференциальным уравнением с частными производными четвертого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f, \tag{2.1.4}$$

где f — суммарная сила, действующая на стержень, а μ — положительная константа.

Математическая модель тепловой диффузии, согласно Ж.Б.Ж. Фурье (1811), описывается уравнением с частными производными, известным как *уравнение теплопроводности*. Одномерное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2.1.5}$$

2.2. Природные явления

2.2.1. Модели популяции. Томас Роберт Мальтус, основатель математического моделирования демографических задач, предложил в *Очерке о принципе популяции, как она влияет на будущее развитие общества* (1798) свой примечательный принцип популяции. Математически его модель весьма проста и основана на естественном предположении, что рост популяции пропорционален самой величине популяции P. Соответственно это формулируется в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{2.2.1}$$

Таким образом, принцип Мальтуса приводит к *неограниченному росту* популяции по экспоненциальному закону:

$$P(t) = P_0\, e^{\alpha(t-t_0)}, \tag{2.2.2}$$

где P_0 и $P(t)$ обозначают популяцию в миллионах особей в начальный момент времени $t = t_0$ и в произвольный момент времени t, соответственно. Главный вывод из *Очерка* состоял в том, что построению «счастливого» общества всегда будет препятствовать универсальная тенденция особей популяции обогнать друг друга в борьбе за средства существования.

Однако вскоре стало очевидно, что модель Мальтуса не отражает реальности и требует модификации. Впоследствии было рассмотрено несколько модифицированных моделей динамики популяции в попытке найти более реалистичный закон ее развития. Один из них, известный как *логистический закон*, описывается следующим нелинейным уравнением:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const} \neq 0, \tag{2.2.3}$$

где нелинейный член βP^2 можно интерпретировать как своего рода *социальное трение*. Анализ этого закона показывает, что он адекватно описывает популяции насекомых. Однако его значение как общего «закона» роста популяции весьма ограничено, если рассматривать человеческую популяцию.

Модель хищника и жертвы, которую предложили А. Лотка (1925) и В. Вольтерра (1926), формулируется с помощью системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x, \quad \frac{dy}{dt} = (kx - l)y, \tag{2.2.4}$$

где a, b, k и l — положительные константы. Здесь y обозначает число хищников, а x — их жертв. Предполагается, что популяция жертв составляет весь запас пищи для хищников. Качественный анализ решений вышеуказанной системы показывает, например, что любая биологическая система, описываемая уравнениями модели хищника и жертвы (2.2.4), имеет в качестве предела постоянную либо периодически изменяющуюся популяцию.

2.2.2. Экология. Радиоактивные отходы. Радиоактивность — это следствие расщепления элементов, обладающих большим атомным весом, таких как урановые руды. Открытие радиоактивности дало новые знания, например позволило определять геологическое время и др. Искусственная радиоактивность широко используется в практических целях — в химии, медицине, ядерной энергетике и т. д. Однако промышленное использование ядерной энергии требует от населения выполнения жестких требований безопасности в связи с угрозой загрязнения продуктами радиоактивных отходов.

Математическое описание радиоактивного распада основано на предположении, что интенсивность распада пропорциональна количеству радиоактивного вещества. Таким образом, математическая модель имеет вид (2.2.1):

$$\frac{dU}{dt} = -kU. \tag{2.2.5}$$

Здесь U — количество радиоактивного вещества, имеющееся в момент времени t, а k — положительная константа. Решение уравнения (2.2.5) имеет форму

$$U(t) = U_0\, e^{-k(t-t_0)}, \tag{2.2.6}$$

где U_0 — начальное ($t = t_0$) количество вещества. Эмпирическая константа k зависит от радиоактивных свойств распадающегося вещества. Обычно она определяется в терминах так называемого *времени полураспада*, определяемого как интервал времени $\Delta t = t - t_0$, в течение которого количество вещества уменьшается вдвое по сравнению с первоначальным.

Пример 2.2.1. Известно, что время полураспада *радия* равно $\Delta t = 1\,600$ годам. Следовательно, согласно формуле (2.2.6), $U_0/2 = U_0\,e^{-1600k}$, откуда $k = (\ln 2)/1600 \approx 0{,}00043$. Таким образом, радиоактивный распад радия за t лет удовлетворяет соотношению

$$U(t) = U_0\,e^{-\frac{\ln 2}{1600}\,t}.$$

2.2.3. Законы Кеплера. Гравитационный закон Ньютона. Наблюдаемое движение планет кажется нерегулярным и сложным. Однако в отдаленном прошлом было очевидно, что устройство небес должно являть пример математической красоты. Это возможно только, если планеты движутся по круговым орбитам. Древние греки считали, что все планеты, включая Землю, движутся вокруг Солнца по окружностям. Однако И. Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам, а не по окружностям, и Солнце находится в одном из фокусов эллипса, а не в центре. В 1609 году он сформулировал два основных принципа современной астрономии: *первый* (рис. 2.1) и *второй* (рис. 2.2) *законы Кеплера*. Третий закон Кеплера, опубликованный в 1619 году, утверждает, что отношение T^2/R^3 квадрата периода T к кубу среднего расстояния R от Солнца для всех планет совпадает.

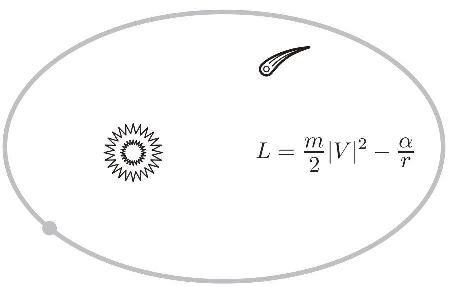


Рис. 2.1. Первый закон Кеплера: орбитой планеты является эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце

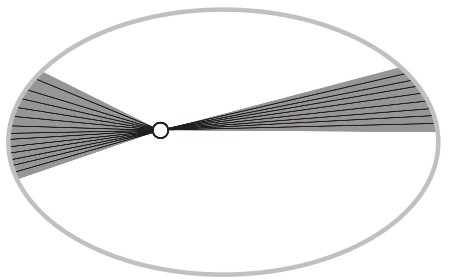


Рис. 2.2. Второй закон Кеплера: площади, ометаемые за равные интервалы времени линией, соединяющей Солнце и планету, равны между собой

Законы Кеплера сводят задачу о движении планет к геометрии и открывают на новом уровне математическую гармонию природы. С практической точки зрения существенно, что Кеплер получил ответ на вопрос *как* движутся планеты, основываясь на эмпирической астрономии. Геометрия небес, описанная законами Кеплера, бросила вызов ученым, побуждая их ответить на вопрос: *почему* планеты подчиняются этим законам. Для этого потребовалось изучить динамику Солнечной системы. Описание такой динамики предложил Галилео Галилей, а Ньютон в своих «Началах» довел его до уровня современной механики.

В соответствии с гравитационным законом Ньютона сила притяжения между Солнцем и планетой имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{r^3}\,\mathbf{x}, \quad \alpha = -GmM, \tag{2.2.7}$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, m и M — массы планеты и Солнца соответственно, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — радиус-вектор планеты, которую мы считаем точкой, а $r = |\mathbf{x}|$ — расстояние планеты от Солнца. Таким образом, пренебрегая движением Солнца под действием притяжения планеты, получаем из второго закона Ньютона (2.1.2):

$$m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\alpha}{r^3}\,\mathbf{x}, \quad \alpha = \mathrm{const}. \tag{2.2.8}$$

Задача интегрирования уравнений (2.2.8) носит название *задачи Кеплера*. Ньютон получил законы Кеплера, решая дифференциальные уравнения (2.2.8). Однако можно показать, что законы Кеплера являются прямым следствием специфических симметрий ньютоновых гравитационных сил. В частности, первый и второй законы Кеплера могут быть получены, минуя интегрирование нелинейных уравнений (2.2.8), из условий сохранения двух векторных полей, а именно из сохранения углового момента

$$\mathbf{M} = m(\mathbf{x} \times \mathbf{v}), \tag{2.2.9}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \equiv d\mathbf{x}/dt$ — вектор скорости, и сохранения величины, известной как вектор Лапласа

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v} \times \mathbf{M}] + \frac{\alpha}{r}\,\mathbf{x}. \tag{2.2.10}$$

2.2.4. Свободное падение тела вблизи Земли. Рассмотрим свободное падение тела в предположении, что притяжение вблизи Земли постоянно и что сила тяжести — единственная сила, действующая на это тело. Пусть $m = \mathrm{const}$ — масса объекта, h — его высота над Землей, t — время и

$$g \approx 981 \text{ см/с}^2$$

— *ускорение гравитации* вблизи Земли. В этих обозначениях гравитационная сила есть $F = -mg$ и уравнение Ньютона (2.1.2) записывается в виде

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g.$$

Это — уравнение в форме (1.2.60) с константой $f = -g$. Следовательно, интегрирование (1.2.61) дает

$$h = -\frac{g}{2}\,t^2 + C_1 t + C_2.$$

Полагая в этом решении $t = 0$ и вычисляя скорость $v \equiv h' = gt + C_1$, мы выясняем физический смысл констант интегрирования, а именно, $C_2 = h_0$ — это начальное положение тела и $C_1 = v_0$ — его начальная скорость. Таким образом, траектория падения тела находится так:

$$h = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0 t + h_0. \tag{2.2.11}$$

Упражнение 2.2.1. Пусть тело падает из состояния покоя ($v_0 = 0$) с высоты h_0. Найдем конечную скорость v_*, т. е. скорость, с которой тело достигнет Земли.

Решение. Согласно формуле (2.2.11), $h = h_0 - gt^2/2$, $v = -gt$. Обозначая t_* момент времени, когда тело достигнет Земли ($h = 0$), и v_* — его скорость в этот момент, получаем: $v_* = -gt_*$, $h_0 = gt_*^2/2$, откуда, исключив t_*, имеем:

$$v_* = -\sqrt{2gh_0}\,. \tag{2.2.12}$$

Появление знака минус отражает тот факт, что ось $\mathbf{h}$ направлена вверх от поверхности Земли, в то время как тело падает на Землю.

2.2.5. Метеороид. Падение протяженного тела (метеороида) до того, как оно войдет в атмосферу Земли, определяется вторым законом динамики Ньютона (2.1.1) с учетом установленного им *закона обратного квадрата*, в соответствии с которым метеороид и Земля притягивают друг друга с силой $F = GmM/r^2$, где

$$G = 6{,}67 \times 10^{-8}\ \text{см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$$

— универсальная гравитационная постоянная, m и M обозначают массы метеороида и Земли, а r — расстояние между их центрами. Пусть R обозначает радиус Земли. Тогда значение притягивающей силы на поверхности Земли есть $F = GmM/R^2$. С другой стороны, сила притяжения вблизи Земли (т. е. *вес* тела, имеющего массу m) записывается как mg. Отсюда следует уравнение $mg = GmM/R^2$, или $GmM = mgR^2$. Следовательно, объект притягивается к Земле с силой $F = mgR^2/r^2$.

Масса m метеороида постоянна до его входа в земную атмосферу. Будем пренебрегать сопротивлением среды и предполагать, что масса метеороида не изменяется на всей траектории его падения. Тогда уравнение (2.1.2) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{gR^2}{r^2}\,. \tag{2.2.13}$$

Знак «минус» появился в связи с тем, что вектор $\mathbf{r}$ направлен от Земли к метеороиду, то есть противоположно направлению силы гравитационного притяжения.

Упражнение 2.2.2. Понизить порядок уравнения (2.2.13).

Решение. Записывая $dr/dt = v(r)$ и замечая, что

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = v\,\frac{dv}{dr} \equiv \frac{1}{2}\,\frac{d(v^2)}{dr},$$

перепишем уравнение (2.2.13) в форме

$$\frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{2gR^2}{r^2}\,.$$

Интегрируем это уравнение, принимая во внимание, что в наших обозначениях скорость отрицательна, и получаем:

$$v = -\sqrt{\frac{2gR^2}{r} + C}\,, \quad C = \text{const}. \tag{2.2.14}$$

Упражнение 2.2.3. Найти конечную скорость v_* (т. е. скорость на поверхности Земли) метеороида, падающего из бесконечно удаленной точки, в которой он находился в покое.

Решение. Вычислим сначала константу интегрирования в (2.2.14) в предположении, что первоначально ($t = 0$) метеороид покоился ($v_0 = 0$) на расстоянии r_0 от центра Земли. Полагая $t = 0$ и, следовательно, $v = 0$ в (2.2.14), получаем $C = -2gR^2/r_0$, и формула (2.2.14) приобретает вид:

$$v = -R\sqrt{2g}\,\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}\,.$$

Полагая $r_0 = \infty$ и $r = R$, получаем конечную скорость:

$$v_* = -\sqrt{2gR}\,. \tag{2.2.15}$$

Таким образом, метеороид достигнет поверхности Земли с той же скоростью, какую будет иметь тело, падающее с высоты h_0, равной радиусу R Земли (сравните (2.2.15) с (2.2.12)).

2.2.6. Модель падения дождя. Идея предложить простую модель этого природного явления пришла мне в голову во время полета на небольшом аэроплане среди толстых облаков причудливой формы над Африкой.

Для начала позвольте мне сообщить некоторые сведения об облаках, необходимые на первой стадии выбора предлагаемой модели. Типичная толщина облаков, способных вызвать осадки, от 100 м до 4 км, но очень толстые (*дождевые облака*) могут достигать 20 км. Как упрощение, необходимое для построения математической модели дождя, давайте представим две последовательные стадии явления. На первой стадии происходит *скопление дождевых капель в облака*, а на второй — *падение капель дождя в воздухе*.

1. Скопление капель. Сбор дождевых капель в облака будем моделировать свободным падением к земле сферической массы воды во влажной атмосфере под действием гравитационной силы.

Масса m капли увеличивается за счет конденсации с инкрементом, пропорциональным времени и площади поверхности капли, то есть $dm = 4\pi k r^2\,dt$, где r — радиус капли и k — эмпирическая константа. С другой стороны, масса сферической капли воды (с плотностью $\rho = 1$) равна $m = 4\pi r^3/3$, откуда $dm = 4\pi r^2\,dr$. Следовательно, $dr = k\,dt$, и второй закон Ньютона (2.1.1), в котором $F = -mg$, запишется следующим образом:

$$k\,\frac{d(r^3 v)}{dr} = -gr^3. \tag{2.2.16}$$

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $v = v_0$ при $r = r_0$, имеет вид

$$v = -\frac{gr}{4k}\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) + \frac{r_0^3}{r^3}\,v_0. \tag{2.2.17}$$

Типичная капелька в облаке имеет радиус $r_0 \approx 10$ мкм, в то время как у капли дождя, достигающей земли, радиус около 1 мм. Предположим, что в нашей упрощенной модели начальный радиус r_0 капли пренебрежимо мал.

Тогда мы подставим $r_0 = 0$ в решение (2.2.17) и получим $v = -gr/(4k)$. С учетом того, что $r = kt$, мы можем написать

$$v = -\frac{1}{4}\,gt. \tag{2.2.18}$$

Итак, величина $|v|$ скорости дождевых капель на стадии образования облака возрастает линейно во времени.

2. Падающий дождь. Эта стадия моделирует падение дождевых капель в воздухе к земле. Допустим, что на объект действуют только силы гравитации и сопротивления воздуха, а остальными силами, к примеру, связанными с испарением падающей капли, будем пренебрегать.

Пусть сопротивление $f(v)$ зависит только от скорости v капель. Обозначим m массу дождевой капли в момент, когда она покидает облака, и предположим, что она остается неизменной во время падения, $m = \mathrm{const}$. Тогда скорость дождевой капли определяется, согласно второму закону Ньютона, дифференциальным уравнением первого порядка:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -mg + f(v), \tag{2.2.19}$$

с начальными условиями

$$v\big|_{t=t_*} = v_*, \tag{2.2.20}$$

где обозначение $|_{t=t_*}$ показывает, что величина вычисляется в момент $t = t_*$. Здесь t_* — момент, когда дождевая капля покидает облака, а v_* — конечная скорость в этот момент. При условии, что t_* и v_* найдены из решения задачи на первой стадии, мы получаем скорость дождевых капель с помощью решения *задачи с начальным условием* (2.2.19), (2.2.20).

Обычно предполагается, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости падающего объекта, если объект «не слишком мал» и если его скорость меньше, чем скорость распространения звука в среде, но не бесконечно мала. Однако при определенных условиях сопротивление воздуха можно также аппроксимировать линейной функцией скорости. Таким образом, допустимо рассматривать в качестве обоснованной модели дождя следующую простую форму уравнения (2.2.19):

$$m\,\frac{dv}{dt} = -mg - \alpha v + \beta v^2, \tag{2.2.21}$$

где $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ — эмпирические константы. Выбор знаков отражает тот факт, что сопротивление воздуха противоположно силе тяжести и что скорость $\mathbf{v}$ направлена вниз, а выбранная координата — вверх.

2.3. Физика и технические науки

2.3.1. Ньютонова модель охлаждения. Явление охлаждения (нагревания) с помощью окружающей среды широко используется в повседневной жизни. Можно погрузить некоторое тело для его охлаждения (нагревания) в среду, температура которой ниже (выше) температуры тела. Роль среды может выполнять окружающий воздух, большая холодная ванна, натопленная печь и пр., в то время как телом может быть термометр, горячая металлическая пластина, требующая охлаждения, плазма крови, хранящаяся при низкой температуре, которую необходимо нагреть перед использованием, молоко или другие жидкости. Предполагается, что можно пренебречь изменением температуры T резервуара, происходящим при погружении в него тела, то есть считать $T = \mathrm{const}$ или, в общем случае, считать T заданной функцией времени $T(t)$. Предполагается также, что температура τ погруженного тела одна и та же во всех его частях в каждый момент времени, так что $\tau = \tau(t)$. Тогда то, что известно как *закон охлаждения Ньютона*, состоит в том, что скорость изменения τ пропорциональна разности температур $T - \tau$. Ньютонов закон охлаждения записывается в виде следующего обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\tau}{dt} = k(T - \tau), \tag{2.3.1}$$

где k — положительная константа, зависящая от состава погруженного тела и от свойств окружающей среды.

Пример 2.3.1. Хороший пример представляет собой пастеризация. Напомним, что пастеризация — это частичная стерилизация молока без кипячения. Она основана на открытии Луи Пастера, согласно которому микробы в молоке временно теряют жизнеспособность, если каждая частица молока нагрета до 64 °C, а затем молоко подвергнуто быстрому охлаждению.

Представим себе, что образованный фермер решил впервые пастеризовать молоко, но, к сожалению, обнаружил, что его термометр разбит. Поскольку мы имеем дело с образованным фермером, то можем представить себе, что он решит задачу нагревания молока точно до 64°, имея в своем распоряжении только плиту и часы. Вместо разбитого термометра он воспользовался уравнением (2.3.1) следующим образом.

Вначале фермер определил коэффициент k. Для этого он поставил чашку молока, имеющего комнатную температуру $\tau_0 = 25$ °C, на плиту, установив температуру $T = 250$ °C и подождал, пока молоко закипит. Предположим, молоко закипело через 15 минут. Далее, пусть температура кипения молока равна 90 °C, и фермер использовал решение уравнения (2.3.1):

$$\tau = T - B\,e^{-kt}. \tag{2.3.2}$$

В начальный момент ($t = 0$) это уравнение упрощается до $25^\circ = 250^\circ - B$, что позволяет вычислить константу интегрирования, $B = 225^\circ$. Тогда решение в момент $t = 15$ мин дает уравнение:

$$90 = 250 - 225\,e^{-15k},$$

в котором мы рассматриваем только числовые значения. Следовательно, $15k = -\ln(160/225)$, или $k \approx 34/1500$. В итоге (2.3.1) приводит к следующей формуле для температуры молока, помещенного на плиту при температуре 250°:

$$\tau = 250 - 225\,e^{-34t/1500}.$$

При $\tau = 64$ она дает $-34t/1500 = \ln(186/225) \approx -0{,}19$, откуда $t \approx 8{,}4$ мин. Таким образом, фермер должен нагревать молоко на плите в течение 8 мин 24 с при температуре 250 °С.

Ньютонов закон охлаждения, приближенно адаптированный к реальным условиям, пригоден для моделирования, например, динамики температуры воздуха в здании. В самом деле, пусть температура внутри здания τ — неизвестная функция времени t. Пусть $T = T(t)$ — температура снаружи, рассматриваемая как заданная функция. Вначале заметим, что закон Ньютона (2.3.1), где k — *положительная* константа, находится в согласии с естественным ожиданием того, что температура внутри τ увеличивается ($d\tau/dt > 0$) при $T > \tau$ и уменьшается ($d\tau/dt < 0$) при $T < \tau$. Константа k имеет размерность t^{-1} и зависит от качества здания, в частности от его термоизоляции. В общем случае, $0 < k < 1$, и оно бесконечно мало для идеально изолированных зданий.

Предположим, что в здании есть радиатор и воздушный кондиционер. Обозначим $H(t)$ скорость увеличения температуры внутри здания, связанную с работой радиатора, и $A(t)$ — скорость изменения (увеличения или уменьшения) температуры, связанную с работой воздушного кондиционера. Предполагая, что только эти факторы влияют на температуру в здании, мы получаем следующую модификацию ньютонова закона охлаждения (2.3.1):

$$\frac{d\tau}{dt} = k[T(t) - \tau] + H(t) + A(t). \qquad (2.3.3)$$

В качестве примера уравнения (2.3.3) при условии $A(t) \neq 0$ давайте предположим, что печь нагревает здание с заданной скоростью $H(t) \geqslant 0$ и что здание снабжено термостатом для поддержания внутри него желаемой (*критической*) температуры τ_c. Если реальная температура $\tau(t)$ выше τ_c, воздушный кондиционер охлаждает воздух, в противном случае — нет. Тогда $A(t) = l[\tau_c - \tau]$, где l — положительный эмпирический параметр, и уравнение (2.3.3) записывается так:

$$\frac{d\tau}{dt} = k[T(t) - \tau] + H(t) + l[\tau_c - \tau] \qquad (2.3.4)$$

с заданными функциями $T(t)$ и $H(t)$ и константами k, τ_c, l.

Представим следующую ситуацию. В тихий холодный зимний вечер, когда снаружи температура удерживалась постоянной на уровне $T_0 = -10$ °С, электричество в вашем доме отключилось ровно в $t_0 = 6$ часов. Это вызвало прекращение работы вашего нагревателя и кондиционера на всю ночь. Предположим, что температура внутри в этот момент $t_0 = 6$ была $\tau_0 = 25$ °С. К сожалению, дверь и окна вашего здания не были хорошо теплоизолированы. Как следствие, потребовался только час, чтобы температура в доме упала до $\tau = 19{,}5$ °C.

Упражнение 2.3.1. Какая температура в спальне в 6 часов утра, если предположить, что снаружи всю ночь держалась температура $T_0 = -10$ °C?

Решение. Согласно условиям задачи, мы можем применить ньютонов закон охлаждения (2.3.1). Его решение дается формулой (2.3.2),

$$\tau(t) = T_0 - B\,e^{-kt}.$$

Подставляя $t = t_0$, мы имеем $25 = -10 - B\,e^{-kt_0}$ или $B = -35\,e^{kt_0}$. Тогда (в °C):

$$\tau(t) = -10 + 35\,e^{-k(t-t_0)}.$$

Условие $\tau\big|_{t=t_0+1} = 19{,}5$ приводит к $19{,}5 = -10 + 35\,e^{-k}$, откуда $k = \ln(1{,}18) \approx 1/6$. Итак, температура внутри здания изменяется по закону

$$\tau(t) = -10 + 35\,e^{-(t-t_0)/6}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

В частности, температура в $t = t_1 = 6$ часов утра равна $-5{,}25$ °C (см. рис. 2.3).

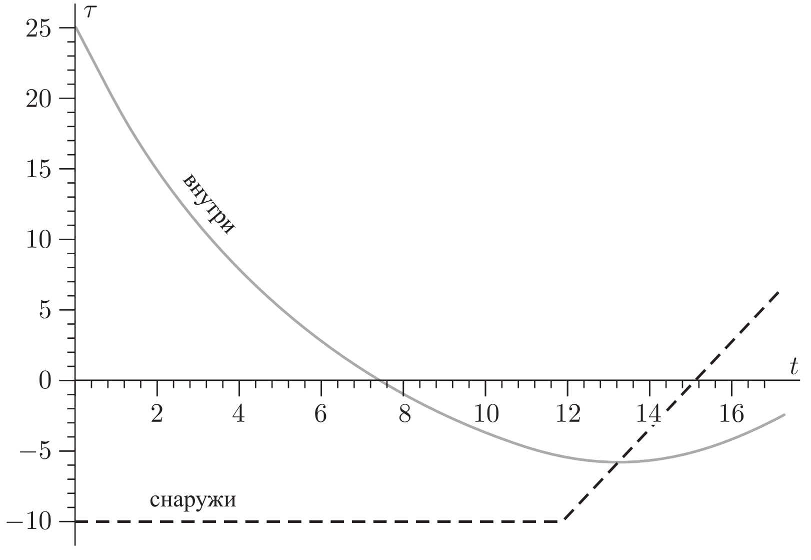


Рис. 2.3. К упражнениям 2.3.1 и 2.3.2

Упражнение 2.3.2. Пусть при сохранении условий задачи 2.3.1 температура снаружи увеличивалась равномерно от -10 °C в 6 часов вечера до $+8$ °C в полночь. Определим изменение температуры внутри спальни в течение этого времени.

Решение. Принимая, что коэффициент k для нашего здания равен $k = 1/6$ и что изменение наружной температуры происходило по закону $T(t) =$

$= -10 + 3(t - t_1)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $t_1 = 6$, $t_2 = 12$, и решая соответствующее уравнение (2.3.1),

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{6}\,[-10 + 3(t - t_1) - \tau],$$

мы получим следующее изменение температуры внутри здания (см. рис. 2.3):

$$\tau = -28 + 3(t - t_1) + 22{,}75\,e^{-(t-t_1)/6}, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Упражнение 2.3.3. Предположим теперь, что подобная авария случилась в $t_0 = 6$ часов вечера, когда температура наружного воздуха была $+8$ °C, а затем она уменьшилась до -10 °C к $t_1 = 6$ часам утра. Найдем изменение температуры в вашем доме за ночь.

Решение. В отличие от предыдущего случая, здесь температура снаружи изменяется неравномерно и удовлетворяет закону

$$T(t) = 8 - \frac{3}{2}\,(t - t_0),$$

где $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Уравнение (2.3.1):

$$\frac{d\tau}{dt} = k\Big[8 - \frac{3}{2}\,(t - t_0) - \tau\Big]$$

имеет общее решение

$$\tau(t) = 8 + \frac{3}{2k} - \frac{3}{2}\,(t - t_0) - B\,e^{-kt},$$

где $B = \mathrm{const}$. Начальное условие $\tau\big|_{t=t_0} = 25$ дает $B = \left(\frac{3}{2k} - 17\right)e^{kt_0}$. Мы знаем из упражнения 2.3.3, что для рассматриваемого здания $k = 1/6$. Следовательно, $B = -8\,e^{t_0/6}$. Таким образом, изменение температуры внутри помещения в течение ночи (в °C)

$$\tau(t) = 17 - \frac{3}{2}\,(t - t_0) + 8\,e^{-(t-t_0)/6}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

В частности, температура в $t_1 = 6$ часов утра будет около 0 °C (см. рис. 2.4).

Упражнение 2.3.4. Решим упражнение 2.3.2 при условиях упражнения 2.3.3.

Решение. Решение имеет вид (см. рис. 2.4)

$$\tau = -28 + 3(t - t_1) + 28\,e^{-(t-t_1)/6}, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Упражнение 2.3.5. В 1970-е годы я участвовал в конференции по дифференциальным уравнениям, организованной С.Л. Соболевым на озере Байкал. Мы получали удовольствие от общения с блестящими сибирскими математиками, удивлялись неустойчивой байкальской погоде. Несмотря на то, что стояла середина лета, температура часто изменялась в течение дня так резко, что от $+25$ °C могла дойти до $+5$ °C, и обратно. В этом упражнении я приглашаю вас представить, что вы находитесь на побережье Байкала и отвечаете на следующий вопрос. Предположим, вы в летнем доме с плохой

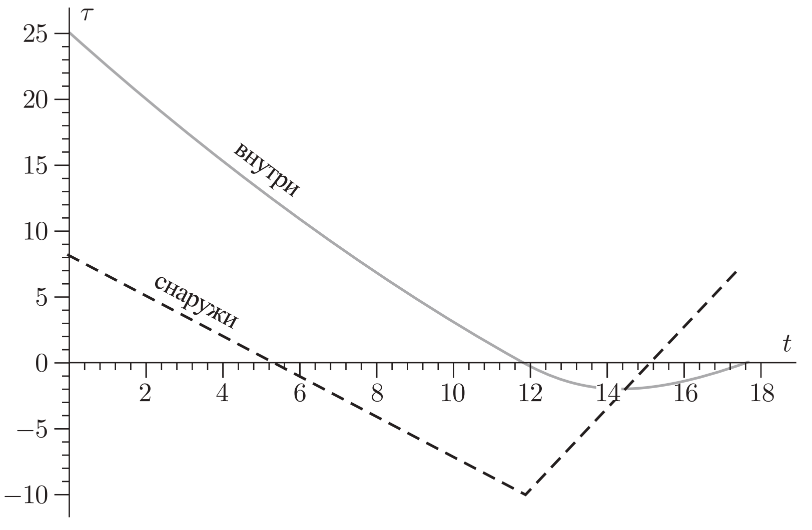


Рис. 2.4. К упражнениям 2.3.3 и 2.3.4

изоляцией, нагревательные приборы отсутствуют. Предположим также, что в некоторый момент t_0 (примем $t_0 = 0$), когда температура снаружи была $\tau_0 = +16$ °C, погода внезапно изменилась, и внешняя температура колебалась между $+26$ °C и $+6$ °C по следующему закону (в °C):

$$T(t) = 16 + A\sin(\pi t), \quad A = 10. \tag{2.3.5}$$

Предпочли ли бы вы оставаться в доме или решили бы, что температура в доме такая же, как снаружи, потому что теплоизоляция слишком слабая?

Решение. Дифференциальное уравнение (2.3.1), в котором $T(t)$ удовлетворяет (2.3.5), запишем в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = k[16 + A\sin(\pi t) - \tau]. \tag{2.3.6}$$

Используя метод вариации параметра в решении $\tau = Ce^{-kt}$ однородного уравнения $\tau' = -k\tau$, мы запишем

$$\tau = C(t)\, e^{-kt}$$

и подставим в уравнение (2.3.6), чтобы получить

$$C'(t) = k[16 + A\sin(\pi t)]\, e^{kt}.$$

Из стандартного интеграла

$$\int e^{kx}\sin(lx)\, dx = \frac{1}{k^2 + l^2}\,[k\sin(lx) - l\cos(lx)]\, e^{kx} + B$$

получим:

$$C(t) = 16\, e^{kt} + B + \frac{Ak}{\pi^2 + k^2}\,[k\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)]\, e^{kt}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.3.6) имеет вид

$$\tau(t) = 16 + B\,e^{-kt} + \frac{Ak}{\pi^2 + k^2}\,[k\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)].$$

Начальное условие $\tau\big|_{t=0} = 16$ дает значение $B = Ak\pi/(\pi^2 + k^2)$, и окончательно мы приходим к следующему решению:

$$\tau(t) = 16 + \frac{Ak}{\pi^2 + k^2}\,[\pi e^{-kt} + k\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)]. \tag{2.3.7}$$

Решение (2.3.7) означает, что лучше оставаться в доме, чем быть снаружи, какая бы изоляция ни была (см. рис. 2.5, 2.6).

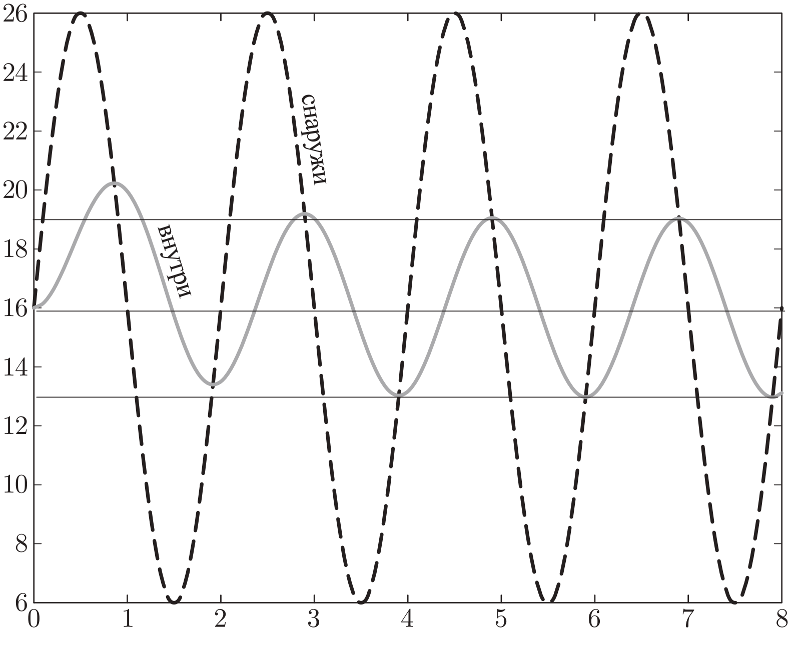


Рис. 2.5. Сюрпризы байкальской погоды: $k = 1$, $A = 10$

Точно так же можно решить более общую задачу, когда внешняя температура $T(t)$ и температура в помещении $\tau\big|_{t=0}$ удовлетворяют условиям

$$T(t) = T_0 + A\sin(\omega t) \tag{2.3.8}$$

и

$$\tau\big|_{t=0} = \tau_0 \tag{2.3.9}$$

соответственно. Тогда температура внутри помещения изменяется следующим образом:

$$\tau(t) = T_0 + \left(\tau_0 - T_0 + \frac{Ak\omega}{\omega^2 + k^2}\right) e^{-kt} + \frac{Ak}{\omega^2 + k^2}\,[k\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)]. \tag{2.3.10}$$

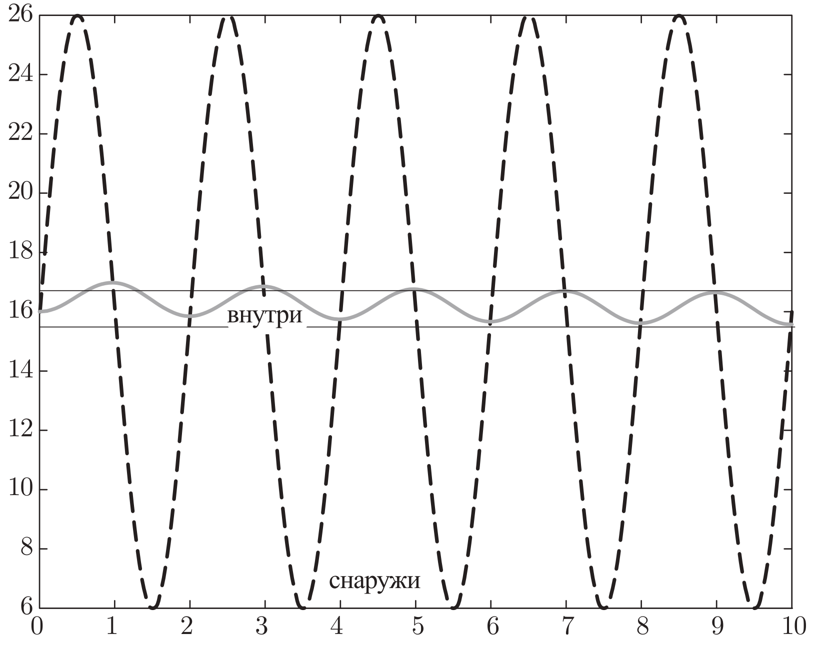


Рис. 2.6. Сюрпризы байкальской погоды: $k = 1/6$, $A = 10$

В частности, если период изменения температуры снаружи составляет 24 часа, т. е. $24\,\omega = 2\pi$, то (2.3.10) становится:

$$\tau(t) = T_0 + \left(\tau_0 - T_0 + \frac{12Ak\pi}{\pi^2 + 12^2k^2}\right)e^{-kt} + \\ + \frac{12Ak}{\pi^2 + 12^2k^2}\left[12k\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]. \quad (2.3.11)$$

2.3.2. Механические колебания. Маятник. В каждодневной практике можно насчитать много типов колебаний. Это, например, шелест листьев и веток деревьев, вызванный ветром, тряска автомобиля на неровностях дороги, волны на воде или колебание судна на волнах и т. д.

Известный пример дифференциального уравнения, описывающего малые механические колебания, дает физическая задача о тяжелой частице, подвешенной на спиральной пружине и совершающей колебания по вертикали y в окрестности состояния равновесия $y = 0$. Частица испытывает действие восстанавливающей силы F_1, которая, согласно закону Гука, пропорциональна ее отклонению y от положения $y = 0$ и направлена противоположно этому отклонению, то есть

$$F_1 = -ky,$$

где k — положительный постоянный коэффициент. В действительности, когда тело движется в среде, существует также сила трения F_2, которая стремится замедлить движение. Обычно предполагается, что сила трения пропорциональна величине скорости частицы и противоположна ей по направлению.

Итак,

$$F_2 = -l\,\frac{dy}{dt},$$

где роль независимой переменной играет время t, а коэффициент пропорциональности l — это положительный параметр, называемый *постоянной затухания*. Обозначим $f(t)$ суммарную внешнюю силу (со стороны ветра, неровностей дороги и пр.), которую будем считать заданной функцией времени.

Таким образом, применяя второй закон Ньютона (2.1.2), составим уравнение малых колебаний частицы, имеющей массу m, при условии действия силы

$$F = F_1 + F_2 + f(t):$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} + l\,\frac{dy}{dt} + ky = f(t), \tag{2.3.12}$$

или

$$Ly = f(t), \quad \text{где} \quad L = m\,\frac{d^2}{dt^2} + l\,\frac{d}{dt} + k.$$

Говорят, что механические колебания *затухающие*, если $l \neq 0$, и *незатухающие* в противном случае. Говорят, что движение *свободное*, если $f(t) \equiv 0$, и *вынужденное* в противном случае.

Затухающие колебания механической системы с n степенями свободы описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_{ij}\,\frac{d^2y^j}{dt^2} + l_{ij}\,\frac{dy^j}{dt} + k_{ij}\,y^j \right) = f^i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

с постоянными коэффициентами m_{ij}, l_{ij} и k_{ij}. После введения векторных обозначений $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n)$, $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^n)$ и матричного дифференциального оператора L это уравнение можно представить в следующей форме (2.3.12):

$$L\mathbf{y} = \mathbf{f}(t), \quad \text{где} \quad L = M\,\frac{d^2}{dt^2} + A\,\frac{d}{dt} + B,$$

M, A, B — матрицы с компонентами m_{ij}, l_{ij} и k_{ij} соответственно.

Замечание 2.3.1. Во всей книге векторы $\mathbf{y}$ и т. д. означают *векторы-столбцы*, хотя они будут в целях компактности записываться как строки. В частности, в матрице $M = \|m_{ij}\|$, индексы i и j означают, соответственно, строки и столбцы.

Введенные выше линейные модели пригодны для описания малых колебаний (называемых *гармоническими колебаниями*), то есть колебаний, амплитуда которых достаточно мала. Колебания большой амплитуды (или аппроксимации высокого порядка финитных колебаний) обычно описывают с помощью нелинейных дифференциальных уравнений и называют *ангармоническими колебаниями*.

Пример (маятник). Простой маятник состоит из груза, жестко закрепленного на нижнем конце вертикального стержня. Верхний конец стержня подвешен с помощью подвижной опоры, обладающей малым трением. Если отклонить груз в сторону и отпустить, маятник начнет колебаться туда-сюда в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Применение маятника для измерения времени основано на замечательном наблюдении Галилея, [1]) состоящем в том, что в определенных пределах его период колебаний остается постоянным при условии, что длина стержня маятника остается неизменной.

Это свойство маятника можно описать, построив соответствующую математическую модель. Пусть m — масса груза маятника, а l — длина его стержня. Будем считать стержень относительно легким, так что его массой можно пренебречь по сравнению с m. Обозначим y угловое отклонение маятника от положения равновесия $y = 0$. Математическую модель маятника получим из второго закона Ньютона (2.1.1). Пусть v — линейная скорость груза $v = l\,dy/dt$, а F — возвращающая компонента гравитационной силы, $F = -mg\sin y$. Тогда уравнение, определяющее движение маятника, запишется следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 \sin y = 0, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \cdot \tag{2.3.13}$$

Уравнение малых колебаний получается из *нелинейного* уравнения (2.3.13) в предположении $y \to 0$ и при замене $\sin y$ на его первое приближение, $\sin y \approx y$. Тогда мы приходим к *линейному* уравнению свободных гармонических колебаний:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \tag{2.3.14}$$

Его решение имеет вид (см. раздел 3.3.3, пример 3.3.2)

$$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad C_1,\, C_2 = \text{const}.$$

Время, в течение которого маятник совершает один цикл колебаний, называется *периодом* и обозначается τ. Формально период может быть найден из условия, что приведенное решение остается неизменным при замене t на $t+\tau$, другими словами, если $\cos[\omega(t+\tau)] = \cos(\omega t)$ и $\sin[\omega(t+\tau)] = \sin(\omega t)$. Таким образом, $\omega(t+\tau) = \omega t + 2\pi$, или $\omega\tau = 2\pi$. Итак, применяя определение ω, можно получить следующее выражение для периода свободных гармонических колебаний, которое согласуется с наблюдением Галилея:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{2.3.15}$$

где g — гравитационная постоянная. Величина $\omega = 2\pi/\tau$ определяет число колебаний за время 2π единиц времени и, следовательно, она называется *угловой частотой*.

[1]) Галилео Галилей установил принцип маятника в 1581 году. Согласно этому принципу, колеблющийся груз можно использовать для регистрации времени. Открытие Галилеем этого свойства маятника явилось важным продвижением в конструировании механических часов. По оригинальности его можно сравнить с изобретением колеса.

Завершим этот пример рассмотрением колебаний маятника, имеющего практический интерес. А именно, найдем длину маятника, совершающего одно колебание в секунду (то есть $\tau/2 = 1$ с).

Уравнение (2.3.15) дает

$$l = \frac{g}{\pi^2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2.$$

Подставляя $g \approx 981$ см/с^2 и $\tau/2 = 1$ с, мы найдем требуемую длину:

$$l \approx 1 \text{ м}.$$

Замечание 2.3.2. Период τ (2.3.15) гармонических колебаний не зависит от начального положения маятника. Несмотря на то, что это заключение дает прекрасное математическое объяснение наблюдениям Галилея, оно, однако, входит в противоречие с теорией свободного падения, также основанной на законе Ньютона. Действительно, время $t_* = \sqrt{2h_0/g}$ свободного падения (см. упражнение 2.2.1), в отличие от (2.3.15) свободных колебаний, зависит от начальной высоты h_0. Очевидно, что этот эффект объясняется линейностью приближения (2.3.14) точной нелинейной модели (2.3.13). Итак, давайте обсудим вопрос о периоде ангармонических колебаний, соответствующих модели (2.3.13).

Упражнение 2.3.6. Проинтегрируем уравнение (2.3.13), используя условия $y = 0$ при $t = 0$ и $y = \alpha$ при $t = T/4$. Здесь T — период негармонических колебаний маятника и α — его угловая *амплитуда*, т. е. максимальное угловое отклонение, $\alpha = y\,|_{\max}$. Оценим период T и сравним его с периодом τ гармонических колебаний.

Решение. Умножив уравнение (2.3.13) на dy/dt, можно проинтегрировать его один раз и получить

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2\omega^2\cos y = C.$$

Поскольку α — максимальное отклонение, $(dy/dt)|_{y=\alpha} = 0$. Отсюда следует, что $C = -2\omega^2\cos\alpha$. Используя тождество

$$\cos y - \cos\alpha = 2[\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(y/2)],$$

получаем:

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(y/2)}\,.$$

Интегрирование дает:

$$\int\limits_0^y \left[\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(u/2)\right]^{-1/2} d(u/2) = \omega t. \qquad (2.3.16)$$

Интеграл в (2.3.16), известный как *эллиптический интеграл* первого рода, не выражается в элементарных функциях. Определяя новую переменную v с помощью формулы

$$\sin(u/2) = \sin(\alpha/2)\sin v$$

и обозначая $\varkappa = \sin(\alpha/2)$, можно переписать этот интеграл в стандартной форме, а именно

$$\int \left[\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(u/2)\right]^{-1/2} d(u/2) = \int \frac{dv}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 v}}.$$

В соответствии с формулой замены переменных условие $u = \alpha$ влечет $\sin v = 1$, то есть $v = \pi/2$. Применяя условие $y = \alpha$ при $t = T/4$, мы убеждаемся, что $v = \pi/2$ при $t = T/4$. Таким образом, можно легко определить период с помощью подстановки $t = T/4$ в (2.3.16) и приведения эллиптического интеграла к стандартной форме. Итак,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 v}}, \quad \text{где} \quad \varkappa = \sin(\alpha/2).$$

Если угловая амплитуда α пренебрежимо мала, $\alpha \to 0$, то $k \to 0$, и, следовательно, T совпадает с τ, задаваемым выражением (2.3.15). Максимальная разность между T и (2.3.15) достигается при $k \to 1$, то есть когда $\alpha \to \pi$ (вертикальное положение). Если $0 < \alpha < \pi$, тогда $|\varkappa^2 \sin^2 v| < 1$, и следовательно,

$$\left(1 - \varkappa^2 \sin^2 v\right)^{-1/2} = 1 + (\varkappa^2/2)\sin^2 v + (3\varkappa^4/8)\sin^4 v + \ldots$$

Интегрирование этого ряда почленно с применением хорошо известных интегралов

$$\int \sin^2 v\, dv = (v/2) - (1/4)\sin(2v),$$

$$\int \sin^4 v\, dv = (3v/8) - (1/4)\sin(2v) + (1/32)\sin(4v)$$

и т. д., с последующей подстановкой $\varkappa = \sin(\alpha/2)$, дает следующее выражение для периода, удобное для численной оценки и, в отличие от (2.3.15), удовлетворительное с теоретической точки зрения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right). \tag{2.3.17}$$

Первый член совпадает с (2.3.15) и представляет собой главную часть τ периода T, в то время как остальные члены (2.3.17) малы. Например, высококлассные часы, обладающие поразительной точностью и используемые в астрономии, снабжены маятником с амплитудой $\alpha \approx 1{,}5^\circ$. Для таких часов учет первого корректирующего члена в формуле (2.3.17) дает

$$T \approx \tau + \frac{\tau}{20000}.$$

2.3.3. Разрушение ведущих валов. В начале XX века конструкторы теплоходов столкнулись с опасным и труднообъяснимым явлением: на первый взгляд случайные «биения» приводных валов нередко приводили к разрушению систем трансмиссии (см. рис. 2.7 и 2.8). Странное явление объяснилось с помощью дифференциальных уравнений.

В соответствии с моделью динамики балок (2.1.4) положения равновесия равномерно вращающегося цилиндрического вала описываются с помощью не зависящих от времени ($\partial u/\partial t = 0$) решений уравнения (2.1.4), то есть они определяются обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$\mu \frac{d^4 u}{dx^4} = f,$$

где u обозначает отклонение вала от положения равновесия $u = 0$, а f — плотность центробежной силы, действующей на вал. Чтобы найти f, рассмотрим малый элемент вала dx и обозначим p вес единицы длины вала. Тогда масса элемента dx есть

$$dm = \frac{p}{g}\, dx,$$

где g — ускорение силы тяжести. Центробежная сила df, действующая на dx при вращении с постоянной угловой скоростью ω, равна

$$df = \omega^2 u\, dm = \frac{p\omega^2}{g}\, u\, dx.$$

В результате имеем

$$f = \frac{p\omega^2}{g}\, u,$$

и искомое дифференциальное уравнение запишется следующим образом:

$$\mu \frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{p\omega^2}{g}\, u. \tag{2.3.18}$$

Положительная константа μ зависит от материала вала. Пусть вал вращается на двух опорах, имеющих координаты $x = 0$ и $x = l$ (рис. 2.7). Тогда $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$. Кроме того, можно показать, что опоры являются точками перегиба функции $u = u(x)$. Таким образом, мы встаем перед проблемой исследования решений дифференциального уравнения (2.3.18), удовлетворяющих четырем *граничным условиям*:

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2}\bigg|_{x=l} = 0. \tag{2.3.19}$$

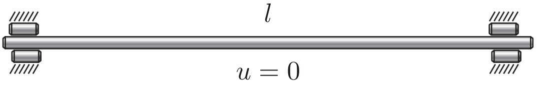


Рис. 2.7. Устойчивый вал

Явление «биения» (рис. 2.8) происходит, когда задача с граничными условиями, описываемая уравнениями (2.3.18), (2.3.19), имеет «нетривиальное решение», т. е. решение $u = u(x)$, не равное тождественно нулю на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$.

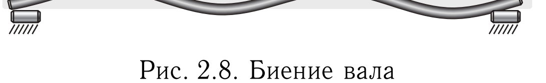


Рис. 2.8. Биение вала

Интегрирование уравнения (2.3.18), записанного в форме

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \alpha^4 u, \qquad \alpha^4 = \frac{p\omega^2}{g\mu} = \text{const}, \tag{2.3.20}$$

дает нам общее решение

$$u = C_1\, e^{\alpha x} + C_2\, e^{-\alpha x} + C_3 \cos(\alpha x) + C_4 \sin(\alpha x), \quad C_i = \text{const}. \tag{2.3.21}$$

Граничные условия (2.3.19) имеют вид

$$\begin{gathered} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad C_1\, e^{\alpha l} + C_2\, e^{-\alpha l} + C_3 \cos(\alpha l) + C_4 \sin(\alpha l) = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \quad C_1\, e^{\alpha l} + C_2\, e^{-\alpha l} - C_3 \cos(\alpha l) - C_4 \sin(\alpha l) = 0. \end{gathered}$$

Расчет показывает, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $C_4 \sin(\alpha l) = 0$. Если $C_4 = 0$, мы приходим к тривиальному решению $u = 0$, которое описывает прямолинейное положение вала. С другой стороны, полагая $\sin(\alpha l) = 0$, то есть $\alpha = n\pi/l$, мы получаем случай, описывающий биение. В этом случае (2.3.21) дает

$$u = C_4 \sin(n\pi x/l).$$

Согласно определению α, уравнение $\alpha = n\pi/l$ показывает, что возможно разрушение вала, как только его угловая скорость достигает одного из следующих *критических значений*:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{g\mu}{p}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.3.22}$$

2.3.4. Уравнение Ван дер Поля. Широко известный иллюстративный пример описывает разрядку электрического конденсатора через проволочную катушку индуктивности. Согласно закону Ома [1]), это явление описывается уравнениями

$$C\,\frac{dV}{dt} = -I, \quad V - L\frac{dI}{dt} = RI, \tag{2.3.23}$$

где I есть *ток* разрядки, V — *напряжение* (разность потенциалов между пластинами конденсатора), R — *сопротивление*, C — *емкость* конденсатора и L — *индуктивность* катушки. Здесь I и V являются функциями времени t, в то время как R, C и L считаются заданными постоянными величинами. Следовательно, (2.3.23) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя зависимыми переменными, I и V, рассматриваемыми как неизвестные функции t.

Обозначим зависимую переменную V символом y и ее первую и вторую производные по t символами y' и y''. В этих обозначениях второе уравнение (2.3.23), при подстановке I из первого, становится линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

с постоянными коэффициентами $a = LC$, $b = RC$ и $c = 1$.

[1]) Сформулирован Г. Омом в 1827 году и затем обобщен Г.Р. Кирхгофом.

Заменяя во втором уравнении (2.3.23) классический закон Ома на так называемый *обобщенный закон Ома*, мы получаем нелинейную систему

$$C\,\frac{dV}{dt} = -I, \quad L\,\frac{dI}{dt} = V - h(I),$$

или одно эквивалентное ей нелинейное уравнение второго порядка:

$$ay'' + y = -f(y'), \quad a = \mathrm{const}.$$

Полагая $f(y') = \varepsilon(y'^3 - y')$, мы получаем уравнение Ван дер Поля, применяемое в теории триодов:

$$ay'' + y = \varepsilon(y' - y'^3), \quad \varepsilon = \mathrm{const}. \tag{2.3.24}$$

Фактически, уравнение Ван дер Поля было первым нелинейным дифференциальным уравнением, имевшим реальное физическое содержание, которое допускало периодические решения. Периодичность первым обнаружил Бальф Ван дер Поль в экспериментах по изучению колебаний в электрических цепях и в связи с исследованием электрической модели биений сердца [1]).

2.3.5. Телеграфное уравнение. Широко известно, что в электродинамике протекание тока по кабелю хорошо описывается следующей системой уравнений:

$$Cw_t + Gw + j_x = 0, \quad Lj_t + Rj + w_x = 0, \tag{2.3.25}$$

где зависимые переменные напряжение w и интенсивность тока j рассматриваются как функции времени t и координаты x вдоль кабеля. Коэффициенты, входящие в уравнение, постоянны, и они характеризуют физические свойства кабеля, а именно C — его емкость, L — самоиндукцию, R — сопротивление и G — утечку. Последняя определяется как потеря тока, деленная на напряжение. Исключая одну из зависимых переменных, w или j, из уравнений (2.3.25) с помощью дифференцирования и обозначения оставшейся переменной v, мы получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка (для интенсивности тока или напряжения), известное как *телеграфное уравнение*

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + (a + b)v_t + abv = 0.$$

Входящие в уравнение постоянные множители имеют следующий физический смысл: c — скорость света, a и b — коэффициенты емкостных и индуктивных потерь. Они связаны с коэффициентами исходной системы уравнений формулами

$$c^2 = \frac{1}{CL}, \quad a = \frac{G}{C}, \quad b = \frac{R}{L}\,\cdot$$

Первая производная в телеграфном уравнении может быть исключена введением переменной

$$u = e^{\frac{a+b}{2}\,t}\,v.$$

[1]) B. van der Pol, *Philosophical Magazine*, vol. 2, 1926, p. 978–992; B. van der Pol and J. van der Mark, *Philosophical Magazine*, vol. 6, 1928, p. 763–775. См. также [36], раздел 7.5.

Затем, вводя обозначение k^2 для результирующей положительной константы $(a-b)^2/4$, мы получаем следующую форму телеграфного уравнения:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - k^2 u = 0, \quad c,\, k = \mathrm{const}. \tag{2.3.26}$$

2.3.6. Электродинамика. Электромагнитное поле имеет две компоненты, а именно вектор $\mathbf{E}$ электрического поля и вектор $\mathbf{H}$ магнитного поля. Теория электромагнитных волн, или *электродинамика*, основана на уравнениях Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c(\nabla \times \mathbf{H}) - 4\pi \mathbf{j}, \quad && \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -c(\nabla \times \mathbf{E}), && \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Здесь $\mathbf{j}$ и ρ — плотность электрического тока и плотность электрического заряда, соответственно, и $c \approx 3 \times 10^{10}$ см/с — скорость света. Уравнения Максвелла имеют четыре независимые переменные, а именно время t и вектор положения $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Зависимые переменные — векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Ток $\mathbf{j}$ и заряд ρ являются заданными функциями, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$, $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$. Таким образом, (2.3.27) — *переопределенная* система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка: она содержит восемь уравнений для шести компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Уравнения Максвелла (2.3.27) часто записывают в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad && \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, && \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

В случае распространения электромагнитных волн в вакууме уравнения Максвелла упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad && \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, && \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

В этом случае можно рассматривать *определенную систему* дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{H}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Однако можно показать (см. задачу 2.7), что соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{2.3.31}$$

выполняются в любой момент времени, если они выполнены в начальный момент $t = t_0$, и являются следствием начальных условий. Это положение применимо в более общем случае, когда уравнения (2.3.31) заменены на (см. [40, раздел 10.5])

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = f(\mathbf{x}), \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = g(\mathbf{x}),$$

в частности, на (2.3.28) при условии, что $\mathbf{j}$ и ρ не зависят от времени.

2.3.7. Уравнение Дирака. Одним из фундаментальных уравнений квантовой механики является уравнение Дирака

$$\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi = 0, \quad m = \text{const}. \tag{2.3.32}$$

Уравнение (2.3.32) используется для изучения релятивистских частиц, обладающих массой m и спином $1/2$, таких как электрон, нейтрон, протон и нейтрино (при $m = 0$).

Зависимая переменная ψ является 4-мерным вектором-столбцом с комплексными компонентами ψ^1, ψ^2, ψ^3, ψ^4. В квантовой механике зависимые переменные обычно называют *волновыми функциями*. Волновая функция ψ, удовлетворяющая уравнению Дирака, называется *спинором* (в связи со специфическими свойствами преобразования вращения под действием группы Лоренца, см. раздел 7.3.8). Независимой переменной является четырехмерный вектор $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, где x^1, x^2, x^3 — действительнозначные пространственные переменные, а x^4 — комплексная переменная, введенная по формуле $x^4 = ict$ (t — время, c — скорость света). Далее, γ^k — следующие 4×4 комплексные матрицы, называемые матрицами Дирака:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3.8. Динамика жидкости. Фундаментальная математическая модель динамики жидкости представляет собой следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, описывающую движение сжимаемой жидкости (газа):

$$\begin{aligned} &\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ &\rho\left[\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v}\right] + \nabla p = 0, \\ &p_t + \mathbf{v} \cdot \nabla p + A(p, \rho)\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

где $A(p, \rho)$ — произвольная функция, связанная с энтропией $S(p, \rho)$ уравнением

$$A = -\rho\,\frac{\partial S/\partial \rho}{\partial S/\partial p}\,\cdot \tag{2.3.34}$$

Роль зависимых переменных выполняют скорость $\mathbf{v}$, давление p и плотность ρ жидкости. Независимыми переменными являются время t и координаты точки пространства $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Если энтропия жидкости постоянна, $S = \mathrm{const}$, то жидкость называют *изэнтропической*.

В случае так называемого *политропного потока* функция (2.3.34) принимает вид $A = \gamma p$, где γ — постоянная, известная как *адиабатическая* (*политропная*) *экспонента*. Случай $\gamma = 5/3$ соответствует потоку одноатомного газа. Этот случай важен, поскольку, в частности, окрестность Солнца состоит в основном из одноатомных газов. Итак, одноатомные газы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} &\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ &\rho\left[\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v}\right] + \nabla p = 0, \\ &p_t + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \frac{5}{3}\, p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Другой физически важный случай соответствует плоскому изэнтропическому (т. е. $S = \mathrm{const}$) газовому потоку с адиабатической экспонентой $\gamma = 2$. Условие изэнтропичности потока позволяет отбросить последнее уравнение системы уравнений газодинамики (2.3.33). Тогда, подставляя

$$p = \frac{1}{2}\,\rho^2, \quad \rho = gh,$$

где g — гравитационное ускорение, мы сведем первые два уравнения (2.3.33) к следующей системе:

$$\begin{aligned} &h_t + \mathbf{v} \cdot \nabla h + h \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ &\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} + g\,\nabla h = 0. \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — двумерный вектор и ∇ — оператор Гамильтона с компонентами ∇_x и ∇_y (см. (1.3.10)). Уравнения (2.3.36) описывают поток при условии мелкой воды, где (x, y) — координаты плоскости твердого основания, h — высота водной поверхности над основанием.

Потенциал плоского неустановившегося газового потока с околозвуковой скоростью описывается уравнением

$$2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2.3.37}$$

2.3.9. Уравнения Навье–Стокса. Течение несжимаемой вязкой жидкости подчиняется уравнениям Навье–Стокса

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\,\nabla p = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{2.3.38}$$

Зависимыми переменными являются $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ и давление p, в то время как плотность ρ по предположению остается заданной постоянной. Параметр ν определяется вязкостью жидкости.

2.3.10. Модель ирригационной системы. Математическая модель, предназначенная для описания ирригационных систем, представляет собой следующее нелинейное уравнение в частных производных (см. [38, раздел 9.8 и список литературы в нем]):

$$C(\psi)\,\psi_t = [K(\psi)\,\psi_x]_x + [K(\psi)\,(\psi_z - 1)]_z - S(\psi). \tag{2.3.39}$$

Здесь ψ — высота гидростатического напора влажного грунта, $C(\psi)$ — специфическая характеристика объема воды, $K(\psi)$ — ненасыщенная гидравлическая проводимость, $S(\psi)$ — слагаемое, характеризующее источник, t — время, x — горизонтальная ось, а z — вертикальная ось, которая выбрана направленной вверх. Это уравнение может быть использовано для описания инфильтрации, перераспределения и выделения грунтовых вод в слоистом недеформируемом профиле покрытия канала в условиях мелкой воды при проведении ирригации с помощью линейного источника просачивания в системе. Система линейного источника просачивания производит непрерывный смачивающий слой вдоль длины в поперечном направлении (по оси y), и, следовательно, описание явления требует введения трех пространственных координат, x, y и z.

2.3.11. Магнитогидродинамика. Магнитогидродинамика имеет дело с существенными физическими и техническими проблемами, возникающими при исследовании движения ионизированных жидкостей при наличии электромагнитных сил. Рассмотрим математическую модель, описывающую движение *идеально проводящей* жидкости в магнитном поле. Допустим, что магнитная проницаемость $\mu = 1$. Пусть $\mathbf{H}$ обозначает вектор магнитного поля, а $\mathbf{v}$ — скорость потока жидкости. Учитывая предположение о бесконечной электропроводности жидкости, мы получим выражения

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$$

и

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{v}$$

для вектора $\mathbf{j}$ плотности электрического тока и вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ соответственно.

Уравнения магнитогидродинамики получаются объединением уравнений Максвелла (2.3.28) с уравнениями (2.3.33) гидродинамики. Используя приведенные выше выражения для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, получаем следующие уравнения (см., например, [14, глава VI, § 3a.6]):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{H}\times\mathbf{v}) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\\
&\rho_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\\
&\rho\,[\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}] + \nabla p - (\operatorname{rot}\mathbf{H})\times\mathbf{H} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.40}$$

Здесь слагаемое $(\operatorname{rot}\mathbf{H})\times\mathbf{H}$ определяется силой $\mathbf{j}\times\mathbf{H}$, действующей со стороны магнитного поля на единичный объем жидкости. Поскольку уравнение $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ представляет собой просто начальное условие, уравнения (2.3.40) образуют *недоопределенную систему*: она состоит из 7 уравнений для 8 неизвестных функций H^1, H^2, H^3; v^1, v^2, v^3; ρ и p. Для точной постановки физической задачи требуется добавить еще одно уравнение.

2.4. Явление диффузии

2.4.1. Линейное уравнение теплопроводности. Поведение физических систем в диффузионных процессах приближенно описывается при условии, что молекулярным характером системы можно пренебречь. Предполагается, что на элементы идеализированной модели не действуют молекулярные флуктуации, какой бы малый объем ни рассматривался.

Составим дифференциальное уравнение стационарной тепловой диффузии в однородном материале, где однородность материала означает, что его *плотность массы* ρ, его *специфическая тепловая проводимость* c_* и *термальная проводимость* k — положительные константы. Выделим в материале произвольный объем Ω и обозначим $\partial\Omega$ его границу. Пусть ν — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$. Примем обозначение u для абсолютной температуры, так что $u = u(t, \mathbf{x})$ — температурное поле в произвольный момент времени t и $\mathbf{x} \in \Omega$.

После опубликования статьи Фурье по теории теплопроводности в 1811 году и его известной книги *Théorie analitique de la chaleur* (*Аналитическая теория теплоты*) (1822) математическая модель тепловой диффузии обычно опирается на следующие физические принципы теплового баланса, известные как *закон теплопроводности Фурье*:

а) Количество тепла Q в объеме Ω пропорционально массе объема Ω и его температуре:

$$Q(t) = \int\limits_{\Omega} \rho\, c_*\, u\, dx\, dy\, dz. \tag{2.4.1}$$

б) Тепло распространяется из слоя с более высокой температурой к слою с более низкой температурой, а тепловой поток пропорционален градиенту температуры, т. е. тепловой поток в объеме Ω через его поверхность $\partial\Omega$ определяется с помощью

$$\int\limits_{\partial\Omega} (k\, \nabla u \cdot \nu)\, dS. \tag{2.4.2}$$

в) Скорость изменения тепла в объеме Ω удовлетворяет (2.4.1), то есть величина

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\Omega} \rho c_*\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

равна количеству тепла, проходящего через поверхность $\partial\Omega$ в соответствии с (2.4.2). Таким образом, мы имеем следующее уравнение баланса:

$$\int\limits_{\Omega} \rho c_*\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\partial\Omega} (k\, \nabla u \cdot \nu)\, dS. \tag{2.4.3}$$

Применяя теорему о дивергенции (1.3.18), можно преобразовать интеграл в правой части уравнения (2.4.3) следующим образом:

$$\int\limits_{\partial\Omega} (k\, \nabla u \cdot \nu)\, dS = \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (k\, \nabla u)\, dx\, dy\, dz.$$

В итоге интегральное уравнение (2.4.3) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \rho c_* \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (k\, \nabla u)\, dx\, dy\, dz. \tag{2.4.4}$$

Поскольку Ω произвольно, интегральное уравнение (2.4.4) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\rho c_* \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k\, \nabla u). \tag{2.4.5}$$

Так как термальная проводимость k постоянна, мы имеем

$$\nabla \cdot (k\, \nabla u) = k\, \nabla \cdot (\nabla u) = k\, \Delta u,$$

где Δ есть лапласиан (1.3.19). Таким образом, мы получили линейное *уравнение теплопроводности*

$$u_t = a^2 \Delta u, \tag{2.4.6}$$

где положительная константа $a^2 = k/(\rho\, c_*)$ есть *коэффициент диффузии* материала.

В одномерном случае, когда температура зависит от времени t и одной пространственной координаты x, уравнение теплопроводности (2.4.6) имеет форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2.4.7}$$

Физическая реализация одномерной тепловой диффузии состоит в следующем. Рассмотрим бесконечный однородный прямоугольный стержень с площадью сечения S, расположенный вдоль оси x и полностью изолированный с двух сторон. Пусть температура T в любом сечении стержня однородна. То есть $T = T(t, x)$ — температура стержня в момент t в сечении, параллельном плоскости (y, z) на расстоянии x от начала координат O прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz. Пусть область Ω — элемент стержня размера Δx на расстоянии x от O (см. рис. 2.9). Уравнение баланса (2.4.3) в первом приближении дает

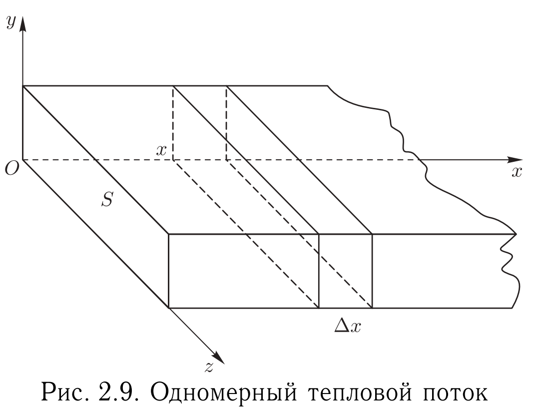


Рис. 2.9. Одномерный тепловой поток

$$\frac{\partial (S\, \Delta x\, T)}{\partial t} = S \left(\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x} \right).$$

Разделив уравнение на $S\, \Delta x$, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и, обозначая температуру T символом u, получим одномерное уравнение теплопроводности (2.4.7). Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, инвариантное по отношению к t- и x-смещениям. Последнее связано с принятым соглашением о стационарности процесса диффузии и с предположением об однородности материала стержня.

2.4.2. Нелинейное уравнение теплопроводности. Наши рассуждения в предыдущем разделе основывались фактически на предположении, что изменение температуры не влияет на физические характеристики ρ, c_* и k материала стержня. Предположение оправдано, если изменение температуры невелико. Кроме того, также резонно предположить, что плотность и тепловая характеристика будут сохранять начальные значения постоянными даже при высокой температуре. Однако если температура изменяется значительно, то это повлияет на тепловую проводимость.

Итак, рассмотрим уравнение баланса (2.4.3) в предположении, что ρ и c_*, как и прежде, являются положительными константами, но k зависит от температуры, $k = k(u)$. Кроме того, положим $\rho c_* = 1$ выбором необходимого масштаба времени и представим уравнение (2.4.5) в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [k(u)\, \nabla u]. \tag{2.4.8}$$

Уравнение (2.4.8) называют *нелинейным уравнением теплопроводности*. Его нередко записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\, [k(u) \operatorname{grad} u]. \tag{2.4.9}$$

В одномерном случае нелинейное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(u)\, \frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{2.4.10}$$

или

$$u_t = [k(u)\, u_x]_x = k(u)\, u_{xx} + k'(u)(u_x)^2. \tag{2.4.11}$$

2.4.3. Уравнения Бюргерса и Кортевега–де Фриза. Уравнение Бюргерса

$$u_t = uu_x + \nu\, u_{xx} \tag{2.4.12}$$

широко используется в механике жидкости, нелинейной акустике и т. д. Его применяют, например, при моделировании образования и распада неплоской ударной волны. Координата x «движется» вместе с волной со скоростью звука, а зависимая переменная u характеризует флуктуации скорости.

Коэффициент ν в уравнении Бюргерса (2.4.12) обычно считается постоянным. Однако в действительности он является функцией времени, и поэтому заслуживает внимания изучение обобщенного уравнения Бюргерса

$$u_t = uu_x + \nu(t)\, u_{xx}. \tag{2.4.13}$$

Уравнение Кортевега–де Фриза (Korteweg–de Vries)

$$u_t = uu_x + \mu\, u_{xxx}, \quad \mu = \text{const}, \tag{2.4.14}$$

используется, например, при математическом описании распространения длинных волн в водных каналах.

Уравнения Бюргерса и Кортевега–де Фриза выделяются среди нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными своими примечательными математическими свойствами.

2.4.4. Математическое моделирование в области финансов. Математика финансов имеет целью изучение колебаний ценообразования на фондовой бирже как диффузионного процесса в случайной среде. Соответственно, время и недостоверность являются главными элементами моделирования финансового поведения экономических агентов. Следовательно, базовая математическая модель в области финансов формулируется в терминах стохастических процессов, приводящих, таким образом, к *стохастическим дифференциальным уравнениям*. Однако при определенных упрощающих предположениях модели часто могут быть аппроксимированы обычными дифференциальными уравнениями.

Хорошо известное уравнение этого типа представляет собой модель Блека–Шоулса (1973), использующая понятие фондового (биржевого) ценообразования. Модель аппроксимируется следующим линейным уравнением с переменными коэффициентами:

$$u_t + \frac{1}{2}\,A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0, \tag{2.4.15}$$

где A, B и C — постоянные коэффициенты, связанные с характеристиками модели. Заметим, что уравнение Блека–Шоулса (2.4.15) может быть преобразовано в уравнение теплопроводности с помощью довольно сложной замены переменных.

2.5. Биоматематика

2.5.1. Смышленые грибы. Естественно предположить, что при росте грибы стремятся минимизировать излишнюю трату влаги. Следовательно, они растут так, что площадь их поверхности минимальна, чтобы уменьшить испарение.

Исходя из этого предположения, будем находить оптимальную форму шляпки грибов с помощью решения сформулированной ниже простой математической задачи. Затем мы сравним результат с реальными грибами. Рассмотрим кривые $y = y(x)$ на плоскости (x, y), соединяющие две фиксированные точки, $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$. Вращая кривые вокруг оси y, мы получим поверхности.

Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, которая при вращении вокруг оси y образует поверхность минимальной площади. Решим эту задачу. Рассмотрим тонкую полоску поверхности, которая получается, если переменная x принимает значения между x и $x + dx$. Площадь полоски равна

$$2\pi x\,ds = 2\pi x\sqrt{1 + y'^2}\;dx,$$

откуда
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$
и, наконец,
$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\; dx.$$
Следовательно, площадь поверхности вращения определяется интегралом
$$S = 2\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + y'^2}\; dx.$$
Итак, мы пришли к следующей формулировке задачи вариационного исчисления: найти кривую, для которой вариационный интеграл
$$\int L(x, y, y')\, dx$$
с лагранжианом
$$L = x\sqrt{1 + y'^2}$$
принимает стационарное значение. Условие того, что интеграл принимает стационарное значение, эквивалентно уравнению Эйлера–Лагранжа (1.5.2):
$$\frac{\partial L}{\partial y} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0. \tag{2.5.1}$$
В нашем примере получаем
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$
Уравнение (2.5.1) записано в форме *закона сохранения* (см. раздел 7.3):
$$D_x\left(\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0. \tag{2.5.2}$$
Вследствие этого путем дифференцирования мы получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:
$$y'' + \frac{1}{x}\left(y' + y'^3\right) = 0. \tag{2.5.3}$$
Закон сохранения (2.5.2) является следующим первым интегралом уравнения (2.5.3):
$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = A = \text{const}.$$
Решим это уравнение относительно y', проинтегрируем его и получим общее решение
$$y = B + k \operatorname{arcch}\left(\frac{x}{k}\right)$$

с двумя константами интегрирования, B и k. Вычисляя обратную функцию к гиперболическому косинусу (см. (1.1.8)), мы можем записать решение в форме

$$y = B + k\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right| = C + k\ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\,\right|,$$

где $C = B - k\ln|k|$.

Таким образом, искомая кривая задается решением

$$y = C + k\,\ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\,\right|,$$

и (2.5.3) удовлетворяет граничным условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Соответствующая поверхность вращения показана на рис. 2.10, а форма поверхности реального гриба — на рис. 2.11.

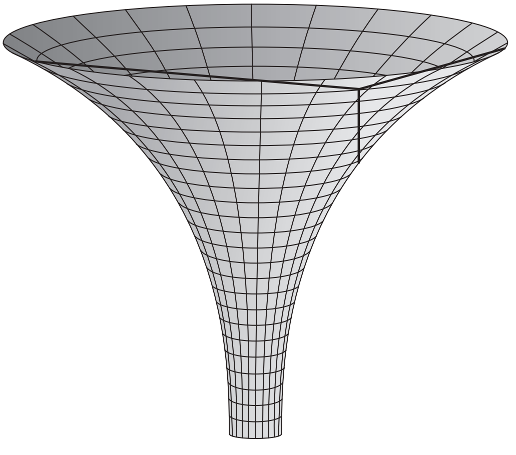


Рис. 2.10. Поверхность вращения с образующей $y=C + k\ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\,\right|$

Рис. 2.11. Реальный гриб

2.5.2. Модель роста опухоли. В настоящее время в литературе предложено несколько математических моделей для описания роста злокачественных опухолей. Эти модели формулируются в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Мы приводим здесь одну из этих моделей.

В здоровой ткани сохраняется баланс между рождением клеток и их гибелью. Изменение дезоксирибонуклеиновых кислот, связанное с генетическими, химическими или другими внешними причинами, может вызвать появление клеток злокачественной опухоли, которая нарушает этот баланс и вызывает неконтролируемое воспроизводство клеток с последующим их внедрением в соседние или отдаленные ткани (метастазы).

Ряд авторов [1]) исследовал проблему местного распространения злокачественной опухоли путем прорастания сквозь прилежащие ткани или их разрушения, пренебрегая клеточной диффузией. Опираясь на некоторые важные наблюдения в биологии опухолей, они предложили математическую модель, предназначенную для изучения осредненной одномерной динамики злокачественных клеток, пренебрегая изменениями, происходящими в направлении, перпендикулярном распространению раковых клеток. Модель формулируется в терминах дифференциальных уравнений с частными производными в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} u_t &= f(u) - (uc_x)_x\,, \\ c_t &= -g(c,p), \\ p_t &= h(u,c) - Kp. \end{aligned}$$

Здесь u, c и p зависят от времени t и одной пространственной координаты x и представляют концентрацию опухолевых клеток, внеклеточную матрицу (например, IV тип коллагена) и протеазу соответственно. Для описания динамики специфической биологической системы авторы модели вводят *произвольные элементы* $f(u)$, $g(c,p)$ и $h(u,c)$, которые по предположению являются возрастающими функциями зависимых переменных u, c, p. Например, функция $h(u,c)$ в последнем уравнении приведенной системы представляет зависимость производства протеазы от локальных концентраций злокачественных клеток и коллагена, в то время как введение члена $-Kp$ основано на предположении, что протеаза разрушается линейно (здесь K — положительная константа, которую следует определять экспериментально по периоду полураспада).

Замечая, что интервалы времени, связанные с производством и распадом протеазы, сравнительно невелики по сравнению с временем ослабления клеток, принятую модель можно свести к следующей системе, состоящей из двух уравнений:

$$\begin{aligned} u_t &= f(u) - (uc_x)_x\,, \\ c_t &= -g(c,u), \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

где $f(u)$ и $g(c,u)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$f(u) > 0, \quad g_c(c,u) > 0, \quad g_u(c,u) > 0.$$

2.6. Волновые явления

Математические модели колебательных явлений проще всего построить с использованием *вариационного принципа Гамильтона* или *принципа стационарного действия* (см. раздел 1.5). В классической механике любая механическая система описывается конечным числом переменных (координат системы), рассматриваемых как неизвестные функции времени. Следовательно,

---
[1]) A. J. Perumpanani, J. A. Sherrat, J. Norbury, and H. M. Byrne, *Physica D*, 126, 1999.

движение системы описывается *обыкновенными* дифференциальными уравнениями (1.5.2). Этот вопрос обсуждался в разделе 1.5.1.

В механике сплошных сред положение распределенной системы не может больше описываться конечным числом переменных, зависящих от времени. В этом случае кинетическая и потенциальная энергия представляются интегралами от функций нескольких переменных. Это приводит к дифференциальным уравнениям с *частными* производными, получаемым из вариационного принципа Гамильтона, который был введен в разделе 1.5.2. Математические модели имеют сравнительно простую (линейную) форму, если движение ограничено окрестностью положения равновесия непрерывной системы.

2.6.1. Малые колебания струны. *Струна*, рассматриваемая как тонкая эластичная нить, натянутая вдоль оси x, представляет собой простой пример одномерной распределенной системы.

Рассмотрим следующую физическую задачу. Отклоним струну от положения равновесия и отпустим. Очевидно, что струна будет стремиться вернуться в первоначальное положение под действием силы, связанной с ее натяжением при отклонении от равновесия. Однако, когда будет достигнуто положение равновесия, струна не остановится, инерция отклонит ее от оси x в противоположном направлении, и процесс повторится. Таким образом, предполагая, что растяжение — единственная сила, подействовавшая на струну, мы имеем свободные колебания струны относительно положения равновесия.

Составим дифференциальное уравнение для описания перпендикулярного смещения $u = u(x,t)$ точки x струны от положения равновесия в момент времени t. Итак, мы рассматриваем *малые колебания* струны, предполагая, что членами высшего порядка в разложении в ряд функции $u(x,t)$ и ее производных можно пренебречь по сравнению с главными членами разложения.

Согласно стандартным обозначениям я использую нижний индекс для частной производной. Например, частные производные от функции $u(x,t)$ по переменным x и t обозначаются соответственно u_x и u_t.

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны. Тогда масса малого элемента струны длины dx в интервале $(x, x+dx)$ равна $\rho(x)\,dx$. Соответственно плотность кинетической энергии T струны в точке x в момент t записывается в форме

$$T = \frac{1}{2}\,\rho(x)\,u_t^2. \tag{2.6.1}$$

Потенциальная энергия пропорциональна увеличению длины струны по сравнению с ее длиной в покое. Коэффициент пропорциональности — положительное число $\mu > 0$, называемое *натяжением*. Поскольку длина элемента струны dx при отклонении становится

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (u_x dx)^2} = \sqrt{1+u_x^2}\;dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\,u_x^2\right] dx,$$

увеличение длины элемента струны имеет вид

$$\sqrt{1+u_x^2}\;dx - dx \approx \frac{1}{2}\,u_x^2\,dx.$$

Таким образом, плотность потенциальной энергии определяется выражением

$$U = \frac{1}{2}\,\mu u_x^2. \tag{2.6.2}$$

К сплошной среде можно применить понятие *действия* S, введенное в разделе 1.5.1. Запишем интеграл действия для струны:

$$S = \int L\,dx\,dt,$$

где, согласно уравнениям (2.6.1) и (2.6.2), лагранжиан

$$L = T - U$$

имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left[\rho(x)\,u_t^2 - \mu u_x^2\right]. \tag{2.6.3}$$

Таким образом, уравнение Эйлера–Лагранжа (1.5.4) имеет форму:

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) = 0. \tag{2.6.4}$$

Здесь D_t и D_x — полные дифференциалы (см. (1.4.9))

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_x}$$

и

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\,\frac{\partial}{\partial u_x}$$

по t и x соответственно.

Для лагранжиана (2.6.3) мы имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = \rho(x)u_t, \quad \frac{\partial L}{\partial u_x} = -\mu u_x,$$

и, следовательно,

$$D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) = \rho(x)u_{tt}, \quad D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) = -\mu u_{xx}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (2.6.4), мы получаем следующее линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$-\rho(x)u_{tt} + \mu u_{xx} = 0.$$

После деления на $-\rho(x)$ мы получаем *волновое уравнение* для свободных малых поперечных колебаний струны:

$$u_{tt} - k^2(x)u_{xx} = 0, \quad \text{где} \quad k^2(x) = \frac{\mu}{\rho(x)},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2.6.5}$$

Если струна подвергается действию внешней силы $f(x,t)$, перпендикулярной струне, кинетическая энергия (2.6.1) остается неизменной, но потенциальная энергия (2.6.2) принимает форму

$$U = \frac{1}{2}\,\mu u_x^2 - f(x,t)\,u. \tag{2.6.6}$$

В этом случае мы имеем

$$L = \frac{1}{2}\left[\rho(x)u_t^2 - \mu u_x^2\right] + f(x,t)\,u \tag{2.6.7}$$

вместо (2.6.3) и, вследствие этого,

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f(x,t), \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = \rho(x)u_t, \quad \frac{\partial L}{\partial u_x} = -\mu u_x.$$

Соответственно уравнение (2.6.5) перейдет в следующее уравнение для *вынужденных колебаний* струны:

$$\rho(x)u_{tt} - \mu u_{xx} = f(x,t). \tag{2.6.8}$$

Аналогично, можно получить уравнение для *продольных* малых колебаний упругого стержня:

$$\rho(x)u_{tt} - \left[E(x)u_x\right]_x = f(x,t), \tag{2.6.9}$$

где $E(x)$ — модуль Юнга (Young), то есть модуль удлинения стержня.

2.6.2. Колебания мембраны. *Мембрана* — часть двумерной поверхности, выполненная из упругого материала. Потенциальная энергия мембраны пропорциональна изменению площади ее поверхности. Положительная константа $\mu > 0$ (коэффициент пропорциональности) называется *напряжением*. Для плотности мембраны введем обозначение $\rho(x,y)$.

Пусть покоящаяся мембрана занимает часть плоскости (x,y), и пусть $u(x,y,t)$ — деформация мембраны в направлении нормали к ее плоскости при равновесии. Будем по-прежнему рассматривать малые деформации и пренебрегать членами высшего порядка в разложении в ряд функций u, u_x, u_y по сравнению с линейным членом разложения. В этом случае площадь элемента деформированной мембраны запишется в виде

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\;dx\,dy \approx \left[1 + \frac{1}{2}\,(u_x^2 + u_y^2)\right] dx\,dy. \tag{2.6.10}$$

Подставляя площадь $dx\,dy$ элемента до деформации, находим следующее изменение площади:

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\,dy.$$

Таким образом, плотность потенциальной энергии имеет вид

$$U = \frac{\mu}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right),$$

в то время как плотность кинетической энергии аналогична той, которую мы получили для струны (2.6.1), а именно:

$$T = \frac{1}{2}\,\rho(x,y)\,u_t^2.$$

Итак, лагранжиан мембраны имеет форму

$$L = \frac{1}{2}\left[\rho(x,y)\,u_t^2 - \mu\left(u_x^2 + u_y^2\right)\right], \tag{2.6.11}$$

и соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа записывается следующим образом:

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - D_y\left(\frac{\partial L}{\partial u_y}\right) = 0, \tag{2.6.12}$$

где D_t, D_x и D_y — полные дифференциалы по t, x и y соответственно:

$$\begin{aligned}
D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ty}\,\frac{\partial}{\partial u_y},\\
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\,\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy}\,\frac{\partial}{\partial u_y},\\
D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{ty}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xy}\,\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy}\,\frac{\partial}{\partial u_y}\,.
\end{aligned}$$

Подставляя лагранжиан (2.6.11) в (2.6.12), продолжая вычисления, как в задаче со струной, и используя снова обозначение

$$k^2(x,y) = \frac{\mu}{\rho(x,y)},$$

получаем двумерное *волновое уравнение для колебаний мембраны*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{2.6.13}$$

Выражение в скобках представляет собой двумерную версию лапласиана (1.3.19), и уравнение (2.6.13) часто записывается в форме

$$u_{tt} - k^2(x,y)\,\Delta u = 0. \tag{2.6.14}$$

В присутствии внешней силы $f(x,y,t)$, нормальной к плоскости (x,y), уравнение вынужденных колебаний мембраны запишется в виде

$$u_{tt} - k^2(x,y)\,\Delta u = F(x,y,t), \tag{2.6.15}$$

где $F(x,y,t) = f(x,y,t)/\rho(x,y)$.

Чаще всего волновое уравнение рассматривают при условии, что плотность ρ постоянна. При этом коэффициент k^2 также постоянен. Это предположение также может быть использовано в трехмерном волновом уравнении:

$$u_{tt} - k^2\Delta u = F(x,y,z,t), \quad k^2 = \mathrm{const}, \tag{2.6.16}$$

где Δ — оператор Лапласа (1.3.19):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Волновое уравнение (2.6.16) называется *однородным*, если $F = 0$, и *неоднородным* в противном случае (см. раздел 5.1).

Аналогично одномерному (2.6.5) и двумерному (2.6.13) волновым уравнениям мы также рассмотрим трехмерное линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{2.6.17}$$

представляющее собой одно из основных уравнений математической физики. Например, оно описывает распространение световых волн; при этом коэффициент k^2 в уравнении (2.6.17) равен c^2, где c — скорость света в вакууме.

Заметим, что любое волновое уравнение с постоянным коэффициентом k^2 можно свести к уравнению с $k^2 = 1$ с помощью подходящего преобразования растяжения. Следовательно, мы будем также использовать следующую эквивалентную форму, например, свободного волнового уравнения:

$$u_{tt} - \Delta u = 0. \tag{2.6.18}$$

2.6.3. Минимальные поверхности. Мы получили волновое уравнение малых колебаний мембран, используя аппроксимацию (2.6.10) для вариации площади поверхности мембраны. Проблема минимальных поверхностей [1]) требует определения всех возможных конфигураций мембраны при условии, что площадь ее поверхности

$$\int\limits_V \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\; dx\, dy$$

принимает минимальное значение. Таким образом, соответствующее дифференциальное уравнение для минимальной поверхности есть уравнение Эйлера–Лагранжа с лагранжианом

$$L = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\,. \tag{2.6.19}$$

Поскольку лагранжиан (2.6.19) не содержит u и u_t и справедливо

$$\frac{\partial L}{\partial u_x} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial u_y} = \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}},$$

уравнение Эйлера–Лагранжа (2.6.12) записывается в виде

$$D_x\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) + D_y\left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) = 0 \tag{2.6.20}$$

[1]) Эта проблема была впервые сформулирована Л. Эйлером. Позднее бельгийский физик Плато (J. Plateau) получил минимальные поверхности экспериментально и описал их в 1873 году. С тех пор проблема минимальных поверхностей стала известна как *проблема Плато* (см. [46, с. 534]). Глубокое математическое исследование проблемы принадлежит Р. Куранту (R. Courant). Я помню его лекцию на российско-американской конференции в 1963 году в Новосибирском университете, где я был студентом. Для оживления доклада он повторил в качестве иллюстраций эксперименты Плато и получил минимальные поверхности путем погружения в мыльный раствор кусков проволоки, имеющих форму замкнутых кривых различной формы.

и приводит к следующему нелинейному уравнению:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. \tag{2.6.21}$$

Линеаризация уравнения (2.6.21) дает уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.6.22}$$

для решения *задачи равновесия* мембраны.

2.6.4. Колебания тонких стержней и пластинок. С физической точки зрения тонкий стержень — это тонкая проволока, которая сопротивляется изгибу, в то время как струна сопротивляется удлинению. С математической точки зрения стержень — это одномерный отрезок, располагающийся вдоль прямой линии, будучи в покое. При изгибе он приобретает потенциальную энергию с плотностью, пропорциональной квадрату кривизны. Введем обозначение $u(x,t)$ для отклонения стержня от положения равновесия. Вновь рассмотрим малые колебания, определяемые как в случае со струной. Деформированный стержень есть кривая $u = u(x,t)$ на плоскости x, u, где время t рассматривается как параметр.

Напомним, что кривизна кривой есть *скорость изменения ее направления* (то есть направления касательной к кривой) и характеризует гладкость или крутизну кривой. Для плоской кривой $u = u(x,t)$ квадрат кривизны K в точке x дается выражением

$$K^2 = \frac{u_{xx}^2}{\left(1 + u_x^2\right)^3}$$

или приближенно

$$K^2 \approx u_{xx}^2.$$

Следовательно, плотность потенциальной энергии есть

$$U = \frac{\mu}{2}\, u_{xx}^2,$$

в то время как плотность кинетической энергии по-прежнему имеет форму (2.6.1),

$$T = \frac{1}{2}\,\rho\, u_t^2,$$

где $\rho = \rho(x)$, $\mu = \mathrm{const}$. Таким образом, лагранжиан равен

$$L = \frac{1}{2}\left(\rho u_t^2 - \mu u_{xx}^2\right). \tag{2.6.23}$$

В случае если в лагранжиан входят производные второго порядка:

$$L = L(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}),$$

вариационный принцип Гамильтона приводит к следующему уравнению Эйлера–Лагранжа (ср. с (1.5.4)):

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + \\ + D_t^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tt}}\right) + D_t D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tx}}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) = 0. \tag{2.6.24}$$

Для лагранжиана (2.6.23) уравнение (2.6.24) записывается следующим образом:

$$-D_t(\rho u_t) - D_x^2(\mu u_{xx}) = -\rho u_{tt} - \mu u_{xxxx} = 0.$$

Мы можем также учесть внешние силы, как мы поступили в задаче со струнами. Тогда малые поперечные колебания тонких стержней подчиняются следующим дифференциальным уравнениям с частными производными четвертого порядка:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f, \tag{2.6.25}$$

где f — суммарная сила, действующая на стержень, и μ — положительная константа.

Составление дифференциального уравнения, описывающего колебания пластин, можно провести подобно тому, как это было сделано для стержней. Пластина — это эластичная двумерная поверхность, плоская в состоянии равновесия, плотность потенциальной энергии U которой после деформации пропорциональна квадратичной форме от *главных кривизн* K и H пластины:

$$U = \alpha H^2 + \beta K, \quad \alpha,\, \beta = \text{const}.$$

Выражения для K и H приводятся в книгах по дифференциальной геометрии. В случае двумерных поверхностей, задаваемых уравнением $u = u(x, y, t)$, где время t рассматривается как параметр, имеем:

$$K = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^2}, \qquad H = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right),$$

где $\nabla u = (u_x, u_y)$. В приближении малых колебаний мы получаем:

$$K \approx u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \qquad H \approx \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}.$$

Итак, полагая $\alpha = \mu/2$, мы имеем

$$U \approx \frac{\mu}{2}\,(\Delta u)^2 + \beta(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2).$$

Упражнение 2.6.1. Докажем, что

$$\frac{\delta}{\delta u}\,(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 0. \tag{2.6.26}$$

С учетом уравнения (2.6.26) мы получаем лагранжиан в форме

$$L = \frac{1}{2}\left[\rho u_t^2 - \mu(\Delta u)^2\right]. \tag{2.6.27}$$

Двумерная версия уравнения Эйлера–Лагранжа (2.6.24) с этим лагранжианом дает следующее дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка для колебаний пластин:

$$\rho u_{tt} + \mu(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) = 0. \tag{2.6.28}$$

2.6.5. Нелинейные волны. Рассмотрим однородную мембрану, напряжение которой изменяется при деформациях, то есть предположим, что $\mu = \phi(u) > 0$ и $\rho = \text{const}$. Примем для простоты $\rho = 1$. Тогда лагранжиан (2.6.11) заменится на

$$L = \frac{1}{2}\left[u_t^2 - \phi(u)\left(u_x^2 + u_y^2\right)\right], \tag{2.6.29}$$

и соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - D_y\left(\frac{\partial L}{\partial u_y}\right) = 0$$

запишется так:

$$-\frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_x^2 - \frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_y^2 - D_t[u_t] + D_x[\phi(u)\,u_x] + D_y[\phi(u)\,u_y] = 0$$

или

$$-\frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_x^2 - \frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_y^2 - u_{tt} + \phi(u)[u_{xx} + u_{yy}] + \phi'(u)[u_x^2 + u_y^2] = 0,$$

откуда после приведения подобных членов получаем

$$-u_{tt} + \phi(u)[u_{xx} + u_{yy}] + \frac{1}{2}\,\phi'(u)\left[u_x^2 + u_y^2\right] = 0.$$

Таким образом, мы имеем следующее *нелинейное волновое уравнение*:

$$u_{tt} = \phi(u)\,\Delta u + \frac{1}{2}\,\phi'(u)\,|\nabla u|^2. \tag{2.6.30}$$

Уравнение нелинейной волны (2.6.30) может быть записано для любого числа переменных $x^1, \ldots, x^n$. Например, в одномерном случае имеем:

$$u_{tt} = \phi(u)\,u_{xx} + \frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_x^2. \tag{2.6.31}$$

Следующие нелинейные дифференциальные уравнения отличаются от (2.6.31) и также используются при изучении нелинейных волновых процессов:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [f(u)u_x]_x, \\ u_{tt} &= [f(x,u)u_x]_x, \\ u_{tt} &= [f(u)u_x + g(x,u)]_x. \end{aligned} \tag{2.6.32}$$

Определяя потенциал v уравнением $u = v_x$, представим уравнения (2.6.32), соответственно, в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= f(v_x)v_{xx}, \\ v_{tt} &= f(x,v_x)v_{xx}, \\ v_{tt} &= f(v_x)v_{xx} + g(x,v_x). \end{aligned} \tag{2.6.33}$$

Короче говоря, последние уравнения принадлежат к следующему достаточно общему классу нелинейных одномерных волновых уравнений:

$$v_{tt} = f(x,v_x)v_{xx} + g(x,v_x). \tag{2.6.34}$$

Другой тип нелинейных волновых явлений, представляющих практический интерес, известен в газовой динамике как *короткие волны*. Они описываются системой

$$
\begin{aligned}
&u_y - 2v_t - 2(v - x)v_x - 2kv = 0,\\
&v_y + u_x = 0, \quad k = \mathrm{const}.
\end{aligned}
$$

Эта система, состоящая из двух уравнений первого порядка, может быть сведена подстановкой $u = w_y$, $v = -w_x$ к одному уравнению второго порядка, а именно:

$$
2w_{tx} + 2(x + w_x)w_{xx} + w_{yy} + 2kw_x = 0. \tag{2.6.35}
$$

2.6.6. Уравнения Чаплыгина и Трикоми. Уравнение Чаплыгина имеет форму

$$
\varphi(x)u_{yy} + u_{xx} = 0. \tag{2.6.36}
$$

Оно играет важную роль в задаче аэродинамики высоких скоростей и было предложено С.А. Чаплыгиным в 1902 году в его диссертации «О газовых струях». Уравнение Чаплыгина используется для изучения двумерного установившегося околозвукового потока и имеет практические приложения, например, в самолетостроении при моделировании струй газового потока вокруг крыла самолета, когда скорость полета близка к скорости звука.

Хорошей аппроксимацией уравнения Чаплыгина является уравнение Трикоми

$$
xu_{yy} + u_{xx} = 0. \tag{2.6.37}
$$

Уравнения (2.6.36) и (2.6.37) являются примерами дифференциальных уравнений с частными производными так называемого *смешанного эллиптико-гиперболического типа*, например (2.6.37) — эллиптическое уравнение при $x > 0$ и гиперболическое при $x < 0$ (см. раздел 5.2.5). Фактически уравнение (2.6.37) было предложено Ф.Дж. Трикоми (F.G. Tricomi) в 1923 году при изучении линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка смешанного типа.

Задачи к главе 2

2.1. Составить уравнения Эйлера–Лагранжа для следующих лагранжианов:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)} \quad L = \frac{1}{2}\left[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2\right] - f(t, x, y, z)u,\\
&\text{б)} \quad L = \frac{1}{2}\,u_y^2 - u_t u_x - \frac{1}{6}\,u_x^3,\\
&\text{в)} \quad L = \frac{1}{2}\left(-u_t^2 + \mu u_{xx}^2\right) - f(t, x)u, \quad \mu = \mathrm{const},\\
&\text{г)} \quad L = \frac{1}{2}\left[-u_t^2 + (u_{xx} + u_{yy})^2\right] - f(t, x, y)u.
\end{aligned}
$$

2.2. Провести детальный вывод уравнения (2.6.21).

2.3. Гравитационная сила со стороны Солнца сферически симметрична. Следовательно, естественно заключить, что движение планет должно быть также сферически симметричным. Это выполнялось бы только в том случае, если планеты двигались бы по окружностям на поверхностях сфер. Однако И. Кеплер открыл (1609), что планеты движутся по эллипсам, а не по окружностям, расположенным в фиксированной плоскости, а не на сферах, с Солнцем в фокусе эллипсов, а не в центре. Объяснить, что нарушает симметрию при движении планет.

2.4. Обобщим задачу Кеплера и рассмотрим движение частицы, обладающей массой m, в произвольном центральном потенциальном поле

$$U = U(r), \quad r = |\mathbf{x}| \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,.$$

Согласно принципу стационарного действия (см. раздел 1.5.1), движение частицы определяется лагранжианом

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}(v^i)^2 - U(r).$$

Составить соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа (1.5.2).

2.5. Уравнение Дирака (2.3.32) — векторное уравнение. Его компоненты составляют четыре уравнения. Записать эти четыре уравнения в явной форме.

2.6. Проинтегрировать уравнение (2.2.3): $dP/dt = \alpha P - \beta P^2$ $(\alpha, \beta = \mathrm{const} \neq 0)$.

2.7. Показать, пользуясь уравнениями (2.3.30), что $D_t(\operatorname{div}\mathbf{E}) = 0$, $D_t(\operatorname{div}\mathbf{H}) = 0$, и, следовательно, уравнения (2.3.31), $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, справедливы в любой момент времени, если они удовлетворяются в начальный момент времени $t = t_0$.

Глава 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТРАДИЦИОННЫЙ ПОДХОД

Эта глава посвящена краткому изложению традиционных методов решения дифференциальных уравнений, созданных, в основном, в XVII и XVIII веках. Эти классические приемы просты и обычно используются в практике интегрирования частных типов обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью методов, *пригодных для этих частных случаев*.

Дополнительное чтение: Гурса Э. [4], Simmons G.F. [46].

3.1. Введение и элементарные методы

3.1.1. Дифференциальные уравнения. Задача с начальным условием. Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка (ОДУ) есть соотношение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1.1}$$

связывающее единственную независимую переменную x, зависимую переменную y и ее производные $y', \ldots, y^{(n)}$.

Классическое определение решения дифференциального уравнения состоит в следующем.

Определение 3.1.1. Говорят, что функция $y = \phi(x)$, определенная в окрестности x_0 и непрерывно дифференцируемая n раз, является решением дифференциального уравнения (3.1.1), если

$$F\big(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\big) = 0$$

тождественно по x на некотором интервале

$$(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Поскольку любой функции $y = y(x)$ соответствует кривая на плоскости (x, y), решения обыкновенных дифференциальных уравнений также называют *интегральными кривыми*.

Теоремы существования составляют основу общей теории дифференциальных уравнений, в частности, при групповом анализе Ли.

Первые систематические исследования проблемы существования решений дифференциальных уравнений принадлежат Коши (1845). Заметим, что, например, в случае уравнения (1.2.58)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

с непрерывной функцией $f(x)$ можно легко получить решение, которое принимает заданное значение y_0 при $x = x_0$, с помощью формулы (1.2.59). Решение этой *задачи с начальным условием* единственно, определено в окрестности точки x_0 и выражается с помощью формулы

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Коши обобщил этот результат, доказав существование решений в задаче с начальным условием для общего случая уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y\big|_{x=x_0} = y_0, \tag{3.1.2}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция в окрестности точки (x_0, y_0) на плоскости (x, y); обозначению $\big|_{x=x_0}$ соответствует вычисление значения выражения при $x = x_0$. Поэтому задачу с начальным условием часто называют *задачей Коши*.

Таким образом, результат Коши устанавливает существование интегральных кривых, проходящих через любую заданную точку (x_0, y_0). Однако решение может не быть единственным, если не потребовать, чтобы правая часть уравнения $f(x, y)$ была непрерывна. Например, задача с начальным условием

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}\,, \quad y\big|_{x=x_0} = 0$$

имеет два решения, а именно:

$$y = 0 \qquad \text{и} \quad y = |x - x_0|(x - x_0).$$

Вследствие этого исследования Коши были продолжены и привели к общим теоремам существования и единственности решений задачи Коши. Для наших целей достаточно использовать следующую простую версию теоремы существования и единственности.

Теорема 3.1.1. Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда задача с начальным условием (3.1.2) имеет одно и только одно решение $y = \phi(x)$, определенное в окрестности x_0.

Замечание 3.1.1. Более общая (хотя и не наиболее общая) версия теоремы требует выполнения более слабого условия, чем непрерывная дифференцируемость, а именно выполнения *условия Липшица*.

Теорема существования и единственности для уравнений более высокого порядка имеет следующий вид.

Теорема 3.1.2. Дано уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{3.1.3}$$

Задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения (3.1.3), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = y_0', \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{3.1.4}$$

Пусть функция f в уравнении (3.1.3) непрерывно дифференцируема в окрестности $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Тогда задача Коши (3.1.3), (3.1.4) имеет единственное решение, определенное в окрестности x_0.

Замечание 3.1.2. Из этого следует, что общее решение дифференциального уравнения n-го порядка (3.1.3) зависит в точности от n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

3.1.2. Интегрирование уравнения $y^{(n)} = f(x)$. Решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x)$$

подобно решению (1.2.61) уравнения (1.2.60). А именно, последовательное интегрирование дает:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2, \ldots,$$

откуда, окончательно, находится формула решения, подобная (1.2.61):

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные интегрирования.

3.1.3. Однородные уравнения. Любое однородное уравнение n-го порядка может быть проинтегрировано в квадратурах, если $n = 1$, и сводится к уравнению порядка $n-1$, если $n > 1$ (см. главу 6). Общая однородность дифференциальных уравнений определяется следующим образом.

Определение 3.1.2. Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение произвольного порядка

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{3.1.5}$$

однородно, если оно инвариантно при преобразовании подобия (растяжении) независимой и зависимой переменных (ср. с (1.1.35)):

$$\overline{x} = a^k\,x, \qquad \overline{y} = a^l\,y, \tag{3.1.6}$$

где $a > 0$ — параметр, не равный 1, а k и l — любые фиксированные действительные числа. Инвариантность означает, что

$$F\big(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}\,', \ldots, \overline{y}^{(n)}\big) = 0, \tag{3.1.7}$$

где $\overline{y}\,' = d\overline{y}/d\overline{x}$ и т. д. В частности, в случае уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{3.1.8}$$

однородность означает, что после растяжения (3.1.6) уравнение (3.1.8) принимает вид

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = f(\overline{x}, \overline{y}). \tag{3.1.9}$$

Пример 3.1.1. Уравнение первого порядка (ср. с примером 3.2.2)

$$y' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0$$

однородно, поскольку оно инвариантно при растяжении $\overline{x} = ax$, $\overline{y} = ay$. Действительно,

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{a\,dy}{a\,dx} = \frac{dy}{dx} \equiv y', \qquad \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^2 - \overline{y}^2} = \frac{2a^2xy}{a^2(3x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

и, следовательно, условие (3.1.9) удовлетворяется:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} - \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^2 - \overline{y}^2} = y' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0.$$

Пример 3.1.2. Уравнение второго порядка

$$y'' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0 \tag{3.1.10}$$

неоднородно. Действительно, рассмотрим общее растяжение (3.1.6), заменив его для удобства вычисления на $\overline{x} = ax$, $\overline{y} = by$ с положительными параметрами a и b. Тогда мы получим:

$$\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2} = \frac{b}{a^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^2 - \overline{y}^2} = \frac{ab(2xy)}{3a^2x^2 - b^2y^2}\,\cdot$$

Итак, уравнение

$$\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2} = \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^2 - \overline{y}^2}$$

можно представить в виде

$$\frac{b}{a^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ab(2xy)}{3a^2x^2 - b^2y^2}\,\cdot$$

Условие инвариантности требует, чтобы

$$\text{(а)}\quad 3a^2x^2 - b^2y^2 = c(3x^2 - y^2), \qquad \text{(б)}\quad \frac{b}{a^2} = \frac{ab}{c}\,\cdot \tag{3.1.11}$$

Из условия, что уравнение (3.1.11) (а) должно выполняться тождественно при всех x и y, следует, что $a^2 = b^2 = c$. После этого уравнение (3.1.11) (б) приобретает вид

$$\frac{b}{a^2} = \frac{ab}{a^2}$$

и приводит к условию $a = 1$. Более того, так как a и b положительны, из $b^2 = a^2 = 1$ следует, что $b = 1$. Таким образом, растяжение $\overline{x} = ax$, $\overline{y} = by$ сводится к тождественному преобразованию $\overline{x} = x$, $\overline{y} = y$ и, следовательно, по определению 3.1.2, уравнение 3.1.10 неоднородно.

Пример 3.1.3. Уравнение

$$y' + y^2 = \frac{C}{x^2}, \quad C = \text{const} \tag{3.1.12}$$

однородно, поскольку оно инвариантно при растяжении $\overline{x} = ax$, $\overline{y} = a^{-1}y$ (см. также задачу 3.4 и пример 6.3.3).

Определение 3.1.3. Я называю уравнение (3.1.5) *дважды однородным*, если оно инвариантно по отношению к независимому растяжению независимой переменной и зависимой переменной, то есть если оно не изменяется при преобразованиях

$$\overline{x} = ax, \quad \overline{y} = y \tag{3.1.13}$$

и

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = by \tag{3.1.14}$$

с независимыми положительными параметрами a и b соответственно.

Пример 3.1.4. Линейные уравнения

$$xy' + Cy = 0, \quad C = \text{const} \tag{3.1.15}$$

и

$$x^2y'' + C_1xy' + C_2y = 0, \quad C_1, C_2 = \text{const} \tag{3.1.16}$$

представляют собой примеры дважды однородных уравнений первого и второго порядка. Их называют уравнениями Эйлера первого и второго порядка соответственно (см. раздел 3.4.4).

Фактически уравнение (3.1.15) представляет собой дважды однородное уравнение первого порядка наиболее общего вида (см. задачу 6.11). Дважды однородное уравнение второго порядка наиболее общего вида имеет форму (см. задачу 6.12)

$$y'' = \frac{y}{x^2}\, H\left(\frac{xy'}{y}\right), \tag{3.1.17}$$

где H — произвольная функция. Уравнение (3.1.16) есть частный случай (3.1.17) и получено подстановкой

$$H\left(\frac{xy'}{y}\right) = -C_1\left(\frac{xy'}{y}\right) + C_2.$$

Замечание 3.1.3. Простая однородность, удовлетворяющая определению 3.1.2, в отличие от двойной однородности, соответствует случаю инвариантности при растяжении, зависящем только от одного параметра. На практике она может быть получена с помощью поиска скалярного преобразования $\overline{x} = ax$, $\overline{y} = by$ (см. (1.1.35)), содержащего два параметра, a и b. В большинстве приложений вычисления приводят либо к тождественному преобразованию, соответствующему $a = b = 1$, либо к определенному однопараметрическому растяжению (3.1.6) (см. в качестве иллюстрации пример 3.1.2 и задачу 3.4).

3.1.4. Различные типы однородности. В большинстве стандартных учебников, как правило, рассматривают следующие два типа однородности, представляющие особый интерес и соответствующие частным типам растяжения (3.1.6). Исключение делается для уравнений с частными производными первого порядка (см. раздел 4.1).

Тип 1: *равномерная однородность*. Равномерно однородные уравнения являются инвариантами при *равномерном растяжении*

$$\overline{x} = ax, \quad \overline{y} = ay, \tag{3.1.18}$$

получаемом из (3.1.6) при $k = l = 1$. Поскольку равномерное растяжение (3.1.18) оставляет неизменной первую производную, $\overline{y}' = y'$, из уравнений (3.1.8) и (3.1.9) следует, что $f(ax, ay) = f(x, y)$.

Пример 3.1.5. Следующие обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка с произвольными постоянными коэффициентами A, B и C равномерно однородны:

$$y' + \frac{y}{x} = C, \quad y'' + \frac{A}{x}\,y' + \frac{B}{x^2}\,y = \frac{C}{x},$$
$$y' + \frac{x}{y} = C, \quad y'' + \frac{A}{xy'} + \frac{B}{y} = \frac{C}{x}\,.$$

Стандартной формой равномерно однородных уравнений первого порядка является (см. задачу 6.2, а)

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.1.19}$$

Уравнение (3.1.19) можно решить, используя его инвариант y/x при растяжении (3.1.18) в качестве новой зависимой переменной, то есть подставляя

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{или} \quad y = xu(x).$$

В самом деле, уравнение (3.1.19) приобретает вид

$$xu' + u = \varphi(u)$$

и решается разделением переменных:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \equiv \ln x + C.$$

Тип 2: *однородность по функции*. Этот тип однородности означает инвариантность по отношению к преобразованию (3.1.6) при $k = 0$, $l = 1$, т. е. по отношению к растяжению только по y:

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = ay. \tag{3.1.20}$$

Однородность по функции обычно используется в случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (разделы 3.2.6, 3.3, 3.4), а также линейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. разделы 4.1 и 5.1).

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)\, y = 0$$

однородно по функции, более того, оно является общей формой обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, однородного по функции (см. задачу 6.2, б). Уравнения более высокого порядка вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0, \quad n \geqslant 2$$

также однородны по функции. Однако в случае уравнений более высокого порядка, в отличие от уравнения первого порядка, однородность по функции не означает линейности. Например, общая форма уравнений второго порядка, однородных по функции, имеет вид (см. задачу 6.2 б)

$$y'' = yF\left(x,\, \frac{y'}{y}\right).$$

Рассмотрим пример общей однородности, отличной от приведенных двух типов. Выберем растяжение (3.1.6) при $k = \sqrt{2}$, $l = 1$:

$$\overline{x} = a^{\sqrt{2}} x, \quad \overline{y} = ay.$$

Соответствующее общее уравнение первого порядка, однородное по функции, имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} F\left(\frac{y^{\sqrt{2}}}{x}\right). \tag{3.1.21}$$

Его интегрирование обсуждается ниже в задаче 6.10.

3.1.5. Понижение порядка. Любое уравнение второго порядка вида

$$y'' = f(y, y') \tag{3.1.22}$$

может быть сведено к уравнению первого порядка с помощью подстановки

$$y' = p(y). \tag{3.1.23}$$

Действительно, применяя правило дифференцирования сложной функции, мы получаем из уравнения (3.1.23):

$$y'' = y'p'(y) \equiv pp'.$$

При этом (3.1.22) становится уравнением первого порядка:

$$pp' = f(y, p) \tag{3.1.24}$$

для новой неизвестной функции $p(y)$, а роль независимой переменной принимает на себя y.

В случае, если общее решение $p = \phi(y, C_1)$ уравнения (3.1.24) известно, решение исходного уравнения (3.1.22) находится из уравнения (3.1.23),

$$\frac{dy}{dx} = \phi(y, C_1)$$

квадратурой:

$$\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Аналогично, подстановка (3.1.23) уменьшает на единицу порядок любого уравнения более высокого порядка, не содержащего явно независимую переменную x, т. е. уравнения вида

$$y^{(n)} = f\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

В этом случае мы имеем:

$$y'' = y'p' = pp', \quad y''' = y'(pp')' = p(pp')' = p(p')^2 + p^2p'', \ldots$$

и, следовательно, происходит понижение порядка уравнения до $n-1$ для новой зависимой переменной $p(y)$:

$$p^{(n-1)} = F\left(y, p, p', \ldots, p^{(n-2)}\right).$$

3.1.6. Линеаризация путем дифференцирования. Иногда нелинейные уравнения могут быть линеаризованы с помощью дифференцирования. Эту идею поясняет следующий пример.

Пример 3.1.6. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$2yy'' - y'^2 = 0. \tag{3.1.25}$$

Дифференцирование уравнения дает $2yy''' = 0$, откуда $y = 0$ (тривиальное решение уравнения (3.1.25)) или $y''' = 0$. Уравнение $y''' = 0$ имеет решение $y = ax^2 + bx + c$ с тремя произвольными постоянными a, b, c. Для нахождения этих констант подставим последнее выражение для y в уравнение (3.1.25) и получим $4ac - b^2 = 0$. Из этого следует, что либо $a \neq 0$ и тогда $c = b^2/(4a)$, либо $a = b = 0$. Соответственно, общее решение уравнения (3.1.25) имеет следующий вид:

$$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \frac{1}{4a}(2ax+b)^2 \quad (a \neq 0) \quad \text{и} \quad y = c.$$

3.2. Уравнения первого порядка

3.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными. Процедура *разделения переменных* применима к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка вида

$$y' = p(x)\,q(y). \tag{3.2.1}$$

Перепишем уравнение (3.2.1) в дифференциальной форме

$$\frac{1}{q(y)}\,\frac{dy}{dx}\,dx = p(x)\,dx,$$

и проинтегрируем обе части по x:

$$\int \frac{1}{q(y)}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int p(x)\,dx + C.$$

Произведем замену переменных в левой части, переходя от x к y, используя правило замены переменных в интегралах (см. раздел 1.2.4 и свойство инвариантности дифференциала (1.2.7)). В итоге это интегральное уравнение перепишется в виде

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\, dx + C. \tag{3.2.2}$$

Вычисляя интегралы в обеих частях и выражая из полученного равенства y, мы получаем общее решение, содержащее константу интегрирования C.

3.2.2. Уравнения в полных дифференциалах.

Определение 3.2.1. Говорят, что дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее форму

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0, \tag{3.2.3}$$

является уравнением *в полных дифференциалах*, если левая часть уравнения есть полный дифференциал, то есть если

$$M\, dx + N\, dy = d\Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy, \tag{3.2.4}$$

где $\Phi(x,y)$ — некоторая функция.

Функция Φ для уравнения в полных дифференциалах (3.2.3) находится из уравнения (3.2.4). Последнее следует переписать в виде системы дифференциальных уравнений для неизвестной Φ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y). \tag{3.2.5}$$

Эта *переопределенная* система (а именно два уравнения для одной неизвестной функции Φ) интегрируема (т. е. имеет решение), если и только если выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\,. \tag{3.2.6}$$

Чтобы решить уравнения (3.2.5), проинтегрируем, например, первое из уравнений (3.2.5) по x,

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)\, dx + g(y), \tag{3.2.7}$$

и подставим во второе уравнение (3.2.5):

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx + g'(y) = N(x,y). \tag{3.2.8}$$

Решая (3.2.8) относительно $g'(y)$ и интегрируя, мы находим функцию $g(y)$, подставляем ее в (3.2.7) и однозначно получаем $\Phi(x,y)$. Решение $y = f(x,C)$ уравнения в полных дифференциалах (3.2.3) дается неявно в виде

$$\Phi(x,y) = C, \tag{3.2.9}$$

где C — произвольная постоянная.

Можно начать с интегрирования второго уравнения (3.2.5) по y. Тогда уравнения (3.2.7) и (3.2.8) заменятся на уравнения

$$\Phi(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x) \tag{3.2.10}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + h'(x) = M(x,y) \tag{3.2.11}$$

соответственно.

Замечание 3.2.1. Смотри также простой метод, приведенный в разделе 6.6.2.

Пример 3.2.1. Рассмотрим уравнение $\bigl(y\,e^{xy} + \cos x\bigr)dx + x\,e^{xy}\,dy = 0$. Функции $M = y\,e^{xy} + \cos x$ и $N = x\,e^{xy}$ удовлетворяют условию (3.2.6):

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = (1+xy)\,e^{xy}.$$

Уравнение (3.2.10) дает $\Phi(x,y) = \int x\,e^{xy}\,dy + h(x) = e^{xy} + h(x)$, и (3.2.11) записывается в виде $y\,e^{xy} + h'(x) = y\,e^{xy} + \cos x$, откуда $h'(x) = \cos x$. Таким образом,

$$\Phi(x,y) = e^{xy} + \sin x.$$

Уравнение (3.2.9), $e^{xy} + \sin x = C$, удается разрешить относительно y, и мы получаем следующее общее решение рассматриваемого уравнения:

$$y = \frac{1}{x}\,\ln|C - \sin x|.$$

3.2.3. Интегрирующий множитель (А. Клеро, 1739). Если уравнение (3.2.3) не является уравнением в полных дифференциалах, его можно свести к такому виду с помощью умножения на подходящую функцию. А именно, Клеро в 1739 году впервые показал, что для любого уравнения (3.2.3) существует функция $\mu(x,y)$, называемая *интегрирующим множителем*, такая, что эквивалентное уравнение

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Согласно определению уравнений в полных дифференциалах, интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению (см. уравнение (3.2.6))

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\,. \tag{3.2.12}$$

Решение этого уравнения относительно $\mu(x,y)$ обычно не проще, чем интегрирование исходного уравнения (3.2.3). Тем не менее интегрирующий множитель может быть угадан или использован в специальных случаях [1]). Например, он широко используется в современных учебниках для интегрирования

[1]) В групповом анализе Ли предлагается общая формула для интегрирующего множителя в случае, если уравнения первого порядка допускают инфинитезимальные симметрии (см. раздел 6.4.1).

неоднородных линейных уравнений первого порядка вместо простого, эффективного и более общего метода *вариации параметров* (см. раздел 3.2.7). Полезна следующая теорема.

Теорема 3.2.1. Если известны два линейно независимых интегрирующих множителя, $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$, уравнения (3.2.3), то общее решение этого уравнения находится без его интегрирования:

$$\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C. \tag{3.2.13}$$

Пример 3.2.2. Уравнение

$$2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0 \tag{3.2.14}$$

не является уравнением в полных дифференциалах, поскольку его коэффициенты $M = 2xy$ и $N = y^2 - 3x^2$ не удовлетворяют (3.2.6). Убедимся, что $\mu = 1/y^4$ — интегрирующий множитель. Действительно,

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) = -6\,\frac{x}{y^4}, \quad \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right) = -6\,\frac{x}{y^4}\,.$$

Проинтегрируем соответствующее уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{2x}{y^3}\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0. \tag{3.2.15}$$

Из уравнения (3.2.7) имеем:

$$\Phi(x,y) = \int \frac{2x}{y^3}\,dx + g(y) = \frac{x^2}{y^3} + g(y),$$

а уравнение (3.2.8) имеет вид

$$-\frac{3x^2}{y^4} + g'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4},$$

откуда $g'(y) = y^{-2}$. Таким образом, $g(y) = -1/y$, и мы получаем окончательно (см. также пример 6.6.3 раздела 6.6.2)

$$\Phi(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\,.$$

Решение исходного дифференциального уравнения находится явно:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C, \qquad x^2 - y^2 = Cy^3.$$

Это решение может быть получено без непосредственного интегрирования, поскольку, помимо $\mu_1 = 1/y^4$, можно указать второй интегрирующий множитель $\mu_2 = 1/(y^3 - x^2y)$ (он получен в примере 6.4.1 раздела 6.4.1). Уравнение (3.2.13) дает:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{y^3 - x^2y}{y^4} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = C.$$

3.2.4. Уравнение Риккати. *Уравнение Риккати* общего вида — это уравнение первого порядка с квадратичной нелинейностью:

$$y' = P(x) + Q(x)\,y + R(x)\,y^2. \tag{3.2.16}$$

Отличительное свойство уравнения Риккати состоит в том, что оно допускает *нелинейную суперпозицию*. А именно, ангармоническое отношение любых четырех решений

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad y_3(x), \quad y_4(x)$$

уравнения (3.2.16) не зависит от x, т. е.

$$\frac{y_4(x) - y_2(x)}{y_4(x) - y_1(x)} : \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = C, \quad C = \text{const}. \tag{3.2.17}$$

Из этого следует, что общее решение уравнения (3.2.16) можно найти, зная три частных решения. Действительно, зафиксируем в (3.2.17) три любых различных частных решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и будем изменять y_4 для получения общего решения y уравнения (3.2.16). Тогда (3.2.17) примет форму

$$\frac{y - y_2(x)}{y - y_1(x)} : \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = C$$

с произвольной постоянной C. Разрешая это уравнение относительно y, мы приходим к следующему представлению общего решения уравнения (3.2.16):

$$y = \frac{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}\,. \tag{3.2.18}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = y_2(x) - y_3(x), \quad &&\varphi_2(x) = y_3(x) - y_1(x),\\ &\psi_1(x) = y_1(x)\,\varphi_1(x), &&\psi_2(x) = y_2(x)\,\varphi_2(x). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения Риккати является линейно-рациональной функцией (3.2.18) произвольной постоянной C. Верно и обратное утверждение: если общее решение дифференциального уравнения первого порядка является линейно-рациональной функцией произвольной постоянной, то это уравнение является уравнением Риккати.

Любое уравнение Риккати (3.2.16) с помощью подстановки $y \mapsto \alpha(x)\,y$ может быть приведено к частному виду, содержащему лишь две функции $Q(x)$ и $P(x)$:

$$y' + y^2 = Q(x)\,y + P(x). \tag{3.2.19}$$

В самом деле, пусть $\overline{y} = \alpha(x)y$. Тогда

$$y = \frac{1}{\alpha}\,\overline{y}, \quad y' = \frac{1}{\alpha}\,\overline{y}\,' - \frac{\alpha'}{\alpha^2}\,\overline{y}$$

и

$$y' - Ry^2 - Qy - P = \frac{1}{\alpha}\left[\overline{y}' - \frac{R}{\alpha}\,\overline{y}^2 - \left(Q + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)\overline{y} - \alpha P\right].$$

Отсюда, полагая $\alpha(x) = -R(x)$, мы сводим уравнение (3.2.16) к

$$\overline{y}' + \overline{y}^2 = \overline{Q}(x)\,\overline{y} + \overline{P}(x),$$

где $\overline{Q} = Q + (\alpha'/\alpha)$, $\overline{P} = \alpha P$. Обозначая $\overline{y}$, $\overline{Q}$ и $\overline{P}$ снова, соответственно, y, Q и P, мы получаем (3.2.19).

Более того, с помощью подстановки $y \mapsto y + \beta(x)$ уравнение (3.2.19) может быть приведено к еще более простой форме:

$$y' + y^2 = P(x), \tag{3.2.20}$$

которую называют *канонической формой* уравнения Риккати. Действительно, положим $\overline{y} = y + \beta(x)$ и получим:

$$y = \overline{y} - \beta(x), \quad y' = \overline{y}' - \beta'(x),$$
$$y' + y^2 - Qy - P = \overline{y}' + \overline{y}^2 - (Q + 2\beta)\,\overline{y} - (P + \beta' - \beta^2 - Q\beta).$$

Отсюда, полагая $\beta(x) = -\dfrac{1}{2}\,Q(x)$, мы приводим уравнение (3.2.19) к виду

$$\overline{y}' + \overline{y}^2 = \overline{P}(x),$$

где $\overline{P}(x) = P(x) - \dfrac{1}{2}\,Q'(x) + \dfrac{1}{4}\,Q^2(x)$. Обозначая $\overline{y}$ и $\overline{P}$ снова, соответственно, y и P, мы получаем (3.2.20).

В общем случае замена переменных $(x, y) \mapsto (\overline{x}, \overline{y})$ называется *преобразованием эквивалентности* уравнения Риккати, если любое уравнение вида (3.2.16) преобразуется в уравнение того же типа, возможно, с другими коэффициентами. Говорят, что уравнения *эквивалентны*, если они связаны преобразованием эквивалентности. Множество всех преобразований эквивалентности уравнения Риккати (3.2.16) составляют

а) произвольная замена независимой переменной:

$$\overline{x} = \phi(x), \qquad \phi'(x) \neq 0, \tag{3.2.21}$$

б) линейно-рациональные преобразования зависимой переменной:

$$\overline{y} = \frac{\alpha(x)\,y + \beta(x)}{\gamma(x)\,y + \delta(x)}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{3.2.22}$$

Мы уже подчеркивали, что уравнение Риккати — *нелинейное* уравнение первого порядка. Покажем, что оно может быть представлено в виде *линейного* уравнения второго порядка. Действительно, уравнению (3.2.16) вначале можно придать форму (3.2.19), а затем с помощью замены

$$y = \frac{u'}{u}$$

получить линейное уравнение второго порядка

$$u'' = Q(x)\,u' + P(x)\,u. \tag{3.2.23}$$

С точки зрения интегрирования может оказаться полезной процедура линеаризации, даже если при этом повышается порядок уравнения.

Пример 3.2.3. Рассмотрим уравнение Риккати (3.2.19) при $P(x) = 0$:

$$y' + y^2 = Q(x)\,y.$$

Соответствующее линейное уравнение (3.2.19),

$$u'' = Q(x)\,u',$$

может быть легко проинтегрировано в квадратуре. Действительно, подставляя $u' = z$, мы получаем уравнение первого порядка $z' = Q(x)z$. Отсюда

$$z = Ae^{\int Q(x)\,dx}.$$

Подставляя $z = u'$, приходим к уравнению

$$u' = Ae^{\int Q(x)\,dx},$$

откуда после интегрирования имеем:

$$u = A\int \left(e^{\int Q(x)\,dx}\right) dx + B.$$

Учитывая, что $y = u'/u$, получаем окончательно:

$$y = \frac{e^{\int Q(x)\,dx}}{C + \int \left(e^{\int Q(x)\,dx}\right) dx}, \quad C = \mathrm{const}.$$

Пример 3.2.4. Известно, что сам Риккати открыл и исследовал в 1724 году частный случай уравнения (3.2.16), а именно уравнение

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, \quad a,\ b,\ \alpha = \mathrm{const}, \tag{3.2.24}$$

известное в наши дни как *специальное уравнение Риккати*. Уравнение Риккати в общей форме (3.2.16) было введено и изучено впервые Д'Аламбером в 1763 году. Якопо Франческо Риккати и Даниил Бернулли независимо установили, что уравнение (3.2.24) интегрируемо в конечной форме в элементарных функциях, если

$$\alpha = -\frac{4k}{2k \pm 1}, \quad \text{при} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.2.25}$$

Жозеф Лиувилль в 1841 году показал, что решение специального уравнения Риккати (3.2.24) не может быть представлено в виде интегрирования элементарных функций, если α не удовлетворяет условию (3.2.25).

В 1989 году я нашел все линеаризуемые уравнения Риккати [9]. Следующее положение, взятое из [9, раздел 4.2] (см. также [40, раздел 11.2.5]), дает простой практический критерий линеаризации.

Теорема 3.2.2. Уравнение Риккати (3.2.16)

$$y' = P(x) + Q(x)\,y + R(x)\,y^2$$

линеаризуемо с помощью замены зависимой переменной y, если и только если оно удовлетворяет любому из двух следующих эквивалентных условий (А) или (Б):

(А) Уравнение (3.2.16) имеет либо форму

$$y' = Q(x)\,y + R(x)\,y^2 \tag{3.2.26}$$

с двумя произвольными функциями $Q(x)$ и $R(x)$, либо форму

$$y' = P(x) + Q(x)\,y + k[Q(x) - kP(x)]\,y^2 \tag{3.2.27}$$

с двумя произвольными функциями $P(x)$, $Q(x)$ и постоянным (в общем случае комплексным) коэффициентом k;

(Б) Уравнение (3.2.16) допускает в качестве решения константу (в общем случае комплексную).

Замечание 3.2.2. Уравнение (3.2.26) допускает в качестве такого решения $y = 0$. В свою очередь, уравнение (3.2.27) допускает решение в виде константы $y = -1/k$. Из этого следует, что линейное уравнение $y' = P(x) + Q(x)\,y$, которое является частным случаем (3.2.27) при $k = 0$, можно рассматривать как частный случай уравнения Риккати, допускающий в качестве частного решения константу $y = \infty$.

3.2.5. Уравнение Бернулли.

Нелинейное уравнение

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \quad (n \neq 0 \;\text{ и }\; n \neq 1)$$

известно как уравнение Бернулли [1]. Оно может быть сведено к линейному уравнению и решено в квадратуре. Действительно, разделив обе части уравнения Бернулли на y^n, мы получаем $y^{-n}y' + P(x)\,y^{1-n} = Q(x)$, или

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dy^{1-n}}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x).$$

Отсюда подстановкой $z = y^{1-n}$ сводим уравнение Бернулли к линейному уравнению

$$z' + (1-n)\,P(x)\,z = (1-n)\,Q(x).$$

3.2.6. Однородные линейные уравнения.

Линейное уравнение первого порядка общего вида имеет форму

$$y' + P(x)\,y = Q(x). \tag{3.2.28}$$

Уравнение (3.2.28) однородно по функции, если и только если $Q(x)=0$ (см. раздел 3.1.3). Как следствие, в учебниках обычно используется следующая терминология: уравнение (3.2.28) называется *однородным*, если $Q(x) = 0$, и *неоднородным* в противном случае.

Замечание 3.2.3. Короче говоря, общая однородность идентифицируется в этой терминологии с однородностью по функции. Такая договоренность не вызывала недоразумений в прошлом. Но в наши дни, когда существует тенденция замещения знаний в области математики работой с компьютером, все больше и больше студентов и преподавателей воспринимают однородность формально как простое утверждение, состоящее в том, что правая часть дифференциального уравнения обращается в нуль, и ошибочно применяют

[1] Оно было открыто Якобом Бернулли в 1695 году и решено Лейбницем в 1696 году.

это утверждение также по отношению к нелинейным уравнениям. С этой точки зрения уравнение (3.1.10)

$$y'' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0$$

должно считаться однородным, в то время как уравнения, приведенные в примере 3.1.5, например,

$$y'' + \frac{A}{x}\,y' + \frac{B}{x^2}\,y = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0,$$

— неоднородными.

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y' + P(x)\,y = 0. \tag{3.2.29}$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0$$

и после интегрирования получим

$$\ln y + \int P(x)\,dx = \text{const}.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$y = Ce^{-\int P\,dx}, \quad C = \text{const}. \tag{3.2.30}$$

3.2.7. Неоднородные линейные уравнения. Вариация параметра. Простейший путь решения неоднородных линейных уравнений (3.2.28) — это метод *вариации параметров*, предложенный Иоганном Бернулли в 1697 году. Начнем с примера.

Пример 3.2.5. Решим неоднородное уравнение

$$y' - y = x. \tag{3.2.31}$$

Сначала рассмотрим однородное уравнение (3.2.31):

$$y' - y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = Ce^x, \quad C = \text{const}.$$

Далее заменим константу интегрирования C на неизвестную функцию $u(x)$ и будем искать решение неоднородного уравнения в виде

$$y = u(x)\,e^x. \tag{3.2.32}$$

Подставляя $y' = u'e^x + ue^x$ в уравнение (3.2.31), мы получим следующее уравнение с разделяющимися переменными относительно $u(x)$:

$$u' = xe^{-x}.$$

Интегрируя его и принимая снова обозначение C для константы интегрирования, получаем:

$$u = \int xe^{-x}\,dx + C = -(x+1)e^{-x} + C, \quad C = \text{const}.$$

Наконец, подставляем выражение $u(x)$ в (3.2.32) и получаем следующее общее решение уравнения (3.2.31):

$$y = Ce^x - x - 1. \tag{3.2.33}$$

В случае неоднородного уравнения общего вида (3.2.28),

$$y' + P(x)\,y = Q(x),$$

мы поступаем аналогично. А именно, решаем однородное уравнение (3.2.28),

$$y' + P(x)\,y = 0,$$

и замещаем в его общем решении (3.2.30),

$$y = Ce^{-\int P\,dx}, \quad C = \text{const},$$

константу интегрирования C неизвестной функцией $u(x)$. Иными словами, мы представляем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = u(x)\,e^{-\int P\,dx}. \tag{3.2.34}$$

Дифференцируя, получаем:

$$y' = u'(x)\,e^{-\int P\,dx} - u(x)\,P(x)\,e^{-\int P\,dx}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3.2.28) дает:

$$u'(x)\,e^{-\int P\,dx} = Q(x) \quad \text{или} \quad u'(x) = Q(x)\,e^{\int P\,dx},$$

откуда

$$u(x) = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C, \quad C = \text{const}.$$

Подставляя найденное выражение для $u(x)$ в (3.2.34), мы получаем общее решение неоднородного линейного уравнения (3.2.28) в виде двух квадратур:

$$y = \left(C + \int Qe^{\int P\,dx}\,dx\right)e^{-\int P\,dx}. \tag{3.2.35}$$

3.3. Линейные уравнения второго порядка

Произвольное линейное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x). \tag{3.3.1}$$

Уравнение называется *однородным*, если $f(x) = 0$, и *неоднородным* в противном случае (ср. с разделом 3.2.6).

Уравнение (3.3.1) нередко представляют в форме

$$L_2[y] = f(x). \tag{3.3.2}$$

Здесь L_2 — следующий линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$L_2 = D^2 + a(x)\,D + b(x), \tag{3.3.3}$$

где

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}\,.$$

Таким образом,

$$L_2[y] = D^2 y + a(x)\,Dy + by \equiv y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y. \tag{3.3.4}$$

Термин *линейный* характеризует следующее фундаментальное свойство оператора L_2:

$$L_2[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L_2[y_1] + C_2 L_2[y_2], \quad C_1,\, C_2 = \text{const}. \tag{3.3.5}$$

3.3.1. Однородные уравнения: суперпозиция. Однородное линейное уравнение

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \tag{3.3.6}$$

или

$$L_2[y] = 0$$

обладает примечательным свойством, называемым *принципом суперпозиции* или, более определенно, свойством *линейной суперпозиции*. Этот принцип отражает свойство (3.3.5) линейного дифференциального оператора L_2 и состоит в том, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения однородного уравнения (3.3.6), то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами,

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

также является решением. Действительно, поскольку $L_2[y_1(x)] = 0$, $L_2[y_2(x)] = 0$, то из уравнения (3.3.5) следует:

$$L_2[y] = C_1 L_2[y_1(x)] + C_2 L_2[y_2(x)].$$

Принимая во внимание, что общее решение любого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные, из принципа суперпозиции получаем, что общее решение уравнения (3.3.6) представляется в виде

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x), \tag{3.3.7}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (3.3.6). Из этого следует, что для построения общего решения однородного уравнения требуется найти только два независимых решения. Итак, мы утверждаем, что два линейно независимых решения, $y_1(x)$ и $y_2(x)$, являются базой для построения *фундаментальной системы решений* уравнения (3.3.6).

3.3.2. Однородное уравнение: свойства эквивалентности. Знание свойств эквивалентности полезно при практическом интегрировании дифференциальных уравнений. *Преобразование эквивалентности* однородных линейных уравнений состоит в замене переменных, сохраняющей линейность и однородность уравнений (3.3.6). Множество всех преобразований эквивалентности включает произвольные изменения независимой переменной (ср. с (3.2.21)):

$$\overline{x} = \phi(x), \qquad \phi'(x) \neq 0, \tag{3.3.8}$$

и линейную замену зависимой переменной:

$$y = \sigma(x)\,\overline{y}, \quad \sigma \neq 0. \tag{3.3.9}$$

Определение 3.3.1. Говорят, что два уравнения вида (3.3.6) *эквивалентны*, если они связаны совокупностью преобразований (3.3.8), (3.3.9). Более того, два уравнения называются *эквивалентными по функции*, если они могут быть сведены одно к другому с помощью линейной подстановки (3.3.9).

Теорема 3.3.1. Любое однородное линейное уравнение (3.3.6)

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

эквивалентно простейшему линейному уравнению

$$\overline{y}'' = 0, \tag{3.3.10}$$

где $\overline{y}'' = d^2\overline{y}/d\overline{x}^2$.

Доказательство. Уравнение (3.3.6) приводится к виду (3.3.10) с помощью преобразования

$$\overline{x} = \int \frac{e^{-\int a(x)\,dx}}{z^2(x)}\,dx, \quad \overline{y} = \frac{y}{z(x)}, \tag{3.3.11}$$

где $z(x)$ — любое решение уравнения (3.3.6), т. е. $z'' + a(x)z' + b(x)z = 0$. Чтобы убедиться, что преобразование (3.3.11) отображает линейное уравнение общего вида на уравнение (3.3.10), обратитесь к решению задачи 6.9.

Согласно теореме 3.3.1, можно построить отображение любого уравнения вида (3.3.6) на уравнение такого же типа, используя преобразования (3.3.8) и (3.3.9). Иными словами, все уравнения (3.3.6) эквивалентны. Однако (3.3.11) показывает, что вычисление подходящего преобразования эквивалентности требует знания частных решений уравнения, которое вы хотите преобразовать в другое. Поэтому мы будем здесь использовать условие эквивалентности по функции, которое предполагает проведение только линейной подстановки (3.3.9) и дает простой и конструктивный путь интегрирования широкого класса уравнений.

Лемма 3.3.1. Однородное линейное уравнение общего вида (3.3.6),

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0,$$

эквивалентно по функции уравнению

$$y'' + \alpha(x)\,y = 0. \tag{3.3.12}$$

А именно, линейная подстановка

$$y = \overline{y}\,e^{-\frac{1}{2}\int a(x)\,dx} \tag{3.3.13}$$

сводит это уравнение к новому

$$\overline{y}'' + J(x)\,\overline{y} = 0, \tag{3.3.14}$$

где

$$J(x) = b(x) - \frac{1}{4}\,a^2(x) - \frac{1}{2}\,a'(x). \tag{3.3.15}$$

Доказательство. Выберем произвольную линейную подстановку (3.3.9) и получим:

$$y = \sigma(x)\,\overline{y}, \qquad y' = \sigma(x)\,\overline{y}' + \sigma'(x)\,\overline{y},$$

$$y'' = \sigma(x)\,\overline{y}'' + 2\sigma'(x)\,\overline{y}' + \sigma''(x)\,\overline{y}.$$

Итак, уравнение (3.3.6) приобрело вид

$$\sigma\,\overline{y}'' + [2\sigma' + a\sigma]\,\overline{y}' + [\sigma'' + a\sigma' + b\sigma]\,\overline{y} = 0. \tag{3.3.16}$$

Обратим в нуль член с $\overline{y}'$, полагая

$$2\sigma' + a\sigma = 0,$$

откуда

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2}\int a(x)\,dx}. \tag{3.3.17}$$

Далее, подставим функцию (3.3.17) и ее производные

$$\sigma' = -\frac{1}{2}\,ae^{-\frac{1}{2}\int a\,dx}, \quad \sigma'' = \left(\frac{1}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a'\right)e^{-\frac{1}{2}\int a\,dx}$$

в уравнение (3.3.16), умножим результат на $e^{\frac{1}{2}\int a(x)\,dx}$ и придем к уравнению (3.3.14):

$$\overline{y}'' + \left(b - \frac{1}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a'\right)\overline{y} = 0. \tag{3.3.18}$$

Из доказательства можно сделать следующий вывод: функция $J(x)$ (3.3.15) остается неизменной при преобразованиях уравнения (3.3.6) при любых подстановках (3.3.9). Следовательно, J следует назвать *инвариантом* уравнения (3.3.6). Из инвариантности $J(x)$ и леммы 3.3.1 вытекает следующий результат.

Теорема 3.3.2. Два однородных линейных уравнения,

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \tag{3.3.19}$$

и

$$\overline{y}'' + a_1(x)\,\overline{y}' + b_1(x)\,\overline{y} = 0, \tag{3.3.20}$$

эквивалентны по функции, т. е. могут быть переведены одно в другое с помощью подходящей линейной подстановки (3.3.9), если и только если их инварианты

$$J(x) = b(x) - \frac{1}{4}\,a^2(x) - \frac{1}{2}\,a'(x)$$

и

$$J_1(x) = b_1(x) - \frac{1}{4}\,a_1^2(x) - \frac{1}{2}\,a_1'(x)$$

совпадают, т. е. $J(x) = J_1(x)$. В частности, уравнение (3.3.6) эквивалентно по функции уравнению (3.3.10), $\overline{y}'' = 0$, если и только если его инвариант $J(x)$ равен нулю, то есть уравнение (3.3.6) имеет вид

$$y'' + a(x)\, y' + \left[\frac{1}{4}\, a^2(x) + \frac{1}{2}\, a'(x)\right] y = 0. \tag{3.3.21}$$

Пример 3.3.1. Уравнение

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \tag{3.3.22}$$

не является уравнением вида (3.3.21) и, следовательно, не эквивалентно по функции уравнению $\overline{y}'' = 0$. Инвариантом уравнения (3.3.22) является $J = 1$. С другой стороны, инвариант J_1 уравнения

$$\overline{y}'' + \overline{y} = 0 \tag{3.3.23}$$

имеет то же самое значение: $J_1 = J = 1$. Как следствие, уравнение (3.3.23) получается из уравнения (3.3.22) с помощью линейной подстановки

$$\overline{y} = \sqrt{x}\; y,$$

получающейся из (3.3.13) при $a(x) = 1/x$. Поскольку общее решение уравнения (3.3.23) имеет вид (см. пример 3.3.2 в следующем разделе)

$$\overline{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

общее решение уравнения (3.3.22) примет форму

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \big(C_1 \sin x + C_2 \cos x\big).$$

3.3.3. Однородное уравнение: постоянные коэффициенты. Рассмотрим однородное линейное уравнение (3.3.6) с постоянными коэффициентами:

$$y'' + Ay' + By = 0, \quad A,\, B = \text{const}. \tag{3.3.24}$$

Его решение было получено Леонардом Эйлером в 1743 году. Он находил частные решения в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \text{const} \tag{3.3.25}$$

(это так называемый *подход Эйлера*). Тогда дифференциальное уравнение (3.3.24) сводится к алгебраическому:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0, \tag{3.3.26}$$

называемому *характеристическим уравнением*. Соответственно,

$$P_2[\lambda] = \lambda^2 + A\lambda + B$$

называется *характеристическим полиномом* уравнения (3.3.24). Возможны три следующих случая.

(а) Характеристическое уравнение (3.3.26) имеет два различных действительных решения, λ_1 и λ_2. Тогда существуют два линейно независимых частных решения:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

и общее решение уравнения (3.3.24) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{3.3.27}$$

(б) Решения характеристического уравнения (3.3.26) комплексные, а именно $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и его комплексно сопряженное решение $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Соответствующие комплексные решения можно записать, используя формулу Эйлера (1.2.41), в виде

$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \qquad \overline{y} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Поскольку их линейные комбинации с произвольными комплексными коэффициентами снова являются решениями, мы можем заменить комплексные решения действительными, используя замену

$$y_1 = \frac{1}{2}\,(y + \overline{y}), \quad y_2 = \frac{1}{2i}\,(y - \overline{y}).$$

Итак, два комплексно сопряженных корня дают два различных действительных решения:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{3.3.28}$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.3.24) имеет в этом случае вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{3.3.29}$$

Пример 3.3.2. Рассмотрим уравнение (2.3.14) свободных гармонических колебаний

$$y'' + \omega^2 y = 0, \tag{3.3.30}$$

где $\omega \neq 0$ — действительное число. Характеристический полином $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет два комплексных корня, $\lambda_1 = i\,\omega$, $\lambda_2 = -i\,\omega$, и решение (3.3.29) имеет вид

$$y = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x). \tag{3.3.31}$$

(в) Характеристическое уравнение (3.3.26) имеет кратные корни, $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае формула (3.3.25) дает только одно решение,

$$y = e^{\lambda_1 x}.$$

Однако в этом случае мы можем воспользоваться теоремой 3.3.2. Действительно, поскольку характеристический полином имеет кратные корни, его дискриминант обращается в нуль:

$$A^2 - 4B = 0.$$

Но в этом случае инвариант

$$J = B - \frac{1}{4}\,A^2$$

также обращается в нуль, и, следовательно, уравнение (3.3.24) приводится к $\overline{y}'' = 0$. Корень характеристического уравнения равен $\lambda_1 = -A/2$, и преобразование (3.3.13) приобретает вид

$$y = \overline{y}\, e^{-\frac{1}{2}\int A\,dx} = \overline{y}\, e^{\int \lambda_1\,dx} = \overline{y}\, e^{\lambda_1 x}.$$

Далее, подставляя решение $\overline{y} = (C_1 + C_2 x)$ уравнения $\overline{y}'' = 0$, мы получаем следующее общее решение уравнения (3.3.24):

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_1 x}. \tag{3.3.32}$$

Пример 3.3.3. Рассмотрим уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Его характеристический полином

$$P_2[\lambda] = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \equiv (\lambda + 1)^2$$

имеет кратные корни $\lambda = -1$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2\, x)\, e^{-x}.$$

3.3.4. Неоднородное уравнение: вариация параметров. Пусть фундаментальная система решений однородного уравнения (3.3.6) известна. Тогда неоднородное уравнение

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x) \tag{3.3.33}$$

может быть решено в квадратурах с использованием следующего метода *вариации параметра*.

Предположим, что нам известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ однородного уравнения, т. е. пусть

$$y_1'' + a(x)\, y_1' + b(x)\, y_1 = 0, \quad y_2'' + a(x)\, y_2' + b(x)\, y_2 = 0. \tag{3.3.34}$$

Тогда мы можем получить общее решение неоднородного уравнения (3.3.33) следующим *методом вариации параметров*. Аналогично случаю уравнения первого порядка, заменим константы C_1 и C_2 в решении (3.3.7)

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

однородного уравнения на функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ соответственно. Таким образом, мы получаем

$$y = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x). \tag{3.3.35}$$

Из этого следует:

$$y' = u_1(x)\, y_1'(x) + u_2(x)\, y_2'(x) + y_1(x)\, u_1'(x) + y_2(x)\, u_2'(x). \tag{3.3.36}$$

Если мы подставим (3.3.35) в уравнение (3.3.33), то получим одно уравнение для двух неизвестных функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Следовательно, на эту функцию необходимо наложить еще одно условие. Введем это условие в виде

$$y_1(x)\,u_1'(x) + y_2(x)\,u_2'(x) = 0. \tag{3.3.37}$$

Тогда с учетом (3.3.35) и (3.3.36) мы будем иметь:

$$\begin{aligned} y &= u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x),\\ y' &= u_1(x)\,y_1'(x) + u_2(x)\,y_2'(x),\\ y'' &= u_1(x)\,y_1''(x) + u_2(x)\,y_2''(x) + y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = u_1(x)[y_1'' + a(x)\,y_1' + b(x)\,y_1]+&\\ + u_2(x)[y_2'' + a(x)\,y_2' + b(x)\,y_2]y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x)&, \end{aligned}$$

и, с учетом уравнений (3.3.34), мы получаем из уравнения (3.3.33):

$$y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x) = f(x). \tag{3.3.38}$$

Поскольку $y_1(x)$, $y_2(x)$ — известные функции, мы имеем систему двух уравнений (3.3.37) и (3.3.38) для определения функций u_1, u_2:

$$\begin{aligned} y_1(x)\,u_1'(x) + y_2(x)\,u_2'(x) &= 0,\\ y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x) &= f(x). \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы, детерминант уравнений (3.3.39)

$$W(x) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x), \tag{3.3.40}$$

известный как вронскиан, отличен от нуля. В результате система (3.3.39) может быть решена относительно производных от неизвестных функций:

$$u_1' = -\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}, \quad u_2' = \frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)},$$

и, интегрируя, получаем:

$$u_1 = -\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}\,dx + C_1, \quad u_2 = \int \frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}\,dx + C_2. \tag{3.3.41}$$

Подставляя (3.3.41) в (3.3.35), мы приходим к следующему результату.

Теорема 3.3.3. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (3.3.6),

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (3.3.33),

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x),$$

находится в квадратурах и имеет вид

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx,$$

где $W(x)$ — вронскиан (3.3.40).

Пример 3.3.4. Решим неоднородное уравнение

$$y'' + y = \sin x.$$

Мы имеем фундаментальную систему решений

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$

с вронскианом $W\big[y_1(x), y_2(x)\big] = 1$. Формула (3.3.41) дает

$$u_1(x) = -\int \sin^2 x\, dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\, \sin 2x + C_1,$$

$$u_2(x) = \int \cos x \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\, \cos^2 x + C_2.$$

Следовательно, мы получаем, после элементарных упрощающих операций, следующее решение:

$$y = -\frac{x}{2}\, \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

В этом примере мы могли выразить общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения в элементарных функциях. Однако этот факт не является существенным, и представление общего решения в квадратурах не менее полезно, например, при решении задач с начальными условиями. Это положение мы проиллюстрируем на следующих двух примерах.

Пример 3.3.5. Проинтегрируем уравнение

$$y'' + 2y' - 8y = xe^{4x} \tag{3.3.42}$$

и решим задачу Коши с начальными условиями

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1. \tag{3.3.43}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ уравнения (3.3.42) имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$, и, как следствие, фундаментальная система решений определяется выражениями

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-4x}.$$

Вронскиан (3.3.40) есть $W\big[y_1(x), y_2(x)\big] = -6e^{-2x}$. Применяя теорему 3.3.3, запишем общее решение уравнения (3.3.42) в следующем виде, удобном с точки зрения начальных условий при $x = 0$:

$$y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-4x} + \frac{1}{6}\left[e^{2x} \int\limits_0^x \tau e^{2\tau}\, d\tau - e^{-4x} \int\limits_0^x \tau e^{8\tau}\, d\tau\right]. \tag{3.3.44}$$

Дифференцируя (3.3.44), получаем:

$$y' = 2C_1\, e^{2x} - 4C_2\, e^{-4x} + \frac{1}{3}\left[e^{2x}\int\limits_0^x \tau e^{2\tau}\, d\tau + 2e^{-4x}\int\limits_0^x \tau e^{8\tau}\, d\tau\right].$$

Начальные условия (3.3.43) дают $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - 4C_2 = 1$, откуда $C_1 = 1/6$, $C_2 = -1/6$. Подставляя в (3.3.44), мы получаем следующее решение задачи Коши (3.3.42), (3.3.43):

$$y = \frac{1}{6}\left[e^{2x}\left(1 + \int\limits_0^x \tau e^{2\tau}\, d\tau\right) - e^{-4x}\left(1 + \int\limits_0^x \tau e^{8\tau}\, d\tau\right)\right]. \tag{3.3.45}$$

Замечание 3.3.1. Можно вычислить интегралы в (3.3.44) и переписать общее решение (3.3.44) и, следовательно, (3.3.45) в элементарных функциях. Действительно, интегрирование по частям дает:

$$\int\limits_0^x \tau e^{2\tau}\, d\tau = \frac{\tau}{2}\, e^{2\tau}\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{2\tau}\, d\tau = \frac{x}{2}\, e^{2x} - \frac{1}{4}\, e^{2x} + \frac{1}{4},$$

$$\int\limits_0^x \tau e^{8\tau}\, d\tau = \frac{\tau}{8}\, e^{8\tau}\Big|_0^x - \frac{1}{64}\int\limits_0^x e^{8\tau}\, d\tau = \frac{x}{8}\, e^{8x} - \frac{1}{64}\, e^{8x} + \frac{1}{64}\cdot$$

После подстановки в (3.3.44) имеем:

$$y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-4x} + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}\, e^{2x} - \frac{1}{64}\, e^{-4x} - \frac{15}{64}\, e^{4x} + \frac{3}{8}\, xe^{4x}\right], \tag{3.3.46}$$

и решение (3.3.45) задачи Коши (3.3.42), (3.3.43) приводится окончательно к виду

$$y = \frac{5}{24}\, e^{2x} - \frac{65}{384}\, e^{-4x} - \frac{5}{128}\, e^{4x} + \frac{1}{16}\, xe^{4x}. \tag{3.3.47}$$

Пример 3.3.6. Проинтегрируем уравнение

$$y'' + 2y' - 8y = \frac{1}{x+1}\, e^{3x+1} \tag{3.3.48}$$

и решим задачу Коши с начальными условиями

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1. \tag{3.3.49}$$

Действуя как в примере 3.3.5, получаем решение уравнения (3.3.48):

$$y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-4x} + \frac{1}{6}\left[e^{2x}\int\limits_0^x \frac{e^{\tau+1}}{\tau+1}\, d\tau - e^{-4x}\int\limits_0^x \frac{e^{7\tau+1}}{\tau+1}\, d\tau\right]. \tag{3.3.50}$$

Дифференцируя (3.3.50), получаем:

$$y' = 2C_1\, e^{2x} - 4C_2\, e^{-4x} + \frac{1}{3}\left[e^{2x}\int\limits_0^x \frac{e^{\tau+1}}{\tau+1}\,d\tau + 2e^{-4x}\int\limits_0^x \frac{e^{7\tau+1}}{\tau+1}\,d\tau\right].$$

Начальные условия (3.3.49) дают $C_1 = 1/6$, $C_2 = -1/6$. Следовательно, решение задачи Коши (3.3.48), (3.3.49) есть

$$y = \frac{1}{6}\left[e^{2x}\left(1 + \int\limits_0^x \frac{e^{\tau+1}}{\tau+1}\,d\tau\right) - e^{-4x}\left(1 + \int\limits_0^x \frac{e^{7\tau+1}}{\tau+1}\,d\tau\right)\right]. \tag{3.3.51}$$

Оба интеграла в (3.3.51) не выражаются в элементарных функциях.

3.3.5. Уравнение Бесселя и функции Бесселя. *Уравнение Бесселя* — это следующее однородное линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{3.3.52}$$

Решения этого уравнения называются *функциями Бесселя*. Они играют важную роль в математической физике. Одно из решений обозначается $J_n(x)$ и известно как *функция Бесселя n-го порядка*. Разложения в ряд функций Бесселя, например, при $n = 0$ и $n = 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \cdots \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

3.3.6. Гипергеометрическое уравнение. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x(1-x)\,y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\,y' - \alpha\beta\,y = 0 \tag{3.3.54}$$

с произвольными параметрами α, β и γ известно как *гипергеометрическое уравнение*. Оно имеет особенности при $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$.

Кроме того, любое однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(x^2 + Ax + B)\,y'' + (Cx + D)\,y' + Ey = 0 \tag{3.3.55}$$

может быть преобразовано в гипергеометрическое уравнение (3.3.54) при условии, что уравнение $x^2 + Ax + B = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Действительно, если переписать уравнение (3.3.54), выбрав новую независимую переменную t согласно замене

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \tag{3.3.56}$$

то мы получим

$$t(1-t)\,\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2} - C\,t\right]\frac{dy}{dt} - Ey = 0.$$

Из этого следует, что после того как мы введем обозначения

$$\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2} = \gamma, \quad C = \alpha+\beta+1, \quad E = \alpha\beta$$

и назовем новую независимую переменную t снова x, мы приходим к уравнению (3.3.54).

Если $\alpha\beta = 0$, гипергеометрическое уравнение (3.3.54) интегрируемо с помощью двух квадратур. Действительно, выбирая, например, $\beta = 0$ и интегрируя уравнение

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{(\alpha+1)x-\gamma}{x(1-x)}\,dx,$$

мы получаем $y' = C_1\,e^{q(x)}$, где

$$q(x) = \int \frac{(\alpha+1)x-\gamma}{x(1-x)}\,dx.$$

Повторное интегрирование дает:

$$y = C_1\int e^{q(x)}\,dx + C_2, \quad C_1,\, C_2 = \mathrm{const}.$$

В теории гипергеометрических функций главное внимание уделяется асимптотикам гипергеометрического уравнения и его решениям, представляемым в виде разложений в ряд вблизи точек сингулярности (см., например, классическую книгу [28]). Однако на практике мы нередко нуждаемся в нахождении аналитических выражений общих решений определенных форм гипергеометрического уравнения. Исходя из этих соображений, приведем следующую теорему [1]), определяющую класс гипергеометрических уравнений, интегрируемых в элементарных функциях или в квадратуре. Многочисленные частные случаи уравнений этого класса можно встретить в различных книгах по специальным функциям.

Теорема 3.3.4. Общее решение гипергеометрического уравнения (3.3.54) при $\beta = -1$ с двумя произвольными параметрами α и γ

$$x(1-x)\,y'' + (\gamma - \alpha\,x)\,y' + \alpha\,y = 0 \tag{3.3.57}$$

находится в квадратуре, имеющей форму

$$y = C_1\Big(x - \frac{\gamma}{\alpha}\Big)\int\bigg(|x|^{-\gamma}\,|x-1|^{\gamma-\alpha}\Big[x - \frac{\gamma}{\alpha}\Big]^{-2}\bigg)\,dx + C_2\Big(x - \frac{\gamma}{\alpha}\Big), \tag{3.3.58}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

---

[1]) Ибрагимов Н. Х. Инвариантные лагранжианы и новый метод интегрирования нелинейных уравнений // *Математический анализ и приложения*. 2005. Т. 304, № 1. С. 212–235.

Замечание 3.3.2. Если γ и $\gamma - \alpha$ — рациональные числа, интеграл (3.3.58) сводится к интегрированию рациональной функции с помощью стандартных подстановок и представляет решение (3.3.58) в элементарных функциях.

3.4. Линейные уравнения высокого порядка

Линейное уравнение n-го порядка общего вида с переменными коэффициентами имеет вид

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x). \tag{3.4.1}$$

Термин *линейное* отсылает нас к фундаментальному свойству

$$L_n[C_1\, y_1 + C_2\, y_2] = C_1 L_n[y_1] + C_2 L_n[y_2] \tag{3.4.2}$$

дифференциального оператора n-го порядка

$$L_n = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n,$$

где $D = d/dx$. Соответственно, L_n называют *линейным дифференциальным оператором*. Говорят, что уравнение (3.4.1) *однородно*, если $f(x) = 0$, и *неоднородно* в противном случае (ср. с разделами 3.2.6 и 3.3).

3.4.1. Однородные уравнения. Фундаментальная система.

Согласно *принципу линейной суперпозиции*, вытекающему из свойства (3.4.2), утверждается, что общее решение однородного линейного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{3.4.3}$$

представляет собой *линейную суперпозицию* n линейно независимых частных решений:

$$y = C_1\, y_1(x) + \cdots + C_n\, y_n(x), \tag{3.4.4}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Любое множество $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ n линейно независимых решений называется *фундаментальной системой* уравнения (3.4.3).

3.4.2. Неоднородные уравнения. Вариация параметров.

Теорема 3.4.1. Пусть фундаментальная система решений однородного уравнения (3.4.3) известна. Тогда общее решение неоднородного уравнения (3.4.1) может быть найдено в квадратурах.

Доказательство. Согласно общему методу Лагранжа (1774) это решение может быть получено с помощью *вариации параметров*. Действительно, заменим константы C_i в (3.4.4) функциями $u_i(x)$ (ср. с разделом 3.3):

$$y = u_1(x)\, y_1(x) + \cdots + u_n(x)\, y_n(x).$$

Метод Лагранжа приводит к следующим соотношениям для определения неизвестных функций $u_i(x)$:

$$\begin{aligned}
&y_1 \frac{du_1}{dx} + \cdots + y_n \frac{du_n}{dx} = 0,\\
&y_1' \frac{du_1}{dx} + \cdots + y_n' \frac{du_n}{dx} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_1^{(n-2)} \frac{du_1}{dx} + \cdots + y_n^{(n-2)} \frac{du_n}{dx} = 0,\\
&y_1^{(n-1)} \frac{du_1}{dx} + \cdots + y_n^{(n-1)} \frac{du_n}{dx} = f(x).
\end{aligned} \qquad (3.4.5)$$

Поскольку $y_1, \ldots, y_n$ известны и линейно независимы, уравнения (3.4.5) могут быть разрешены относительно производных от неизвестных функций и представлены в форме, интегрируемой в квадратуре:

$$\frac{du_k}{dx} = \psi_k(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

3.4.3. Уравнения с постоянными коэффициентами. Подход Эйлера, обсуждавшийся для случая уравнений второго порядка, применим также к однородным линейным уравнениям более высокого порядка с постоянными коэффициентами,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_1, \ldots, a_n = \text{const}. \qquad (3.4.6)$$

Если частные решения представлять в виде (3.3.25),

$$y = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \text{const},$$

то дифференциальное уравнение n-го порядка (3.4.6) сведется к алгебраическому уравнению n-го порядка

$$P_n[\lambda] \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad (3.4.7)$$

называемому *характеристическим уравнением*.

Полином $P_n(\lambda)$ известен как *характеристический полином* уравнения (3.4.6). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные различные корни характеристического уравнения (3.4.7). Тогда частные решения $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ образуют фундаментальную систему. Согласно принципу суперпозиции (3.4.4), общее решение уравнения (3.4.6) с постоянными коэффициентами представляет собой их линейную комбинацию

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}. \qquad (3.4.8)$$

В случаях комплексных и кратных корней поступают так же, как в случае уравнений второго порядка (раздел 3.3). Например, пусть λ_1 — s-кратный корень. Тогда соответствующее решение имеет вид

$$y_1 = \left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_s x^{s-1}\right) e^{\lambda_1 x}, \qquad (3.4.9)$$

где C — произвольные постоянные. С учетом всех кратных корней мы получаем следующую модификацию формулы (3.4.8) общего решения:

$$y = q_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + \cdots + q_r(x)\,e^{\lambda_r x}. \tag{3.4.10}$$

Здесь $q_s(x)$ — полином степени $s-1$ с произвольными коэффициентами, где s — порядок кратности соответствующего корня λ_s $(1 \leqslant s \leqslant r)$.

В случае комплексного корня $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ правую часть выражения (3.4.9) (и, следовательно, первое слагаемое в формуле (3.4.10)) следует заменить на

$$\left(C_1 + \cdots + C_s x^{s-1}\right) e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x) + \left(C_{s+1} + \cdots + C_{2s} x^{s-1}\right) e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x).$$

Пример 3.4.1. Рассмотрим уравнение (2.3.20),

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \alpha^4 u, \quad \alpha = \mathrm{const}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - \alpha^4 = 0$ имеет кратные корни:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha, \quad \lambda_3 = \alpha i, \quad \lambda_4 = -\alpha i.$$

Таким образом, мы приходим к формуле (2.3.21) общего решения:

$$u = C_1\,e^{\alpha x} + C_2\,e^{-\alpha x} + C_3 \cos(\alpha x) + C_4 \sin(\alpha x).$$

Пример 3.4.2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\,\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

имеет кратные мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = \overline{\lambda}_{1,2} = -i.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

3.4.4. Уравнение Эйлера. Уравнение

$$x^n\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1}\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x\,\frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \tag{3.4.11}$$

где $a_1, \ldots, a_n = \mathrm{const}$, известно как *уравнение Эйлера*. Это уравнение с переменными коэффициентами инвариантно по отношению к растяжению, т. е. оно не изменяется при замене x на kx с параметром $k \neq 0$. Из этого следует, что преобразование

$$t = \ln|x| \tag{3.4.12}$$

переводит растяжение kx в сдвиг $t + \ln|k|$ и отображает уравнение (3.4.11) в уравнение с постоянными коэффициентами, в котором роль независимой переменной играет t, а зависимой — $y(t)$.

Пример 3.4.3. Рассмотрим уравнение Эйлера второго порядка
$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2}+3x\,\frac{dy}{dx}+y=0.$$
Вводя новую независимую переменную $t=\ln|x|$, получаем
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\,\frac{dy}{dt}+y=0.$$
Для нового уравнения записываем характеристическое уравнение
$$\lambda^2+2\lambda+1=0,$$
имеющее кратный корень $\lambda_1=\lambda_2=-1$, откуда
$$y=(C_1+C_2\,t)\,e^{-t}.$$
Возвращаясь к исходной переменной x, получаем следующее общее решение исходного уравнения:
$$y=\frac{1}{x}\,(C_1+C_2\,\ln|x|).$$

3.5. Системы уравнений первого порядка

3.5.1. Общие свойства систем. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка общего вида
$$\frac{dy^i}{dx}=f^i(x,y^1,y^2,\ldots,y^n),\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3.5.1}$$
Пусть функции f^i непрерывны в окрестности $x_0,y_0^1,\ldots,y_0^n$.

Примем векторное обозначение
$$\mathbf{y}=(y^1,\ldots,y^n),\quad \mathbf{f}=(f^1,\ldots,f^n)$$
и запишем задачу с начальными условиями для системы уравнений (3.5.1) в компактной форме:
$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}\big|_{x=x_0}=\mathbf{y}_0, \tag{3.5.2}$$
где
$$\mathbf{y}_0=(y_0^1,\ldots,y_0^n).$$
Итак, $\mathbf{y}$ — n-кратные зависимые переменные, переменная с индексом i обозначается y^i и называется i-й координатой вектора $\mathbf{y}$.

Классическое определение решений применимо также к системам дифференциальных уравнений при условии естественной замены единственной переменной y на вектор $\mathbf{y}$. Мы будем пользоваться следующей простой версией теоремы о существовании и единственности решения для систем.

Теорема 3.5.1. Пусть функция $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(x_0,\mathbf{y}_0)$. Тогда задача (3.5.2) имеет одно и только одно решение, определенное в окрестности x_0. Из этого следует, что общее решение системы n дифференциальных уравнений первого порядка (3.5.1) зависит точно от n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, например от произвольно выбранных начальных значений $y_0^1, \ldots, y_0^n$ зависимых переменных при $x = x_0$. Соответственно, общее решение системы уравнений (3.5.1) запишется в виде

$$y^i = \phi^i(x, C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5.3}$$

3.5.2. Первые интегралы. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с $n-1$ зависимой переменной:

$$\frac{dy^i}{dx} = f^i(x, y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.5.4}$$

Согласно теореме 3.5.1, ее общее решение имеет следующую форму:

$$y^i(x) = \phi^i(x, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

откуда, разрешая относительно констант интегрирования C_i, имеем

$$\psi_i(x, y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.5.5}$$

Система соотношений (3.5.5) называется *общим интегралом* системы уравнений (3.5.4). Левая часть каждого из уравнений (3.5.5) обращается в константу при замене $y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}$ на координаты $y^1(x), y^2(x), \ldots \ldots, y^{n-1}(x)$ любого решения системы (3.5.4). По этой причине любое отдельно взятое соотношение из (3.5.5) известно как *первый интеграл* системы уравнений (3.5.4).

Пример 3.5.1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{3.5.6}$$

Эту систему можно проинтегрировать следующим образом. Дифференцируя первое из уравнений (3.5.6) и подставляя dy/dt из второго, мы сводим задачу к интегрированию одного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Его фундаментальная система решений определяется следующим образом:

$$x_{(1)} = \cos t, \quad x_{(2)} = \sin t,$$

откуда

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Первое уравнение (3.5.6), $y = dx/dt$, дает

$$y = C_2 \cos t - C_1 \sin t.$$

Итак, общее решение системы (3.5.6) находится в виде

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = C_2 \cos t - C_1 \sin t. \tag{3.5.7}$$

Разрешая уравнения (3.5.7) относительно C_1, C_2, получаем следующие первые интегралы:

$$x \cos t - y \sin t = C_1, \quad x \sin t + y \cos t = C_2. \tag{3.5.8}$$

Таким образом, мы получили функции ψ в уравнениях (3.5.5):

$$\psi_1(t,x,y) = x\,\cos t - y\,\sin t, \quad \psi_2(t,x,y) = x\,\sin t + y\,\cos t. \tag{3.5.9}$$

Первые интегралы могут быть также получены с помощью представления системы (3.5.6) в следующей форме (см. далее уравнения (3.5.13)):

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = dt.$$

Интегрирование первого уравнения, переписанного в виде $x\,dx + y\,dy = 0$, дает

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a = \mathrm{const}. \tag{3.5.10}$$

Далее перепишем второе уравнение:

$$dt + \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 0$$

и получим

$$t + \arcsin(y/a) = C.$$

С учетом (3.5.10) и элементарной формулы (1.1.7) мы имеем

$$\arcsin(y/a) = \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{3.5.11}$$

и, следовательно,

$$t + \operatorname{arctg}(y/x) = C.$$

Окончательно, мы приходим к первым интегралам (3.5.5), содержащим функции

$$\widetilde{\psi}_1(t,x,y) = x^2 + y^2, \quad \widetilde{\psi}_2(t,x,y) = t + \operatorname{arctg}(y/x) \tag{3.5.12}$$

вместо (3.5.9).

Совокупность первых интегралов (3.5.5) — не единственная возможность представления общего решения. Действительно, любое соотношение

$$\widetilde{\psi}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = C$$

есть первый интеграл и, следовательно, мы можем заменить функции ψ любыми $n-1$ функционально независимыми функциями $\widetilde{\psi}_i(\psi_1, \ldots, \ldots, \psi_{n-1})$, $i = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, полезно ввести определение первых интегралов независимо от общего интеграла (3.5.5).

Определение 3.5.1. *Первый интеграл* системы (3.5.4) есть соотношение

$$\psi(x, y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}) = C,$$

удовлетворяющее любому решению $y^i = y^i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, где функция ψ не является абсолютной константой. Иными словами, функция ψ, которую для краткости называют *первым интегралом*, сохраняет постоянное значение вдоль любого решения с константой C, зависящей от выбора решения.

Система (3.5.4) может быть представлена в форме

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy^1}{f^1} = \frac{dy^2}{f^2} = \cdots = \frac{dy^{n-1}}{f^{n-1}}\,.$$

Поскольку знаменатели можно умножить на любые функции, отличные от нуля, эти уравнения можно переписать в *симметричной форме* (используя для переменных $x, y^1, \ldots, y^{n-1}$ обозначение $(\mathbf{x} = x^1, x^2, \ldots, x^n)$):

$$\frac{dx^1}{\xi^1(\mathbf{x})} = \frac{dx^2}{\xi^2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx^n}{\xi^n(\mathbf{x})}\,. \tag{3.5.13}$$

Термин *симметричная* отражает тот факт, что форма (3.5.13) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из $n-1$ уравнения, не выделяет специально независимую переменную, которая становится при этом одной из n переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$. *Первый интеграл* системы (3.5.13) удовлетворяет определению 3.5.1 и имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}) = C. \tag{3.5.14}$$

Первый интеграл (3.5.14) нередко идентифицируют с функцией $\psi(\mathbf{x})$.

Лемма 3.5.1. Для того чтобы функция $\psi(\mathbf{x}) = \psi(x^1, \ldots, x^n)$ была первым интегралом системы (3.5.13), необходимо и достаточно, чтобы $u = \psi(\mathbf{x})$ было решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\xi^1(\mathbf{x})\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(\mathbf{x})\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = 0. \tag{3.5.15}$$

Доказательство. Пусть функция $\psi(\mathbf{x})$ — первый интеграл. Поскольку для любого решения $(\mathbf{x}) = (x^1, \ldots, x^n)$ системы (3.5.13) выполнено $\psi(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$, то дифференциал $d\psi$, вычисляемый вдоль любой интегральной кривой уравнений (3.5.13), обращается в нуль:

$$d\psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^1}\,dx^1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\,dx^n = 0. \tag{3.5.16}$$

Иными словами, уравнение (3.5.16) выполняется всякий раз, когда $d(\mathbf{x}) = (dx^1, \ldots, dx^n)$ пропорционально вектору $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, то есть $d(\mathbf{x}) = \lambda\boldsymbol{\xi}$, $\lambda \neq 0$. Подставляя $dx^i = \lambda\xi^i$ в (3.5.16), мы приходим к уравнению (3.5.15). Итак, мы доказали, что уравнение (3.5.15) выполняется в точках $(\mathbf{x})$, принадлежащих интегральным кривым системы (3.5.13). Но, согласно теореме 3.5.1, интегральные кривые проходят через любую точку. Следовательно, уравнение (3.5.15) удовлетворяется тождественно в окрестности любой точки $\mathbf{x}$. Приведенные рассуждения обратимы. Это завершает доказательство.

Определение 3.5.2. Говорят, что множество $n-1$ первых интегралов

$$\psi_k(\mathbf{x}) = C_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{3.5.17}$$

независимо, если функции $\psi_k(\mathbf{x})$ *функционально независимы*, т. е. если не существует соотношений вида $F(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = 0$.

Пример 3.5.2. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\,.$$

Интегрируя уравнения
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z},$$
мы получаем $y/x = C_1$ и $z/x = C_2$ соответственно. Следовательно, мы имеем два следующих независимых первых интеграла:
$$\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_2(x, y, z) = \frac{z}{x} \cdot$$
Уравнение (3.5.15) имеет вид
$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + z\,\frac{\partial u}{\partial u} = 0.$$
Нетрудно убедиться, что уравнению удовлетворяют функции $u = \psi_1(x, y, z) = y/x$ и $u = \psi_2(x, y, z) = z/x$.

Любое множество $n-1$ независимых первых интегралов представляет общее решение системы (3.5.13). Поскольку общее решение системы уравнений первого порядка, состоящей из $n-1$ уравнения, зависит точно от $n-1$ произвольных констант (см. теорему 3.5.1), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.5.2. Система $n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (3.5.13) допускает $n-1$ независимых первых интегралов (3.5.17). Любой другой первый интеграл (3.5.14) системы (3.5.13) может быть выражен в виде функции от (3.5.17):
$$\psi = F(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}). \tag{3.5.18}$$

Пример 3.5.3. Рассмотрим систему
$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \cdot$$
Она может быть эквивалентно представлена в виде
$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz}, \quad \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy},$$
или, после умножения обеих частей равенств на z и x, соответственно
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \quad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \cdot$$
Перепишем их в форме $y\,dy - x\,dx = 0$ и $y\,dy - z\,dz = 0$ и, интегрируя, придем к следующим двум независимым первым интегралам:
$$\psi_1 \equiv x^2 - y^2 = C_1, \quad \psi_2 \equiv z^2 - y^2 = C_2.$$

С другой стороны, рассматриваемая система может быть записана в форме
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \quad \frac{dx}{z} = \frac{dz}{x} \cdot$$
Тогда мы приходим к первым интегралам
$$\psi_1 \equiv x^2 - y^2 = C_1, \quad \psi_3 \equiv x^2 - z^2 = C_3$$

и, таким образом, получаем три различных первых интеграла, $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$ и $\psi_3 = C_3$. Однако они не независимы. Действительно, например, $\psi_3 = \psi_1 - \psi_2$.

Таким образом, в этом примере произвольный первый интеграл (3.5.18) может быть представлен в форме $\psi = F(x^2 - y^2, z^2 - y^2)$.

3.5.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Обсуждавшийся выше метод Эйлера применим также к общему случаю систем линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy^i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y^j = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{или} \quad \mathbf{y}' + A\mathbf{y} = 0. \tag{3.5.19}$$

Здесь $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n)$ обозначает зависимые переменные, $\mathbf{y}' = d\mathbf{y}/dx$ и $A = \|a_{ij}\|$ — постоянная $n \times n$ матрица, такая, что $(A\mathbf{y})^i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, y^j$.

Формула Эйлера для частных решений в этом случае запишется так:

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x}\, \mathbf{l}, \quad \lambda = \text{const}. \tag{3.5.20}$$

Неизвестный вектор констант $\mathbf{l} = (l^1, \ldots, l^n)$ должен быть найден из уравнения (3.5.19). Подстановка (3.5.20) в (3.5.19) дает:

$$(A + \lambda E)\, \mathbf{l} = 0, \tag{3.5.21}$$

где E — единичная $n \times n$ матрица. Система линейных уравнений (3.5.21) имеет решение $\mathbf{l} \neq 0$, если и только если детерминант $|A + \lambda E| = \det(A + \lambda E)$ обращается в нуль. Вследствие этого *характеристический полином* P_n и *характеристическое уравнение* для системы (3.5.19) должны удовлетворять условию

$$P_n(\lambda) \equiv |A + \lambda E| = 0. \tag{3.5.22}$$

Пусть характеристическое уравнение (3.5.22) имеет различные корни, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда мы получаем точно n линейно независимых решений $\mathbf{l}_{(1)}, \ldots, \mathbf{l}_{(n)}$ системы уравнений (3.5.21) и, таким образом, следующую *фундаментальную систему* решений:

$$\mathbf{y}_{(1)} = e^{\lambda_1 x}\, \mathbf{l}_{(1)}, \ldots, \quad \mathbf{y}_{(n)} = e^{\lambda_n x}\, \mathbf{l}_{(n)}. \tag{3.5.23}$$

Общее решение системы (3.5.19) имеет вид

$$\mathbf{y} = C_1\, e^{\lambda_1 x}\, \mathbf{l}_{(1)} + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n x}\, \mathbf{l}_{(n)}. \tag{3.5.24}$$

Если уравнение (3.5.22) имеет комплексные корни, $\lambda = \alpha + i\beta$ (и, естественно, комплексно сопряженные), уравнение (3.5.21) имеет комплексное решение $\mathbf{l} = \mathbf{p} + i\mathbf{q}$. Соответствующее решение (3.5.20) расщепляется на два действительных решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{(1)} &= e^{\alpha x}\, (\mathbf{p} \cos \beta x - \mathbf{q} \sin \beta x), \\ \mathbf{y}_{(2)} &= e^{\alpha x}\, (\mathbf{p} \sin \beta x + \mathbf{q} \cos \beta x). \end{aligned} \tag{3.5.25}$$

Пример 3.5.4. Решим систему (ср. с примером 3.5.1)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Здесь $\mathbf{y} = (x, y)$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$. Характеристическое уравнение имеет комплексные корни $\lambda = i$, $\overline{\lambda} = -i$, и уравнение (3.5.21) дает $\mathbf{l} = \mathbf{p} + i\mathbf{q}$, где $\mathbf{p} = (1, 0)$, $\mathbf{q} = (0, 1)$. Уравнения (3.5.25) образуют фундаментальную систему решений

$$\mathbf{y}_{(1)} = (\cos t,\, -\sin t), \quad \mathbf{y}_{(2)} = (\sin t,\, \cos t). \tag{3.5.26}$$

Составляя выражение $\mathbf{y} = C_1\,\mathbf{y}_{(1)} + C_2\,\mathbf{y}_{(2)}$, мы приходим к решению (3.5.7):

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = C_2 \cos t - C_1 \sin t.$$

3.5.4. Вариация параметров для систем. Рассмотрим теперь систему неоднородных линейных уравнений:

$$\frac{dy^i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y^j = f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.5.27}$$

Она называется *однородной*, если $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и *неоднородной* в противном случае (ср. с разделом 3.2.6).

Пусть общее решение однородной системы

$$\frac{dy^i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y^j = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

известно. Тогда решение неоднородной системы (3.5.27) можно находить методом вариации параметров, обсуждавшимся для случая одного уравнения. Проиллюстрируем метод на следующем примере.

Пример 3.5.5. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} - y = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} + x = 1. \tag{3.5.28}$$

Решение однородной системы,

$$\frac{dx}{dt} - y = 0, \quad \frac{dy}{dt} + x = 0$$

находится в виде (3.5.7):

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = C_2 \cos t - C_1 \sin t.$$

Будем действовать так, как мы поступали в случае одного уравнения. А именно, заменяя константы C_1, C_2 на неизвестные функции $u(t)$, $v(t)$ и подставляя выражения

$$x = u(t) \cos t + v(t) \sin t, \quad y = v(t) \cos t - u(t) \sin t \tag{3.5.29}$$

в уравнение (3.5.28), мы получим

$$\frac{du}{dt}\cos t + \frac{dv}{dt}\sin t = \cos t, \quad \frac{dv}{dt}\cos t - \frac{du}{dt}\sin t = 1,$$

откуда:

$$\frac{du}{dt} = \cos^2 t - \sin t, \quad \frac{dv}{dt} = \cos t\,\sin t + \cos t. \tag{3.5.30}$$

Интегрирование (3.5.30) дает:

$$u = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\,\cos t + \cos t + K_1, \quad v = -\frac{1}{2}\cos^2 t + \sin t + K_2. \tag{3.5.31}$$

Подставляя (3.5.31) в (3.5.29) и вводя для произвольных констант K_1 и K_2 стандартное обозначение C_1 и C_2, соответственно, получаем следующее решение системы (3.5.28):

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{t}{2}\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t,\\ y &= -\frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + C_2\cos t - C_1\sin t. \end{aligned}$$

Метод вариации параметров удобно представить в следующей векторной форме. Систему (3.5.27) запишем в виде:

$$\mathbf{y}' + A(x)\,\mathbf{y} = \mathbf{f}(x). \tag{3.5.32}$$

Далее, представим общее решение (3.2.35) неоднородного линейного уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ в виде

$$y = C\,y_1(x) + y_1(x)\int y_1^{-1}(x)\,Q(x)\,dx,$$

где

$$y_1(x) = e^{-\int P(x)\,dx}$$

— частное решение однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$. Поступая как в разделе 3.2.7, приходим к следующему результату.

Теорема 3.5.3. Пусть $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ — фундаментальная система решений однородной системы

$$\mathbf{y}' + A(x)\,\mathbf{y} = 0.$$

Тогда общее решение неоднородной системы (3.5.32) представляется в форме квадратуры следующей формулой:

$$\mathbf{y} = C_1\,\mathbf{y}_1(x) + \cdots + C_n\,\mathbf{y}_n(x) + Y(x)\int Y^{-1}(x)\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,dx, \tag{3.5.33}$$

где $Y(x)$ — $n \times n$ матрица

$$Y(x) = \|\mathbf{y}_1(x) \ldots \mathbf{y}_n(x)\|, \tag{3.5.34}$$

известная как фундаментальная матрица, а $Y^{-1}(x)$ — обратная матрица.

Пример 3.5.6. Вернемся к системе (3.5.28) примера 3.5.5. В векторной форме (3.5.32) она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы имеем двумерное неоднородное векторное уравнение в форме (3.5.32) с независимой переменной t и

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений однородной системы определяется формулами (3.5.26). Запишем ее в виде

$$\mathbf{y}_{(1)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{(2)} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

и получим следующую фундаментальную матрицу (3.5.34) и обратную к ней:

$$Y = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, формула (3.5.33) решения запишется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \;=\; & C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\int \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin t \\ \sin t \cos t + \cos t \end{pmatrix} dt.$$

Вычисляем интеграл в правой части равенства (см. уравнения (3.5.30)):

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int (\cos^2 t - \sin t)\, dt \\ \displaystyle\int (\sin t \cos t + \cos t)\, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2} \sin t \, \cos t + \cos t \\ -\dfrac{1}{2} \cos^2 t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Подставляя это в вышеуказанное выражение для $\mathbf{y}$ и заменяя произвольные постоянные C_1, C_2, мы приходим к решению, полученному в примере 3.5.5. А именно:

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + t \cos t \\ -t \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Задачи к главе 3

3.1. Проинтегрировать следующие уравнения первого порядка:

$$\text{а) } y' = 0, \qquad \text{б) } y' = 2xy, \qquad \text{в) } y' = \frac{y}{1+x^2},$$
$$\text{г) } y' = y + x^2, \qquad \text{д) } y' + C_1 y + x + x^2 = 0.$$

3.2. Проинтегрировать следующие уравнения второго порядка:

$$\text{а) } y'' = 0, \qquad \text{б) } y'' = 2y, \qquad \text{в) } y'' = -2y, \qquad \text{г) } y'' = 2y',$$
$$\text{д) } y'' = y + x^2, \qquad \text{е) } y'' = \big[(x+x^2)\mathrm{e}^y\big]'.$$

3.3. Проинтегрировать следующие уравнения третьего порядка:

$$\text{а) } y''' = 0, \quad \text{б) } y''' = y, \quad \text{в) } y''' + y = 0, \quad \text{г) } y''' = y + x^2.$$

3.4. Выбрать однородные уравнения, имеющие вид $y' + y^2 = C\,x^s$, где C и s — произвольные константы.

3.5. Проверить выполнение свойства равномерной однородности уравнений в примере 3.1.5.

3.6. Провести подробное доказательство теоремы 3.3.1. В частности, убедиться, что преобразование (3.3.11) отображает линейное однородное уравнение второго порядка общего вида (3.3.6) на уравнение простейшего вида (3.3.10).

3.7. Выяснить возможность линеаризации следующих уравнений Риккати:

$$\text{а) } y' = 1 + y^2, \qquad \text{б) } y' = 1 - y^2, \qquad \text{в) } y' = x + 2xy + xy^2,$$
$$\text{г) } y' = x + y^2, \qquad \text{д) } y' = P(x) + Q(x)\,y + [Q(x) - P(x)]\,y^2,$$
$$\text{е) } y' = x + xy^2, \qquad \text{ж) } y' = P(x) + Q(x)\,y + [Q(x) - 2P(x)]\,y^2,$$
$$\text{з) } y' = x - xy^2, \qquad \text{и) } y' = P(x) + Q(x)\,y + 2[Q(x) - 2P(x)]\,y^2,$$
$$\text{к) } y' = P(x) + [1 + P(x)]\,y + y^2, \qquad \text{л) } y' = P(x) + [1 + 2P(x)]\,y + y^2,$$
$$\text{м) } y' = \frac{2}{x^2} - y^2, \qquad \text{н) } y' = \frac{2}{x^2} + \frac{2-x^2}{x^2}\,y - y^2,$$
$$\text{о) } y' = x + (1+x)^2 y + (1 + x + x^2)\,y^2$$

с помощью проверки двух свойств (А) и (Б) теоремы 3.2.2.

3.8. Решить следующую задачу с начальными условиями:

$$\frac{dy^1}{dt} = y^2, \quad \frac{dy^2}{dt} = y^1, \quad y^1\big|_{t=0} = x^1, \quad y^2\big|_{t=0} = x^2.$$

3.9. Убедиться, что следующее уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, и проинтегрировать его:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x}\,dy = 0.$$

3.10. Проинтегрировать следующее уравнение, описывающее свободные колебания механической системы с трением при условии малости демпфирующей силы:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\,\frac{dy}{dt} + cy = 0,$$

где b, c — положительные константы, удовлетворяющие условию $b^2 < c$.

3.11. Решить следующие уравнения:

$$\text{а)}\ \ y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad \text{б)}\ \ y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{в)}\ \ y'' + y = \frac{1}{\sin x}\cdot$$

3.12. Решить уравнение в полных дифференциалах $\big(ye^{xy} + \cos x\big)dx + {}$ $+ \ xe^{xy}\,dy = 0$, приведенное в примере 3.2.1, используя уравнения (3.2.7) и (3.2.8).

3.13. Найти все уравнения второго порядка $f(x, y, y', y'') = 0$, приводимые к форме $g(x, y, y')y''' = 0$ путем дифференцирования.

3.14. Проинтегрировать уравнение Эйлера $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$, $x > 0$.

3.15. Проинтегрировать уравнение

$$y'' - 3\,\frac{y'}{x} + 3\,\frac{y}{x^2} = 0.$$

Глава 4

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнения с частными производными первого порядка с одной зависимой переменной имеют прямое отношение к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь между этими двумя типами уравнений, казалось бы, совершенно различными, состоит в построении характеристик. Кроме того, более близкое знакомство с теорией дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка служит предпосылкой к теории Ли.

Дополнительная литература: Гурса Э. [4], Смирнов В.И. [24], Ibragimov N.H. [40].

4.1. Введение

Пусть $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — $n \geqslant 2$ независимых переменных и u — зависимая переменная. Обозначим $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ частные производные $p_i = \partial u/\partial x^i$.

Напомним, что уравнения, в которых число независимых переменных больше единицы, называют дифференциальными уравнениями с частными производными. Говорят, что уравнение имеет первый порядок, если частные производные высшего порядка, которые входят в уравнение, являются производными первого порядка. Одно дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка с одной зависимой переменной записывается в виде

$$F(x^1, \ldots, x^n,\, u,\, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{4.1.1}$$

Если $n = 2$, то независимые переменные обозначают x, y, а производные обозначают $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$. Тогда уравнение вида (4.1.1) записывается в форме $F(x, y, u, p, q) = 0$. Его решение $u = \phi(x, y)$ образует поверхность в трехмерном пространстве x, y, u, часто называемую *интегральной поверхностью*.

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка в общем случае записывается следующим образом:

$$\xi^1(x)\, p_1 + \cdots + \xi^n(x)\, p_n + c(x)\, u = f(x) \tag{4.1.2}$$

или

$$\xi^1(x)\, \frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x)\, \frac{\partial u}{\partial x^n} + c(x)\, u = f(x). \tag{4.1.3}$$

Если $f(x) = 0$, уравнение (4.1.2) однородно по функции (см. разделы 3.1.3 и 3.2.6). Однако в литературе термин *однородное* применяется по отношению к уравнению (4.1.2) при $c(x) = 0$ и $f(x) = 0$, то есть к уравнению

$$\xi^1(x)\, p_1 + \cdots + \xi^n(x)\, p_n = 0. \tag{4.1.4}$$

Квазилинейное уравнение первого порядка общего вида имеет форму

$$\xi^1(x,u)\,p_1 + \dots + \xi^n(x,u)\,p_n = g(x,u). \tag{4.1.5}$$

4.2. Однородное линейное уравнение

Введем линейный дифференциальный оператор (оператор частного дифференцирования) первого порядка:

$$X = \xi^1(x)\,\frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^n(x)\,\frac{\partial}{\partial x^n}\,. \tag{4.2.1}$$

Лемма 4.2.1. Пусть $\widetilde{x}^i$ — новые независимые переменные, определяемые соотношениями

$$\widetilde{x}^i = \varphi^i(x), \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.2.2}$$

Тогда оператор (4.2.1) в новых переменных записывается в форме

$$\widetilde{X} = X(\varphi^1)\,\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^1} + \dots + X(\varphi^n)\,\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^n}, \tag{4.2.3}$$

где $X(\varphi^i) = \xi^1\,\partial\varphi^i/\partial x^1 + \dots + \xi^n(x)\,\partial\varphi^i/\partial x^n$.

Доказательство. Правило дифференцирования сложной функции для частных производных дает:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^k}\,.$$

Нетрудно убедиться, что подстановка приведенного выше выражения в оператор (4.2.1) приводит его к виду (4.2.3).

В терминах этого оператора однородное линейное дифференциальное уравнение с частными производными (4.1.4) записывается в следующей форме:

$$X(u) \equiv \xi^1(x)\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \dots + \xi^n(x)\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = 0. \tag{4.2.4}$$

Теорема 4.2.1. Общее решение уравнения (4.2.4) имеет вид

$$u = F\big(\psi_1(x), \dots, \psi_{n-1}(x)\big), \tag{4.2.5}$$

где F — произвольная функция $n-1$ переменных, а

$$\psi_1(x) = C_1, \dots, \quad \psi_{n-1}(x) = C_{n-1}$$

— независимые первые интегралы следующей системы $n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений, называемой *системой характеристик* уравнения (4.2.4):

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}\,. \tag{4.2.6}$$

Доказательство. Функция u, определяемая выражением (4.2.5), является решением уравнения (4.2.4). Действительно, согласно лемме 3.5.1, мы имеем $X(\psi_1) = 0, \dots, X(\psi_{n-1}) = 0$. Поэтому уравнение (4.2.4) может быть представлено с применением правила дифференцирования сложной функции в следующем виде:

$$X\big(F(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\big) = \frac{\partial F}{\partial \psi_1} X(\psi_1) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \psi_{n-1}} X(\psi_{n-1}) = 0.$$

Убедимся, что любое решение уравнения (4.2.4) имеет форму (4.2.5). Введем новые независимые переменные

$$x'^1 = \psi_1(x), \ldots, \quad x'^{n-1} = \psi_{n-1}(x), \quad x'^n = \phi(x), \tag{4.2.7}$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ — левые части $n-1$ независимых первых интегралов системы характеристик (4.2.6), а $\phi(x)$ — любая функция, функционально независимая от $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$. Лемма 3.5.1 дает $X(\psi_1) = \ldots = X(\psi_{n-1}) = 0$, в то время как $X(\phi) \neq 0$. Согласно лемме 4.2.1, уравнение (4.2.4) имеет вид

$$X(u) = X(\phi) \frac{\partial u}{\partial x'^n} = 0,$$

откуда $\partial u / \partial x'^n = 0$. Поэтому общее решение есть произвольная функция переменных $x'^1, \ldots, x'^{n-1}$, то есть $u = F(x'^1, \ldots, x'^{n-1})$. Применяя уравнения (4.2.7), мы получаем представление (4.2.5) общего решения.

Пример 4.2.1. Решим следующее уравнение:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Система характеристик (4.2.6) имеет вид $dx/x = dy/y$, откуда находится первый интеграл $y/x = C$. Следовательно, общее решение (4.2.5) записывается в форме $u = F(y/x)$.

Пример 4.2.2. Рассмотрим уравнение

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Уравнение характеристик (4.2.6) имеет вид $dx/y = -dy/x$ или $x\,dx + y\,dy = 0$. Интегрирование дает первый интеграл $x^2 + y^2 = C$. Следовательно, общее решение (4.2.5) записывается в форме $u = F(x^2 + y^2)$.

4.3. Неоднородные уравнения частного вида

Начнем с неоднородного линейного уравнения (4.1.3) вида

$$\xi^1(x) \frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x) \frac{\partial u}{\partial x^n} = f(x). \tag{4.3.1}$$

Использование оператора (4.2.1) дает возможность записать уравнение (4.3.1) короче:

$$X(u) = f(x). \tag{4.3.2}$$

Заметим, что знание одного решения $u = \varphi(x)$ неоднородного уравнения $X(u) = f(x)$ позволяет построить общее решение. Действительно, общее решение u уравнения (4.3.1) есть

$$u = \varphi(x) + v, \tag{4.3.3}$$

где v — общее решение однородного уравнения $X(v) = 0$. Действительно, пусть $X(\varphi(x)) = f(x)$. Полагая $u = v + \varphi(x)$, мы получаем

$$X(u) = X(v) + X\big(\varphi(x)\big) = X(v) + f(x).$$

Из этого равенства следует, что $X(u) = f(x)$, если и только если $X(v) = 0$.

Таким образом, знание частного решения $\varphi(x)$ уравнения (4.3.1) позволяет свести интегрирование неоднородного линейного дифференциального уравнения с частными производными (4.3.1) к интегрированию однородного уравнения или, иными словами, к нахождению $n - 1$ независимых первых интегралов системы характеристик (4.2.6). В общем случае найти решение $\varphi(x)$ — непростая задача. Однако можно легко получить искомое частное решение в специальных случаях, например в следующем.

Пример 4.3.1. Решим уравнение (4.3.1), в котором одна из функций ξ^i и функция в правой части f зависят только от переменной x^i, например,

$$\xi^1(x^1)\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \xi^2(x^1, \ldots, x^n)\,\frac{\partial u}{\partial x^2} + \cdots + \xi^n(x^1, \ldots, x^n)\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = f(x^1). \tag{4.3.4}$$

В этом случае легко получить частное решение уравнения (4.3.4), полагая $u = \varphi(x^1)$. Подстановка в уравнение (4.3.4) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\xi^1(x^1)\,\frac{d\varphi}{dx^1} = f(x^1),$$

откуда получается решение в квадратуре:

$$\varphi(x^1) = \int \frac{f(x^1)}{\xi^1(x^1)}\,dx^1.$$

Общее решение находится далее по формуле (4.3.3).

Пример 4.3.2. Уравнение с независимыми переменными x и y,

$$x^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + xy\,\frac{\partial u}{\partial y} = 1,$$

имеет форму (4.3.4), где $\xi^1 = x^2$ и $f = 1$. Следовательно, частное решение можно находить в форме $u = \varphi(x)$. Тогда исследуемое уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению $x^2 d\varphi/dx = 1$, откуда получаем (не учитывая аддитивную постоянную интегрирования) частное решение $\varphi = -1/x$. Уравнение характеристик (4.2.6),

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy},$$

дает первый интеграл

$$\frac{y}{x} = C.$$

Следовательно, общее решение (4.3.3) записывается в виде

$$u = -\frac{1}{x} + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 4.3.3. Рассмотрим уравнение

$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = y.$$

После деления на y оно приобретает форму (4.3.4), где $\xi^1 = 1$ и $f = 1$. Следовательно, полагая $u = \varphi(x)$, получаем из $d\varphi/dx = 1$ частное решение $\varphi = x$. Общее решение соответствующего однородного уравнения (см. пример 4.2.2) имеет вид $v = F\big(x^2 + y^2\big)$, и, следовательно, общее решение неоднородного уравнения таково:

$$u = x + F\big(x^2 + y^2\big).$$

Пример 4.3.4. Общее решение неоднородного уравнения

$$x^1\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + x^n\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = 1$$

имеет вид

$$u = \ln|x^n| + F\big(x^1/x^n,\ x^2/x^n,\ \ldots,\ x^{n-1}/x^n\big).$$

4.4. Квазилинейные уравнения

В этом разделе излагается общий метод решения квазилинейных уравнений, пригодный для произвольных неоднородных уравнений (4.1.3). Покажем, что квазилинейное уравнение общего вида (4.1.5) с n независимыми переменными,

$$\xi^1(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = g(x,u), \tag{4.4.1}$$

в частности произвольное неоднородное линейное уравнение (4.1.3), может быть приведено к однородному линейному уравнению, число переменных в котором равно $n+1$, следующим образом.

Определим u как неявную функцию переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$, подчиняющуюся уравнению

$$V(x^1, \ldots, x^n, u) = 0, \tag{4.4.2}$$

и будем рассматривать V как неизвестную функцию $n+1$ переменных, $x^1, \ldots, x^n$ и u. Применяя операцию *полного дифференцирования*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i\,\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.4.3}$$

к уравнению (4.4.2), получим

$$D_i V \equiv \frac{\partial V}{\partial x^i} + p_i\,\frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда

$$p_i = -\frac{\partial V/\partial x^i}{\partial V/\partial u}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4.4}$$

Подставляя выражения (4.4.4) для p_i в уравнение (4.4.1), мы получаем однородное линейное уравнение

$$\xi^1(x,u)\,\frac{\partial V}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x,u)\,\frac{\partial V}{\partial x^n}+g(x,u)\,\frac{\partial V}{\partial u}=0 \tag{4.4.5}$$

для неизвестной функции V от $n+1$ переменных $x^1,\ldots,x^n$ и u. Далее мы применяем теорему 4.2.1 к линейному уравнению (4.4.5) и получаем следующее.

Теорема 4.4.1. Общее решение квазилинейного уравнения (4.4.1) задается явно уравнением

$$V(x,u)=\Phi\big(\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u)\big) \tag{4.4.6}$$

с произвольной функцей Φ от n переменных, такой, что $\partial V/\partial u\neq 0$. Здесь

$$\psi_1(x,u)=C_1,\ldots,\quad \psi_n(x,u)=C_n$$

— независимые первые интегралы системы уравнений

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x,u)}=\frac{dx^2}{\xi^2(x,u)}=\cdots=\frac{dx^n}{\xi^n(x,u)}=\frac{du}{g(x,u)}, \tag{4.4.7}$$

называемой *системой характеристик квазилинейного уравнения* (4.4.1).

Пример 4.4.1. Проиллюстрируем метод настоящего раздела на примере уравнения

$$y\,\frac{\partial u}{\partial x}-x\,\frac{\partial u}{\partial y}=1. \tag{4.4.8}$$

Здесь $g(x,y,u)=1$ и, следовательно, система характеристик (4.4.7) имеет вид

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{du}{1}\cdot$$

Требуется найти два независимых первых интеграла этой системы. Первое уравнение, $x\,dx+y\,dy=0$, дает $x^2+y^2=a^2=\mathrm{const}$. С учетом этого соотношения перепишем второе уравнение:

$$du+\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=0,$$

откуда с помощью интегрирования находим $u+\arcsin(y/a)=C$. Используя формулу (3.5.11), имеем: $u+\operatorname{arctg}(y/x)=C$. Таким образом, два независимых первых интеграла имеют вид

$$\psi_1\equiv x^2+y^2=C_1,\quad \psi_2\equiv u+\operatorname{arctg}(y/x)=C_2.$$

Следовательно, общее решение соответствующего уравнения (4.4.5),

$$y\,\frac{\partial V}{\partial x}-x\,\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial u}=0,$$

определяется формулой (4.4.6):

$$V = \Phi(\psi_1, \psi_2) \equiv \Phi\big(x^2 + y^2, u + \operatorname{arctg}(y/x)\big),$$

а уравнение (4.4.2) имеет вид

$$\Phi\big(x^2 + y^2, u + \operatorname{arctg}(y/x)\big) = 0.$$

Если $\partial\Phi/\partial\psi_2 \neq 0$, это уравнение можно разрешить относительно u и получить решение в явной форме

$$u = -\operatorname{arctg}(y/x) + F\big(x^2 + y^2\big). \tag{4.4.9}$$

Замечание 4.4.1. В полярных координатах, определяемых соотношениями

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{4.4.10}$$

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \theta = \arctan(y/x),$$

решение (4.4.9) имеет простую форму $u = -\theta + f(r)$, что демонстрирует преимущество перехода к полярным координатам в этой задаче. Покажем, что решение действительно приобретает такую форму. Мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

откуда, подставляя

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2},$$

получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Таким образом, уравнение (4.4.8) сводится к $\partial u/\partial\theta = -1$ и дает $u = -\theta + f(r)$.

Пример 4.4.2. Рассмотрим уравнение переноса, известное также как уравнение Хопфа, $u_t + uu_x = 0$. Система характеристик (4.4.7) может быть записана формально следующим образом:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0},$$

где последнее равенство просто означает, что система допускает первый интеграл $u = C_1$. С учетом этого первого интеграла система характеристик приводит к $dx - C_1\,dt = 0$, откуда $x - C_1 t = C_2$. Получены два первых интеграла:

$$u = C_1 \quad \text{и} \quad x - tu = C_2.$$

Следовательно, $V = \Phi(u, x - tu)$, и решение уравнения Хопфа можно записать явно в форме (4.4.2):

$$\Phi(u, x - tu) = 0, \quad \text{или} \quad u = F(x - tu).$$

4.5. Системы однородных уравнений

Если вместо одного уравнения вида (4.1.2) для одной зависимой переменной u дано несколько уравнений, они образуют *систему* линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Поскольку задается несколько уравнений для одной зависимой переменной, мы здесь имеем дело с так называемыми *переопределенными системами*.

В этом разделе мы рассмотрим системы однородных уравнений, когда уравнения, образующие систему, имеют вид (4.1.4). Если ввести r дифференциальных операторов, имеющих форму (4.2.1),

$$X_\alpha = \xi_\alpha^1(x)\,\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi_\alpha^n(x)\,\frac{\partial}{\partial x^n}, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{4.5.1}$$

то система r однородных линейных уравнений записывается компактно:

$$X_1(u) = 0, \ldots, \quad X_r(u) = 0. \tag{4.5.2}$$

Уравнения (4.5.2) допускают *тривиальное решение* $u = \mathrm{const}$, которое не представляет для нас интереса. К тому же очевидно, что любое уравнение системы может быть умножено на функцию от x. Поэтому если функция $u = u(x)$ — решение s уравнений

$$X_\alpha(u) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s \leqslant r,$$

то эта функция удовлетворяет также их линейной комбинации с произвольными переменными коэффициентами $\lambda^\alpha(x)$:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \lambda^\alpha(x)\, X_\alpha(u) = 0.$$

Это является поводом для формулировки следующих определений.

Определение 4.5.1. Говорят, что дифференциальные операторы $X_1, \ldots, X_s$ являются *связными*, если существуют функции $\lambda^\alpha(x)$, отличные от нуля, такие, что

$$\lambda^1(x)X_1 + \cdots + \lambda^s(x)X_s = 0 \tag{4.5.3}$$

и это удовлетворяется как операторное тождество в окрестности точки x общего положения. Если соотношение (4.5.3) влечет $\lambda^1 = \cdots = \lambda^s = 0$, то говорят, что операторы $X_1, \ldots, X_s$ *несвязны*. В последнем случае говорят, что соответствующие дифференциальные уравнения $X_1(u) = 0, \ldots, X_s(u) = 0$ *независимы*.

Пусть Z_α — линейные комбинации операторов (4.5.1):

$$Z_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} h_\alpha^\beta(x)\, X_\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

с переменными коэффициентами $h_\alpha^\beta(x)$ и пусть выполняется условие, согласно которому определитель $\left|h_\alpha^\beta(x)\right|$ отличен от нуля. Тогда система линейных однородных уравнений

$$Z_1(u) = 0, \ldots, \quad Z_r(u) = 0 \tag{4.5.4}$$

имеет то же множество решений, что и исходная система (4.5.2).

Определение 4.5.2. Системы (4.5.2) и (4.5.4), а также соответствующие операторы X_α и Z_α называют *эквивалентными.*

Лемма 4.5.1. Число r_* несвязных операторов среди (4.5.1) равно рангу матрицы $r \times n$ их коэффициентов:

$$r_* = \operatorname{rank}\left\|\xi_\alpha^i(x)\right\|, \tag{4.5.5}$$

где индекс α соответствует строкам, а индекс i — столбцам. Число r_* остается неизменным для эквивалентных операторов Z_α.

Согласно лемме 4.5.1, любая система r однородных линейных уравнений может быть заменена на систему r_* независимых уравнений. Ясно, что число независимых уравнений не может превышать n. К тому же, если $r = n$ и при этом операторы (4.5.1) несвязны (то есть $r_* = r = n$), то определитель, составленный из коэффициентов $\xi_\alpha^i(x)$, отличен от нуля. В этом случае решение системы (4.5.2) тривиально, $u = \text{const}$. Таким образом, необходимое условие существования нетривиальных решений состоит в том, что $r_* < n$. Однако одного условия $r_* < n$ *недостаточно* для существования нетривиальных решений.

Пример 4.5.1. Система

$$X_1(u) \equiv z\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad X_2(u) \equiv y\,\frac{\partial u}{\partial x} + z\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

состоит из двух независимых уравнений, поскольку операторы X_1 и X_2 содержат слагаемые, соответствующие дифференцированию по различным переменным. Интегрирование первого уравнения системы дает $u = v(x, \rho)$, где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, имеем:

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial x} + z\,\frac{\partial v}{\partial \rho} = 0.$$

Так как v не содержит переменную z *явно*, отсюда следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В итоге имеем: $u = v = \text{const}$. Таким образом, изучаемая система не имеет нетривиальных решений, хотя $r_* = r = 2$ меньше числа $n = 3$ независимых переменных x, y, z.

Для выяснения истинной причины этой ситуации нам потребуется следующее обозначение *полных систем.* Заметим, что если функция $u = u(x)$

является решением системы (4.5.2), то она является также решением уравнений $X_\alpha\big(X_\beta(u)\big) = 0$ при любых значениях индексов α и β. Следовательно, u является решением следующих уравнений первого порядка:

$$X_\alpha\big(X_\beta(u)\big) - X_\beta\big(X_\alpha(u)\big) \equiv \sum_{i=1}^{n} \big(X_\alpha(\xi^i_\beta) - X_\beta(\xi^i_\alpha)\big)\,\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0.$$

Иными словами, одновременно с обращением в нуль действия операторов (4.5.1) на u все *коммутаторы*, составленные из этих операторов, обладают этим же свойством. Коммутатор мы определяем следующим образом.

Определение 4.5.3. Коммутатором двух операторов X_α и X_β вида (4.5.1) мы называем дифференциальный оператор первого порядка $[X_\alpha, X_\beta]$, определяемый равенством

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha,$$

которому можно придать следующую эквивалентную форму, показывающую явно, как каждый из операторов действует на коэффициенты другого:

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{i=1}^{n} \big(X_\alpha(\xi^i_\beta) - X_\beta(\xi^i_\alpha)\big)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\cdot \tag{4.5.6}$$

Таким образом, любое решение уравнений (4.5.2) является также решением уравнений $[X_\alpha, X_\beta](u) = 0$. Как следствие, существует следующая альтернатива: либо *некоторые из коммутаторов* (4.5.6) *независимы от исходных операторов* (4.5.1), либо *коммутаторы* (4.5.6) представляют собой *линейные комбинации исходных операторов* (4.5.1) с переменными коэффициентами. Последний случай означает, что комбинированное множество операторов (4.5.1) и (4.5.6) является связным.

В первом случае следует рассматривать расширенную систему дифференциальных уравнений первого порядка, полученную объединением (4.5.1) с независимыми коммутаторами. Затем следует применить указанные действия к этой новой системе. Действуя по этой схеме, мы в конечном итоге придем ко второму случаю и, следовательно, получим так называемую полную систему.

Определение 4.5.4. Пусть (4.5.2) — система независимых уравнений. Она называется *полной системой*, если все коммутаторы (4.5.6) *зависимы* от операторов (4.5.1):

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} h^\gamma_{\alpha\beta}(x)\, X_\gamma. \tag{4.5.7}$$

Если $h^\gamma_{\alpha\beta}(x) = 0$, то есть если все коммутаторы, составленные из операторов (4.5.1), обращаются в нуль, то мы имеем дело с частным случаем полной системы, известной как *якобиева система*.

Система уравнений $X_1(u) = 0$, $X_2(u) = 0$ в примере 4.5.1 не является полной. Как следствие, процесс решения привел к новому уравнению, и в итоге была получена соответствующая полная система.

Если система (4.5.2) полная, то любая эквивалентная система (4.5.4) также полная. Кроме того, любая полная система эквивалентна якобиевой системе. Чтобы проиллюстрировать процедуру интегрирования для полной системы, приведем еще один пример.

Пример 4.5.2. Рассмотрим систему уравнений $X_1(u) = 0$, $X_2(u) = 0$ с операторами

$$X_1 = z\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + t\,\frac{\partial}{\partial y} + y\,\frac{\partial}{\partial t}\,\cdot$$

Коммутатор этих операторов имеет вид $[X_1, X_2] = X_3$, где

$$X_3 = t\,\frac{\partial}{\partial z} + z\,\frac{\partial}{\partial t}\,\cdot$$

Три уравнения $X_1(u) = 0$, $X_2(u) = 0$ и $X_3(u) = 0$ составляют полную систему, поскольку

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -\left(\frac{t}{z}\,X_1 + \frac{y}{z}\,X_3\right), \quad [X_2, X_3] = -X_1.$$

Уравнение $X_1(u) = 0$ дает $u = v(x, t, \rho)$, где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. Тогда $X_3(u) = 0$ приводит к

$$t\,\frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

откуда $v = w(x, \lambda)$, где $\lambda = \rho^2 - t^2 = y^2 + z^2 - t^2$. Наконец, последнее уравнение, $X_2(u) = 0$, дает $\partial w/\partial x = 0$. Таким образом,

$$u = \phi(y^2 + z^2 - t^2).$$

Задачи к главе 4

4.1. Найти первые интегралы и общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad \frac{dy}{dt} = xy.$$

4.2. Найти первый интеграл $\psi(x, y) = C$ для:

а) уравнения $\dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dy}{3x^2}$,

б) системы уравнений модели хищник–жертва (2.2.4).

4.3. Решить однородные линейные уравнения

а) $x^1\,\dfrac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + x^n\,\dfrac{\partial u}{\partial x^n} = 0$; б) $y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

в) $y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; г) $2y\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3x^2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4.4. Решить неоднородное линейное уравнение

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} - 2z\,\frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

4.5. Решить уравнения

$$\text{а)}\ \ y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \text{б)}\ \ y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = yg(x), \quad \text{в)}\ \ y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = xh(y),$$

где $g(x)$ и $h(y)$ — произвольные функции.

4.6. Показать, что $u + \operatorname{arctg}(y/x) = C$ есть первый интеграл системы

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = du.$$

4.7. Решить уравнение

$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = x^2.$$

4.8. Решить следующее линейное уравнение:

$$x^1\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + x^n\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = \sigma u, \quad \sigma = \text{const} \neq 0.$$

4.9. Исследовать полноту следующей системы:

$$X_1(u) \equiv z\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad X_2(u) \equiv y\,\frac{\partial u}{\partial x} + z\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

4.10. Решить следующую систему трех уравнений с тремя независимыми переменными x, y, z:

$$\begin{aligned} X_1(u) &\equiv z\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ X_2(u) &\equiv x\,\frac{\partial u}{\partial z} - z\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ X_3(u) &\equiv y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

4.11. Рассмотреть следующую систему двух линейных уравнений с четырьмя независимыми переменными, t, x, y и z:

$$t\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \sin x\,\frac{\partial u}{\partial x} - \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y} + 2\cos x\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Является ли эта система полной? Решить систему.

4.12. Проверить, что $F(u, x - tu) = 0$ представляет собой явное решение уравнения $u_t + uu_x = 0$.

4.13. Решить систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + x\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Глава 5

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая глава посвящена, в основном, дифференциальным уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными. Особое внимание уделяется классификации и методам интегрирования. Прежде чем начать изучение этой главы, рекомендуем читателю прочесть раздел 1.1.4.

Дополнительная литература: Курант Р., Гильберт Д. [14], Зоммерфельд А. [6], Duff G.F.D. [34], Соболев С.Л. [25], Адамар Ж. [1], Тихонов А.Н., Самарский А.А. [27], Петровский И.Г. [23].

5.1. Уравнения с несколькими переменными

5.1.1. Классификация в фиксированной точке. Линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка (ЧДУ) общего вида с одной зависимой переменной u и n независимыми переменными $x = (x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$a^{ij}(x)\, u_{ij} + b^i(x)\, u_i + c(x)\, u = f(x), \tag{5.1.1}$$

где для частных производных используются обычные обозначения $u_i = \partial u/\partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j$. Согласно правилу суммирования (раздел 1.2.3), предполагается суммирование по индексам $i, j = 1, \ldots, n$. Кроме того, предполагается, что коэффициенты $a^{ij}(x)$ симметричны, то есть $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$.

Уравнение (5.1.1) однородно по функции, если и только если $f(x) = 0$ (см. раздел 3.1.3). Следовательно, уравнение (5.1.1) называется *однородным*, если $f(x) = 0$, и *неоднородным* в противном случае (ср. с разделом 3.2.6).

Таким образом, однородное линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$a^{ij}(x)\, u_{ij} + b^i(x)\, u_i + c(x)\, u = 0. \tag{5.1.2}$$

Запишем левую часть уравнения (5.1.1) в форме

$$L[u] = a^{ij}(x)\, u_{ij} + b^i(x)\, u_i + cu, \tag{5.1.3}$$

где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка, определенный формулой

$$L = a^{ij}(x) D_i D_j + b^i(x) D_i + c(x). \tag{5.1.4}$$

Упростим *главную часть* оператора L, то есть члены со вторыми производными, с помощью замены переменных $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x)$. Операции дифференцирования D_i и $\overline{D}_k$ по x и $\overline{x}$, соответственно, связаны соотношениями

$$D_i = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\, \overline{D}_k.$$

Следовательно,
$$L = \overline{a}^{kl}\,\overline{D}_k\,\overline{D}_l + \cdots,$$
где
$$\overline{a}^{kl} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}\,a^{ij}\,. \tag{5.1.5}$$

Зафиксируем некоторую точку $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и введем в этой точке квадратичную форму относительно $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$:
$$K(\mu) = a_0^{ij}\,\mu_i\mu_j \tag{5.1.6}$$
с постоянными коэффициентами $a_0^{ij} = a^{ij}(x_0)$. Рассмотрим линейное преобразование
$$\mu_i = \alpha_i^k\,\overline{\mu}_k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.1.7}$$
Предположим, что оно обратимо, то есть определитель $|\alpha_i^k|$ отличен от нуля. Преобразование (5.1.7) изменяет квадратичную форму (5.1.6) следующим образом:
$$K(\overline{\mu}) = a_0^{ij}\,\alpha_i^k\alpha_j^l\,\overline{\mu}_k\overline{\mu}_l. \tag{5.1.8}$$

Из линейной алгебры известно, что существует преобразование (5.1.7), такое, что квадратичная форма (5.1.6) становится суммой квадратов, то есть
$$K(\overline{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,\overline{\mu}_i^2, \tag{5.1.9}$$
где ε_i — либо ± 1, либо 0. Сравним (5.1.5) с (5.1.8) и получим
$$\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} = \alpha_i^k.$$
Интегрирование этих уравнений дает линейную замену переменных
$$\overline{x}^k = \alpha_i^k\,x^i, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.1.10}$$
что приводит к следующему утверждению.

Теорема 5.1.1. В любой точке x_0 уравнение (5.1.2) с помощью линейной замены переменных (5.1.10) может быть приведено к следующему виду:
$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,\frac{\partial^2 u}{\partial (\overline{x}^i)^2} + \ldots = 0. \tag{5.1.11}$$
Уравнение (5.1.11) называется *канонической* или *стандартной* формой уравнения (5.1.2).

Если все ε_i имеют один знак, например $+1$ (если все они имеют знак -1, умножим уравнение (5.1.2) на -1), мы говорим, что уравнение (5.1.2) имеет *эллиптический тип*.

Если ни один из коэффициентов ε_i не равен нулю и часть ε_i равна $+1$, а остальные равны -1, мы имеем дело с уравнением (5.1.2) *гиперболического типа*. Среди уравнений этого типа в приложениях наиболее часто встречаются уравнения *нормального гиперболического типа*. Они удовлетворяют условию, что только один коэффициент ε_i положителен (или только один отрицателен).

Если часть ε_i обращается в 0, то уравнение (5.1.2) относят к *параболическому типу*.

Терминология сохраняется и в случае неоднородных уравнений (5.1.1).

Уравнения с переменными коэффициентами a^{ij} могут иметь разный тип в разных точках x. Более того, в общем случае можно найти замену переменных, действующую не только в фиксированной точке, но и в некоторой области, такой, что она приводит уравнение (5.1.2) к канонической форме во всей этой области. Это возможно только в том случае, если уравнение (5.1.2) с несколькими переменными имеет постоянные коэффициенты a^{ij} или если существует некоторая система координат, в которой все a^{ij} постоянны. Единственным исключением является уравнение (5.1.2) с *двумя независимыми переменными* (см. раздел 5.2).

5.1.2. Сопряженные линейные дифференциальные операторы. Концепция сопряженного оператора, определенного ниже, играет важную роль в теории и приложениях линейных дифференциальных уравнений.

Определение 5.1.1. Пусть L — линейный дифференциальный оператор произвольного порядка. Линейный дифференциальный оператор L^* называется *сопряженным оператором* к L, если

$$vL[u] - uL^*[v] = D_i(p^i) \equiv \operatorname{div} P \tag{5.1.12}$$

для всех функций u и v, где $P = (p^1, \ldots, p^n)$ — векторное поле с компонентами $p^i(x)$. Уравнение $L^*[v] = 0$ называют *сопряженным уравнением* к уравнению $L[u] = 0$.

Можно доказать, что сопряженный оператор L^* однозначно определяется уравнением (5.1.12). Продемонстрируем это утверждение на примере оператора второго порядка (5.1.4):

$$L = a^{ij}(x)\, D_i D_j + b^i(x)\, D_i + c(x).$$

Теорема 5.1.2. Сопряженный к L оператор L^* определяется однозначно и имеет вид

$$L^*[v] = D_i D_j(a^{ij} v) - D_i(b^i v) + cv. \tag{5.1.13}$$

Доказательство. Ключевая идея состоит в том, что следует рассмотреть выражение $vL[u]$ и перенести дифференцирование функции u на v. Мы имеем:

$$\begin{aligned} vL[u] &= va^{ij} D_i D_j u + vb^i D_i u + cuv = \\ &= D_i(va^{ij} D_j u) - D_i(va^{ij})\, D_j u + D_i(vb^i u) - uD_i(vb^i) + ucv. \end{aligned}$$

Кроме того, запишем слагаемое $-D_i(va^{ij})\, D_j u$ в виде

$$-D_i(va^{ij}) D_j u = -D_j\big(uD_i(va^{ij})\big) + uD_i D_j(a^{ij} v),$$

откуда, меняя местами i и j в первом слагаемом правой части и учитывая, что $a^{ij} = a^{ji}$, получаем:

$$-D_i(va^{ij})D_j u = -D_i\big(uD_j(va^{ij})\big) + uD_iD_j(a^{ij}v).$$

Наконец, принимая в расчет, что $D_j u = u_j$, приходим к уравнению

$$vL[u] = u\{D_iD_j(a^{ij}v) - D_i(b^i v) + cv\} + D_i\{a^{ij}vu_j + b^i uv - uD_j(a^{ij}v)\}.$$

Из этого следует, что сопряженный оператор определяется выражением (5.1.13) и удовлетворяет уравнению (5.1.12), где

$$p^i = a^{ij}vu_j + b^i uv - uD_j(a^{ij}v). \tag{5.1.14}$$

Замечание 5.1.1. Определение сопряженного оператора сохраняется в случае системы дифференциальных уравнений, например в случае уравнений второго порядка, когда функция u в уравнении (5.1.3) является m-мерным вектором, а коэффициенты $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ и $c(x)$ оператора (5.1.4) являются $m \times m$ матрицами.

Определение 5.1.2. Говорят, что оператор L *самосопряженный*, если

$$L[u] = L^*[u] \tag{5.1.15}$$

для любой функции $u(x)$. Тогда уравнение $L[u] = 0$ также называют самосопряженным.

Теорема 5.1.3. Оператор (5.1.4), $L = a^{ij}(x)D_iD_j + b^i(x)D_i + c(x)$, является самосопряженным, если и только если

$$b^i(x) = D_j\big(a^{ij}(x)\big), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.1.16}$$

Доказательство. Выражение (5.1.13) для сопряженного оператора L^* может быть представлено в виде

$$L^*[v] = a^{ij}v_{ij} + \big(2D_j(a^{ij}) - b^i\big)v_i + \big(c - D_i(b^i) + D_iD_j(a^{ij})\big)v. \tag{5.1.17}$$

Подставляя (5.1.17) в уравнение (5.1.15) и используя симметрию $a^{ji} = a^{ij}$, получаем:

$$2D_j(a^{ij}) - b^i = b^i, \quad c - D_i(b^i) + D_iD_j(a^{ij}) = c. \tag{5.1.18}$$

Первое уравнение (5.1.18) дает (5.1.16), тогда как второе уравнение (5.1.18) является следствием (5.1.16). Заметим, что доказательство сохраняет силу в случае, когда (5.1.3) — система линейных уравнений второго порядка.

Замечание 5.1.2. Установлено (см. [14, приложение 1 к главе III, § 2.2]), что самосопряженный оператор должен удовлетворять, наряду с (5.1.16), еще одному условию:

$$D_i(b^i) = 0. \tag{5.1.19}$$

Однако в выполнении условия (5.1.19) нет необходимости. Действительно, рассмотрим, например, следующее скалярное уравнение с двумя независимыми переменными x, y:

$$L[u] \equiv x^2u_{xx} + y^2u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0.$$

Оператор L является самосопряженным (см. задачу 5.7), но не удовлетворяет условию (5.1.19), поскольку $D_i(b^i) = D_x(b^1) + D_y(b^2) = 4$.

Приведем простой пример самосопряженной системы, в которой не требуется выполнения условия (5.1.19):

$$x^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x u_x + w = 0, \quad w_{xx} + y^2 w_{yy} + 2y w_y + u = 0.$$

Коэффициенты этой системы с двумя независимыми переменными x, y и двумя зависимыми переменными u, w удовлетворяют уравнениям (5.1.16), но не требуют выполнения условия (5.1.19). Действительно,

$$a^{11} = \left\| \begin{matrix} x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad a^{22} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & y^2 \end{matrix} \right\|, \quad a^{12} = a^{21} = 0, \quad c = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$
$$b^1 = \left\| \begin{matrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad b^2 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{matrix} \right\|, \quad D_x(b^1) + D_y(b^2) = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

5.2. Классификация уравнений с двумя независимыми переменными

5.2.1. Характеристики. Три типа уравнений. Общий вид однородного линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными, x и y, есть

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + a u_x + b u_y + c u = 0, \tag{5.2.1}$$

где $A = A(x, y), \ldots, c = c(x, y)$ — заданные функции. Слагаемые со вторыми производными,

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy}, \tag{5.2.2}$$

составляют *главную часть* уравнения (5.2.1).

Принципиальный шаг в изучении уравнения (5.2.1) состоит в приведении его главной части (5.2.2) к так называемым *стандартным формам* путем замены переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{5.2.3}$$

Получим стандартные формы главных частей всех уравнений вида (5.2.1). Замена переменных (5.2.3) приводит к следующим преобразованиям производных (см. раздел 1.4.5):

$$\begin{gathered}
u_x = \varphi_x u_\xi + \psi_x u_\eta, \qquad u_y = \varphi_y u_\xi + \psi_y u_\eta, \\
u_{xx} = \varphi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_x \psi_x u_{\xi\eta} + \psi_x^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{xx} u_\xi + \psi_{xx} u_\eta, \\
u_{yy} = \varphi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_y \psi_y u_{\xi\eta} + \psi_y^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{yy} u_\xi + \psi_{yy} u_\eta, \\
u_{xy} = \varphi_x \varphi_y u_{\xi\xi} + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) u_{\xi\eta} + \psi_x \psi_y u_{\eta\eta} + \varphi_{xy} u_\xi + \psi_{xy} u_\eta.
\end{gathered}$$

Подставляя выражения (5.2.4) в (5.2.2) и сохраняя только слагаемые, содержащие вторые производные $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}$, $u_{\eta\eta}$, мы получаем следующую главную часть уравнения (5.2.1) в новых переменных:

$$\widetilde{A}\, u_{\xi\xi} + 2\widetilde{B}\, u_{\xi\eta} + \widetilde{C}\, u_{\eta\eta}, \tag{5.2.4}$$

где

$$\widetilde{A} = A\,\varphi_x^2 + 2B\,\varphi_x\varphi_y + C\,\varphi_y^2,$$
$$\widetilde{B} = A\,\varphi_x\psi_x + B\,(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\,\varphi_y\psi_y,$$
$$\widetilde{C} = A\,\psi_x^2 + 2B\,\psi_x\psi_y + C\,\psi_y^2.$$

Из (5.2.5) следует, что главная часть (5.2.4) будет иметь только один член, $2\widetilde{B}$, если мы выберем в качестве $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ два решения уравнения

$$A\,\omega_x^2 + 2B\,\omega_x\omega_y + C\,\omega_y^2 = 0$$

в предположении, что последнее имеет два функционально независимых решения, $\omega_1 = \varphi(x, y)$ и $\omega_2 = \psi(x, y)$. Однако рассматриваемое уравнение может иметь только одно решение или даже вообще не иметь решений, поскольку оно нелинейно. Таким образом, перед нами встает проблема.

Определение 5.2.1. Нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$A\,\omega_x^2 + 2B\,\omega_x\omega_y + C\,\omega_y^2 = 0 \tag{5.2.5}$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (5.2.1). Если $\omega(x, y)$ — решение уравнения (5.2.1), то кривые

$$\omega(x, y) = \mathrm{const} \tag{5.2.6}$$

называют *характеристиками* уравнения (5.2.1).

Характеристики важны для интегрирования и/или понимания поведения решений уравнения (5.2.1). Для нахождения характеристик мы вводим обозначение

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \lambda \tag{5.2.7}$$

и переписываем характеристическое уравнение (5.2.5) в виде

$$A(x, y)\,\lambda^2 + 2B(x, y)\,\lambda + C(x, y) = 0. \tag{5.2.8}$$

Вводят классификацию, разделяя уравнения (5.2.1) на три типа в соответствии с числом их характеристик, то есть с числом действительных корней квадратного уравнения (5.2.8).

Определение 5.2.2. Говорят, что уравнение (5.2.1) *гиперболическое*, если квадратное уравнение (5.2.8) имеет два различных действительных корня, $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$, то есть если

$$B^2 - AC > 0, \tag{5.2.9}$$

параболическое, если (5.2.8) имеет кратные корни, $\lambda_1(x, y) = \lambda_2(x, y)$, то есть если

$$B^2 - AC = 0, \tag{5.2.10}$$

и *эллиптическое*, если корни $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ комплексные, то есть если

$$B^2 - AC < 0. \tag{5.2.11}$$

5.2.2. Стандартная форма гиперболических уравнений. Остановимся на гиперболическом типе. Уравнение (5.2.8) имеет два различных действительных корня

$$\lambda_1(x, y) = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \lambda_2(x, y) = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \cdot \tag{5.2.12}$$

Подставляя их в (5.2.7), мы видим, что характеристическое уравнение (5.2.5) расщепляется на два различных линейных дифференциальных уравнения с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{5.2.13}$$

Система характеристик (4.2.6) уравнений (5.2.13):

$$\frac{dx}{1} + \frac{dy}{\lambda_1(x, y)} = 0, \qquad \frac{dx}{1} + \frac{dy}{\lambda_2(x, y)} = 0. \tag{5.2.14}$$

Каждое из уравнений (5.2.14) дает один независимый первый интеграл, $\varphi(x, y) = \text{const}$ из первого уравнения (5.2.14) и $\psi(x, y) = \text{const}$ из второго, соответственно. Как следствие, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют, соответственно, первому и второму из уравнений (5.2.13):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{5.2.15}$$

и поэтому они функционально независимы. Таким образом, они представляют собой два функционально независимых решения характеристического уравнения (5.2.8) и, следовательно, могут быть использованы для составления правых частей соотношений для замены переменных (5.2.3), уменьшая главную часть (5.2.4) на одно слагаемое, $2\widetilde{B}u_{\xi\eta}$. Новые переменные ξ и η называют *характеристическими переменными*. Наконец, делим на $2\widetilde{B}$ уравнение, полученное из (5.2.1) после замены переменных, и приходим к так называемой *стандартной форме* гиперболических уравнений. Подведем итог (ср. с уравнением (1.1.56) в теореме 1.1.3).

Теорема 5.2.1. Гиперболические уравнения (5.2.1) принимают в характеристических переменных следующую *стандартную форму*:

$$u_{\xi\eta} + \widetilde{a}(\xi, \eta)\, u_\xi + \widetilde{b}(\xi, \eta)\, u_\eta + \widetilde{c}(\xi, \eta)\, u = 0. \tag{5.2.16}$$

Упражнение 5.2.1. Докажите, что нетривиальные (то есть не равные тождественно константе) решения $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ первого и второго уравнений (5.2.15), соответственно, функционально независимы.

Пример 5.2.1. Типичным представителем гиперболических уравнений является волновое уравнение (2.6.5)

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = 0.$$

Полагая $t = y$, мы получаем $A = -k^2$, $B = 0$, $C = 1$, следовательно, $B^2 - AC = k^2 > 0$. Мы продолжим обсуждение этого примера в разделе 5.3.1.

5.2.3. Стандартная форма параболических уравнений. Для параболического типа уравнение (5.2.8) имеет кратные действительные корни,

$$\lambda = -\frac{B}{A},$$

и два уравнения (5.2.15) сводятся к одному уравнению

$$A\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \tag{5.2.17}$$

Сделаем замену переменных (5.2.3) в виде

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = x, \tag{5.2.18}$$

где $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (5.2.17). Легко убедиться, что уравнения (5.2.5) дают $\widetilde{A} = 0$, $\widetilde{B} = 0$.

Разделив на $\widetilde{C} \neq 0$, мы получаем следующую *стандартную форму* параболических уравнений (ср. с уравнением (1.1.57) в теореме 1.1.3).

Теорема 5.2.2. Параболические уравнения (5.2.1) принимают следующую *стандартную форму* в переменных (5.2.18):

$$u_{\eta\eta} + \widetilde{a}(\xi, \eta)\, u_\xi + \widetilde{b}(\xi, \eta)\, u_\eta + \widetilde{c}(\xi, \eta)\, u = 0. \tag{5.2.19}$$

Выше мы предположили, что $A \neq 0$. Но если $A = 0$, тогда условие (5.2.10), $B^2 - AC = 0$, приводит к $B = 0$, и, следовательно, уравнение (5.2.1) уже имеет стандартную форму (5.2.19).

Пример 5.2.2. Типичным представителем параболических уравнений является уравнение теплопроводности (2.4.7)

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0.$$

Здесь $A = -a^2$, $B = 0$, $C = 0$, и, следовательно, $B^2 - AC = 0$.

5.2.4. Стандартная форма эллиптических уравнений. Для эллиптического типа условие $B^2 - AC < 0$ приводит к тому, что уравнение (5.2.8) не имеет действительных корней, а имеет комплексный корень

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

и комплексно сопряженный корень $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Возьмем первое из уравнений (5.2.13) с комплексным корнем λ_1:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - \lambda_1\,\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \tag{5.2.20}$$

и представим его (комплексное) решение в виде

$$\omega = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \tag{5.2.21}$$

Второе уравнение из (5.2.13) является просто комплексно сопряженным к уравнению (5.2.20):

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial x} - \overline{\lambda}_1\,\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y} = 0,$$

где $\overline{\omega} = \varphi(x,y) - i\psi(x,y)$. Из этого следует, что мы рассматриваем единственную функцию (5.2.21). Она является решением характеристического уравнения (5.2.5):

$$A(\varphi_x + i\psi_x)^2 + 2B(\varphi_x + i\psi_x)(\varphi_y + i\psi_y) + C(\varphi_y + i\psi_y)^2 = 0.$$

Подставляя $(\varphi_x + i\psi_x)^2 = \varphi_x^2 - \psi_x^2 + 2i\varphi_x\psi_x, \quad \ldots$ в левую часть этого уравнения и приравнивая к нулю действительную и мнимую части, мы получаем:

$$\begin{aligned} &A\,\varphi_x^2 + 2B\,\varphi_x\varphi_y + C\,\varphi_y^2 = A\,\psi_x^2 + 2B\,\psi_x\psi_y + C\,\psi_y^2,\\ &A\,\varphi_x\psi_x + B\,(\varphi_y\psi_x + \varphi_x\psi_y) + C\,\varphi_y\psi_y = 0. \end{aligned}$$

Далее, проводя замену переменных (5.2.3),

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ взяты из (5.2.21), и учитывая (5.2.5), мы получаем $\widetilde{A} = \widetilde{C} \neq 0$ и $\widetilde{B} = 0$. После этого поделим уравнение (5.2.1), записанное в новых переменных, на $\widetilde{A}$ и придем к стандартной форме эллиптических уравнений. Этот результат можно сформулировать в виде теоремы (ср. с уравнением (1.1.58) в теореме 1.1.3).

Теорема 5.2.3. Пусть (5.2.1) — эллиптическое уравнение. Введем новые переменные

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — действительная и мнимая части решения (5.2.21) комплексного уравнения характеристик (5.2.20). Эта замена переменных приводит уравнение (5.2.1) к следующей *стандартной форме*:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \widetilde{a}(\xi,\eta)\,u_\xi + \widetilde{b}(\xi,\eta)\,u_\eta + \widetilde{c}(\xi,\eta)\,u = 0. \tag{5.2.22}$$

Пример 5.2.3. Типичным представителем эллиптических уравнений является уравнение Лапласа с двумя переменными,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{5.2.23}$$

Очевидно, что уравнение характеристик (5.2.5), $\omega_x^2 + \omega_y^2 = 0$, не имеет действительнозначных решений $\omega(x,y)$.

Замечание 5.2.1. Из уравнений (5.2.16), (5.2.22) с очевидностью следует, что гиперболические и эллиптические уравнения связаны комплексными преобразованиями (ср. с замечанием 1.1.8).

5.2.5. Уравнения смешанного типа.

Примером уравнения второго порядка смешанного типа может служить уравнение Трикоми (2.6.37)

$$xu_{yy} + u_{xx} = 0. \tag{5.2.24}$$

Это уравнение гиперболическое при $x < 0$ и эллиптическое при $x > 0$. Уравнение Трикоми применяют в газовой динамике в качестве приближенной модели при исследовании околозвуковых течений. А именно, уравнение (5.2.24) соответствует дозвуковому газовому потоку в эллиптической области и сверхзвуковому потоку в гиперболической области.

5.2.6. Тип нелинейных уравнений. Тип нелинейного дифференциального уравнения с частными производными

$$A(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xx} + 2B(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xy} + \\ + C(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (5.2.25)$$

зависит от его решений и определяется следующим образом.

Определение 5.2.3. Пусть

$$u^* = h(x, y)$$

— любое частное решение уравнения (5.2.25). Тип *нелинейного* уравнения (5.2.25) на решении u^* определяется типом *линейного уравнения*

$$A^*(x, y)\, u_{xx} + 2B^*(x, y)\, u_{xy} + C^*(x, y)\, u_{yy} = 0, \qquad (5.2.26)$$

где коэффициенты A^*, B^*, C^* находятся заменой зависимых переменных u и их первых производных на функции $h(x, y)$ и их производные соответственно, например,

$$A^*(x, y) = A\big(x, y, h(x, y), h_x(x, y), h_y(x, y)\big).$$

Слагаемые, содержащие производные первого порядка, в линеаризованном уравнении (5.2.26) опускаются, поскольку они не влияют на тип уравнения.

Пример 5.2.4. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение (2.6.31):

$$u_{tt} = \phi(u)\, u_{xx} + \frac{1}{2}\, \phi'(u)\, u_x^2. \qquad (5.2.27)$$

Если, например, $\phi(u) = u^2$, уравнение (5.2.27),

$$u_{tt} = u^2 u_{xx} + u u_x^2,$$

— гиперболическое для любого решения $u^* = h(x, y)$. Аналогично, если $\phi(u) = -u^2$, уравнение (5.2.27),

$$u_{tt} = -u^2 u_{xx} - u u_x^2,$$

— эллиптическое для любого решения $u^* = h(x, y)$. С другой стороны, полагая, например, $\phi(u) = u$, мы получаем нелинейное уравнение смешанного типа:

$$u_{tt} = u u_{xx} + \frac{1}{2}\, u_x^2.$$

Оно гиперболическое для любого положительного решения $u^* = h(x, y)$, $h(x, y) > 0$, и эллиптическое для любого отрицательного решения $u^* = h(x, y)$, $h(x, y) < 0$.

5.3. Интегрирование гиперболических уравнений с двумя переменными

Я представляю здесь простые и эффективные методы интегрирования, полученные Д'Аламбером (1747), Эйлером (1770) и Лапласом (1773). Наиболее важным инструментом этого раздела являются инварианты Лапласа.

5.3.1. Решение Д'Аламбера. Первое уравнение с частными производными, волновое уравнение колебаний струн

$$u_{tt} = k^2 u_{xx}, \quad k = \text{const}, \tag{5.3.1}$$

было сформулировано и решено Д'Аламбером в 1747 году.

Решим уравнение (5.3.1) с помощью приведения его к стандартной форме. Характеристическое уравнение (5.2.5) имеет вид

$$\omega_t^2 - k^2\omega_x^2 = (\omega_t - k\omega_x)(\omega_t + k\omega_x) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения первого порядка (ср. с (5.2.13)):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + k\,\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - k\,\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Ассоциированные уравнения (5.2.14),

$$dt = \frac{dx}{k}$$

и

$$dt = -\frac{dx}{k},$$

дают первые интегралы $x - kt = \text{const}$ и $x + kt = \text{const}$ соответственно. Таким образом, характеристические переменные волнового уравнения имеют вид

$$\xi = x - kt, \quad \eta = x + kt. \tag{5.3.2}$$

В характеристических переменных (5.3.2) уравнение (5.3.1) приобретает стандартную форму

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{5.3.3}$$

Интегрируя сначала по η, мы имеем

$$u_\xi = f(\xi),$$

откуда, интегрируя по ξ и вводя обозначение $F(\xi) = \int f(\xi)\,d\xi$, мы получаем решение уравнения (5.3.3):

$$u = F(\xi) + H(\eta). \tag{5.3.4}$$

Вернемся к исходным переменным с помощью подстановки выражений (5.3.2) характеристических переменных в (5.3.4) и придем окончательно к следующему общему решению волнового уравнения (5.3.1):

$$u = F(x - kt) + H(x + kt), \tag{5.3.5}$$

известному как *решение Д'Аламбера.*

5.3.2. Уравнения, приводимые к волновому уравнению. Рассмотрим гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными, представленные в стандартной форме (5.2.16):

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)\,u_\xi + b(\xi,\eta)\,u_\eta + c(\xi,\eta)\,u = 0. \tag{5.3.6}$$

Часть уравнений вида (5.3.6) может быть преобразована в волновое уравнение (5.3.3) с помощью замены переменных и, следовательно, решена методом Д'Аламбера. Выделим все такие уравнения. Во-первых, получим наиболее общую форму замен переменных, которые можно провести без потери свойств линейности и однородности уравнений (5.3.6), а также их стандартной формы. Эти замены переменных называют *преобразованиями эквивалентности*. Они имеют следующий вид:

$$\widetilde{\xi} = f(\xi), \quad \widetilde{\eta} = g(\eta), \quad v = \sigma(\xi,\eta)\,u, \tag{5.3.7}$$

где $f'(\xi) \neq 0$, $g'(\eta) \neq 0$ и $\sigma(\xi,\eta) \neq 0$. Здесь u и v считаются функциями ξ, η и $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$ соответственно. Уравнения (5.3.6), связанные преобразованием эквивалентности (5.3.7), называют *эквивалентными*.

Начнем с частного случая преобразований эквивалентности (5.3.7), выбрав $\widetilde{\xi} = \xi$, $\widetilde{\eta} = \eta$, и найдем уравнения (5.3.6), приводимые к волновому уравнению с помощью линейного преобразования зависимой переменной, имеющего вид

$$v = u\,e^{\varphi(\xi,\eta)}.$$

Подставим выражения

$$u = v\,e^{-\varphi(\xi,\eta)},$$
$$u_\xi = (v_\xi - v\varphi_\xi)\,e^{-\varphi(\xi,\eta)}, \qquad u_\eta = (v_\eta - v\varphi_\eta)\,e^{-\varphi(\xi,\eta)},$$
$$u_{\xi\eta} = (v_{\xi\eta} - v_\xi\varphi_\eta - v_\eta\varphi_\xi - v\,\varphi_{\xi\eta} + v\,\varphi_\xi\,\varphi_\eta)\,e^{-\varphi(\xi,\eta)}$$

в левую часть уравнения (5.3.6) и получим:

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} + a\,u_\xi + b\,u_\eta + cu = \big[&v_{\xi\eta} + (a - \varphi_\eta)\,v_\xi + (b - \varphi_\xi)\,v_\eta + \\ &+ (-\varphi_{\xi\eta} + \varphi_\xi\,\varphi_\eta - a\varphi_\xi - b\varphi_\eta + c)\,v\big]e^{-\varphi}. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Следовательно, уравнение (5.3.6) приводится к волновому уравнению $v_{\xi\eta} = 0$, если

$$a - \varphi_\eta = 0, \quad b - \varphi_\xi = 0 \tag{5.3.9}$$

и

$$\varphi_{\xi\eta} - \varphi_\xi\,\varphi_\eta + a\varphi_\xi + b\varphi_\eta - c = 0. \tag{5.3.10}$$

Уравнения (5.3.9) представляют собой систему *двух* уравнений для *одной* неизвестной функции $\varphi(\xi,\eta)$ от двух переменных. Напомним, что система уравнений называется *переопределенной системой*, если она содержит больше уравнений, чем неизвестных функций, которые должны быть найдены в результате решения этой системы. Переопределенные системы имеют решения, если и только если они удовлетворяют соответствующим *условиям совместности*.

Таким образом, система уравнений (5.3.9) является переопределенной. Условие ее совместности находится из уравнения $\varphi_{\xi\eta} = \varphi_{\eta\xi}$ (независимости результата частного дифференцирования от порядка дифференцирования) и имеет вид

$$a_\xi = b_\eta. \tag{5.3.11}$$

Уравнение (5.3.10), с учетом уравнений (5.3.9) и (5.3.11), записывается следующим образом:

$$a_\xi + ab - c = 0. \tag{5.3.12}$$

С помощью введения величин h и k, подчиняющихся соотношениям [1])

$$h = a_\xi + ab - c, \quad k = b_\eta + ab - c, \tag{5.3.13}$$

условия (5.3.11) и (5.3.12) представляются в следующей симметричной форме:

$$h = 0, \quad k = 0. \tag{5.3.14}$$

Замечание 5.3.1. Уравнения (5.3.14) инвариантны при общем преобразовании эквивалентности (5.3.7). Как следствие, изменение независимых переменных не приводит к выявлению новых уравнений, приводимых к волновому уравнению.

Подводя итог проведенным расчетам и принимая во внимание замечание 5.3.1, мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.3.1. Уравнение (5.3.6) эквивалентно волновому уравнению, если и только если его инварианты Лапласа (5.3.13) обращаются в нуль, $h = k = 0$. Любое уравнение (5.3.6), удовлетворяющее условию $h = k = 0$, может быть приведено к волновому уравнению $v_{\xi\eta} = 0$ линейным преобразованием зависимой переменной

$$u = v\, e^{-\varphi(\xi,\eta)} \tag{5.3.15}$$

без изменения независимых переменных ξ и η. Функция φ в (5.3.15) находится в результате решения следующей совместной системы:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = b(\xi,\eta), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = a(\xi,\eta). \tag{5.3.16}$$

Теорема 5.3.1 дает нам практический метод решения широкого класса уравнений

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

гиперболического типа путем сведения их к волновому уравнению. Метод требует выполнения следующих двух шагов.

Первый шаг. Проверить, является ли уравнение (5.2.1) гиперболическим, т. е. выполнено ли условие $B^2 - AC > 0$. Предположим, что это

[1]) Величины (5.3.13) были введены Эйлером [35]. Позднее они были повторно получены Лапласом [42] и стали известны в литературе как *инварианты Лапласа*. См. далее разделы 5.3.3 и 5.3.4.

условие выполнено; тогда привести это уравнение к стандартному виду (5.3.6) с помощью перехода к характеристическим переменным (раздел 5.2.2)

$$\xi = \omega_1(x, y), \quad \eta = \omega_2(x, y). \tag{5.3.17}$$

Второй шаг. Найти инварианты Лапласа (5.3.13). Если $h = k = 0$, найти $\varphi(\xi, \eta)$ путем решения уравнений (5.3.16) и привести исходное уравнение к волновому уравнению $v_{\xi\eta} = 0$ с помощью преобразования (5.3.15). Наконец, подставляя $v = f(\xi) + g(\eta)$ в (5.3.15), получить решение исходного уравнения в характеристических переменных:

$$u = [f(\xi) + g(\eta)]\, e^{-\varphi(\xi,\eta)}. \tag{5.3.18}$$

Подставить в решение выражения (5.3.17) для ξ и η и получить решение в первоначально заданных переменных x, y.

Пример 5.3.1. Проиллюстрируем метод, применив его к уравнению

$$\frac{u_{xx}}{x^2} - \frac{u_{yy}}{y^2} + 3\left(\frac{u_x}{x^3} - \frac{u_y}{y^3}\right) = 0. \tag{5.3.19}$$

Первый шаг. Здесь $A = x^{-2}$, $B = 0$, $C = -y^{-2}$, и, следовательно, $B^2 - AC = (xy)^{-2} > 0$. Уравнение характеристик (5.2.5) имеет вид

$$\left(\frac{\omega_x}{x}\right)^2 - \left(\frac{\omega_y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\omega_x}{x} - \frac{\omega_y}{y}\right)\left(\frac{\omega_x}{x} + \frac{\omega_y}{y}\right) = 0.$$

Оно расщепляется на два уравнения:

$$\frac{\omega_x}{x} + \frac{\omega_y}{y} = 0, \quad \frac{\omega_x}{x} - \frac{\omega_y}{y} = 0.$$

Решая их, получаем первые интегралы:

$$x^2 - y^2 = \mathrm{const}, \quad x^2 + y^2 = \mathrm{const}.$$

Итак, характеристические переменные (5.3.17) определяются соотношениями

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = x^2 + y^2.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\, \xi_x + u_\eta\, \eta_x = 2x(u_\xi + u_\eta),\\
u_y &= u_\xi\, \xi_y + u_\eta\, \eta_y = 2y(u_\eta - u_\xi),\\
u_{xx} &= 2(u_\xi + u_\eta) + 4x^2\left[(u_\xi + u_\eta)_\xi + (u_\xi + u_\eta)_\eta\right] =\\
&= 2(u_\xi + u_\eta) + 4x^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}),\\
u_{yy} &= 2(u_\eta - u_\xi) + 4y^2\left[(u_\eta - u_\xi)_\eta - (u_\eta - u_\xi)_\xi\right] =\\
&= 2(u_\eta - u_\xi) + 4y^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).
\end{aligned}$$

С учетом этих выражений уравнение (5.3.19) приобретает следующий вид:

$$u_{\xi\eta} + \frac{x^2 + y^2}{2x^2y^2}\, u_\xi - \frac{x^2 - y^2}{2x^2y^2}\, u_\eta = 0.$$

Учитывая, что $x^2 - y^2 = \xi$, $x^2 + y^2 = \eta$ и замечая, что

$$2x^2y^2 = \frac{\eta^2 - \xi^2}{2},$$

мы приходим в итоге к следующей стандартной форме уравнения (5.3.19):

$$u_{\xi\eta} + \frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2}\, u_\xi - \frac{2\xi}{\eta^2 - \xi^2}\, u_\eta = 0. \tag{5.3.20}$$

В т о р о й ш а г. Коэффициенты уравнения (5.3.20) имеют следующий вид:

$$a = \frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2}, \quad b = -\frac{2\xi}{\eta^2 - \xi^2}, \quad c = 0.$$

Подставляя в (5.3.13) выражения для a, b, c и их производных

$$a_\xi = b_\eta = \frac{4\xi\eta}{(\eta^2 - \xi^2)^2},$$

мы убеждаемся, что $h = k = 0$. Далее решаем уравнения (5.3.16):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{2\xi}{\eta^2 - \xi^2}$$

и получаем

$$\varphi = \ln(\eta^2 - \xi^2).$$

Следовательно, подстановка (5.3.15):

$$v = u\, e^{\ln(\eta^2 - \xi^2)} = (\eta^2 - \xi^2)\, u \tag{5.3.21}$$

переводит уравнение (5.3.20) в волновое уравнение

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Отсюда следует

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

и (5.3.21) дает:

$$u(\xi, \eta) = \frac{f(\xi) + g(\eta)}{\eta^2 - \xi^2}\,.$$

Возвращаясь к исходным переменным с помощью подстановки $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = x^2 + y^2$ и введения обозначений $F = f/4$, $H = g/4$, мы получаем окончательно следующее общее решение уравнения (5.3.19):

$$u(x, y) = \frac{F(x^2 - y^2) + H(x^2 + y^2)}{x^2y^2}\,. \tag{5.3.22}$$

5.3.3. Метод Эйлера. Мы обязаны Леонарду Эйлеру [35] первыми значительными результатами в теории интегрирования гиперболических уравнений, не обязательно эквивалентных волновому уравнению. Он обобщил решение Д'Аламбера на широкий класс уравнений (5.3.6). А именно, он ввел величины (5.3.13) и показал, что уравнение (5.3.6) раскладывается на множители (т. е. оно факторизуемо), если и только если по крайней мере одна из величин h и k обращается в нуль. Решение факторизованного уравнения (5.3.6) приводится к последовательному интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод Эйлера состоит в следующем. Рассмотрим уравнение (5.3.6),

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)\,u_\xi + b(\xi,\eta)\,u_\eta + c(\xi,\eta)\,u = 0,$$

при $h = 0$. Тогда уравнение факторизуемо и может быть представлено в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + b\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} + au\right) = 0. \tag{5.3.23}$$

Полагая

$$v = u_\eta + au, \tag{5.3.24}$$

можно переписать уравнение (5.3.23) в форме уравнения первого порядка

$$v_\xi + bv = 0$$

и, проинтегрировав его, получить

$$v = Q(\eta)\,e^{-\int b(\xi,\eta)\,d\xi}. \tag{5.3.25}$$

После этого подставляем (5.3.25) в (5.3.24) и интегрируем полученное в результате неоднородное линейное уравнение

$$u_\eta + au = Q(\eta)\,e^{-\int b(\xi,\eta)\,d\xi} \tag{5.3.26}$$

по η и получаем следующий результат.

Теорема 5.3.2. Общее решение уравнения (5.3.6),

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)\,u_\xi + b(\xi,\eta)\,u_\eta + c(\xi,\eta)\,u = 0,$$

при $h = 0$ определяется формулой

$$u = \left[P(\xi) + \int Q(\eta)\,e^{\int a\,d\eta - b\,d\xi}\,d\eta\right]e^{-\int a\,d\eta}, \tag{5.3.27}$$

содержащей две произвольные функции, $P(\xi)$ и $Q(\eta)$.

Аналогично, если $k = 0$, уравнение (5.3.6) факторизуемо и приводится к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + a\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + bu\right) = 0. \tag{5.3.28}$$

В этом случае мы заменяем подстановку (5.3.24) на

$$w = u_\xi + bu. \tag{5.3.29}$$

Далее повторяются вычисления, выполненные в случае $h = 0$, что приводит к следующему результату.

Теорема 5.3.3. Общее решение уравнения (5.3.6),

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)\,u_\xi + b(\xi,\eta)\,u_\eta + c(\xi,\eta)\,u = 0,$$

при $k = 0$ определяется формулой

$$u = \left[Q(\eta) + \int P(\xi)\, e^{\int b\,d\xi - a\,d\eta}\, d\xi\right] e^{-\int b\,d\xi}. \tag{5.3.30}$$

Метод можно применять и в случае, когда (5.3.6) заменено на неоднородное уравнение

$$u_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u = f(\xi, \eta). \tag{5.3.31}$$

Если в этом случае выполнено, например, условие $h = 0$, мы получаем следующий результат.

Теорема 5.3.4. Решение уравнения (5.3.31) при $h = 0$ имеет вид

$$u = \left[P(\xi) + \int\!\left(Q(\eta) + \int f(\xi, \eta)\, e^{\int b\,d\xi}\, d\xi\right) e^{\int a\,d\eta - b\,d\xi}\, d\eta\right] e^{-\int a\,d\eta}. \tag{5.3.32}$$

Пример 5.3.2. Рассмотрим следующее уравнение, известное как уравнение Дарбу:

$$u_{xy} + \frac{\beta u_y}{x - y} = 0, \quad \beta = \text{const}. \tag{5.3.33}$$

Здесь

$$a = 0, \quad b = \frac{\beta}{x - y}, \quad c = 0.$$

Инварианты Лапласа имеют вид

$$h = a_x + ab - c = 0, \quad k = b_y = \frac{\beta}{(x - y)^2} \neq 0.$$

Формула (5.3.27) дает общее решение

$$u(x, y) = P(x) + \int Q(y)(x - y)^{-\beta}\, dy.$$

Получим общее решение задачи Коши с начальными условиями, заданными на нехарактеристической линии $x - y = 1$:

$$u\big|_{x-y=1} = u_0(x), \quad u_y\big|_{x-y=1} = u_1(x).$$

Тогда решение записывается в виде

$$u = P(x) + \int\limits_{-1}^{y} Q(\tau)(x - \tau)^{-\beta}\, d\tau.$$

Начальные условия дают:

$$u\big|_{x-y=1} = P(x) + \int\limits_{-1}^{x-1} Q(\tau)(x - \tau)^{-\beta}\, d\tau = u_0(x),$$

$$u_y\big|_{x-y=1} = Q(x - y) = u_1(x).$$

Отсюда

$$Q(y) = u_1(y+1), \quad P(x) = u_0(x) - \int\limits_{-1}^{x-1} u_1(\tau+1)(x-\tau)^{-\beta}\, d\tau.$$

Таким образом, получаем следующее решение задачи Коши:

$$u(x,y) = u_0(x) - \int\limits_{-1}^{x-1} u_1(\tau+1)(x-\tau)^{-\beta}\, d\tau + \int\limits_{-1}^{y} u_1(\tau+1)(x-\tau)^{-\beta}\, d\tau.$$

5.3.4. Каскадный метод Лапласа. В 1773 году Лаплас [42] разработал более общий метод, чем метод Эйлера. В методе Лапласа, известном также как *каскадный метод*, главную роль играют величины h, k. Лаплас ввел два преобразования. Первое преобразование Лапласа имеет вид (5.3.24):

$$v = u_\eta + au, \tag{5.3.34}$$

а второе преобразование — вид (5.3.29):

$$w = u_\xi + bu. \tag{5.3.35}$$

Преобразования Лапласа позволяют решить соответствующие уравнения при условии, что оба инварианта Лапласа отличны от нуля. Итак, рассмотрим преобразование (5.3.34) при $h \neq 0$, $k \neq 0$. Оно отображает уравнение (5.3.6) на уравнение того же вида, а именно:

$$v_{\xi\eta} + a_1 v_\xi + b_1 v_\eta + c_1 v = 0 \tag{5.3.36}$$

с коэффициентами

$$a_1 = a - \frac{\partial \ln|h|}{\partial \eta}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c + b_\eta - a_\xi - b\,\frac{\partial \ln|h|}{\partial \eta}\cdot \tag{5.3.37}$$

Инварианты Лапласа для уравнения (5.3.36) имеют вид

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial\xi\,\partial\eta}, \quad k_1 = h. \tag{5.3.38}$$

Аналогично, можно применить второе преобразование (5.3.35) и получить линейное уравнение для w с инвариантами Лапласа

$$h_2 = k, \quad k_2 = 2k - h - \frac{\partial^2 \ln|k|}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot \tag{5.3.39}$$

Если $h_1 = 0$, можно решить уравнение (5.3.36), используя описанный выше метод Эйлера. Тогда остается подставить решение $v = v(x,y)$ в (5.3.34) и проинтегрировать неоднородное линейное уравнение первого порядка (5.3.34) для u. Если $h_1 \neq 0$, но $k_2 = 0$, мы, действуя подобным образом, найдем функцию $w = w(x,y)$ и решим неоднородное линейное уравнение первого порядка

(5.3.35) для u. Если $h_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$, можно повторить преобразования Лапласа, применяя (5.3.34) и (5.3.35) к уравнениям для v и w, и т. д. В этом и состоит *каскадный метод* Лапласа.

Пример 5.3.3. Применим каскадный метод Лапласа к следующему уравнению Дарбу:

$$u_{xy} - \alpha\,\frac{u_x}{x-y} + \beta\,\frac{u_y}{x-y} = 0, \qquad \alpha,\, \beta = \mathrm{const}. \tag{5.3.40}$$

Мы уже рассмотрели его частный случай (5.3.33), полученный из (5.3.40) при $\alpha = 0$. Коэффициенты уравнения (5.3.40) имеют вид

$$a = -\frac{\alpha}{x-y}, \quad b = \frac{\beta}{x-y},$$

откуда

$$a_x + ab - c = \frac{\alpha}{(x-y)^2} - \frac{\alpha\beta}{(x-y)^2} = \frac{\alpha(1-\beta)}{(x-y)^2},$$

$$b_y + ab - c = \frac{\beta}{(x-y)^2} - \frac{\alpha\beta}{(x-y)^2} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(x-y)^2}\,.$$

Таким образом, получаем инварианты Лапласа:

$$h = \frac{\alpha(1-\beta)}{(x-y)^2}, \qquad k = \frac{\beta(1-\alpha)}{(x-y)^2}\,. \tag{5.3.41}$$

Отсюда следует, что $h = 0$, если $\alpha = 0$ или $\beta = 1$, и $k = 0$, если $\beta = 0$ или $\alpha = 1$. Итак, уравнение (5.3.40) может быть решено с помощью метода Эйлера в случаях

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1; \qquad \beta = 0, \quad \alpha = 1. \tag{5.3.42}$$

Рассмотрим общий случай и воспользуемся первым преобразованием Лапласа (5.3.34). Мы имеем:

$$\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2}{(x-y)^2},$$

и уравнение (5.3.38),

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\,\partial y},$$

дает:

$$h_1 = \frac{(\alpha+1)(2-\beta)}{(x-y)^2}\,.$$

Далее, $h_1 = 0$, если и только если $\alpha = -1$ или $\beta = 2$. Таким образом, учитывая (5.3.41), мы убеждаемся, что можем теперь решить уравнение (5.3.40) в случаях

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \pm 1; \qquad \beta = 0, \quad \beta = 1, \quad \beta = 2. \tag{5.3.43}$$

Применяя второе преобразование Лапласа (5.3.35), мы можем далее дополнить (5.3.43) и получить следующие интегрируемые случаи:

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \pm 1 \quad \alpha = 2; \qquad \beta = 0, \quad \beta = \pm 1, \quad \beta = 2. \tag{5.3.44}$$

Продолжая далее применение каскадного метода Лапласа, мы можем решить уравнение Дарбу (5.3.40) с любыми целыми α и β.

Замечание 5.3.2. Подведем итог. Уравнение (5.3.40)

$$u_{xy} - \alpha \frac{u_x}{x-y} + \beta \frac{u_y}{x-y} = 0$$

может быть решено в следующих случаях.

а) Методом Д'Аламбера при

$$\alpha = \beta = 0.$$

б) Методом Эйлера при

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1 \;\text{ и }\; \beta = 0, \quad \alpha = 1.$$

в) Каскадным методом Лапласа для любых целых α и β.

5.4. Задача с начальными условиями

5.4.1. Волновое уравнение. Применим формулу Д'Аламбера (5.3.5) к решению задачи Коши для волнового уравнения (5.3.1), $u_{tt} = k^2 u_{xx}$, с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x). \tag{5.4.1}$$

Уравнения (5.3.5) и (5.4.1) дают:

$$F(x) + H(x) = u_0(x), \quad H'(x) - F'(x) = \frac{1}{k}\, u_1(x). \tag{5.4.2}$$

Дифференцируя первое из уравнений (5.4.2) и складывая со вторым уравнением (5.4.2), имеем:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left[u_0'(x) + \frac{u_1(x)}{k}\right],$$

откуда

$$H(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2k}\int\limits_{x_0}^{x} u_1(s)\,ds. \tag{5.4.3}$$

Далее из (5.4.2) получаем:

$$F(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2k}\int\limits_{x_0}^{x} u_1(s)\,ds. \tag{5.4.4}$$

Подстановка уравнений (5.4.3) и (5.4.4) в формулу Д'Аламбера (5.3.5) приводит к результату, который мы сформулируем в виде теоремы 5.4.1.

Теорема 5.4.1. Решение задачи Коши для волнового уравнения с начальными условиями (5.4.1) имеет форму

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-kt)+u_0(x+kt)}{2} + \frac{1}{2k}\int\limits_{x-kt}^{x+kt} u_1(s)\,ds. \tag{5.4.5}$$

Решение (5.4.5) раскрывает физический смысл характеристик, а именно выясняется, что волны распространяются вдоль характеристик. Хорошей иллюстрацией являются два следующих примера. Подробнее см. [36].

Пример 5.4.1. Пусть струна гитары во время перебора имеет начальную форму импульса $u_0(x)$ в точке x_0, как показано на рисунке 5.1, *а*. Оставим струну в покое, т. е. положим $u_1(x)=0$. Тогда решение (5.4.5) будет иметь вид

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-kt)+u_0(x+kt)}{2} \tag{5.4.6}$$

и будет описывать распространение начальной формы так, как показано на рис. 5.1, *а*, *б*.

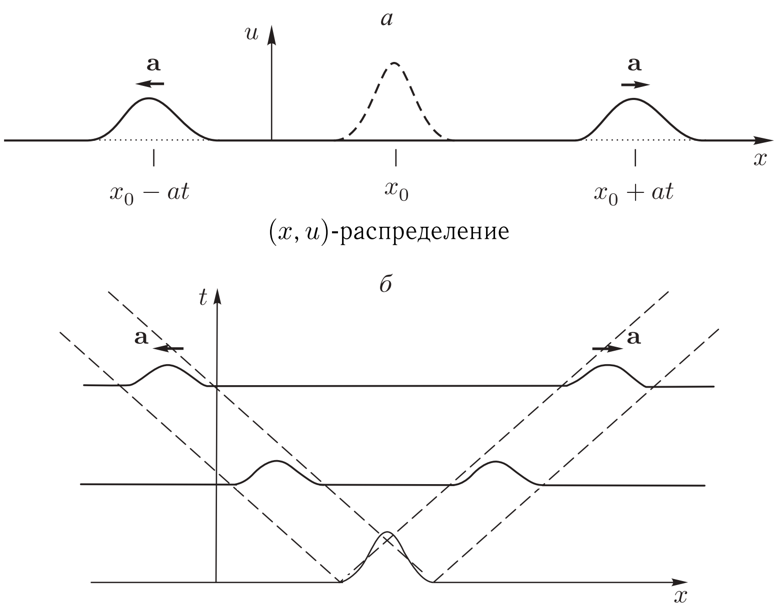


Рис. 5.1. Перебор гитарной струны

Пример 5.4.2. Смоделируем колебание струны пианино (рис. 5.2) с помощью решения задачи Коши, где начальное положение струны нулевое, т. е. $u_0(x)=0$, но струне сообщается начальная скорость $u_1(x)$. Тогда решение (5.4.5) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2k}\int\limits_{x-kt}^{x+kt} u_1(s)\,ds. \tag{5.4.7}$$

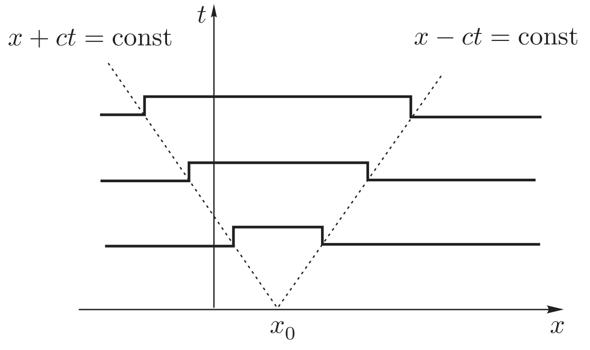


Рис. 5.2. Струна пианино после сильного аккорда

5.4.2. Неоднородное волновое уравнение. Рассмотрим задачу Коши с начальными условиями (5.4.1) для неоднородного одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = f(x,t), \quad k = \text{const}. \tag{5.4.8}$$

Лемма 5.4.1. Функция $v(x,t)$, определенная выражением

$$v(x,t) = \frac{1}{2k}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds, \tag{5.4.9}$$

является решением неоднородного волнового уравнения (5.4.8),

$$v_{tt} - k^2 v_{xx} = f(x,t),$$

и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$v\big|_{t=0} = 0, \quad v_t\big|_{t=0} = 0.$$

Доказательство. Используя правила (1.2.13) дифференцирования определенного интеграла, получаем следующее (см. задачу 5.11):

$$\begin{aligned}
v_t &= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \big[f\big(x+k(t-\tau),\tau\big) + f\big(x-k(t-\tau),\tau\big)\big]\,d\tau,\\
v_{tt} &= \frac{k}{2}\int\limits_0^t \big[f_x\big(x+k(t-\tau),\tau\big) - f_x\big(x-k(t-\tau),\tau\big)\big]\,d\tau + f(x,t),\\
v_x &= \frac{1}{2k}\int\limits_0^t \big[f\big(x+k(t-\tau),\tau\big) - f\big(x-k(t-\tau),\tau\big)\big]\,d\tau,\\
v_{xx} &= \frac{1}{2k}\int\limits_0^t \big[f_x\big(x+k(t-\tau),\tau\big) - f_x\big(x-k(t-\tau),\tau\big)\big]\,d\tau.
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Утверждения леммы следуют из уравнений (5.4.9) и (5.4.10).

Теорема 5.4.2. Решение неоднородного уравнения (5.4.8),

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = f(x,t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x),$$

единственно и имеет вид

$$u(t,x) = \frac{u_0(x-kt) + u_0(x+kt)}{2} + \frac{1}{2k}\int\limits_{x-kt}^{x+kt} u_1(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2k}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi. \quad (5.4.11)$$

Доказательство. Используем теорему 5.4.1 и лемму 5.4.1.

5.5. Смешанная задача. Разделение переменных

Метод *разделения переменных* (метод Фурье) применяется, в частности, для решения *смешанной задачи*, когда решение изучаемого дифференциального уравнения удовлетворяет заданным *начальным* и *граничным* значениям. Для решения этой задачи мы используем интегралы, о которых говорится в следующей лемме (см. задачу 1.5).

Лемма 5.5.1. Пусть k и m — произвольные целые числа, $k \neq 0$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi \sin(kx)\sin(mx)\,dx = 0 \ \ (m \neq k), \quad \int\limits_0^\pi \sin^2(kx)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Эти уравнения удобно использовать в компактной записи

$$\int\limits_0^\pi \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{km}, \quad (5.5.1)$$

где δ_{km} — *символы Кронекера*: $\delta_{km} = 0$, если $m \neq k$, и $\delta_{km} = 1$, если $m = k$ (см. раздел 1.4.3).

Доказательство. Используя уравнения

$$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big], \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}\big[1 - \cos(2\alpha)\big],$$

мы получаем:

$$\int_0^\pi \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big[\cos[(k-m)x] - \cos[(k+m)x]\big]\,dx =$$
$$= \left[\frac{\sin[(k-m)x]}{2(k-m)} - \frac{\sin[(k+m)x]}{2(k+m)}\right]_0^\pi = 0$$

и

$$\int_0^\pi \sin^2(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big[1-\cos(2kx)\big]\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k}\,\sin(2kx)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\,.$$

5.5.1. Колебания струны с закрепленными концами. Рассмотрим смешанную задачу, описывающую колебания струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$, с заданными начальной формой и скоростью. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти решение волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{5.5.2}$$

с заданными *начальными условиями*:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \tag{5.5.3}$$

и *граничными условиями*

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0. \tag{5.5.4}$$

Требование совместности условий (5.5.3) и (5.5.4) записывается следующим образом:

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0. \tag{5.5.5}$$

Метод разделения переменных состоит в поиске решения в виде произведения частных решений:

$$u(t,x) = T(t)\,X(x), \tag{5.5.6}$$

при условии, что сомножители не обращаются в нуль тождественно. Подстановка (5.5.6) в уравнение (5.5.2) дает:

$$T''X = TX''.$$

Далее, разделяем функции, зависящие от t и x соответственно:

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

где λ — положительная константа. Это уравнение эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{5.5.7}$$

и

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{5.5.8}$$

Граничные условия (5.5.4) дают

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{5.5.9}$$

Общее решение уравнения (5.5.8):

$$X = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\,x \quad (\lambda > 0).$$

Первое условие (5.5.9), $X(0) = 0$, приводит к $C_2 = 0$. Следовательно, решение имеет вид

$$X = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{5.5.10}$$

Затем запишем второе условие (5.5.9), $X(l) = 0$:

$$C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

Поскольку функция $X(x)$ не может быть равной нулю тождественно, мы требуем, чтобы $C_1 \neq 0$, и из последнего уравнения вытекает

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

Итак, λ принимает следующие значения:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{5.5.11}$$

Подставляя (5.5.11) в (5.5.10), мы получаем бесконечную последовательность решений задачи с граничными условиями (5.5.8), (5.5.9):

$$X_k(x) = C_1 \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot$$

Константу C_1 удобно выбрать исходя из *условия нормализации*:

$$\int\limits_0^l [X_k(x)]^2\,dx = 1.$$

Применяя лемму 5.5.1, имеем:

$$\int\limits_0^l [X_k(x)]^2\,dx = C_1^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = C_1^2\,\frac{l}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin^2(ky)\,dy = \frac{l}{2}\,C_1^2.$$

Таким образом, подставляя $C_1 = \sqrt{2/l}$, мы получаем нормализованные функции

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot \tag{5.5.12}$$

Константы λ_k, удовлетворяющие условиям (5.5.11), и функции $X_k(x)$, имеющие вид (5.5.12), называют *собственными значениями* и *собственными функциями*, соответственно, для задачи с граничными условиями (5.5.8), (5.5.9). Заметим, что достаточно ограничиться только положительными целыми числами $k = 1, 2, \ldots$, поскольку собственные функции (5.5.12) обладают свойством $X_{-k} = -X_k$.

Общее решение уравнения (5.5.7) при $\lambda = \lambda_k$ имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,t\right), \quad a_k,\, b_k = \mathrm{const}.$$

Мы получили *формальное решение* $u(t,x)$ волнового уравнения в форме разложения в ряд

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,X_k(x) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\ t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ t\right)\right]\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ x\right)$$

или, после подстановки собственных значений (5.5.11),

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\cdot \tag{5.5.13}$$

Подставляя (5.5.13) в первое начальное условие (5.5.3), $u(0,x) = u_0(x)$, мы получаем:

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\,\cdot \tag{5.5.14}$$

Уравнение (5.5.14) позволяет определить коэффициенты a_k. Действительно, умножая (5.5.14) на $\sin(m\pi x/l)$ и интегрируя от 0 до l, получаем:

$$\int_0^l u_0(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\ \sin\frac{m\pi x}{l}\,dx. \tag{5.5.15}$$

Замена переменных $y = \pi x/l$ в интеграле в правой части уравнения (5.5.15) и учет уравнения (5.5.1) дают:

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\ \sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(ky)\sin(my)\,dy = \frac{l}{\pi}\,\frac{\pi}{2}\,\delta_{km} = \frac{l}{2}\,\delta_{km}.$$

Таким образом, из уравнения (5.5.15) получаем:

$$\int_0^l u_0(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \sqrt{\frac{l}{2}}\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\delta_{km} = \sqrt{\frac{l}{2}}\ a_m.$$

Окончательно, мы приходим к следующему выражению для коэффициентов:

$$a_m = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l u_0(x)\ \sin\frac{m\pi x}{l}\,dx, \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{5.5.16}$$

Второе начальное условие (5.5.3), $u_t(0,x) = u_1(x)$, запишем в виде

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\,b_k\ \sin\frac{k\pi x}{l} = u_1(x).$$

Отсюда, умножая на $\sin(m\pi x/l)$, интегрируя от 0 до l и поступая аналогично предыдущему, получаем:

$$\frac{m\pi}{\sqrt{2l}}\, b_m = \int\limits_0^l u_1(x)\, \sin\frac{m\pi x}{l}\, dx.$$

Следовательно:

$$b_m = \frac{\sqrt{2l}}{m\pi}\int\limits_0^l u_1(x)\, \sin\frac{m\pi x}{l}\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{5.5.17}$$

Подставим в (5.5.13) выражения (5.5.16) и (5.5.17) для коэффициентов a_k и b_k, соответственно, и получим решение $u(x,t)$ смешанной задачи (5.5.2)–(5.5.4). Это пока еще формальное решение, поскольку функция $u(x,t)$ представлена формальным рядом (5.5.13), называемым рядом Фурье. Чтобы проверить решение, нужно доказать, что ряд Фурье (5.5.13) сходится и является дважды непрерывно дифференцируемым.

5.5.2. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Используем метод разделения переменных для решения следующей смешанной задачи:

$$u_t = u_{xx}, \tag{5.5.18}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{5.5.19}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0. \tag{5.5.20}$$

Требование совместности условий (5.5.19) и (5.5.20) состоит в том, что

$$u_0(0) = u_0(l) = 0. \tag{5.5.21}$$

Начнем поиск решения, представляя его в форме произведения

$$u(t,x) = T(t)\, X(x).$$

Подстановка в (5.5.18) дает

$$XT' = TX'',$$

и, следовательно,

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Из этого следует, что

$$T' + \lambda T = 0 \tag{5.5.22}$$

и

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \tag{5.5.23}$$

Задача с граничным условием (5.5.23) легко решается и дает следующие собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\, \sin\frac{k\pi x}{l}\, \cdot \tag{5.5.24}$$

Уравнение (5.5.22) приводит к следующим решениям:

$$T_k(t) = c_k\, e^{-(k\pi/l)^2 t}.$$

Итак, функция

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{-(k\pi/l)^2 t}\ \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.5.25}$$

является решением (формальным) уравнения теплопроводности (5.5.18) и удовлетворяет граничным условиям (5.5.20). Начальные условия (5.5.19) дают:

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l} = u_0(x),$$

откуда

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{5.5.26}$$

Подставляя (5.5.26) в (5.5.25), мы получаем решение смешанной задачи (5.5.18)–(5.5.20).

Задачи к главе 5

5.1. Указать все точки (t,x,y), в которых оператор

$$L[u] = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \big(x^2+y^2+z^2-t\big)u_{tt} - u_t$$

является эллиптическим, гиперболическим и параболическим.

5.2. Найти сопряженный оператор для следующего оператора порядка нуль: $L[u] = c(x,y)u$.

5.3. Найти сопряженный оператор для следующего оператора первого порядка: $L[u] = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u$.

5.4. Найти сопряженный оператор для гиперболического уравнения общего вида с двумя переменными, представленного в стандартной форме (5.2.16):

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{P5.1}$$

5.5. Найти сопряженное уравнение для каждого из следующих уравнений второго порядка:

а) уравнение Лапласа: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$,

б) волновое уравнение: $u_{tt} - k^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$,

в) уравнение теплопроводности: $u_t - k^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$,

г) $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0$,

д) телеграфное уравнение: $u_{tt} - c^2u_{xx} - k^2u = 0 \quad (c,\, k = \mathrm{const})$,

е) уравнение: $u_{tt} - \mu^2(x)u_{xx} - k^2u = 0 \quad (k = \mathrm{const})$,

ж) модель Блека–Шоулса: $u_t + \dfrac{1}{2}\, A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0$,

з) $u_{xy} + \dfrac{u_x + u_y}{x + y} = 0$.

Какие из этих уравнений самосопряженные?

5.6. Найти сопряженное уравнение и сопряженный оператор для следующей системы первого порядка:

$$u^1_x + a(x, y)\, u^2_x + b(x, y)\, u^2_y = 0, \qquad u^1_y + c(x, y)\, u^2_x + d(x, y)\, u^2_y = 0.$$

5.7. Переписать телеграфное уравнение (2.3.26), $u_{tt} - c^2u_{xx} - k^2u = 0$, в характеристических переменных, т. е. в стандартной форме (5.2.16).

5.8. Рассмотреть следующие волновые уравнения с переменным коэффициентом:

$$u_{tt} - \mu^2(x)u_{xx} = 0. \tag{P5.2}$$

Найти все уравнения (P5.2), которые приводятся к волновому уравнению $v_{\xi\eta} = 0$.

5.9. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.5.1. Уравнение (P5.1) эквивалентно телеграфному уравнению, т. е. может быть сведено к телеграфному уравнению $v_{\xi\eta} + kv = 0$ ($k = \mathrm{const}$) подходящим преобразованием эквивалентности (5.3.7),

$$\xi = f(x), \quad \eta = g(y), \quad v = \sigma(x, y)\, u,$$

если и только если инварианты Лапласа уравнения (P5.1) удовлетворяют условиям

$$h = k \neq 0, \quad (\ln |h|)_{xy} = 0.$$

Используя эту теорему, показать, что уравнение

$$u_{tt} - x^2u_{xx} = 0$$

эквивалентно телеграфному уравнению $v_{\xi\eta} + v = 0$, и найти соответствующую замену переменных.

5.10. Выбрать уравнения (P5.2), эквивалентные телеграфному уравнению $v_{\xi\eta} + kv = 0,\ k = \mathrm{const}$.

5.11. Вычислить производные от функции $v(x,t)$, определенной (5.4.9):

$$v(x,t) = \frac{1}{2k}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds,$$

и показать, что ее первая и вторая производные v_t, v_{tt} и v_x, v_{xx} удовлетворяют уравнениям (5.4.10).

5.12. Пусть L — любой линейный дифференциальный оператор и L^* — сопряженный оператор. Показать, что $(L^*)^* = L$, т. е. сопряженный оператор к L^* совпадает с исходным оператором.

5.13. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \sin x, \qquad u_t\big|_{t=0} = 0.$$

5.14. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \sin x.$$

5.15. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \sin x.$$

5.16. Обсудить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \cos x.$$

Глава 6

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Математические модели фундаментальных законов природы и технических задач формулируются нередко, даже преимущественно, в терминах *нелинейных дифференциальных уравнений*. Многие из них основаны на втором законе Ньютона, и, следовательно, они описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Таким образом, многие математические модели задач реального мира представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Единственным общим методом, позволяющим решать эти уравнения аналитически, является метод группового анализа Ли, который особенно прост и эффективен в случае уравнений второго порядка.

По этой причине настоящая глава посвящается групповому анализу нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, причем особое внимание будет уделено интегрированию уравнений первого и второго порядка. Приложения методов групп Ли к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными будут обсуждаться в следующих двух главах.

Дополнительная литература: Lie S. [44], Овсянников Л.В. [21], Ibragimov N.H. [40], Олвер П. [22], Bluman G.W. and Kumei S. [32].

6.1. Введение

Идея симметрии пронизывает все математические модели, формулируемые в терминах дифференциальных уравнений. Математический аппарат для нахождения и использования симметрии дифференциальных уравнений, который предоставляет теория непрерывных групп, введен и разработан выдающимся математиком XIX века Софусом Ли. Групповой анализ Ли предлагает общие методы интегрирования линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений аналитически с использованием симметрий. Методы групп Ли также эффективны при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Профессор Стэнфордского университета Брайан Кантвелл отмечает в предисловии к своей недавно опубликованной книге [33]: *«Я твердо убежден, что любая вузовская программа в области науки или техники нуждается в том, чтобы в нее включили хорошо обоснованный курс теории размерности и групп Ли. Анализ симметрий должен быть так же известен студентам, как анализ Фурье, особенно в связи с тем, что существует так много нерешенных сильно нелинейных задач»*.

С этим трудно не согласиться. Однако групповой анализ Ли не пользовался широким признанием в прошлом и все еще испытывает пренебрежительное отношение к себе в университетских программах. Более того, в современной литературе существует возрастающая тенденция укрепления старой традиции пренебрежения методами групп Ли и составления университетских учебников по дифференциальным уравнениям в *стиле поваренной книги*, содержащей многочисленные готовые рецепты *на данный случай* для интегрирования различных частных типов уравнений с помощью искусственных подстановок вместо использования симметрий и применения нескольких стандартных уравнений Ли. Действительно, «*нередко чем меньше оправдывает себя традиционная привычка, тем тяжелее от нее избавиться*» (М. Твен).

Я представляю в этой главе простое введение в основные концепции группового подхода Ли к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Отсылаю читателя для более детального ознакомления с приведенным здесь материалом к [11].

6.2. Группы преобразований

6.2.1. Однопараметрические группы на плоскости. Рассмотрим изменение переменных x, y, связанное с параметром a:

$$T_a: \quad \overline{x} = \varphi(x, y, a), \quad \overline{y} = \psi(x, y, a), \tag{6.2.1}$$

где функции φ и ψ удовлетворяют условиям

$$T_0: \quad \varphi(x, y, 0) = x, \quad \psi(x, y, 0) = y. \tag{6.2.2}$$

Предполагается, что $\varphi(x, y, a)$ и $\psi(x, y, a)$ функционально независимы, то есть их якобиан отличен от нуля (см. раздел 1.2.8, теорему 1.2.4):

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уравнения T_a (6.2.1) можно рассматривать как переход произвольной точки $P = (x, y)$ плоскости (x, y) в новое положение $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$ и записывать $\overline{P} = T_a(P)$. Соответственно обратное преобразование T_a^{-1}, имеющее вид

$$T_a^{-1}: \quad x = \varphi^{-1}(\overline{x}, \overline{y}, a), \quad y = \psi^{-1}(\overline{x}, \overline{y}, a), \tag{6.2.3}$$

возвращает $\overline{P}$ в начальное положение P, то есть

$$T_a^{-1}(\overline{P}) = P.$$

Более того, уравнения (6.2.2) означают, что T_0 — тождественное преобразование:

$$T_0(P) = P.$$

Пусть T_a и T_b — два преобразования (6.2.1) с различными значениями параметра: a и b. Их *композиция* (или *произведение*) T_bT_a определяется как последовательное выполнение этих преобразований и задается равенствами

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} &= \varphi(\overline{x}, \overline{y}, b) = \varphi\big(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a), b\big), \\ \overline{\overline{y}} &= \psi(\overline{x}, \overline{y}, b) = \psi\big(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a), b\big). \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Геометрическая интерпретация произведения состоит в следующем. Поскольку T_a перемещает точку P в точку $\overline{P} = T_a(P)$, а T_b перемещает ее далее в положение $\overline{\overline{P}} = T_b(\overline{P})$, то произведение T_bT_a переносит P прямо в конечное положение $\overline{\overline{P}}$, без промежуточной остановки в точке $\overline{P}$. Таким образом, (6.2.4) означает, что

$$\overline{\overline{P}} \stackrel{\text{def}}{=} T_b(\overline{P}) = T_bT_a(P).$$

Определение 6.2.1. Однопараметрическое семейство G преобразований (6.2.1) с учетом начальных условий (6.2.2) называется *однопараметрической группой*, если G содержит обратное преобразование (6.2.3) и композицию T_bT_a всех своих элементов:

$$T_bT_a = T_{a+b}.$$

Последнее условие с учетом (6.2.4) записывается в виде

$$\begin{aligned}\varphi\big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),b\big) &= \varphi(x,y,a+b),\\ \psi\big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),b\big) &= \psi(x,y,a+b).\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

6.2.2. Генератор группы и уравнения Ли. Разложение функций $\varphi(x,y,a)$ и $\psi(x,y,a)$ в ряд Тейлора по a в малой окрестности $a = 0$ с учетом начальных условий (6.2.2) дает *преобразование*

$$\overline{x} \approx x + \xi(x,y)\,a, \quad \overline{y} \approx y + \eta(x,y)\,a, \tag{6.2.6}$$

где

$$\xi(x,y) = \frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \quad \eta(x,y) = \frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a}\bigg|_{a=0}. \tag{6.2.7}$$

Вектор (ξ,η) с компонентами (6.2.7) есть касательный вектор (в точке (x,y)) к кривой, которая описывается преобразованием точек $(\overline{x},\overline{y})$, и поэтому называется *касательным векторным полем* группы G.

Касательному векторному полю (6.2.7) соответствует дифференциальный оператор первого порядка

$$X = \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.2.8}$$

называемый *генератором* группы G.

Если задано инфинитезимальное преобразование (6.2.6), или генератор (6.2.8), то преобразования (6.2.1) находятся путем интегрирования следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых *уравнениями Ли*:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{da} &= \xi(\varphi,\psi), \quad \varphi\big|_{a=0} = x,\\ \frac{d\psi}{da} &= \eta(\varphi,\psi), \quad \psi\big|_{a=0} = y.\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Эти уравнения записывают также в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}}{da} = \xi(\overline{x}, \overline{y}), \quad \overline{x}\big|_{a=0} = x, \\ &\frac{d\overline{y}}{da} = \eta(\overline{x}, \overline{y}), \quad \overline{y}\big|_{a=0} = y. \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Например, группе поворота

$$\overline{x} = x\cos a + y\sin a, \quad \overline{y} = y\cos a - x\sin a, \tag{6.2.11}$$

соответствуют инфинитезимальное преобразование

$$\overline{x} \approx x + ya, \quad \overline{y} \approx y - xa$$

и генератор

$$X = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.2.12}$$

соответственно. Вы можете легко проверить, что при этом выполняются уравнения Ли:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}}{da} = \overline{y}, \quad \overline{x}\big|_{a=0} = x, \\ &\frac{d\overline{y}}{da} = -\overline{x}, \quad \overline{y}\big|_{a=0} = y. \end{aligned}$$

Пример 6.2.1. Найдем однопараметрическую группу, определяемую инфинитезимальным преобразованием

$$\overline{x} \approx x + ax^2, \quad \overline{y} \approx y + axy,$$

или, эквивалентно, следующим генератором:

$$X = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.2.13}$$

Уравнения Ли (6.2.10) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}}{da} = \overline{x}^2, \quad \overline{x}\big|_{a=0} = x, \\ &\frac{d\overline{y}}{da} = \overline{xy}, \quad \overline{y}\big|_{a=0} = y. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения этой системы легко решаются и дают

$$\overline{x} = -\frac{1}{a + C_1}, \quad \overline{y} = \frac{C_2}{a + C_1}\,\cdot$$

Из начальных условий следует, что $C_1 = -1/x$, $C_2 = -y/x$. Следовательно, мы приходим к следующей однопараметрической группе, известной как группа проективных преобразований:

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1 - ax}\,\cdot \tag{6.2.14}$$

6.2.3. Экспоненциальное отображение. Уравнения Ли (6.2.10) можно решать также, представляя решение в виде бесконечного степенного ряда. В этом случае преобразование группы (6.2.1), соответствующее генератору X (6.2.8), задается следующим *экспоненциальным отображением*:

$$\overline{x} = e^{aX}(x), \quad \overline{y} = e^{aX}(y), \tag{6.2.15}$$

где

$$e^{aX} = 1 + \frac{a}{1!}\,X + \frac{a^2}{2!}\,X^2 + \cdots + \frac{a^s}{s!}\,X^s + \cdots \tag{6.2.16}$$

Пример 6.2.2. Обратимся вновь к генератору (6.2.13):

$$X = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot$$

Согласно (6.2.15), (6.2.16), мы можем найти $X^s(x)$ и $X^s(y)$ для всех $s = 1, 2, \ldots$ Вычислим несколько членов, например,

$$X(x) = x^2,\;\; X^2(x) = X\big(X(x)\big) = X(x^2) = 2!\,x^3,\;\; X^3(x) = X(2!\,x^3) = 3!\,x^4,$$

что позволяет догадаться:

$$X^s(x) = s!\,x^{s+1}$$

и доказать полученное уравнение по индукции:

$$X^{s+1}(x) = X(s!\,x^{s+1}) = (s+1)!\,x^2x^s = (s+1)!\,x^{s+2}.$$

Аналогично, вычисляем

$$X(y) = xy, \quad X^2(y) = X(xy) = y\,X(x) + x\,X(y) = yx^2 + xxy = 2!\,yx^2,$$
$$X^3(y) = 2!\,[y\,X(x^2) + x^2X(y)] = 2!\,[y(2x^3) + x^2xy] = 3!\,yx^3,$$

догадываемся, что

$$X^s(y) = s!\,yx^s,$$

и доказываем это по индукции:

$$X^{s+1}(y) = s!\,X(yx^s) = s!\,[syx^{s+1} + x^s(xy)] = (s+1)!\,yx^{s+1}.$$

Подстановка полученных выражений в экспоненциальное отображение дает:

$$e^{aX}(x) = x + ax^2 + \cdots + a^sx^{s+1} + \cdots$$

Перепишем правую часть в форме $x(1 + ax + \cdots + a^sx^s + \cdots)$ и убедимся, что ряд в скобках является разложением в ряд Тейлора функции $1/(1 - ax)$ при условии $|ax| < 1$. Следовательно,

$$\overline{x} = e^{aX}(x) = \frac{x}{1 - ax}\,\cdot$$

Аналогично, получаем

$$e^{aX}(y) = y + ayx + a^2yx^2 + \cdots + a^syx^s + \cdots =$$
$$= y(1 + ax + \cdots + a^sx^s + \cdots).$$

Таким образом,

$$\overline{y} = e^{aX}(y) = \frac{y}{1-ax}\cdot$$

В итоге мы получили проективное преобразование (6.2.14):

$$\overline{x} = \frac{x}{1-ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1-ax}\cdot$$

6.2.4. Инварианты и инвариантные уравнения.

Определение 6.2.2. Функция $F(x,y)$ называется инвариантом группы G преобразований (6.2.1), если $F(\overline{x},\overline{y}) = F(x,y)$, то есть

$$F\bigl(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)\bigr) = F(x,y) \tag{6.2.17}$$

тождественно по переменным x, y и параметру группы a.

Теорема 6.2.1. Функция $F(x,y)$ является инвариантом группы G, если и только если она является решением следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка:

$$XF \equiv \xi(x,y)\,\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{6.2.18}$$

Доказательство. Пусть $F(x,y)$ — инвариант. Разложим функцию $F\bigl(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)\bigr)$ в ряд Тейлора по a:

$$F\bigl(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)\bigr) \approx F(x+a\xi, y+a\eta) \approx F(x,y) + a\Bigl(\xi\,\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial F}{\partial y}\Bigr),$$

или

$$F(\overline{x},\overline{y}) = F(x,y) + aX(F) + o(a),$$

и подставим полученное выражение в уравнение (6.2.17):

$$F(x,y) + aX(F) + o(a) = F(x,y).$$

Отсюда следует, что $aX(F) + o(a) = 0$, откуда $X(F) = 0$, то есть получаем уравнение (6.2.18).

Обратно, пусть $F(x,y)$ — решение уравнения (6.2.18). Учитывая, что функция $F(x,y)$ аналитическая и используя ее разложение в ряд Тейлора, можно получить экспоненциальное отображение (6.2.15) функции $F(x,y)$ в следующем виде:

$$F(\overline{x},\overline{y}) = e^{aX}F(x,y) \overset{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{a}{1!}\,X + \frac{a^2}{2!}\,X^2 + \cdots + \frac{a^s}{s!}\,X^s + \cdots\right)F(x,y).$$

Поскольку $XF(x,y) = 0$, имеем $X^2F = X(XF) = 0, \ldots, X^sF = 0$. Это позволяет сделать вывод, что $F(\overline{x},\overline{y}) = F(x,y)$, т. е. получаем уравнение (6.2.17), что доказывает теорему.

Из теоремы 6.2.1 следует, что любая однопараметрическая группа преобразований на плоскости имеет один независимый инвариант, который может быть выбран в качестве левой части любого первого интеграла $h(x,y)=C$ уравнения характеристик для (6.2.18):

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)}\,. \tag{6.2.19}$$

Любой другой инвариант F является функцией от h, т. е. $F(x,y)=\Phi\big(h(x,y)\big)$.

Пример 6.2.3. Рассмотрим группу с генератором (6.2.13),

$$X = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Запишем уравнение характеристик (6.2.19):

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

и получим первый интеграл $h = x/y$. Таким образом, общий вид инварианта $F(x,y)=\Phi(x/y)$ содержит произвольную функцию Φ одной переменной.

Группы преобразований (6.2.1) и связанные с ними понятия, рассмотренные выше, допускают очевидное обобщение на многомерный случай. При этом рассматриваются группы преобразований

$$\overline{x}^i = f^i(x,a), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{6.2.20}$$

в n-мерном пространстве с координатами точек $x=(x^1,\ldots,x^n)$. Генератор преобразований (6.2.20) записывается в виде

$$X = \xi^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6.2.21}$$

где

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Уравнения Ли (6.2.10) становятся

$$\frac{d\overline{x}^i}{da} = \xi^i(\overline{x}), \quad \overline{x}^i\big|_{a=0} = x^i. \tag{6.2.22}$$

Экспоненциальное отображение записывается в форме

$$\overline{x}^i = e^{aX}(x^i), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{6.2.23}$$

где

$$e^{aX} = 1 + \frac{a}{1!}\,X + \frac{a^2}{2!}\,X^2 + \cdots + \frac{a^s}{s!}\,X^s + \cdots\,. \tag{6.2.24}$$

В случае нескольких переменных сохраняется формулировка определения 6.2.2 инвариантной функции. А именно, инвариант определяется уравнением $F(\overline{x})=F(x)$. Проверка этого свойства вновь составляет содержание теоремы 6.2.1 с очевидной n-мерной версией уравнения (6.2.18):

$$\sum_{i=1}^{n}\xi^i(x)\,\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \tag{6.2.25}$$

В этом случае $n-1$ функционально независимых первых интегралов $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ системы характеристик уравнения (6.2.25):

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)} \tag{6.2.26}$$

составляют базис инвариантов. А именно, произвольный инвариант $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \Phi\big(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)\big). \tag{6.2.27}$$

Остановимся подробнее на этом многомерном случае и рассмотрим систему уравнений

$$F(x) = 0, \ldots, F_s = 0, \quad s < n. \tag{6.2.28}$$

Предположим, что ранг матрицы $\|\partial F_k / \partial x^i\|$ равен s во всех точках x, удовлетворяющих системе уравнений (6.2.28). Тогда система уравнений (6.2.28) определяет $(n-s)$-мерную поверхность M.

Определение 6.2.3. Говорят, что система уравнений (6.2.28) является инвариантом группы G преобразований (6.2.20), если любая точка x поверхности M перемещается при действии этого преобразования G вдоль M, т. е. $x \in M$ влечет $\overline{x} \in M$. Поверхность M называется инвариантной поверхностью.

Теорема 6.2.2. Поверхность M, задаваемая системой уравнений (6.2.28), есть инвариант по отношению к группе G преобразований (6.2.20) с генератором X (6.2.21), если и только если

$$X(F_k)\big|_M = 0, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{6.2.29}$$

6.2.5. Канонические переменные. Следующее простое утверждение, вытекающее из леммы 4.2.1, имеет много приложений, в частности, при интегрировании дифференциальных уравнений.

Теорема 6.2.3. Любая однопараметрическая группа преобразований (6.2.1) с генератором (6.2.8)

$$X = \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}$$

может быть приведена с помощью подходящей замены переменных

$$t = t(x,y), \quad u = u(x,y) \tag{6.2.30}$$

к группе смещений $\overline{t} = t + a$, $\overline{u} = u$ с генератором

$$X = \frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{6.2.31}$$

Переменные t и u называются *каноническими переменными.*

Доказательство. Замена переменных (6.2.30) изменяет дифференциальный оператор (6.2.8) следующим образом (см. уравнение (4.2.3)):

$$X = X\big(t(x,y)\big)\,\frac{\partial}{\partial t} + X\big(u(x,y)\big)\,\frac{\partial}{\partial u}\cdot \tag{6.2.32}$$

Следовательно, мы получим оператор (6.2.31), если определим t и u, решая следующую систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\begin{aligned} X(t) &\equiv \xi(x,y)\,\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial t}{\partial y} = 1,\\ X(u) &\equiv \xi(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{6.2.33}$$

Пример 6.2.4. Найдем канонические переменные для группы растяжения с генератором

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.2.34}$$

Первое уравнение (6.2.33) имеет вид

$$X(t) = x\,\frac{\partial t}{\partial x} + y\,\frac{\partial t}{\partial y} = 1.$$

Поскольку достаточно найти любое частное решение этого уравнения, мы можем остановиться, например, на решении вида $t = t(x)$, зависящем только от x. Тогда это уравнение сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению $x\,t'(x) = 1$, откуда $t = \ln|x|$. Второе уравнение (6.2.33) имеет вид

$$X(u) = x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

приводит к первому интегралу $y/x = C$, и, следовательно, $u = y/x$ является решением уравнения $X(u) = 0$. Таким образом, мы получили следующие канонические переменные:

$$t = \ln|x|, \quad u = \frac{y}{x}\cdot$$

В этих переменных группа растяжения

$$\overline{x} = x\,e^a, \quad \overline{y} = y\,e^a$$

свелась к группе смещения

$$\overline{t} = t + a, \quad \overline{u} = u.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{t} &= \ln|\overline{x}| = \ln(|x|\,e^a) = \ln|x| + a = t + a,\\ \overline{u} &= \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{y\,e^a}{x\,e^a} = \frac{y}{x} = u. \end{aligned}$$

6.3. Симметрии уравнений первого порядка

6.3.1. Первое продолжение генераторов группы. Преобразование производных при преобразованиях группы (6.2.1) рассматривается как замена переменных, которая была приведена в разделе 1.4.5. В частности, преобразование первой производной определяется формулой

$$\overline{y}' \equiv \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}\,. \tag{6.3.1}$$

Таким образом, начав с группы G преобразований (6.2.1), мы получаем группу $G_{(1)}$, состоящую из преобразований (6.2.1) и (6.3.1) в пространстве переменных (x, y, y'). Группа $G_{(1)}$ называется *первым продолжением* группы G. Подставляя в (6.3.1) инфинитезимальное преобразование (6.2.6), $\varphi = x + a\,\xi(x,y)$, $\psi = y + a\,\eta(x,y)$, и пренебрегая членами высокого порядка по a, мы получаем следующие инфинитезимальные преобразования производной y':

$$\overline{y}' = \frac{y' + a\,D_x(\eta)}{1 + a\,D_x(\xi)} \approx [y' + a\,D(\eta)][1 - a\,D(\xi)] \approx y' + [D(\eta) - y'D(\xi)]\,a,$$

или

$$\overline{y}' \approx y' + a\zeta_1,$$

где

$$\zeta_1 = D_x(\eta) - y'\,D_x(\xi) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y. \tag{6.3.2}$$

Следовательно, генератор X группы G после продолжения становится

$$X = \xi\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\,\frac{\partial}{\partial y'}\,. \tag{6.3.3}$$

Уравнения (6.3.2) и (6.3.3) называют *формулой первого продолжения* и *первым продолжением инфинитезимального генератора* (6.2.13) соответственно.

6.3.2. Группа симметрии: определение и основное свойство.

Определение 6.3.1. Говорят, что группа G преобразований (6.2.1) является группой симметрии обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{6.3.4}$$

или что уравнение (6.3.4) допускает группу G, если форма дифференциального уравнения (6.3.4) остается неизменной после замены переменных (6.2.1), т. е.

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = f(\overline{x}, \overline{y}),$$

где функция f та же самая, что и в исходном уравнении (6.3.4). Другими словами, G есть группа симметрии уравнения (6.3.4), если каркас (см. раздел 1.4.4) уравнения (6.3.4) является инвариантом в смысле определения 6.2.3, по отношению к первому продолжению $G_{(1)}$ группы G.

Главное свойство группы симметрии впервые выявлено Софусом Ли (см., например, [44, глава 16, раздел 1, теорема 1]). Оно состоит в том, что G является группой симметрии, если и только если она переводит любое классическое решение уравнения (6.3.4) в классическое решение того же уравнения.

Генератор X группы, допускаемой дифференциальным уравнением, называется *допускаемым оператором* или *инфинитезимальной симметрией* уравнения (6.3.4).

Пример 6.3.1. Очевидно, что уравнение

$$y' = f(y)$$

не изменяется после преобразования $\overline{x} = x + a$, поскольку уравнение не содержит явно независимую переменную x. Следовательно, симметрия этого дифференциального уравнения задается *группой смещения* вдоль оси x, $\overline{x} = x + a$, с генератором

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\cdot$$

Аналогично, уравнение

$$y' = f(x)$$

допускает группу смещения вдоль оси y, $\overline{y} = y + a$, с генератором

$$X = \frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Пример 6.3.2. Уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.3.5}$$

допускает *группу однородных растяжений* (масштабных преобразований)

$$\overline{x} = x\,e^{a}, \quad \overline{y} = y\,e^{a}$$

с генератором (6.2.34),

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Пример 6.3.3. Рассмотрим следующее уравнение Риккати:

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{6.3.6}$$

Его левая часть — рациональная функция переменных x, y, y'. Следовательно, можно попытаться найти допускаемую группу в виде растяжения:

$$\overline{x} = kx, \quad \overline{y} = ly.$$

Поскольку

$$\overline{y}' + \overline{y}^2 - \frac{2}{\overline{x}^2} = \frac{l}{k}\,y' + l^2y^2 - \frac{1}{k^2}\,\frac{2}{x^2},$$

условие инвариантности требует, чтобы

$$\overline{y}' + \overline{y}^2 - \frac{2}{\overline{x}^2} = \lambda\left(y' + y^2 - \frac{2}{x^2}\right),$$

где
$$\lambda = \frac{l}{k} = l^2 = \frac{1}{k^2}\,\cdot$$
Последние уравнения дают $l = 1/k$, где $k > 0$ — произвольные параметры. Полагая $k = e^a$, мы находим группу неоднородного растяжения:
$$\overline{x} = x\,e^a, \quad \overline{y} = y\,e^{-a}.$$
Таким образом, уравнение Риккати (6.3.6) обладает следующей инфинитезимальной симметрией:
$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.3.7}$$

6.3.3. Уравнения с заданной симметрией. Решение этой задачи основано на определении 6.3.1 группы симметрии, формулах продолжения (6.3.2), (6.3.3) и проверочном тесте инвариантной поверхности (6.2.29). А именно, чтобы найти общий вид дифференциального уравнения первого порядка (6.3.4),
$$y' = f(x, y), \tag{6.3.8}$$
допускающего заданный оператор
$$X = \xi(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.3.9}$$
мы продолжаем оператор X по формуле (6.3.2):
$$X = \xi\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\,\frac{\partial}{\partial y'}$$
и применяем тест инвариантной поверхности (6.2.29):
$$\zeta_1\Big|_{y'=f(x,y)} = \xi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\cdot$$
Подставляя в это равенство выражение ζ_1 по формуле продолжения (6.3.3), мы получаем следующее квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для определения $f(x, y)$:
$$\xi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial f}{\partial y} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y\,f^2. \tag{6.3.10}$$
Решая уравнение (6.3.10), мы получаем все уравнения (6.3.8), допускающие группу, генерируемую оператором (6.3.9).

Пример 6.3.4. Найдем уравнения, допускающие оператор
$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.3.11}$$
Уравнение (6.3.10) записывается в виде
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = -2f. \tag{6.3.12}$$

Система характеристик (4.4.7) для уравнения (6.3.12) имеет вид

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -\frac{df}{2f}\,.$$

Используя ее первые интегралы $\psi_1 = xy$ и $\psi_2 = x^2 f$, мы получаем общее решение уравнения (6.3.12):

$$f = x^{-2}F(xy).$$

Таким образом, уравнения, допускающие оператор (6.3.11), имеют следующий вид:

$$x^2 y' = F(xy). \tag{6.3.13}$$

Пример 6.3.5. Найдем уравнения, допускающие группу вращений (6.2.11) с генератором (6.2.12),

$$X = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.3.14}$$

Уравнение (6.3.10) записывается в виде

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = -(1 + f^2). \tag{6.3.15}$$

Система характеристик (4.4.7) для уравнения (6.3.15) имеет форму

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = -\frac{df}{1+f^2}\,.$$

Первое уравнение, $x\,dx + y\,dy = 0$, дает $x^2 + y^2 = \mathrm{const}$. Следовательно, мы можем выбрать

$$\psi_1 = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Итак, из уравнений характеристик мы имеем $x^2 + y^2 = a^2 = \mathrm{const}$. С учетом этого соотношения второе уравнение записывается в виде (ср. с примером 4.4.1)

$$\frac{df}{1+f^2} = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\operatorname{arctg} f = \operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg} C. \tag{6.3.16}$$

Остается разрешить это уравнение относительно константы интегрирования C и выбрать полученное выражение в качестве первого интеграла ψ_2. Тогда решение уравнения (6.3.15) получается явно, если положить $\psi_2 = F(\psi_1)$. Таким образом, мы записываем уравнение (6.3.16) в форме

$$\operatorname{arctg} f = \operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg} F(\psi_1)$$

и решаем его относительно f, используя элементарную формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta},$$

получая в итоге:

$$f = \frac{(y/x) + F(\psi_1)}{1 - (y/x)\,F(\psi_1)} = \frac{y + xF\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)}{x - yF\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)}\,.$$

Итак, уравнения, допускающие оператор (6.3.14), имеют форму

$$y' = \frac{y + xF\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)}{x - yF\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)}\,. \tag{6.3.17}$$

6.4. Интегрирование уравнений первого порядка с использованием симметрий

6.4.1. Интегрирующий множитель Ли. Рассмотрим уравнение первого порядка в симметричной форме (3.2.3):

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{6.4.1}$$

С. Ли показал, что если

$$X = \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y}$$

— симметрия уравнения (6.4.1) и если $\xi M + \eta N \neq 0$, то функция

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N} \tag{6.4.2}$$

является интегрирующим множителем уравнения (6.4.1). Это так называемый *интегрирующий множитель Ли*.

Пример 6.4.1. Уравнение $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$, которое мы рассматривали в примере 3.2.2, однородно (пример 3.1.1), т. е. имеет вид (6.3.5) и допускает

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Формула Ли (6.4.2) позволяет построить интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{2x^2y + y^3 - 3x^2y} = \frac{1}{y^3 - x^2y}\,.$$

Таблица 6.3.1

Некоторые нелинейные уравнения первого порядка
с известной симметрией

№	Уравнение	Симметрия
1	$y' = F(y)$	$X = \frac{\partial}{\partial x}$
	$y' = F(kx + ly)$	$X = l\,\frac{\partial}{\partial x} - k\,\frac{\partial}{\partial y}$
2	$y' = F(y/x)$	$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}$
3	$y' = x^{k-1}F(y/x^k)$	$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + ky\,\frac{\partial}{\partial y}$
4	$xy' = F(xe^{-y})$	$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
5	$y' = yF(ye^{-x})$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}$
6	$y' = \frac{y}{x} + xF(y/x)$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x}\,\frac{\partial}{\partial y}$
7	$xy' = y + F(y/x)$	$X = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}$
8	$y' = \frac{y}{x + F(y/x)}$	$X = xy\,\frac{\partial}{\partial x} + y^2\,\frac{\partial}{\partial y}$
9	$y' = \frac{y}{x + F(y)}$	$X = y\,\frac{\partial}{\partial x}$
10	$xy' = y + F(x)$	$X = x\,\frac{\partial}{\partial y}$
11	$xy' = \frac{y}{\ln x + F(y)}$	$X = xy\,\frac{\partial}{\partial x}$
12	$xy' = y[\ln y + F(x)]$	$X = xy\,\frac{\partial}{\partial y}$

Пример 6.4.2. Решим уравнение Риккати (6.3.6), применяя интегрирующий множитель Ли. Записываем уравнение (6.3.6) в дифференциальной форме (6.4.1):

$$dy + \left(y^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx = 0, \tag{6.4.3}$$

и используем симметрию (6.3.7), $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. Подставляя

$$\xi = x, \quad \eta = -y, \quad M = y^2 - \frac{2}{x^2}, \quad N = 1$$

в (6.4.2), мы получаем интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}\,.$$

После умножения на этот множитель уравнение (6.4.3) становится

$$\frac{x\,dy}{x^2y^2-xy-2}+\frac{1}{x^2y^2-xy-2}\,\frac{x^2y^2-2}{x}\,dx=0. \tag{6.4.4}$$

Это уравнение в полных дифференциалах, т. е. его левая часть может быть представлена в форме $d\Phi$. Функция $\Phi(x,y)$ может быть определена с использованием общей процедуры, описанной в разделе 3.2.2. В этом частном случае мы можем применить следующее простое вычисление. Заметив, что

$$\frac{x^2y^2-2}{x}=y+\frac{x^2y^2-xy-2}{x},$$

перепишем левую часть уравнения (6.4.4) в виде

$$\frac{x\,dy+y\,dx}{x^2y^2-xy-2}+\frac{dx}{x}=\frac{d(xy)}{x^2y^2-xy-2}+\frac{dx}{x}\,.$$

Обозначая $z=xy$ и используя разложение

$$\frac{1}{z^2-z-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right),$$

получим

$$\int\frac{dz}{z^2-z-2}=\frac{1}{3}\ln\frac{z-2}{z+1},$$

после чего уравнение (6.4.4) запишется в следующем виде:

$$\frac{x\,dy+y\,dx}{x^2y^2-xy-2}+\frac{dx}{x}=d\left(\ln x+\frac{1}{3}\ln\frac{xy-2}{xy+1}\right)=0.$$

Интегрирование дает:

$$\frac{xy-2}{xy+1}=\frac{C}{x^3},\quad C\neq 0.$$

Разрешая относительно y, мы получаем решение уравнения Риккати:

$$y=\frac{2x^3+C}{x(x^3-C)}\,.$$

Пример 6.4.3. Рассмотрим следующее уравнение:

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\,.$$

Действуя так же, как в примере 6.3.3 из раздела 6.3.2, можно убедиться, что это уравнение допускает, наряду с генератором проективного преобразования

$$X_1=x^2\,\frac{\partial}{\partial x}+xy\,\frac{\partial}{\partial y},$$

следующий генератор растяжения:

$$X_2=x\,\frac{\partial}{\partial x}+2y\,\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Записав рассматриваемое уравнение в дифференциальной форме

$$(x^2y + y^2)\,dx - x^3dy = 0$$

и подставив координаты операторов X_1 и X_2 в (6.4.2), мы получаем два линейно независимых интегрирующих множителя:

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2(x^2y+y^2)-x^4y} = \frac{1}{x^2y^2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{x(x^2y+y^2)-2x^3y} = \frac{1}{xy(y-x^2)}\,.$$

Составим уравнение (3.2.13), $\mu_1/\mu_2 = C$, а именно $y - x^2 = Cxy$, и получим решение $y = x^2/(1 - Cx)$. Сравните с (6.4.15) в примере 6.4.6.

6.4.2. Интегрирование с применением канонических переменных. Чтобы проинтегрировать линейное или нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x,y) \tag{6.4.5}$$

с известной инфинитезимальной симметрией

$$X = \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.4.6}$$

с помощью *метода канонических переменных*, следует сделать следующие шаги.

Первый шаг: Найти канонические переменные t, u путем решения уравнений (6.2.33) для данного генератора (6.4.6).

Второй шаг: Переписать уравнение (6.4.5) в канонических переменных t и u, считая u новой зависимой переменной, зависящей от независимой переменной t, то есть полагая $u = u(t)$ и выражая старую производную $y' = dy/dx$ в новых переменных t, u и новой производной $u' = du/dt$. Тогда уравнение (6.4.5) приобретет интегрируемую форму

$$\frac{du}{dt} = g(u). \tag{6.4.7}$$

Третий шаг: Проинтегрировать (6.4.7), подставить в это решение $u = \phi(t, C)$ выражения $t = t(x,y)$ и $u = u(x,y)$ и получить таким образом решение уравнения (6.4.5).

Пример 6.4.4. Проинтегрируем в квадратуре любое уравнение вида (6.3.5), используя его инфинитезимальную симметрию (6.2.34). Для определенности проинтегрируем следующий частный случай этого уравнения (6.3.5):

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}\,\cdot \tag{6.4.8}$$

Первый шаг: Канонические переменные для инфинитезимальной симметрии (6.2.34) найдены в примере 6.2.4. Они имеют вид

$$t = \ln|x|, \quad u = \frac{y}{x}\,\cdot$$

В т о р о й ш а г: Перепишем уравнение (6.4.8) в канонических переменных t и u. Поскольку $y = xu$ и $dt/dx = 1/x$, мы получаем, используя обозначение $u' = du/dt$:

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} = u + x\,\frac{du}{dx} = u + x\,\frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dx} = u + xu'\,\frac{1}{x} = u + u'.$$

Таким образом, уравнение (6.4.8) становится частным случаем уравнения (6.4.7):

$$\frac{du}{dt} = u^3.$$

Т р е т и й ш а г: Интегрирование этого уравнения дает

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{C - 2t}},$$

откуда, подставляя $t = \ln|x|$ и $y = xu$, имеем:

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{C - \ln x^2}}\cdot$$

Пример 6.4.5. Проинтегрируем уравнение Риккати (6.3.6),

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0,$$

используя метод канонических переменных в приложении к симметрии (6.3.7),

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

П е р в ы й ш а г: Решение уравнений (6.2.33) для этого оператора X позволяет получить канонические переменные, $t = \ln|x|$ и $u = xy$.

В т о р о й ш а г: Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{x}\right) = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dx} = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x^2}\cdot$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{u'}{x^2} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(u' + u^2 - u - 2\right) = 0.$$

Таким образом, уравнение Риккати переписывается в канонических переменных в следующей интегрируемой форме (6.4.7):

$$\frac{du}{dt} = -(u^2 - u - 2).$$

Т р е т и й ш а г: Проинтегрируем полученное уравнение. Разделяя переменные:

$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = -dt,$$

приводя рациональную дробь к элементарным дробям:

$$\frac{1}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{u - 2} - \frac{1}{u + 1}\right]$$

и интегрируя, имеем:

$$\ln\left(\frac{u-2}{u+1}\right) = -3t + \ln C.$$

Решаем это уравнение относительно u,

$$u = \frac{C + 2\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{e}^{3t} - C},$$

подставляем $t = \ln|x|$, $u = xy$ и получаем решение уравнения Риккати (6.3.6) (см. пример 6.4.2):

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}, \quad C = \text{const}. \tag{6.4.9}$$

Заметим, что при вычислениях следует учесть, что $xy - 2$ и $xy + 1$ не должны обращаться в нуль. Следовательно, мы должны добавить к (6.4.9) сингулярные решения уравнения (6.3.6):

$$y = \frac{2}{x} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{x}\,\cdot \tag{6.4.10}$$

Пример 6.4.6. Уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}\,F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.4.11}$$

с произвольной функцией F допускает генератор (6.2.13)

$$X = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.4.12}$$

группы проективных преобразований (6.2.14),

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1 - ax}\,\cdot$$

Используя уравнения

$$D_x(\overline{x}) = \frac{1}{(1-ax)^2}, \quad D_x(\overline{y}) = \frac{(1-ax)y' + ay}{(1-ax)^2},$$

получаем:

$$\overline{y}' = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{D_x(\overline{y})}{D_x(\overline{x})} = (1-ax)y' + ay.$$

Следовательно,

$$\overline{y}' - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}}\,F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = (1-ax)y' + ay - \frac{y}{x} - \frac{1-ax}{x}\,F\left(\frac{y}{x}\right)$$

или

$$\overline{y}' - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}}\,F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = (1-ax)\left[y' - \frac{y}{x} - \frac{1}{x}\,F\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Таким образом, уравнение (6.4.11) дает:

$$\overline{y}' - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}}\,F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = 0.$$

Проинтегрируем частный случай уравнения вида (6.4.11), а именно положим $F(\sigma) = \sigma^2$ и получим следующее уравнение (см. пример 6.4.3):

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\cdot \tag{6.4.13}$$

Первый шаг: Уравнения (6.2.33) с оператором (6.4.12) имеют вид:

$$X(t) = x^2\,\frac{\partial t}{\partial x} + xy\,\frac{\partial t}{\partial y} = 1, \quad X(u) = x^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + xy\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Выбирая частное решение этих уравнений при $t = t(x)$, получаем канонические переменные

$$t = -\frac{1}{x}, \quad u = \frac{y}{x}\cdot \tag{6.4.14}$$

Второй шаг: Имеем:

$$y' = \frac{d(xu)}{dx} = u + x\,\frac{du}{dx} = u + x\,\frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dx} = u + xu'\,\frac{1}{x^2} = u + \frac{1}{x}\,u',$$

и уравнение (6.4.13) приводится к следующей интегрируемой форме (6.4.7):

$$\frac{du}{dt} = u^2.$$

Третий шаг: Исключая решение $u = 0$ и интегрируя, имеем:

$$u = -\frac{1}{C+t}\cdot$$

Подставляя в это решение $t = -1/x$, $u = y/x$ и добавляя решение $u = 0$, получаем общее решение уравнения (6.4.13) в виде

$$y = \frac{x^2}{1 - Cx} \quad \text{и} \quad y = 0. \tag{6.4.15}$$

6.4.3. Инвариантные решения. Существенное свойство группы G симметрии обыкновенного дифференциального уравнения состоит в том, что она переводит любое решение (интегральную кривую) рассматриваемого уравнения в решение. Другими словами, преобразования симметрии просто перемешивают между собой интегральные кривые. Может оказаться, что некоторые интегральные кривые переводятся группой G в себя. Такие интегральные кривые называются *инвариантными решениями*.

Пример 6.4.7. Рассмотрим снова уравнение Риккати (6.3.6)

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

и найдем его инвариантные решения по отношению к инфинитезимальной симметрии

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Тест на инвариантность (6.2.18), $X(J) = 0$, позволяет найти один независимый инвариант xy. Следовательно, $xy = \mathrm{const}$ — единственное соотношение, записанное в терминах инвариантов. Таким образом, общая форма инвариантных решений есть $xy = \lambda$, или $y = \lambda/x$, $\lambda = \text{const}$. Подстановка в уравнение Риккати сводит последнее к алгебраическому, а именно к квадратному уравнению, $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, где $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. Итак, инвариантные решения совпадают с двумя сингулярными решениями (6.4.10):

$$y_1 = \frac{2}{x} \quad \text{и} \quad y_2 = -\frac{1}{x}\cdot$$

6.4.4. Общее решение, получаемое с помощью инвариантных решений. Аппарат инвариантных решений дает простой способ получения общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с двумя независимыми инфинитезимальными симметриями. Приведем следующий пример.

Пример 6.4.8. Рассмотрим уравнение (6.4.11) при $F(\sigma) = \sigma^n$, то есть уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^n}{x^{n+1}}\cdot$$

Оно допускает, наряду с проективной группой с генератором (6.4.12), группу растяжения с генератором

$$X = (n-1)x\,\frac{\partial}{\partial x} + ny\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Выберем, например, $n = 2$. Таким образом, мы рассматриваем уравнение (6.4.13),

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3},$$

с двумя инфинитезимальными симметриями:

$$X_1 = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + 2y\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Из уравнения $X_2(J) = 0$ получаем один независимый инвариант y/x^2. Следовательно, инвариантное решение получается, если положить $y/x^2 = \lambda$, или $y = \lambda x^2$ с произвольной константой $\lambda \neq 0$. Тогда наше дифференциальное уравнение сводится к

$$y' - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2\lambda x - \lambda x - \lambda^2 x = \lambda(1-\lambda)\,x = 0.$$

При $\lambda = 1$ получаем инвариантное решение

$$y = x^2. \tag{6.4.16}$$

Выберем теперь проективное преобразование (6.2.14)

$$\overline{x} = \frac{x}{1-ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1-ax},$$

соответствующее генератору X_1, перепишем инвариантное решение (6.4.16) в новых переменных в форме

$$\overline{y} = \overline{x}^2$$

и подставим в него выражения $\overline{x}$ и $\overline{y}$:

$$\frac{y}{1-ax} = \frac{x^2}{(1-ax)^2}\,.$$

Принимая для параметра a обозначение C, получаем общее решение (6.4.15):

$$y = \frac{x^2}{1-Cx}\,.$$

6.5. Уравнения второго порядка

6.5.1. Второе продолжение генераторов группы. Вычисление симметрий. Инфинитезимальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений второго и высших порядков могут быть найдены путем решения так называемых *определяющих уравнений*. Студент, желающий совершенствовать свои аналитические возможности в приложении техники анализа симметрий Ли, может найти достаточно материала в литературе, указанной в библиографии. Более того, приведенные в настоящей книге примеры подготовят читателя к более широкому использованию возможностей, предоставляемых пакетами компьютерной алгебры для вычисления симметрий.

В этом разделе я иллюстрирую метод определяющих уравнений для вычисления симметрий уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{6.5.1}$$

Мы будем находить допускаемый инфинитезимальный генератор

$$X = \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.5.2}$$

с коэффициентами ξ и η, который должен удовлетворять следующему уравнению, известному как *определяющее уравнение*:

$$X\big(y'' - f(x,y,y')\big)\Big|_{y''=f} \equiv \big(\zeta_2 - \zeta_1 f_{y'} - \xi f_x - \eta f_y\big)\Big|_{y''=f} = 0, \tag{6.5.3}$$

где символ $\Big|_{y''=f}$ означает, что вместо y'' в соответствующем выражении следует подставить правую часть уравнения (6.5.1). Здесь ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют следующим *формулам продолжения*:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_x(\eta) - y' D_x(\xi) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y\, y'^2,\\
\zeta_2 &= D_x(\zeta_1) - y'' D_x(\xi) = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + \\
&\quad + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}\, y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y\, y')y''.
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Подставляя выражения (6.5.4) в уравнение (6.5.3), мы получаем

$$\begin{aligned}
&\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi_{yy} - \xi f_x - \eta f_y + \\
&\quad + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)f - [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y]\, f_{y'} = 0.
\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Уравнение (6.5.5) содержит все три переменные x, y и y', но y' не входит в ξ и η. Следовательно, определяющее уравнение (6.5.5) допускает расщепление на несколько уравнений, так что образуется переопределенная система дифференциальных уравнений для двух неизвестных функций ξ и η. После решения этой системы мы найдем все инфинитезимальные симметрии уравнения (6.5.1).

Пример 6.5.1. Найдем инфинитезимальные симметрии уравнения

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}. \tag{6.5.6}$$

Подставляя $f = y'y^{-2} - (xy)^{-1}$ в определяющее уравнение (6.5.5), получим

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi_{yy} - \frac{\xi}{x^2 y} + \left(2\,\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{xy^2}\right)\eta +$$
$$+ \ (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)\left(\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}\right) - \frac{1}{y^2}\left[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y\right] = 0.$$

Это уравнение должно удовлетворяться тождественно относительно переменных x, y и y'. Поскольку левая часть уравнения представляет собой кубический полином по y', мы приравниваем нулю коэффициенты при $y'^3, y'^2, \ldots$ и получаем четыре следующих уравнения:

$$\begin{aligned}
&(y')^3: \ \ \xi_{yy} = 0,\\
&(y')^2: \ \ y^2\,(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - 2\xi_y = 0,\\
&(y')^1: \ \ y^3\,(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) - y\xi_x + 2\eta + 3\big(y^2/x\big)\xi_y = 0,\\
&(y')^0: \ \ x^2y^2\eta_{xx} - x^2\eta_x + xy\,(2\xi_x - \eta_y) - x\eta - y\xi = 0.
\end{aligned}$$

Первые два из них дают после интегрирования по y:

$$\xi = p(x)y + a(x), \quad \eta = -p(x)\ln(y^2) + p'(x)y^2 + q(x)y + b(x).$$

Подставим эти выражения для ξ и η в третье и четвертое уравнения. Левые части этих уравнений содержат, наряду с полиномами по y, также члены с $\ln(y^2)$. Полагая последние равными нулю, мы получаем $p(x) = 0$. Следовательно, $\xi = a(x)$, $\eta = q(x)y + b(x)$. Тогда из третьего и четвертого уравнений несложно найти

$$\xi = C_1x^2 + C_2x, \quad \eta = \left(C_1x + \frac{1}{2}\,C_2\right)y.$$

Мы приходим к выводу, что общее решение определяющего уравнения приводит к следующей инфинитезимальной симметрии уравнения (6.5.6):

$$X = \left(C_1x^2 + C_2x\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(C_1x + \frac{1}{2}\,C_2\right)y\,\frac{\partial}{\partial y}$$

или

$$X = C_1\left(x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}\right) + C_2\left(x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) = C_1X_1 + C_2X_2,$$

где X_1 и X_2 — следующие две линейно независимые (базовые) инфинитезимальные симметрии уравнения (6.5.6):

$$X_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \tag{6.5.7}$$

Пример 6.5.2. Найдем инфинитезимальные симметрии уравнения

$$y'' + e^{3y} y'^4 + y'^2 = 0. \tag{6.5.8}$$

Подставляя $f = -(e^{3y} y'^4 + y'^2)$ в определяющее уравнение (6.5.5), имеем

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - y'^3 \xi_{yy} + \\ &\quad + 3e^{3y} y'^4 \eta - (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)(e^{3y} y'^4 + y'^2) + \\ &\quad + \Big[\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - y'^2 \xi_y\Big] (4e^{3y} y'^3 + 2y') = 0. \end{aligned}$$

Левая часть этого уравнения — полином пятой степени по y'. Поступим так же, как в предыдущем примере, то есть приравняем к нулю коэффициенты при $y'^5, y'^4, \ldots$ и получим четыре следующих независимых уравнения:

$$\begin{aligned} &\big(y'\big)^5: \ \ \xi_y = 0, \\ &\big(y'\big)^4: \ \ 3(\eta_y + \eta) - 2\xi_x = 0, \\ &\big(y'\big)^3: \ \ \eta_x = 0, \\ &\big(y'\big)^1: \ \ \xi_{xx} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты при $\big(y'\big)^2$ и $\big(y'\big)^0$ обращаются в нуль одновременно с коэффициентами при $\big(y'\big)^4$ и $\big(y'\big)^1$ соответственно. Четыре полученных дифференциальных уравнения для $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ без труда решаются и дают (см. задачу 7.16):

$$\xi = C_2 + 3C_3\, x, \quad \eta = 2C_3 + C_1 e^{-y},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные константы. Таким образом, оператор

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

допускаемый уравнением (6.5.8), имеет вид

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,$$

где

$$X_1 = e^{-y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 3x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \cdot \tag{6.5.9}$$

Иными словами, уравнение (6.5.8) допускает трехмерное векторное пространство L_3, натянутое на операторы (6.5.9).

6.5.2. Алгебры Ли. Приведенные примеры могут служить иллюстрацией общего свойства определяющих уравнений. А именно, множество всех решений этих уравнений образует так называемую *алгебру Ли*, определяемую следующим образом.

Рассмотрим произвольные линейные операторы с частными производными первого порядка

$$X_1 = \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.5.10}$$

Определение 6.5.1. *Коммутатор* $[X_1, X_2]$ операторов (6.5.10) есть линейный оператор с частными производными первого порядка, вычисляемый по формуле

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1,$$

или, эквивалентно,

$$[X_1, X_2] = \big(X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1)\big)\frac{\partial}{\partial x} + \big(X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1)\big)\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.5.11}$$

Определение 6.5.2. Пусть L_r — r-мерное линейное пространство, натянутое на r любых линейно независимых операторов вида (6.5.10), то есть на множество операторов

$$X = C_1X_1 + \cdots + C_rX_r, \quad C_1, \ldots, C_r = \text{const}.$$

Пространство L_r называется *алгеброй Ли*, если оно замкнуто относительно коммутатора, то есть $[X, Y] \in L_r$ для любых $X, Y \in L_r$. Это эквивалентно условию $[X_i, X_j] \in L_r$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, или, эквивалентно,

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad c_{ij}^k = \text{const}. \tag{6.5.12}$$

Операторы $X_1, \ldots, X_r$ составляют базис алгебры Ли L_r. Мы говорим также, что L_r есть алгебра Ли, состоящая из натянутых на нее операторов X_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Пример 6.5.3. Рассмотрим операторы (6.5.7). Используя (6.5.11), мы получаем коммутатор $[X_1,\ X_2] = -X_1$. Таким образом, на операторы (6.5.7) натянута двумерная алгебра Ли L_2. Соответственно, мы говорим, что уравнение (6.5.6) допускает двумерную алгебру Ли.

Определение 6.5.3. Пусть L_r — алгебра Ли, натянутая на операторы X_i, $i = 1, \ldots, r$. Подпространство L_s векторного пространства L_r, натянутое на подмножество базовых операторов, например на $X_1, \ldots, X_s$, $s < r$, называется *подалгеброй* алгебры L_r, если $[X, Y] \in L_s$ для любых $X, Y \in L_s$, то есть если

$$[X_i, X_j] \in L_s, \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

Кроме того, L_s называется *идеалом* алгебры L_r, если $[X, Y] \in L_s$ при любых $X \in L_s$, $Y \in L_r$, то есть если

$$[X_i, X_j] \in L_s, \quad i = 1, \ldots, s; \quad j = 1, \ldots, r.$$

Удобный способ записи алгебры Ли, подалгебры и других свойств состоит в размещении коммутаторов в *таблице коммутаторов*, где $[X_i, X_j]$ размещается на пересечении строки X_i и столбца X_j. Поскольку коммутатор (6.5.11) антисимметричен, таблица коммутаторов также антисимметрична и имеет нули на главной диагонали.

Пример 6.5.4. Рассмотрим операторы (6.5.9). Используя формулу 6.5.11 определения 6.5.1 коммутатора, можно легко построить следующую таблицу коммутаторов (табл. 6.5.1).

Таблица 6.5.1

Таблица коммутаторов L_3

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	$2X_1$
X_2	0	0	$3X_2$
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$	0

Из приведенной таблицы видно, что трехмерная алгебра L_3 натянута на операторы (6.5.9), допускаемые уравнением (6.5.8). Таблица также показывает, что на любые два оператора, а именно (X_1, X_2), (X_1, X_3) или (X_2, X_3), натянута двумерная подалгебра. Кроме того, эта таблица коммутаторов показывает, что двумерная подалгебра, натянутая на X_1 и X_2, является идеалом алгебры Ли L_3, в то время как, к примеру, операторы X_1 и X_3 не образуют идеала алгебры Ли L_3.

6.5.3. Стандартные формы двумерной алгебры Ли. Метод Ли интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, который будет обсуждаться в следующем разделе, основан на так называемых *канонических координатах* двумерной алгебры Ли. Эти переменные представляют базис любой алгебры L_2 в простейшем виде и, как следствие, приводят дифференциальное уравнение, допускающее L_2, к интегрируемой форме. Основное положение состоит в следующем.

Теорема 6.5.1. Любая двумерная алгебра Ли может быть преобразована с помощью подходящего выбора базиса и перехода к переменным t, u, называемым *каноническими переменными*, к одной из четырех стандартных форм, представленных в табл. 6.5.2.

Замечание 6.5.1. В типах III и IV условие $[X_1, X_2] = X_1$ можно выполнить с помощью подходящего изменения базиса в L_2 с учетом того, что $[X_1, X_2] \neq 0$.

6.5.4. Метод интегрирования Ли. Софус Ли предложил теорему 6.5.1, дающую рецепт интегрирования всех уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{6.5.13}$$

допускающих двумерную алгебру Ли. Метод Ли состоит в разбиении всех уравнений на четыре типа в соответствии с табл. 6.5.2. А именно, вводя канонические переменные t, u, приводят допускаемую алгебру Ли L_2 к одной из *стандартных форм* таблицы 6.5.2. После этого уравнение (6.5.13) переписывается в канонических переменных. Полученное уравнение

$$u'' = g(t, u, u') \tag{6.5.14}$$

Таблица 6.5.2

Структура и стандартные формы L_2

Тип	Структура L_2	Стандартная форма L_2
I	$[X_1, X_2] = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \neq 0$	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \dfrac{\partial}{\partial u}$
II	$[X_1, X_2] = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = 0$	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\,\dfrac{\partial}{\partial u}$
III	$[X_1, X_2] = X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \neq 0$	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\,\dfrac{\partial}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial}{\partial u}$
IV	$[X_1, X_2] = X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = 0$	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u\,\dfrac{\partial}{\partial u}$

примет одну из четырех интегрируемых *канонических форм*, приведенных в табл. 6.5.3.

Таблица 6.5.3

Четыре типа уравнений второго порядка, допускающих L_2

Тип	Стандартная форма L_2	Каноническая форма уравнения
I	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(u')$
II	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\,\dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(t)$
III	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\,\dfrac{\partial}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = \dfrac{1}{t}\,f(u')$
IV	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u\,\dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(t)\,u'$

Таким образом, метод состоит в следующем. Предположим, что нам известна допускаемая алгебра L_2 с базисом (6.5.10). Тогда интегрирование требует выполнения следующих четырех шагов.

Первый шаг: Определить тип L_2 в соответствии с колонкой *Структура* табл. 6.5.2. Может потребоваться замена базиса L_2 для приведения коммутатора к типу III или IV (см. замечание 6.5.1).

Второй шаг: Найти канонические переменные путем решения следующих уравнений в соответствии с выделенным типом:

Тип I: $X_1(t) = 1, \quad X_2(t) = 0; \quad X_1(u) = 0, \quad X_2(u) = 1.$

Тип II: $X_1(t) = 0, \quad X_2(t) = 0; \quad X_1(u) = 1, \quad X_2(u) = t.$

Тип III: $X_1(t) = 0, \quad X_2(t) = t; \quad X_1(u) = 1, \quad X_2(u) = u.$

Тип IV: $X_1(t) = 0, \quad X_2(t) = 0; \quad X_1(u) = 1, \quad X_2(u) = u.$

Затем переписать дифференциальное уравнение в канонических переменных, выбирая t в качестве новой независимой переменной и u в качестве зависимой переменной. Уравнение приведется к одной из интегрируемых форм, представленных в табл. 6.5.3. Проинтегрировать уравнение.

Третий шаг: Перейти в найденном решении к исходным переменным x, y, завершая тем самым процедуру интегрирования.

Пример 6.5.5. Уравнение

$$y'' = yy'^2 - xy'^3 \tag{6.5.15}$$

допускает двумерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = y\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot \tag{6.5.16}$$

Первый шаг: Операторы (6.5.16) удовлетворяют уравнениям

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = 0,$$

и, следовательно, L_2 имеет тип IV табл. 6.5.2.

Второй шаг: Уравнения (6.5.15) для типа IV:

$$X_1(t) = 0, \quad X_2(t) = 0; \quad X_1(u) = 1, \quad X_2(u) = u$$

дают канонические уравнения

$$t = y, \quad u = \frac{x}{y}\cdot$$

Исходя из определения t, изменяем операцию полного дифференцирования:

$$D_x = y' D_t$$

и, используя ее при дифференцировании уравнения $u = x/y$, получаем:

$$y - xy' = y^2 y' u'.$$

Решаем последнее уравнение для y':

$$y' = \frac{y}{x + y^2 u'},$$

или после замены переменных в правой части получаем

$$y' = \frac{1}{u + tu'}\cdot$$

Повторное дифференцирование этого уравнения дает

$$y'' = -y'\,\frac{2u' + tu''}{(u + tu')^2} = -\frac{2u' + tu''}{(u + tu')^3}\cdot$$

Следовательно, уравнение (6.5.15) приобретает следующую линейную форму в соответствии с табл. 6.5.3:

$$u'' = -\left(t + \frac{2}{t}\right) u'. \tag{6.5.17}$$

Обозначая $u' = v$, переписываем уравнение (6.5.17) в виде уравнения первого порядка:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(t + \frac{2}{t}\right) v,$$

откуда

$$\ln v = \ln C_1 + \ln(t^{-2}) - \frac{t^2}{2},$$

или

$$v = \frac{C_1}{t^2}\, e^{-t^2/2}.$$

Итак, мы получили уравнение

$$u' = \frac{C_1}{t^2}\, e^{-t^2/2}.$$

Его интегрирование приводит к следующему решению уравнения (6.5.17):

$$u = C_2 + C_1 \int \frac{1}{t^2}\, e^{-t^2/2}\, dt.$$

Третий шаг: Возвращаясь к первоначальным переменным, мы приходим к следующему явному представлению общего решения уравнения (6.5.15):

$$x = y\left(C_2 + C_1 \int \frac{1}{y^2}\, e^{-y^2/2}\, dy\right).$$

Пример 6.5.6. Из примера 6.5.1 мы знаем, что нелинейное уравнение (6.5.6)

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}$$

допускает двумерную алгебру Ли L_2 с базисом (6.5.7). Следовательно, мы можем применить метод интегрирования Ли.

Первый шаг: Используем базовые инфинитезимальные симметрии в форме (6.5.7)

$$X_1 = x^2\, \frac{\partial}{\partial x} + xy\, \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -x\, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\, \frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Тогда $[X_1, X_2] = X_1$ (ср. с примером 6.5.3) и $\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = x^2y/2 \neq 0$. Таким образом, алгебра Ли L_2 имеет структуру типа III табл. 6.5.2.

Второй шаг: Найдем канонические переменные и проинтегрируем наше уравнение. Из системы уравнений $X_1(t) = 0$, $X_2(t) = t$ для новой переменной t получаем

$$t = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \tag{6.5.18}$$

а система $X_1(u) = 1$, $X_2(u) = u$ для u дает:

$$u = -\frac{1}{x}\cdot \tag{6.5.19}$$

В канонических переменных t, u, операторы X_1, X_2 (6.5.7) принимают вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\, \frac{\partial}{\partial t} + u\, \frac{\partial}{\partial u}\cdot$$

При замене независимой переменной (6.5.18) полное дифференцирование D_x по x, определенное согласно (1.2.66), переходит в полное дифференцирование D_t по t, подчиняющееся следующему уравнению:

$$D_x = D_x\left(\frac{y^2}{x^2}\right) D_t = 2\,\frac{y(xy' - y)}{x^3}\,D_t,$$

или

$$D_x = 2u\left(t - \sqrt{t}\;y'\right) D_t. \tag{6.5.20}$$

Продифференцируем обе части уравнения (6.5.19), используя уравнение (6.5.20), и, принимая во внимание, что левая часть (6.5.19) зависит от t, а правая часть — от x, получаем:

$$2u\left(t - \sqrt{t}\;y'\right) D_t(u) = D_x\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} = u^2,$$

или

$$t - \sqrt{t}\;y' = \frac{u}{2u'}\,.$$

Для вычисления изменения второй производной удобно записать преобразование полного дифференцирования и первой производной в виде

$$D_x = \frac{u^2}{u'}\,D_t$$

и

$$y' = \sqrt{t}\, - \frac{u}{2\sqrt{t}\;u'}$$

соответственно. Тогда легко получить следующее преобразование второй производной:

$$y'' = \frac{u^3}{4t\sqrt{t}\;u'^2} + \frac{u^3 u''}{2\sqrt{t}\;u'^3}\,.$$

Из уравнений (6.5.18), (6.5.19) следует:

$$\frac{1}{xy} = \frac{u^2}{\sqrt{t}}\,.$$

Далее, выражение для y' и уравнения (6.5.18), (6.5.19) дают:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{u^2}{\sqrt{t}} - \frac{u^3}{2t\sqrt{t}\;u'}\,.$$

После подстановки этих выражений уравнение (6.5.6) принимает интегрируемую форму:

$$u'' = -\frac{1}{t}\,u'\left(u' + \frac{1}{2}\right). \tag{6.5.21}$$

Возникает вопрос: эквивалентно ли уравнение (6.5.21) исходному уравнению (6.5.6)? Более точно — все ли решения уравнения (6.5.6) находятся из решений (6.5.21) с помощью замены переменных (6.5.18), (6.5.19), и обратно? Ответ не очевиден, поскольку выражение переменной t (6.5.18) содержит зависимую переменную y исходного уравнения (6.5.6) и, следовательно, t может рассматриваться в качестве новой независимой переменной, только если (6.5.6) не имеет решений, вдоль которых t является тождественной константой. Прямая проверка показывает, однако, что (6.5.6) имеет как раз

такое *сингулярное* решение $t = \mathrm{const}$, а именно решение, определяющее прямые линии:
$$y = Kx, \quad K = \mathrm{const}.$$
Все другие решения уравнения (6.5.6) получаются из решений (6.5.21) заменой переменных (6.5.18), (6.5.19).

Более того, необходимо также проверить, все ли решения уравнения (6.5.21) связаны с решениями (6.5.6). Мы замечаем, что уравнение (6.5.21), очевидно, остается в силе при $u' = 0$, а также при $u' = -1/2$, а соответствующие решения имеют вид $u = A$, $u = C - \frac{t}{2}$, где A и C — произвольные константы. Согласно с (6.5.19), первое из этих двух решений, $u = A$, означает $x = \mathrm{const}$. Однако оно не выполняется на любом решении уравнения (6.5.6) и должно быть отброшено. Но второе выражение, $u = C - t/2$, является решением уравнения (6.5.6). Действительно, подставляя в него значения (6.5.18) и (6.5.19) для t и u, соответственно, мы получаем следующее решение уравнения (6.5.6):
$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2}\,.$$

Далее проинтегрируем уравнение (6.5.21), исключая полученные выше сингулярные решения, т. е. полагая $u' \neq 0$ и $u' + 1/2 \neq 0$. Тогда из (6.5.21) следует:
$$\ln\left|K_1\sqrt{t}\,\right| = -\int\frac{du'}{u'(2u'+1)} = \int\frac{2\,du'}{2u'+1} - \int\frac{du'}{u'} = \ln\left|\frac{2u'+1}{u'}\right|,$$
или
$$K_1\sqrt{t} = \frac{2u'+1}{u'},$$
откуда
$$u' = \frac{1}{2(C_1\sqrt{t} - 1)},$$
где $C_1 = K_1/2 \neq 0$. Наконец, элементарное интегрирование дает:
$$u = \frac{1}{C_1^2}\left(C_1\sqrt{t} + \ln\left|C_1\sqrt{t} - 1\right| + C_2\right).$$

Т р е т и й ш а г: Перепишем решение в исходных переменных. Заменяя в последнем уравнении t и u выражениями (6.5.18) и (6.5.19), соответственно, приходим к следующему неявному представлению решения $y(x)$ уравнения (6.5.6), содержащему две константы, $C_1 \neq 0$ и C_2:
$$C_1y + C_2x + x\ln\left|C_1\frac{y}{x} - 1\right| + C_1^2 = 0.$$
Добавляя к последнему два сингулярных решения, которые были получены выше, мы получаем в итоге *общее решение* уравнения (6.5.6), представляющее собой следующие три формулы с произвольными константами K, C, C_1, C_2 при условии $C_1 \neq 0$:
$$y = Kx, \tag{6.5.22}$$
$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2}\,, \tag{6.5.23}$$
$$C_1y + C_2x + x\ln\left|C_1\frac{y}{x} - 1\right| + C_1^2 = 0. \tag{6.5.24}$$

Тот факт, что общее решение уравнения (6.5.6) состоит из трех существенно различных формул, не противоречит теореме 3.1.2 единственности решения любой задачи при произвольных начальных условиях. Действительно, решение нижеследующего упражнения показывает, что сами начальные условия выделяют из (6.5.22)–(6.5.24) точно одну формулу решения.

Упражнение 6.5.1. Решить следующие задачи Коши для уравнения (6.5.6):

$$\text{а)}\quad y''=\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{xy},\quad y\big|_{x=1}=1,\quad y'\big|_{x=1}=1;$$

$$\text{б)}\quad y''=\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{xy},\quad y\big|_{x=1}=1,\quad y'\big|_{x=1}=0;$$

$$\text{в)}\quad y''=\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{xy},\quad y\big|_{x=1}=1,\quad y'\big|_{x=1}=2.$$

Решение. Задача а): Подставляя $x=1$, $y=1$, $y'=1$ в формулы всех трех решений (6.5.22)–(6.5.24), можно убедиться, что начальные условия а) могут быть выполнены только на (6.5.22), где $K=1$.

Задача б): Исходя из подобных рассуждений, для $x=1$, $y=1$, $y'=0$ выделяем вторую формулу решения (6.5.23) со знаком плюс и при $C=-1$.

Задача в): Аналогично, подстановка $x=1$, $y=1$, $y'=2$ выделяет формулу решения (6.5.24) при $C_1=2$, $C_2=-6$.

Таким образом, решения поставленной задачи Коши записываются в виде

$$\text{а)}\quad y=x,\quad \text{б)}\quad y=\sqrt{2x-x^2}\,,\quad \text{в)}\quad 2y-6x+x\ln\left|2\,\frac{y}{x}-1\right|+4=0.$$

6.5.5. Интегрирование линейных уравнений с известными частными решениями. Предположим, что частное решение $y=z(x)$ линейного уравнения

$$y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0 \tag{6.5.25}$$

известно. Таким образом, выполнено $z''(x)+a(x)\,z'(x)+b(x)\,z(x)=0$ тождественно по x. Обсудим в этом разделе два различных метода получения общего решения уравнения (6.5.25) с использованием частного решения $z(x)$.

Первый метод состоит в преобразовании к простой форме согласно теореме 3.3.1. В соответствии с этой теоремой преобразование

$$t=\int\frac{e^{-\int a(x)\,dx}}{z^2(x)}\,dx,\quad u=\frac{y}{z(x)} \tag{6.5.26}$$

приводит уравнение (6.5.25) к простейшему линейному уравнению второго порядка

$$u''=0. \tag{6.5.27}$$

Интегрируя, получаем $u=C_1t+C_2$, и общее решение уравнения (6.5.25) находится в следующем виде:

$$y=z(x)\left[C_1\int\frac{e^{-\int a(x)\,dx}}{z^2(x)}\,dx+C_2\right]. \tag{6.5.28}$$

Второй метод основан на том факте, что уравнение (6.5.25) является инвариантом преобразования $\overline{y} = y + az(x)$ и, следовательно, допускает генератор

$$X_1 = z(x)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.5.29}$$

Поскольку уравнение (6.5.25) однородно, оно допускает также генератор

$$X_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.5.30}$$

На операторы (6.5.29) и (6.5.30) натянута двумерная алгебра Ли типа IV, и это означает, что уравнение (6.5.25) может быть решено методом интегрирования Ли, который мы обсудили в разделе 6.5.4. А именно, канонические переменные для операторов (6.5.29), (6.5.30) имеют вид

$$t = x, \quad u = \frac{y}{z(x)}\,\cdot \tag{6.5.31}$$

В этих переменных уравнение (6.5.25) принимает интегрируемую форму:

$$u'' + \left[a(x) + 2\,\frac{z'(x)}{z(x)}\right] u' = 0, \tag{6.5.32}$$

откуда

$$u = C_1 \int \frac{e^{-\int a(x)\,dx}}{z^2(x)}\,dx + C_2.$$

Таким образом, мы снова приходим к решению (6.5.28).

Как показывает практика, лучше использовать один из вышеописанных методов, чем окончательную формулу решения (6.5.28).

Пример 6.5.7. Рассмотрим уравнение

$$y'' = xy' - y. \tag{6.5.33}$$

Частное решение легко находится: $z(x) = x$. Для этого достаточно предположить, что уравнение допускает полиномиальное решение $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$. Применим первый из двух приведенных методов интегрирования. Преобразование (6.5.26) дает

$$t = \int \frac{e^{x^2/2}}{x^2}\,dx, \quad u = \frac{y}{x}\,\cdot$$

В этих переменных уравнение (6.5.33) принимает форму $u'' = 0$, и, следовательно, $u = C_1t + C_2$. Подставляя в решение выражения для t и u, мы получаем следующее общее решение уравнения (6.5.33):

$$y = \left[C_1 \int \frac{e^{x^2/2}}{x^2}\,dx + C_2\right] x. \tag{6.5.34}$$

Воспользуемся вторым методом. Используя алгебру Ли L_2 типа IV, натянутую на операторы (6.5.29) и (6.5.30),

$$X_1 = x\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y},$$

получаем канонические переменные $t = x$, $u = y/x$. В этих переменных уравнение (6.5.33) записывается в виде

$$u'' = \left(x - \frac{2}{x}\right) u'.$$

После стандартной подстановки $u' = v$ и разделения переменных оно становится

$$\frac{dv}{v} = \left(x - \frac{2}{x}\right) dx$$

и дает

$$v = C_1 \, \frac{e^{x^2/2}}{x^2} \cdot$$

При интегрировании получаем:

$$u = C_1 \int \frac{e^{x^2/2}}{x^2} \, dx + C_2.$$

Окончательно, $y = xu$ формирует общее решение (6.5.34).

6.5.6. Тест линеаризации Ли.

Пример 6.5.8. С целью иллюстрации проблемы рассмотрим нелинейное уравнение

$$y'' = 2\left(\frac{y'^2}{y} - \frac{xy'}{1+x^2}\right). \tag{6.5.35}$$

Я получил его из простейшего линейного уравнения (6.5.27), $u'' = 0$, следующей заменой переменных:

$$t = \frac{1}{y}, \quad u = \operatorname{arctg} x. \tag{6.5.36}$$

Действительно, применяя формулы преобразования (1.4.13), (1.4.14) к уравнениям (6.5.36), мы имеем:

$$D_x = -\frac{y'}{y^2}\, D_t, \quad -\frac{y'}{y^2}\, D_t(u) = D_x(\operatorname{arctg} x), \tag{6.5.37}$$

откуда

$$u' = -\frac{y^2}{(1+x^2)\, y'} \cdot \tag{6.5.38}$$

Дифференцируя обе части уравнения (6.5.38) с использованием (6.5.37), получаем:

$$\frac{y'^2}{y^4}\, u'' - \frac{y''}{y^2}\, u' + 2\,\frac{y'^2}{y^3}\, u' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot$$

Далее, учитывая уравнения (6.5.27) и (6.5.38), мы в итоге приходим к уравнению (6.5.35). Применяя в общем решении $u = C_1 t - C_2$ линейного уравнения (6.5.27) замену переменных (6.5.36), мы приходим к

$$\operatorname{arctg} x = \frac{C_1}{y} - C_2$$

и, следовательно, получаем общее решение нелинейного уравнения (6.5.35):

$$y = \frac{C_1}{C_2 + \operatorname{arctg} x}\,. \tag{6.5.39}$$

Такие линеаризуемые уравнения, как (6.5.35), встречаются в приложениях довольно часто. Следовательно, важно иметь общий тест для выделения линеаризуемых уравнений. Софус Ли [43] решил эту проблему для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. А именно, он нашел общую форму всех уравнений второго порядка (6.5.13), которые могут быть приведены к линейному уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)\,\frac{du}{dt} + B(t)\,u + C(t) \tag{6.5.40}$$

с помощью замены переменных

$$t = \varphi(x,y), \quad u = \psi(x,y). \tag{6.5.41}$$

Прежде всего, он показал, что все линеаризуемые уравнения второго порядка могут быть по крайней мере кубичными относительно производных первого порядка. Это утверждение может быть получено с использованием преобразования производных при замене переменных. Напомним, что любое линейное уравнение может быть приведено к простейшему уравнению (6.5.27) заменой как независимой, так и зависимой переменных. Мы также знаем (лемма 3.3.1), что линейные уравнения *эквивалентны по функции* уравнению (3.3.12). Запишем уравнение (3.3.12) в переменных t и u:

$$u'' + \alpha(t)\,u = 0, \tag{6.5.42}$$

где u'' — вторая производная от u по t. Тогда, используя преобразование производных, получаемое согласно теореме 1.4.1 раздела 1.4.5, мы приходим к следующему результату.

Лемма 6.5.1. Все уравнения второго порядка, получаемые из уравнения (6.5.42) с помощью замены переменных (6.5.41), по крайней мере кубичны по первым производным, то есть принадлежат к семейству уравнений вида

$$y'' + F_3(x,y)\,y'^3 + F_2(x,y)\,y'^2 + F_1(x,y)\,y' + F(x,y) = 0, \tag{6.5.43}$$

где

$$\begin{aligned}
F_3(x,y) &= \frac{\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy} + \alpha\psi\varphi_y^3}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x},\\
F_2(x,y) &= \frac{\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \psi_y\varphi_{xy}) + 3\alpha\psi\varphi_x\varphi_y^2}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x},\\
F_1(x,y) &= \frac{\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \psi_x\varphi_{xy}) + 3\alpha\psi\varphi_x^2\varphi_y}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x},\\
F(x,y) &= \frac{\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx} + \alpha\psi\varphi_x^3}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x}\,.
\end{aligned} \tag{6.5.44}$$

Однако не любое уравнение вида (6.5.43) с произвольными коэффициентами $F_3(x,y), \ldots, F(x,y)$ линеаризуемо. Линеаризация возможна, если и только если переопределенная система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (6.5.44) для двух функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ с заданными $F_3(x,y),\ldots,F(x,y)$ интегрируема. Софус Ли [43] нашел условия совместности (то есть интегрируемости) системы (6.5.44). Тест линеаризуемости С. Ли может быть сформулирован следующим образом (см. также [40]).

Теорема 6.5.2. Уравнение (6.5.43) линеаризуемо, если и только если его коэффициенты удовлетворяют следующим уравнениям:

$$3(F_3)_{xx} - 2(F_2)_{xy} + (F_1)_{yy} = (3F_1F_3 - F_2^2)_x - 3(FF_3)_y - 3F_3F_y + F_2(F_1)_y,$$
$$3F_{yy} - 2(F_1)_{xy} + (F_2)_{xx} = 3(FF_3)_x + (F_1^2 - 3FF_2)_y + 3F(F_3)_x - F_1(F_2)_x.$$

Тест линеаризуемости Софуса Ли прост и удобен на практике. Рассмотрим примеры.

Пример 6.5.9. Уравнение

$$y'' + F(x,y) = 0$$

имеет вид (6.5.43), где $F_3 = F_2 = F_1 = 0$. Тест линеаризации дает $F_{yy} = 0$. Следовательно, уравнение $y'' = F(x,y)$ не требует линеаризации, поскольку оно уже линейное.

Пример 6.5.10. Уравнения

$$y'' - \frac{1}{x}\left(y' + y'^3\right) = 0$$

и

$$y'' + \frac{1}{x}\left(y' + y'^3\right) = 0$$

также имеют форму (6.5.43). Их коэффициенты равны $F_3 = F_1 = -1/x$, $F_2 = F = 0$ и $F_3 = F_1 = 1/x$, $F_2 = F = 0$ соответственно. Тест линеаризации показывает, что первое уравнение линеаризуемо, а второе — нет.

Если коэффициенты $F_3(x,y),\ldots,F(x,y)$ уравнения (6.5.43) удовлетворяют тесту линеаризации, сформулированному в теореме 6.5.2, тогда замена переменных (6.5.41), приводящая уравнения (6.5.43) к линейному виду (6.5.42), может быть получена с помощью решения переопределенной системы дифференциальных уравнений (6.5.44) относительно $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ с известными функциями $F_3(x,y),\ldots,F(x,y)$.

Пример 6.5.11. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \frac{1}{x}\left(y' + y'^3\right) = 0 \tag{6.5.45}$$

из предыдущего примера. Мы знаем, что его коэффициенты

$$F_3 = F_1 = -\frac{1}{x}, \quad F_2 = F = 0$$

удовлетворяют условиям теоремы 6.5.2. Покажем, что уравнение (6.5.45) может быть приведено к простейшему линейному уравнению $u'' = 0$ и найдем линеаризующее отображение. Предположим, что $\alpha(t) = 0$ в (6.5.42). Тогда уравнения (6.5.44) для нахождения $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ записываются так:

$$\begin{aligned}
&\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy} = -\frac{1}{x}\,(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x),\\
&\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \psi_y\varphi_{xy}) = 0,\\
&\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \psi_x\varphi_{xy}) = -\frac{1}{x}\,(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x),\\
&\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{6.5.46}$$

Чтобы линеаризовать уравнение (6.5.45), достаточно найти любые подходящие функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, которые являются решениями системы (6.5.46) и функционально независимы, то есть их якобиан отличен от нуля:

$$\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0. \tag{6.5.47}$$

Поэтому я удовлетворяю условие последнего уравнения системы (6.5.46), полагая $\varphi_x = 0$, то есть $\varphi = \varphi(y)$. Тогда условие (6.5.47) требует, чтобы $\psi_x \neq 0$ и $\varphi_y \neq 0$. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, я выбираю $\varphi = y$. Тогда второе уравнение системы (6.5.46) дает $\psi_{xy} = 0$, откуда

$$\psi = a(x) + b(y).$$

После этого первое уравнение (6.5.46) становится уравнением с разделяющимися переменными:

$$b''(y) = \frac{1}{x}\,a'(x).$$

Отсюда следует

$$b''(y) = \frac{1}{x}\,a'(x) = \lambda, \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Эти уравнения дают

$$a(x) = \frac{\lambda}{2}\,x^2 + C_1x + C_2, \quad b(y) = \frac{\lambda}{2}\,y^2 + K_1y + K_2.$$

Замечая, что третье уравнение (6.5.46) удовлетворяется тождественно и подставляя $\lambda = 2$, $C_1 = C_2 = K_1 = K_2 = 0$, мы приходим к следующей замене переменных (6.5.41):

$$t = y, \quad u = x^2 + y^2. \tag{6.5.48}$$

Эта замена переменных приводит уравнение (6.5.45) к линейному уравнению $u'' = 0$. Записывая общее решение последнего уравнения в форме $u + At + B = 0$ и используя (6.5.48), мы получаем следующее решение нелинейного уравнения (6.5.45) в явном виде:

$$x^2 + y^2 + Ay + B = 0, \quad A,\, B = \mathrm{const}. \tag{6.5.49}$$

Заметим, что замена переменных (6.5.48) невозможна для решения $y = \mathrm{const}$ уравнения (6.5.45). Следовательно, общее решение уравнения (6.5.45) получается добавлением к (6.5.49) сингулярного решения $y = \mathrm{const}$.

Пример 6.5.12. Уравнение $y'' + y'^2 = f(x)$ имеет форму (6.5.43) при $F_3 = F_1 = 0$, $F_2 = 1$, $F = -f(x)$ и удовлетворяет теореме 6.5.2. Проверим, линеаризуемо ли оно с помощью замены одной зависимой переменной. Иначе говоря, будем искать линеаризующее преобразование (6.5.41) в виде $t = x$, $u = \psi(x, y)$. Тогда первое уравнение (6.5.44) удовлетворяется тождественно, а остальные три уравнения дают:

$$\psi_{yy} = \psi_y, \quad \psi_{xy} = 0, \quad \psi_{xx} + f(x)\,\psi_y + \alpha(x)\,\psi = 0.$$

Из первых двух уравнений имеем $\psi = g(x) + Ce^y$. Выбирая, например, $C = 1$, $g(x) = 0$, мы получаем $\psi = e^y$. Тогда третье уравнение дает $\alpha = -f(x)$. Таким образом, замена переменных $t = x$, $u = e^y$ линеаризует рассматриваемое уравнение и отображает его в $u'' = f(x)u$.

6.6. Уравнения высокого порядка

6.6.1. Инвариантные решения. Подход Эйлера к дифференцированию. Концепция групповых инвариантных решений, введенная в разделе 6.4.3 для уравнений первого порядка, применима также в случае уравнений высокого порядка.

Пример 6.6.1. Однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение общего вида с постоянными коэффициентами (3.4.6),

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_1, \dots, a_n = \text{const},$$

допускает группу сдвига с генератором

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

поскольку коэффициенты постоянны, а также допускает умножение y на произвольный параметр, то есть группу растяжения с генератором

$$X_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y}$$

в связи с однородностью рассматриваемого уравнения. Следовательно, уравнение допускает линейную комбинацию этих генераторов, $X = X_1 + \lambda X_2$:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Уравнение характеристик $dy/y = \lambda\,dx$ дает инвариант $u = ye^{-\lambda x}$. Инвариантное решение получается подстановкой $u = C$. Отсюда вытекает *подход Эйлера* (3.3.25):

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

Поскольку $y' = C\lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = C\lambda^n e^{\lambda x}$, подстановка в уравнение (3.4.6) дает алгебраическое уравнение, а именно характеристическое уравнение (3.4.7):

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Пример 6.6.2. Рассмотрим уравнение Эйлера (3.4.11) из раздела 3.4.4:

$$x^n\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\,x^{n-1}\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\,x\,\frac{dy}{dx} + a_n\,y = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n = \text{const}$. Оно дважды однородно (см. определение 3.1.3), то есть допускает группы растяжения с генераторами

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Поступим так же, как в примере 6.6.1, и найдем инвариантное решение с помощью построения линейной комбинации $X = X_1 + \lambda X_2$:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Уравнение характеристик $dy/y = \lambda\, dx/x$ дает инвариант $u = y\, x^{-\lambda}$. Инвариантные решения находятся подстановкой $u = C$, откуда

$$y = Cx^{\lambda}. \tag{6.6.1}$$

Дифференцируя и умножая на x, имеем:

$$xy' = C\lambda\, x^{\lambda}, \quad x^2y'' = C\lambda^2x^{\lambda}, \ldots, \quad x^ny^{(n)} = C\lambda^nx^{\lambda}.$$

Подставляя в уравнение (3.4.11), мы получаем после деления на общий множитель Cx^{λ} следующее *характеристическое уравнение* для уравнения Эйлера (3.4.11):

$$\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,\lambda + a_n = 0.$$

Оно совпадает с характеристическим уравнением (3.4.7) для уравнения с постоянными коэффициентами (ср. с разделом 3.4.4).

6.6.2. Интегрирующий множитель (Н.Х. Ибрагимов, 2006). Обычно интегрирующий множитель рассматривают исключительно для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Более того, при классическом подходе к интегрирующему множителю дифференциальные уравнения записывают как дифференциальные формы (см. раздел 3.2.3). Здесь мы будем обсуждать альтернативный подход к интегрирующим множителям, развитый в [41]. Новый подход позволяет нам определить интегрирующие множители для уравнений высокого порядка и систем.

Пусть $u = (u^1, \ldots, u^m)$ обозначает $m \geqslant 1$ зависимых переменных с последовательными производными $u_{(1)} = \{du^{\alpha}/dx\}$, $u_{(2)} = \{d^2u^{\alpha}/dx^2\}, \ldots$ по отношению к единственной независимой переменной x. Полное дифференцирование (1.4.9) имеет вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u^{\alpha}_{(1)}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + u^{\alpha}_{(2)}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{(1)}} + \cdots \tag{6.6.2}$$

Вариационные производные высокого порядка (ср. с уравнениями (1.5.4) и (2.6.24)) с одной независимой переменной и несколькими зависимыми переменными записываются следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} - D_x\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_x} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{xx}} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{xxx}} + \cdots\,. \tag{6.6.3}$$

Новый подход к нахождению интегрирующих множителей для обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка с одной или несколькими зависимыми переменными основан на следующем утверждении (более детальное рассмотрение и доказательства можно найти в [40, раздел 8.4]).

Лемма 6.6.1. Пусть $F\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}\right) \in \mathcal{A}$. Уравнение $D_x(F) = 0$ выполняется тождественно относительно всех переменных x, u, $u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}$ и $u_{(s+1)}$, если и только если $F = C = \mathrm{const}$.

Лемма 6.6.2. Дифференциальная функция $F\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}\right) \in \mathcal{A}$ с одной независимой переменной x является полной производной:

$$F = D_x(\Phi), \quad \Phi\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s-1)}\right) \in \mathcal{A}, \tag{6.6.4}$$

если и только если следующие уравнения выполняются тождественно в x, u, $u_{(1)}, \ldots$:

$$\frac{\delta F}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{6.6.5}$$

В случае уравнений с одной зависимой переменной y мы будем использовать обычное обозначение y', y'' и т. д. для последовательных производных. Полное дифференцирование (6.6.2) и вариационная производная (6.6.3) имеют вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + y^{(s+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + \cdots$$

и

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} - D_x \frac{\partial}{\partial y'} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial y''} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial y'''} + \cdots \tag{6.6.6}$$

соответственно. В этом случае леммы 6.6.1 и 6.6.2 формулируются следующим образом.

Лемма 6.6.3. Пусть $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(s)}\right) \in \mathcal{A}$. Если уравнение $D_x(f) = 0$ удовлетворяется тождественно относительно всех переменных x, y, $y', \ldots, y^{(s)}$ и $y^{(s+1)}$, то $f = \mathrm{const}$.

Лемма 6.6.4. Дифференциальная функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(s)}\right) \in \mathcal{A}$ с одной независимой переменной x является полной производной, то есть

$$f = D_x(\phi), \quad \phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(s-1)}\right) \in \mathcal{A}, \tag{6.6.7}$$

если и только если следующее уравнение выполняется тождественно относительно x, y, $y', \ldots$:

$$\frac{\delta f}{\delta y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^2 \frac{\partial f}{\partial y''} - D_x^3 \frac{\partial f}{\partial y'''} + \cdots + (-1)^s D_x^s \frac{\partial f}{\partial y^{(s)}} = 0. \tag{6.6.8}$$

Определение 6.6.1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка s

$$a\left(x, y, y', \ldots, y^{(s-1)}\right) y^{(s)} + b\left(x, y, y', \ldots, y^{(s-1)}\right) = 0. \tag{6.6.9}$$

Функция $\mu\left(x, y, y', \ldots, y^{(s-1)}\right)$ называется интегрирующим множителем уравнения (6.6.9), если умножение на μ превращает левую часть уравнения (6.6.9) в полную производную от некоторой функции $\phi(x, y, y', \ldots \ldots, y^{(s-1)})$:

$$\mu a\, y^{(s)} + \mu b = D_x(\phi). \tag{6.6.10}$$

Знание интегрирующего множителя позволяет уменьшить порядок уравнения (6.6.9). Действительно, из уравнений (6.6.9), (6.6.10) следует, что $D_x(\phi) = 0$, и лемма 6.6.1 дает первый интеграл уравнения (6.6.9):

$$\phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(s-1)}\right) = C. \tag{6.6.11}$$

Определение 6.6.1 можно легко обобщить на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка.

Теорема 6.6.1. Интегрирующий множитель для уравнения (6.6.9) определяется уравнением

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\mu a\, y^{(s)} + \mu b\right) = 0, \tag{6.6.12}$$

где $\delta/\delta y$ — вариационная производная (6.6.6). Уравнение (6.6.12) содержит переменные $x, y, y', \ldots, y^{(2s-2)}$ и удовлетворяется тождественно по этим переменным.

Доказательство. Уравнение (6.6.12) получено согласно лемме 6.6.2. Производная высшего порядка, которая может появиться после вариационного дифференцирования (6.6.6), имеет порядок $2s-1$. Она появляется в членах

$$(-1)^s D_x^s(\mu a) \quad \text{и} \quad (-1)^{s-1} D_x^{s-1}\left[y^{(s)}\, \frac{\partial(\mu a)}{\partial y^{(s-1)}}\right].$$

Мы имеем, отбрасывая члены, заведомо не содержащие $y^{(2s-1)}$:

$$(-1)^s D_x^s(\mu a) = -(-1)^{s-1} D_x^{s-1}\left[y^{(s)}\, \frac{\partial(\mu a)}{\partial y^{(s-1)}}\right] + \cdots .$$

Таким образом, члены, содержащие $y^{(2s-1)}$, взаимно уничтожаются, и уравнение (6.6.12) содержит только переменные $x, y, y', \ldots, y^{(2s-2)}$. Это завершает доказательство.

В случае уравнения первого порядка,

$$a(x, y)\, y' + b(x, y) = 0, \tag{6.6.13}$$

уравнение (6.6.12) записывается следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta y}\,(\mu a\, y' + \mu b) = y'\,(\mu a)_y + (\mu b)_y - D_x(\mu a) = 0.$$

Поскольку $D_x(\mu a) = (\mu a)_x + y'(\mu a)_y$, мы получаем следующее уравнение для нахождения интегрирующего множителя для уравнений первого порядка (6.6.13):

$$(\mu b)_y - (\mu a)_x = 0. \tag{6.6.14}$$

Уравнение (6.6.14) совпадает с уравнением (3.2.12), где $N = a$, $M = b$.

Пример 6.6.3. Рассмотрим с новой точки зрения уравнение (3.2.14) из примера 3.2.2. Перепишем уравнение (3.2.14) в следующей форме:

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0,$$

и получим

$$\frac{\delta}{\delta y}\left[(y^2 - 3x^2)y' + 2xy\right] = 2yy' + 2x - D_x(y^2 - 3x^2) = 8x.$$

Таким образом, условие (6.6.12) не выполняется, и, следовательно, $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy$ не является полным дифференциалом. С другой стороны, умножая на $\mu = 1/y^4$, мы получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)y' + \frac{2x}{y^3} = 0, \tag{6.6.15}$$

которое удовлетворяет условию (6.6.12). Действительно,

$$\frac{\delta}{\delta y}\left[\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)y' + \frac{2x}{y^3}\right] = -\frac{2y'}{y^3} + 12\,\frac{x^2y'}{y^5} - \frac{6x}{y^4} - D_x\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) = 0.$$

Теперь мы запишем

$$\frac{y'}{y^2} = D_x\left(-\frac{1}{y}\right), \quad -3x^2\,\frac{y'}{y^4} = x^2 D_x\left(\frac{1}{y^3}\right) = D_x\left(\frac{x^2}{y^3}\right) - \frac{2x}{y^3}$$

и получим:

$$\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)y' + \frac{2x}{y^3} = D_x\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\right).$$

Итак, решение нашего дифференциального уравнения выражается явно в виде

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 = Cy^3.$$

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка

$$a(x, y, y')\,y'' + b(x, y, y') = 0. \tag{6.6.16}$$

Интегрирующие множители μ зависят от x, y, y', и уравнение (6.6.12) для нахождения $\mu(x, y, y')$ записывается таким образом:

$$\frac{\delta}{\delta y}\,(\mu a\, y'' + \mu b) = y''(\mu a)_y + (\mu b)_y - D_x\left[y''(\mu a)_{y'} + (\mu b)_{y'}\right] + D_x^2(\mu a) = 0.$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned}
&D_x(\mu a) = y''(\mu a)_{y'} + y'(\mu a)_y + (\mu a)_x,\\
&D_x^2(\mu a) = y'''(\mu a)_{y'} + y''^2(\mu a)_{y'y'} + 2y'y''(\mu a)_{yy'} + 2y''(\mu a)_{xy'} +\\
&\qquad + y''(\mu a)_y + y'^2(\mu a)_{yy} + 2y'(\mu a)_{xy} + (\mu a)_{xx},\\
&D_x\left(y''(\mu a)_{y'}\right) = y'''(\mu a)_{y'} + y''^2(\mu a)_{y'y'} + y'y''(\mu a)_{yy'} + y''(\mu a)_{xy'},\\
&D_x\left((\mu b)_{y'}\right) = y''(\mu b)_{y'y'} + y'(\mu b)_{yy'} + (\mu b)_{xy'},
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta y}(\mu a\, y'' + \mu b) = y''\left[y'(\mu a)_{yy'} + (\mu a)_{xy'} + 2(\mu a)_y - (\mu b)_{y'y'}\right] + \\ + y'^2(\mu a)_{yy} + 2y'(\mu a)_{xy} + (\mu a)_{xx} - y'(\mu b)_{yy'} - (\mu b)_{xy'} + (\mu b)_y.$$

Поскольку это выражение должно обращаться в нуль тождественно по x, y, y' и y'', мы приходим к сформулированному ниже утверждению.

Теорема 6.6.2. Интегрирующие множители $\mu(x, y, y')$ уравнения второго порядка (6.6.16) определяются следующей системой двух уравнений:

$$y'(\mu a)_{yy'} + (\mu a)_{xy'} + 2(\mu a)_y - (\mu b)_{y'y'} = 0, \tag{6.6.17}$$

$$y'^2(\mu a)_{yy} + 2y'(\mu a)_{xy} + (\mu a)_{xx} - y'(\mu b)_{yy'} - (\mu b)_{xy'} + (\mu b)_y = 0. \tag{6.6.18}$$

Теорема 6.6.2 показывает, что уравнения второго порядка, в отличие от уравнений первого порядка, могут не иметь интегрирующих множителей. В самом деле, интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ для любого уравнения первого порядка определяется единственным линейным уравнением с частными производными первого порядка (6.6.14), которое всегда имеет бесконечное число решений. В случае уравнений второго порядка (6.6.16) одна неизвестная функция $\mu(x, y, y')$ должна удовлетворять двум линейным уравнениям с частными производными второго порядка (6.6.17), (6.6.18). Интегрирующий множитель существует при условии, что переопределенная система (6.6.17), (6.6.18) совместна.

Замечание 6.6.1. Если уравнение второго порядка (6.6.16) имеет два интегрирующих множителя, которые приводят к двум существенно различным первым интегралам (6.6.11), тогда общее решение уравнения (6.6.16) может быть найдено без интегрирования.

Пример 6.6.4. Рассмотрим следующее уравнение второго порядка:

$$y'' + \frac{y'^2}{y} + 3\,\frac{y'}{x} = 0. \tag{6.6.19}$$

Можно проверить, что его левая часть не удовлетворяет условию (6.6.5), и, следовательно, она не является полным дифференциалом. Вычислим интегрирующий множитель. Уравнение (6.6.19) имеет форму (6.6.16) при

$$a = 1, \quad b = \frac{y'^2}{y} + 3\,\frac{y'}{x}\cdot$$

Для упрощения будем искать интегрирующие множители вида $\mu = \mu(x, y)$. Составим уравнение (6.6.17): $2\mu_y - (\mu b)_{y'y'} = 0$. Поскольку $(\mu b)_{y'y'} = 2\mu/y$, мы получаем $\mu_y = \mu/y$, откуда $\mu = \phi(x)y$. Таким образом, мы имеем:

$$\mu = \phi(x)\,y, \quad \mu_{yy} = 0, \quad \mu_{xy} = \phi', \quad \mu_{xx} = \phi'' y, \quad \mu b = \phi y'^2 + 3\,\frac{\phi}{x}\,yy',$$

$$(\mu b)_y = 3\,\frac{\phi}{x}\,y', \quad (\mu b)_{yy'} = 3\,\frac{\phi}{x}, \quad (\mu b)_{xy'} = 2\phi' y' + 3\left(\frac{\phi'}{x} - \frac{\phi}{x^2}\right)y.$$

Подстановка в уравнение (6.6.18) приводит к следующему уравнению Эйлера:

$$x^2\phi'' - 3x\phi' + 3\phi = 0.$$

Интегрируя с помощью стандартной замены независимой переменной $t = \ln|x|$, мы получаем два независимых решения, $\phi = x$ и $\phi = x^3$. Таким образом, уравнение (6.6.19) допускает два интегрирующих множителя:

$$\mu_1 = xy, \quad \mu_2 = x^3 y \tag{6.6.20}$$

и может быть решено без дополнительного интегрирования (см. замечание 6.6.1).

Действительно, умножая уравнение (6.6.19) на первый интегрирующий множитель, мы имеем:

$$xy\left(y'' + \frac{y'^2}{y} + 3\,\frac{y'}{x}\right) = xyy'' + xy'^2 + 3yy' = 0.$$

Подставляя $xyy'' = D_x(xyy') - yy' - xy'^2$, мы приводим это к $D_x(xyy') + 2yy' = D_x(xyy' + y^2) = 0$, откуда

$$xyy' + y^2 = C_1. \tag{6.6.21}$$

Аналогично, второй интегрирующий множитель (6.6.20) дает:

$$x^3yy' = C_2. \tag{6.6.22}$$

Исключая y' из уравнений (6.6.21), (6.6.22), мы получаем следующее общее решение уравнения (6.6.19):

$$y = \pm\sqrt{C_1 - \frac{C_2}{x^2}}\ . \tag{6.6.23}$$

Приложение теста линеаризации (раздел 6.5.6) показывает, что уравнение (6.6.19) линеаризуемо. Следовательно, оно допускает 8-мерную алгебру Ли и поэтому может быть проинтегрировано групповым методом раздела 6.5.4. Рассмотрим теперь уравнение без симметрий.

Пример 6.6.5. Рассмотрим следующее нелинейное уравнение второго порядка:

$$y'' - \frac{1}{y}\,y'^2 - \frac{x + x^2}{y}\,y' + 2x + 1 = 0. \tag{6.6.24}$$

Можно убедиться, решая определяющие уравнения, что уравнение (6.6.24) не допускает точечных симметрий и, следовательно, не может быть проинтегрировано методом Ли. Поэтому попытаемся применить метод интегрирующих множителей. Уравнение (6.6.24) имеет форму (6.6.16) при

$$a = 1, \quad b = -\frac{y'^2}{y} - \frac{x + x^2}{y}\,y' + 2x + 1.$$

Для упрощения будем искать интегрирующий множитель, зависящий от двух переменных. Пусть, например, $\mu = \mu(x, y)$. Тогда уравнение (6.6.17) дает $\mu_y = -\mu/y$, откуда $\mu = p(x)/y$. Теперь уравнение (6.6.18) записывается в следующем виде:

$$\frac{2p}{y^3}\, y'^2 - \frac{2p'}{y^2}\, y' + \frac{p''}{y} + y' H_{yy'} + H_{xy'} - H_y = 0, \tag{6.6.25}$$

где

$$H = \frac{p}{y^2}\, y'^2 + (x + x^2)\, \frac{p}{y^2}\, y' - (2x+1)\, \frac{p}{y}\cdot$$

Расчет показывает, что уравнение (6.6.25) сводится к простому уравнению

$$\frac{p''(x)}{y} + (x + x^2)\, \frac{p'(x)}{y^2} = 0,$$

откуда, разделяя переменные, получаем $p'(x) = 0$, то есть $p = \text{const}$. Полагая $p = 1$, мы находим следующий интегрирующий множитель уравнения (6.6.24):

$$\mu = \frac{1}{y}\cdot$$

Умножая уравнение (6.6.24) на μ, имеем:

$$\frac{y''}{y} - \frac{1}{y^2}\, y'^2 - \frac{x + x^2}{y^2}\, y' + \frac{2x+1}{y} = 0. \tag{6.6.26}$$

Его левая часть может быть легко представлена в виде полного дифференциала. Действительно,

$$\frac{y''}{y} = D_x\left(\frac{y'}{y}\right) + \frac{y'^2}{y^2}, \quad -\frac{x + x^2}{y^2}\, y' = D_x\left(\frac{x + x^2}{y}\right) - \frac{1 + 2x}{y}$$

и уравнение (6.6.26) записывается в форме

$$D_x\left(\frac{y' + x + x^2}{y}\right) = 0. \tag{6.6.27}$$

Таким образом,

$$\frac{y' + x + x^2}{y} = C_1,$$

или

$$y' + x + x^2 = C_1\, y, \quad C_1 = \text{const}. \tag{6.6.28}$$

Интегрируя неоднородное линейное уравнение первого порядка (6.6.28), мы получаем следующее общее решение уравнения (6.6.24):

$$y = C_2\, e^{C_1 x} - e^{C_1 x}\int (x + x^2)\, e^{-C_1 x}\, dx, \quad C_1,\, C_2 = \text{const}. \tag{6.6.29}$$

Вычисляя интеграл в (6.6.29), можно выразить решение в элементарных функциях. А именно:

$$y = C_2 - \frac{1}{2}\, x^2 - \frac{1}{3}\, x^3, \tag{6.6.30}$$

если $C_1 = 0$, и

$$y = C_2\, e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1^3}\left[C_1^2 x^2 + (2 + C_1)C_1 x + 2 + C_1\right], \tag{6.6.31}$$

если $C_1 \neq 0$.

Пример 6.6.6. Рассмотрим следующую систему уравнений первого порядка:

$$F_1(x,y,z,y',z') \equiv xzy' - 2xyz' + yz = 0,$$

$$F_2(x,y,z,y',z') \equiv xy' + 2x^2zz' + 2xz^2 + y = 0. \tag{6.6.32}$$

Проверим условия (6.6.5). Подставляя $u^1 = y$, $u^2 = z$, имеем:

$$\frac{\delta F_1}{\delta y} = -3xz', \quad \frac{\delta F_1}{\delta z} = 3(y + xy').$$

Таким образом, $F_1(x,y,z,y',z')$ — не полная производная. С другой стороны,

$$\frac{\delta F_2}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta F_2}{\delta z} = 0,$$

и, следовательно, F_2 — полная производная. Действуя, как в примере 6.6.3, мы получаем:

$$F_2 = D_x(xy + x^2z^2). \tag{6.6.33}$$

Будем искать интегрирующий множитель для F_1 в форме $\mu = \mu(x,y,z)$. Расчет показывает, что первое уравнение из (6.6.5) записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{\delta(\mu F_1)}{\delta y} &= \frac{\partial(\mu F_1)}{\partial y} - D_x\left(\mu\,\frac{\partial F_1}{\partial y'}\right) = \\ &= -3xz'\mu - xz\mu_x + (yz - 2xyz')\mu_y - xzz'\mu_z = 0.\end{aligned}$$

Поскольку μ не зависит от z', уравнение расщепляется на два:

$$2y\mu_y + z\mu_z + 3\mu = 0, \quad x\mu_x - y\mu_y = 0.$$

Решая эту систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, мы получаем:

$$\mu = \frac{1}{z^3}\,\phi\left(\frac{xy}{z^2}\right), \tag{6.6.34}$$

где ϕ — произвольная функция. Можно проверить, что функция μ (6.6.34) является также решением второго уравнения из (6.6.5),

$$\frac{\delta(\mu F_1)}{\delta z} = \frac{\partial(\mu F_1)}{\partial z} - D_x\left(\mu\,\frac{\partial F_1}{\partial z'}\right) = 0,$$

и, следовательно, является интегрирующим множителем для F_1. Поскольку функция ϕ в (6.6.34) произвольна, положим $\phi = 1$, умножим F_1 на $\mu = z^{-3}$ и получим:

$$\mu F_1 = \frac{xy'}{z^2} - 2\,\frac{xyz'}{z^3} + \frac{y}{z^2} = D_x\left(\frac{xy}{z^2}\right). \tag{6.6.35}$$

Подставляя (6.6.33) и (6.6.35) в уравнения (6.6.32), мы находим следующие первые интегралы:

$$xy + x^2z^2 = C_1, \quad \frac{xy}{z^2} = C_2.$$

Разрешая их относительно y и z, мы получаем общее решение системы (6.6.32):

$$y = \frac{C_1 C_2}{x(C_2 + x^2)}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{C_1}{C_2 + x^2}}\ .$$

6.6.3. Линеаризация уравнений третьего порядка. Метод интегрирования Софуса Ли применим также к уравнениям высокого порядка (см., например, [41, 19, 10]). Однако наша цель в этом разделе — продемонстрировать возможности линеаризации, а не интегрировать уравнения высокого порядка.

Удобно представить линейное однородное уравнение общего вида (3.4.3) в следующей стандартной форме, содержащей биномиальные коэффициенты:

$$y^{(n)} + nc_1(x)\,y^{(n-1)} + \frac{n!\,c_2(x)}{(n-2)!\,2!}\,y^{(n-2)} + \cdots + nc_{n-1}(x)\,y' + c_n(x)\,y = 0. \tag{6.6.36}$$

В частности, это проявляется при вычислении инвариантов.

Преобразование эквивалентности для уравнений высокого порядка (3.4.3) проводится с помощью тех же самых преобразований (3.3.8), (3.3.9)

$$\overline{x} = \phi(x), \qquad \phi'(x) \neq 0,$$
$$y = \sigma(x)\,\overline{y}, \qquad \sigma \neq 0,$$

которые используются для уравнений второго порядка.

Аналог теоремы 3.3.1 для линейных уравнений высокого порядка был открыт в XIX столетии. А именно, Дж. Кокл в 1876 году и Э. Лагерр в 1879 году доказали для $n = 3$ и для произвольного n, соответственно, что два члена, имеющих порядки, следующие за наивысшим, могут быть одновременно исключены из любого уравнения (6.6.36). Их результат может быть сформулирован следующим образом (по поводу доказательства см. [40, раздел 10.2.1] и литературу, цитируемую в этой книге).

Теорема 6.6.3. Любое уравнение (6.6.36) может быть приведено к виду

$$y^{(n)} + \frac{n!\,c_3(x)}{3!\,(n-3)!}\,y^{(n-3)} + \cdots + nc_{n-1}(x)\,y' + c_n(x)\,y = 0 \tag{6.6.37}$$

с помощью подходящих преобразований эквивалентности (3.3.8), (3.3.9). Определение преобразований эквивалентности требует интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка независимо от порядка n уравнения (6.6.36).

Форма (6.6.37) называется *канонической формой Лагерра* линейного однородного уравнения n-го порядка. В частности, каноническая форма (6.6.37) уравнения третьего порядка есть

$$y''' + \alpha(x)\,y = 0. \tag{6.6.38}$$

Недавно мы [1]) нашли все линеаризуемые уравнения третьего порядка

$$y''' = f(x, y, y', y''). \tag{6.6.39}$$

Я сформулирую здесь общие теоремы о линеаризации уравнений третьего порядка и проиллюстрирую их на примерах. Будем использовать каноническую форму (6.6.38) линейных уравнений третьего порядка, получение которой гарантировано теоремой 6.6.3.

Лемма 6.6.5. Уравнения третьего порядка (6.6.39), полученные из линейного уравнения (6.6.38) заменой переменных (6.5.41) при $\varphi_y = 0$,

$$t = \varphi(x), \quad u = \psi(x, y), \tag{6.6.40}$$

принадлежат семейству уравнений вида

$$y''' + (A_1\, y' + A_0)\, y'' + B_3\, y'^3 + B_2\, y'^2 + B_1\, y' + B_0 = 0, \tag{6.6.41}$$

где $A_0 = A_0(x, y), \ldots,\ B_3 = B_3(x, y)$. Уравнения третьего порядка (6.6.39), полученные из линейного уравнения (6.6.38) с помощью замены переменных

$$t = \varphi(x, y), \quad u = \psi(x, y), \quad \text{где} \quad \varphi_y \neq 0, \tag{6.6.42}$$

принадлежат семейству уравнений вида

$$\begin{aligned} y''' + \frac{1}{y' + r} \Big[-3(y'')^2 + \Big(C_2\, y'^2 + C_1\, y' + C_0\Big)\, y'' +& \\ +\ D_5\, y'^5 + D_4\, y'^4 + D_3\, y'^3 + D_2\, y'^2 + D_1\, y' + D_0\Big] = 0,& \end{aligned} \tag{6.6.43}$$

где $C_0 = C_0(x, y), \ldots,\ D_5 = D_5(x, y)$ и $r = r(x, y)$.

Уравнения (6.6.41) и (6.6.43) с произвольными коэффициентами $A_0, \ldots, B_3$ и $C_0, \ldots, D_5$, соответственно, являются двумя *кандидатами на линеаризацию*.

Теорема 6.6.4. Уравнение (6.6.41) линеаризуемо, если и только если его коэффициенты удовлетворяют следующим уравнениям:

$$A_{0y} - A_{1x} = 0, \quad (3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x})_y = 0, \tag{6.6.44}$$

$$3B_2 = 3A_{1x} + A_0 A_1, \quad 9B_3 = 3A_{1y} + A_1^2, \tag{6.6.45}$$

$$27 B_{0yy} = (9B_1 - 6A_{0x} - 2A_0^2)\, A_{1x} + 9(B_{1x} - A_1\, B_0)_y + 3A_0 B_{1y}. \tag{6.6.46}$$

Предполагая, что условия (6.6.44)–(6.6.46) выполнены, линеаризующее преобразование (6.6.40) определяют с помощью обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка для функции $\varphi(x)$, а именно с помощью уравнения Риккати

$$6\, \frac{d\chi}{dx} - 3\chi^2 = 3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x} \tag{6.6.47}$$

для

$$\chi = \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \tag{6.6.48}$$

[1]) N. H. Ibragimov and S. V. Meleshko, *J. Math. Anal. Appl.*, 308 (1), 2005, 266–289.

и следующей интегрируемой системы дифференциальных уравнений с частными производными для $\psi(x,y)$:

$$3\psi_{yy} = A_1\,\psi_y, \qquad 3\psi_{xy} = (3\chi + A_0)\,\psi_y, \tag{6.6.49}$$

$$\psi_{xxx} = 3\chi\,\psi_{xx} + B_0\,\psi_y - \frac{1}{6}\left(3A_{0x} + A_0^2 - 3B_1 + 9\chi^2\right)\psi_x - \Omega, \tag{6.6.50}$$

где χ определяется с помощью (6.6.48), а Ω — следующее выражение:

$$\Omega = \frac{1}{6}\Big(A_{0xx} + 2A_0A_{0x} + 6B_{0y} - 3B_{1x} + \frac{4}{9}\,A_0^3 - 2A_0B_1 + 2A_1B_0\Big). \tag{6.6.51}$$

В итоге коэффициент α результирующего линейного уравнения (6.6.38) определяется выражением

$$\alpha = \Omega\,\varphi_x^{-3}. \tag{6.6.52}$$

Пример 6.6.7. Уравнение

$$y''' - \left(\frac{6}{y}\,y' + \frac{3}{x}\right)y'' + 6\left(\frac{y'^3}{y^2} + \frac{y'^2}{xy} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y}{x^3}\right) = 0 \tag{6.6.53}$$

имеет форму (6.6.41) и коэффициенты

$$A_1 = -\frac{6}{y},\ A_0 = -\frac{3}{x},\ B_3 = \frac{6}{y^2},\ B_2 = \frac{6}{xy},\ B_1 = \frac{6}{x^2},\ B_0 = \frac{6y}{x^3}\,\cdot \tag{6.6.54}$$

Нетрудно убедиться, что коэффициенты (6.6.54) удовлетворяют условиям (6.6.44)–(6.6.46). Мы имеем

$$3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x} = 0, \tag{6.6.55}$$

и уравнение (6.6.47) приобретает вид

$$2\,\frac{d\chi}{dx} - \chi^2 = 0.$$

Выберем его простейшее решение $\chi = 0$. Тогда, учитывая (6.6.48), положим $\varphi = x$. При этом уравнения (6.6.49) записываются так:

$$\frac{\partial \ln|\psi_y|}{\partial y} = -\frac{2}{y}, \qquad \frac{\partial \ln|\psi_y|}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

и дают

$$\psi_y = \frac{K}{xy^2}, \qquad K = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$\psi = -\frac{K}{xy} + f(x).$$

Можно выбрать другое частное решение. Например, положим $K = -1$, $f(x) = 0$ и получим

$$\psi = \frac{1}{xy}\,\cdot$$

Учитывая (6.6.55) и замечая, что (6.6.51) дает $\Omega = 0$, можно легко убедиться, что функция $\psi = 1/(xy)$ также является решением уравнения (6.6.50). Поскольку $\Omega = 0$, уравнение (6.6.52) дает $\alpha = 0$. Таким образом, преобразование

$$t = x, \quad u = \frac{1}{xy} \tag{6.6.56}$$

отображает уравнение (6.6.53) на линейное уравнение

$$u''' = 0.$$

Пример 6.6.8. Рассмотрим следующее уравнение вида (6.6.41):

$$y''' + \frac{3}{y}\, y'y'' - 3y'' - \frac{3}{y}\, y'^2 + 2y' - y = 0. \tag{6.6.57}$$

Легко убедиться, что его коэффициенты

$$A_1 = \frac{3}{y}, \quad A_0 = -3, \quad B_3 = 0, \quad B_2 = -\frac{3}{y}, \quad B_1 = 2, \quad B_0 = -y$$

удовлетворяют условиям линеаризации (6.6.44)–(6.6.46). Кроме того,

$$3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x} = -3,$$

и уравнение (6.6.47) записывается в виде

$$6\,\frac{d\chi}{dx} - 3\chi^2 = -3.$$

Возьмем его очевидное решение $\chi = 1$ и получим из (6.6.48) уравнение $\varphi'' = \varphi'$, откуда

$$\varphi = e^x.$$

Уравнения (6.6.49) имеют форму

$$\frac{\partial \ln|\psi_y|}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \psi_{xy} = 0$$

и могут быть легко решены. Выберем простейшее решение $\psi = y^2$ и получим следующую замену переменных (6.6.40):

$$t = e^x, \quad u = y^2. \tag{6.6.58}$$

Подставляя $\Omega = -2$ и $\varphi_x = e^x = t$ в уравнение (6.6.52), мы получаем $\alpha(t) = -2t^{-3}$.

Таким образом, уравнение (6.6.57) отображается преобразованием (6.6.58) на линейное уравнение

$$u''' - \frac{2}{t^3}\, u = 0. \tag{6.6.59}$$

Теорема 6.6.5. Уравнение (6.6.43),

$$y''' + \frac{1}{y' + r}\Big[-3(y'')^2 + \Big(C_2\, y'^2 + C_1\, y' + C_0\Big)\, y'' + \\ + D_5\, y'^5 + D_4\, y'^4 + D_3\, y'^3 + D_2\, y'^2 + D_1\, y' + D_0\Big] = 0,$$

линеаризуемо, если и только если его коэффициенты удовлетворяют следующим уравнениям:

$$C_0 = 6r\,\frac{\partial r}{\partial y} - 6\,\frac{\partial r}{\partial x} + r\,C_1 - r^2\,C_2, \tag{6.6.60}$$

$$6\,\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial y} + r\,\frac{\partial C_2}{\partial y} + C_2\,\frac{\partial r}{\partial y}, \tag{6.6.61}$$

$$\begin{aligned} 18D_0 = 3r^2 &\left[r\,\frac{\partial C_1}{\partial y} - 2\,\frac{\partial C_1}{\partial x} - r\,\frac{\partial C_2}{\partial x} + 3r^2\,\frac{\partial C_2}{\partial y} - 12\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}\right] - 54\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2 + \\ &+6r\left[3\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 15\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y} - 6r\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2 + (3C_1 - rC_2)\,\frac{\partial r}{\partial x}\right] + \\ &+r^2\left[9(rC_2 - 2C_1)\,\frac{\partial r}{\partial y} - 2C_1^2 + 2rC_1C_2 + 4r^2C_2^2 + \right. \\ &\left. + 18r^2D_4 - 72r^3D_5\right], \end{aligned} \tag{6.6.62}$$

$$\begin{aligned} 18D_1 = 9r^2\,&\frac{\partial C_1}{\partial y} - 12r\,\frac{\partial C_1}{\partial x} - 27r^2\,\frac{\partial C_2}{\partial x} + 33r^3\,\frac{\partial C_2}{\partial y} - 36r\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} + \\ &+ 18\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 6(3C_1 + 4rC_2)\,\frac{\partial r}{\partial x} - 3r(6C_1 + 7rC_2)\,\frac{\partial r}{\partial y} + \\ &+ 18r\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2 - 18\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y} - 4rC_1^2 - 2r^2C_1C_2 + 20\,r^3C_2^2 + \\ &+ 72r^3D_4 - 270\,r^4D_5, \end{aligned} \tag{6.6.63}$$

$$\begin{aligned} 9D_2 = 3r\,&\frac{\partial C_1}{\partial y} - 3\,\frac{\partial C_1}{\partial x} - 21r\,\frac{\partial C_2}{\partial x} + 21r^2\,\frac{\partial C_2}{\partial y} + 15C_2\,\frac{\partial r}{\partial x} - \\ &-15rC_2\,\frac{\partial r}{\partial y} - C_1^2 - 5rC_1C_2 + 14r^2C_2^2 + 54r^2D_4 - 180r^3D_5, \end{aligned} \tag{6.6.64}$$

$$3D_3 = 3r\,\frac{\partial C_2}{\partial y} - 3\,\frac{\partial C_2}{\partial x} - C_1C_2 + 2rC_2^2 + 12rD_4 - 30r^2D_5, \tag{6.6.65}$$

$$\begin{aligned} 54\,\frac{\partial D_4}{\partial x} = 18\,&\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} + 3C_2\,\frac{\partial C_1}{\partial y} - 72\,\frac{\partial^2 C_2}{\partial x\partial y} - 39C_2\,\frac{\partial C_2}{\partial x} + \\ &+ 18r\,\frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} - 3rC_2\,\frac{\partial C_2}{\partial y} + \Big(72\,\frac{\partial C_2}{\partial y} + 33C_2^2\Big)\,\frac{\partial r}{\partial y} + 108D_4\,\frac{\partial r}{\partial y} + \\ &+ 270D_5\,\frac{\partial r}{\partial x} + 378r\,\frac{\partial D_5}{\partial x} - 108r^2\,\frac{\partial D_5}{\partial y} - 540rD_5\,\frac{\partial r}{\partial y} + \\ &+ 36rC_1D_5 - 8rC_2^3 - 36rC_2D_4 + 108\,r^2C_2D_5 + 54\,rH, \end{aligned} \tag{6.6.66}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 3H\,\frac{\partial r}{\partial y} + r\,\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{6.6.67}$$

где

$$H = \frac{\partial D_4}{\partial y} - 2\,\frac{\partial D_5}{\partial x} - 3r\,\frac{\partial D_5}{\partial y} - 5D_5\,\frac{\partial r}{\partial y} - 2rC_2D_5 + \\ + \frac{1}{3}\left[\frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} + 2C_2\,\frac{\partial C_2}{\partial y} - 2C_1D_5 + 2C_2D_4\right] + \frac{4}{27}\,C_2^3. \qquad (6.6.68)$$

Если условия (6.6.60)–(6.6.67) удовлетворяются, преобразование (6.6.42),

$$t = \varphi(x,y), \quad u = \psi(x,y), \quad \varphi_y \neq 0,$$

отображающее уравнение (6.6.43) на линейное уравнение (6.6.38), является решением следующей совместной системы уравнений для функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = r\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,W + r\,\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad (6.6.69)$$

$$6\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} = 9\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left[15rD_5 - 3D_4 - C_2^2 - 3\,\frac{\partial C_2}{\partial y}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2, \qquad (6.6.70)$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = WD_5\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,y} + \frac{1}{6}\left[15rD_5 - C_2^2 - 3D_4 - 3\,\frac{\partial C_2}{\partial y}\right]\frac{\partial\psi}{\partial y} - \\ - \frac{1}{2}\,H\psi + 3\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-2}, \qquad (6.6.71)$$

где функция W определяется уравнениями

$$3\,\frac{\partial W}{\partial x} = \left[C_1 - rC_2 + 6\,\frac{\partial r}{\partial y}\right]W, \qquad 3\,\frac{\partial W}{\partial y} = C_2W. \qquad (6.6.72)$$

Коэффициент α результирующего линейного уравнения (6.6.38) определяется с помощью (ср. с (6.6.52))

$$\alpha = \frac{H}{2(\varphi_y)^3}, \qquad (6.6.73)$$

где H — функция (6.6.68).

Пример 6.6.9. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$y''' + \frac{1}{y'}\left[-3y''^2 - xy'^5\right] = 0. \qquad (6.6.74)$$

Оно имеет форму (6.6.43) со следующими коэффициентами:

$$r = 0, \qquad C_0 = C_1 = C_2 = 0, \\ D_0 = D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0, \qquad D_5 = -x. \qquad (6.6.75)$$

Проверим, выполняется ли для уравнения (6.6.74) тест линеаризации, используя теорему 6.6.5. Утверждается, что коэффициенты (6.6.75) удовлетворяют

уравнениям (6.6.60)–(6.6.66). Кроме того, уравнение (6.6.67) также выполняется, поскольку (6.6.68) дает
$$H = 2. \tag{6.6.76}$$

Таким образом, уравнение (6.6.74) линеаризуемо, и мы можем продолжить процесс линеаризации. Уравнения (6.6.72) записываются в виде
$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$
и дают $W = \text{const}$. Следовательно, уравнения (6.6.69) имеют вид
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -W\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
и, следовательно:
$$\varphi = \varphi(y), \quad \psi = -Wx\,\varphi'(y) + \omega(y). \tag{6.6.77}$$

После этого уравнения третьего порядка (6.6.70) и (6.6.71) дают обыкновенное дифференциальное уравнение
$$\varphi''' = \frac{3}{2}\,\frac{{\varphi''}^2}{\varphi'} \tag{6.6.78}$$
для $\varphi(y)$ и дифференциальное уравнение с частными производными
$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 3\,\frac{\varphi''}{\varphi'}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{3}{2}\,\frac{{\varphi''}^2}{{\varphi'}^2}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi - Wx\varphi' \tag{6.6.79}$$
для $\psi(x, y)$ соответственно. Используя выражение для ψ (6.6.77) и уравнение (6.6.78) для φ, мы сводим уравнение (6.6.79) к
$$3\,\frac{\varphi''}{\varphi'}\,\omega'' - \frac{3}{2}\,\frac{{\varphi''}^2}{{\varphi'}^2}\,\omega' - \omega - \omega''' = 0.$$

Очевидно, что мы можем выполнить уравнение (6.6.79), полагая $\omega(y) = 0$. Тогда построение преобразования линеаризации требует интегрирования уравнения (6.6.78), известного в литературе как уравнение Шварца. Его общее решение определяется прямыми линиями
$$\varphi = ky + l, \quad k, l = \text{const} \tag{6.6.80}$$
и гиперболами
$$\varphi = a + \frac{1}{b - cy}, \quad a, b, c = \text{const}. \tag{6.6.81}$$

Выберем простейшее решение $\varphi = y$ вида (6.6.80). Тогда (6.6.73) дает $\alpha = 1$. Кроме того, положим $W = -1$, $\omega = 0$ в (6.6.77) и получим замену переменных
$$t = y, \quad u = x, \tag{6.6.82}$$
приводящую (6.6.74) к следующему линейному уравнению:
$$u''' + u = 0. \tag{6.6.83}$$

6.7. Нелинейная суперпозиция

6.7.1. Введение. Софус Ли обладал экстраординарным геометрическим видением проблем, что упрощало аналитические расчеты и часто приводило его к новым теоретическим концепциям. Обобщение свойств линейных уравнений и связанная с ним теория Софуса Ли нелинейной суперпозиции, которая рассматривается в настоящем разделе, служат этому хорошим примером.

Напомним, что решение однородного линейного дифференциального уравнения с частными производными и интегрирование системы его характеристик (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) — эквивалентные задачи. Более того, любая система обыкновенных дифференциальных уравнений с n зависимыми переменными x^i,

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.7.1}$$

может рассматриваться как система характеристик дифференциального уравнения с частными производными с $n+1$ независимыми переменными, t и $x = (x^1, \ldots, x^n)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f^1(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + f^n(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x^n} = 0. \tag{6.7.2}$$

Софус Ли заметил, что классические теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = a_{i1}(t)\,x^1 + \cdots + a_{in}(t)\,x^n, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.7.3}$$

так же как ассоциированное дифференциальное уравнение с частными производными (6.7.2),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}(t)\,x^i\,\frac{\partial u}{\partial x^k} = 0, \tag{6.7.4}$$

обязаны тому факту, что n^2 операторов $X_{ik} = x^i\,\partial/\partial x^k$ генерируют непрерывную группу с n переменными x^i, а именно линейную однородную группу. Это наблюдение позволило ему поверить, что главные свойства линейных уравнений (6.7.3) могут быть обобщены на широкий класс нелинейных уравнений, имеющих форму *обобщенного разделения переменных*:

$$\frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\,\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\,\xi_r^i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.7.5}$$

считая, что на операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{6.7.6}$$

натянута конечномерная алгебра Ли. Коэффициенты $T_\alpha(t)$ являются произвольными функциями переменной t. Системы (6.7.5) рассматриваются совместно с эквивалентными линейными дифференциальными уравнениями с частными производными

$$A[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + [T_1(t)\, X_1 + \cdots + T_r(t)\, X_r]\, u = 0. \tag{6.7.7}$$

Софус Ли писал в 1893 году следующее (см. [9] и список литературы в этой книге):

«Я уже изложил общую теорию интегрирования уравнения $A[u]=0$. Теория основана, как я объяснил в "Общем учении о дифференциальных уравнениях, допускаемых конечной непрерывной группой" (*Mathematische Annalen*, 25(1), 1885, p. 128), на том факте, что можно найти общие интегралы систем (6.7.5), если известно определенное конечное число их частных решений

$$x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n), \ldots, \quad x_m = (x_m^1, \ldots, x_m^n). \tag{6.7.8}$$

Я добавлю, что выражения для общих решений $x = (x^1, \ldots, x^n)$ как функций количеств (6.7.8) получены путем решения соответствующих уравнений,

$$J_i(x^1, \ldots, x^n;\ \ x_1^1, \ldots, x_1^n;\ \ldots;\ \ x_m^1, \ldots, x_m^n) = C_i,$$

относительно $x^1, \ldots, x^n$, где J_i обозначают то, что называю инвариантами $m+1$ точек x^i, $x_1^i, \ldots,$ x_m^i по отношению к группе, генерируемой $X_1, \ldots, X_r$.

Е. Вессио, чьи недавние тезисы представляют такой важный прогресс в теории линейных дифференциальных уравнений, пришел к счастливой идее найти **все** обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие фундаментальной системой интегралов. Этой задачей также занимался Альф Гулдберг.

Это очень интересная задача — попытаться найти, вместе с Вессио и Гулдбергом, все системы (6.7.1), у которых общие решения $x = (x^1, \ldots, x^n)$ могут быть выражены только через m частных решений, а именно,

$$x^i = \varphi^i(x_1^1, \ldots, x_1^n;\ \ldots;\ \ x_m^1, \ldots, x_m^n;\ \ C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.7.9}$$

Поскольку эти авторы не нашли, однако, все мои системы (6.7.5), допускающие, по сути дела, требуемые свойства, мне кажется, что их исследования, должно быть, имеют пробел. Я полагаю, что эти авторы неявно ввели существенное ограничение, состоящее в том, что наиболее общие формулы (6.7.9) выводятся из заданной системы этих формул простой заменой произвольных постоянных.

Если я прав, мне посчастливилось первым доказать, строго и просто, что мои системы (6.7.5) — единственные, обладающие требуемыми свойствами».

6.7.2. Основная теорема о нелинейной суперпозиции. Вышеизложенная дискуссия приводит к следующему определению.

Определение 6.7.1. Говорят, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.7.1),

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

обладает *фундаментальной системой решений*, если ее общее решение может быть представлено в форме (6.7.9), включающей конечное число m

частных решений (6.7.8) и n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Выражение (6.7.9) общего решения называется *нелинейной суперпозицией*, а частные решения (6.7.8) образуют так называемую *фундаментальную систему решений* для уравнений (6.7.1).

Следующий результат, принадлежащий Ли (1893), позволяет выявить те уравнения (6.7.1), которые обладают фундаментальной системой решений.

Теорема 6.7.1. Уравнения (6.7.1) обладают фундаментальной системой решений, если и только если они имеют форму (6.7.5),

$$\frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\,\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\,\xi_r^i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где коэффициенты $\xi_\alpha^i(x)$ удовлетворяют тому условию, что на операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

натянута алгебра Ли L_r конечной размерности r. Число m необходимых частных решений (6.7.8) имеет оценку

$$nm \geqslant r. \tag{6.7.10}$$

Наконец, формулы суперпозиции (6.7.9)

$$x^i = \varphi^i(x_1^1, \ldots, x_1^n;\ \ldots;\ x_m^1, \ldots, x_m^n;\ C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

определяются явно n уравнениями

$$J_i(x^1, \ldots, x^n;\ x_1^1, \ldots, x_1^n;\ \ldots;\ x_m^1, \ldots, x_m^n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.7.11}$$

где J_i — функционально независимые (по отношению к x^i) инварианты $(m+1)$-точечного представления $V_\alpha = X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)}$ операторов (6.7.6). Иными словами, $J_i(x_1, \ldots, x_m)$ — решения уравнений

$$\xi_\alpha^i(x)\,\frac{\partial J}{\partial x^i} + \xi_\alpha^i(x_1)\,\frac{\partial J}{\partial x_1^i} + \cdots + \xi_\alpha^i(x_m)\,\frac{\partial J}{\partial x_m^i} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{6.7.12}$$

удовлетворяющие условию $\det \left\| \partial J_i / \partial x^k \right\| \neq 0$.

Доказательство (см. [9] и ссылки на литературу в этой книге). Пусть уравнения (6.7.1),

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

обладают фундаментальной системой решений. Формулы суперпозиции (6.7.9) могут быть записаны, при разрешении их относительно C_i, в форме

$$J_i(x^1, \ldots, x^n;\ x_1^1, \ldots, x_1^n;\ \ldots;\ x_m^1, \ldots, x_m^n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Дифференцируя эти тождества по t, получаем уравнения

$$\frac{\partial J_i}{\partial x^k}\,\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial J_i}{\partial x_1^k}\,\frac{dx_1^k}{dt} + \cdots + \frac{\partial J_i}{\partial x_m^k}\,\frac{dx_m^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда, с учетом (6.7.1):

$$f^k(t,x)\,\frac{\partial J_i}{\partial x^k}+f^k(t,x_1)\,\frac{\partial J_i}{\partial x_1^k}+\cdots+f^k(t,x_m)\,\frac{\partial J_i}{\partial x_m^k}=0. \tag{6.7.13}$$

Заметим, что уравнения (6.7.13) выполняются для любой системы $m+1$ решений

$$x=(x^1,\ldots,x^n),\quad x_1=(x_1^1,\ldots,x_1^n),\ldots,\quad x_m=(x_m^1,\ldots,x_m^n), \tag{6.7.14}$$

и, принимая в расчет, что начальные значения последних произвольны, заключаем, что (6.7.13) удовлетворяются тождественно относительно $nm+n+$ $+1$ переменных $x_1^i,\ldots,x_m^i$, x^i и t.

Далее введем оператор

$$Y=f^k(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{6.7.15}$$

и введем обозначения $Y^{(1)},\ldots,Y^{(m)}$ для операторов, получаемых из Y заменой x на $x_1,\ldots,x_m$ соответственно. Тогда уравнения (6.7.13) запишутся следующим образом:

$$Y(J_i)+Y^{(1)}(J_i)+\cdots+Y^{(m)}(J_i)=0,\quad i=1,\ldots,n.$$

Иначе говоря, линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$U(J)\equiv\Big[Y+Y^{(1)}+\cdots+Y^{(m)}\Big](J)=0 \tag{6.7.16}$$

должно иметь n независимых решений $J_1,\ldots,J_n$ (6.7.11), не зависящих от t. Здесь

$$U\equiv Y+Y^{(1)}+\cdots+Y^{(m)}=f^k(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x^k}+f^k(t,x_1)\,\frac{\partial}{\partial x_1^k}+\cdots+f^k(t,x_m)\,\frac{\partial}{\partial x_m^k}$$

— дифференциальный оператор с $nm+n$ переменными x^i, x_μ^i $(\mu=1,\ldots,m)$, которые удовлетворяют условиям (6.7.14). Переменная t, входящая в коэффициенты U, может рассматриваться как параметр.

Полагая, что t принимает ряд фиксированных значений t_σ, выделяем из (6.7.16) необходимое число линейных дифференциальных уравнений с частными производными, которые свободны от параметра t. Уравнения этого ряда содержат $J_1,\ldots,J_n$ в качестве общих решений, поскольку последние не зависят явно от параметра t, и, следовательно, являются решением уравнения (6.7.16) для любого t, например, для всех означенных величин $t=t_\sigma$. В соответствии с классической теорией систем дифференциальных уравнений первого порядка, ряд рассматриваемых уравнений может быть заменен системой конечного числа s независимых уравнений

$$U_\sigma(J)\equiv\Big[Y_\sigma+Y_\sigma^{(1)}+\cdots+Y_\sigma^{(m)}\Big](J)=0,\quad \sigma=1,\ldots,s, \tag{6.7.17}$$

где Y_σ и $Y_\sigma^{(\mu)}$ получаются подстановкой $t=t_\sigma$ в Y и $Y^{(\mu)}$, соответственно. Система (6.7.17) имеет по крайней мере $nm+n-s$ функционально независимых решений. С другой стороны, система n независимых решений уже существует, а именно $J_1, \ldots, J_n$. Следовательно, $nm + n - s \geqslant n$. Иными словами, число уравнений (6.7.17) имеет оценку $s \leqslant nm$. Заметим, что операторы U_σ полностью свободны от переменной t и что уравнение общего вида (6.7.16) должно быть следствием уравнений (6.7.17).

Кроме того, можно дополнить систему (6.7.17), добавив к операторам U_σ все независимые коммутаторы $[U_\sigma, U_\tau]$. Поскольку операторы $Y, Y^{(1)}, \ldots \ldots, Y^{(m)}$ содержат существенно различные типы переменных x, мы имеем:

$$[U_\sigma, U_\tau] = [Y_\sigma, Y_\tau] + [Y_\sigma^{(1)}, Y_\tau^{(1)}] + \cdots + [Y_\sigma^{(m)}, Y_\tau^{(m)}]. \tag{6.7.18}$$

Пусть результирующая полная система содержит r независимых уравнений:

$$V_\alpha(J) \equiv \left[X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)}\right](J) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{6.7.19}$$

где X_α и $X_\alpha^{(\mu)}$ — операторы типа Y_σ и $Y_\sigma^{(\mu)}$ соответственно. Аналогично, V_α удовлетворяют соотношениям, подобным (6.7.18):

$$[V_\alpha, V_\beta] = [X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha^{(1)}, X_\beta^{(1)}] + \cdots + [X_\alpha^{(m)}, X_\beta^{(m)}].$$

Заметим, что система (6.7.19) имеет по крайней мере n решений, а именно $J_1, \ldots, J_n$. Таким образом, как обсуждалось выше, $r \leqslant nm$. Поскольку система (6.7.19) является полной, она удовлетворяет соотношениям $[V_\alpha, V_\beta] = h_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma$ (по $\gamma = 1, \ldots, r$ предполагается суммирование):

$$[X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha^{(1)}, X_\beta^{(1)}] + \cdots + [X_\alpha^{(m)}, X_\beta^{(m)}] = h_{\alpha\beta}^\gamma (X_\gamma + X_\gamma^{(1)} + \cdots + X_\gamma^{(m)}),$$

откуда, разделяя переменные, имеем:

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^r h_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma; \quad [X_\alpha^{(\mu)}, X_\beta^{(\mu)}] = h_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Начнем с того, что коэффициенты $h_{\alpha\beta}^\gamma$ могут зависеть от всех $nm + n$ переменных (6.7.14). Однако в каждом из $m + 1$ окончательных уравнений $h_{\alpha\beta}^\gamma$ может содержать только один сорт n переменных. Это возможно, только если $h_{\alpha\beta}^\gamma$ свободны от всех $nm + n$ переменных, то есть если они являются константами $c_{\alpha\beta}^\gamma$. Таким образом, X_α удовлетворяют уравнениям

$$[X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, r, \tag{6.7.20}$$

и, следовательно, на них натянута алгебра Ли L_r размерности $r \leqslant nm$.

Поскольку s уравнений (6.7.17) содержатся в r уравнениях (6.7.19), их операторы линейно связаны следующим образом:

$$U_\sigma = h_\sigma^\beta V_\beta, \quad \sigma = 1, \ldots, s.$$

Здесь коэффициенты h_σ^β могут быть, на данный момент, только функциями переменных (6.7.14). Но мы можем использовать расширения (6.7.17) и (6.7.19) для U_σ и V_α, соответственно, и получить при этом $m + 1$ отдельных уравнений:

$$Y_\sigma = h_\sigma^\beta X_\beta; \quad Y_\sigma^{(\mu)} = h_\sigma^\beta X_\beta^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Отсюда следует, как и выше, что h_σ^β могут быть только константами C_σ^β. Таким образом, Y_σ — линейные комбинации X_β с постоянными коэффициентами:

$$Y_\sigma = C_\sigma^\beta X_\beta, \quad \sigma = 1, \ldots, s, \tag{6.7.21}$$

и, следовательно, принадлежат алгебре Ли, натянутой на операторы $X_1, \ldots$ $\ldots, X_r$.

Поскольку уравнение (6.7.16) с произвольным значением t является следствием уравнений (6.7.17), мы имеем $U = \omega_1 U_1 + \cdots + \omega_s U_s$, или, более подробно:

$$Y = \omega_1 Y_1 + \cdots + \omega_s Y_s; \quad Y^{(\mu)} = \omega_1 Y_1^{(\mu)} + \cdots + \omega_s Y_s^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Из последних уравнений следует, что все ω_σ свободны от переменных (6.7.14), $x,\ x_1, \ldots, x_m$, но могут зависеть от t. Таким образом, $Y = \omega_1(t)\,Y_1 + \cdots +$ $+\,\omega_s(t)\,Y_s$ или, учитывая (6.7.21):

$$Y = T_1(t)\,X_1 + \cdots + T_r(t)\,X_r. \tag{6.7.22}$$

Здесь X_α имеют форму (6.7.6) и, с учетом (6.7.20), на них натянута алгебра Ли L_r. Принимая во внимание определение (6.7.15) оператора Y, мы видим, что если уравнения $dx^i/dt = f^i(t, x)$ обладают фундаментальной системой решений, они имеют форму Ли (6.7.5):

$$\frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\,\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\,\xi_r^i(x).$$

Мы также получили оценку (6.7.10), $r \leqslant nm$.

Обратно, все решения в форме (6.7.5) удовлетворяют требуемому свойству. Действительно, можно выбрать число m так, чтобы оно было достаточно большим, таким, чтобы уравнение (6.7.16) или, в нашем случае, уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{r} T_\alpha(t) \left[X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)}\right](J) = 0$$

имело, по крайней мере, n решений $J_1, \ldots, J_n$, таких, чтобы они были функционально независимы (по отношению к $x^1, \ldots, x^n$) и не содержали t. Тогда уравнения

$$[X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)}](J) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{6.7.23}$$

при подходящем выборе m, являются независимыми. Кроме того, система (6.7.23), состоящая из r уравнений с $nm + n$ независимыми переменными, является полной благодаря соотношениям для коммутаторов (6.7.20). Она имеет $mn + n - r$ решений. Выбирая достаточно большое m, можно найти, по крайней мере, n решений

$$J_i(x^1, \ldots, x^n; \quad x_1^1, \ldots, x_1^n; \ldots; \quad x_m^1, \ldots, x_m^n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые функционально независимы по отношению к $x^1, \ldots, x^n$. Теперь можно обратить дифференцирование уравнений (6.7.13) и показать, что J_i сохраняют постоянные значения всякий раз, когда $mn + n$ переменных (6.7.14) являются решениями уравнений (6.7.5). Этим рассуждением завершается доказательство.

Замечание 6.7.1. Теорема 6.7.1 не исключает возможность того, что данная система уравнений (6.7.5) имеет несколько совершенно разных представлений (6.7.11) общего решения, а также разных чисел m содержащихся в них частных решений (6.7.8). См. приведенные ниже примеры 6.7.6 и 6.7.7.

Замечание 6.7.2. На алгебру Ли L_r, натянутую на операторы (6.7.6), мы будем ссылаться как на *алгебру Вессио–Гулдберга–Ли* уравнений (6.7.5).

6.7.3. Примеры нелинейной суперпозиции.

Пример 6.7.1. Рассмотрим одно однородное линейное уравнение $dx/dt = A(t)\,x$. Здесь $r = 1$ и $X = x\,d/dx$ (ср. с уравнением (6.7.3) при $n = 1$). Возьмем двухточечное представление V генератора X (см. (6.7.19) при $m = 1$):

$$V = x\,\frac{\partial}{\partial x} + x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}$$

и его инвариант $J(x, x_1) = x/x_1$. Уравнение (6.7.11) имеет вид $x/x_1 = C$. Следовательно, $m = 1$, и формула (6.7.9) дает линейное частное решение $x = Cx_1$. Условие (6.7.10) удовлетворяется как равенство.

Обобщением Ли (6.7.5) этого простейшего примера является уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{dt} = T(t)\,h(x).$$

Здесь $r = 1$ и $X = h(x)\,d/dx$. Выбирая двухточечное представление

$$V = h(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + h(x_1)\,\frac{\partial}{\partial x_1}$$

и интегрируя систему характеристик $dx/h(x) = dx_1/h(x_1)$, мы получаем инвариант $J(x, x_1) = H(x) - H(x_1)$, где $H(x) = \int \big(1/h(x)\big)\,dx$. Уравнение (6.7.11) имеет вид $H(x) - H(x_1) = C$. Следовательно, $m = 1$, и формула (6.7.9) образует нелинейную суперпозицию $x = H^{-1}\big(H(x_1) + C\big)$.

Пример 6.7.2. Неоднородное линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)$$

имеет форму (6.7.5) при $T_1 = B(t)$ и $T_2 = A(t)$. Алгебра Вессио–Гулдберга–Ли (6.7.6) есть L_2, натянутая на операторы

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x\,\frac{d}{dx}\,\cdot$$

Подставляя $n = 1$ и $r = 2$ в (6.7.10), $m \geqslant 2$, мы видим, что выражение (6.7.9) общего решения требует нахождения по крайней мере двух частных решений.

Фактически, этого числа достаточно. Тем не менее, выберем трехточечное представление (6.7.15) базисных операторов X_1 и X_2:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\,\frac{\partial}{\partial x_2}$$

и покажем, что они допускают один инвариант. Для его нахождения мы сначала решим систему характеристик для уравнения $V_1(J) = 0$, а именно $dx = dx_1 = dx_2$. Интегрирование дает два независимых инварианта, например $u = x - x_1$ и $v = x_2 - x_1$. Следовательно, общий инвариант $J(x, x_1, x_2)$ для двух операторов, V_1 и V_2 может быть получен выбором его в форме $J = J(u, v)$ и решением уравнения $\widetilde{V}_2\big(J(u, v)\big) = 0$, где действие V_2 ограничено пространством переменных u, v, с использованием формулы $\widetilde{V}_2 = V_2(u)\,\partial/\partial u + V_2(v)\,\partial/\partial v$. Замечая, что $V_2(u) = x - x_1 \equiv u$ и $V_2(v) = x_2 - x_1 \equiv v$, мы получаем:

$$\widetilde{V}_2 = u\,\frac{\partial}{\partial u} + v\,\frac{\partial}{\partial v}\,\cdot$$

Итак, инвариантом является $J(u, v) = u/v$, или, возвращаясь к исходным переменным, $J(x, x_1, x_2) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$. Таким образом, $m = 2$, и уравнение (6.7.11) имеет вид $(x - x_1)/(x_2 - x_1) = C$, или $(x - x_1) = C(x_2 - x_1)$. Формула (6.7.9) представляет собой линейную суперпозицию $x = x_1 + C(x_2 - - x_1) \equiv (1 - C)x_1 + Cx_2$.

Пример 6.7.3. Примером нелинейного уравнения с фундаментальной системой решений может служить уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)\,x + R(t)\,x^2. \tag{6.7.24}$$

Оно имеет лиеву форму (6.7.5) при $r = 3$ и допускает следующие операторы (6.7.6):

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x\,\frac{d}{dx}, \quad X_3 = x^2\,\frac{d}{dx}\,\cdot \tag{6.7.25}$$

На последние натянута алгебра Ли L_3 проективной группы. Оценка (6.7.10), $m \geqslant 3$, показывает, что выражение (6.7.9) требует, по крайней мере, трех частных решений. Убедимся, что этого числа ($m = 3$) достаточно для построения общего решения уравнения Риккати. А именно, выберем четырехточечное представление (6.7.15) операторов (6.7.25):

$$\begin{gathered} V_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad V_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\,\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\,\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ V_3 = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + x_1^2\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2\,\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2\,\frac{\partial}{\partial x_3} \end{gathered} \tag{6.7.26}$$

и покажем, что они допускают один инвариант, содержащий x. Чтобы найти его, мы поступим так же, как в примере 6.7.2. Система характеристик, ассоциированная с $V_1(J) = 0$, дает три инварианта, $u_1 = x_1 - x$, $u_2 = x_1 - x_2$ и $u_3 = x_3 - x_2$. Далее, мы ограничим V_2 этими инвариантами и получим

$$\widetilde{V}_2 = u_1\,\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\,\frac{\partial}{\partial u_2} + u_3\,\frac{\partial}{\partial u_3}\,\cdot$$

Это приводит к двум инвариантам, например:

$$v = \frac{u_2}{u_1} \equiv \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x}, \quad w = \frac{u_3}{u_2} \equiv \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2}\cdot$$

Наконец, замечая, что общий инвариант должен иметь форму $J(v, w)$, мы вычисляем V_3 в переменных v и w и получаем:

$$\widetilde{V}_3 = (x_1 - x_2)\left[(1 - v)\frac{\partial}{\partial v} + (w - 1)\, w\frac{\partial}{\partial w}\right]\cdot$$

Таким образом, уравнение $\widetilde{V}_3\big(J(v, w)\big) = 0$ эквивалентно

$$(1 - v)\frac{\partial J}{\partial v} + (w - 1)\, w\frac{\partial J}{\partial w} = 0.$$

Уравнение характеристик

$$\frac{dv}{1 - v} = \frac{dw}{w(w - 1)} \equiv \frac{dw}{w - 1} - \frac{dw}{w}$$

дает инвариант $J = (v - 1)(w - 1)/w$. Приравнивая этот инвариант произвольной константе и подставляя выражения v и w, мы получаем формулу нелинейной суперпозиции (3.2.17):

$$\frac{(x - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_1 - x)(x_2 - x_3)} = C.$$

Пример 6.7.4. Система двух однородных линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)\, x + a_{12}(t)\, y, \qquad \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)\, x + a_{22}(t)\, y \tag{6.7.27}$$

имеет форму (6.7.5) со следующими коэффициентами:

$$T_1 = a_{11}(t), \;\; T_2 = a_{12}(t), \;\; T_3 = a_{21}(t), \;\; T_4 = a_{22}(t),$$
$$\xi_1 = (x, 0), \quad \xi_2 = (y, 0), \quad \xi_3 = (0, x), \quad \xi_4 = (0, y).$$

Таким образом, алгебра Вессио–Гулдберга–Ли имеет размерность четыре и имеет линейную оболочку

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.7.28}$$

Оценка (6.7.10) записывается в виде $2m \geqslant 4$ и показывает, что требуется, по крайней мере, два ($m = 2$) частных решения. Вычисления показывают, что трехточечное представление операторов (6.7.28) дает как раз два инварианта:

$$J_1 = \frac{xy_2 - x_2y}{x_1y_2 - x_2y_1}, \quad J_2 = \frac{x_1y - xy_1}{x_1y_2 - x_2y_1}, \tag{6.7.29}$$

так что общее решение можно выразить в форме (6.7.11), содержащей два частных решения, (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Последние предполагаются линейно независимыми, и, следовательно, $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. Явная формула (6.7.9) общего решения находится с помощью решения уравнений $J_1 = C_1$, $J_2 = C_2$ относительно x и y и представляет собой линейную суперпозицию:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2, \quad y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

Пример 6.7.5. В случае двух неоднородных линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + b_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + b_2(t) \quad (6.7.30)$$

следует добавить к коэффициентам T_α и ξ_α предыдущего примера следующие:

$$T_5 = b_1(t), \quad \xi_5 = (1, 0); \qquad T_6 = b_2(t), \quad \xi_6 = (0, 1).$$

Таким образом, алгебра L_4 примера 6.7.4 расширяется до алгебры L_6 с линейной оболочкой

$$X_1 = x\,\frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = y\,\frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_3 = x\,\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_4 = y\,\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_5 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_6 = \frac{\partial}{\partial y}\,\cdot$$

Представление (6.7.9) определяется формулой линейной суперпозиции:

$$x = x_1 + C_1(x_2 - x_1) + C_2(x_3 - x_1), \; y = y_1 + C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1). \quad (6.7.31)$$

Пример 6.7.6. Софус Ли рассмотрел следующую систему линейных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,y + b_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = -a(t)\,x + b_2(t), \quad (6.7.32)$$

которая, в отличие от системы общего вида (6.7.30), требует знания только двух частных решений. Ли объясняет это тем, что операторы (6.7.6),

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y} \quad (6.7.33)$$

генерируют группу вращения и двух сдвигов на плоскости. Поскольку эта группа сохраняет все расстояния, три любых решения (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) связаны соотношениями

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = K_1, \qquad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = K_2. \quad (6.7.34)$$

Остановимся подробнее на этом примере, обсуждение которого раскроет преимущества использования инвариантов $m+1$ точек алгебры Вессио–Гулдберга–Ли. Оценка (6.7.10), $2m \geqslant 3$, определяет минимум $m = 2$ необходимых частных решений. Следовательно, мы выбираем трехточечное представление операторов (6.7.33):

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad V_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$V_3 = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y} + y_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\,\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\,\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\,\frac{\partial}{\partial y_2}\,\cdot$$

Базис общих инвариантов для V_1 и V_2 имеет вид

$$u_1 = x - x_1, \quad v_1 = y - y_1, \quad u_2 = x - x_2, \quad v_2 = y - y_2.$$

Ограничивая действие V_3 на эти инварианты, мы получаем инфинитезимальное синхронное вращение векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$:

$$\widetilde{V}_3 = v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial v_2} \cdot$$

Расчет показывает, что базовые инварианты этого вращения есть величины $|\mathbf{u}|$ и $|\mathbf{v}|$ и скалярное произведение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Возвращаясь к исходным переменным, мы окончательно приходим к следующим базовым инвариантам трех точек алгебры Вессио–Гулдберга–Ли (6.7.33):

$$\begin{aligned} &\psi_1 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \quad \psi_2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ &\psi_3 = (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2). \end{aligned}$$

Таким образом, общая нелинейная суперпозиция (6.7.11), содержащая два частных решения, (x_1, y_1) и (x_2, y_2), имеет вид:

$$J_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = K_1, \quad J_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = K_2, \quad K_i = \text{const}, \tag{6.7.35}$$

где J_1 и J_2 — произвольные функции трех переменных, такие, что их якобиан по переменным x, y не равен нулю тождественно. Последнее условие означает, что уравнения (6.7.35) могут быть решены относительно x и y. Полагая, например, $J_1 = \psi_1$ и $J_2 = \psi_2$, получаем представление Ли (6.7.34) общего решения. Другая простая нелинейная суперпозиция получается, если положить $J_1 = \psi_1$ и $J_2 = \psi_3$:

$$\begin{aligned} &(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = K_1, \\ &(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = K_3. \end{aligned} \tag{6.7.36}$$

Представления (6.7.34) и (6.7.36) общего решения дают две различные (то есть функционально независимые) нелинейные суперпозиции.

Таким образом, общее решение системы (6.7.32) может быть представлено в форме линейной суперпозиции (6.7.31) *трех* частных решений или, альтернативно, в форме нелинейной суперпозиции (6.7.35) *двух* частных решений.

Пример 6.7.7. Теорема 6.7.1 связана с любой алгеброй Ли системы дифференциальных уравнений, допускающих суперпозицию решений. Рассмотрим в качестве иллюстративного примера трехмерную алгебру с линейной облочкой

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} \cdot \tag{6.7.37}$$

Эта алгебра является трехмерной подалгеброй восьмимерной алгебры Ли проективной группы на плоскости. Соответственно, первое уравнение ассоциированной системы (6.7.5),

$$\frac{dx}{dt} = T_1(t) + 2T_2(t)x + T_3(t)\, x^2, \quad \frac{dy}{dt} = T_2(t)\, y + T_3(t)\, xy, \tag{6.7.38}$$

есть уравнение Риккати (6.7.24) при $P = T_1$, $Q = 2T_2$, $R = T_3$. На операторы (6.7.37) натянута алгебра Вессио–Гулдберга–Ли L_3 системы (6.7.38). Оценка

(6.7.10), $2m \geqslant 3$, определяет минимум $m = 2$ необходимых частных решений. Следовательно, мы выбираем трехточечное представление операторов (6.7.37):

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2},\\
V_2 &= 2x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + 2x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\,\frac{\partial}{\partial y_1} + 2x_2\,\frac{\partial}{\partial x_2} + y_2\,\frac{\partial}{\partial y_2},\\
V_3 &= x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y} + x_1^2\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 y_1\,\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2^2\,\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 y_2\,\frac{\partial}{\partial y_2}\,\cdot
\end{aligned}$$

Оператор V_1 дает пять инвариантов, y, y_1, y_2, $z_1 = x_1 - x$, $z_2 = x_2 - x_1$. Ограничения, накладываемые V_2 на эти инварианты, позволяют получить генератор растяжения

$$\widetilde{V}_2 = 2z_1\,\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\,\frac{\partial}{\partial z_2} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + y_1\,\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\,\frac{\partial}{\partial y_2}\,\cdot$$

Его независимые инварианты имеют вид

$$u_1 = \frac{z_2}{z_1}, \quad u_2 = \frac{y^2}{x_1 - x}, \quad u_3 = \frac{y_1^2}{x_1 - x}, \quad u_4 = \frac{y_2^2}{x_1 - x}\,\cdot$$

Таким образом, мы получаем базис общих инвариантов V_1 и V_2:

$$u_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x}, \quad u_2 = \frac{y^2}{x_1 - x}, \quad u_3 = \frac{y_1^2}{x_1 - x}, \quad u_4 = \frac{y_2^2}{x_1 - x}\,\cdot$$

Остается найти ограничение $\widetilde{V}_3$, налагаемое V_3 на эти инварианты:

$$\widetilde{V}_3 = V_3(u_1)\,\frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + V_3(u_4)\,\frac{\partial}{\partial u_4}\,\cdot$$

Расчет показывает, что

$$\begin{aligned}
V_3(u_1) &= \frac{(x_2 - x_1)(x - x_2)}{x - x_1} \equiv (x_1 - x)(1 + u_1)u_1,\\
V_3(u_2) &= -y^2 \equiv -(x_1 - x)u_2, \qquad V_3(u_3) = y_1^2 \equiv (x_1 - x)u_3,\\
V_3(u_4) &= \frac{x + x_1 - 2x_2}{x - x_1}\,y_2^2 \equiv (x_1 - x)(1 + 2u_1)u_4.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widetilde{V}_3 = (x_1 - x)\left((1 + u_1)u_1\,\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\,\frac{\partial}{\partial u_2} + u_3\,\frac{\partial}{\partial u_3} + (1 + 2u_1)u_4\,\frac{\partial}{\partial u_4}\right).$$

Следовательно, уравнение $\widetilde{V}_3\big(\psi(u_1, \ldots, u_4)\big) = 0$ эквивалентно

$$(1 + u_1)u_1\,\frac{\partial\psi}{\partial u_1} - u_2\,\frac{\partial\psi}{\partial u_2} + u_3\,\frac{\partial\psi}{\partial u_3} + (1 + 2u_1)u_4\,\frac{\partial\psi}{\partial u_4} = 0,$$

откуда, решая систему характеристик

$$\frac{du_1}{(1 + u_1)u_1} = -\frac{du_2}{u_2} = \frac{du_3}{u_3} = \frac{du_4}{(1 + 2u_1)u_4},$$

получаем три следующих независимых инварианта:

$$\psi_1 = u_2u_3 \equiv \frac{y^2y_1^2}{(x_1-x)^2}, \qquad \psi_2 = \frac{u_1u_2}{1+u_1} \equiv \frac{(x_2-x_1)\,y^2}{(x_1-x)(x_2-x)},$$
$$\psi_3 = \frac{u_4}{(1+u_1)u_1} \equiv \frac{(x_1-x)\,y_2^2}{(x_2-x_1)(x_2-x)}\,.$$

Итак, общая нелинейная суперпозиция (6.7.11), включающая два частных решения, (x_1, y_1) и (x_2, y_2), записывается в виде

$$J_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = C_1, \qquad J_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = C_2, \tag{6.7.39}$$

где J_1 и J_2 — произвольные функции трех переменных, таких, что их якобиан по x, y не равен нулю тождественно (ср. с примером 6.7.6). Полагая, например, $J_1 = \sqrt{\psi_1}$ и $J_2 = \sqrt{\psi_2\psi_3}$, т.е. выбирая (6.7.39) в виде

$$\frac{yy_1}{x_1-x} = C_1, \qquad \frac{yy_2}{x_2-x} = C_2,$$

мы приходим к следующему представлению общего решения на базе двух частных решений:

$$x = \frac{C_1x_1y_2 - C_2x_2y_1}{C_1y_2 - C_2y_1}, \qquad y = \frac{C_1C_2(x_2-x_1)}{C_1y_2 - C_2y_1}\,.$$

Напомним, что общее решение одного уравнения Риккати (6.7.24) требует знания *трех* частных решений. Примечательно, что когда то же самое уравнение Риккати интегрируется в системе, состоящей из двух уравнений (6.7.38), необходимо знать только *два* их частных решения!

Пример 6.7.8. Следующая система двух нелинейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = xy^2 - \frac{x}{2t}, \qquad \frac{dy}{dt} = x^2y - \frac{y}{2t} \tag{6.7.40}$$

возникает в нелинейной оптике (см. далее, раздел 7.2.6). Она имеет форму (6.7.5) с двумерной алгеброй Вессио–Гулдберга–Ли L_2, на которую натянуты

$$X_1 = xy^2\,\frac{\partial}{\partial x} + x^2y\,\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Оценка (6.7.10) записывается так: $m \geqslant 1$, следовательно, достаточно одного частного решения для нахождения выражения общего решения. Чтобы убедиться, что это возможно, найдем инварианты $J(x, y;\, x_1, x_2)$ двухточечного представления вышеуказанных операторов:

$$V_1 = xy^2\,\frac{\partial}{\partial x} + x^2y\,\frac{\partial}{\partial y} + x_1y_1^2\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2y_1\,\frac{\partial}{\partial y_1},$$
$$V_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,.$$

Так как $[X_1, X_2] = -2X_1$, и, следовательно, X_1 натянут на идеал L_2, легче начать вычисление с оператора V_1. Уравнения системы характеристик для $V_1(J) = 0$:

$$\frac{dx}{y^2x} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dx_1}{y_1^2x_1} = \frac{dy_1}{x_1^2y_1}$$

позволяют найти инварианты $z = x^2 - y^2$ и $z_1 = x_1^2 - y_1^2$ соответственно. Остается решить одно уравнение, например

$$\frac{dx}{x(x^2 - z)} = \frac{dx_1}{x_1(x_1^2 - z_1)},$$

где z и z_1 следует считать константами. Интегрирование дает третий инвариант,

$$z_2 = \frac{1}{z} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 - z}} - \frac{1}{z_1} \ln \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - z_1}}$$

или, после подстановки значений z и z_1,

$$z_2 = \frac{\ln x - \ln y}{x^2 - y^2} - \frac{\ln x_1 - \ln y_1}{x_1^2 - y_1^2}\,.$$

Далее, ограничение, накладываемое оператором V_2 на инварианты z, z_1, z_2,

$$\widetilde{V}_2 = 2\left(z\,\frac{\partial}{\partial z} + z_1\,\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\,\frac{\partial}{\partial z_2}\right),$$

легко дает два независимых инварианта, например,

$$J_1 = \frac{z}{z_1}, \quad J_2 = z z_2.$$

Подставляя в них z, z_1, z_2 и приравнивая результирующие выражения J_i к произвольным константам C_i, мы получаем следующую нелинейную суперпозицию (6.7.11) для системы (6.7.40):

$$J_1 \equiv \frac{x^2 - y^2}{x_1^2 - y_1^2} = C_1, \qquad J_2 \equiv \ln x - \ln y - \frac{x^2 - y^2}{x_1^2 - y_1^2}\,(\ln x_1 - \ln y_1) = C_2.$$

6.7.4. Интегрирование систем с применением нелинейной суперпозиции. Алгебра Вессио–Гулдберга–Ли составляет теоретическую основу новой общей теории интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих нелинейную суперпозицию [40].

Чтобы проиллюстрировать этот подход, рассмотрим простой случай системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= T_1(t)\,\xi_1^1(x, y) + T_2(t)\,\xi_2^1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= T_1(t)\,\xi_1^2(x, y) + T_2(t)\,\xi_2^2(x, y), \end{aligned} \tag{6.7.41}$$

допускающей двумерную алгебру Вессио–Гулдберга–Ли L_2, натянутую на операторы

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi_1^1(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi_1^2(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \xi_2^1(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2^2(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y}\,. \end{aligned} \tag{6.7.42}$$

Для решения системы (6.7.41) достаточно привести базисные операторы (6.7.42) и соответствующие уравнения (6.7.41) к стандартной форме, представленной в табл. 6.7.1 и полученной в соответствии с разделом 6.5.3.

Таблица 6.7.1

Стандартные формы операторов (6.7.42) и систем (6.7.41)

	Алгебра Вессио–Гулдберга–Ли	Каноническая форма (6.7.41)
I	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{dx}{dt} = T_1(t), \quad \dfrac{dy}{dt} = T_2(t)$
II	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\,\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{dx}{dt} = 0, \quad \dfrac{dy}{dt} = T_1(t) + T_2(t)\,x$
III	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\,\dfrac{\partial}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{dx}{dt} = T_2(t)\,x, \quad \dfrac{dy}{dt} = T_1(t) + T_2(t)\,y$
IV	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\,\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{dx}{dt} = 0, \quad \dfrac{dy}{dt} = T_1(t) + T_2(t)\,y$

Пример 6.7.9. Применим наш метод к интегрированию системы уравнений (6.7.40) из примера 6.7.8:

$$\frac{dx}{dt} = xy^2 - \frac{x}{2t}, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 y - \frac{y}{2t}\,\cdot$$

Алгебра Вессио–Гулдберга–Ли этой системы двумерна и имеет линейную оболочку

$$X_1 = xy^2\,\frac{\partial}{\partial x} + x^2\,y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot \tag{6.7.43}$$

Мы получаем:

$$[X_1, X_2] = -2X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = xy(y^2 - x^2) \neq 0.$$

Таким образом, на операторы (6.7.43) натянута алгебра L_2 типа III по классификации табл. 6.7.1.

Следовательно, мы можем преобразовать операторы (6.7.43), а также систему (6.7.40) к стандартной форме III табл. 6.7.1. Сначала найдем канонические переменные $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ для первого оператора (6.7.43) путем решения уравнений

$$X_1(\widetilde{x}) = 0, \quad X_1(\widetilde{y}) = 1.$$

Мы получаем:

$$\widetilde{x} = x^2 - y^2, \quad \widetilde{y} = \frac{\ln y - \ln x}{x^2 - y^2}\,\cdot \tag{6.7.44}$$

Можно убедиться, что переменные (6.7.44) фактически являются каноническими для нашей алгебры L_2. Действительно, операторы (6.7.43) записаны в форме, соответствующей типу III табл. 6.7.1:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}}, \quad X_2 = 2\left(\widetilde{x}\,\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} + \widetilde{y}\,\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}}\right).$$

Следовательно, переписывая уравнения (6.7.40) в новых переменных (6.7.44), получаем:

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = -\frac{\widetilde{x}}{t}, \quad \frac{d\widetilde{y}}{dt} = 1 + \frac{\widetilde{y}}{t}\,\cdot \tag{6.7.45}$$

Интегрирование уравнений (6.7.45) дает:

$$\widetilde{x} = \frac{C_1}{t}, \quad \widetilde{y} = C_2\, t + t\ln t. \tag{6.7.46}$$

Далее решаем уравнения (6.7.44) относительно x и y:

$$x = \sqrt{\frac{\widetilde{x}}{1 - e^{2\widetilde{x}\widetilde{y}}}}\,, \quad y = \sqrt{\frac{\widetilde{x}}{e^{-2\widetilde{x}\widetilde{y}} - 1}}\,,$$

подставляем в них решения (6.7.46) и окончательно приходим к следующему общему решению системы уравнений (6.7.40):

$$x = \sqrt{\frac{k}{t(1-\zeta^2)}}\,, \quad y = \zeta\sqrt{\frac{k}{t(1-\zeta^2)}}\,. \tag{6.7.47}$$

Здесь $\zeta = Ct^k$, где C и k — произвольные константы.

Задачи к главе 6

6.1. Проверить, допускает ли уравнение $y'' - y'^2 + xy = 0$ группу растяжений с генератором

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot$$

6.2. Найти наиболее общие решения уравнений первого и второго порядка, допускающих группы растяжений с генераторами

$$\text{а)}\quad X = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{б)}\quad X = y\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{в)}\quad X = x\,\frac{\partial}{\partial x}\,\cdot$$

6.3. Проверить, что уравнение третьего порядка

$$\mu^2\mu''' = \nu\left(2\mu\,\mu'' - \mu'^2\right), \quad \nu = \mathrm{const} \neq 0, \tag{P6.1}$$

где $\mu = \mu(x)$, допускает операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial}{\partial \mu},$$

и, используя эти симметрии, свести уравнение (P6.1) к уравнению первого порядка.

6.4. Вычислить инфинитезимальные симметрии уравнений второго порядка

$$\text{а)}\quad y'' + \frac{y'}{x} - e^y = 0 \quad \text{и} \quad \text{б)}\quad y'' - \frac{y'}{x} + e^y = 0. \tag{P6.2}$$

6.5. Проверить возможность линеаризации следующих уравнений второго порядка:

$$
\begin{array}{ll}
\text{а)}\ \ y'' = yy'^2 - xy'^3, & \text{б)}\ \ y'' + 3yy' + y^3 = 0, \\
\text{в)}\ \ y'' = 2\left(\dfrac{y'^2}{y} - \dfrac{xy'}{1+x^2}\right), & \text{г)}\ \ y'' = \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy}, \\
\text{д)}\ \ y'' + \dfrac{y'}{x} - e^y = 0, & \text{е)}\ \ y'' + \left(1 - \dfrac{xy'}{y}\right)^3 = 0.
\end{array} \tag{P6.3}
$$

6.6. Рассмотреть уравнение (6.5.6),

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy},$$

и второй оператор (6.5.7), допускаемый этим уравнением:

$$X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

а) Найти канонические переменные t, u, такие, что X_2 приобретает вид $X_2 = \partial/\partial t$.

б) Переписать уравнение (6.5.6) в переменных t, u, считая $u = u(t)$.

в) Понизить порядок полученного уравнения $u'' = \phi(u, u')$, используя подстановку $u' = p(u)$.

6.7. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + \frac{k}{\left(1 + \omega^2 x^2\right)^2}\, y = 0, \qquad k,\, \omega = \mathrm{const} \neq 0,$$

используя следующие две симметрии этого уравнения:

$$X_1 = (1 + \omega^2 x^2)\,\frac{\partial}{\partial x} + \omega^2 xy\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot$$

Записать решение для произвольных параметров k и ω и для частного случая $k = 3\omega^2$.

6.8. Пусть алгебра L_r имеет базис $X_1, \ldots, X_r$ и пусть $[X_i, X_j] \in L_r$ для всех i, j. Доказать, что $[X, Y] \in L_r$ для любых X, $Y \in L_r$ (ср. с определением 6.5.2).

6.9. Доказать, что преобразование (6.5.26) отображает уравнение (6.5.25) на $u'' = 0$.

6.10. Найти общую форму уравнений первого порядка, допускающих оператор

$$X = \sqrt{2}\, x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y},$$

и проинтегрировать их.

6.11. Найти общую форму дважды однородных уравнений первого порядка, т. е. уравнений $y' = f(x, y)$, допускающих два независимых оператора

$$X_1 = y\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x}\,\cdot$$

6.12. Найти общую форму дважды однородных уравнений второго порядка $y'' = f(x, y, y')$.

6.13. Проверить, что функция (6.5.34) удовлетворяет уравнению (6.5.33).

6.14. Проинтегрировать уравнение $y'' = xy' - 4y$. Вначале найти его частное полиномиальное решение, а затем применить методы раздела 6.5.5.

6.16. Проверить, что замена переменных $t = y$, $u = x^2 + y^2$ отображает уравнение $xy'' = y' + {y'}^3$ на линейное уравнение $u'' = 0$, и убедиться, что $x^2 + y^2 + Ay + B = 0$ является точным решением уравнения $xy'' = y' + {y'}^3$ (см. пример 6.5.11).

6.17. Проверить, что нелинейное уравнение

$$y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0$$

допускает алгебру L_2 с линейной оболочкой

$$X_1 = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xy\,\frac{\partial}{\partial x} + y^2\,\frac{\partial}{\partial y},$$

и проинтегрировать уравнение, используя его алгебру. Проверить, является ли приведенная выше алгебра L_2 максимальной алгеброй Ли, допускаемой рассматриваемым уравнением.

6.18. Решить следующие задачи с начальными условиями:

$$\text{а)}\quad y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1,$$

$$\text{б)}\quad y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0, \qquad y(1) = y'(1) = 0,$$

$$\text{в)}\quad y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

$$\text{г)}\quad y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0, \qquad y(2) = \sqrt{2}\,, \quad y'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{д)}\quad y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0, \qquad y(2) = 3\sqrt{2}\,, \quad y'(2) = \frac{7}{2\sqrt{2}}\,\cdot$$

6.19. Найти общее решение нелинейного уравнения (6.6.53):

$$y''' - \left(\frac{6}{y}\,y' + \frac{3}{x}\right)y'' + 6\left(\frac{{y'}^3}{y^2} + \frac{{y'}^2}{xy} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y}{x^3}\right) = 0.$$

6.20. Найти общее решение нелинейного уравнения (6.6.74):

$$y''' + \frac{1}{y'}\left[-3{y''}^2 - x{y'}^5\right] = 0.$$

Глава 7

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Эта глава содержит простые приложения групп Ли для нахождения точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Здесь также представлены основные теоремы сохранения.

Дополнительная литература: Овсянников Л.В. [21], Ames W.F. [31], Ибрагимов Н.Х. [8, 37–39], Олвер П. [22], Bluman G.W. and Kumei S. [32], Cantwell B.J. [33].

7.1. Симметрии

Определения однопараметрических групп и групп симметрии для дифференциальных уравнений с частными производными сохраняются такими же, как для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, в случае двух независимых переменных t, x и одной зависимой переменной u, преобразования (6.2.1) заменяются обратимыми преобразованиями переменных t, x, u:

$$\overline{t} = f(t, x, u, a), \quad \overline{x} = g(t, x, u, a), \quad \overline{u} = h(t, x, u, a), \tag{7.1.1}$$

а основные свойства группы (6.2.4), (6.2.5) заменяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{t}} &\equiv f(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}, b) = f(t, x, u, a + b), \\ \overline{\overline{x}} &\equiv g(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}, b) = g(t, x, u, a + b), \\ \overline{\overline{u}} &\equiv h(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}, b) = h(t, x, u, a + b). \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Таким образом, мы используем следующее определение.

Определение 7.1.1. Множество G обратимых преобразований (7.1.1) называется однопараметрической группой преобразований в пространстве переменных t, x, u, если G содержит тождественное преобразование $\overline{t} = t$, $\overline{x} = x$, $\overline{u} = u$, преобразования, обратные к заданным, и обладает групповым свойством (7.1.2).

7.1.1. Определение и вычисление групп симметрии. Сформулируем определение группы симметрии для дифференциальных уравнений с частными производными на примере эволюционных уравнений второго порядка:

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}), \quad \partial F/\partial u_{xx} \neq 0. \tag{7.1.3}$$

Определение 7.1.2. Уравнение (7.1.3) *допускает* однопараметрическую группу G преобразований (7.1.1), если уравнение (7.1.3) сохраняет свою форму в новых переменных $\overline{t}$, $\overline{x}$, $\overline{u}$, то есть

$$\overline{u}_{\overline{t}} = F(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}, \overline{u}_{\overline{x}}, \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}), \tag{7.1.4}$$

где функция F та же, что в уравнении (7.1.3). В этом случае G называется *группой симметрии* уравнения (7.1.3).

Построение группы симметрии G эквивалентно определению ее *инфинитезимальных преобразований*

$$\overline{t} \approx t + a\tau(t,x,u), \quad \overline{x} \approx x + a\xi(t,x,u), \quad \overline{u} \approx u + a\eta(t,x,u), \tag{7.1.5}$$

получаемых из (7.1.1) разложением в ряд Тейлора по групповому параметру a с сохранением только членов, линейных по a. Инфинитезимальное преобразование (7.1.5) характеризуется генератором группы G, то есть дифференциальным оператором

$$X = \tau(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7.1.6}$$

действующим на любую дифференцируемую функцию $J(t,x,u)$ следующим образом:

$$X(J) = \tau(t,x,u)\,\frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t,x,u)\,\frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t,x,u)\,\frac{\partial J}{\partial u}\,\cdot$$

Генератор (7.1.6) называется оператором, допускаемым уравнением (7.1.3), или *инфинитезимальной симметрией* уравнения (7.1.3).

Группа преобразований (7.1.1), соответствующая генератору (7.1.6), находится решением *уравнений Ли*

$$\frac{d\overline{t}}{da} = \tau(\overline{t},\overline{x},\overline{u}), \quad \frac{d\overline{x}}{da} = \xi(\overline{t},\overline{x},\overline{u}), \quad \frac{d\overline{u}}{da} = \eta(\overline{t},\overline{x},\overline{u}) \tag{7.1.7}$$

с начальными условиями:

$$\overline{t}\,\big|_{a=0} = t, \quad \overline{x}\,\big|_{a=0} = x, \quad \overline{u}\,\big|_{a=0} = u.$$

Вернемся к уравнению (7.1.4). Величины $\overline{u}_{\overline{t}}$, $\overline{u}_{\overline{x}}$ и $\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}$, входящие в (7.1.4), могут быть получены с помощью обычного правила замены производных с использованием уравнений (7.1.1) в качестве замены переменных. Тогда, раскладывая результирующие выражения $\overline{u}_{\overline{t}}$, $\overline{u}_{\overline{x}}$, $\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}$ в ряд Тейлора по параметру a, получаем инфинитезимальную форму этих выражений:

$$\begin{aligned} &\overline{u}_{\overline{t}} \approx u_t + a\zeta_0(t,x,u,u_t,u_x), \qquad \overline{u}_{\overline{x}} \approx u_x + a\zeta_1(t,x,u,u_t,u_x),\\ &\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} \approx u_{xx} + a\zeta_2(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}), \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

где ζ_0, ζ_1, ζ_2 определяются следующими *формулами продолжения*:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= D_t(\eta) - u_t\,D_t(\tau) - u_x\,D_t(\xi),\\ \zeta_1 &= D_x(\eta) - u_t\,D_x(\tau) - u_x\,D_x(\xi),\\ \zeta_2 &= D_x(\zeta_1) - u_{tx}\,D_x(\tau) - u_{xx}\,D_x(\xi). \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

Здесь D_t и D_x обозначено полное дифференцирование по t и x:

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_x},\\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\,\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\,\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\,\frac{\partial}{\partial u_x}. \end{aligned}$$

Подстановка (7.1.5) и (7.1.8) в уравнение (7.1.4) дает:

$$\overline{u}_{\overline{t}} - F(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}, \overline{u}_{\overline{x}}, \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}) \approx u_t - F(t, x, u, u_x, u_{xx}) + \\ + a\left(\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\,\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\,\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\,\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\,\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\,\tau\right).$$

Следовательно, с учетом (7.1.3) из уравнения (7.1.4) следует:

$$\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\,\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\,\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\,\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\,\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\,\tau = 0, \tag{7.1.10}$$

где u_t в ζ_0, ζ_1, ζ_2 заменено на $F(t, x, u, u_x, u_{xx})$.

Уравнение (7.1.10) определяет все инфинитезимальные симметрии уравнения (7.1.3) и вследствие этого называется *определяющим уравнением*. Принято соглашение записывать его в компактной форме

$$X[u_t - F(t, x, u, u_x, u_{xx})] = 0, \tag{7.1.11}$$

где X обозначает *продолжение* оператора (7.1.6) на первые и вторые производные:

$$X = \tau\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_0\,\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1\,\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\,\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\,\cdot$$

Определяющее уравнение (7.1.10) (или его эквивалент (7.1.11)) является линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка для неизвестных функций $\tau(t, x, u)$, $\xi(t, x, u)$, $\eta(t, x, u)$. Благодаря этому множество всех решений определяющего уравнения образует векторное пространство L. Более того, определяющее уравнение обладает следующим существенным и менее очевидным свойством. Векторное пространство L образует *алгебру Ли*, то есть оно замкнуто по отношению к *коммутатору*. Другими словами, алгебра L содержит, вместе с любыми операторами X_1, X_2, их коммутатор $[X_1, X_2]$, определяемый соотношением

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1.$$

В частности, если $L = L_r$ конечномерна и имеет базис $X_1, \ldots, X_r$, то

$$[X_\alpha, X_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma,$$

где $c^\gamma_{\alpha\beta}$ — постоянные коэффициенты, известные как *структурные константы* L_r.

Определяющее уравнение (7.1.10) должно удовлетворяться тождественно по t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}, рассматриваемым как шесть независимых переменных. Следовательно, определяющее уравнение расщепляется на систему нескольких уравнений. Как правило, это переопределенная система, поскольку содержит больше уравнений, чем три неизвестные функции τ, ξ и η. Следовательно, в практических приложениях определяющее уравнение может быть решено явно. Следующая предварительная лемма Софуса Ли упрощает вычисления.

Лемма 7.1.1. Для уравнения (7.1.3) преобразования симметрии (7.1.1) имеют форму

$$\overline{t} = f(t, a), \quad \overline{x} = g(t, x, u, a), \quad \overline{u} = h(t, x, u, a). \tag{7.1.12}$$

Это означает, что можно искать инфинитезимальные симметрии в форме

$$X = \tau(t)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}\cdot \tag{7.1.13}$$

Доказательство. Выделим в определяющем уравнении (7.1.10) члены, содержащие u_{tx}. Формулы продолжения (7.1.9) показывают, что u_{tx} содержится только в ζ_2, а именно, в его члене $u_{tx}\,D_x(\tau)$. Поскольку уравнение (7.1.10) выполняется тождественно по t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}, мы имеем $D_x(\tau) \equiv \tau_x + u_x\tau_u = 0$. Следовательно, $\tau_x = \tau_u = 0$, то есть $\tau = \tau(t)$, и оператор (7.1.6) имеет форму (7.1.13).

Пример 7.1.1. Вычислим симметрии следующего нелинейного уравнения, известного как уравнение Бюргерса:

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \tag{7.1.14}$$

Согласно лемме 7.1.1, мы будем искать инфинитезимальные симметрии в форме (7.1.13). Для операторов (7.1.13) формулы продолжения (7.1.9) дают:

$$\begin{gathered}\zeta_0 = D_t(\eta) - u_x\,D_t(\xi) - \tau'(t)\,u_t, \qquad \zeta_1 = D_x(\eta) - u_x\,D_x(\xi),\\ \zeta_2 = D_x(\zeta_1) - u_{xx}\,D_x(\xi) \equiv D_x^2(\eta) - u_x\,D_x^2(\xi) - 2u_{xx}\,D_x(\xi).\end{gathered} \tag{7.1.15}$$

В нашем примере определяющее уравнение (7.1.10) имеет вид

$$\zeta_0 - \zeta_2 - u\zeta_1 - \eta u_x = 0, \tag{7.1.16}$$

где ζ_0, ζ_1 и ζ_2 даны формулами (7.1.15). Выделим и приравняем нулю члены с u_{xx}. Учитывая, что u_t должно быть заменено на $u_{xx} + uu_x$ и подставляя в ζ_2 выражения

$$\begin{gathered}D_x^2(\xi) = D_x(\xi_x + \xi_u\,u_x) = \xi_u\,u_{xx} + \xi_{uu}\,u_x^2 + 2\xi_{xu}\,u_x + \xi_{xx},\\ D_x^2(\eta) = D_x(\eta_x + \eta_u\,u_x) = \eta_u\,u_{xx} + \eta_{uu}\,u_x^2 + 2\eta_{xu}\,u_x + \eta_{xx},\end{gathered} \tag{7.1.17}$$

мы приходим к следующему уравнению:

$$2\xi_u\,u_x + 2\xi_x - \tau'(t) = 0.$$

Оно расщепляется на два уравнения, а именно $\xi_u = 0$ и $2\xi_x - \tau'(t) = 0$. Первое уравнение показывает, что ξ зависит только от t, x, и интегрирование второго уравнения дает

$$\xi = \frac{1}{2}\,\tau'(t)\,x + p(t). \tag{7.1.18}$$

Из (7.1.18) следует, что $D_x^2(\xi) = 0$. После этого определяющее уравнение (7.1.16) сводится к следующему:

$$u_x^2\,\eta_{uu} + \left[\frac{1}{2}\,\tau'(t)\,u + \frac{1}{2}\,\tau''(t)\,x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta\right]u_x + u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0$$

и расщепляется на три уравнения:

$$\begin{gathered}\eta_{uu} = 0, \qquad u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0,\\ \frac{1}{2}\,\tau'(t)\,u + \frac{1}{2}\,\tau''(t)\,x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta = 0.\end{gathered} \tag{7.1.19}$$

17*

Первое уравнение (7.1.19) дает $\eta = \sigma(t,x)\,u + \mu(t,x)$, а третье уравнение (7.1.19) становится:

$$\left(\frac{1}{2}\,\tau'(t) + \sigma\right)u + \frac{1}{2}\,\tau''(t)\,x + p'(t) + 2\sigma_x + \mu = 0,$$

откуда

$$\sigma = -\frac{1}{2}\,\tau'(t), \qquad \mu = -\frac{1}{2}\,\tau''(t)\,x - p'(t).$$

Таким образом, мы имеем

$$\eta = -\frac{1}{2}\,\tau'(t)\,u - \frac{1}{2}\,\tau''(t)\,x - p'(t). \tag{7.1.20}$$

Окончательно, подстановка (7.1.20) во второе уравнение (7.1.19) дает

$$\frac{1}{2}\,\tau'''(t)\,x + p''(t) = 0,$$

откуда $\tau'''(t) = 0$, $p''(t) = 0$, и, следовательно,

$$\tau(t) = C_1t^2 + 2C_2t + C_3, \qquad p(t) = C_4t + C_5.$$

Учитывая (7.1.18) и (7.1.20), мы окончательно приходим к следующему общему решению определяющего уравнения (7.1.16):

$$\begin{aligned}
\tau &= C_1t^2 + 2C_2t + C_3,\\
\xi &= C_1tx + C_2x + C_4t + C_5,\\
\eta &= -(C_1t + C_2)u - C_1x - C_4.
\end{aligned}$$

Оно содержит пять произвольных постоянных C_i. Это означает, что инфинитезимальные симметрии уравнения Бюргерса (7.1.14) образуют пятимерную алгебру Ли с линейной оболочкой, состоящей из следующих линейно независимых операторов:

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = t\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u},\\
X_4 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t^2\,\frac{\partial}{\partial t} + tx\,\frac{\partial}{\partial x} - (x + tu)\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cdot
\end{gathered} \tag{7.1.21}$$

7.1.2. Групповые преобразования решений. Любое преобразование симметрии дифференциального уравнения переводит любое решение дифференциального уравнения в решение. Это означает, что, аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений, решения дифференциальных уравнений с частными производными перемешиваются между собой при действии группы симметрии. Часть решений может также переходить в себя, тогда их называют *инвариантными решениями*. В соответствии с этим групповой анализ предусматривает два основных пути построения точных решений: *групповые преобразования* известных решений и построение *инвариантных решений*.

В этом разделе на примере линейного уравнения теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$ иллюстрируется метод групповых преобразований решений.

Пример нелинейного уравнения, а именно уравнения Бюргерса, рассмотрен в разделе 7.2.2.

Метод основан на том факте, что преобразования группы переводят любое решение рассматриваемого уравнения в решение того же самого уравнения. А именно, пусть (7.1.1) — группа преобразований симметрии уравнения (7.1.3), и пусть функция

$$u = \Phi(t, x)$$

является решением уравнения (7.1.3). Поскольку (7.1.1) — преобразование симметрии, то это решение может также быть представлено в новых переменных:

$$\overline{u} = \Phi(\overline{t}, \overline{x}).$$

Подставляя в это решение $\overline{u}$, $\overline{t}$, $\overline{x}$ из (7.1.1), мы получаем

$$h(t, x, u, a) = \Phi\big(f(t, x, u, a), g(t, x, u, a)\big). \tag{7.1.22}$$

Имея решение уравнения (7.1.22) относительно u, мы получаем однопараметрическое семейство новых решений уравнения (7.1.3).

Инфинитезимальные симметрии линейного уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{7.1.23}$$

допускают бесконечномерную алгебру с генератором

$$X_\tau = \tau \, \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau = \tau(t, x)$ — произвольное решение уравнения (7.1.23), и шестимерную алгебру Ли, натянутую на операторы (см. задачу 7.2)

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = u\,\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 = 2t\,\frac{\partial}{\partial x} - xu\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = t^2\,\frac{\partial}{\partial t} + tx\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}\,(2t + x^2)\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\,. \end{gathered} \tag{7.1.24}$$

Рассмотрим, например, оператор X_5. Он генерирует *представление теплопроводности преобразования Галилея*:

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x + 2at, \quad \overline{u} = ue^{-(ax + a^2 t)}. \tag{7.1.25}$$

Любое решение $u = \Phi(t, x)$ уравнения теплопроводности может быть переведено в новое решение преобразованием (7.1.25). Поскольку уравнение теплопроводности является инвариантом при этом преобразовании, мы запишем его в форме $\overline{u}_{\overline{t}} - \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} = 0$, используя переменные $\overline{t}$, $\overline{x}$, $\overline{u}$, и выберем решение в тех же переменных:

$$\overline{u} = \Phi(\overline{t}, \overline{x}).$$

Подставим в него выражения (7.1.25) для $\overline{t}$, $\overline{x}$, $\overline{u}$ и, разрешая результирующее уравнение

$$ue^{-(ax + a^2 t)} = \Phi(t, x + 2at)$$

относительно u, получим новое решение:

$$u = e^{ax + a^2 t}\,\Phi(t, x + 2at), \tag{7.1.26}$$

содержащее параметр a.

Упражнение 7.1.1. Получим решения уравнения теплопроводности с помощью преобразования (7.1.25) и формулы (7.1.26), применяя их к следующим двум простым решениям:

$$\text{а)}\ \ u = 1, \qquad \text{б)}\ \ u = x.$$

Решение. а) Подставляя $\overline{u} = 1$ в (7.1.25), то есть полагая

$$ue^{-(ax+a^2t)} = 1,$$

мы получаем следующее новое решение (7.1.26):

$$u = e^{ax+a^2t}.$$

Тот же результат получается из (7.1.26), если принять $\Phi(t, x + 2at) = 1$.

б) Подставляя $\overline{u} = \overline{x}$ в (7.1.25), то есть полагая

$$ue^{-(ax+a^2t)} = x + 2at,$$

мы получаем следующее новое решение (7.1.26):

$$u = (x + 2at)\, e^{ax+a^2t}.$$

Тот же результат получается из (7.1.26), если положить $\Phi(t, x + 2at) = x + 2at$.

7.2. Групповые инвариантные решения

7.2.1. Введение. Если преобразование группы отображает решение в себя, мы приходим к так называемому *самоподобному* или *групповому инвариантному решению*. Рассмотрим, например, эволюционные уравнения (7.1.3). Выберем инфинитезимальную симметрию (7.1.6) уравнения (7.1.3) и получим инвариантное решение, соответствующее однопараметрической группе, генерируемой X, следующим образом. Можно вычислить два независимых *инварианта* $J_1 = \lambda(t, x)$ и $J_2 = \mu(t, x, u)$ с помощью решения уравнения

$$X(J) \equiv \tau(t, x, u)\, \frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t, x, u)\, \frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t, x, u)\, \frac{\partial J}{\partial u} = 0,$$

или его системы характеристик:

$$\frac{dt}{\tau(t, x, u)} = \frac{dx}{\xi(t, x, u)} = \frac{du}{\eta(t, x, u)}\,. \tag{7.2.1}$$

Тогда можно представить один инвариант как функцию другого, например

$$\mu = \phi(\lambda), \tag{7.2.2}$$

и решить уравнение (7.2.2) относительно u. Наконец, следует подставить выражение для u в уравнение (7.1.3) и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции одной переменной $\phi(\lambda)$. Эта процедура уменьшает число независимых переменных, оставляя всего одну.

Упражнение 7.2.1. Найти инвариантное решение уравнения теплопроводности (7.1.23), соответствующее группе (7.1.25) с генератором (7.1.24):

$$X = 2t\,\frac{\partial}{\partial x} - xu\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cdot$$

Решение. Генератор X формирует два независимых инварианта. Один из них есть t, а другой получается из уравнения характеристик

$$\frac{dx}{2t} + \frac{du}{xu} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x\,dx}{2t} + \frac{du}{u} = 0.$$

Интегрирование последнего уравнения дает инвариант

$$J = u\,e^{x^2/(4t)}.$$

Следовательно, инвариантное решение можно находить в виде $J = \phi(t)$ или

$$u = \phi(t)\,e^{-x^2/(4t)}.$$

Подставим это выражение в уравнение теплопроводности и получим:

$$u_t = \left(\phi' + \frac{x^2}{4t^2}\,\phi\right) e^{-x^2/(4t)}, \quad u_x = -\frac{x}{2t}\,\phi\,e^{-x^2/(4t)},$$

$$u_{xx} = \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)\phi\,e^{-x^2/(4t)}.$$

Тем самым дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка $u_t - u_{xx} = 0$ свелось к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\phi}{dt} + \frac{\phi}{2t} = 0.$$

Отсюда следует $\phi(t) = C/\sqrt{t}$, $C = \text{const}$. Таким образом, инвариантное решение имеет вид

$$u = \frac{C}{\sqrt{t}}\,e^{-x^2/(4t)}.$$

7.2.2. Уравнение Бюргерса. Из примера 7.1.1 раздела 7.1.1 мы знаем, что уравнение Бюргерса (7.1.14), $u_t = u_{xx} + uu_x$, имеет пять инфинитезимальных симметрий (7.1.21):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = t\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_5 = t^2\,\frac{\partial}{\partial t} + tx\,\frac{\partial}{\partial x} - (x + tu)\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cdot$$

Рассмотрим, например, генератор X_5 из (7.1.21). Уравнения Ли имеют вид

$$\frac{d\bar t}{da} = \bar t^2, \quad \frac{d\bar x}{da} = \bar t\,\bar x, \quad \frac{d\bar u}{da} = -(\bar x + \bar t\,\bar u).$$

Интегрирование этих уравнений дает:

$$\bar t = \frac{t}{1 - at}, \qquad \bar x = \frac{x}{1 - at} \tag{7.2.3}$$

и
$$\overline{u} = (1 - at)\, u - ax. \tag{7.2.4}$$

Подставляя преобразования (7.2.3), (7.2.4) в уравнение (7.1.22), мы отображаем любое известное решение $u = \Phi(t, x)$ уравнения Бюргерса на следующее однопараметрическое множество новых решений:
$$u = \frac{ax}{1 - at} + \frac{1}{1 - at}\, \Phi\left(\frac{t}{1 - at},\ \frac{x}{1 - at}\right). \tag{7.2.5}$$

Пример 7.2.1. Можно указать много примеров того, как, выбрав начальное решение $u = \Phi(t, x)$, получают любое инвариантное решение. Возьмем, например, инвариантное решение, соответствующее пространственному сдвигу, генерируемому X_2 из (7.1.21). В этом случае инвариантами являются $\lambda = t$ и $\mu = u$, и уравнение (7.2.2) записывается $u = \phi(t)$. Подстановка в уравнение Бюргерса дает очевидное решение в виде константы $u = k$. Оно отображается с помощью (7.2.5) на следующее однопараметрическое множество решений:
$$u = \frac{k + ax}{1 - at}\,.$$

Пример 7.2.2. Один из физически существенных типов решений получается в предположении инвариантности при действии группы сдвига по времени, генерируемой X_1. Это предположение приводит к стационарному решению
$$u = \Phi(x),$$
для которого уравнение Бюргерса дает
$$\Phi'' + \Phi\Phi' = 0. \tag{7.2.6}$$
Интегрируем один раз:
$$\Phi' + \frac{\Phi^2}{2} = C_1,$$
и интегрируем повторно, подставляя $C_1 = 0$, $C_1 = \nu^2 > 0$, $C_1 = -\omega^2 < 0$, получая:
$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{2}{x + C}, \\ \Phi(x) &= \nu \operatorname{th}\left(C + \frac{\nu}{2}\, x\right), \\ \Phi(x) &= \omega \operatorname{tg}\left(C - \frac{\omega}{2}\, x\right). \end{aligned} \tag{7.2.7}$$
Преобразование Галилея $\overline{t} = t$, $\overline{x} = x + at$, $\overline{u} = u - a$, генерируемое X_3, отображает стационарные решения (7.2.7) в бегущие волны $u = f(x - ct)$.

Пример 7.2.3. Если применить преобразование (7.2.5) к стационарным решениям (7.2.7), то получаем новые нестационарные решения:
$$\begin{aligned} u &= \frac{ax}{1 - at} + \frac{2}{x + C(1 - at)}, \\ u &= \frac{1}{1 - at}\left[ax + \nu \operatorname{th}\left(C + \frac{\nu x}{2(1 - at)}\right)\right], \\ u &= \frac{1}{1 - at}\left[ax + \omega \operatorname{tg}\left(C - \frac{\omega x}{2(1 - at)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Пример 7.2.4. Найдем инвариантные решения для проективной группы, генерируемой X_5. Система характеристик

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{tx} = -\frac{du}{x + tu}$$

дает инварианты $\lambda = x/t$ и $\mu = x + tu$. Таким образом, общее выражение (7.2.2) для инвариантных решений принимает форму

$$u = -\frac{x}{t} + \frac{1}{t}\,\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{t}\cdot \tag{7.2.9}$$

Подставляя это выражение в уравнение Бюргерса (7.1.14), получаем для $\Phi(\lambda)$ в точности уравнение (7.2.6). Таким образом, его общее решение получается из (7.2.7), где x заменено на λ. Соответствующие инвариантные решения получаются подстановкой в (7.2.9) результирующих выражений для $\Phi(\lambda)$. Например, используя для $\Phi(\lambda)$ вторую формулу (7.2.7), полагая в ней $\nu = \pi$, мы получаем решение

$$u = -\frac{x}{t} + \frac{\pi}{t}\,\mathrm{th}\left(C + \frac{\pi x}{2t}\right). \tag{7.2.10}$$

Оно важно в нелинейной акустике и было установлено Р.В. Хохловым в 1961 году из физических соображений.

Пример 7.2.5. Инвариантные решения для группы растяжений, генерируемой X_4, приводят к тому, что в физике называют *решениями подобия*, поскольку они связаны с анализом размерности. Система характеристик

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = -\frac{du}{u}$$

дает следующие инварианты: $\lambda = x/\sqrt{t}$, $\mu = \sqrt{t}\,u$. Следовательно, инвариантные решения можно искать в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

что приводит к следующему уравнению для решений подобия уравнения Бюргерса:

$$\Phi'' + \Phi\Phi' + \frac{1}{2}\,(\lambda\Phi' + \Phi) = 0. \tag{7.2.11}$$

Интегрируя один раз, имеем:

$$\Phi' + \frac{1}{2}\,(\Phi^2 + \lambda\Phi) = C.$$

Полагая $C = 0$, получаем решение (найденное в физике О.В. Руденко)

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\,\frac{e^{-x^2/(4t)}}{B + \mathrm{erf}\big(x/(2\sqrt{t}\,)\big)},$$

где B — произвольная константа, а

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$$

— функция ошибки.

7.2.3. Нелинейная задача с граничными условиями. Рассмотрим следующее нелинейное уравнение

$$\Delta u = e^u, \tag{7.2.12}$$

где $u = u(x, y)$ и $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ — лапласиан с двумя независимыми переменными. Уравнение (7.2.12) допускает оператор

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} - 2\xi_x \frac{\partial}{\partial u}, \tag{7.2.13}$$

где $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ — произвольные решения системы Коши–Римана

$$\xi_x - \eta_y = 0, \quad \xi_y + \eta_x = 0. \tag{7.2.14}$$

Следовательно, можно выразить общее решение нелинейного уравнения (7.2.12) через решение уравнения Лапласа

$$\Delta v = 0 \tag{7.2.15}$$

в виде

$$u = \ln\left(2\,\frac{v_x^2 + v_y^2}{v^2}\right). \tag{7.2.16}$$

Другими словами, нелинейное уравнение (7.2.12) отображается на линейное уравнение (7.2.15) с помощью преобразования (7.2.16). Однако это преобразование не особенно полезно при решении конкретных задач, как это видно из следующего примера, взятого из [10].

Рассмотрим следующую задачу с граничными условиями в круге радиуса $r = 1$:

$$\Delta u = e^u, \quad u\big|_{r=1} = 0, \tag{7.2.17}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Общее решение (7.2.16) неудобно для решения нашей задачи, так как оно приводит к нелинейной задаче с граничными условиями

$$\Delta v = 0, \quad \left(v_x^2 + v_y^2 - \frac{1}{2}\,v^2\right)\Big|_{r=1} = 0.$$

Для решения задачи (7.2.17) целесообразно использовать полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{7.2.18}$$

В этих координатах уравнение (7.2.12) записывается в виде

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi} = e^u. \tag{7.2.19}$$

Поскольку дифференциальное уравнение и граничные условия в задаче (7.2.17) инвариантны по отношению к группе вращения, мы можем искать решение, зависящее только от переменной r. Тогда уравнение (7.2.19) записывается следующим образом:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r = e^u. \tag{7.2.20}$$

Предположим, что функция $u(r)$ ограничена в «особой» точке $r = 0$, и сформулируем граничные условия задачи (7.2.17) в следующей форме:

$$u(1) = 0, \quad u(0) < \infty. \tag{7.2.21}$$

Можно проинтегрировать уравнение (7.2.20) с помощью метода Ли. А именно, оно допускает две инфинитезимальные симметрии:

$$\begin{aligned} X_1 &= r\,\frac{\partial}{\partial r} - 2\,\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_2 &= r\ln r\,\frac{\partial}{\partial r} - 2(1+\ln r)\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cdot \end{aligned} \tag{7.2.22}$$

Приведем первый оператор к виду $X_1 = \partial/\partial t$ с помощью замены переменных

$$t = \ln r, \quad z = u + 2\ln r.$$

Запишем уравнение (7.2.20) в новых переменных:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = e^z. \tag{7.2.23}$$

Интегрирование с помощью стандартной подстановки $dz/dt = p(z)$ дает

$$\int \frac{dz}{\sqrt{C_1 + 2e^z}} = t + C_2. \tag{7.2.24}$$

Вычисляя интеграл (7.2.24), можно убедиться, что условие $u(0) < \infty$ не удовлетворяется, если $C_1 \leqslant 0$. Поэтому мы вычислим интеграл при $C_1 > 0$. Для удобства выберем $C_1 = \lambda^2$ и $C_2 = \ln C$. После вычисления интеграла запишем результат в старых переменных и получим решение

$$u = \ln \frac{2\lambda^2 (cr)^\lambda}{r^2\left[1 - (cr)^\lambda\right]^2}\,\cdot \tag{7.2.25}$$

Отсюда следует, что

$$u \approx (\lambda - 2)\ln r \quad (r \to 0),$$

и из $u(0) < \infty$ вытекает $\lambda = 2$. Кроме того, граничное условие $u(1) = 0$ принимает форму

$$8c^2 = \left(1 - c^2\right)^2,$$

откуда

$$c^2 = 5 \pm 2\sqrt{6}\,. \tag{7.2.26}$$

Таким образом, задача (7.2.17) имеет два решения

$$u = \ln(8c^2) - \ln\left(1 - c^2 r^2\right)^2 \tag{7.2.27}$$

при

$$c^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

и

$$c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

соответственно. Первое решение, отвечающее случаю $c^2 = 5 - 2\sqrt{6}$, ограничено везде в круге

$$x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

тогда как второе решение соответствует $c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ и не ограничено на круге

$$x^2 + y^2 = r_*^2$$

радиуса $r_* = 1/c \approx 0{,}33$ (см. рис. 7.1, 7.2).

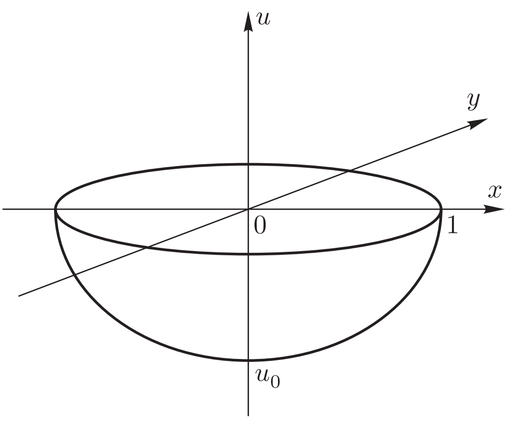


Рис. 7.1. Решение (7.2.27) при $c^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ ограничено

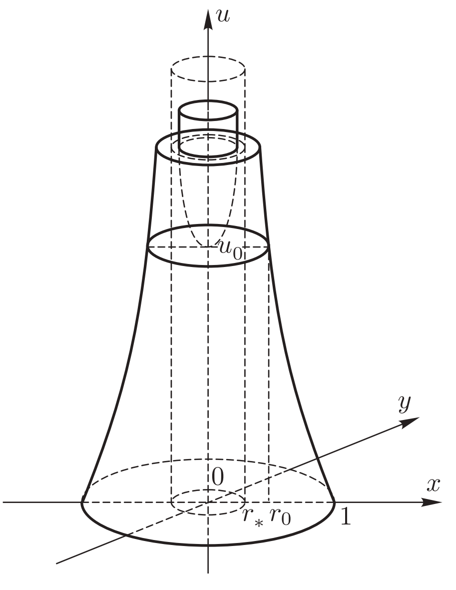


Рис. 7.2. Неограниченное решение, $c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $u(0) = u(r_0) = u_0 \approx 4{,}37$; $r_* = 1/c$, $r_0 = \sqrt{2}/c$

7.2.4. Инвариантные решения для ирригационных систем. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными (2.3.39)

$$C(\psi)\,\psi_t = [K(\psi)\psi_x]_x + [K(\psi)\,(\psi_z - 1)]_z - S(\psi),$$

моделирующее движение грунтовых вод в ирригационной системе.

Инфинитезимальные симметрии уравнения (2.3.39) с произвольными коэффициентами образуют алгебру Ли, называемую *главной алгеброй Ли* $L_{\mathcal{P}}$ уравнения (2.3.39). Это трехмерная алгебра с линейной оболочкой

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z} \cdot$$

Существует 29 частных типов коэффициентов $C(\psi)$, $K(\psi)$, $S(\psi)$, при которых возможно расширение алгебры $L_{\mathcal{P}}$. Рассмотрим один случай, в котором $L_{\mathcal{P}}$ расширяется тремя операторами. А именно, рассмотрим уравнение ($M = \mathrm{const}$)

$$\frac{4}{Me^{4\psi} - 1}\, \psi_t = \left(e^{-4\psi}\psi_x\right)_x + \left(e^{-4\psi}\psi_z\right)_z + 4e^{-4\psi}\psi_z + M - e^{-4\psi}. \quad (7.2.28)$$

Уравнение (7.2.28) допускает шестимерную алгебру L_6, получаемую добавлением к базису X_1, X_2, X_3 алгебры $L_{\mathcal{P}}$ следующих трех операторов:

$$\begin{aligned}
X_4 &= t\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4}\left(Me^{4\psi} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \psi},\\
X_5 &= \sin x\, e^{-z}\,\frac{\partial}{\partial x} - \cos x\, e^{-z}\,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\cos x\, e^{-z}\left(Me^{4\psi} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \psi},\\
X_6 &= \cos x\, e^{-z}\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin x\, e^{-z}\,\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\,\sin x\, e^{-z}\left(Me^{4\psi} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \psi} \cdot
\end{aligned}$$

Найдем инвариантные решения, основанные на двумерной подалгебре $L_2 \subset L_6$, с линейной оболочкой X_4, X_5. Инварианты $J(t, x, z, \psi)$ алгебры L_2 определяются системой линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$X_4(J) = 0, \quad X_5(J) = 0. \quad (7.2.29)$$

Эта система дает следующий базис инвариантов:

$$v = te^{2z}\left(e^{-4\psi} - M\right), \quad \lambda = e^z \sin x.$$

Инвариантные решения имеют вид

$$te^{2z}\left(\mathrm{e}^{-4\psi} - M\right) = \Phi(\lambda),$$

откуда, разрешая относительно ψ, имеем:

$$\psi = -\frac{1}{4}\,\ln\left|M + \frac{e^{-2z}}{t}\,\Phi(\lambda)\right|.$$

Подстановка в уравнение (7.2.28) дает

$$\Phi''(\lambda) = 4,$$

откуда

$$\Phi(\lambda) = 2\lambda^2 + l_1\lambda + l_2, \quad l_1,\, l_2 = \mathrm{const}.$$

Таким образом, получаем инвариантное решение:

$$\psi = -\frac{1}{4}\,\ln\left|M + \frac{e^{-2z}}{t}\left(2e^{2z}\sin^2 x + l_1 e^z \sin x + l_2\right)\right| \quad (7.2.30)$$

(см. рис. 7.3).

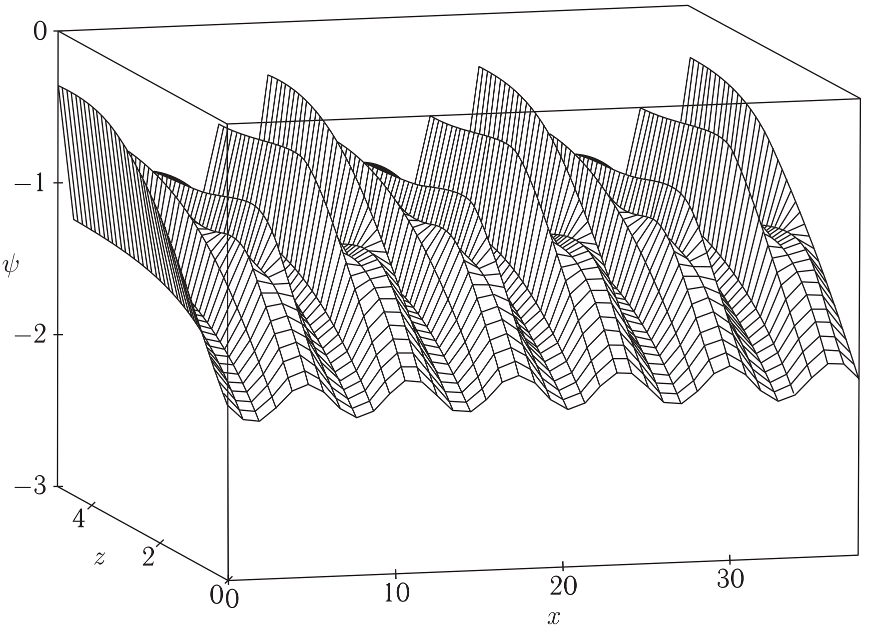


Рис. 7.3. График решения (7.2.30), $M = 4$, $l_1 = -2$, $l_2 = -4$, $t = 0{,}01$

7.2.5. Инвариантные решения для модели роста опухоли. Рассмотрим модель роста опухоли (2.5.4):

$$u_t = f(u) - (uc_x)_x\,, \quad c_t = -g(c,u),$$

где $f(u)$ и $g(c,u)$ удовлетворяют условиям

$$f(u) > 0, \quad g_c(c,u) > 0, \quad g_u(c,u) > 0. \tag{7.2.31}$$

Если $f(u)$ и $g(c,u)$ — произвольные функции, то система (2.5.4) инвариантна только относительно сдвигов по t и x. Иными словами, она допускает только двумерную алгебру Ли, натянутую на операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}\,\cdot \tag{7.2.32}$$

Существует, однако, много частных случаев с дополнительными функциями $f(u)$ и $g(c,u)$, когда количество симметрий у системы (2.5.4) возрастает [1]. Например, если

$$f = \alpha u, \quad g = G(u\mathrm{e}^{-c}),$$

где α — произвольная константа, а G — произвольная функция, соответствующая система

$$u_t = \alpha u - (uc_x)_x, \quad c_t = -G(ue^{-c})$$

[1] N. H. Ibragimov and N. Säfström. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, vol. 9(1), p. 61–68.

имеет, наряду с X_1, X_2, дополнительную симметрию

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial c} + u\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cdot$$

Возьмем, например, $G(ue^{-c}) = ue^{-c}$ и рассмотрим систему

$$u_t = \alpha u - (uc_x)_x, \quad c_t = -ue^{-c}, \quad \alpha = \text{const}. \tag{7.2.33}$$

Найдем инвариантные решения при действии однопараметрической группы, генерируемой оператором

$$X_1 + X_3 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial c} + u\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cdot$$

Уравнение $(X_1 + X_3)J = 0$ дает три независимых инварианта:

$$x, \quad \psi_1 = c - t, \quad \psi_2 = ue^{-t}.$$

Соответствующие инвариантные решения определяются соотношениями

$$c = t + \psi_1(x), \quad u = e^t\,\psi_2(x). \tag{7.2.34}$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} &u_t = e^t\,\psi_2(x), \qquad u_x = e^t\,\psi_2'(x),\\ &c_t = 1, \quad c_x = \psi_1'(x), \quad c_{xx} = \psi_1''(x). \end{aligned} \tag{7.2.35}$$

Подстановка (7.2.34) и (7.2.35) в первое уравнение (7.2.33) дает:

$$e^t\,\psi_2(x) = \alpha e^t\,\psi_2(x) - e^t\,\psi_1'(x)\,\psi_2'(x) - e^t\,\psi_2(x)\,\psi_1''(x)$$

или

$$(1-\alpha)\,\psi_2(x) + \psi_1'(x)\,\psi_2'(x) + \psi_2(x)\,\psi_1''(x) = 0. \tag{7.2.36}$$

Второе уравнение (7.2.33) дает

$$1 = -\psi_2(x)\,e^{-\psi_1(x)},$$

откуда

$$\psi_2(x) = -e^{\psi_1(x)}. \tag{7.2.37}$$

Теперь уравнение (7.2.36) становится

$$\psi_1''(x) + \psi_1'^2 + (1-\alpha) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\psi_1(x) = \ln|A_2\,(x + A_1)| \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \tag{7.2.38}$$

$$\psi_1(x) = x\sqrt{\alpha-1} + \ln\left|A_2\left(1 \pm \mathrm{e}^{2\sqrt{\alpha-1}\,(A_1-x)}\right)\right| \quad \text{при} \quad \alpha > 1, \tag{7.2.39}$$

$$\psi_1(x) = \ln\left|A_2\,\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\,(A_1-x)\right)\right| \quad \text{при} \quad \alpha < 1, \tag{7.2.40}$$

где A_1 и A_2 — произвольные константы.

Подставляя (7.2.37)–(7.2.40) в (7.2.34), мы получаем три следующих различных инвариантных решения системы (7.2.33):

$$\begin{aligned} c(t,x) &= t + \ln\left|A_2(x+A_1)\right|, \\ u(t,x) &= -e^t\left|A_2(x+A_1)\right| \qquad \text{при} \quad \alpha = 1, \end{aligned} \tag{7.2.41}$$

$$\begin{aligned} c(t,x) &= t + x\sqrt{\alpha-1} + \ln\left|A_2\left(1 \pm e^{2\sqrt{\alpha-1}\,(A_1-x)}\right)\right|, \\ u(t,x) &= -e^{t+x\sqrt{\alpha-1}}\ \left|A_2\left(1 \pm \mathrm{e}^{2\sqrt{\alpha-1}\,(A_1-x)}\right)\right| \quad \text{при} \quad \alpha > 1 \end{aligned} \tag{7.2.42}$$

и

$$\begin{aligned} c(t,x) &= t + \ln\left|A_2\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\ (A_1-x)\right)\right|, \\ u(t,x) &= -e^t\left|A_2\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\ (A_1-x)\right)\right| \quad \text{при} \quad \alpha < 1. \end{aligned} \tag{7.2.43}$$

Условия (7.2.31) выделяют, однако, решение (7.2.43) при $\alpha < 0$.

Действительно, только в этом случае функции $f(u) = \alpha u$ и $g(c,u) = ue^{-c}$ удовлетворяют условиям (7.2.31):

$$f(u) = \alpha u > 0, \quad g_c(c,u) = -ue^{-c} > 0, \quad g_u(c,u) = e^{-c} > 0$$

и, следовательно, решение (7.2.43) при $\alpha < 0$ удовлетворяет модели (7.2.33).

7.2.6. Пример из нелинейной оптики. Явление коррекции волнового фронта при оптических излучениях в лазерных системах моделируется с помощью нелинейных уравнений, называемых системой уравнений фазово-сопряженного отражения, известного также как обращение волнового фронта. Упрощенная модель соответствует соглашению о стационарности описываемых волн при выборе специальных параметров среды. В этих предположениях получают следующую систему уравнений нелинейной оптики (см. [40, раздел 11.2.7]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Delta\right)E_1 = |E_2|^2E_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Delta\right)E_2 = |E_1|^2E_2, \tag{7.2.44}$$

где Δ — оператор Лапласа на плоскости (x,y), E_1 и E_2 — комплексные амплитуды падающей и фазово-сопряженной световых волн соответственно.

Уравнения (7.2.44) инвариантны относительно сдвигов по x, y, z, поворотов в плоскости (x,y) и подходящего растяжения зависимых и независимых переменных. Можно найти дополнительную группу симметрии, используя аналогию левых частей (7.2.44) и уравнения теплопроводности. А именно, обозначим E^*_α комплексно сопряженную величину к E_α и будем искать инфинитезимальную симметрию системы (7.2.44) в следующей специальной форме:

$$X = 2z\,\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^{2}\left(f_\alpha(x,z)\,E_\alpha\,\frac{\partial}{\partial E_\alpha} + g_\alpha(x,z)\,E^*_\alpha\,\frac{\partial}{\partial E^*_\alpha}\right),$$

полученной по аналогии с генератором (7.1.24)

$$X = 2t\,\frac{\partial}{\partial x} - xu\,\frac{\partial}{\partial u}$$

преобразования Галилея для уравнения теплопроводности. Подстановка приведенного выше оператора специальной формы в определяющие уравнения дает

$$X = 2z\,\frac{\partial}{\partial x} + ix\left(E_1\,\frac{\partial}{\partial E_1} - E_2\,\frac{\partial}{\partial E_2} - E_1^*\,\frac{\partial}{\partial E_1^*} + E_2^*\,\frac{\partial}{\partial E_2^*}\right). \tag{7.2.45}$$

Рассмотрим двумерную алгебру Ли с натянутыми на нее оператором (7.2.45) и генератором $\partial/\partial y$ сдвига по y. Базис инвариантов состоит из

$$z, \quad u_1 = E_1\,e^{-ix^2/(4z)}, \quad u_2 = E_2\,e^{ix^2/(4z)},$$

и комплексно сопряженных для u_1 и u_2. Следовательно, мы получаем общую форму инвариантных решений:

$$E_1 = u_1(z)\,e^{ix^2/(4z)}, \quad E_2 = u_2(z)\,e^{-ix^2/(4z)}. \tag{7.2.46}$$

Для простоты рассмотрим случай действительных функций u_1 и u_2. В этом случае подстановка выражений (7.2.46) в уравнения (7.2.44) дает

$$\frac{du_1}{dz} = u_2^2\,u_1 - \frac{u_1}{2z}, \quad \frac{du_2}{dz} = u_1^2\,u_2 - \frac{u_2}{2z}\,\cdot \tag{7.2.47}$$

Уравнения (7.2.47) были решены в разделе 6.7.4, пример 6.7.9, где u_1, u_2 и z обозначены x, y и t соответственно. Сделав необходимую замену в уравнениях (6.7.47), мы получаем следующее общее решение уравнений (7.2.47):

$$u_1 = \sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}\,, \quad u_2 = \zeta\sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}\,, \tag{7.2.48}$$

где $\zeta = Cz^k$, C, $k = \text{const}$.

Наконец, подставляем (7.2.48) в (7.2.46) и получаем следующее инвариантное решение системы (7.2.44):

$$E_1 = \sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}\;e^{ix^2/(4z)}, \quad E_2 = \zeta\sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}\;e^{-ix^2/(4z)},$$

где $\zeta = Cz^k$ содержит две произвольные константы, C и k.

7.3. Инвариантность и законы сохранения

В этом разделе мы обсудим общий метод построения законов для дифференциальных уравнений, получаемых из вариационного принципа. Метод основан на двух *теоремах сохранения*. Первая из них — теорема Нётер [19], связывающая законы сохранения с *инвариантностью вариационных интегралов*. Вторая теорема, сформулированная в разделе 7.3.6, обобщает теорему Нётер и связывает законы сохранения с *инвариантностью экстремальных значений вариационных интегралов*. Она доказана в [7].

Обсуждаемые здесь теоремы сохранения имеют многочисленные приложения. Часть из них включена в качестве иллюстративных примеров. Многие другие приложения в механике, физике и технических науках собраны в [34–36].

7.3.1. Введение. Законы сохранения являются одним из основных принципов построения и исследования математических моделей.

В повседневной практике можно насчитать огромное разнообразие очевидных законов сохранения, например традиционные привычки или такие законы природы, как смена дня и ночи, лета и зимы, неизменное положение звезд и т. д. Не все законы сохранения очевидны. Один из таких «скрытых законов сохранения» состоит в том, что́ я в шутку называю *сохранением числа проблем*. Он заключается в том, что *«каждый индивидуум имеет фиксированное число проблем. Если кто-нибудь помогает ему решить одну из его проблем, новая проблема немедленно занимает место решенной»*. Мои многочисленные наблюдения дают всё новые и новые подтверждения моей правоты.

Мы остановимся, однако, на математических законах сохранения. Концепция закона сохранения связана с сохранением таких величин, как энергия, количество движения и момент количества движения и т. д., которые возникают в классической механике. Эти величины остаются неизменными в том смысле, что они постоянны на любой траектории данной динамической системы (см. раздел 1.5.1). А именно, функция $T = T(t, q, v)$, зависящая от времени t, позиционных координат $q = (q^1, \ldots, q^s)$ и скоростей $v = (v^1, \ldots, v^s)$, называется сохраняющейся величиной, если она удовлетворяет уравнению
$$D_t(T) = 0 \tag{7.3.1}$$
на любой траектории $q = q(t)$ изучаемой динамической системы. Поскольку
$$D_t(T) \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \dot{v}^\alpha \frac{\partial T}{\partial v^\alpha} \tag{7.3.2}$$
есть полная производная по времени, мы можем сформулировать определение следующим образом. Пусть $q = q(t)$ — данная траектория и $v = \dot{q}(t)$ — соответствующая скорость. Тогда уравнение сохранения (7.3.1) означает, что функция $T(t) = T\big(t, q(t), v(t)\big)$ удовлетворяет уравнению $dT(t)/dt = 0$. Другими словами, сохраняющаяся величина $T(t, q, v)$ есть константа на любой траектории. Следовательно, T также можно назвать *константой движения*.

Например, свободное движение одной частицы, имеющей массу m, описывается уравнением $m\dot{\mathbf{v}} = 0$. Энергия $E = m|\mathbf{v}|^2/2$ частицы есть константа свободного движения. Действительно, ее полная производная $D_t(E) = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$ равна нулю на любой траектории согласно уравнению движения $m\dot{\mathbf{v}} = 0$.

Расширение понятия закона сохранения (7.3.1) на непрерывные системы приводит к следующему определению, пригодному для любого числа $n \geqslant 1$ независимых переменных. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными, например, второго порядка:
$$F\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}\right) = 0, \tag{7.3.3}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — независимые переменные, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — зависимые переменные и $u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}$ и $u_{(2)} = \{u_{ij}^\alpha\}$ обозначают первые и вторые производные соответственно (см. обозначение в разделе 1.4.3).

Определение 7.3.1. Векторное поле $C\left(x, u, u_{(1)}\right)$, имеющее n компонент,

$$C = (C^1, \ldots, C^n), \tag{7.3.4}$$

называется *сохраняющимся вектором*, если оно удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} C \equiv D_i(C^i) = 0 \tag{7.3.5}$$

на любом решении $u = u(x)$ уравнения (7.3.3). Уравнение (7.3.5) называется *законом сохранения* для уравнения (7.3.3).

Предположим, что одна из независимых переменных — время, например, $x^n = t$. Тогда уравнение (7.3.5) предполагает существование функции $T\left(t, u, u_{(1)}\right)$, которая является константой движения. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.3.1. Пусть выполняется закон сохранения (7.3.5). Тогда интеграл

$$T(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} C^n\left(x, u(x), u_{(1)}\right) dx^1 \ldots dx^{n-1} \tag{7.3.6}$$

остается постоянным вдоль любого решения $u = u(x)$ уравнения (7.3.3), то есть удовлетворяет уравнению (7.3.1) в предположении, что компоненты сохраняющегося вектора C быстро убывают и обращаются в нуль на бесконечности. Соответственно, C^n из (7.3.6) называется *плотностью закона сохранения* (7.3.5).

Доказательство. Пусть Ω — $(n-1)$-мерная цилиндрическая область в пространстве всех независимых переменных $(x^1, \ldots, x^{n-1}, t)$, определенная следующим образом:

$$\Omega\colon \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left(x^i\right)^2 = r^2, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

где r и t_1, t_2 при $t_1 < t_2$ — произвольные константы. Пусть S — граница Ω и пусть ν — единичная внешняя нормаль к поверхности S. Применяя теорему о дивергенции к цилиндрической области Ω и используя уравнение (7.3.5), можно получить:

$$\int\limits_S C \cdot \nu \, d\sigma = \int\limits_\Omega \operatorname{div} C = 0. \tag{7.3.7}$$

Принимая во внимание, что компоненты C^i вектора C — функции, быстро стремящиеся к нулю на бесконечности, мы можем положить $r \to \infty$ и пренебречь интегралом в окрестности цилиндрической части поверхности S в левой части уравнения (7.3.7). Остается вычислить интегралы по нижнему основанию K_1 (при $t = t_1$) и верхнему основанию K_2 (при $t = t_2$) цилиндрической области Ω. С этой целью заметим, что $C \cdot \nu = -C^n\big|_{t=t_1}$ и $C \cdot \nu = C^n\big|_{t=t_2}$ при K_1 и K_2 соответственно. Более того, когда $r \to \infty$ как K_1, так и K_2 совпадают с $(n-1)$-мерным пространством $\mathbb{R}^{n-1}$ пространственных переменных $(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Следовательно, интеграл в левой части уравнения (7.3.7) при $r \to \infty$ становится

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(C^n\big|_{t=t_2} - C^n\big|_{t=t_1}\right) dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

и, как следствие, уравнение (7.3.7) дает:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} C^n\, dx^1 \ldots dx^{n-1}\big|_{t=t_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} C^n\, dx^1 \ldots dx^{n-1}\big|_{t=t_2}.$$

Поскольку моменты времени t_1 и t_2 произвольны, мы заключаем, что интеграл (7.3.6) есть константа вдоль любого решения $u = u(x)$ уравнения (7.3.3), что и завершает доказательство.

Определение 7.3.2. Если дивергенция $D_i(C^i)$ векторного поля $C\left(x, u, u_{(1)}\right)$ обращается в нуль не только на решениях уравнения (7.3.3), но и для любой функции $u(x)$, тогда C называется *тривиальным сохраняющимся вектором*.

Замечание 7.3.1. Векторные поля $C = \left(C^1(x), C^2(x), C^3(x)\right)$ в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющие уравнению $\operatorname{div} C = 0$ тождественно в некоторой области, называются *соленоидальными векторами* [1]). Таким образом, трехмерный вектор $C\left(x, u, u_{(1)}\right)$ — тривиальный сохраняющийся вектор, если и только если он является соленоидальным для любой функции $u = u(x)$. Поскольку мы имеем дело с произвольными размерностями, мы будем использовать в нашей терминологии термин *тривиальный сохраняющийся вектор*.

Два сохраняющихся вектора рассматриваются как идентичные, если один получается из другого добавлением тривиального сохраняющегося вектора. Более того, из линейности уравнения сохранения (7.3.5) ясно, что если уравнение (7.3.3) имеет несколько сохраняющихся векторов, $C_1, \ldots, C_r$, то их линейная комбинация $C = k_1 C_1 + \cdots + k_1 C_r$ с постоянными коэффициентами также является сохраняющимся вектором уравнения (7.3.3). Подведем итог.

Определение 7.3.3. Пусть $C_1, \ldots, C_r$ — сохраняющиеся векторы для уравнения (7.3.3). Говорят, что они *линейно зависимы*, если существуют константы $k_1, \ldots, k_r$, отличные от нуля, такие, что линейная комбинация $k_1 C_1 + \cdots + k_1 C_r$ является тривиальным сохраняющимся вектором, и *линейно независимы* в противном случае.

[1]) Постоянные векторные поля представляют собой примеры соленоидальных векторов. Более того, векторы вида $\mathbf{C} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ соленоидальны (см. задачу 7.9). Кроме того, из векторного анализа известно, что все соленоидальные векторные поля $C = \left(C^1(x), C^2(x), C^3(x)\right)$ могут быть представлены в форме $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ (см. примеры в задачах 7.11 и 7.12).

7.3.2. Предварительные замечания. Рассмотрим вариационный интеграл (1.5.3),

$$\int\limits_V L\left(x, u, u_{(1)}\right) dx, \tag{7.3.8}$$

и уравнения Эйлера–Лагранжа (1.5.4):

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{7.3.9}$$

где лагранжиан L содержит независимые переменные $x = (x^1, \ldots, x^n)$, зависимые переменные $u = (u^1, \ldots, u^m)$ и производные первого порядка $u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}$ от u по x.

Пусть G — однопараметрическая группа преобразований

$$\overline{x}^i = f^i(x, u, a), \quad \overline{u}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a) \tag{7.3.10}$$

с генератором

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\cdot \tag{7.3.11}$$

Определение 7.3.4. Говорят, что интеграл (7.3.8) — инвариант группы G, если для любой области V и *любой функции* $u(x)$ справедливо уравнение

$$\int\limits_{\overline{V}} L\left(\overline{x}, \overline{u}, \overline{u}_{(1)}\right) d\overline{x} = \int\limits_V L\left(x, u, u_{(1)}\right) dx. \tag{7.3.12}$$

Здесь $\overline{V} \subset \mathbb{R}^n$ — область, полученная из V с помощью преобразования (7.3.10).

Следующие утверждения делают прозрачной теорему Нётер. Доказательства лемм приведены, в более общей формулировке, в [40, глава 8].

Лемма 7.3.2. Интеграл (7.3.8) является инвариантом группы G, если и только если справедливо следующее уравнение:

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = 0, \tag{7.3.13}$$

где X обозначено первое продолжение генератора (7.3.11), то есть

$$X(L) = \xi^i\frac{\partial L}{\partial x^i} + \eta^\alpha\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}, \quad \zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j).$$

Лемма 7.3.3. Для любой функции $L\left(x, u, u_{(1)}\right)$ справедливо следующее условие:

$$X(L) + LD_i(\xi^i) \equiv W^\alpha\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} + D_i(C^i), \tag{7.3.14}$$

где

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{7.3.15}$$

и

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.3.16}$$

Лемма 7.3.4. Функция $F\left(x, u, u_{(1)}\right)$ может быть представлена как дивергенция некоторого векторного поля $H = (H^1, \ldots, H^n)$, если и только если вариационная производная от F обращается в нуль:

$$F = D_i(H^i), \tag{7.3.17}$$

если и только если

$$\frac{\delta F}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

7.3.3. Теорема Нётер.

Теорема 7.3.1. Пусть вариационный интеграл (7.3.8) является инвариантом группы с генератором (7.3.11). Иначе говоря, пусть удовлетворяется тест на инвариантность (7.3.13). Тогда векторное поле $C = (C^1, \ldots, C^n)$, определенное с помощью

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\,\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.3.18}$$

является сохраняющимся вектором для уравнения (7.3.9), то есть C удовлетворяет закону сохранения (7.3.5) $D_i(C^i) = 0$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 7.3.2 и леммы 7.3.3.

Замечание 7.3.2. Инвариантность вариационного интеграла (7.3.8), очевидно, означает инвариантность уравнений Эйлера–Лагранжа (7.3.9) относительно группы G. Следовательно, теорема Нётер дает конструктивный путь нахождения законов сохранения с использованием известной группы симметрии G уравнений Эйлера–Лагранжа в предположении, что G обладает *дополнительным свойством оставлять инвариантным функциональный интеграл*.

Следствие 7.3.1. Лемма 7.3.4 показывает, что к лагранжиану можно добавить любую функцию F дивергентного типа. Следовательно, условие инвариантности (7.3.13) может быть заменено следующим *условием дивергентности*:

$$X(L) + L D_i(\xi^i) = D_i(B^i). \tag{7.3.19}$$

Тогда вместо (7.3.18) получается следующий сохраняющийся вектор:

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\,\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - B^i. \tag{7.3.20}$$

7.3.4. Лагранжианы высокого порядка. В математической физике используются математические модели, описываемые лагранжианами первого и второго порядка. Например, мы имеем лагранжиан второго порядка (2.6.27),

$$L = \frac{1}{2}\left[\rho u_t^2 - \mu(u_{xx} + u_{yy})^2\right],$$

в задаче о колебаниях пластин. Следовательно, полезно иметь, наряду с формулой сохранения (7.3.18), подобную формулу для уравнений, описываемых лагранжианами второго порядка.

Рассмотрим, используя введенное выше обозначение, лагранжиан $L\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}\right)$, содержащий производные второго порядка. Тогда теорема Нётер устанавливает, что инвариантность вариационного интеграла приводит к закону сохранения (7.3.5), $D_i(C^i) = 0$, где уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) = 0, \tag{7.3.21}$$

а сохраняющийся вектор (7.3.18) модифицируется следующим образом:

$$C^i = L\xi^i + W^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right)\right] + D_k(W^\alpha)\,\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\,\cdot \tag{7.3.22}$$

Здесь W^α по-прежнему определяется с помощью (7.3.15), $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$.

Замечание 7.3.1 относительно законов сохранения при условии дивергентности применимо также в случае лагранжианов высокого порядка.

7.3.5. Теоремы сохранения для ОДУ. Остановимся на применении теорем сохранения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы немного изменим обозначение, использовавшееся выше при обсуждении динамических систем, например, в уравнении (7.3.2). А именно, будем снова предполагать, что независимая переменная — время t, но зависимые переменные (обобщенные координаты системы) обозначим $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Скорости обозначим $v = (v^1, \ldots, v^n)$, где $v^i = \dot{x}^i \equiv dx^i/dt$.

Рассмотрим лагранжианы в виде

$$L(t, x, v) \tag{7.3.23}$$

и соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.3.24}$$

где D_t есть полное дифференцирование по t (ср. с уравнением (7.3.2)):

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + v^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{v}^i\,\frac{\partial}{\partial v^i}\,\cdot$$

Пусть G — группа преобразований

$$\overline{t} = \varphi(t, x, a), \quad \overline{x}^i = \psi^i(t, x, a) \tag{7.3.25}$$

с генератором

$$X = \xi(t, x)\,\frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\cdot \tag{7.3.26}$$

В этих обозначениях тест на инфинитезимальную инвариантность (7.3.13) для вариационного интеграла с лагранжианом (7.3.23) записывается в виде

$$X(L) + LD_t(\xi) = 0. \tag{7.3.27}$$

В этом случае теорема 7.3.1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 7.3.2. Пусть тест на инвариантность (7.3.27) выполняется. Тогда

$$T = \xi L + (\eta^i - \xi v^i)\,\frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{7.3.28}$$

есть сохраняющаяся величина, то есть она удовлетворяет *закону сохранения*

$$D_t(T) \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} + \dot{v}^i \frac{\partial T}{\partial v^i} = 0 \tag{7.3.29}$$

для всех решений $x(t)$ уравнений (7.3.24).

Более того, условие дивергентности (7.3.19) и формула (7.3.20) для соответствующего сохраняющегося вектора определяются следующим утверждением.

Теорема 7.3.3. Пусть выполнено следующее условие дивергентности:

$$X(L) + LD_t(\xi) = D_t(B). \tag{7.3.30}$$

Тогда

$$T = \xi L + (\eta^i - \xi v^i) \frac{\partial L}{\partial v^i} - B \tag{7.3.31}$$

есть сохраняющаяся величина для уравнений (7.3.24).

7.3.6. Обобщение теоремы Нётер. Теорема 7.3.1 и замечание 7.3.2 показывают, что инвариантность вариационного интеграла при действии группы G, допускаемой уравнениями Эйлера–Лагранжа, составляет *достаточное условие* для того, чтобы (7.3.18) был сохраняющимся вектором. Аналогично, следствие 7.3.1 дает достаточное условие для того, чтобы (7.3.20) был сохраняющимся вектором. Примеры показывают, что инвариантность и свойство дивергенции не являются *необходимыми условиями* (см. раздел 7.3.7 и раздел 7.3.9). Следовательно, желательно получить необходимое и достаточное условие того, чтобы (7.3.20) было сохраняющимся вектором.

Решение этой задачи было дано в [7] (см. также [40]). Результат формулируется в виде следующей теоремы. Термин *экстремальные значения вариационного интеграла*, используемый в теореме, относится к значениям интеграла (7.3.8) на решениях $u(x)$ уравнений Эйлера–Лагранжа (7.3.9).

Теорема 7.3.4. Пусть уравнения Эйлера–Лагранжа (7.3.9) допускают непрерывную группу G с генератором (7.3.11). Тогда вектор (7.3.18),

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha},$$

является законом сохранения для уравнений (7.3.9), если и только если экстремальные значения интеграла (7.3.8) являются инвариантами группы G. Инфинитезимальный тест на инвариантность экстремальных значений интеграла (7.3.8) имеет вид

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = F^\alpha \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}, \tag{7.3.32}$$

где $F^\alpha = F^\alpha\left(x, u, u_{(1)}\right)$ отличается от W^α, которые определяются условиями (7.3.15).

Замечание 7.3.3. Если $F^\alpha = W^\alpha$, то (7.3.18) определяет тривиальный закон сохранения. Действительно, уравнение (7.3.32) при $F^\alpha = W^\alpha$ и при выполнении тождества (7.3.14) означает, что $D_i(C^i)$ тождественно обращается в нуль. Следовательно, C^i — тривиальный сохраняющийся вектор.

Следствие 7.3.2. Уравнение (7.3.32) для инвариантности экстремальных значений может быть заменено *условием дивергентности экстремальных значений*:

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = F^\alpha \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} + D_i(B^i), \quad F^\alpha \neq W^\alpha. \tag{7.3.33}$$

Тогда вместо (7.3.18) используется следующий сохраняющийся вектор:

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - B^i. \tag{7.3.34}$$

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений мы используем обозначение раздела 7.3.5 и записываем уравнения (7.3.33), (7.3.34) следующим образом:

$$X(L) + LD_t(\xi) = F^k \frac{\delta L}{\delta x^k} + D_t(B), \quad F^k \neq W^k, \tag{7.3.35}$$

$$T = \xi L + (\eta^i - \xi v^i) \frac{\partial L}{\partial v^i} - B. \tag{7.3.36}$$

7.3.7. Примеры из классической механики. Движение частицы постоянной массы m в потенциальном поле $U(t, \mathbf{x})$ описывается лагранжианом

$$L = \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 - U(t, \mathbf{x}), \quad |\mathbf{v}|^2 = \sum_{i=1}^{3} (v^i)^2, \tag{7.3.37}$$

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — радиус-вектор частицы, $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ — ее скорость. Уравнения Эйлера–Лагранжа (7.3.24) дают:

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.3.38}$$

Инфинитезимальные преобразования группы преобразований (7.3.25) часто представляют в механике в следующей форме:

$$\bar{t} = t + \delta t, \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, \tag{7.3.39}$$

где $\delta t = a\xi$, $\delta x^k = a\eta^k$, a — параметр группы.

Пример 7.3.1. *Свободное движение частицы.* Свободное движение соответствует $U = 0$. В этом случае уравнения (7.3.38) являются уравнениями свободного движения:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = 0 \tag{7.3.40}$$

с лагранжианом $L = \dfrac{m}{2} |\mathbf{v}|^2$. Уравнение (7.3.40) допускает группу Галилея, состоящую из сдвига по времени, сдвигов и вращений в пространстве координат и преобразования Галилея. Их генераторы имеют вид:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y_i = t \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{7.3.41}$$

где i, $j = 1, 2, 3$. Найдем соответствующие законы сохранения.

а) *Сдвиг по времени*. Его описывает генератор X_0. Сохраняющаяся величина получается подстановкой координат $\xi = 1$ и $\eta^1 = \eta^2 = \eta^3 = 0$ генератора X_0 в уравнение (7.3.28) и введением обозначения $E = -T$ для энергии:

$$E = \frac{m}{2}\,|\mathbf{v}|^2.$$

б) *Пространственные сдвиги*. Рассмотрим x^1-сдвиг, генерируемый X_1 с координатами $\xi = 0$, $\eta^1 = 1$, $\eta^2 = \eta^3 = 0$. Уравнение (7.3.28) дает после подстановки $T = p^1$ сохраняющуюся величину $p^1 = mv^1$. Все пространственные сдвиги с генераторами X_i создают вектор, означающий сохраняющуюся величину, называемую количеством движения (импульсом)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

в) *Вращения*. Рассмотрим вращение вокруг оси x^3. Его генератор X_{12} имеет координаты $\xi = 0$, $\eta^1 = x^2$, $\eta^2 = -x^1$, $\eta^3 = 0$. Подстановка в (7.3.28) дает сохраняющуюся величину $M_3 = m(x^2v^1 - x^1v^2)$. Используя все вращения с генераторами X_{12}, X_{13}, X_{23}, мы заключаем, что инвариантность при вращениях ведет к сохранению момента количества движения (2.2.9):

$$\mathbf{M} = m(\mathbf{x} \times \mathbf{v}).$$

г) *Преобразования Галилея*. Генераторы этих преобразований Y_i, в отличие от X_0, X_i, X_{ij}, не удовлетворяют тесту инвариантности (7.3.13). А именно, расширенное действие

$$Y_1 = t\,\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial v^1}$$

генератора Y_1 дает $Y_1(L) + LD_t(\xi) = mv^1 \equiv D_t(mx^1)$. Таким образом, удовлетворяется условие дивергентности (7.3.30) и можно применить теорему 7.3.3. При этом уравнение (7.3.31) при $B = mx^1$ дает сохраняющуюся величину $T = m(tv^1 - x^1)$. Используя все операторы Y_i и вводя обозначение T для Q, получаем сохраняющийся вектор

$$\mathbf{Q} = m(t\mathbf{v} - \mathbf{x}).$$

Сохранение вектора $\mathbf{Q}$ известно в случае системы частиц как *теорема о движении центра масс*.

Пример 7.3.2. *Задача Кеплера*. Задача двух тел (например, Солнца и планеты) известна как задача Кеплера (см. раздел 2.2.3). Она имеет лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}\,|\mathbf{v}|^2 - \frac{\mu}{r}, \tag{7.3.42}$$

где $r = |\mathbf{x}|$, $\mu = \text{const}$.

Запишем уравнения движения (7.3.38):

$$m\,\frac{d^2x^k}{dt^2} = \mu\,\frac{x^k}{r^3}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{7.3.43}$$

или в векторной форме:

$$m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mu\,\frac{\mathbf{x}}{r^3}\cdot$$

Уравнения (7.3.43) допускают пять генераторов вида (7.3.26):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\quad X_{ij} = x^j\,\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\,\frac{\partial}{\partial x^j},\quad Z = 3t\,\frac{\partial}{\partial t} + 2x^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot \tag{7.3.44}$$

Генераторы X_0 и X_{ij} сдвига по времени и вращения приводят снова к сохранению энергии E и момента количества движения $\mathbf{M}$ соответственно:

$$E = \frac{m}{2}\,|\mathbf{v}|^2 + \frac{\mu}{r},\quad \mathbf{M} = m(\mathbf{x}\times\mathbf{v}).$$

Оператор Z не приводит к законам сохранения (см. задачу 7.13).

Пример 7.3.3. Заметим, что три инфинитезимальных вращения, соответствующих операторам X_{ij} из (7.3.44), могут быть представлены в форме (7.3.39) следующим образом:

$$\delta t = 0,\quad \delta\mathbf{x} = \mathbf{x}\times\mathbf{a}, \tag{7.3.45}$$

где $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$. Уравнения (7.3.43) допускают также следующее обобщение (7.3.45) (см. [8, раздел 25.1]):

$$\delta t = 0,\quad \delta\mathbf{x} = [\mathbf{x}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})] + [(\mathbf{x}\times\mathbf{v})\times\mathbf{a}]. \tag{7.3.46}$$

Инфинитезимальное преобразование (7.3.46) соответствует генераторам

$$\widehat{X}_i = \big(2x^i v^k - x^k v^i - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\,\delta_i^k\big)\,\frac{\partial}{\partial x^k},\quad i = 1, 2, 3. \tag{7.3.47}$$

Рассмотрим первый оператор (7.3.47):

$$\widehat{X}_1 = -\left(x^2v^2 + x^3v^3\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(2x^1v^2 - x^2v^1\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(2x^1v^3 - x^3v^1\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\cdot$$

Вычисления показывают, что действие первого продолжения $\widehat{X}_1$ (см. задачу 7.14) на лагранжиан (7.3.42) имеет вид

$$\widehat{X}_1(L) = -W^k\,\frac{\delta L}{\delta x^k} + D_t\left(-\frac{2\mu}{r}\,x^1\right). \tag{7.3.48}$$

Из (7.3.48) следует, что $\widehat{X}_1$ и, следовательно, все симметрии (7.3.47) не приводят ни к тесту инвариантности (7.3.27), ни к условию дивергентности (7.3.30). Следовательно, теорема Нётер не применима к симметриям (7.3.47). С другой стороны, (7.3.48) показывает, что условие дивергентности (7.3.35) при экстремальных значениях удовлетворяется при $F^k = -W^k$. Таким образом, (7.3.36) дает сохраняющуюся величину

$$T_1 = 2m\left(x^1\left[\left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2\right] - x^2v^1v^2 - x^3v^1v^3\right) + \frac{2\mu}{r}\,x^1.$$

Проводя подобные вычисления для двух других операторов (7.3.47) и вводя обозначение $2A^i$ для T_i, мы приходим к сохранению вектора Лапласа (2.2.10):

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}\times\mathbf{M}] + \mu\,\frac{\mathbf{x}}{r}\cdot$$

Заметим, что сохранение вектора Лапласа означает, что планеты движутся по эллиптическим орбитам (см. [40, раздел 9.7.4]). Таким образом, симметрии (7.3.47) отвечают первому закону Кеплера.

7.3.8. Вывод формулы Эйнштейна для энергии. Геометрический смысл *специальной теории относительности*, сформулированной А. Эйнштейном в 1905 году как новая физическая теория, состоит в том, что трехмерное евклидово пространство и группа Галилея образуют четырехмерное пространство-время (называемое пространством Минковского) и группу Лоренца соответственно.

Группа Лоренца имеет следующие генераторы:

$$\begin{gathered} X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ X_{ij} = x^j\,\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\,\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad X_{0i} = t\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\,x^i\,\frac{\partial}{\partial t}, \end{gathered} \tag{7.3.49}$$

где $i, j = 1, 2, 3$ и c — скорость света. Генераторы (7.3.41) группы Галилея получаются из (7.3.49) при $c \to \infty$.

Требование инвариантности при преобразованиях группы Лоренца приводит к следующему *релятивистскому лагранжиану* для свободной частицы массы m:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}\,, \quad \text{где} \quad \beta^2 = \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}\cdot \tag{7.3.50}$$

Применим теорему Нётер к лагранжиану (7.3.50), выбрав, к примеру, преобразование времени с генератором X_0. Координаты генератора X_0: $\xi = 1$ и $\eta^i = 0$. Подставляя их в формулу (7.3.28) и обозначая $E = -T$, приходим к формуле Эйнштейна для *релятивистской энергии*:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}\,m|\mathbf{v}|^2.$$

Аналогично можно получить все релятивистские законы сохранения, используя генераторы (7.3.49) группы Лоренца (см. [40, раздел 9.7.5]).

7.3.9. Законы сохранения для уравнений Дирака. Рассмотрим уравнение Дирака (2.3.32),

$$\gamma^k\,\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m\psi = 0 \tag{7.3.51}$$

вместе с сопряженным уравнением

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x^k}\,\gamma^k - m\widetilde{\psi} = 0. \tag{7.3.52}$$

Здесь $\widetilde{\psi}$ — вектор-строка, определяемый с помощью выражения

$$\widetilde{\psi} = \overline{\psi}^T\gamma^4, \tag{7.3.53}$$

где $\overline{\psi}$ — комплексно сопряженное к ψ, а T обозначает транспонирование.

Уравнения (7.3.51), (7.3.52) могут быть получены из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\psi}\left(\gamma^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m\psi\right) - \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\psi}\right)\psi\right]. \tag{7.3.54}$$

Действительно, мы имеем:

$$\frac{\delta L}{\delta\psi} = -\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\psi}\right), \qquad \frac{\delta L}{\delta\widetilde{\psi}} = \gamma^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m\psi.$$

Уравнения Дирака (7.3.51), (7.3.52) могут служить примером для иллюстрации как теоремы Нётер, так и теоремы 7.3.4.

Пример 7.3.4. Простейший пример для иллюстрации теоремы Нётер представляет собой обычная линейная суперпозиция, записанная как группа преобразований $\psi' = \psi + a\,\varphi(x)$, $\widetilde{\psi}' = \widetilde{\psi} + a\,\widetilde{\varphi}(x)$ с генератором

$$X_\varphi = \varphi^k(x)\,\frac{\partial}{\partial\psi^k} + \widetilde{\varphi}_k(x)\,\frac{\partial}{\partial\widetilde{\psi}_k}\,\cdot \tag{7.3.55}$$

Здесь векторы $\varphi(x)$ и $\widetilde{\varphi}(x)$ связаны с помощью (7.3.53) и имеют компоненты $\varphi^k(x)$ и $\widetilde{\varphi}_k(x)$ соответственно. Они являются решениями уравнений (7.3.51), (7.3.52):

$$\gamma^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + m\varphi = 0, \quad \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\varphi} = 0. \tag{7.3.56}$$

Проверим, удовлетворяют ли лагранжиан (7.3.54) и генератор (7.3.55) тесту инвариантности (7.3.13) либо условию дивергентности (7.3.19). Поскольку $\xi = 0$, левая часть теста (7.3.13) сводится к условию $X_\varphi(L)$, которое равно

$$X_\varphi(L) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\varphi}\left(\gamma^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m\psi\right) - \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\psi}\right)\varphi\right]$$

и не обращается в нуль тождественно. Таким образом, тест инвариантности (7.3.13) не выполняется. Проверим условие дивергентности (7.3.19), то есть проверим, является ли указанное значение $X_\varphi(L)$ дивергенцией. Это можно сделать с помощью леммы 7.3.4. Вычисления дают:

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\big(X_\varphi(L)\big) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\varphi}\right), \quad \frac{\delta}{\delta\widetilde{\psi}}\big(X_\varphi(L)\big) = \frac{1}{2}\left(\gamma^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + m\varphi\right).$$

Эти выражения обращаются в нуль согласно уравнениям (7.3.56). Следовательно, в соответствии с леммой 7.3.4, $X_\varphi(L)$ — дивергенция, то есть условие (7.3.19) удовлетворяется. Можно убедиться, что $X_\varphi(L) = D_k(B^k)$ при

$$B^k = -\frac{1}{2}\left(\widetilde{\psi}\gamma^k\varphi - \widetilde{\varphi}\gamma^k\psi\right).$$

Найдем величины (7.3.18). Мы имеем:

$$\varphi\,\frac{\partial L}{\partial\psi_{,k}} + \widetilde{\varphi}\,\frac{\partial L}{\partial\widetilde{\psi}_{,k}} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\psi}\gamma^k\varphi - \widetilde{\varphi}\gamma^k\psi\right),$$

где использовано обозначение $D_k(\psi) = \psi_{,k}$, $D_k(\widetilde{\psi}) = \widetilde{\psi}_{,k}$. Подставляя эти величины и выражение для B^k в (7.3.20), мы приходим к сохраняющемуся вектору
$$C_\varphi^k = \widetilde{\psi}\gamma^k \varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)\,\gamma^k\psi.$$

Задачи к главе 7

7.1. Найти преобразования группы растяжения с генератором Z из (7.3.44):
$$Z = 3t\,\frac{\partial}{\partial t} + 2x^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\cdot$$

7.2. Найти все инфинитезимальные симметрии для:

а) одномерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$,

б) двумерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + u_{yy}$,

в) трехмерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

7.3. Найти инвариантные решения одномерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$, получаемые с использованием инфинитезимальной симметрии (см. задачу 7.2а)
$$X = X_1 + X_4 = \frac{\partial}{\partial t} + ku\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad k = \text{const}.$$

7.4. Исследовать инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, полученные с использованием:

а) одной инфинитезимальной симметрии (ср. с задачей 7.3)
$$X = \frac{\partial}{\partial t} + ku\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad k = \text{const},$$

б) двумерной алгебры Ли, натянутой на операторы (см. задачу 7.2б)
$$X = \frac{\partial}{\partial t} + ku\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad Y = X_6 = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y}\,\cdot$$

7.5. Движение планеты вокруг Солнца описывается системой дифференциальных уравнений (2.2.8):
$$m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\alpha}{r^3}\,\mathbf{x}, \quad \alpha = \text{const}.$$
Показать, что энергия планеты, определяемая выражением
$$E = \frac{m}{2}\,|\mathbf{v}|^2 + \frac{\alpha}{r},$$
где $|\mathbf{v}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{3}(v^i)^2$, есть константа движения, то есть $dE/dt = 0$.

7.6. Движение частицы массы m в произвольном центральном потенциальном поле $U = U(r)$ описывается лагранжианом $L = \dfrac{m}{2}\,|\mathbf{v}|^2 - U(r)$. Найти для этого лагранжиана уравнения движения, то есть уравнения Эйлера–Лагранжа.

7.7. Интеграл действия с лагранжианом из предыдущей задачи, $L =$

$= \dfrac{m}{2}\,|\mathbf{v}|^2 - U(r)$, является инвариантом при сдвиге по времени t с генератором $X_1 = \partial/\partial t$ и при вращениях вокруг пространственных переменных x^1, x^2, x^3 с генераторами

$$X_{12} = x^2\,\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\,\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_{13} = x^3\,\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\,\frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_{23} = x^3\,\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\,\frac{\partial}{\partial x^3}\,.$$

Вычислить соответствующие законы сохранения, пользуясь теоремой Нётер, и сравнить с задачей 2.4.

7.8. Рассмотреть центральное потенциальное поле в виде

$$U(r) = \frac{k}{r^2}, \quad k = \mathrm{const},$$

и соответствующие уравнения движения частицы:

$$m\,\frac{d^2x^i}{dt^2} = 2k\,\frac{x^i}{r^4}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти уравнения допускают, наряду со сдвигом по времени и вращениями относительно пространственных осей (см. задачу 7.7), растяжение и проективное преобразование, генерируемое с помощью

$$X_5 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x^1\,\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\,\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\,\frac{\partial}{\partial x^3}$$

и

$$X_6 = t^2\,\frac{\partial}{\partial t} + t\left(x^1\,\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\,\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\,\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

соответственно. Проверить возможность применения теоремы Нётер к симметриям X_5, X_6 и найти соответствующие законы сохранения T_5, T_6.

7.9. Пусть $\mathbf{a}$ — трехмерное векторное поле. Убедиться, что поле $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ соленоидально, то есть $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ (см. свойство 9 в (1.3.15)).

7.10. Пусть $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Показать, что

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right) = 0.$$

Обобщить это свойство на высокие размерности. А именно, пусть $x = (x^1, \ldots$ $\ldots, x^n)$ и $r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$. Найти s, такое, что

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{r^s}\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x}{r^s}\right) = 0.$$

7.11. Убедиться, что вектор

$$\mathbf{B} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2},\ 0\right)$$

соленоидальный, и найти вектор $\mathbf{A}$, такой, что $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

7.12. Обратить задачу 7.10 и найти вектор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию

$$\frac{\mathbf{x}}{r^3} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

7.13. Проверить генератор Z из задачи 7.1 на применимость теорем сохранения, то есть проверить свойства (7.3.30) и (7.3.33).

7.14. Найти первое продолжение (то есть расширение на $v^k = dx^k/dt$) следующих операторов из раздела 7.3.7:

$$\widehat{X}_1 = -\left(x^2v^2 + x^3v^3\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(2x^1v^2 - x^2v^1\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(2x^1v^3 - x^3v^1\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\,.$$

7.15. Преобразовать уравнение Блека–Шоулса (2.4.15),

$$u_t + \frac{1}{2}\,A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0,$$

в уравнение с постоянными коэффициентами с помощью замены переменной x на $y = \ln|x|$.

7.16. Решить следующую переопределенную систему (четыре уравнения для двух зависимых переменных $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$), использованную в разделе 6.5.1, пример 6.5.2:

$$\xi_y = 0, \quad 3(\eta_y + \eta) - 2\xi_x = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \xi_{xx} = 0.$$

Глава 8
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Эта глава ставит целью знакомство с основными понятиями и методами теории распределений. Главное внимание будет уделяться полезным справочным сведениям и навыкам. Кроме того, принцип инвариантности, использованный в главе 9 для вычисления фундаментальных решений, предлагает реконструкцию теории групповых инвариантных решений и расширение инфинитезимальной техники Ли на пространство распределений. Этому посвящен раздел 8.4.

Дополнительная литература: Шварц Л. [30], Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. [3], Ибрагимов Н.Х. [11], Владимиров В.С., Жаринов В. В. [2].

8.1. Введение в обобщенные функции

Современные достижения в прикладной математике, в частности исследования нелинейных задач в механике жидкости, делают необходимым изучение разрывных решений дифференциальных уравнений. Исходя из этих соображений, С.Л. Соболев ввел в 1930-е годы так называемые *обобщенные решения*. Кроме того, даже раньше было проведено исследование, показавшее, что разрывные решения с определенными сингулярностями играют важную роль в постановке проблем в математической физике. Ж. Адамар в 1920-е годы назвал эти решения *элементарными*; в настоящее время на них, в основном, ссылаются как на *фундаментальные решения*. Прилагались энергичные усилия, чтобы выяснить математическую природу этих решений, что привело к рождению современной теории *обобщенных функций* (С.Л. Соболев, 1936) или *распределений* (Л. Шварц, 1950). Наиболее полезной обобщенной функцией является δ-функция Дирака. Она была введена в теоретической физике П.А.М. Дираком в 1930-е годы и стала одним из эффективных средств общей теории дифференциальных уравнений.

8.1.1. Эвристическое обсуждение. Напомним, что определение дифференцируемой функции предполагает, что в итоге дифференцирования получается классическая (обычная) функция. Можно попытаться дифференцировать недифференцируемые функции, обобщая обозначение дифференцирования. Это один из возможных путей введения обобщенных функций. Ключевая идея этого подхода состоит в переносе понятия дифференцирования недифференцируемой функции на некоторую дифференцируемую. Подходящим инструментом для осуществления этой идеи является интегрирование по частям для функций одной переменной и использование теоремы о дивергенции (1.3.18) для функций нескольких переменных.

Остановимся на случае одной переменной x. В предположении, что функции $u(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы в $a \leqslant x \leqslant b$, формула (1.2.12) интегрирования по частям дает:

$$\int_a^b \varphi\, du = (u\varphi)\big|_a^b - \int_a^b u\, d\varphi.$$

Кроме того, предполагая, что функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне ограниченного интервала[1] оси x, и обозначая символом D дифференцирование по x, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi D(u)\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} uD(\varphi)\, dx.$$

Для удобства интегралы, входящие в эти выражения, интерпретируют как скалярные произведения $(\,,\,)$ соответствующих функций. Тогда вышеуказанное уравнение запишется в следующем виде:

$$(Du, \varphi) = -(u, D\varphi). \tag{8.1.1}$$

Читая это уравнение слева направо, можно интерпретировать его просто как средство переноса понятия дифференцирования D с дифференцируемой функции $u(x)$ на другую функцию этого типа, $\varphi(x)$. Однако мы приходим к нетривиальному заключению, читая это равенство справа налево и предполагая, что только функция φ непрерывно дифференцируема. Функция u есть предмет проверки условия сходимости интеграла в правой части уравнения (8.1.1).

Приведенный подход является решающим шагом для введения нового понятия дифференцирования. А именно, пусть u — функция, которая может быть недифференцируемой в классическом смысле, но удовлетворяющей условию сходимости интеграла в правой части уравнения (8.1.1). *Обобщенная производная* функции u есть такая «функция» Du (в обобщенном смысле), которая удовлетворяет уравнению (8.1.1) для любой непрерывно дифференцируемой функции φ с ограниченным носителем. Очевидно, что обобщенное дифференцирование можно повторять, только пока функция φ дифференцируема. Например, обобщенная производная D^2u второго порядка находится следующим образом:

$$(D^2u, \varphi) = -(Du, D\varphi) = (u, D^2\varphi).$$

Чтобы иметь дело с производными любого порядка, предположим, что функции φ бесконечно дифференцируемы. Множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем обозначается C_0^∞. Функции $\varphi \in C_0^\infty$ считаются *тестовыми функциями*.

---

[1] Наименьший замкнутый интервал, вне которого функция $\varphi(x)$ обращается в нуль, называется *носителем* этой функции и обозначается $\mathrm{supp}\,(\varphi)$. Если интервал $\mathrm{supp}\,(\varphi)$ ограничен, то $\varphi(x)$ называется функцией с ограниченным (компактным) носителем.

Чтобы понять природу обобщенной производной Du, следует учесть, что для фиксированной u выражение (Du, φ) отображает любую функцию $\varphi \in C_0^\infty$ в число, равное $(u, D\varphi)$. Эта операция линейна:

$$(Du, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(Du, \varphi_1) + c_2(Du, \varphi_2); \quad c_1,\, c_2 = \mathrm{const},$$

и непрерывна:

$$(Du, \varphi_k) \to (Du, \varphi) \text{ всякий раз, когда } \varphi_k \to \varphi \text{ в } C_0^\infty.$$

Таким образом, обобщенная производная Du есть *линейный непрерывный функционал* на всем пространстве C_0^∞. Это эвристическое соглашение может быть также применено в случае функций нескольких переменных $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ и приводит к следующему определению.

8.1.2. Определение и примеры распределений.

Определение 8.1.1. *Обобщенная функция* или *распределение* есть линейный непрерывный функционал f на всем пространстве C_0^∞ функций $\varphi(x) = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$ класса C^∞ с компактным носителем. Другими словами, f отображает любую функцию $\varphi \in C_0^\infty$ в число, определяемое с помощью (f, φ). Эта операция *линейна*:

$$(f, \varphi_1 + \varphi_2) = (f, \varphi_1) + (f, \varphi_2), \quad (f, c\varphi) = c(f, \varphi); \quad c = \mathrm{const}, \tag{8.1.2}$$

и *непрерывна*:

$$\text{если } \varphi_k \to \varphi \text{ в } C_0^\infty, \text{ то } (f, \varphi_k) \to (f, \varphi). \tag{8.1.3}$$

Сходимость $\varphi_k \to \varphi$ в C_0^∞ означает, что удовлетворяются следующие условия:

1) $\varphi_k, \varphi \in C_0^\infty$,
2) носитель всех членов последовательности φ_k сохраняется в одном и том же ограниченном замкнутом подмножестве $\mathbb{R}^n$,
3) функции $\varphi_k(x)$ сходятся равномерно к $\varphi(x)$ вместе со всеми своими производными.

Пример 8.1.1. Пусть функция $f(x)$ локально интегрируема, то есть интегрируема в любой ограниченной области в $\mathbb{R}^n$. Интеграл

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{8.1.4}$$

определяет обобщенную функцию. Говорят, что обобщенные функции этого типа *регулярны*, а остальные — *сингулярны*.

Пример 8.1.2. *Функция Хевисайда* $\theta(x)$ с одной переменной x есть

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{8.1.5}$$

При этом регулярная обобщенная функция (8.1.4) определяется следующим образом:

$$(\theta, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx. \tag{8.1.6}$$

Аналогично, функция Хевисайда $\theta(x-x_0)$:

$$\theta(x-x_0)=\begin{cases}0, & x<x_0,\\ 1, & x>x_0\end{cases}$$

определяет регулярную обобщенную функцию формулой с интегралом

$$\big(\theta(x-x_0),\varphi(x)\big)=\int\limits_{x_0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Пример 8.1.3. *δ-функция Дирака* есть простейшая, но чрезвычайно важная сингулярная обобщенная функция. Она обозначается δ или $\delta(x)$ и определяется по формуле:

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0). \tag{8.1.7}$$

Эта формула также записывется в виде

$$\big(\delta(x),\varphi(x)\big)=\varphi(0),$$

где $x\in\mathbb{R}^n$. Аналогично, $\delta(x-x_0)$ определяется по формуле:

$$\big(\delta(x-x_0),\varphi(x)\big)=\varphi(x_0).$$

Для $\delta(x-a)$ применяют также альтернативное обозначение $\delta_{(a)}$. Ее часто называют δ-функцией в точке a.

8.1.3. Представления δ-функции как предела.

Описание следующих полезных представлений δ-функции можно найти, например, в [3, глава I, раздел 2.5].

Теорема 8.1.1. Остановимся на случае одной переменной x. Тогда выполняются следующие уравнения:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}, \tag{8.1.8}$$

$$\delta(x)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sin(\nu x)}{\pi x}, \tag{8.1.9}$$

$$\delta(x)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\nu}^{\nu}e^{i\xi x}\,d\xi, \tag{8.1.10}$$

$$\delta(x)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-x^2/(4t)}, \tag{8.1.11}$$

где символ $t\to+0$ означает, что t стремится к нулю, сохраняя положительные значения.

Мы будем пользоваться также расширением (8.1.11) на случай нескольких переменных, когда $x=(x^1,\ldots,x^n)$. Обозначая $r=\sqrt{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2}$, имеем:

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^n}\,e^{-r^2/(4t)}=\delta(x). \tag{8.1.12}$$

8.2. Действия с распределениями

8.2.1. Умножение на функцию. *Умножение* распределения f на C^∞-функцию $\alpha(x)$ определяется действием произведения αf на тестируемые функции φ следующим образом:

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi). \tag{8.2.1}$$

Правая часть этого уравнения определена однозначно, поскольку $\alpha\varphi \in \in C_0^\infty$.

Пример 8.2.1. Из определения (8.1.7) δ-функции и правила умножения (8.2.1) следует, что

$$\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta. \tag{8.2.2}$$

Действительно,

$$\big(\alpha(x)\delta, \varphi\big) = (\delta, \alpha\varphi) = \alpha(0)\,\varphi(0) = \alpha(0)\,(\delta, \varphi) = \big(\alpha(0)\delta, \varphi\big).$$

8.2.2. Дифференцирование. *Дифференцирование* распределения f определяется уравнением

$$(D_i f, \varphi) = -(f, D_i\varphi). \tag{8.2.3}$$

Здесь полное дифференцирование D_i совпадает с частным дифференцированием, $D_i = \partial/\partial x^i$, поскольку φ зависит только от независимых переменных x^i. Согласно этому определению любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема, производные более высокого порядка получаются последовательным применением формулы (8.2.3). Например, $(D_jD_if, \varphi) = -(D_if, D_j\varphi) = (f, D_iD_j\varphi)$. Отсюда следует, в частности, что $D_jD_if = D_iD_jf$.

Пример 8.2.2. Производная от функции Хевисайда есть δ-функция:

$$\theta'(x) = \delta(x). \tag{8.2.4}$$

Действительно, формулы (8.1.1) и (8.1.6) дают

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\varphi\big|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

8.2.3. Прямое произведение распределений. Пусть $f(x)$ и $g(t)$ — два распределения, зависящие от n переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и m переменных $t = (t^1, \ldots, t^m)$ соответственно. Пусть $\varphi(x,t)$ — тестовая функция, зависящая от $n+m$ переменных $(x^1, \ldots, x^n,\, t^1, \ldots, t^m)$.

Определение 8.2.1. *Прямое произведение* $f(x) \otimes g(t)$ функций $f(x)$ и $g(t)$ есть распределение, действующее на тестовые функции $\varphi(x,t)$ следующим образом:

$$\big(f(x) \otimes g(t), \varphi(x,t)\big) = \Big(f(x), \big(g(t), \varphi(x,t)\big)\Big). \tag{8.2.5}$$

Из определения 8.2.1 можно легко получить следующие свойства прямого произведения (см., например, [3, глава 1, § 5] или [30, глава 3]):

$$\big(f(x) \otimes g(t), \varphi(x)\psi(t)\big) = \big(f(x), \varphi(x)\big)\big(g(t), \psi(t)\big), \tag{8.2.6}$$

$$f(x) \otimes g(t) = g(t) \otimes f(x), \tag{8.2.7}$$

$$\delta(x) \otimes \delta(t) = \delta(x, t), \tag{8.2.8}$$

где $\delta(x)$, $\delta(t)$ и $\delta(x,t)$ — δ-функции Дирака соответствующих переменных.

8.2.4. Свертка. *Свертка* $(f * g)(x)$ двух обычных функций $f(x)$ и $g(x)$ в $\mathbb{R}^n$ есть функция, определенная следующим интегралом:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy. \tag{8.2.9}$$

Чтобы определить свертку распределений, начнем с регулярных распределений. А именно, рассмотрим действие (8.1.4) свертки (8.2.9) на тестовые функции и поменяем порядок интегрирования. Мы имеем:

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \int (f * g)(x)\, \varphi(x)\, dx = \int \varphi(x) \left[\int f(y)\, g(x-y)\, dy\right] dx = \\ &= \int f(y)\, dy \int g(x-y)\, \varphi(x)\, dx = \int f(y) \left[\int g(z)\, \varphi(z+y)\, dz\right] dy.\end{aligned}$$

Меняя обозначение z в последнем интеграле на x, мы приходим к заключению, что свертка $f * g$ регулярных распределений f и g есть распределение, действующее на тестовые функции следующим образом:

$$(f * g, \varphi) = \int f(y) \left[\int g(x)\, \varphi(x+y)\, dx\right] dy. \tag{8.2.10}$$

Уравнение (8.2.10) может быть представлено в виде

$$(f * g, \varphi) = \Big(f(y), \big(g(x), \varphi(x+y)\big)\Big).$$

Это предварительное рассмотрение приводит к следующему определению.

Определение 8.2.2. Пусть f и g — любые распределения, такие, что, по крайней мере, одно из них имеет компактный носитель. Их свертка $f * g$ есть распределение, определенное равенством

$$(f * g, \varphi) = \Big(f(y), \big(g(x), \varphi(x+y)\big)\Big). \tag{8.2.11}$$

Применяя определение (8.2.5) прямого произведения, можно записать уравнение (8.2.11) в виде:

$$(f * g, \varphi) = \big(f(y) \otimes g(x), \varphi(x+y)\big). \tag{8.2.12}$$

Замечание 8.2.1. Даже если $\varphi(x)$ имеет компактный носитель, $\varphi(x+y)$ не обладает этим свойством в пространстве переменных x, y. Следовательно, уравнение (8.2.12) может потерять смысл для произвольных распределений f и g. Свертка однозначно определена для распределений, удовлетворяющих некоторым условиям. Одним из таких условий является компактность носителя f или g. Мы не обсуждаем здесь требуемые ограничения в общем виде, поскольку для наших целей достаточно определения 8.2.2.

В следующей главе используются следующие свойства свертки.

Теорема 8.2.1. Свертка (8.2.11) коммутативна:

$$f * g = g * f. \tag{8.2.13}$$

Доказательство. Утверждение следует из уравнения (8.2.12) и коммутативности (8.2.7) прямого произведения.

Теорема 8.2.2. Свертка с δ-функцией существует для любого распределения f и удовлетворяет следующему уравнению:

$$f * \delta = f. \tag{8.2.14}$$

Теорема 8.2.3. Пусть распределения f и g имеют компактные носители. Тогда дифференцирование $D_i = \partial/\partial x^i$ свертки удовлетворяет следующим уравнениям:

$$D_i(f * g) = (D_i f) * g = f * (D_i g). \tag{8.2.15}$$

8.3. Распределение $\Delta(r^{2-n})$

8.3.1. Главное значение над сферой. Введем обозначение и проведем предварительные вычисления. Пусть

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}\,.$$

Главное значение $\overline{\varphi}(r)$ функции $\varphi(x)$ над сферой Ω_r радиуса r с центром 0 определяется с помощью

$$\overline{\varphi}(r) = \frac{1}{S_r} \int\limits_{\Omega_r} \varphi(x)\, dS. \tag{8.3.1}$$

Сфера Ω_r есть множество точек x, такое, что $|x| = r$, и S_r есть площадь поверхности сферы Ω_r. Поскольку Ω_r подобна единичной сфере и имеет размерность $n-1$, справедливо следующее (ср. с разделом 1.1.3):

$$S_r = r^{n-1}\omega_n, \tag{8.3.2}$$

где $\omega_n = 2\sqrt{\pi^n}\,/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве. Из уравнения (8.3.1) следует, что $\overline{\varphi}(r)$ принимает одно и то же значение в каждой точке $x \in \Omega_r$ независимо от положения x на сфере Ω_r. В связи с этим говорят, что $\overline{\varphi}(r)$ — *сферически симметричная функция*.

8.3.2. Решение уравнения Лапласа $\Delta v(r)=0$.

Лемма 8.3.1. Пусть v — произвольная сферически симметричная функция, то есть $v = v(r)$. Тогда уравнение Лапласа

$$\Delta v \equiv \sum_{i=1}^{n} v_{ii} = 0,$$

где $v_i = D_i(v) = \partial v/\partial x^i$, $v_{ii} = D_i^2(v)$, записывается следующим образом:

$$v'' + \frac{n-1}{r}\, v' = 0, \tag{8.3.3}$$

где $v' = dv/dr$.

Доказательство. Утверждение следует из уравнений

$$D_i(v) \equiv \frac{\partial v}{\partial x^i} = v'\,\frac{x^i}{r}, \quad D_i^2(v) = v''\,\frac{(x^i)^2}{r^2} + v'\left[\frac{1}{r} - \frac{(x^i)^2}{r^3}\right].$$

Замечание 8.3.1. Можно доказать, что главное значение лапласиана функции $\varphi(x)$ совпадает с лапласианом главного значения $\varphi(x)$, то есть

$$\overline{\Delta\varphi}(r) = \Delta\overline{\varphi}(r) = \overline{\varphi}'' + \frac{n-1}{r}\,\overline{\varphi}'. \tag{8.3.4}$$

Найдем все сферически симметричные решения $v = v(r)$ уравнения Лапласа, то есть проинтегрируем обыкновенное дифференциальное уравнение (8.3.3). Мы имеем:

$$\begin{aligned} v'' + \frac{n-1}{r}\, v' &= \frac{1}{r}\left[rv'' + (n-1)v'\right] = \frac{1}{r}\left[(rv')' + (n-2)v'\right] = \\ &= \frac{1}{r}\left[rv' + (n-2)v\right]'. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (8.3.3) записывается в виде $[rv' + (n-2)v]' = 0$ и дает

$$rv' + (n-2)v = C. \tag{8.3.5}$$

Если $n > 2$, мы получаем $C = (n-2)C_1$ и переписываем уравнение (8.3.5) в отделимой форме $rv' + (n-2)(v - C_1) = 0$. При $n = 2$ в уравнении (8.3.5) переменные разделяются $rv' = C$. При $n = 1$ уравнение (8.3.5) записывается так: $v'' = 0$. Интегрирование проводится просто во всех случаях и дает следующее.

Теорема 8.3.1. Общее решение уравнения (8.3.3) имеет вид

$$v = C_1 + C_2\, r^{2-n}, \quad \text{если} \quad n \neq 2; \tag{8.3.6}$$

$$v = C_1 + C_2 \ln r, \quad \text{если} \quad n = 2. \tag{8.3.7}$$

8.3.3. Вычисление распределения $\Delta(r^{2-n})$. Теорема 8.3.1 показывает, что фундаментальная система решений уравнения (8.3.3) содержит тривиальную константу решения, например $v = 1$, а также решения r^{2-n} и $\ln r$ при $n > 2$ и $n = 2$ соответственно. Функции r^{2-n} и $\ln r$ имеют особенность при

$r = 0$, то есть в начале координат $x = 0$, и не имеют классических производных в этой особой точке. Как следствие, лапласиан этих функций обращается в нуль при $x \neq 0$ и формирует распределения вблизи особой точки $x = 0$. В этом разделе мы займемся вычислением распределения $\Delta(r^{2-n})$ при $n > 2$.

Теорема 8.3.2. Пусть $n > 2$. Тогда $\Delta(r^{2-n})$ — распределение, определяемое формулой

$$\Delta(r^{2-n}) = (2-n)\omega_n\,\delta(x), \tag{8.3.8}$$

где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака (8.1.7), а ω_n — площадь поверхности единичной сферы.

Доказательство. Утверждается, что функция r^{2-n} локально интегрируема. Следовательно, применяя правило дифференцирования (8.2.3) и определение (8.1.4) распределений, формулируемое с помощью локально интегрируемых функций, и применяя уравнение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{\Omega_r} f\,dS, \tag{8.3.9}$$

мы получаем:

$$\big(\Delta(r^{2-n}), \varphi\big) = \big(r^{2-n}, \Delta\varphi\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{2-n}\,\Delta\varphi\,dx = \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{\Omega_r} r^{2-n}\,\Delta\varphi\,dS.$$

Уравнения (8.3.1) и (8.3.2) дают:

$$\int\limits_{\Omega_r} r^{2-n}\,\Delta\varphi\,dS = r^{2-n}\,S_r\overline{\Delta\varphi}(r) = \omega_n r^{2-n}\,r^{n-1}\,\overline{\Delta\varphi}(r) = \omega_n r\,\overline{\Delta\varphi}(r).$$

Используя эти уравнения и уравнение (8.3.4), мы имеем:

$$\big(\Delta(r^{2-n}), \varphi\big) = \omega_n \int\limits_0^\infty r\overline{\Delta\varphi}(r)\,dr = \omega_n \int\limits_0^\infty [r\overline{\varphi}'' + (n-1)\,\overline{\varphi}']\,dr. \tag{8.3.10}$$

Вычислим интеграл в правой части уравнения (8.3.10):

$$\int\limits_0^\infty [r\overline{\varphi}'' + (n-1)\,\overline{\varphi}']\,dr = \int\limits_0^\infty \big[(r\overline{\varphi}')' + (n-2)\,\overline{\varphi}'\big]\,dr = \Big[r\overline{\varphi}' + (n-2)\,\overline{\varphi}\Big]_0^\infty.$$

Поскольку функция φ удовлетворяет условию $\varphi \in C_0^\infty$, она обращается в нуль на бесконечности. Следовательно,

$$\Big[r\overline{\varphi}' + (n-2)\overline{\varphi}\Big]_0^\infty = -(n-2)\,\overline{\varphi}(0) = -(n-2)\,\varphi(0).$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.3.10), мы получаем

$$\big(\Delta(r^{2-n}), \varphi\big) = (2-n)\omega_n\,\varphi(0) = \big((2-n)\omega_n\,\delta(x), \varphi(x)\big),$$

что доказывает справедливость уравнения (8.3.8).

Замечание 8.3.2. При $n = 2$ уравнение (8.3.8) заменяется на следующее:

$$\Delta(\ln r) = \omega_2\, \delta(x). \tag{8.3.11}$$

Замечание 8.3.3. Уравнение (8.3.8) справедливо также в случае $n=1$. Таким образом, уравнения (8.3.8) и (8.3.11) можно объединить в следующую общую формулу:

$$\begin{aligned} \Delta(r^{2-n}) &= (2-n)\,\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,\delta(x) \quad (n \neq 2), \\ \Delta(\ln r) &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,\delta(x) \qquad (n = 2). \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

В приложениях важны следующие частные случаи:

$$\begin{aligned} \Delta(|x|) &= 2\,\delta(x) \qquad (n = 1), \\ \Delta(\ln r) &= 2\pi\,\delta(x) \qquad (n = 2), \\ \Delta\bigl(r^{-1}\bigr) &= -4\pi\,\delta(x) \quad (n = 3). \end{aligned} \tag{8.3.13}$$

8.4. Преобразования распределений

Настоящий раздел содержит обобщение инфинитезимальной техники Ли на пространство распределений. Результаты будут использованы в следующей главе.

8.4.1. Мотивировка линейных преобразований. Рассмотрим для простоты одномерный случай и начнем с широко известного преобразования, называемого *сдвиг* распределений. Он соответствует смещению $\overline{x} = x - a$ независимой переменной и определяется в соответствии со следующим законом преобразования регулярных распределений (8.1.4). Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция одной переменной x. Сдвиг $f(x-a)$ соответствующего регулярного распределения находится по формуле замены переменных:

$$\bigl(f(x-a), \varphi(x)\bigr) = \int f(x-a)\,\varphi(x)\,dx = \int f(\overline{x})\,\varphi(\overline{x}+a)\,d\overline{x}.$$

Вводя обозначение (8.1.4), имеем:

$$\bigl(f(x-a), \varphi(x)\bigr) = \bigl(f(\overline{x}), \varphi(\overline{x}+a)\bigr) \tag{8.4.1}$$

или, обозначая $\overline{x}$ снова x, получаем следующую формулу сдвига:

$$\bigl(f(x-a), \varphi(x)\bigr) = \bigl(f(x), \varphi(x+a)\bigr). \tag{8.4.2}$$

Уравнение (8.4.2) используется в качестве определения сдвига для произвольных распределений. Например, в случае δ-функции сдвиг $\delta(x-a)$ имеет вид

$$\bigl(\delta(x-a), \varphi(x)\bigr) = \bigl(\delta(x), \varphi(x+a)\bigr) = \varphi(a). \tag{8.4.3}$$

Подобным образом определяется произвольное линейное преобразование обобщенных функций. А именно, пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{R}^n$, и пусть

$$\overline{x} = Ax - a$$

есть обобщенное линейное преобразование, где $a = (a^1, \ldots, a^n)$ является n-мерным вектором, а $A = \|a_{ij}\|$ — произвольная $n \times n$ матрица, такая, что $\det A \neq 0$. Тогда замена переменных в интеграле (8.1.4) дает:

$$\big(f(Ax - a), \varphi(x)\big) = \int f(Ax - a)\,\varphi(x)\,dx = |\det A|^{-1}\int f(\overline{x})\,\varphi[A^{-1}(\overline{x} + a)]\,d\overline{x}.$$

Это уравнение определяет линейное преобразование произвольных распределений:

$$\big(f(Ax - a), \varphi(x)\big) = \big(|\det A|^{-1} f(\overline{x}), \varphi[A^{-1}(\overline{x} + a)]\big), \tag{8.4.4}$$

или, принимая снова обозначение x для $\overline{x}$:

$$\big(f(Ax - a), \varphi(x)\big) = \big(|\det A|^{-1} f(x), \varphi[A^{-1}(x + a)]\big). \tag{8.4.5}$$

8.4.2. Замена переменных в δ-функции. Пусть функция $p(x)$ переменных x удовлетворяет условиям $p(0) = 0$, $p'(0) \neq 0$. Тогда

$$\delta\big(p(x)\big) = \frac{1}{p'(0)}\,\delta(x). \tag{8.4.6}$$

Если $p(x)$ имеет несколько нулей, например, в точках $a_1, \ldots, a_s$ и если $p'(a_\sigma) \neq 0$ для всех $\sigma = 1, 2, \ldots, s$, то (см., например, [14, гл. VI, § 3.3, уравнение (2)]):

$$\delta\big(p(x)\big) = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{1}{p'(a_\sigma)}\,\delta(x - a_\sigma). \tag{8.4.7}$$

Пример 8.4.1. Приложение (8.4.7) к $\delta(x^2 - a^2)$, $a \neq 0$, дает:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\,[\delta(x - a) - \delta(x + a)]. \tag{8.4.8}$$

В случае нескольких переменных $x = (x^1, \ldots x^n)$ уравнение (1.2.52) дает:

$$\delta\big(p(x)\big) = \frac{1}{|J(0)|}\,\delta(x), \quad J(0) = \det\left\|\frac{\partial p^i}{\partial x^j}\right\|_{x=0}. \tag{8.4.9}$$

8.4.3. Произвольная группа преобразований. Рассмотрим произвольное преобразование T точек $x \in \mathbb{R}^n$ в $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\overline{x} = Tx. \tag{8.4.10}$$

Преобразование T записывается в координатах в следующем виде:

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и его якобиан есть

$$J = \det\left\|\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\right\|. \tag{8.4.11}$$

Предположим, что $J \neq 0$ и что функции $\overline{x}^i(x)$ бесконечно дифференцируемы.

Определение 8.4.1. Преобразование $f \to \overline{f}$ произвольного распределения f в распределение $\overline{f}$ в соответствии с (8.4.10) определяется следующим уравнением:

$$\big(f(Tx), \varphi(x)\big) = \big(\overline{f}(\overline{x}), \varphi(T^{-1}\overline{x})\big). \tag{8.4.12}$$

Определение 8.4.1 аргументируется линейными преобразованиями. А именно, формула сдвига (8.4.1) имеет вид (8.4.12) при $Tx = x - a$ и $\overline{f} = f$. Аналогично, преобразование (8.4.4) имеет вид (8.4.12) при $Tx = Ax - a$ и $\overline{f} = |\det A|^{-1} f$.

Для получения преобразования распределений, соответствующих (8.4.10), мы повторим рассуждения, которые использовались в случае линейных преобразований. А именно, пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{R}^n$. Формула замены переменных в интеграле дает:

$$\big(f(Tx),\, \varphi(x)\big) = \int f(Tx)\, \varphi(x)\, dx = \int J^{-1} f(\overline{x})\, \varphi(T^{-1}\overline{x})\, d\overline{x}.$$

Это объясняет справедливость следующего уравнения для *произвольных распределений*:

$$\big(f(Tx), \varphi(x)\big) = \big(J^{-1} f(\overline{x}),\, \varphi(T^{-1}\overline{x})\big), \tag{8.4.13}$$

где J — якобиан (8.4.11). После введения обозначения x для $\overline{x}$ в правой части уравнение (8.4.13) может быть представлено в следующем виде:

$$\big(f(Tx), \varphi(x)\big) = \big(J^{-1} f(x), \varphi(T^{-1}x)\big). \tag{8.4.14}$$

Сравнение уравнения (8.4.13) с уравнением (8.4.12) приводит к определению следующего преобразования произвольных распределений:

$$\overline{f} = J^{-1} f. \tag{8.4.15}$$

Пример 8.4.2. Для масштабного преобразования $\overline{x} = xe^a$ в $\mathbb{R}^n$ формула (8.4.15) дает:

$$\overline{f} = e^{-na} f. \tag{8.4.16}$$

Пример 8.4.3. Рассмотрим двумерный случай и выберем группу вращения

$$\overline{x} = x\cos a + y\sin a, \quad \overline{y} = y\cos a - x\sin a.$$

Формула (8.4.15) дает:

$$\overline{f} = f. \tag{8.4.17}$$

8.4.4. Инфинитезимальное преобразование распределений. Рассмотрим однопараметрическую группу G преобразований в $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{x} = T_a(x) \tag{8.4.18}$$

с инфинитезимальным преобразованием

$$\overline{x}^i \approx x^i + a\xi^i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.4.19}$$

Согласно уравнению (8.4.15), мы распространяем действие группы на распределения f следующим образом:

$$\overline{x} = T_a(x), \quad \overline{f} = J^{-1} f. \tag{8.4.20}$$

Здесь якобиан (8.4.11), $J = \det \|\partial \overline{x}^i / \partial x^j\|$, положителен в предположении, что параметр группы a принимает малые значения.

Распространение понятия преобразований (8.4.20) на ряд Тейлора при значениях a вблизи $a = 0$ с учетом того, что $J = 1$ при $a = 0$, дает, с учетом формы инфинитезимального преобразования x (8.4.19), следующее инфинитезимальное преобразование f:

$$\overline{f} \approx f - af \left[\frac{dJ}{da}\Big|_{a=0} \right].$$

Применяя правило дифференцирования детерминантов (см. раздел 1.3.6) к якобиану (8.4.11), получаем следующее уравнение (см. задачу 8.7):

$$\frac{dJ}{da}\Big|_{a=0} = D_i(\xi^i), \tag{8.4.21}$$

где

$$D_i(\xi^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \cdot$$

Таким образом, инфинитезимальное преобразование (8.4.19) независимых переменных сопровождается следующим инфинитезимальным преобразованием распределений:

$$\overline{f} \approx f - a\, D_i(\xi^i)\, f. \tag{8.4.22}$$

В частности, полагая $f(x) = \delta(x)$ и принимая во внимание (8.2.2), получаем инфинитезимальное преобразование δ-функции:

$$\overline{\delta} \approx \delta - a \left[D_i(\xi^i)\big|_{x=0} \right] \delta. \tag{8.4.23}$$

Задачи к главе 8

8.1. Пусть x — единственная переменная. Найти действие производных от δ-функции на тестовые функции. А именно, вычислить

а) $\big(\delta'(x), \varphi(x)\big)$, б) $\big(\delta''(x), \varphi(x)\big)$, в) $\big(\delta'(x - x_0), \varphi(x)\big)$.

8.2. Вычислить следующие обобщенные функции:

а) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\varepsilon x}{\pi (x^2 + \varepsilon^2)^2}$, б) $\displaystyle\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\nu}^{\nu} i\xi e^{i\xi x}\, d\xi$, в) $\displaystyle\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\nu}^{\nu} \xi^2 e^{i\xi x}\, d\xi$.

8.3. Пусть $\alpha(x)$ — C^∞-функция, а f — любое распределение. Доказать, что

$$\big(\alpha(x) f\big)' = \alpha'(x) f + \alpha(x) f'.$$

8.4. Пусть $\alpha(x)$ — любая C^∞-функция. Доказать, что

$$\big(\alpha(x)\theta(x)\big)' = \alpha(0)\delta(x) + \theta(x)\alpha'(x).$$

8.5. Доказать справедливость уравнения (8.2.6),

$$\big(f(x)\otimes g(t), \varphi(x)\psi(t)\big) = \big(f(x), \varphi(x)\big)\big(g(t), \psi(t)\big).$$

8.6. Доказать справедливость уравнения (8.2.8), $\delta(x)\otimes\delta(t) = \delta(x, t)$.

8.7. Доказать справедливость уравнения $f * g = g * f$ для свертки (8.2.10) регулярных распределений.

8.8. Доказать свойства свертки (8.2.14) и (8.2.15).

8.9. Проверить справедливость (8.3.4) для $n = 2$ и $n = 3$.

8.10. Вычислить распределение $\Delta(\ln r)$, где $n = 2$, и доказать справедливость уравнения (8.3.11).

8.11. Обсудить уравнение (8.3.9).

8.12. Доказать справедливость уравнения (8.4.21).

8.13. Пусть $\alpha(x)$ — любая C^∞-функция. Доказать, что

$$\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x).$$

8.14. Рассмотреть замену переменных x, заданную с помощью $y = p(x)$ в предположении, что $p(0) = 0$, $p'(0) \neq 0$. Доказать справедливость уравнения (8.4.6), $\delta\big(p(x)\big) = p'(0)^{-1}\delta(x)$.

8.15. Пусть функция $p(x)$ имеет несколько нулей, например, в точках $a_1, \ldots, a_s$, и пусть $p'(a_\sigma) \neq 0$ для всех $\sigma = 1, 2, \ldots, s$. Доказать справедливость уравнения (8.4.7):

$$\delta\big(p(x)\big) = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{1}{p'(a_\sigma)}\,\delta(x - a_\sigma).$$

8.16. Продифференцировать уравнение (8.4.8), $\delta(x^2 - a^2) = [\delta(x - a) - \delta(x + a)]/(2a)$.

Глава 9

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Эта глава содержит новый теоретико-групповой подход к задачам с начальными условиями, основанный на *принципе инвариантности*. Метод эффективен для решения линейных уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Дополнительная литература: Ibragimov N.H. [39, глава 3].

9.1. Введение

Методы групп Ли обычно обвиняют в том, что они непригодны, в частности, для решения *задачи с начальными условиями*. Это связано с тем, что произвольные начальные условия разрушают группу симметрии изучаемого дифференциального уравнения. Однако в [9] показано, что фундаментальные решения классических уравнений математической физики имеют фактически групповые инвариантные решения. Это наблюдение, усиленное формулировкой *принципа инвариантности* задач с начальными условиями, привело к развитию систематического теоретико-группового подхода к нахождению фундаментальных решений [11]. Этот новый подход объединяет философию симметрий Софуса Ли с теорией распределений.

Ключевым моментом успеха теоретико-группового подхода к задаче нахождения фундаментальных решений является то, что задаче с начальными условиями, определяемыми фундаментальными решениями, в отличие от общей задачи с произвольными граничными и начальными условиями, присущи определенные симметрии дифференциальных уравнений. Вследствие этого можно находить фундаментальные решения, представляя их как инвариантные решения, соответствующие группе симметрии задачи.

Фундаментальные решения эллиптических и гиперболических уравнений являются обычными функциями и могут быть получены с помощью классической теории Ли (см. разделы 9.2.3 и 9.2.4). Однако в случае гиперболических уравнений фундаментальными решениями являются распределения (см. раздел 9.4). Следовательно, в этих задачах нужны дифференциальные уравнения с распределениями, представленными в разделе 9.4.2.

Новый метод, в отличие от метода преобразований Фурье, не зависит от выбора координат и применим не только для линейных уравнений с *постоянными коэффициентами*, но также и для уравнений с *переменными коэффициентами*.

9.2. Принцип инвариантности

9.2.1. Формулировка принципа инвариантности. Общий принцип, сформулированный в [9] (см. также [40]) и называемый *принципом инвариантности*, применяет теорию групп Ли для решения задачи с граничными условиями, и в частности с начальными условиями, или задачи Коши. Этот принцип устанавливает, что если дифференциальное уравнение допускает группу Ли G и если задача с граничными/начальными условиями инвариантна относительно подгруппы $H \subset G$, тогда можно искать решение задачи среди H-инвариантных решений рассматриваемого дифференциального уравнения. Принцип инвариантности применим как к линейным, так и к нелинейным уравнениям, но из этого следует также, что он применяется при построении фундаментальных решений для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. В связи с этим принцип инвариантности формулируется здесь только для линейных уравнений.

Определение 9.2.1. Пусть L — линейный дифференциальный оператор с частными производными, имеющий в качестве независимых координат $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Пусть дифференциальное уравнение $L(u) = f(x)$ допускает группу G. Тогда говорят, что задача с граничными условиями

$$L(u) = f(x), \quad u\big|_S = h(x) \tag{9.2.1}$$

является инвариантом подгруппы $H \subset G$, если

1) многообразие S является инвариантом подгруппы H,

2) граничное (начальное) условие $u\big|_S = h(x)$ является инвариантом группы $\widetilde{H}$, индуцированной на S с помощью H, то есть $\widetilde{H}$ есть действие подгруппы H, ограниченной на S.

Принцип инвариантности: Если задача с граничными (начальными) условиями (9.2.1) — инвариант группы H, можно находить решение задачи среди функций, которые являются инвариантами H.

9.2.2. Фундаментальное решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Определение 9.2.2. Фундаментальное решение для линейного дифференциального оператора L с постоянными коэффициентами есть обобщенная функция $\mathcal{E}$, такая, что

$$L\mathcal{E} = \delta. \tag{9.2.2}$$

Характеристическое свойство фундаментальных решений формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 9.2.1. Пусть $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение для линейного дифференциального оператора L с постоянными коэффициентами. Тогда решение неоднородного уравнения

$$Lu = f \tag{9.2.3}$$

находится в виде

$$u = \mathcal{E} * f. \tag{9.2.4}$$

Доказательство. Используя свойства (8.2.11)–(8.2.15) свертки, мы имеем:

$$Lu = L(\mathcal{E} * f) = (L\mathcal{E}) * f = \delta * f = f.$$

9.2.3. Приложение к уравнению Лапласа. Рассмотрим уравнение Лапласа с произвольным числом $n \geqslant 3$ переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$:

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0. \tag{9.2.5}$$

Симметрии уравнения (9.2.5) образуют конечномерную алгебру Ли, натянутую на операторы

$$\begin{aligned}
&X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j},\\
&Y_i = \left(2x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} + (2-n) x^i u \frac{\partial}{\partial u},\\
&Z_1 = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Z_2 = u \frac{\partial}{\partial u} \quad (i, j = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{9.2.6}$$

и бесконечномерную алгебру с генератором

$$X_\tau = \tau \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau = \tau(x)$ — произвольное решение уравнения Лапласа. Из этого следует, что мы можем положить $\tau(x) = 0$ и использовать только генераторы (9.2.6).

Найдем фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$. С этой целью можно применить принцип инвариантности к уравнению (9.2.2) для фундаментального решения:

$$\Delta \mathcal{E} = \delta(x). \tag{9.2.7}$$

А именно, будем рассматривать уравнение (9.2.7) как задачу с граничным условием, обладающую фиксированной особой точкой (в начале координат), где дана δ-функция. Для начала выделим из операторов (9.2.6) те операторы, которые оставляют инвариантной особую точку $x = 0$. Легко видеть, что этому свойству удовлетворяют все операторы (9.2.6), кроме генераторов смещения X_i $(i = 1, \ldots, n)$. Для генераторов вращения X_{ij} и растяжения Z_1 и Z_2 это очевидно, а то, что тест инвариантности $Y_i(x^k)\big|_{x=0} = 0$ для Y_i выполняется, следует из уравнения $Y_i(x^k) = 2x^i x^k - |x|^2 \delta^{ik}$.

Вернемся к инвариантности уравнения (9.2.7). Прежде всего, заметим, что уравнение (9.2.7) допускает операторы X_{ij}, поскольку лапласиан и δ-функция являются инвариантами по отношению к вращению. Что касается операторов растяжения Z_1 и Z_2, они не допускаются по отдельности. Следовательно, мы проверяем на инвариантность линейную комбинацию

$$Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + ku \frac{\partial}{\partial u} \cdot \tag{9.2.8}$$

Продолжим оператор (9.2.8) на вторые производные u_{ii} и расширим его действие на δ-функцию в соответствии с (8.4.23). Замечая, что в этом случае мы имеем $D_i(\xi^i) = n$, и выполняя продолжение, мы получаем оператор

$$\widetilde{Z} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + ku \frac{\partial}{\partial u} + (k-1)u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + (k-2)u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} - n\delta \frac{\partial}{\partial \delta} \cdot \tag{9.2.9}$$

Отсюда следует

$$\widetilde{Z}(\Delta u - \delta) = (k-2)\Delta u + n\delta.$$

Таким образом, условие инвариантности записывается в виде

$$\widetilde{Z}(\Delta u - \delta)\big|_{\Delta u = \delta} = (k - 2 + n)\delta = 0$$

и дает $k = 2 - n$. Итак, уравнение (9.2.7) допускает следующие операторы:

$$X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (2-n)u \frac{\partial}{\partial u} \cdot \tag{9.2.10}$$

Аналогично можно проверить, что операторы Y_i также допускаются. Но нам они не потребуются, и мы будем рассматривать их как *избыточную симметрию* фундаментального решения.

В соответствии с принципом инвариантности найдем инвариантные решения уравнения (9.2.7) по отношению к генераторам (9.2.10). Генераторы X_{ij} имеют два независимых инварианта, а именно u и $r = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$. Запишем оператор Z через эти инварианты:

$$Z = r \frac{\partial}{\partial r} + (2-n)u \frac{\partial}{\partial u},$$

и решим уравнение $Z\big(J(r,u)\big) = 0$, чтобы получить следующий инвариант для операторов (9.2.10):

$$J = ur^{n-2}.$$

Инвариантное решение представим в форме $J = C = \mathrm{const}$, откуда

$$u = Cr^{2-n}. \tag{9.2.11}$$

Из раздела 8.3 мы знаем, что функция (9.2.11) удовлетворяет уравнению (9.2.7) с точностью до постоянного множителя. А именно, сравнение (9.2.11) с (8.3.8) дает следующее значение константы C:

$$C = \frac{1}{(2-n)\,\omega_n},$$

где ω_n есть площадь поверхности единичной сферы. Таким образом, фундаментальное решение $\mathcal{E}_n$ уравнения (9.2.5) при $n \geqslant 3$ имеет вид (ср. с (8.3.12))

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\, r^{2-n} = \frac{\Gamma(n/2)}{2(2-n)\sqrt{\pi^n}}\, r^{2-n}. \tag{9.2.12}$$

Подведем итог: *Фундаментальное решение уравнения Лапласа* (9.2.5) *определяется условием инвариантности с точностью до постоянного множителя. Уравнение* (9.2.7) *играет роль только условия нормализации.*

Аналогично, принцип инвариантности можно применить в случае $n = 2$ и получить фундаментальное решение (ср. с (8.3.13))

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi} \ln r \tag{9.2.13}$$

уравнения Лапласа в случае двух переменных (5.2.25),

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{9.2.14}$$

В физически важном случае трех переменных, $n = 3$, формула (9.2.12) дает фундаментальное решение (ср. с (8.3.13))

$$\mathcal{E}_3 = -\frac{1}{4\pi\, r} \tag{9.2.15}$$

для пространственного уравнения Лапласа (1.3.20),

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{9.2.16}$$

9.2.4. Приложение к уравнению теплопроводности. Рассмотрим уравнение теплопроводности с n пространственными переменными $x = (x^1, \ldots, x^n)$:

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{9.2.17}$$

где Δ — n-мерный лапласиан в x^i (см. уравнение (9.2.5)).

Симметрии уравнения (9.2.17) образуют конечномерную алгебру Ли, натянутую на операторы

$$\begin{aligned}
&X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j},\\
&Z_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Z_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad Z_{0i} = 2t\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i u \frac{\partial}{\partial u},\\
&Y = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{4}\left(2nt + |x|^2\right) u \frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned} \tag{9.2.18}$$

и бесконечномерную алгебру с генератором

$$X_\tau = \tau \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau = \tau(t, x)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности. Пусть $\tau(t, x) = 0$. Используем только генераторы (9.2.18).

Уравнение (9.2.2) фундаментального решения $\mathcal{E}(t, x)$ имеет вид

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(t, x) \tag{9.2.19}$$

и является инвариантом группы со следующими генераторами:

$$\begin{gathered}
X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad Z_{0i} = 2t\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i u\frac{\partial}{\partial u},\\
Z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - nu\frac{\partial}{\partial u}\cdot
\end{gathered} \tag{9.2.20}$$

Уравнения (9.2.20) получаются повторением процедуры, использованной в случае уравнения Лапласа. А именно, их выбирают из генераторов (9.2.18), требуя выполнения условия инвариантности точки ($t=0,\ x=0$) и инвариантности уравнения (9.2.19).

Продемонстрируем применение принципа инвариантности. Инвариантами генераторов X_{ij} являются $t,\ r,\ u$. В пространстве этих инвариантов операторы Z_{0i} записываются в виде

$$Z_{0i} = x^i \left(2\,\frac{t}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - u\,\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Решая уравнения $Z_{0i}(J)=0$, мы получаем два инварианта вращения и преобразований Галилея, а именно t и $p=e^{r^2/(4t)}$. Переписывая последний оператор (9.2.20) в этих инвариантах:

$$Z = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} - np\,\frac{\partial}{\partial p}$$

и решая уравнение $Z(J)=0$, мы получаем следующий инвариант:

$$J = u\big(\sqrt{t}\,\big)^n e^{r^2/(4t)}.$$

Инвариантное решение определяется с помощью $J=\text{const}$, то есть имеет вид

$$u = \frac{C}{\big(\sqrt{t}\,\big)^n}\,e^{-r^2/(4t)}, \quad t>0.$$

Мы расширяем его на область $t<0$, полагая $u=0$ при $t<0$. Другими словами:

$$u = \frac{C\,\theta(t)}{\big(\sqrt{t}\,\big)^n}\,e^{-r^2/(4t)}, \tag{9.2.21}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда (8.1.5) от t. Уравнение (9.2.19) снова играет роль условия нормализации. А именно, в следующем разделе будет показано, что $C=\big(2\sqrt{\pi}\,\big)^{-n}$. Таким образом, мы приходим к следующему фундаментальному решению уравнения теплопроводности с n пространственными переменными:

$$\mathcal{E}_n = \frac{\theta(t)}{\big(2\sqrt{\pi t}\,\big)^n}\,e^{-r^2/(4t)}. \tag{9.2.22}$$

9.3. Задача Коши для уравнения теплопроводности

В этом разделе мы введем концепцию фундаментального решения для задачи Коши и вычислим его для уравнения теплопроводности с использованием принципа инвариантности. Из этих вычислений следует, что эффект тепловой диффузии может быть прямо получен из принципа инвариантности.

9.3.1. Фундаментальное решение задачи Коши.

Определение 9.3.1. Распределение $E(t,x)$ называется *фундаментальным решением задачи Коши* для уравнения теплопроводности, если оно решает следующую задачу с начальными условиями:

$$E_t - \Delta E = 0, \quad E\big|_{t=0} = \delta(x). \tag{9.3.1}$$

Теорема 9.3.1 (См. задачу 9.7). Пусть $E(t,x)$ — фундаментальное решение задачи Коши. Тогда решение задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{9.3.2}$$

находится сверткой E и начальной функции $u_0(x)$:

$$u(t,x) = E * u_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, E(t, x-\xi)\, d\xi. \tag{9.3.3}$$

Теорема 9.3.2. Пусть $E(t,x)$ — фундаментальное решение задачи Коши и $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Тогда

$$\mathcal{E} = \theta(t)\, E(t,x) \tag{9.3.4}$$

есть фундаментальное решение уравнения теплопроводности, то есть $\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(t,x)$.

Доказательство. Действительно, мы имеем:

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \theta'(t)\, E(t,x) + \theta(t)\,(E_t - \Delta E).$$

Отсюда, с учетом уравнений (9.3.1) и с использованием свойств (8.2.4), (8.2.2) и (8.2.8) распределения, мы в конечном счете приходим к уравнению (9.2.19):

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(t)\, E(t,x) = \delta(t)E(0,x) = \delta(t) \otimes \delta(x) = \delta(t,x).$$

9.3.2. Получение фундаментального решения задачи Коши из принципа инвариантности.

Лемма 9.3.1. Алгебра Ли, допускаемая задачей с начальными условиями (9.3.1), натянута на следующие операторы из (9.2.18):

$$X_{ij}, \quad Z_{0i}, \quad Z_1 - nZ_2, \quad Y, \quad i,j = 1,...,n. \tag{9.3.5}$$

Доказательство. Поскольку алгебру L допускает дифференциальное уравнение (9.2.17), можно рассмотреть только инвариантность начальных условий. В этой задаче начальное многообразие S определяется с помощью $t = 0$. Далее, инвариантность начальных условий (9.3.1) предполагает, в частности, что носитель $\delta(x)$, то есть точка $x = 0$, остается неизменной. Таким образом, определение 9.2.1 требует инвариантности уравнений $t = 0$ и $x = 0$. Это требование убирает из алгебры L операторы смещения X_i, X_0 и, следовательно, уменьшает (9.2.18) до

$$X_{ij}, \;\; Z_{0i}, \;\; Z_1, \;\; Z_2, \;\; Y.$$

Начальное условие (9.3.1) — инвариант для операторов X_{ij}, Z_{0i} и Y. Оно не является инвариантом двумерной алгебры с линейной оболочкой Z_1, Z_2. Следовательно, мы проверим тест на инвариантность для линейной комбинации

$$(Z_1 + kZ_2)\big|_{t=0} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + ku\frac{\partial}{\partial u}, \quad k = \text{const}.$$

Под действием этого оператора переменная u и δ-функция подвергаются преобразованиям:

$$\overline{u} \approx u + aku, \quad \overline{\delta} \approx \delta - an\delta.$$

Из этого следует, что $\overline{u} - \overline{\delta} = u - \delta + a(ku + n\delta) + o(a)$ и что

$$(\overline{u} - \overline{\delta})\big|_{u=\delta} = a(k+n)\delta + o(a).$$

Итак, условие инвариантности (9.3.1) имеет вид $k + n = 0$. Таким образом, мы приходим к операторам (9.3.5).

Теорема 9.3.3. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с n пространственными переменными имеет вид

$$E_n(t,x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^n}\, e^{-r^2/(4t)}. \tag{9.3.6}$$

$E = u(t,x)$ — это единственная функция, которая удовлетворяет начальному условию (9.3.1) и является инвариантом группы вращений, преобразований Галилея и растяжений с инфинитезимальными генераторами

$$X_{ij}, \quad Z_{0i}, \quad Z_1 - nZ_2, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{9.3.7}$$

Доказательство. Отметим сначала, что функционально независимые инварианты вращения — это t, r, u. Затем мы записываем ограничение операторов Галилея Z_{0i} на функции от этих инвариантов следующим образом:

$$Z_{0i} = x^i\left(2\,\frac{t}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - u\,\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Назависимыми инвариантами этих операторов являются t и $p = u\,\exp[r^2/(4t)]$. Последний оператор (9.3.7) запишется в этих переменных в виде

$$Z_1 - nZ_2 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} - np\,\frac{\partial}{\partial p}.$$

Он имеет только один независимый инвариант $J = t^{n/2}p = t^{n/2}u\,\exp[r^2/(4t)]$. Мы заключаем, что общая форма инвариантной функции $E = u(t,x)$ может быть получена из уравнения $J = C$, откуда

$$u = \frac{C}{\left(\sqrt{t}\,\right)^n}\, e^{-r^2/(4t)}, \quad t > 0.$$

Полагая в этом выражении $t \to 0$, учитывая начальные условия (9.3.1) и уравнение (8.1.12), мы получаем $C = \left(2\sqrt{\pi}\,\right)^{-n}$. Таким образом, мы приходим к (9.3.6).

Замечание 9.3.1. Фундаментальное решение (9.2.22) уравнения теплопроводности находится подстановкой (9.3.6) в уравнение (9.3.4).

9.3.3. Решение задачи Коши. Уравнения (9.2.22), (9.3.6), (9.3.3) и (9.2.4) дают следующий результат.

Теорема 9.3.4. Фундаментальное решение $\mathcal{E}$ уравнения теплопроводности (9.2.17) и фундаментальное решение E задачи Коши для уравнения теплопроводности имеют вид (9.2.22)

$$\mathcal{E} = \frac{\theta(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^n}\, e^{-r^2/(4t)}$$

и (9.3.6)

$$E(t,x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^n}\, e^{-r^2/(4t)}$$

соответственно. Решение задачи Коши (9.3.2),

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x),$$

с непрерывным начальным условием $u_0(x)$ определяется следующей формулой:

$$u(t,x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, \exp\left(\frac{-|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi, \quad t > 0. \tag{9.3.8}$$

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta u = f(t,x), \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{9.3.9}$$

с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $f(t,x)$ $(t \geqslant 0)$ и непрерывным начальным условием $u_0(x)$. Решение задачи (9.3.9) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\tau,\xi)}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\,\right)^n}\, \exp\left(\frac{-|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau\, + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, \exp\left(\frac{-|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{9.3.10}$$

9.4. Волновое уравнение

9.4.1. Предварительные сведения о дифференциальных формах. Пусть $\phi = \phi(x)$ — дифференцируемая функция, где $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Дифференциал от ϕ

$$d\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, dx^i$$

может быть представлен в компактной форме

$$d\phi = \phi_i\, dx^i,$$

где $\phi_i = \partial\phi(x)/\partial x^i$. Полезно следующее обобщение дифференциала.

Определение 9.4.1. *Дифференциальная 1-форма* есть выражение

$$\omega = a_i(x)\, dx^i, \tag{9.4.1}$$

где $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные функции.

Если, в частности, коэффициенты $a_i(x)$ — частные производные функции ϕ, тогда 1-форма ω есть дифференциал, а именно дифференциал функции ϕ:

$$\omega = d\phi.$$

Пусть S — поверхность в трехмерном пространстве (x, y, z). Обозначим dS *элемент площади поверхности* и $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ — единичную внешнюю нормаль к dS, где ν^1, ν^2 и ν^3 — компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ вдоль осей x, y и z соответственно. В теории поверхностных интегралов обычно используются обозначения ориентированных поверхностей и элементов поверхностей. А именно, *элемент ориентированной поверхности* (известный также как *элемент векторной площади*) определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\nu}\, dS = (\nu^1 dS,\ \nu^2 dS,\ \nu^3 dS).$$

Его компонентами являются проекции вектора $\boldsymbol{\nu} dS$ на координатные плоскости (y, z), (z, x) и (x, y) соответственно. Для их записи применяется следующее обозначение (ср. с разделом 1.3.4):

$$\nu^1 dS = dy \wedge dz, \quad \nu^2 dS = dz \wedge dx, \quad \nu^3 dS = dx \wedge dy. \tag{9.4.2}$$

Это обозначение предполагает, что мы используем ориентацию на dS, согласуясь с обычной правой тройкой векторов dx, dy, dz. Если изменяется ориентация, то меняют местами y и z и заменяют $\nu^1 dS$ на $-\nu^1 dS$. Таким образом, $dz \wedge dy = -\nu^1 dS$, и, следовательно, необходимо выбрать $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ и т. д. Внешнее произведение $dy \wedge dx$ соответствует векторному произведению векторов $\mathbf{dy}$ и $\mathbf{dx}$, направленных вдоль осей y и x соответственно.

В случае n независимых переменных x^i обобщение продемонстрированного выше построения приводит к формальному *внешнему умножению* $\wedge$, подчиняющемуся правилу

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \tag{9.4.3}$$

(в частности, $dx^i \wedge dx^i = 0$).

Определение 9.4.2. *Дифференциальная 2-форма* есть выражение

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j, \tag{9.4.4}$$

где $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — произвольные функции. В отличие от свойства (9.4.3) внешнего произведения, сумма (9.4.4) может быть приведена к виду

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j. \tag{9.4.5}$$

Определение 9.4.3. *Дифференциальная p-форма* (короче — p-форма) имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots\, i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \tag{9.4.6}$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $dx = (dx^1, \dots, dx^n)$ и $a_{i_1 \dots i_p}(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Суммирование распространяется на все значения $i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$ такие, что выполнено $i_1 < \dots < i_p$.

Исчисление внешних дифференциалов связано с операциями с дифференциальными формами и определяется с помощью формального *внешнего умножения* $\wedge$, подчиняющегося закону (9.4.3), и *внешнего дифференцирования*, определенного следующим образом:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j} \, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \tag{9.4.7}$$

В соответствии с (9.4.7) дифференциал $d\omega$ от p-формы ω является $(p+1)$-формой. Внешние дифференцирование и умножение форм удовлетворяют следующим правилам:

$$d^2\omega \equiv d(d\omega) = 0, \tag{9.4.8}$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega, \tag{9.4.9}$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta, \tag{9.4.10}$$

где ω есть p-форма и η есть q-форма. Если $p = n$, то любая n-форма записывается $\omega = a(x) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ и ее интеграл определяется выражением

$$\int \omega = \int a(x) \, dx^1 \dots dx^n. \tag{9.4.11}$$

Определение 9.4.4. Говорят, что форма ω *замкнута*, если

$$d\omega = 0, \tag{9.4.12}$$

и *точная*, если существует $(p-1)$-форма η, такая, что

$$\omega = d\eta. \tag{9.4.13}$$

Уравнение (9.4.8) показывает, что любая точная форма является замкнутой. Согласно следующему положению, известному как теорема Пуанкаре, справедливо и обратное утверждение.

Теорема 9.4.1. Дифференциальная форма ω замкнута, если и только если она является локально точной, то есть уравнение (9.4.13) выполняется в окрестности произвольной точки x.

Пример 9.4.1. В обозначении исчисления внешнего дифференциала определение 3.2.1 точного уравнения (3.2.3) означает, что левая часть

$$\omega \equiv M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy$$

уравнения (3.2.3) есть точная 1-форма (ср. с (9.4.1) при $n = 2$), то есть $\omega = d\Phi$. С учетом (9.4.7) и (9.4.3) дифференциал от ω приводится к виду

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \tag{9.4.14}$$

Поскольку теорема 9.4.1 устанавливает, что точность ω эквивалентна условию $d\omega = 0$, то уравнение (9.4.14) представляет собой классическое условие (3.2.6) точности.

Концепция интегрирующего множителя, обсуждавшаяся в разделе 3.2.3, также применима к дифференциальным формам. А именно, мы говорим, что $\mu(x)$ — интегрирующий множитель дифференциальной формы ω, если $d(\mu\omega) = 0$. В соответствии с результатом раздела 3.2.3 интегрирующий множитель существует для любой 1-формы.

Исчисление внешнего дифференциала позволяет обобщить три классические интегральные теоремы раздела 1.3.4 на интегралы более высокой размерности следующим образом.

Теорема 9.4.2. Пусть V — p-мерное многообразие (например, V — p-мерная область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $p \leqslant n$) с границей ∂V, и пусть ω является $(p-1)$-формой. Тогда имеет место следующая *формула Стокса*:

$$\int\limits_{\partial V} \omega = \int\limits_{V} d\omega. \tag{9.4.15}$$

Убедимся, что уравнение (9.4.15) приводится в частных случаях к теоремам Грина, Стокса и дивергентным теоремам.

Вывод теоремы Грина. В этом случае V — двумерная область в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим 1-форму

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{9.4.16}$$

Внешнее дифференцирование (9.4.7) дает:

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\wedge dy,$$

откуда, используя свойство (9.4.3) внешнего умножения, получаем:

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy. \tag{9.4.17}$$

Подставляя (9.4.16) и (9.4.17) в (9.4.15), учитывая определение (9.4.11) интегралов от дифференциальных форм, приходим к уравнению Грина (1.3.16):

$$\int\limits_{\partial V} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{V} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Вывод теоремы Стокса. Пусть V — двумерная область в $\mathbb{R}^3$ и пусть

$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \tag{9.4.18}$$

Применяя внешнее дифференцирование (9.4.7) и учитывая, что

$$dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0,$$

получаем:

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy + \\ + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}\,dx\wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\wedge dz$$

или

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx. \tag{9.4.19}$$

Подставляя (9.4.18) и (9.4.19) в (9.4.15), приходим к уравнению (1.3.17).

Вывод теоремы о дивергенции ($\dim V = 3$, $V \subset \mathbb{R}^3$). Переписав левую часть уравнения (1.3.18) с использованием уравнений (9.4.2), рассмотрим следующую 2-форму

$$\omega = A^1\,dy\wedge dz + A^2\,dz\wedge dx + A^3\,dx\wedge dy \equiv (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nu})\,dS. \tag{9.4.20}$$

Применяя дифференцирование (9.4.7) и учитывая, что, например, $dy\wedge dy\wedge dz = 0$, получаем:

$$d\omega = \frac{\partial A^1}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial A^2}{\partial y}\,dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial A^3}{\partial z}\,dz\wedge dx\wedge dy.$$

Используя свойство (9.4.9), можно записать:

$$d\omega = \operatorname{div}\mathbf{A}\,dx\wedge dy\wedge dz. \tag{9.4.21}$$

Подставляя (9.4.20) и (9.4.21) в (9.4.15), приходим к уравнению (1.3.18).

9.4.2. Дополнительные уравнения с распределениями. Рассмотрим поверхность в $\mathbb{R}^n$, задаваемую функцией $P(x) = 0$ при условии, что $P(x)$ непрерывно дифференцируема. Предположим, что $\nabla P \neq 0$ на поверхности $P(x) = 0$.

Определение 9.4.5. *Форма Лере* ([16, гл. IV, §1]) на поверхности $P(x) = 0$ есть $(n-1)$-форма ω, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$dP\wedge\omega = dx^1\wedge\dots\wedge dx^n.$$

Она может быть представлена в форме (см. [16])

$$\omega = (-1)^{i-1}\,\frac{dx^1\wedge\dots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\dots\wedge dx^n}{P_i} \tag{9.4.22}$$

для любого фиксированного i, такого, что $P_i \equiv \partial P(x)/\partial x^i \neq 0$.

Функция Хевисайда $\theta(P)$ на поверхности $P(x) = 0$ определяется с помощью

$$\theta(P) = \begin{cases} 1, & P \geqslant 0, \\ 0, & P < 0. \end{cases}$$

Она может быть отождествлена с распределением

$$\big(\theta(P), \varphi\big) = \int\limits_{P \geqslant 0} \varphi(x)\, dx. \tag{9.4.23}$$

δ-функция Дирака $\delta(P)$ на поверхности $P(x) = 0$ определяется с помощью

$$\big(\delta(P), \varphi\big) = \int\limits_{P=0} \varphi\omega, \tag{9.4.24}$$

где ω — форма Лере. Эти два распределения связаны уравнением (8.2.4):

$$\theta'(P) = \delta(P). \tag{9.4.25}$$

Используя приведенные распределения, мы можем сформулировать и решить *дополнительные дифференциальные уравнения*, а именно уравнения первого порядка, содержащие распределения. Они могут быть получены при решении задачи Коши для волновых уравнений. Начнем с простейшего уравнения этого типа. А именно, рассмотрим уравнение

$$xf' = 0 \tag{9.4.26}$$

с одной независимой переменной x. Его единственное классическое решение есть $f = \text{const}$. Оно имеет, однако, дополнительные решения в пространстве распределений. Действительно, выбирая $\alpha(x) = x$ в уравнении (8.2.2), $\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta$, получаем:

$$x\delta(x) = 0. \tag{9.4.27}$$

Учитывая, что $\theta'(x) = \delta(x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда от одной переменной x, мы заключаем, что уравнение (9.4.26) имеет, в распределениях, решение $f = \theta(x)$, отличное от $f = \text{const}$. Поскольку уравнение (9.4.26) линейно, линейная комбинация

$$f = C_1\, \theta(x) + C_2 \tag{9.4.28}$$

имеет решение в распределениях, содержащее две произвольные константы C_1 и C_2. В следующей теореме обобщаются уравнения (9.4.27) и (9.4.26).

Теорема 9.4.3. δ-функция Дирака (9.4.24) удовлетворяет следующим уравнениям:

$$P\delta(P) = 0, \tag{9.4.29}$$

$$P\delta^{(m)}(P) + m\delta^{(m-1)}(P) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{9.4.30}$$

Доказательство. Используя определение (9.4.24), имеем:

$$\big(P\delta(P),\, \varphi\big) = \big(\delta(P),\, P\varphi\big) = \int\limits_{P=0} P\varphi\omega = 0,$$

то есть уравнение (9.4.29). Далее, предполагая, что $\partial P/\partial x^i \neq 0$ (для некоторых i это может быть выполнено благодаря условию $\operatorname{grad} P \neq 0$), из (9.4.29) получаем, с помощью дифференцирования по x^i, уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x^i}\,\delta(P) + P\,\delta'(P)\,\frac{\partial P}{\partial x^i} = 0,$$

которое после деления на $\partial P/\partial x^i$ дает уравнение (9.4.30) при $m = 1$. Последующие дифференцирования приводят к уравнениям (9.4.30) при $m = 2, 3, \ldots$, что и завершает доказательство.

Теорема 9.4.4. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$Pf'(P) + mf(P) = 0 \tag{9.4.31}$$

имеет обобщенное решение в распределениях в виде

$$f = C_1\theta(P) + C_2 \qquad \text{при} \quad m = 0, \tag{9.4.32}$$

$$f = C_1\delta^{(m-1)}(P) + C_2P^{-m} \qquad \text{при} \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{9.4.33}$$

Доказательство. Используем теорему 9.4.3 и замечаем, что $f = P^{-m}$ — классическое решение уравнения (9.4.31). Более подробно см., например, [3].

9.4.3. Симметрии и определение фундаментальных решений для волнового уравнения. Рассмотрим волновое уравнение с несколькими пространственными переменными (см. уравнение (2.6.18)):

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{9.4.34}$$

где Δ — n-мерный лапласиан для переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Симметрии волнового уравнения (9.4.34) образуют конечномерную алгебру Ли, натянутую на операторы (ср. с генераторами (7.3.49) группы Лоренца)

$$\begin{aligned}
&X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j\,\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\,\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad X_{0i} = t\,\frac{\partial}{\partial x^i} + x^i\,\frac{\partial}{\partial t},\\
&Z_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} + x^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Z_2 = u\,\frac{\partial}{\partial u},\\
&Y_0 = \left(t^2 + |x|^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + 2tx^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} - (n-1)tu\,\frac{\partial}{\partial u},\\
&Y_i = 2tx^i\,\frac{\partial}{\partial t} + \left(2x^ix^j + \left(t^2 - |x|^2\right)\delta^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} - (n-1)x^iu\,\frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned} \tag{9.4.35}$$

где i, $j = 1, \ldots, n$, и бесконечномерную алгебру с генераторами

$$X_\tau = \tau(t, x)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau(t, x)$ — произвольное решение волнового уравнения. Положим $\tau(t, x) = 0$ и используем только генераторы (9.4.35).

Уравнение (9.2.2), определяющее фундаментальное решение $\mathcal{E}(t, x)$ волнового уравнения, имеет вид

$$\mathcal{E}_{tt} - \Delta\mathcal{E} = \delta(t, x). \tag{9.4.36}$$

Дадим определение фундаментального решения задачи Коши для волнового уравнения подобно тому, как мы это делали для уравнения теплопроводности. Заметим, что общая задача Коши с произвольными начальными условиями:

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \tag{9.4.37}$$

может быть сведена к следующей частной задаче Коши:

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = h(x). \tag{9.4.38}$$

Действительно, нетрудно проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 9.4.1. Пусть $v(t,x)$ и $w(t,x)$ — решения частной задачи Коши (9.4.38) при $h(x) = u_0(x)$ и $h(x) = u_1(x)$ соответственно. Тогда функция

$$u(t,x) = w(t,x) + \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \tag{9.4.39}$$

является решением общей задачи Коши (9.4.37).

Определение 9.4.6. Распределение $E(t,x)$ называется фундаментальным решением задачи Коши для волнового уравнения, если оно является решением следующей частной задачи Коши:

$$E_{tt} - \Delta E = 0 \ \ (t > 0), \quad E\big|_{t=0} = 0, \quad E_t\big|_{t=0} = \delta(x), \tag{9.4.40}$$

где

$$E\big|_{t=0} \equiv \lim_{t\to+0} E(t,x), \quad E_t\big|_{t=0} \equiv \lim_{t\to+0} \frac{\partial E(t,x)}{\partial t}\,\cdot$$

Теорема 9.4.5. Пусть $E(t,x)$ — фундаментальное решение задачи Коши. Тогда решение задачи Коши (9.4.38) имеет вид свертки E и начальной функции $h(x)$:

$$u(t,x) = E * h(x).$$

Замечание 9.4.1. Пусть $E(t,x)$ — фундаментальное решение задачи Коши. Тогда $\mathcal{E} = \theta(t)\,E(t,x)$ — фундаментальное решение волнового уравнения, то есть $\mathcal{E}_{tt} - \Delta\mathcal{E} = \delta(t,x)$.

9.4.4. Вывод фундаментального решения. Поступая так же, как в разделе 9.3.2, в соответствии с леммой 9.3.1, мы приходим к следующим результатам.

Лемма 9.4.2. Алгебра Ли, допускаемая уравнениями (9.4.40) для фундаментального решения, натянута на следующие операторы из (9.4.35):

$$X_{ij}, \ \ X_{0i}, \ \ Z_1 + (1-n)Z_2, \ \ Y_0, \ \ Y_i, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{9.4.41}$$

Мы получим фундаментальное решение задачи Коши для волновых уравнений при нечетном n. Фундаментальное решение для волнового уравнения при четном n может быть получено с помощью простого метода, известного как *метод спуска* Адамара. Этот метод представлен в [1] (см. также [11, 7]).

Теорема 9.4.6. Фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения (9.4.34) с нечетным числом пространственных переменных имеет вид:

$$E_1 = \frac{1}{2}\,\theta(t^2 - x^2) \quad \text{при} \quad n = 1, \tag{9.4.42}$$

$$E_3 = \frac{1}{2\pi}\,\delta\left(t^2 - r^2\right) \quad \text{при} \quad n = 3, \tag{9.4.43}$$

$$E_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi^{\,n-1}}}\,\delta^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left(t^2 - r^2\right) \quad \text{при} \quad n > 3. \tag{9.4.44}$$

Это устанавливается однозначно с помощью принципа инвариантности. А именно, $E(t, x)$, задаваемое уравнениями (9.4.42)–(9.4.44), представляет собой единственное распределение, которое является решением частной задачи Коши (9.4.40) и служит инвариантом группы вращений, преобразований Лоренца и растяжений с инфинитезимальными генераторами

$$X_{ij}, \quad X_{0i}, \quad Z_1 + (1-n)Z_2, \quad i, j = 1, ..., n. \tag{9.4.45}$$

Доказательство. Генераторы X_{ij}, X_{0i} вращения и преобразования Лоренца имеют два независимых инварианта, u и $p = t^2 - r^2$, где $r = |x|$. Ограничим действие генератора растяжения из (9.4.45) с учетом этих инвариантов:

$$Z_1 + (1-n)Z_2 = 2p\,\frac{\partial}{\partial p} + (1-n)u\,\frac{\partial}{\partial u} \tag{9.4.46}$$

и найдем инварианты распределений вида $u = f(p)$. Тест на инвариантность при действии оператора (9.4.46) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2p\,f'(p) + (n-1)\,f(p) = 0.$$

Положим $n = 2m + 1$ и перепишем это в виде (9.4.31):

$$p\,f'(p) + m\,f(p) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots\,.$$

Общее решение этого уравнения находится с использованием (9.4.32) $f(p) = C_1\theta(p) + C_2$ при $m = 0$ и с использованием (9.4.33) $f(p) = C_1\delta^{(m-1)}(p) + C_2 p^{-m}$ при $m \neq 0$. Таким образом,

$$u = C_1\,\theta(p) + C_2 \qquad (n = 1),$$

$$u = C_1\,\delta^{(\frac{n-3}{2})}(p) + C_2\,p^{\frac{1-n}{2}} \quad (n \geqslant 3).$$

Начальные условия в (9.4.40), совместно с известными уравнениями

$$\lim_{t\to 0}\delta^{(\frac{n-3}{2})}(p) = 0, \quad \lim_{t\to 0}\theta(p) = 0,$$

приводят к

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi^{\,n-1}}}, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, мы получили фундаментальные решения (9.4.42)–(9.4.44).

Заметим, что учет уравнения (8.4.8) приводит (9.4.43) к виду

$$E_3 = \frac{1}{4\pi r}\,[\delta(t-r) - \delta(t+r)].$$

9.4.5. Решение задачи Коши. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения имеет вид (5.4.11). Используя фундаментальное решение, можно получить решение волнового уравнения в случае $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Я сформулирую результат при $n = 3$ и $n = 2$.

Теорема 9.4.7. Решение задачи Коши

$$u_{tt} - k^2\Delta u = f(t,x), \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \tag{9.4.47}$$

имеет вид

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi k^2}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=kt} u_1(\xi)\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=kt} u_0(\xi)\,dS\right) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{|\xi-x|<kt} f\left(t - \frac{|\xi-x|}{k}, \xi\right)\frac{d\xi}{|\xi-x|}\right], \text{ при } \ n=3, \tag{9.4.48}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi k}\left[\int\limits_{|\xi-x|<kt}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{k^2t^2 - |\xi-x|^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<kt}\frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{k^2t^2-|\xi-x|^2}} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t\int\limits_{|\xi-x|<k(t-\tau)}\frac{f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{k^2(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}}\right], \quad \text{при } \ n=2. \tag{9.4.49}$$

9.5. Уравнения с переменными коэффициентами

Принцип инвариантности представляет собой эффективный метод получения фундаментальных решений для линейных уравнений с переменными коэффициентами. В качестве примера я представляю здесь фундаментальное решение уравнения Блека–Шоулса, полученное с применением принципа инвариантности. В [39, гл. 3] можно найти приложение принципа инвариантности к гиперболическим уравнениям с переменными коэффициентами, а именно к волновым уравнениям в криволинейном пространстве-времени с нетривиальной конформной группой.

Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения Блека–Шоулса (2.4.15) является распределением $E(t,x;\,t_0,x_0)$, удовлетворяющим следующей задаче с начальными условиями:

$$E_t + \frac{1}{2}\,A^2x^2E_{xx} + BxE_x - CE = 0 \ \ (t<t_0), \quad E\big|_{t\to -t_0} = \delta(x-x_0). \tag{9.5.1}$$

Применяя принцип инвариантности, можно получить следующее фундаментальное решение (см. [9] и список литературы в книге):

$$E(x,t;\,x_0,t_0) = \frac{1}{Ax_0\sqrt{2\pi(t_0-t)}}\exp\left[-\frac{(\ln x - \ln x_0)^2}{2A^2(t_0-t)} - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{K^2}{2A^2}+C\right)(t_0-t) - \frac{K}{A^2}(\ln x - \ln x_0)\right], \quad K = B - \frac{A^2}{2}\cdot \tag{9.5.2}$$

Задачи к главе 9

9.1. Получить фундаментальное решение (9.2.13) уравнения Лапласа для двух переменных, $u_{xx}+u_{yy}=0$, с помощью принципа инвариантности.

9.2. Доказать свойство (9.4.8) в случае 1-формы (9.4.16) для двух переменных.

9.3. Доказать свойство (9.4.8) в случае 1-формы (9.4.18) для трех переменных.

9.4. Доказать свойство (9.4.8) в случае произвольной p-формы (9.4.6).

9.5. Доказать свойство (9.4.9).

9.6. Доказать справедливость уравнения (9.4.25).

9.7. Доказать теорему 9.3, то есть убедиться, что если $E(t,x)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, то свертка

$$u(t,x) = E * u_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\,E(t,x-y)\,dy$$

является решением задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x).$$

9.8. Доказать теорему 9.4.5, то есть убедиться, что если $E(t,x)$ — фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения, то свертка $u(t,x) = E * h$ является решением задачи Коши (9.4.38):

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = h(x).$$

9.9. Найти решение (9.4.48) задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.

9.10. Найти решение (9.4.49) задачи Коши для двумерного волнового уравнения, применяя метод спуска решения (9.4.48) трехмерного волнового уравнения.

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978. — 351 с.
   Hadamard, *J.* Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press, New Haven, 1923. Revised French edition: *Le problème de Cauchy,* Paris, 1932.

2. *Владимиров В. С.*, *Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. Учебник для вузов. 5-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — 400 с.

3. *Гельфанд И. М.*, *Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Добросвет, 2000. — 412 с.
   Gel'fand, *I. M.*, and *Shilov*, *G. E.* Generalized functions, vol. 1. Fizmatgiz, Moscow, 1959. English translation by E. Saletan, Academic Press, N. Y., 1964.

4. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2, ч. 2. Дифференциальные уравнения / Пер. с франц. А. И. Некрасова; под ред. Б. К. Млодзеевского. — М.–П.: ГИЗ, 1923. — 308 с.
   Goursat, *E.* Differential equations. Ginn and Co, Boston, 1917. English translation by E. R. Hedrick and O. Dunkel of Goursat's classical *Cours d'analyse mathématique*, vol. 2, Part II.

5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1. Производные и дифференциалы. Определенные интегралы / Пер. с франц. А. И. Некрасова; под ред. Б. К. Млодзеевского. — М.–Л.: ГТТИ, 1933. — 368 с.
   Goursat, *E.* Cours d'analyse mathématique, Tome 1, 5th ed. Gauthier-Villars, Paris, 1956. English transl. *A course in mathematical analysis.*

6. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики / Пер. с нем. А. А. Самарского и Н. И. Яненко; под ред. А. Н. Тихонова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950. — 156 с.
   Sommerfeld, *A.* Partial differential equations in physics. Academic Press, New York, 1964. English translation by E. G. Straus of A. Sommerfeld's *Lectures on theoretical physics*, vol. VI.

7. *Ибрагимов Н. Х.* Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения // Теор. и матем. физ. 1969. Т. 1, № 3. С. 350–359.
   Ibragimov, *N. H.* Invariant variational problems and conservation laws. Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika 1, № 3 (1969), 350–359. English transl., Theor. Math. Phys., 1, № 3, (1969), 267–276.

8. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
   Ibragimov, *N. H.* Transformation groups applied to mathematical physics. Nauka, Moscow, 1983. English transl., Riedel, Dordrecht, 1985.

9. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика. Кибернетика. № 8. — М.: Знание, 1989. 47 с.
   Ibragimov, *N. H.* Introduction to modern group analysis, Revised edition in English: Tau, Ufa, 2000. 113 p. — Available also in Swedish: *Modern grouppanalys:*

En inledning till Lies lösningsmetoder av ickelinjära differentialekvationer, Studentlitteratur, Lund, 2002.

10. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика. Кибернетика. №7. — М.: Знание, 1991. 47 с.

11. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи матем. наук (к 150-летию Софуса Ли). 1992. Т. 47, №4. С. 83–144.
Ibragimov, *N.H.* Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie). English transl., Russian Math. Surveys, 47:2 (1992), 89–156.

12. *Кудрявцев Л.Д.*, *Кутасов А.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2005. 400 с.

13. *Кудрявцев Л.Д.*, *Кутасов А.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. Учебник. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2005. 424 с.

14. *Курант Р.*, *Гильберт Д.* Методы математической физики / Пер. с нем. З. Г. Либина и Ю. Л. Рабиновича. — 2-е изд., испр. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. Т. 2. — 544 с.
Courant, *R.*, *and Hilbert*, *D.* Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations, By R. Courant. Interscience Publishers, John Wiley, New York, 1962. Wiley Classics Edition Published in 1989.

15. *Курант Р.*, *Гильберт Д.* Методы математической физики / Пер. с нем. — 3-е изд., испр. Т. I. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. — 476 с.
Courant, *R.*, *and Hilbert*, *D.* Methods of mathematical physics. Vol. I. Interscience Publishers, John Wiley, New York, 1989.

16. *Лере Ж.* Гиперболические дифференциальные уравнения / Пер. с англ. Н. Х. Ибрагимова. — М.: Наука, 1984. — 207 с.
Leray, *J.* Hyperbolic differential equations. Lecture Notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1953.

17. *Мари Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях / Пер. с англ. В. Г. Бабского; под ред. А. Д. Мышкиса. — М.: Мир, 1983. — 397 с.
Murray, *J.D.* Mathematical biology. I: An introduction, 3rd ed. Springer, New York, 2002.

18. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство: Учебник. — 2-е изд., испр. и доп. — Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2010. 420 с.
Neimark, *Ju.I.* Mathematical Models in Natural Science and Engineering. Springer, 2003. 570 p.

19. *Нётер Э.* Инвариантные вариационные задачи. В кн.: Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630. *Noether*, *E.* Invariante Variationsprobleme. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft 2 (1918), 235–257. English transl., *Transport Theory and Statistical Physics,* vol. 1, №3, 1971, 186-207.

20. *Ньютон Исаак.* Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. и комментарии А. Н. Крылова; под ред. и с предисл. Л. С. Полака. — М.: Наука, 1989. 687 с.

Newton, *I.* Mathematical principles of natural phylosophy. Benjamin Motte, Middle-Temple-Gate, in Fleet Street, 1929. Translated into English by Andrew Motte, to which are added, *The laws of Moon's motion, according to gravity* by John Machin. 1st ed., 1687; 2nd ed., 1713; 3rd ed., 1726.

21. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. 399 с. См. также *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
Ovsyannikov, *L.V.* Group analysis of differential equations. English transl., ed. W.F. Ames, Academic Press, New York, 1982.

22. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. 635 с.
Olver, *P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag, New York, 1986. 2nd ed., 1993.

23. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 3-е изд., доп. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
Petrovsky, *I.G.* Lectures on partial differential equations, 3 ed. Fizmatgiz, Moscow, 1961. English transl., Interscience, New York, 1964. Republished by Dover, 1991. Translated from Russian by A. Shenitzer.

24. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. — М.: Наука, т. 4. ч. 1. 1974. *Smirnov*, *V.I.* A course of higher mathematics, vol. IV. Pergamon Press, New York, 1964. Translated from Russian by D.E. Brown, edited by I.N. Sneddon.

25. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики / Под ред. А.М. Ильина. — 5-е изд., испр. — М.: Наука, 1992. – 431 с.
Sobolev, *S.L.* Partial differential equations of mathematical physics. Dover, New York, 1989. Translated from Russian by E.R. Dawson, edited by T.A.A. Broadbent.

26. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1953. — 468 с.

27. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — 7-е изд. — М.: Изд. МГУ: Наука, 2004. — 798 с.
Tikhonov, *A.N.*, *and Samarskii*, *A.A.* Equations of mathematical physics, 2nd ed. Dover, New York, 1990. Translated from Russian.

28. *Уиттекер Э.Т.*, *Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа в 2-х ч. / Пер. с англ. Ф.В. Широкова. 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1962. Ч. 1. — 343 с.; 1963. Ч. 2. — 515 с.
Whittaker, *E.*, *and Watson*, *G.* A course of modern analysis, 4th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

29. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа: В 2 т. — М.–СПб.: Лань, 2005. Т. 1 — 440 с.; Т. 2 — 463 с.

30. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. С участием Д. Юэ / Пер. с франц. Ф.В. Широкова. — М.: Мир, 1965. — 412 с.
Schwartz, *L.* Métodes mathématiques de la physique. Hermann, Paris, 1961. English transl., Mathematics for the physical sciences, Addison-Wesley, Reading, 1966.

31. *Ames*, *W.F.* Nonlinear partial differential equations in engineering, vol. I. Academic Press, New York, 1965.

32. *Bluman*, *G.W.*, *and Kumei*, *S.* Symmetries and Differential Equations. Springer-Verlag, New-York, 1989.

33. *Cantwell*, *B.J.* Introduction to symmetry analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

34. *Duff*, *G.F.D.* Partial differential equations. University of Toronto Press, Toronto, 1956.

35. *Euler*, *L.* Integral Calculus. Vol. III, Part 1, Chapter II, 1769/1770.

36. *Greenberg*, *M.* Advanced engineering mathematics, 2nd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.

37. *Ibragimov*, *N.H.*, Ed. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. CRC Press Inc., Boca Raton, 1994.

38. *Ibragimov*, *N.H.*, Ed. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 2: Applications in engineering and physical sciences. CRC Press Inc., Boca Raton, 1995.

39. *Ibragimov*, *N.H.*, Ed. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 3: New trends in theoretical developments and computational methods. CRC Press Inc., Boca Raton, 1996.

40. *Ibragimov*, *N.H.* Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

41. *Ibragimov*, *N.H.* Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians. Journal of Mathematical Analysis and Applications 318, № 2 (2006), 742–757.

42. *Laplace*, *P.S.* Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles. Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris 23, № 24 (1773), 341–402. Reprinted in: P. S. Laplace, *Oevres complètes,* t. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1893, pp. 5–68; English Translation, New York, 1966.

43. *Lie*, *S.* Klassifikation und Integration von gewönlichen Differentialglei-chungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III. Archiv for Matematik og Naturvidenskab (Abbr. Arch. for Math.) 8, Heft 4 (1883), 371–458. Reprinted in Lie's Ges. Abhandl., vol. 5, 1924, paper XIV, pp. 362–427.

44. *Lie*, *S.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. (Bearbeited und herausgegeben von Dr. G. Scheffers), B. G. Teubner, Leipzig, 1891.

45. *Murray*, *J.D.* Mathematical biology. II: Spatial models and biomedical applications, 3rd ed. Springer, New York, 2003.

46. *Simmons*, *G.F.* Differential equations with applications and historical notes, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1991.

Предметный указатель