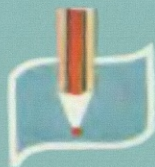
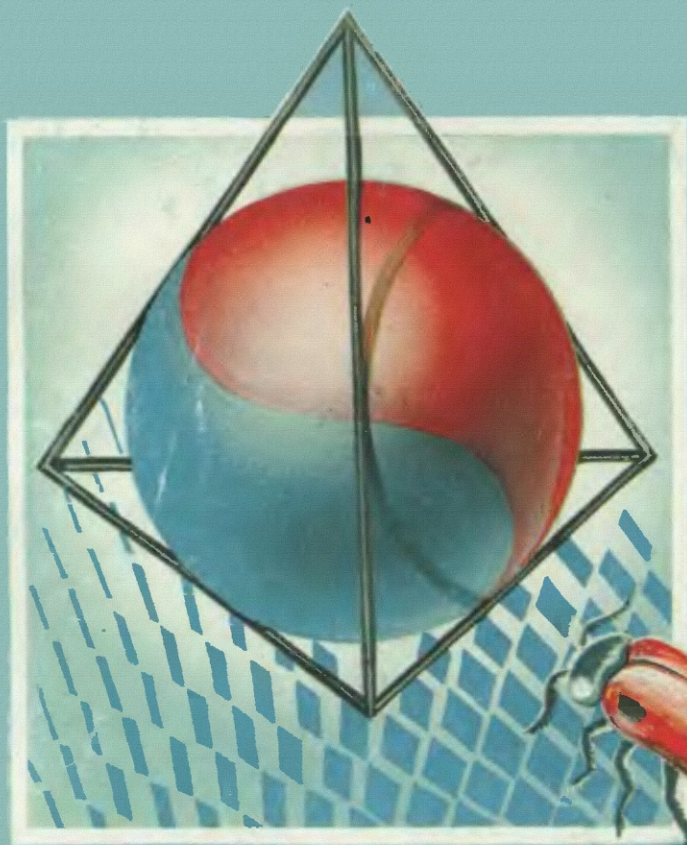


**О.П.Эрдниев**



# От задачи к задаче – по аналогии



ПОМОЩЬ УЧИТЕЛЮ

***В ПОМОЩЬ УЧИТЕЛЮ***

**О. П. Эрдниев**

**ОТ ЗАДАЧИ  
К ЗАДАЧЕ —  
ПО АНАЛОГИИ**

**Развитие  
математического  
мышления**

**КАЛМЫЦКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ. ЭЛИСТА  
"СТОЛЕТИЕ". МОСКВА  
1998**

УДК 510(023)=82

ББК 22.1 я721.6

Э 75

Под редакцией *П. М. Эрдниева*

## **Э 75 Эрдниев О. П.**

**От задачи к задаче — по аналогии/Развитие математического мышления/ Под ред. П. М. Эрдниева.—М.: АО «СТОЛЕТИЕ», 1998. — 288 с. с илл.**

ISBN 5-7459-0100-4

Обычно обучение математике ограничивается решением пусть разнообразных, но готовых, придуманных авторами учебников задач. Однако гораздо увлекательнее и продуктивнее, осознав процесс математического творчества, научиться создавать собственные задачи и теоремы и находить способы их решения. Этому важному творческому умению и посвящена книга.

Авторы, опираясь на свой практический опыт обучения, подробно раскрывают технологию изобретения новых теорем посредством умозаключений по аналогии. Во многих случаях прототипом оригинальных суждений служат исторические задачи, носящие имена первооткрывателей (школьный курс 7—9 классов).

Для учащихся, учителей математики и лиц, интересующихся математикой.

УДК 510(023)=82

ББК 22.1 я721.6

Книга издана за счет средств авторов.

ISBN 5-7459-0100-4

© О. Эрдниев, 1998

© АО «СТОЛЕТИЕ». Оформление, 1998

## Предисловие

В сфере математического творчества существует область деятельности, которой с увлечением занимаются как специалисты, так и любители этой древнейшей и вечно юной науки. Мы имеем в виду сочинения по занимательной математике.

Звездой первой величины в этом жанре математического просвещения, несомненно, является профессор Мартин Гарднер (США). Многочисленные его книги, переведенные на русский язык математиками Ю. Даниловым и И. Ягломом, постоянно находят благодарных читателей в нашей стране. Справедливо утверждает проф. Кларнер, редактор сборника, посвященного 60-летию Гарднера: «... роль Мартина Гарднера в популяризации науки — порою незаметная, скрытая — чрезвычайно велика и заслуживает огромной признательности»\*.

Наша книга также преследует цель популяризации математики и предназначена для «внеклассного чтения». Однако по своему содержанию она отличается от подобных работ других авторов.

Обычно в изданиях по занимательной математике приводятся решения (нередко изящные, неожиданные) задач, заимствованных из других источников. Рассматриваемые задачи не являются продуктом личной умственной деятельности автора, а потому за рамками изложения остается сам процесс умственного эксперимента, его психологические детали, процедура поиска. А ведь представление о том, как было сделано открытие, как получен результат, не менее важно, чем само решение, ибо пробуждает и развивает творческие способности, обогащает человека эмоционально, включает пусковой механизм мысли. Поэтому работу с книгой мы рассматриваем как своеобразную умственную гимнастику, опыт творческого применения знаний, полученных при изучении школьного курса математики.

Живой, неподдельный аромат новизны несут и такие математические тексты, где авторы, не огра-

---

\* Математический цветник. — М., 1983. С. 9.



ничиваясь строгим описанием логики найденного ими обобщения, разъясняют кроме того (и как можно подробнее!) все перипетии своих размышлений, удачи и заблуждения, которые всегда идут рука об руку при конструировании задачи или теоремы. Лучше всего это удается, когда авторы рассказывают о *собственных* умозаклчениях и открытих ими теоремах.

В последующих беседах речь пойдет именно о таких, пусть скромных, но *собственных* обобщениях, содержательно интересных для читателя. Не случайно мы дали книге подзаголовок «Развитие математического мышления».

Дабы отличить известное от неизвестного, заимствованное от самостоятельно найденного, мы помечаем свои суждения большой цифрой. В этих поисках авторам помогали своими находками и предложениями сотрудники каферы алгебры, геометрии и методики математики Калмыцкого университета. Разумеется, читатели могут обнаружить наши задачи в каких-либо иных источниках, нам не известных; мы будем рады таким сообщениям, уточняющим суть дела.

Содержание книги специально акцентировано на приемах получения нового математического суждения исходя из известных знаний посредством перекомбинирования их, а также включения в исходную матрицу трехмерных аналогов на основе соответствующих плоскостных представлений. В дидактическом отношении здесь речь идет о приемах творческого расширения и углубления знаний школьного программного минимума. Как может заметить читатель книги, результативность такого мысленного эксперимента обеспечивается одновременной актуализацией всех кодовых систем мозга, всего ассоциативного богатства, возникшего за время обучения. Иначе говоря, *слово, рисунок, модель (предмет), символ и число* используются совместно и в сочетаниях как носители информации, способной как бы к самовозрастанию.

Знаменитый физик Гиббс говорил, что, кроме всего остального, «математика — это язык» (имеется в виду, что математика — особый символический язык). Человек, вооруженный методом аналогии, обретает новое мыслительное средство создания

крупных блоков знаний, большей частью двухэлементных: теорема для двумерной плоскости очень часто имеет свое трехмерное толкование (пусть и с сужением области истинности). В данной связи для авторов особую значимость имеет сентенция Сади Карно: «Знаки умнее нас!»

Осуществление аналогий существенно облегчается при совершенствовании символических записей, а нередко при изобретении новых знаков; очень часто малозаметная деталь в записи оказывается единственным поводом к успешным обобщениям и умозаключениям. Приведем некоторые из этих необычных на первый взгляд наших символических находок.

1. Координаты точки удобно записывать в строчку, а координаты вектора — в столбец:

$$A = (3; 4; 5),$$

$$\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Знак импликации (следования) записывать всегда одной линией, причем в вертикальном направлении. Приведем запись открытой нами теоремы: для того, чтобы шестигранник (гексаэдр) был полуописанным, необходимо и достаточно, чтобы были равны периметры противоположных граней (или чтобы суммы противоположных трехгранных углов\* были равны).

$$P_1 + P' = P_2 + P'' = P_3 + P'''$$

↓ ↑

$$\hat{\hat{A}}_1 + \hat{\hat{A}}' = \hat{\hat{A}}_2 + \hat{\hat{A}}'' = \hat{\hat{A}}_3 + \hat{\hat{A}}'''$$

3. Граф-схема первого признака равенства треугольников:

---

\* Всюду далее двумя «крышками» мы обозначаем величину двугранного угла, тремя — трехгранного, а четырьмя — четырехгранного.

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & B_1 C_1 = B_2 C_2 & \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \underbrace{\hspace{10em}} & \Downarrow & \\ \Delta A_1 B_1 C_1 = \Delta A_2 B_2 C_2 & & \end{array}$$

4. В главах, посвященных тригонометрическим преобразованиям, мы используем функциональные обозначения:  $P$  (перенос),  $S$  (симметрия),  $G$  (гомотетия),  $R$  (растяжение),  $W$  (вращение).

Вращение линии  $l_1$  вокруг оси  $Oy$  создает поверхность  $\lambda_1$ :

$$W_{Ox}(l_1) = \lambda_1.$$

Симметрия точки-прообраза  $A_n = (x_n, y_n, z_n)$  относительно плоскости  $xOy$  создает точку-образ  $A^{об} = (x^{об}, y^{об}, z^{об})$ :

$$S_{xOy}(A_n) = A^{об}, \quad S_{xOy}(x_n, y_n, a) = (x_n, y_n, -a).$$

5. В теоремах из проективной геометрии мы добились повышения выразительности большей величиной общего символа:

$$\frac{AB}{AC} = A \frac{B}{C}.$$

6. Введение двойного индекса обеспечивает соблюдение цикличности обозначений; например, теорема Чевы записывается так:

$$\frac{A_1 \chi_{23}}{\chi_{23} A_2} \cdot \frac{A_2 \chi_{13}}{\chi_{13} A_3} \cdot \frac{A_3 \chi_{12}}{\chi_{12} A_1} = 1.$$

7. Цикличность обозначений существенно облегчила информативность параграфа «Фундаментальная четверка»

на плоскости:	$A_1 A_2 = a_3$	$S_{\alpha_3}(A) = B_3$
в пространстве:	$A_1 A_2 A_3 = \alpha_4$	$S_{\alpha_4}(A) = B_4$

## Беседа 1 (вводная)

# УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ ПО АНАЛОГИИ\*

Аналогия иногда бывает так поразительна, что трудно подвергать сомнению вывод, которому она благоприятствует. Если же отказаться от ее пособия, то часто надобно будет отказаться от всякого положительного вывода.

Н. Г. Чернышевский

В последующих главах книги мы представим читателю значительную область впервые составленных нами задач и теорем трехмерной геометрии, тогда как двумерные прототипы описаны и исследованы достаточно подробно в учебниках и пособиях. Предлагая эти *новые* обобщения, мы хотим показать, что творцом математических утверждений (теорем), неизвестных ранее, может стать с пользой для себя каждый учитель, студент или старшеклассник.

Аналогия как активная форма умозаключений, будучи основным компонентом творческого мышления, имеет следующую структуру:

*Первое суждение.* Предмет А обладает свойствами  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

*Второе суждение.* Предмет Б обладает свойствами  $X$ ,  $Y$ .

*Заключение.* Вероятно, предмет Б обладает и (третьим) свойством  $Z$ .

Аналогия в мышлении человека находит широчайшее применение. Математический материал по своему содержанию чрезвычайно удобен для упражнений в творческих умозаключениях по аналогии.

В истории всегда можно найти поворотные, ключевые моменты, когда именно аналогия помогла исследователям понять наблюдаемое и сделать открытия. Приведем некоторые факты.

До открытия алмазных месторождений в Якутии было известно, что геологическое строение Южно-Африканского плоскогорья и Восточно-Сибирской платформы имеет много общего. Когда в устье

---

\* Аналогия — в широком смысле соответствие, сходство предметов, явлений, процессов в каких-либо свойствах.

одной из рек Якутии обнаружили голубоватый минерал, который находили ранее в алмазных жилах Южной Африки, возникло предположение о наличии алмазных россыпей и в Якутии. Последовавшие затем настойчивые поиски геологов подтвердили это предположение.

Подобные суждения по аналогии встречаются часто и в обыденной жизни. Они присутствуют в логике рассуждений врача, не могут без них обойтись и юристы.

По аналогии приходят к открытиям ученые. В биологии Чарльз Дарвин ввел в употребление понятие «естественный отбор» исходя из аналогичного явления — искусственного отбора, веками практикуемого человеком для улучшения породы домашних животных.

Д. И. Менделеев совершил великий научный подвиг, открыв периодическую систему элементов. На основе своей таблицы он предсказал свойства еще не открытых химических элементов: в размышлениях великого химика немалую роль сыграла опять же аналогия. Так, в одной из групп веществ таблицы Менделеева оказалось пять элементов:  $S_{32}$  (сера),  $As_{75}$  (мышьяк),  $Se$  (селен) — неизвестный тогда еще элемент,  $Br_{85}$  (бром),  $Te_{127}$  (теллур). Требовалось определить атомный вес еще не найденного элемента — селена, занимавшего в данной группе из пяти элементов среднее положение. Менделеев применил простейшую формулу среднего арифметического атомных весов:

$$x = \frac{1}{4}(32 + 75 + 85 + 127) \approx 78,5.$$

Действительный атомный вес селена (79), определенный точно позднее, оказался весьма близким к предсказанному. На справедливость данного умозаключения указывало еще и то, что в других подобных группах соседних элементов было подмечено аналогичное им соотношение атомных весов.

Знаменитая таблица Менделеева, вобравшая в себя глубокие аналогии свойств элементов природы, послужила базой следовавших многочисленных открытий в химии и физике; информация, скрытая в клетках этой таблицы, и ныне еще не вся выявлена. Д. И. Менделеев называл идею мат-

рицирование знаний мощным инструментом мысли, позволяющим прогнозировать процесс науки. Так, в дальнейшем было обнаружено, что отдельные группы элементов, расположенных в соседних клетках диагонали таблицы Менделеева, часто встречаются вместе в одних и тех же минералах. Закономерность, отраженная в таблице Менделеева, неожиданно выявилась и в законах развития Вселенной, установленных астрономами.

Галилей, открыв параболическую траекторию падающего тела, нашел сходство между движением Луны вокруг Земли и Венеры вокруг Солнца; в фазах Луны и Венеры он также увидел аналогию их форм.

То, что в развитии физики широко использовалась аналогия, видно хотя бы из утвердившихся ныне терминов: емкость сосуда — теплоемкость и электроемкость; ток воды — электрический ток.

Планетарная модель атома была навеяна Резерфорду микроскопической моделью Солнечной системы: подобно тому, как планеты вращаются вокруг центрального светила, так и электроны могут вращаться вокруг массивного ядра. Это свое предположение Резерфорд затем подтвердил опытами по отражению альфа-частиц от вещества.

Взаимодействие масс (гравитационное поле) и взаимодействие зарядов (электрическое поле) выражается уравнениями одного вида:

$$F_g = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}; \quad F_z = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}.$$

Сходство данных формул отражает не раскрытое еще полностью учеными глубинное родство этих полей. Поразительно, например, что и там и тут сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между массами и зарядами. Максвелл, составляя свои уравнения электромагнитного поля на основе только математических соображений, ввел понятие «ток смещения», руководствуясь представлениями о симметрии и аналогии. Генрих Герц, подтвердивший на опыте справедливость ранее открытых уравнений Максвелла, характеризовал их так: «Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жиз-

нию, обладают собственным разумом — кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них заложено».

В творчестве ученых, работающих в любой отрасли науки, сопоставление предметов и явлений, умозаключения по аналогии являются основой разработки новых гипотез и выявления новых закономерностей. Например, закономерность распространения звука в воздухе была установлена на основе сравнения этого явления с видимым распространением волн на поверхности воды. В свою очередь, оказалось, что звуковые и световые волны имеют много одинаковых свойств (отражение, преломление, интерференция). Поскольку звук вызывается механическими колебаниями тела, то по аналогии была высказана гипотеза, что и свет, вероятно, тоже имеет волновую природу (что и было подтверждено впоследствии экспериментами многих ученых).

Роль умозаключений по аналогии исключительно велика для возникновения и развития новых разделов древнейшей науки математики. Определенное соответствие обнаружилось между двузначной формальной логикой (суждения которой могут быть либо истинными, либо ложными) и двоичной системой счисления в арифметике, оперирующей лишь двумя цифрами (1 и 0). Благодаря этому оказалось возможным со скоростью в миллионы и миллиарды операций в секунду решать на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) разнообразные логические задачи, ранее считавшиеся исключительно прерогативой таинственной духовной деятельности человека. В других случаях, когда требуется быстро получить приближенные результаты, более удобными оказываются так называемые аналоговые цифровые вычислительные машины (АЦВМ). Аналогии, используемые в этих машинах, позволяют решать, например, механические задачи с помощью соответствующих электрических схем (и наоборот).

При конструировании электростанций, самолетов, мостов и прочих сложных сооружений определение наиболее выгодного (оптимального) решения производят сравнением нескольких основных вариантов не только на реальных моделях (умень-

шенных копиях объектов), но и нередко на так называемых функциональных моделях. В смысле своего физического воплощения функциональные модели не имеют ничего общего с оригиналом; так, скажем, параметры проектируемой плотины могут быть представлены в виде электрической схемы. Как результат широкого применения этих методов на практике в современной науке возникла такая научная дисциплина, как теория моделей.

Возникновение кибернетики, еще одной новой научной дисциплины, связано с установлением определенного сходства между машинами, с одной стороны, и живыми организмами — с другой. Выяснилось, что структурные и функциональные аналогии разного рода существуют между организмами, стоящими на низших и высших ступенях эволюционной лестницы, между частями одного организма и всем организмом, между клеткой и группой клеток и т. д.

Ныне специальные понятия «системность», «информация», «память», «обратная связь», «управление», «самоорганизация» стали широко использоваться в разных областях человеческой деятельности. Они характеризуют сходные в чем-то (пусть в остальном и различающиеся) явления, наблюдаемые как в технике, природе, живом организме, так и в человеческом обществе. Логические основы этих понятий связаны самым тесным образом с умозаключениями по аналогии. Можно сказать без преувеличения, что аналогия «обслуживает» буквально все науки и все профессии, обуславливая даже обыденные действия и поступки человека.

Суждения по аналогии основаны на сравнении объектов, процессов, явлений, взятых зачастую из весьма далеких друг от друга областей знаний. Благодаря этому приему возникает эффект информационной неожиданности в ассоциативном или логическом строе мышления; соответственно возрастает интерес аудитории или читателя к обсуждаемым проблемам.

Академик П. Л. Капица, рассматривая вопрос о взаимосвязи наук, указывал: «...аналогично тому, как успешное развитие биологических наук должно основываться на физике и химии, так и развитие науки о законах, лежащих в основе организации



общества, должно основываться на науке о высшей нервной деятельности»\*.

Приведем несколько примеров из произведений выдающихся ученых, в которых сравнение предметов и явлений, зачастую из весьма отдаленных друг от друга областей, обеспечивает образность и убедительность рассуждений и выводов. Резкий контраст в сопоставлении явлений использовал в своих трудах И. М. Сеченов: «Все бесконечное разнообразие внешних проявлений мозговой деятельности сводится окончательно к одному лишь явлению — мышечному движению. Смеется ли ребенок при виде игрушки, улыбается ли Гарибальди, когда его гонят за излишнюю любовь к родине, дрожит ли девушка при первой мысли о любви, создает ли Ньютон мировые законы и пишет ли на бумаге — везде окончательное движение»\*\*.

Вот пример контрастного сравнения, употребленного знаменитым историком В. О. Ключевским: «Франция революционная: братство народов без участия монархов. Старая Европа: братство монархов без участия народов»\*\*\*.

Академик Б. М. Кедров предлагал в качестве ключевого для характеристики научно-технической революции образ ...буксира и ведомой им баржи: «Буксир — двигающее начало — символизирует практику (технику, промышленность, производство, словом, материальный фактор), баржа — науку (естествознание, познание природы, словом, идеальный фактор). Раньше буксир шел впереди и тащил за собой баржу. Теперь оказалось более эффективным, когда буксир толкает баржу сзади. Несмотря на то что баржа теперь идет впереди буксира, движущим фактором остается по-прежнему буксир. Они лишь поменялись с баржей местами (порядком) в процессе движения»\*\*\*\*.

Одним из самых выдающихся гениев науки всех времен и народов был Архимед, живший 2200 лет

---

\* Каница П. Л. Эксперимент, теория, практика. — М., 1974. С. 275.

\*\* Сеченов И. М. Избранные философские и психологические произведения. — М., 1947. С. 60.

\*\*\* Ключевский В. О. Письма. Дневники. — М., 1968. С. 385.

\*\*\*\* Кедров Б. М. Ключевой образ как средство популяризации. // Просто о сложном. — М., 1977. С. 25.

тому назад; не зная интегрального исчисления, он нашел правило вычисления объема шара, а затем и площади поверхности шара (рис. 1). Открытие Архимеда представляет блестящее применение метода аналогии. О том сохранилась следующая запись самого Архимеда: «...исходя из того обстоятельства, что площадь каждого круга равна площади треугольника (основание которого есть его периметр, а высота — радиус круга), я подумал, что таким же образом объем каждого шара будет равен объему конуса, основание которого равно поверхности шара, а высота равна радиусу». Архимед завещал выбить изображение этой теоремы на своем памятнике.

Великий древнегреческий ученый нашел, что объем

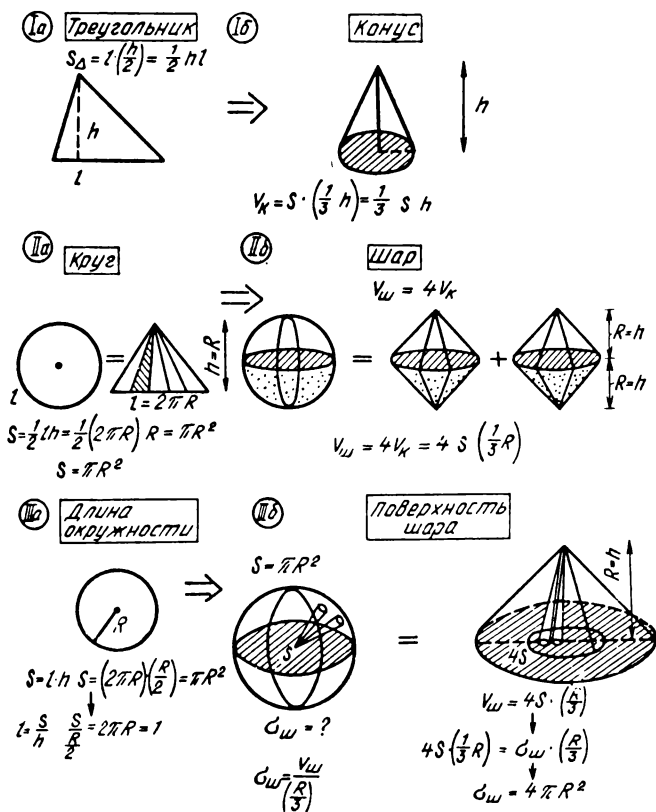


Рис. 1

шара равен объему четырех конусов с основаниями, равными большому кругу шара ( $\pi R^2$ ). А потом на основе этого результата он пришел к выводу, что поверхность шара равна сумме «четырех больших кругов шара». Суждение Архимеда подкупает нас (знающих по многолетнему учению в школах все эти формулы) своей ...лаконичностью. Однако не забудем, что Архимед ведет речь о зависимости, никем до него не обнаруженной! Площадь поверхности шара он находит гениально простым приемом — аналогией двух рядов суждений:

I а: площадь треугольника  $\rightarrow$  I б: объем конуса;

II а: площадь круга  $\rightarrow$  II б: объем шара;

III а: длина окружности  $\rightarrow$  III б: поверхность шара.

Поучительно расшифровать свернутые суждения гения, которые, вероятно, промелькнули у Архимеда, но (как говорят в психологии творчества — одновременно) на уровне подсознания и интуиции. Можно «расшифровать» вывод Архимеда следующими сопоставлениями.

Подобно тому, как площадь треугольника равна произведению основания на половину высоты ( $S = l \cdot \frac{h}{2}$ ), так и объем пирамиды (и конуса) равен произведению основания на треть высоты:  $V = S \cdot \frac{h}{3}$ ;

I а  $\rightarrow$  I б.

Вероятно, знаменатели 2 и 3 будут всплывать в подсознании решающего, коль скоро он пользуется аналогией двумерных и трехмерных представлений (площадь — объем, круг — шар и т. п.).

Круг заменяется треугольником с основанием, равным длине окружности и высотой, равной радиусу; шар заменяется четырьмя конусами с общим основанием, равным большому кругу и высотой, равной радиусу шара:

II а  $\rightarrow$  II б.

Круг разрезается на частичные секторы, опирающиеся на дуги окружности, а шар разрезается на частичные конусы (шаровые секторы), опирающиеся на сферическую поверхность шара:

III а  $\rightarrow$  III б.

Разделив площадь треугольника на половину высоты, найдем основание треугольника. Подобно

этому, разделив объем шара на треть радиуса, получим площадь поверхности шара.

Части круга уподобляем элементарным треугольникам с основаниями на окружности.

Сумма длин оснований этих треугольников — это и есть периметр круга.

Части шара уподобляем элементарным конусам с основаниями на поверхности шара.

Сумма площадей оснований этих конусов — это и есть поверхность шара.

Четырехчленное рассуждение Архимеда включает понятия:

треугольник	→	конус
↓		↓
круг	→	шар.

В этом умозаключении площадь треугольника играет такую же роль для площади круга, какую объем конуса для объема шара:

основание треугольника	→	основание конуса
↓		↓
длина окружности	→	поверхность шара.

В итоге рассуждения Архимед получает: поверхность шара равна площади четырех больших кругов шара.

Моментальное озарение первооткрывателя оказывается логически сложным, сложнейшим матричным комплексом понятий, скрепленных двуправленными связями суждений, никому до Архимеда не приходившим в голову!

Напомним в заключение еще раз, что умозаключения Архимеда были сделаны за две тысячи лет до открытия интегрального исчисления. Не преминем извлечь пользу из обсужденного и для методики математики, а именно: неразумно — как это делается сейчас в школе — знакомить учащихся с формулой объема шара через 5 лет (!) после изучения формулы площади круга, ибо при таком разведении во времени ученик лишается возможности рассуждать по аналогии (!!).

Мыслительный опыт Архимеда, Эйлера и других великих математиков — это суший клад для каждого, кто «открывает врата» в геометрию.

Связь между круглыми фигурами и геометриче-

скими телами можно выразить и на языке интегралов и дифференциалов, считая площадь круга и объем шара функциями радиуса, а именно:

интеграл от  
длины окружности  
поверхности шара  
 (по радиусу) есть  
площадь круга  
объем шара :

$$\int_0^{2\pi R} dr = \pi R^2,$$

$$\int_0^R 4\pi R^2 dr = \frac{3}{4} \pi R^3.$$

производная от  
площади круга  
объема шара  
 (по радиусу) есть  
длина окружности  
поверхность шара :

$$(\pi R^2)'_R = 2\pi R,$$

$$\left(\frac{4}{3} \pi R^3\right)'_R = 4\pi R^2.$$

Здесь ценна и философская оценка проблемы. Разумно ли в школьном курсе отложить теоремы об объеме шара до 10 класса ради того, чтобы вывести эту формулу современным «строгим» методом — интегрированием? Принцип историзма не может не учитываться и в методике математики: научный подвиг Архимеда, определившего объем шара умозаключениями по аналогии за 2000 лет до Ньютона, имеет несравненную ценность для развития мышления, если с ним познакомиться уже в 7—8 классах!

В работе лучших педагогов аналогия выступает чрезвычайно эффективным средством повышения качества знаний, достижения образности и глубины мысли, высокой убедительности. Вот как применял аналогию знаменитый профессор А. П. Минаков в своей лекции по механике: «Мы говорим одно слово: дуэль, переписка, дружба, беседа, любовь и т. д., а предполагаем участие двух людей. Так и у студентов при слове «сила» всегда должно возникать представление о двух силах. Сила никогда не бывает одна, а только в паре с другой силой. Действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие»\*.

---

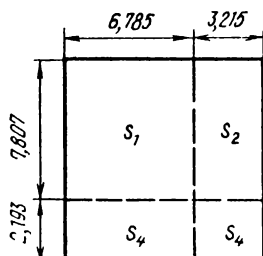
\* Минаков А. П. Методические разработки // Лишевский В. П. Педагогическое мастерство ученого: о преподавательской деятельности профессора А. П. Минакова. — М., 1975. С. 79.

Источником неожиданных сопоставлений выступает дихотомичность суждений. Дважды примененная дихотомия создает уже четыре компонента, которые поразительно часто встречаются как в истории мышления, так и в психологии человека. Уже на заре человечества возникли представления о четырех сторонах света, четырех временах года; у человека четыре вкусовых ощущения (сладкое, горькое, кислое, соленое) и т. п. В античной философии признавались четыре элемента мироздания: вода, воздух, огонь, земля.

Вероятно, оптимальность четырех элементов имеет в конечном счете отношение к наличию четырех основных видов нервных клеток в зрительном центре мозга млекопитающих. Психологи различают ныне четыре «врожденных стремления» (чувство, аффект, страсть, настроение), четыре эстетических чувства (прекрасного и возвышенного, трагического и комического), четыре вида темперамента. Французский математик Рене Том, предприняв топологический анализ лингвистики, обращает внимание на аналогию между следующими информационными системами: генетическая информация живых организмов записывается алфавитом из четырех химических оснований; в равновесии может находиться не более четырех слогов, а в слове не более четырех фонем; в германских языках — четыре падежа и т. п. Мы позволим завершить эту цепь сравнений дидактическим выводом, полученным на основе экспериментального обучения математике: наибольшая прочность освоения знаний достигается при подаче одной и той же учебной информации по возможности *одновременно на четырех кодах*: рисуночном, числовом, символическом и словесном.

В настоящее время большое распространение в обучении получают различные калькуляторы. Нажав четыре соответствующие клавиши, мы можем немедленно прочитать результаты выполнения операций над многозначными числами с большой точностью. Пусть имеется квадрат размерами  $10 \times 10$ , разделенный на четыре прямоугольника указанных размеров (рис. 2). Предлагается с помощью калькулятора найти площадь каждого прямоугольника в соответствии с рисунком, а затем найти сумму их

площадей. Если вы сумеете аккуратно выполнить вычисления, то сумма четырех слагаемых должна получиться равной  $10 \cdot 10 = 100$ ! Полезная интригующая учебная ситуация! Сойдется или нет?

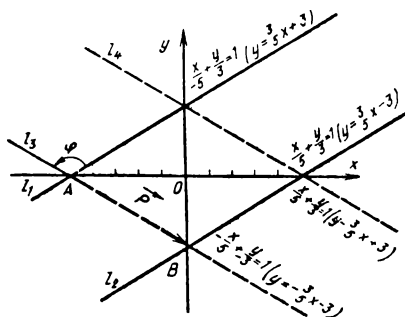


$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 10 \cdot 10 = 100$$

Рис. 2

В технологии обучения укрупнению дидактических единиц четверичности информации придается особое значение. Здесь уместно видеть также и осуществление самоконтроля, самообучения благодаря укрупненному четырехэлементному заданию. Для мышления первоклассника осмысление взаимосвязей между четверкой примеров на сложение и вычитание поистине открывает дорогу в удивительный мир чисел и понятий:

$$\begin{array}{rcl} 2 + 5 = & 7 & \rightarrow 7 \\ 5 + 2 = & 7 & \end{array} \quad \begin{array}{r} -5 = 2 \\ -2 = 5 \end{array}$$



$$\begin{aligned} S_{Ox}(l_1) &= l_3 \\ S_O(l_1) &= l_2 \\ W_A^\varphi(l_1) &= l_3 \\ P_{AB}^\psi(l_1) &= l_2 \end{aligned}$$

Рис. 3

По четверке прямых, представленных формулами  $\frac{x}{\pm m} \pm \frac{y}{\pm n} = 1$ , быстро и наглядно объясняются связи между основными геометрическими преобразованиями (два вида симметрии, вращение, параллельный перенос) (рис. 3).

А вот основа логически грамотного освоения геометрии — постижение взаимосвязи четырех теорем логического квадрата (рис. 4).

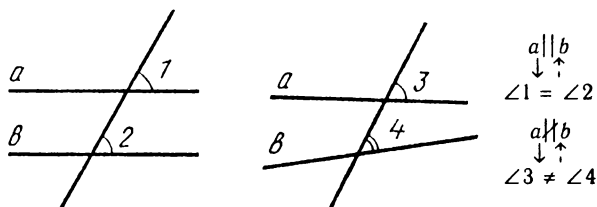


Рис. 4

#### Прямая теорема

$(x \rightarrow y)$ :

Если две параллельные прямые пересечены третьей, то соответственные углы равны.

#### Обратная теорема

$(x \leftarrow y)$ :

Если..., то... параллельны.

#### Противоположная теорема

$(x \rightarrow y)$ :

Если две непараллельные прямые пересечены третьей, то соответственные углы не равны.

#### Теорема, обратная противоположной

$(x \leftarrow y)$ :

Если..., то... не параллельны.

Разумеется, нет необходимости «обрабатывать» каждую изучаемую в школе теорему четырьмя видоизменениями единого содержания; однако не одни только учащиеся путают иногда теорему Пифагора с теоремой, ей обратной.

В последующем изложении мы ставим целью показать, какие нереализованные возможности открытия теорем, еще не известных в литературе, существуют в математике и как можно найти эту информацию посредством умозаключений по аналогии.



## Беседа 2

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РАЗМИНКА

Четыре круга как-то раз  
Поцеловались в поздний час.  
Евклид об этом не узнал:  
Он о любви не думал,  
А я круги нарисовал  
И формулу придумал.

Ф. Содди\*. «Поэма о кругах»

Великие мыслители прошлого — Пифагор, Декарт, Ньютон были одновременно и математиками, и философами. Примечательно здесь то, что при всем необъятном богатстве истин, открытых в математике за 30 веков, великолепные математические находки, подобно золотым самородкам, нередко запечатлевают имена и современных «простых старателей», причем в области элементарной (школьной) математики, многократно перепаханной в прошлые века.

Нераскрытые еще тайны присущи уже самым исходным, «простейшим» понятиям, связанным, скажем, со свойствами прямой линии, определяемой двумя точками, или окружности, определяемой тремя точками. Подобный подход бесценен в дидактическом отношении. Издревле в геометрии пользуются двумя приборами: линейкой проводят прямые линии, а циркулем — окружности.

Вооружитесь линейкой и выполните следующие действия.

1. Проведите две произвольные прямые (рис. 5).
2. На одной из них отметьте на произвольном удалении друг от друга три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .
3. На другой отметьте в том же порядке также произвольно выбранные точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
4. Найдите точку пересечения первой пары прямых:  $Ab \cap Ba = X$ .

---

\* Содди Фредерик (1877—1956) — лауреат Нобелевской премии по физике (1921), английский радиохимик, иностранный член Российской Академии наук с 1924 г. Разработал основы теории радиоактивного распада. Ввел понятие об изотопах. Экспериментально доказал (1915) образование радия из урана.

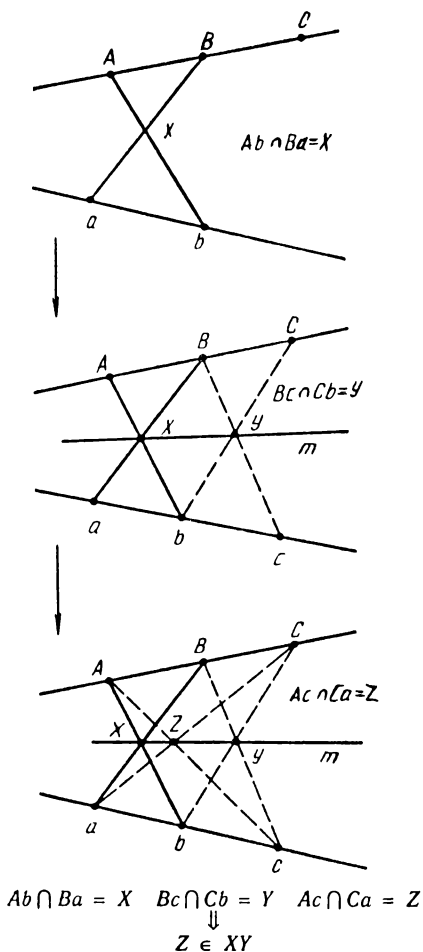


Рис. 5

5. Найдите точку пересечения второй пары прямых:  $Bc \cap Cb = Y$ .

6. Постройте прямую  $XY$ , определенную двумя найденными точками:  $m = XY$ .

7. У вас уже наверняка замаячила интригующая мысль: не окажется ли третья точка  $Z = Ac \cap Ca$  на уже построенной прямой  $m$ ?

Предположение подтверждается. Поразительно здесь то, что данный факт имеет место и в том случае, когда тройки исходных точек взяты (в том же порядке!) на противоположных дугах одной окружности (рис. 6). Хорошо, если иного школьника посетит здесь здоровое чувство сомнения и он начнет много раз проверять данный факт все более аккуратными построениями.

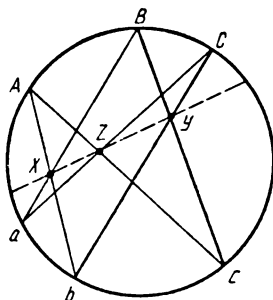


Рис. 6

Эта теорема была доказана геометром Паппом две тысячи лет назад и послужила впоследствии одной из основ новой отрасли математики — проективной геометрии. (Увы, теорема эта почему-то не включена даже в программу учительских факультетов.) Теорема Паппа — это «задача одной линейки»: уже пятиклассник способен построить эту фигуру и надивиться тайной прямых линий.

В теореме Клиффорда, доказанной в 1882 году, речь идет об аналогичной «задаче одного циркуля». Пусть даны четыре исходные окружности (для простоты одного радиуса). Они пересекаются попарно в шести точках: 12, 13, 14, 23, 24, 34 (рис. 7). Через каждые три из этих точек проведем «производные» окружности:

$$(12, 23, 31) = (\text{IV})$$

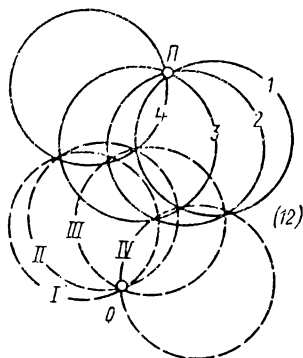
$$(12, 24, 14) = (\text{III})$$

$$(13, 34, 14) = (\text{II})$$

$$(23, 34, 24) = (\text{I})$$

Соблюдена цикличность нумерации: так, если слева нет номера «четыре», то он записан после

знака равенства справа римской цифрой (IV) как номер *производной* окружности.



$$1 \cap 2 \cap 3 \cap 4 = P$$

$$I \cap II \cap III \cap IV = O$$

Рис. 7

Исходные окружности пересекаются в одной точке, следовательно, и «производные» окружности пересекаются с одной точкой.

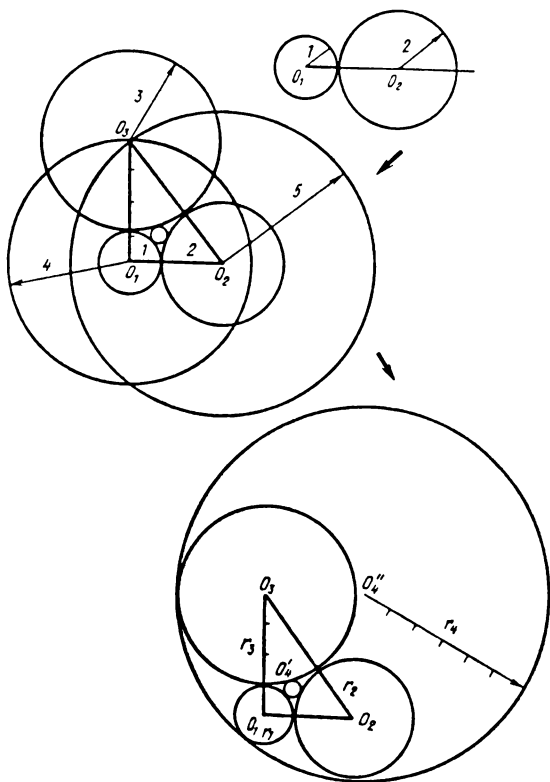
Теорема Клиффорда обратима, и ее легко изобразить с помощью трафарета окружности. Примечательно, что Клиффорд доказал свою теорему для плоскости.

**1** Нам же удалось обобщить ее на 6 сфер, проходящих через одну точку.

Любителей занимательного чтения по математике, очевидно, заинтересовало стихотворение, написанное знаменитым физиком Фредериком Содди, которое посвящено отнюдь не открытию изотопов в физике, принесших ему Нобелевскую премию. Приведенный нами в эпиграфе куплет он посвятил найденной им формуле четырех взаимосоприкасающихся окружностей.

Дабы приобщиться к «жару холодных фигур», не поленитесь выполнить циркулем и линейкой следующие построения (рис. 8).

1. Постройте окружность радиусом в одну единицу длины с центром  $O_1(r=1)$ .



$$2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2$$

**Рис. 8**

2. На продолжении одного из диаметров постройте окружность с центром  $O_2$  радиусом в две единицы так, чтобы она касалась первой окружности.

3. Из центров  $O_1$  и  $O_2$  постройте концентрические окружности с радиусами соответственно в  $1 + 3 = 4$  и  $2 + 3 = 5$  (единиц). С центром в точке  $O_3$  пересечения последних двух окружностей проведите окружность радиусом в 3 единицы, которая, понятно, будет касаться двух предыдущих окружностей.

Итак, мы построили три взаимосоприкасающиеся окружности  $O_1(1)$ ,  $O_2(2)$ ,  $O_3(3)$ . До сих пор все шло просто.

Но знаменитого ученого-физика поразило существование пары окружностей с радиусами  $r_4$ , рав-

ными  $\frac{6}{23}$  и 6, касающихся изнутри и извне данных трех, а вернее, симметрическое соотношение радиусов четырех окружностей:

$$2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2. \quad (1)$$

Содди нашел и аналогичную формулу для радиусов пяти взаимосоприкасающихся сфер:

$$3\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} + \frac{1}{r_5^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)^2. \quad (2)$$

А математик Госсет «исчерпал» проблему Содди, доказав ее обобщение для « $n$ -мерных гипersфер»:

$$n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^2} = (\sum_{i=1}^n r_i)^2.$$

Теорема Содди — это поистине самое значимое достижение элементарной геометрии XX века, не успевшее еще занять свое законное место в венчаемой ею занимательной математике\*. Однако отложим обсуждение этого вопроса до десятой беседы книги.

Пока же в порядке умственной разминки, не затрагивая самих доказательств, вспомним математические факты и ассоциации, так или иначе исходящие из всем известной теоремы Пифагора, а если хотите, из египетского треугольника ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ).

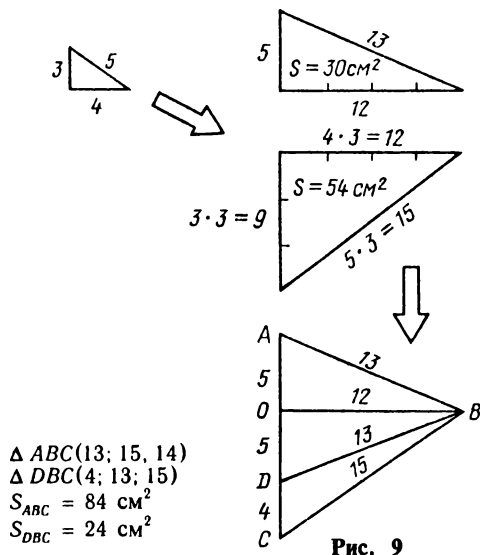
---

\* Если подставить в (1) значения трех радиусов, то, решив полученное квадратное уравнение, можно найти радиус четвертой окружности:

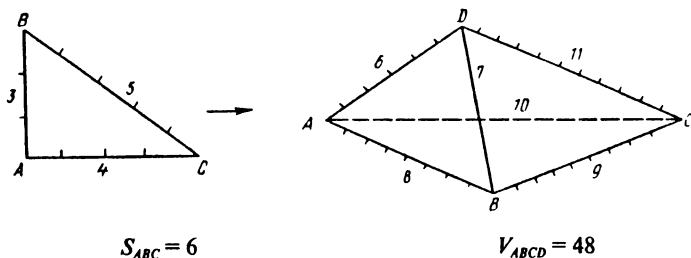
$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + x^2\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + x\right)^2. \quad (1a)$$

Два решения полученного квадратного уравнения соответствуют двум случаям касания: три данные окружности касаются извне четвертой (первый случай) и изнутри (второй случай).

Прямоугольный треугольник с периметром  $3 + 4 + 5 = 12$  единиц длины служил египтянам средством планирования прямых углов при построении пирамид. Математики нашли общую формулу для целочисленных прямоугольных треугольников, у которых и площадь выражается целым числом. Пользуясь двумя простейшими целочисленными прямоугольными треугольниками, несложно построить целочисленные треугольники общего вида (рис. 9).



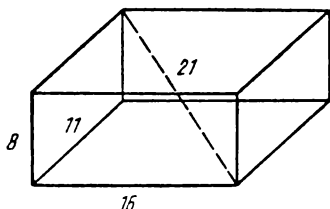
У десятиклассников хватит знаний, чтобы вычислениями убедиться в том, что тетраэдр с ребрами в 6, 7, 8, 9, 10, 11 см имеет целочисленный объем  $48 \text{ см}^3$  (рис. 10).



Интересно другое геометрическое обобщение теоремы Пифагора. Если числами 3, 4, 5 выражаются стороны прямоугольного треугольника ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ), то числа 8, 11, 16, 21 суть длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда и его диагонали:

2

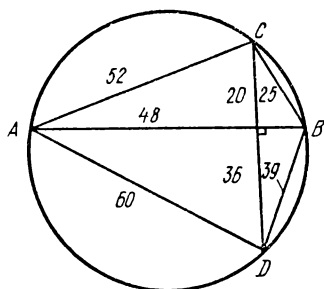
$$8^2 + 11^2 + 16^2 = 21^2 \quad (\text{рис. 11}).$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \quad 8^2 + 11^2 + 16^2 = 21^2$$

Рис. 11

Индийский математик Брахмагупта (XV век) построил целочисленный четырехугольник, который можно вписать в окружность (рис. 12). То, что этот четырехугольник вписанный, следует из теоремы, обратной теореме Птолемея: если произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон, то он вписанный. Задача была решена на основе совмещения увеличенных в масштабе пифагоровых треугольников ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ;  $5^2 + 12^2 = 13^2$ ).



$$\begin{aligned} ACBD & \text{ — вписанный} \\ AB \cdot CD &= AD \cdot CB + AC \cdot BD \\ 48 \cdot 25 &= 60 \cdot 20 + 52 \cdot 36 \end{aligned}$$

Рис. 12



В соответствии с формулами Содди нам удалось вычислить целочисленные значения радиусов четырёх окружностей

*пяти сфер* Содди, взаимно касающихся извне друг друга. Вот, например, набор радиусов четырёх окружностей Содди: 6, 23, 46, 69. В самом деле:

$$2\left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{46^2} + \frac{1}{69^2}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{23} + \frac{1}{46} + \frac{1}{69}\right)^2.$$

Проверьте! Предлагаем также проверить с помощью калькулятора и найти способ составления пятерки целочисленных сфер Содди:

$$3\left(\frac{1}{80^2} + \frac{1}{85^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{170^2} + \frac{1}{225^2}\right) = \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{85} + \frac{1}{102} + \frac{1}{170} + \frac{1}{225}\right)^2.$$

3

Нам удалось также найти способ составления суммы нескольких квадратов целых чисел, равной квадрату целого числа:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2.$$

При всей кажущейся простоте, эту формулу мы не нашли в книгах (см. об этом ниже).

Однако направление нашего творчества (обобщение знания) не геометрическое, а алгебраическое. Так мы выходим в сферу «числовой магии».

Знаменитый математик Эйлер нашел формулу перехода от равенства  $3^2 + 4^2 = 5^2$  к тождеству  $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$  (рис. 13). Используя современные ЭВМ, математики нашли, что сумма четырех четвертых

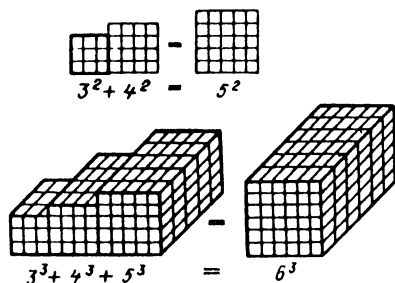


Рис. 13

степеней равна той же степени пятого числа:  $30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 364^4$ . Предлагаем проверить это соотношение на калькуляторе.

Математикам не чужд спортивный азарт в поисках решений! Неизвестно, поддалась ли кому аналогичная сумма пятых степеней целых чисел:  $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + a_5^5 = b^5$ ?

Одно из направлений мысли, берущее, вероятно, начало также от «египетского треугольника» ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ), связано с великой теоремой Ферма, над которой бьются математики вот уже 300 лет: существует ли целочисленное решение уравнения с четырьмя неизвестными  $a, b, c, x$

$$a^x + b^x = c^x ? \quad (3)$$

Рассмотрим, однако, производное уравнение с одним неизвестным показателем степени, например:

$$3^x + 4^x = 6^x, \quad (4)$$

или  $3^x + 4^x - 6^x = 0$ . Обозначив функцию  $f(x) = 3^x + 4^x - 6^x$ , имеем:  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = -11$ . Значит, существует  $-11 < x_0 < 1$  такое, что  $f(x_0) = 0$ .

Современная математика способна найти такое  $x_0$ , чтобы  $f(x_0) = 0$ , т. е. найти специальными методами иррациональное значение показателя степени  $x = x_0$  с любой точностью. Но вот целочисленное решение уравнения (3) оказалось для них «крепким орешком».

Математический мир всколыхнуло в 1993 г. неожиданное сообщение Уайльда (США), что им будто бы наконец наконец решена проблема Ферма. Увы, вскоре не замедлила появиться в газете «Нью-Йорк таймс» заметка о том, что в семилетнем исследовании Уайльда вскрылась все-таки ошибка, которую он обещает исправить (?).

Образно говоря, содержание нашей книги построено от Пифагора к Содди. Философы и математики возводят теорему Пифагора в ранг *архетипа*, столь же значимого для развития ума, как физические законы Ньютона или периодическая система Менделеева для познания природы человека. Прав был великий методист А. П. Киселев,

поместив в своем учебнике три доказательства теоремы Пифагора. Каждый из этих способов знакомил ученика с новым взглядом на геометрию (равносоставленность, равновеликость, подобие).

Центры окружностей (описанной и вписанной) греческие математики называли замечательными точками треугольника. Растянутая окружность — эллипс — считалась у них самой красивой линией. Это было наитие древних. Лишь через две тысячи лет после Евклида было установлено, что как планеты вокруг Солнца, так и электроны вокруг ядра атома движутся по эллипсам.

В теореме Пифагора «работает» пересечение прямых (две из них пересекаются под углом  $90^\circ$ ).

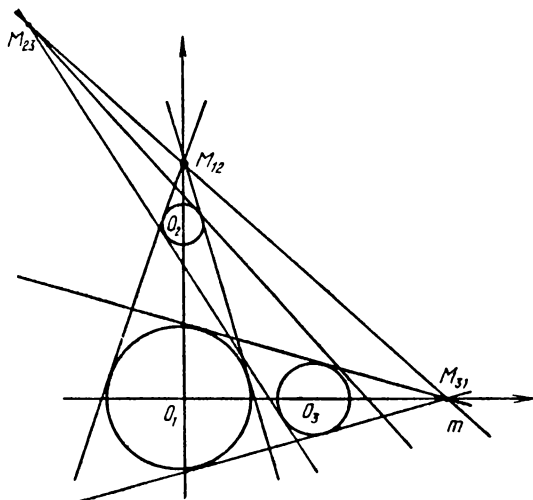
Явление касания несравненно содержательнее факта пересечения линий; в точке же касания две точки сливаются в одну точку, а секущая превращается в касательную. Изучение касательных к кривым привело Ньютона к открытию могучего аппарата технической цивилизации — дифференциального исчисления. Но касание бывает двух родов: прямая касается кривой или кривая касается кривой. Формула Содди не случайное открытие XX в.: она выяснила топологические свойства касания второго рода!

В эстетическом пространстве восхищений и удивлений от Пифагора до Содди занимают свое особое место задачи, связанные с касанием прямых с окружностью (плоскости со сферой). Осмыслим в этой связи следующую пару теорем:

Пусть даны  $\frac{\text{на плоскости}}{\text{в пространстве}}$   $\frac{\text{три окружности}}{\text{четыре сферы}}$ , не имеющие общих точек. Если построить  $\frac{\text{три}}{\text{шесть}}$  общих касательных (закрывающих попарно  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ ), то их вершины располагаются на одной  $\frac{\text{прямой}}{\text{плоскости}}$  (рис. 14, 15).

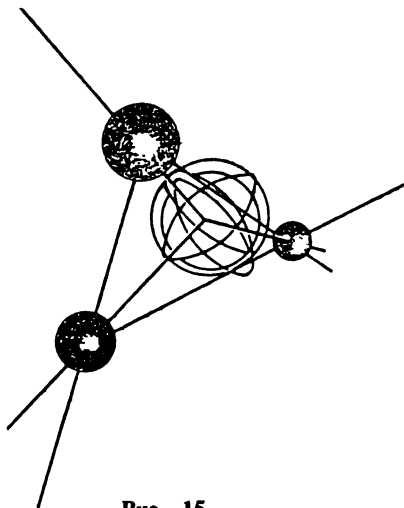
Данные теоремы приводили в восторг философа Спенсера, писавшего: «Эту истину я никогда не мог созерцать, не испытывая потрясение от ее красоты и в то же время удивление и благоговейный трепет перед тем, что ничем не связанные

между собой круги должны всегда быть опутаны сетью соотношений, которые кажутся просто не-стижыми».



$$M_{12}, M_{23}, M_{31} \in m$$

**Рис. 14**



**Рис. 15**

### Беседа 3

## МАГИЯ ЧИСЕЛ И ФИГУР

И я больше всего дорожу аналогиями, моими самыми верными учителями. Они знают все секреты природы и ими меньше всего следует пренебрегать в геометрии.

*И. Кеплер*

Каждый из читателей данной книги в той или иной мере знаком с математикой, наукой о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Иные всю жизнь увлекаются математическими соотношениями, задачами, софизмами, парадоксами, хотя их труд и вовсе не связан напрямую с этой наукой. Для многих математика становится хобби! Поистине математика содержит нечто такое, что вызывает человеческий восторг (Хаусдорф). Восторг этот посещает не одних лишь специалистов данной науки. Математик Харди считал, что не обязательно быть музыкантом, чтобы не только наслаждаться чужим исполнением, но сочинять мелодии самому.

Подтверждением этой аналогии является, например, история задач, связанных с составлением магических фигур. Магические квадраты были найдены независимо друг от друга много тысячелетий назад в древнейших цивилизациях Китая, Индии, Египта. «Существуют числа, благодаря которым гармония звуков пленяет слух, эти же числа преисполняют и глаза и дух чудесным наслаждением», — учил Пифагор.

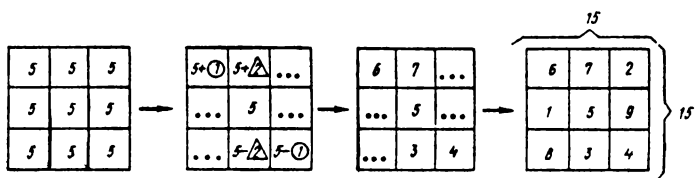


Рис. 16

Уже в начальной школе вызывают удивление

задачи из учебника о магическом квадрате из 9 клеток, в котором суммы троек чисел по горизонтали, вертикали и диагонали равны одному и тому же числу 15 (рис. 16). Эту красивую идею постоянства суммы математики изучили весьма подробно и развили во всех мыслимых направлениях: написаны фолианты по теории магических квадратов (дьявольских, двойных и т. п.), найдены формулы составления магических квадратов любого порядка  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $3 \times 3 \times 3$  и т. д. Психологи считают, что интерес к построению магических квадратов у детей и взрослых объясняется постижением через них роли симметрии в расположении чисел, благодаря которой выявляется красота необычных суждений и умозаключений.

Одному из наших студентов на лекции пришла мысль выйти в пространство трех измерений, т. е. построить магический куб третьего порядка (рис. 17, 18). Требуется расположить числа от 1 до 27 в клетках куба  $3 \times 3 \times 3$  так, чтобы в любом из трех взаимно перпендикулярных направлений сумма трех рядом расположенных чисел составляла 42 (на рис. 18 в клетках магического куба из 27 чисел указаны лишь 6 чисел). Читателю не составит большого труда на основе этой исходной информации найти положение оставшегося, 21-го числа!

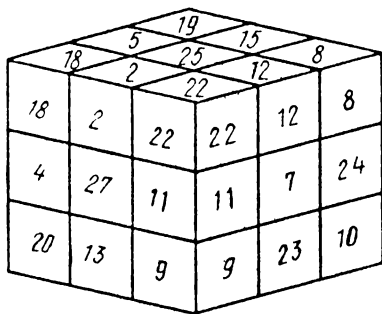


Рис. 17

В следующем примере построения магического квадрата  $4 \times 4$  и магического куба  $4 \times 4 \times 4$  великолепно проявляется сила *симметрического преобразования*. Найдем постоянную сумму

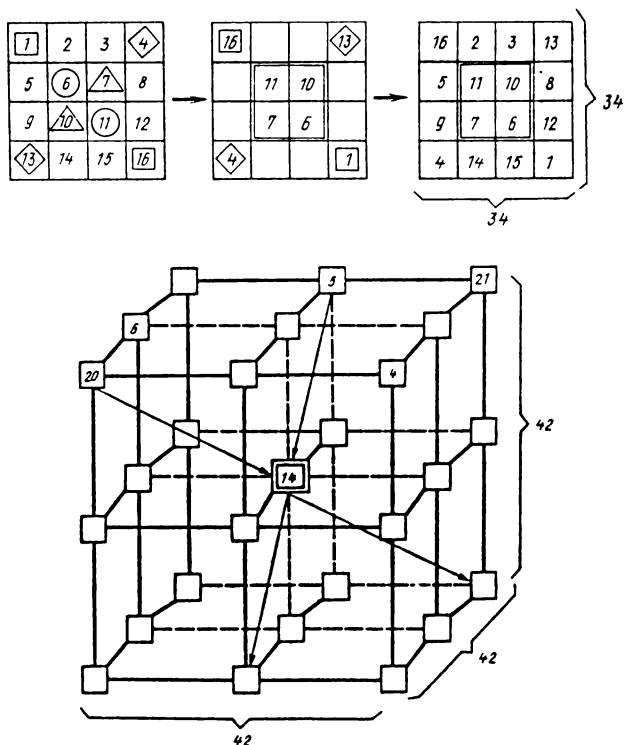


Рис. 18

для трех  
направлений  
магического квадрата  
( $4 \times 4$ ):

$$1 + 2 + \dots + 16 = \\ = (1 + 16) \cdot 8 = 17 \cdot 8;$$

в одном ряду:

$$(17 \cdot 8) : 4 = 34 \\ (\text{см. рис. 18}),$$

для четырех  
направлений  
магического куба  
( $4 \times 4 \times 4$ ):

$$1 + 2 + \dots + 64 = \\ = (1 + 64) \cdot 32 = 65 \cdot 32;$$

$$(65 \cdot 32) : 16 = 65 \cdot 2 = 130 \\ (\text{рис. 19}).$$

Предлагаем закончить составление магического куба и проверить постоянство сумм четырех слагаемых по всем столбцам, рядам, строкам и диагоналям.

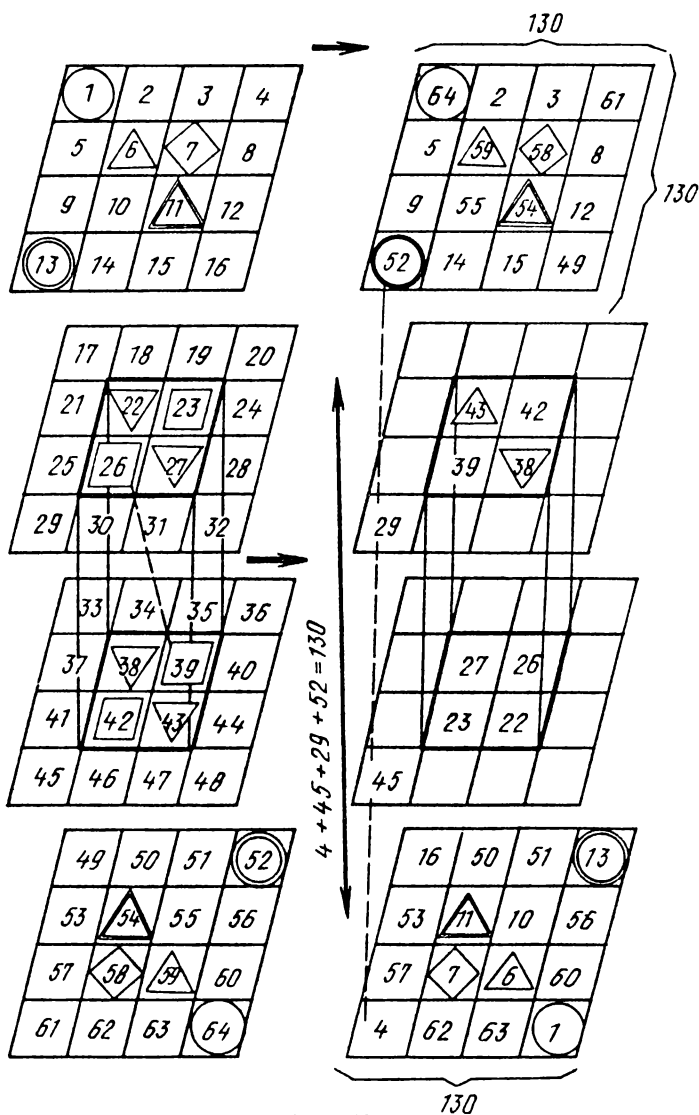


Рис. 19

4

Читатель догадался, конечно, что тем же методом «симметрических замен» элементов можно составить магические кубы большей размерности ( $2^2 = 4$ ;  $2^3 = 8$ ;  $2^4 = 16$ ;  $2^n \dots$ ).



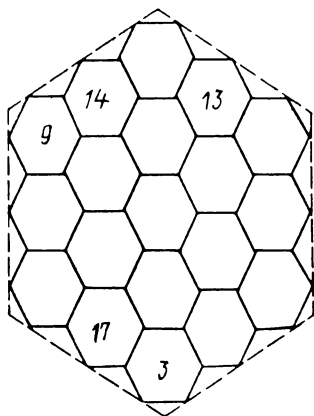


Рис. 20

Поразителен случай, когда фермер Адамс (США) всю жизнь решал — никому об этом не говоря! — задачу, пришедшую ему на ум при покрытии пола шестиугольными плитками (рис. 20). Если в описанных выше случаях составлялись равные суммы одинакового числа слагаемых, то Адамс экспериментировал 50 лет, пока не нашел магический шестиугольник, в котором суммы переменного числа слагаемых (а именно в 3, 4, 5-й ячейках) дают одно и то же число 38. Без устали пробуя различные сочетания, он нашел решение, которое, после проверки на ЭВМ, оказалось единственным. Вот как может заморозить иногда человека магия фигуры и числа! Обратим здесь также внимание и на то, что, хотя «магическая фигура» Адамса расположена на двумерной плоскости, равные суммы получились у него в трех направлениях! Специалисты, изучающие психологию математического открытия, видят в находке Адамса блестящий пример *озарения*, которое, увы, так редко посещая даже специалиста-математика, может осчастливить иногда и любителя. Непостижим и беспределен мир математики...

Знаменитый немецкий ученый-астроном Кеплер имел основание называть аналогии своими верными учителями, «знающими все секреты природы». Размышляя о возможности обобщения Адамса, мы

сообразили: в его магическом шестиугольнике каждый элемент входит в ряды по *трем* направлениям. Трехмерное пространство у него нашло как бы опережающее проявление, реализуясь на *двумерной* плоскости.

Возникла мысль: стоит поискать такую *трехмерную* фигуру, чтобы каждый ее числовой узел входил в *четыре* направления.

И вот в книге Вейля «Симметрия» мы нашли суждение, что все пространство можно заполнить не только одинаковыми кубами, но и одинаковыми усеченными октаэдрами (рис. 21).

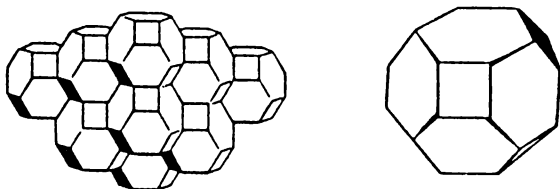


Рис. 21

Усеченный октаэдр удобно строить в два этапа, а именно:

1) соединив центры смежных граней куба, мы получим правильный октаэдр, вписанный в куб (8 граней и 6 вершин) (рис. 22);

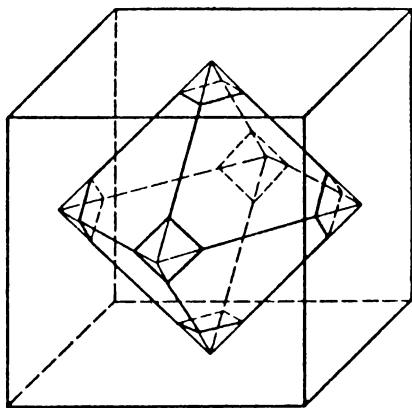


Рис. 22

2) отрезав от каждой вершины октаэдра третью часть его ребра, мы получим многогранник, у которого 8 граней имеют форму равных правильных шестиугольников, а 6 граней — форму квадрата. Усеченный октаэдр имеет такую особенность, что у него все двугранные углы равны  $120^\circ$ , что и обеспечивает им плотное прилегание друг к другу (по трое).

Склеив из бумаги равные усеченные октаэдры, мы обложили (окаймили) один из них 14 другими. Обложив сплошь полученную фигуру еще одним слоем таких же тел, мы получаем новую фигуру

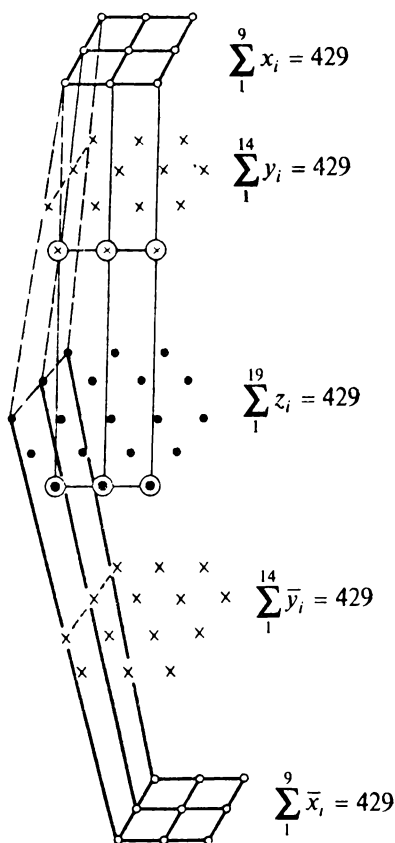


Рис. 23

(обернутый усеченный октаэдр), состоящую из 65 одинаковых многогранников, и т. д.\* (рис. 23). Поместим в каждой ячейке фигуры по одному числу (от 1 до 65). Общая сумма всех 65 чисел такова:  $\frac{(65+1)}{2} \cdot 65 = 33 \cdot 65$ . Так как  $65 \cdot 33$  не делится

на 19 без остатка, то равенства сумм смежных столбцов не может быть (всего в этой фигуре 19 параллельных рядов). Но тут нас осенило: найденная сумма кратна 5 ( $((65 \cdot 33):5 = 429)$ ! Мы также заметили, что 65 ячеек располагаются в 5 параллельных слоях фигуры, содержащих соответственно 9, 14, 19, 14, 9 ячеек. (Таковые слои имеются по каждому из четырех направлений осей!)

Итак, у нас возникает задача: расположить числа от 1 до 65 в узлах «*четырёхмерной*» решетки из усеченных октаэдров так, чтобы сумма всех чисел каждого слоя была равна 429.

Если в случае задачи Адамса на ЭВМ решали систему из 15 уравнений с 19 неизвестными, то для разрешения нашей обобщенной задачи требуется решить систему из 30 уравнений с 65 неизвестными! Каждое неизвестное при этом входит в четыре уравнения системы. Возможно, кому-то удастся решить данную задачу и без компьютера!

Автор помнит урок арифметики еще с третьего класса, когда новый учитель объявил, что он будет отгадывать задуманные нами числа. Он предлагал выполнить некоторую последовательность вычислений:

	Первый ученик	Второй ученик	Алгебраическое объяснение «фокуса»
1. Задумайте число, меньшее 10	7	6	$x$
2. Умножьте задуманное число на 5	$7 \cdot 5 = 35$	$6 \cdot 5 = 30$	$x \cdot 5 = 5x$

**5** \* Предлагаем найти формулу числа ячеек обернутого усеченного октаэдра, у которого  $n$  слоев, учитывая при этом  $Я_1 = 1$ ,  $Я_2 = 15$ ,  $Я_3 = 65$ , ...,  $Я = ?$

3. Прибавьте 1     $35+1=36$              $30+1=31$      $5x+1$

4. Умножьте         $(35+1) \cdot 2 =$      $31 \cdot 2 = 62$      $(5x+1) \cdot 2 =$   
полученное         $= 35 \cdot 2 + 1 \cdot 2 =$                                  $= 10x + 2$   
на 2                     $= 70 + 2 = 72$

5. Зачеркните первую цифру слева (число десятков).  
Осталось                                2                                2                                2

Цель достигнута: у всех получилось число 2.  
Учитель теперь может диктовать любые действия, например, такие:

6. Умножьте  
полученное  
число само

на себя             $2 \cdot 2 = 4$              $2 \cdot 2 = 4$

7. Прибавьте 6     $4+6=10$              $4+6=10$

...                                ...

Учитель объявляет: «У всех вас получилось число 10!» Класс восхищен «удивительным» искусством учителя.

Когда впоследствии мы узнали «секрет» этого фокуса (уже при изучении алгебры), нашли ребята, которые сами составляли свои задачи на отгадывание задуманного (даже в пределах 100).

Вот один такой «фокус»:

1)  $x \cdot 5$                                  $= 5x$ ;

2)  $(x \cdot 5) \cdot 4$                                  $= 20x$ ;

3)  $(x \cdot 5) \cdot 4 + 3$                                  $= 20x + 3$ ;

4)  $((x \cdot 5) \cdot 4 + 3) \cdot 5 = (20x + 3) \cdot 5 = 100x + 15$ ;

5) оставьте две последние цифры (15);

6) прибавьте 85;

7) получилось 100!

Составлять, составлять, составлять «фокусы», задачи, теоремы, числа, уравнения, неравенства доступно в меру своих сил любому школьнику начиная с первого класса. Вот формула активного обучения: не решать чужие задания, а составлять свои! Это доставляет невообразимое удовольствие не только ребенку, но и взрослому, ибо это и есть наиболее действенное средство саморазвития ума человека! В

педагогике такой процесс называют самоучением, *автодидактикой*.

Современная школьная методика обучения, к сожалению, мало стимулирует подобные упражнения. Она далека от таких творческих приемов самонаращивания учащимися математической информации. Обучение математике кроме основной цели освоения собственно математических знаний выполняет и невидимую подспудную функцию обучения приемам эффективного мышления, «думания», развивает сообразительность или, как еще говорят, способность к «принятию решений». Однако в обучении математике зачастую бывает трудно методистам и ученым отказаться от трафаретов, от неоправдавших себя методических систем (догм), впитанных ими в период собственного школьного и вузовского обучения. Приведем простейший тому пример.

Содержание всех действующих сейчас пособий по математике построено только на готовых задачах, подобранных заранее для школьника.

Например, первоклассник решает задачу на увеличение числа на несколько единиц. По программе обратную задачу положено решать через... год (?!).

Прямая задача

У Миши 3 тетради, а у Нины на 2 тетради больше. Сколько тетрадей у Нины?

Решение:

$$3 + 2 = 5.$$

Обратная задача

У Миши 3 тетради, у Нины 5 тетрадей. На сколько тетрадей у Нины больше, чем у Миши?

Решение:

$$5 - 3 = 2.$$

И еще. Уже во втором классе в связи с изучением таблицы умножения дети умеют вычислять площадь прямоугольника, перемножая длину на ширину. Но парадокс в том, что составители учебных программ не включили для начальной школы правила вычисления объема параллелепипеда (рис. 24). Во всех подобных случаях наносится ущерб логическому развитию ума школьника, лишенного житейской возможности уловить аналогию суждений и понятий, благодаря которым осваиваются живые связи предметов и явлений мира. В каком бы классе ни изучался квадрат и круг, надо указать:

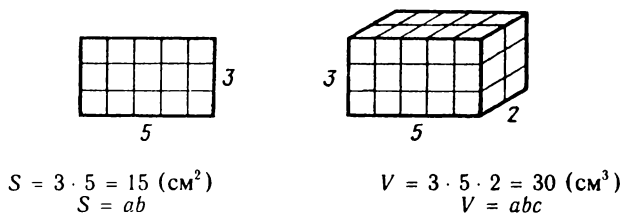


Рис. 24

квадрат — это грань куба; куб — это шестигранник, у которого все грани — квадраты; окружность — это сечение сферы плоскостью; сфера — это результат вращения окружности вокруг диаметра (рис. 25).

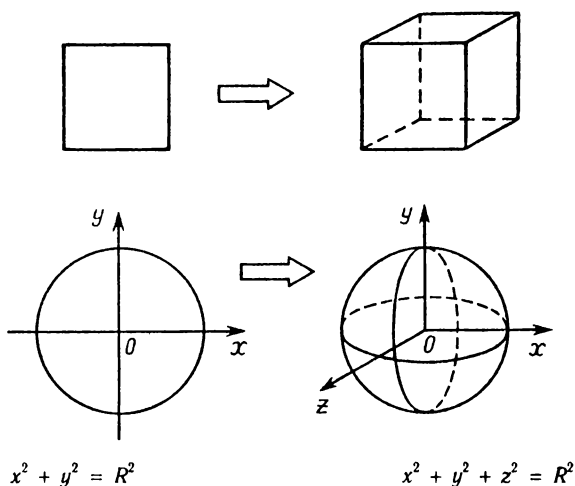


Рис. 25

Опыт обучения по разработанной нами технологии укрупнения дидактических единиц (УДЕ) привел к важному выводу: совместное изучение взаимосвязанных задач (теорем, функций) есть главное средство преодоления изолированности родственных знаний, улучшения тем самым качества обучения математике, поднятия уровня всего математического образования. С малого начинается великое!

Предлагаем читателю вспомнить некоторые геометрические теоремы из курса 7 класса и привести

доказательство взаимно-обратных теорем, памятуя, что, согласно принципу УДЕ, обратная задача (теорема) составляется, как правило, самим учащимся (вначале с помощью учителя).

**Теорема:** высоты, опущенные на боковые стороны равнобедренного треугольника, равны (рис. 26).

Ученик составляет и доказывает тут же обратную теорему: если две высоты равны, то треугольник равнобедренный.

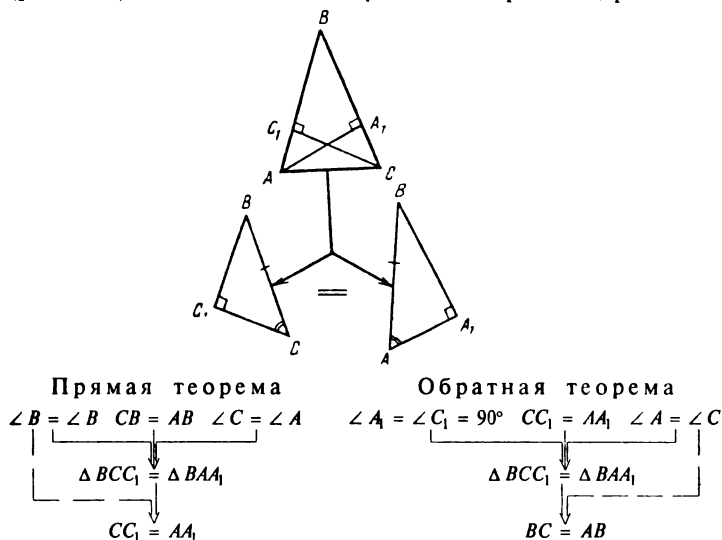


Рис. 26

Заметим попутно, что совмещение во времени подобных взаимно-обратных суждений есть основное логическое средство реализации творческого мышления через математику. Заметим далее, что наглядность доказательства этих теорем достигается такой «деталью», как обозначение переходов между суждениями с помощью специальных символов (стрелок) и симметричного их расположения. Сравнение решения двух задач (исходной и самостоятельно составленной) содержит значительно больше информации, чем сумма информации, заключенных в каждой из этих задач. Вот почему такие пары заданий надо записывать рядом! «Тайна» экономной обработки информации оказывается простой.



Приведем еще несколько простейших примеров, доказывающих, что мир математических знаний поистине неисчерпаем для каждого, кто интересуется этой областью мышления: всякое математическое суждение, будучи многомерным, имеет свое информационное окружение из родственных понятий. Искусство обучения заключается в умении активизировать в мышлении это окружение, превратить это поле знаний в доминанту, что и означает спонтанный рост знаний «самих по себе». Лучший путь тренировки ума в творчестве — это непрерывное логическое изобретательство с немедленной проверкой на истинность сделанных вами предложений. Если же доказать предлагаемое обобщение или решить составленную вами задачу не удастся сейчас, сегодня, то это удастся позже, завтра, через несколько лет! Важно сохранять в памяти нерешенные проблемы в ранге гипотез. Так создается перспектива завтрашнего успеха.

Поистине любое изучаемое понятие (число, функция, тождество, неравенство, теорема) действительно в окружении родственных понятий. И здесь открываются врата в математическое творчество. «Знание лишь постольку знание, что оно существует в отсвете незнаемого» (М. Мамардашвили). Рассмотрим два примера.

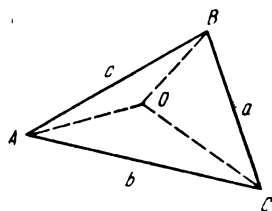
1. Несложно доказать «неравенство треугольника»:  $a + b > c$ .

2. Докажем теорему: сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин треугольника больше его полупериметра (рис. 27).

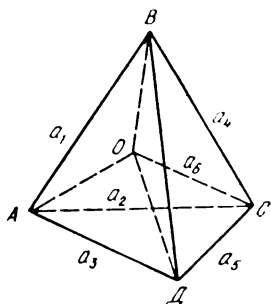
**Доказательство.**

Отрезок между двумя точками короче ломаной между теми же точками; сложим по частям три неравенства:

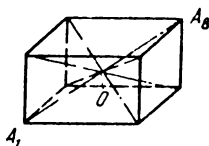
$$\begin{array}{r}
 OA + OB \geq c \\
 OB + OC \geq a \\
 OC + OA \geq b \\
 \hline
 2(OA + OB + OC) \geq a + b + c, \\
 \text{или } OA + OB + OC \geq \frac{a + b + c}{2}.
 \end{array}$$



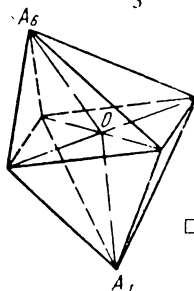
$$AO + BO + CO > \frac{a + b + c}{2}$$



$$AO + BO + CO + DO > \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{3}$$



$$\square > \frac{\square}{3}$$



$$\square > \frac{\square}{4}$$

Рис. 27

Интересно обобщить эту теорему на четырехугольник (или на тетраэдр). Не сразу, но с помощью проб, построений и измерений (пусть вначале и не каждому это удастся) приходим к подобной теореме, сравнивая сумму расстояний от точки  $O$  до четырех вершин тетраэдра с суммой всех шести его ребер. В итоге предположений и проб формулируется парное предыдущему «суждение — гипотеза»: сумма расстояний от произвольной точки пространства до четырех вершин тетраэдра (четырехгранника) — *наверное* — больше трети суммы шести его ребер. Почему трети? (Доказательство аналогично доказательству теоремы для треугольника, ибо основано на применении неравенства треугольника.)

Но пытливый ученик на этом не остановится. Он поразмышляет: каково же будет аналогичное соотношение, если рассматривать сумму расстояний от точки пространства до вершин куба, октаэдра, додекаэдра? Конкретнее: от чего же зависит знаме-

натель в правой части неравенства, *сколько вершин* сходятся в каждой вершине этих фигур?

Составление своих задач, «додумывание» и «выдумывание», обобщение и конкретизация — это и есть будничная, постоянная тренировка творческого мышления. Однако справедливо говорят: «Многознание уму не научает». Это выражение верно постольку, поскольку речь идет о множестве всевозможных сведений, мало связанных или не связанных друг с другом. Ум человека «растет» главным образом при самостоятельном обнаружении новых связей между уже имеющимися у него наличными знаниями.

К сожалению, информацию высшего уровня, структурную информацию, почти невозможно постичь на уроках при существующих школьных программах и приспособленных к ним учебниках, отрицательной чертой которых является элементаризм, формализм и аналитизм. Ни в одном учебнике математики (тем более в вузовском) обучающийся не найдет заданий со словами: придумать, составить число (многочлен, функцию, матрицу), удовлетворяющее тому или иному заданному условию. Ныне школьник «пасется», жуя «готовые знания», поистине не замечая несметных богатств, которые он мог бы *приобрести сам*, без помощи учителя и учебников, на просторах своей фантазии.

Изучая математику, важно пристально вглядываться в содержание изучаемого, «думать около», дать волю «граничному мышлению» или, как еще говорят, разбудить подсознание.

Подобные пути активного расширения и углубления знаний можно найти самым почти по любой школьной теме.

Вот одна несложная задача, включенная в учебник 5 класса П. М. Эрдниева.

Возьмем две пары чисел, в сумме составляющих число 10, например:

$3 + 7 =$		$3 + 7 =$
$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$	$10,$	$\begin{array}{ c } \hline \times \\ \hline \end{array} \quad 10.$
$2 + 8 =$		$2 + 8 =$

Перемножим слагаемые из разных сумм попарно и вычтем меньшее произведение из большего:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 3 = 6 \\ 7 \cdot 8 = 56 \\ \hline 56 - 6 = 50 \end{array}$$

(пять *десятков*),

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 7 = 14 \\ 3 \cdot 8 = 24 \\ \hline 24 - 14 = 10 \end{array}$$

(один *десяток*).

Что мы заметили? Разности произведений оканчиваются нулем! Случайно ли это? Или всегда так будет? Продолжим этот умственный эксперимент:

$$\begin{array}{r} 6 + 4 = \\ 3 + 7 = \end{array} \quad \mathbf{10}$$


---


$$6 \cdot 3 = 18; \quad 4 \cdot 7 = 28; \quad 28 - 18 = 10 \quad \text{и т. д.}$$

Снова нулем оканчивается разность! Неспроста все это! Смышленому ученику должна прийти мысль: соблюдается ли обнаруженное явление для суммы 100? Например:

$$\begin{array}{r} 64 + 36 = \\ 21 + 79 = \end{array} \quad \mathbf{100}.$$

Проводим тот же вычислительный опыт, но уже над двузначными числами:

$$\begin{array}{r} 64 \cdot 79 = 5056 \\ - \\ 21 \cdot 36 = 756 \\ \hline 4300 = 43 \text{ сотни.} \end{array}$$

Ожидание оправдалось: разность оканчивается двумя нулями (она равна 43 *сотням*).

Если у вас калькулятор под рукой, убедитесь в соблюдении найденной зависимости и для трехзначных слагаемых, например:

$$\begin{array}{r} 125 + 875 = \\ 417 + 583 = \end{array} \quad \mathbf{1000},$$

$$\begin{array}{r} 875 \cdot 583 = 510\,125 \\ - \\ 125 \cdot 417 = 52\,125 \\ \hline 458\,000 = 458 \text{ тысяч.} \end{array}$$

Так удачливый пятиклассник может найти сам интересную закономерность, строгое доказательство которой последует для него через годы.

Вот алгебраическое объяснение этой задачи. Пусть  $a = 64$ ,  $a + b = 100$ ;  $b = 36 = 100 - 64 = 100 - a$ . Итак,

$$\begin{array}{l} a + (100 - a) = \\ c + (100 - c) = \end{array} \quad \mathbf{100}.$$

Найдем разность произведений:  $(100 - a)(100 - c) -$

$$-ac = 10\,000 - 100(a + c) + ac - ac = 100(100 - a - c) = 100 \cdot m.$$

7

Разность произведений кратна ста!

Приведем далее пример применения аналогии для получения пифагоровых троек (четверок, пятерок и т. д.) чисел. Тождество  $3^2 + 4^2 = 5^2$  связывают с «египетским треугольником». Существуют другие подобные тройки чисел, например  $12^2 + 5^2 = 13^2$ . Но ценнее хранить в памяти общий способ составления целочисленных прямоугольных треугольников.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Пусть } a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \\ c = x^2 + y^2 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{a^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{b^2 = 4x^2y^2}{c^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Сравнивая правые части двух верхних равенств, мы видим выполнение соотношения:

$$(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + (2xy)^2 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4).$$

Итак, при любых целых значениях  $x$  и  $y$  получаем:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 &= (x^2 + y^2)^2, \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Однако важно различать понятия «доказательность» и «убедительность». Так, мысль, заключенную в алгебраическом выражении, полезно подкрепить числовой подстановкой, дабы усилить ее убедительность.

Составим по данным формулам несколько целочисленных пифагоровых треугольников ( $x$  и  $y$  — разной четности и не имеют общих делителей) (табл. 1).

Таблица 1

				$a^2$	$b^2$	$c^2$	Проверка
$x$	$y$	$x^2$	$y^2$	$(x^2 - y^2)^2$	$(2xy)^2$	$(x^2 + y^2)^2$	
2	1	4	1	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$3^2 + 4^2 = 5^2$ ; $25 = 25$
3	2	9	4	$5^2$	$12^2$	$13^2$	$5^2 + 12^2 = 13^2$ ; $169 = 169$
4	3	16	9	$7^2$	$24^2$	$25^2$	$7^2 + 24^2 = 25^2$ ; $625 = 625$
4	1	..	..				
5	2	..	..				

В математических упражнениях часто встречаются расчеты, связанные с прямоугольником, у которого значения длины, ширины и диагонали суть пифагоровы тройки чисел.

Но ведь столь же удобными могут быть и **8 пифагоровы четверки** чисел, представляющие размеры прямоугольных параллелепипедов (пифагоровых) и т. п.

Рассматривая структуру тождества (1), нам удалось заметить закономерность для составления пифагоровой четверки (пятерки и т. д.) чисел. Все дело в повторении квадратов удвоенных чисел, например:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2 - z^2)^2 + (2xy)^2 + (2xz)^2, \\ d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (2)$$

Пусть  $x=4$ ,  $y=1$ ,  $z=2$ . Тогда имеем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4^2 + 1^2 + 2^2 = 21, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4^2 - 1^2 - 2^2 = 11, \\ 2xy = 8, \quad 2xz = 16.$$

Итак, получаем пифагорову тройку:

$$11^2 + 8^2 + 16^2 = 21^2, \\ \text{или } 121 + 64 + 256 = 441.$$

Составим таблицу таких четверок целых чисел, которые особенно удобны при решении пространственных задач: сумма квадратов трех первых чисел (длин ребер) равна квадрату четвертого числа (диагонали параллелепипеда).

Продолжим таблицу пифагоровых четверок (табл. 2).

Таблица 2

						$a$	$b$	$c$	$d$	$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$
$x$	$y$	$z$	$x^2$	$y^2$	$z^2$	$x^2 - y^2 - z^2$	$2xy$	$2xz$	$x^2 + y^2 + z^2$	
4	1	2	16	1	4	11	8	16	21	$11^2 + 8^2 + 16^2 = 21^2$
4	3	2	16	9	4	3	24	16	29	$3^2 + 24^2 + 16^2 = 29^2$
4	5	2	16	25	4	-13	40	16	45	$(-13)^2 + 40^2 + 16^2 = 45^2$
5	4	2								$13^2 + 40^2 + 16^2 = 45^2$
6	5	4			...					

Предлагаем читателю составить тем же способом пифагорову четверку:

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 = \\ & = (x^2 - y^2z^2 - t^2)^2 + (2xy)^2 + (2xz)^2 + (2xt)^2; \\ & b^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Никого особенно не удивит наблюдение, что средние линии произвольного треугольника разбивают его на четыре равных треугольника. И этот процесс можно продолжить бесконечно, а именно образовать цепь подобных фигур, уменьшающихся (по площади) при каждом делении в четыре раза (рис. 28). Этот прием сохраняет силу применительно к параллелограммам и параллелепипедам. (Любой параллелепипед можно тремя разрезами через середины ребер разделить на 8 равных друг другу параллелепипедов.) Однако линия обобщения «треугольник — тетраэдр» в этой аналогии не работает: произвольный тетраэдр невозможно разбить на равные тетраэдры.

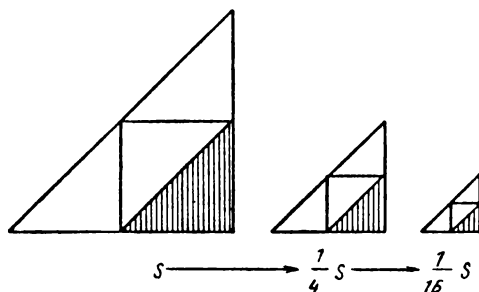


Рис. 28

Нас обрадовала следующая находка.

Отрезав от квадрата его четверть, получим невыпуклый шестиугольник, который удастся разрезать снова на четыре равных друг другу невыпуклых шестиугольника той же формы и т. д. (рис. 29). Для этого достаточно вырезать

9

Отрезав от куба его восьмую часть, получим невыпуклый девятигранник, который удастся разрезать на восемь равных друг другу невыпуклых девятигранников той же формы (рис. 30).

из исходного квадрата также квадрат, но вдвое меньших размеров. Оставшаяся после этого часть квадратов распадается на четыре равные фигуры той же формы.

Для этого достаточно вырезать точно из середины куба фигуру той же формы, т. е. куб вдвое меньших линейных размеров. Оставшаяся часть распадается на восемь равных фигур той же формы девятигранника.

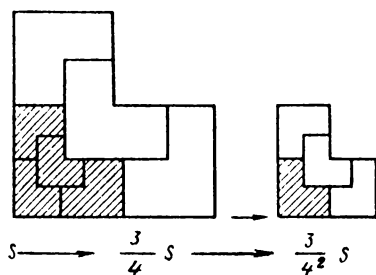


Рис. 29

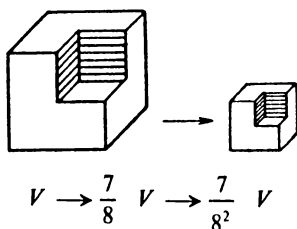


Рис. 30

При всей кажущейся несложности получения пространственных аналогов другие авторы прошли мимо такой возможности.

Пусть имеется произвольный многоугольник, вершины которого расположены в узлах квадратной сетки (рис. 31). За единицу площади берем площадь одной клетки.

Тогда соблюдается следующая зависимость:

$$S = 0,5\Gamma + B - 1 \text{ (теорема Пика).}$$

Здесь  $S$  — площадь (число клеток, ограниченных многоугольником),  $\Gamma$  — число точек, оказавшихся на границе многоугольника,  $B$  — число точек, расположенных внутри многоугольника.

Данная задача является удачной моделью для показа некоторых особенностей математического рассуждения вообще. Представим себе, что указанная выше формула нам неизвестна. Требуется ее установить. Решение выглядит следующим образом. Вначале неизвестную функцию представляем в самом общем виде; площадь замкнутой фигуры зависит от двух качественно различных параметров: от числа



# ТЕОРЕМА ПИКА

$$S = 0,5 \Gamma + MB - 1$$



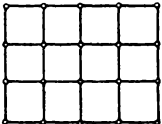
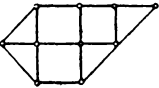
Фигуры	Граничные точки $\Gamma$	Внутренние точки $B$	$S = S(\Gamma; B)$
$\varphi_1$ 	4	0	$S(4; 0) = 1$
$\varphi_2$ 	6	0	$S(6; 0) = 2$
$\varphi_3$ 	14	6	$S(14, 6) = 12$
$\varphi_4$ <i>Контроль</i> 	8	2	$S(8; 2) = 5$

Рис. 31

внутренних точек и числа граничных точек. Рассуждаем примерно так: чем больше внутренних точек и чем больше граничных точек, тем, *вероятно*, больше и площадь соответствующей фигуры. Есть поэтому основания *предположить* наличие линейной зависимости искомой площади  $S$  фигуры от обеих переменных, т.е. искать неизвестную функцию в следующем виде:  $S = S(\Gamma, B)$ , а точнее,

$$S = a\Gamma + bB + c, \quad (3)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — неизвестные пока коэффициенты.

Для нахождения значений коэффициентов применим *метод неопределенных коэффициентов*, а именно: на трех конкретных фигурах подсчитываем значения трех параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; прямым подсчетом определяем значение площади  $S$ , число граничных точек  $\Gamma$ , число внутренних точек  $B$  для каждого случая. Подставив в общее уравнение (3) значения

$\Gamma$ ,  $B$ ,  $S$ , полученные на «опытах» с конкретными фигурами, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\begin{aligned}(\Phi_1): & \begin{cases} a \cdot 4 + b \cdot 0 + c = 1 \\ a \cdot 6 + b \cdot 0 + c = 2 \\ a \cdot 14 + b \cdot 6 + c = 12. \end{cases} \\(\Phi_2): & \\(\Phi_3): & \end{aligned}$$

Решив данную систему линейных уравнений, находим значения искомых коэффициентов в (3):  $a=0,5$ ;  $b=1$ ;  $c=-1$ ; отсюда и получаем приведенную выше формулу для вычисления площади:

$$S = 0,5\Gamma + B - 1. \quad (3a)$$

Можно далее проверить на «прочность» сконструированную так формулу на произвольном многоугольнике  $\Phi_4$ , имеющем, скажем, не прямые углы (см. рис. 31).


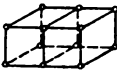
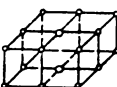
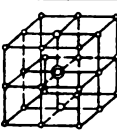
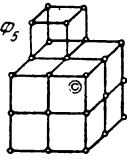


Однако ищущая мысль математика на достигнутом не останавливается: в свои права вступает аналогия, поскольку Пик ограничился фигурой на квадратной сетке, а задачу можно обобщить на кубическую сетку. Перейдем от плоскости к пространству (от площади многоугольника к объему многогранника). Ограничимся для краткости поиском аналогичной формулы для прямоугольных параллелепипедов, вершины которых расположены в узлах кубической решетки (рис. 32). Мы предположили, что должна существовать также линейная зависимость объема пространственной фигуры  $V$  от числа узловых точек трех видов: расположенных на ребрах ( $P$ ), на гранях с исключением ребер ( $\Gamma$ ) и внутренних точек ( $B$ ).

Итак, предположим снова линейную зависимость:

$$\begin{aligned}V &= V(P, \Gamma, B), \\V &= aP + b\Gamma + cB + d.\end{aligned}$$

Выполнив соответствующие подсчеты для четырех произвольных параллелепипедов, приходим к системе четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a \cdot 8 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 1 \\ a \cdot 12 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 2 \\ a \cdot 16 + b \cdot 2 + c \cdot 0 + d = 4 \\ a \cdot 20 + b \cdot 6 + c \cdot 1 + d = 8. \end{cases}$$

Фигуры	Точки на ребрах Р	Точки на гранях Г	Внутрен- ние точки В	V
$\Phi_1$ 	8	0	0	1
$\Phi_2$ 	12	0	0	2
$\Phi_3$ 	16	2	0	4
$\Phi_4$ 	20	6	1	8
$\Phi_5$ 			1	9

$$V = 0,25P + 0,5Г + В - 1$$

Рис. 32

Решив эту линейную систему, находим искомые значения коэффициентов ( $a = 0,25$ ;  $b = 0,5$ ;  $c = 1$ ;  $d = -1$ ). Итак, искомая функция имеет вид:

$$10 \quad V = 0,25P + 0,5Г + В - 1. \quad (4)$$

Сравнивая формулы (3 а) и (4), приходим к выводу: в формуле (4) появился новый член  $0,25P$  (число точек, лежащих на ребрах). Предлагаем читателю проверить формулу (4) для любой другой фигуры, например, для фигуры  $\Phi_5$  (см. рис. 32). Рассмотренная здесь задача является образцом постановки и решения так называемой *обратной задачи*. (В обоих случаях должны быть затем найдены и логические доказательства.)

В школьных учебниках мы решаем, например, следующую задачу. Дана функция своим уравнением:  $y = 2x - 6$ . Требуется найти значения этой функции при заданных значениях аргумента  $x$ .

В такой задаче параметры в правой части уравнения (2; -6) заданы; требуется определить значения функции при тех или иных значениях аргумента. В рассмотренной же выше задаче, наоборот, даны значения функции при определенных значениях аргумента. Требуется найти значения коэффициентов при переменных, т.е. построить функцию по его значениям.

Остается лишь отметить, что формулу вида (3 а) сообщает (без доказательства) математик Штейнгауз в своей книге «Математический калейдоскоп». Нам же удалось благодаря применению метода аналогии вывести неизвестную нам ранее (быть может, и вообще никому еще не известную) формулу (4). Так обогатился фонд математических знаний еще одним переходом от плоскости к пространству, т.е. от формулы

$$S = 0,5\Gamma + B - 1 \quad (\text{Штейнгауз})$$

к формуле

$$V = 0,25P + 0,5\Gamma + B - 1 \quad (\text{Эрдниевы}).$$

Укажем попутно на следующее: в предыдущем тексте речь идет о нахождении гипотетической функции методом неопределенных коэффициентов. Доказательство установленной формулы осуществляется дополнительно. Разумеется, определение параметров предполагаемой зависимости — это важнейший элемент исследования.

Можно предположить, что гений Эйлера мог бы сначала использовать тот же метод неопределенных коэффициентов, когда устанавливал зависимость числа граней ( $\Gamma$ ) от числа вершин ( $B$ ) и ребер ( $P$ ) в виде линейной функции

$$\Gamma = a \cdot B + b \cdot P + c. \quad (5)$$

Предлагаем найти формулу Эйлера, а именно: подставив в формулу (5) значения  $\Gamma$ ,  $B$ ,  $P$  для тетраэдра, куба, октаэдра и решив полученную систему уравнений, нетрудно найти значения искоемых параметров (рис. 33):

$$\Gamma = -V + P + 2, \quad (6)$$

или  $\Gamma + V = P + 2.$

	V	P	$\Gamma$
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8

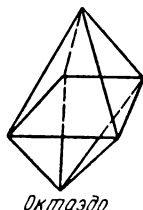
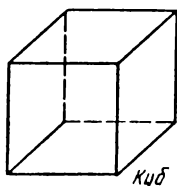
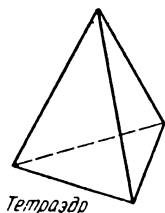


Рис. 33

Методом неопределенных коэффициентов мы лишь нашли предполагаемую формулу (6), связывающую числа вершин, ребер, граней. Доказательство же формулы (6) для всех выпуклых многогранников — это уже другая проблема. Выше (см. рис. 20) мы привели рисунок, иллюстрирующий магический шестиугольник Адамса. Также приведен прямой геометрический аналог покрытия всего трехмерного пространства равными усеченными октаэдрами (см. рис. 21). Сравнивая обе задачи, возможно найти целочисленные многочлены, выражающие число элементарных ячеек, расположенных вокруг одного исходного элемента.

Для  $\frac{\text{плоскостного}}{\text{пространственного}}$  случая искомая функция будет многочленом  $\frac{\text{второй}}{\text{третьей}}$  степени, а именно:

«круги» из равных шестиугольников (см. рис. 20):

$$y(n) = a_1 n^2 + a_2 n + a_3,$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 1 + a_3 = 1 \\ a_1 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 2 + a_3 = 7 \\ a_1 \cdot 3^2 + a_2 \cdot 3 + a_3 = 19, \end{cases}$$

«шары» из равных усеченных октаэдров (см. рис. 21):

$$y(n) = b_1 n^3 + b_2 n^2 + b_3 n + b_4,$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot 1^3 + b_2 \cdot 1^2 + b_3 \cdot 1 + b_4 = 1 \\ b_1 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_3 \cdot 2 + b_4 = 15 \\ b_1 \cdot 3^3 + b_2 \cdot 3^2 + b_3 \cdot 3 + b_4 = 65 \\ b_1 \cdot 4^3 + b_2 \cdot 4^2 + b_3 \cdot 4 + b_4 = 195. \end{cases}$$

Для того чтобы найти число ячеек при 3 и 4 слоях «шара», нам пришлось практически сложить его из равных фигур и *пересчитать* число соответствующих элементов. Решив соответствующие системы уравнений, мы нашли следующие формулы для определения числа элементов\*:

$$x(n) = 3n^2 - 3n + 1; \quad | \quad y(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

Учителя и методисты-математики ныне признают актуальность проблемы создания единых учебников математики, обеспечивающих интеграцию как алгебраических, так и геометрических знаний на одном уроке, на одной странице учебника. В этой связи исключительно важны усилия по слиянию планиметрических знаний с их стереометрическими аналогами, а точнее, по выведению планиметрического как частного случая из стереометрического.

Исключительно большая роль принадлежит координатно-векторному аппарату геометрии, когда двух- и трехмерные векторы рассматриваются воедино (рис. 34).

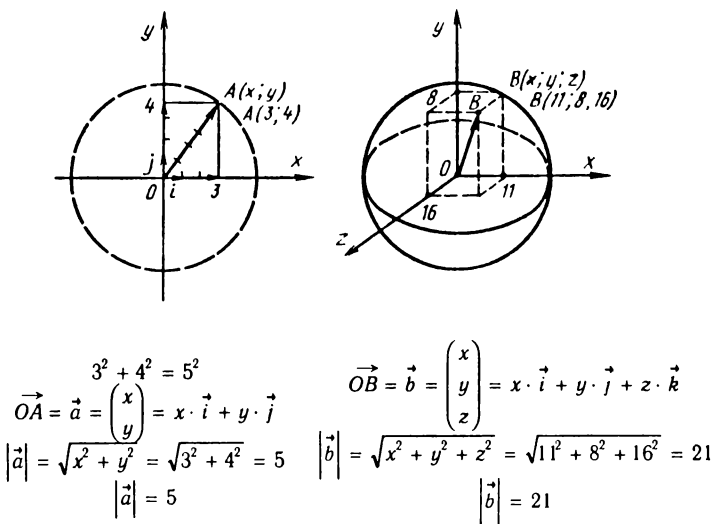


Рис. 34

\* См. беседу о содружественных многогранниках.

Если в пространстве расположены отрезок, треугольник, тетраэдр, вершины которых характеризуются

радиус-векторами  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , то центр масс

(центр тяжести) этих фигур выражается радиус-вектором  $\vec{OC}$ , равным среднему арифметическому радиус-векторов вершин фигуры:

$$\vec{OC} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2} \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2} \end{pmatrix}.$$

Например, радиус-вектор  $\vec{OC}$  центра тяжести треугольника  $A_1A_2A_3$ , расположенного в пространстве, равен:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{pmatrix} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3}{3}.$$

Пусть дан тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ . Линии, соединяющие середины противоположных ребер, называются средними линиями тетраэдра (рис. 35). Докажем теорему: три средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

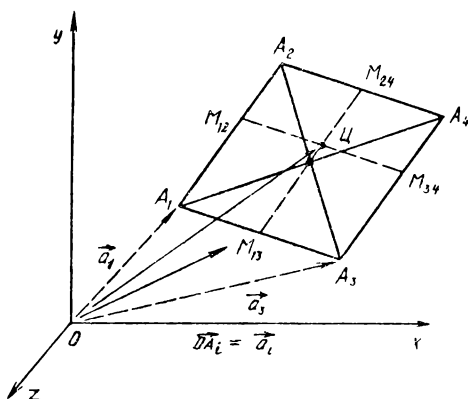
Чтобы решить эту задачу на доказательство, сначала найдем радиус-векторы середины двух противоположных ребер:  $\vec{OM}_{12} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2}$ ,  $\vec{OM}_{34} = \frac{\vec{a}_3 + \vec{a}_4}{2}$ .

Найдем радиус-вектор середины средней линии  $M_{12}M_{34}$ :

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OM}_{12} + \vec{OM}_{34}}{2} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4}{4}.$$

Совершенно такой же вектор мы получим для середины другой средней линии, например:

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OM}_{13} + \vec{OM}_{24}}{2} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4}{4}.$$



$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \frac{\vec{a}_i + \vec{a}_j}{2} \\ M_{12}M_{34} \cap M_{13}M_{24} \cap M_{14}M_{23} &= Ц \\ \vec{OЦ} &= \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4}{4}\end{aligned}$$

Рис. 35

Итак, в точке  $Ц^*$  (центре тяжести тетраэдра) пересекаются три его средние линии:

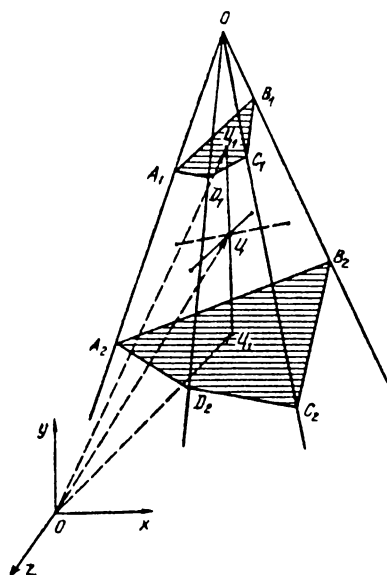
$$M_{12}M_{34} \cap M_{13}M_{24} \cap M_{14}M_{23} = Ц^*.$$

Поучительна следующая аналогия. Пусть четырехугольная пирамида пересечена двумя произвольными плоскостями так, что образовался выпуклый шестигранник (восьмивершинник) (рис. 36). Такой многогранник имеет три пары противоположных граней. Центроиды противоположных граней суть концы средних линий шестигранника. Нетрудно показать, что, как и в предыдущем случае, три средние линии шестигранника пересекаются в центроиде шестигранника  $Ц^*$ :

$$O\vec{Ц}^* = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_8}{8}.$$

Поучительны аналогии числовых неравенств, вытекающие из неравенства треугольника. Пусть на координатной плоскости (в координатном пространстве) даны два радиус-вектора:





$$\begin{aligned}\vec{OC_1} &= \frac{\vec{a_1} + \vec{b_1} + \vec{c_1} + \vec{d_1}}{4} \\ \vec{OC_2} &= \frac{\vec{a_2} + \vec{b_2} + \vec{c_2} + \vec{d_2}}{4} \\ \vec{OC} &= \frac{\vec{OC_1} + \vec{OC_2}}{2}\end{aligned}$$

Рис. 36

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму этих векторов:

$$\vec{a_1} + \vec{a_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

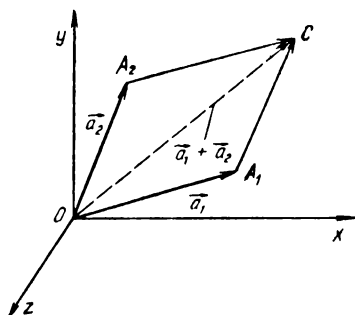
Если построить сумму векторов по правилу треугольника, то имеем (рис. 37):

$$|\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| \geq |\vec{a}_1 + \vec{a}_2|.$$

Зная формулу модуля вектора, получаем числовое неравенство, верное для любых значений координат (для любых действительных чисел):

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \geq \\ & \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}. \end{aligned}$$

Поучительно, например, проверить неравенство для конкретных координат (см. рис. 37):



$$\vec{a}_1 = \vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{OA}_1| + |\vec{OA}_2| > |\vec{OC}|$$

⇓

$$|\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| \geq |\vec{a}_1 + \vec{a}_2|$$

⇓

$$\sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 0^2 + 4^2} \geq \sqrt{(0+1)^2 + (2+0)^2 + (3+4)^2}$$

⇓

$$\sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 0^2 + 4^2} \geq \sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2}$$

Рис. 37

$$\begin{aligned}
 \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 0^2 + 4^2} & \quad ? \quad \sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2}, \quad \leftarrow \\
 \sqrt{13} + \sqrt{17} & \quad ? \quad \sqrt{53}, \\
 13 + 2 \cdot \sqrt{13 \cdot 17} + 17 & \quad ? \quad 53, \\
 4 \cdot 13 \cdot 17 & \quad ? \quad 23^2, \\
 824 & > 529.
 \end{aligned}$$

Примечательно, что данное неравенство может быть обобщено как по числу складываемых векторов, и так по размерности векторного пространства. Предлагаем написать и проверить подстановкой аналогичное неравенство, интерпретируемое так: модуль суммы трех четырехмерных векторов не больше суммы их модулей.

# ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЧЕТВЕРКА: ТРЕУГОЛЬНИК ВПИСАН В ОКРУЖНОСТЬ, СФЕРА ОПИСАНА ОКОЛО ТЕТРАЭДРА

Дайте мне возможность созидать, и я  
на время стану богом...

Д. Сайндж

На обложке одной книги мы увидели рисунок: три окружности одного радиуса проходят одну точку, а точки же пересечения самих окружностей (по две!) определяют окружность того же радиуса! Красота и завершенность этого чертежа натолкнули нас на предположение: если четыре сферы (по три) одного радиуса будут проходить через общую точку, то четыре точки пересечения этих сфер (по три!) определяют, *вероятно*, сферу того же радиуса.

Такого обобщения мы не нашли в литературе.

Указанный рисунок содержательно связан со следующей планиметрической теоремой Карно: если  $B_1, B_2, B_3$  суть точки, симметричные центру окружности  $A(R)$ , описанной около  $\triangle A_1A_2A_3$ , то прообраз  $(\triangle A_1A_2A_3)$  и образ  $(\triangle B_1B_2B_3)$  равны\*.

С указанной теоремой нам повезло вдвойне: вписанные треугольники оказались не просто равными, но центрально симметричными; к тому же возникла редкая в практике читателя возможность «поделить славу» с автором задачи, поскольку удалось доказать и обобщенную теорему: пусть дана  $\frac{\text{окружность}}{\text{сфера}}$

$A(R)$ , описанная около  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}} A_1A_2A_3(A_4)$  — прообраза. Если теперь построить точки  $B_i$ , симметрич-

ные точке  $A$  относительно  $\frac{\text{сторон}}{\text{граней}}$  прообраза, то  $\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}} B_1B_2B_3(B_4)$  — образ — будет центрально симметричен прообразу относительно центроида — от-

---

\* Моденов В.П. Пособие по математике. — М, 1972 (задача № 52).

резка  $AB$ . Здесь  $B$  есть центр  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$   $B(R)^*$ .

**11** Для демонстрации силы аналогии поучительно провести доказательства обеих теорем совместно и одновременно.

**З а м е ч а н и е .** Все элементы чертежа, связанные с символом  $A$ , будем называть для краткости прообразом, а с буквой  $B$  — его образом.

Возьмем  $\frac{\text{окружность}}{\text{сферу}}$   $A(R)$ . Отметим на ней  $\frac{\text{три}}{\text{четыре}}$  произвольные точки  $A_1, A_2, A_3(A_4)$  — вершины вписанного в нее  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$ -прообраза (рис. 38) (рис. 39).

Введем краткие обозначения: сторона  $A_1A_2 = \alpha_3$  (против вершины  $A_3$  в треугольнике); грань  $A_1A_2A_3 = \alpha_4$  (против вершины  $A_4$  в тетраэдре) и т. д.

Симметрию точек прообраза и образа обозначим так:

$S_{a_i}(A) = B_i$  (на плоскости) и  $S_{a_i}(A) = B_i$  (в пространстве) и т. д.

Итак, требуется доказать:

$S_O(\Delta A_1A_2A_4) = \Delta B_1B_2B_3$  (на плоскости),  $S_O(\Delta A_1A_2A_3A_4) = \Delta B_1B_2B_3B_4$  (в пространстве), где точка  $O$  — середина отрезка  $AB$ .

Доказательство сводится к следующей цепи построений:

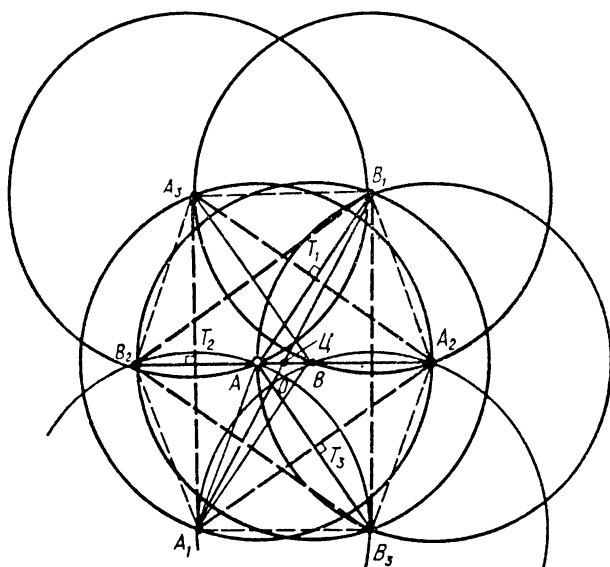
1) согласно условию  $\frac{\text{три окружности}}{\text{четыре сферы}}$   $A_i(R)$  пересекаются в центре  $A$   $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$   $A(R)$ , описанной около прообраза  $A_1A_2A_3(A_4)$ ;

2) вторые точки пересечения  $\frac{\text{пар окружностей}}{\text{троек сфер}}$  суть точки, симметричные центру  $A$  относительно  $\frac{\text{сторон}}{\text{граней}}$  (этот момент будет доказан особо);

3) так как около всякого  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$  можно

---

\* Предлагаем исследовать далее выход к четырехмерному пространству: если пять четырехмерных сфер пересекаются в одной точке, то, вероятно, 10 «четверных» точек их пересечения ( $C_5^4 = 10$ ) лежат на четырехмерной гиперсфере того же радиуса.



$$AA_2 = A_2B_1 = B_2A_3 = A_3A = R$$

$$BB_2 = B_2A_3 = A_3B_1 = B_1B$$

↓  
 $AA_2B_1A_3$  — ромб

↓  
 $BB_2A_3B_1$  — ромб

↓  
 $AA_2 \neq A_3B_1$

↓  
 $BB_2 \neq A_3B_1$

↓  
 $AA_2 \neq BB_2$

↓  
 $AA_2BB_2$  — параллелограмм

↓  
 $AB \cap A_2B_2 = O = A_1B_1 \cap AB$

↓  
 $OA = OB$

↓  
 $S_O(\Delta AA_2A_3) = \Delta BB_2B_3$

↓  
 $\Delta AA_2A_3 = \Delta BB_2B_3$

↓  
 $AA_1 = BB_1 = R$

Рис. 38



Сначала докажем данное предложение для плоскости. Пусть окружности  $A_1(R)$  и  $A_2(R)$  пересекаются в двух точках: в центре  $A$  прообраза и в вершине  $B_3$  образа:  $A_1(R) \cap A_2(R) = \{A; B_3\}$ .

Докажем симметричность этих точек относительно соответствующей стороны:  $S_{a_3}(A) = B_3$ . Нетрудно видеть, что построенный так четырехугольник  $AA_1B_3A_2$  является ромбом, так как все его стороны равны радиусу прообраза:  $AA_1 = A_1B_3 = B_3A_2 = A_2A = R$  (см. рис. 38). Но диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят друг друга пополам, например:  $AB_3 \perp A_1A_2$ ,  $AB_3 \cap a_3 = T_3$  (или  $AB_3 \cap A_1A_2 = T_3$ ),  $AT_3 = T_3B_3$ .

Мы доказали следующее: концы отрезка  $AB_3$  симметричны относительно стороны треугольника, или  $S_{a_3}(A) = B_3$ .

Проведем аналогичные построения относительно сферы  $A(R)$ . Пусть три сферы радиуса  $R$  пересекаются в двух точках:  $A_2(R) \cap A_3(R) \cap A_4(R) = \{A; B_1\}$ . Эти сферы имеют общую хорду  $AB_1$ , которая является общим основанием трех равнобедренных треугольников с боковыми сторонами длиной, равной радиусу  $R$  сферы (см. рис. 39).

Если вращать, скажем,  $\triangle AA_1B_4$  вокруг общей хорды  $AB_4$ , то точка  $A_1$  (вершина равнобедренного  $\triangle AA_1B_4$ ) опишет окружность с центром в  $T_4$  и радиусом  $r$ , расположенную на сфере  $A(R)$ , т. е.  $W_{AB_4}(A_1) = T_4(r)$  ( $W$  — вращение). Точка  $A_1$  при вращении пройдет через две другие вершины грани  $\alpha_4 = (A_1A_2A_3)$ :

$$W_{AB_4}^{\varphi_1}(A_1) = A_2, \quad W_{AB_4}^{\varphi_2}(A_1) = A_3.$$

В итоге мы получаем: отрезок  $AB_4$  перпендикулярен к плоскости  $\alpha_4 = (A_1A_2A_3)$  и делится ею пополам в точке  $T_4$ , ибо  $AA_1 = A_1B_4 = R$ . Это означает, что концы отрезка  $AB_4$  симметричны относительно трех прямых  $A_1T_4$ ,  $A_2T_4$ ,  $A_3T_4$ , лежащих в плоскости  $\alpha_4$ , или  $S_{\alpha_4}(A) = B_4$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, мы нашли общий способ построения точек  $B_i$ , симметричных точке  $A$ , как вторых точек пересечения  $\frac{\text{пар окружностей}}{\text{троек сфер}}$ , а именно:



$$A_i(R) \cap A_j(R) [\cap A_k(R)] = \{B_i; A\}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$S_a(A) = B_i \qquad \qquad \qquad S_a(A) = B_i.$$

Итак, нам удалось построить по прообразу  $A_1A_2A_3(A_4)$  его образ  $B_1B_2B_3(B_4)$ . Остается определить центр симметрии прообраза и образа.

Сначала решим задачу для плоскости (см. граф-схему под рис. 38):

1. Сравнивая два ромба со сторонами, равными радиусу  $R$ , обнаруживаем параллелограмм  $AA_2BB_2$ , у которого диагонали делят друг друга пополам в точке  $O$ .

2. Точка  $O$  — это и есть искомый центр симметрии треугольников (прообраза и образа).

3. Симметричные треугольники равны; значит, равны и радиусы окружностей, описанных около них:  $AA_i = BB_i = R$ , что и требовалось.

В полученном результате важна *обратимость* суждений:

$$S_{a_i}(A) = B_i,$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$S_{\Pi}(A_i) = B_i,$$

где точка  $\Pi$  — центроид (середина) отрезка  $AB$ .

Верно, конечно, и обратное утверждение: если построить точку  $B_i$ , *симметричную* вершине  $A_i$  прообраза относительно центра симметрии — точки  $\Pi$ , то точка  $B_i$  будет также симметрична центру окружности  $A(R)$  относительно стороны  $A_2A_3 = a_i$ , противоположной вершине  $A_i$  образа.

Пусть теперь нам дан прообраз — тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , около которого описана сфера  $A(R)$ . Построены также точки симметрии его вершин как точки пересечения троек сфер  $A_i(R)$ , например:

$$A_2(R) \cap A_3(R) \cap A_4(R) = \{A; B_1\}, \quad (1)$$

$$AA_2 = AA_3 = AA_4 = B_1A_2 = B_1A_3 = B_1A_4 = R, \quad (2)$$

$$T_1A_2 = T_1A_3 = T_1A_4 = r, \quad S_{a_i}(A) = B_i, \quad (3)$$

$$\downarrow$$

$$S_{T_1}(A) = B_1. \quad (4)$$

Итак, из условия теоремы (1) следует, что точка  $B_1$  симметрична центру сферы  $A(R)$  относительно точки  $T_1$  как центра окружности  $T_1(r)$ , описанной около грани  $A_2A_3A_4 = \alpha_1$  (4). Подвергнув преобразованиям симметрии центр сферы  $A(R)$  относительно всех граней вписанного тетраэдра-прообраза  $A_1A_2A_3A_4$ , получим некоторый тетраэдр-образ  $B_1B_2B_3B_4$ . Обозначим сферу, описанную около тетраэдра  $B_1B_2B_3B_4$ , как  $B(\rho)$ . Найдем точку  $\Pi$  — центроид отрезка  $AB$ , соединяющего центры этих сфер (т.е. его середину). Построим третий тетраэдр  $B^I B^II B^III B^IV$ , подвергнув вершины прообраза центральной симметрии относительно  $\Pi$ . При этом первый и третий тетраэдры будут центральной симметричны, и, значит, равны их радиусы ( $R = \rho$ ):

$$S_{\Pi}(A_1A_2A_3A_4) = B^I B^II B^III B^IV,$$

$$AA_i = BB_i = R = \rho.$$

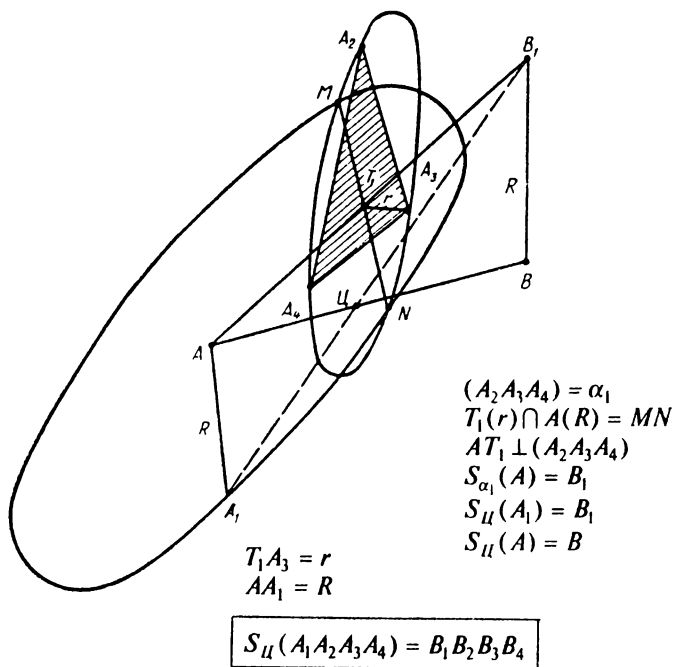


Рис. 40

В этих обозначениях акцентировано внимание на двойное кодирование, совершающееся в подсознании на уровне символов, а именно: точка-образ  $A_2$  преобразуется в точку-образ  $B^{II}$  и т. д.

Построим далее плоскость  $\sigma_1$ , проходящую через три точки:  $\sigma_1 = (A_1 A T_1)$ , которая пересекает окружность  $T_1(r)$  в двух точках  $M$  и  $N$  (рис. 40). Отрезок  $MN$  является хордой большой окружности  $A(R)$  и диаметром окружности  $T_1(r)$ ; иначе говоря,  $T_1$  — середина  $MN$ .

Итак, в плоскости  $\sigma_1$  расположен  $\Delta A_1 MN$ , вписанный в окружность  $A(R)$ . Согласно доказанному выше для плоскости случая применительно к треугольнику  $A_1 MN$  имеем:  $S_{MN}(A) = B^I$

$$AM = AN = B^I M = B^I N = R,$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ T_1 M = T_1 N, & & S_{T_1}(A) = B^I, \end{array} \quad (5)$$

$$S_{T_1}(A) = B^I = B_1 \quad (6)$$

(в ромбе  $AMB^I N$  диагонали взаимно перпендикулярны:  $AB_1 \perp MN$  и делятся в точке  $T_1$  пополам). Сравнивая (1) и (5), видим, что точки  $B_1$  и  $B^I$  совпадают:  $B_1 \equiv B^I$ . Аналогично доказывается:  $B_2 \equiv B^{II}$ ;  $B_3 \equiv B^{III}$ ;  $B_4 \equiv B^{IV}$ .

Для плоского случая теоремы верна обратимость симметрий:

$$S_{MN}(A) = B_1 \quad (7)$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$S_{\Pi}(A_1) = B_1, \quad (8)$$

где  $\Pi$  — середина отрезка  $AB$ .

Точки  $A$  и  $B$  являются центрами двух описанных сфер  $A(R)$  и  $B(R)$ .

Заменяя в (6) левую часть из (3), получаем:

$$S_{a_1}(A) = B_1$$

$$\downarrow$$

$$S_{\Pi}(A_1) = B_1,$$

где точка  $\Pi$  — центр симметрии тетраэдров:

$$S_{\Pi}(A_1A_2A_3A_4) = B_1B_2B_3B_4.$$

Изложенное выше доказательство двойственно во всех пунктах: ничего не изменилось бы в следствиях, если мы поменяли бы ролями прообраз и образ. Именно таково свойство симметрического преобразования! Взаимозаменяемость прообраза и образа удобно записать следующим образом.

На плоскости треугольников (см. рис. 38):

$$S_{a_3}(A) = B_3$$

$\downarrow \uparrow$

$$S_{b_3}(B) = A_3,$$

где  $a_3 = A_1A_2$ ,

$$b_3 = B_1B_2.$$

В пространстве тетраэдров (см. рис. 39):

$$S_{\alpha_3}(A) = B_3$$

$\downarrow \uparrow$

$$S_{\beta_3}(B) = A_3,$$

где  $\alpha_3 = (A_1A_2A_4)$ ,

$$\beta_3 = (B_1B_2B_4).$$

Обсудим решение задачи. Описанное выше исследование является одним из последних собственно математических результатов авторов, что и позволило нам осуществить логико-психологический анализ особенностей процесса математического творчества, реализующегося благодаря применению аналогии суждений.

В печати справедливо указывают, что успех в деятельности того или иного предпринимателя или новатора зависит от такого качества личности, как его ... честолюбие! Лицам, занимающимся обучением математике (равно и их питомцам), отнюдь не помешает азарт умственного соревнования. В замечательной книге Штейнгауза «Математический калейдоскоп» помещено немало оригинальных задач, однако напрасно автор книги сделал задачи безымянными.

А вот Р. Хонсбергер в своей книге «Математические изюминки» называет не только авторов новых задач, но и нередко приводит фамилии учителей, приславших удачные решения, сопроводив припиской: «Удивительно, что любой мог бы сделать такое открытие» (?!). Но мы бы уточнили: всякий, имеющий опыт математического творчества, а не только опыт решения готовых задач, сколько бы сложными таковые ни были.

Непростое это дело — научиться учителю экспромтом придумывать ту или иную задачную конструкцию для решения проблемной ситуации, неожиданно возникающей в ходе урока. Нам доводилось читать в «Учительской газете», когда «высокая инстанция» разъясняла учителю, что нельзя повторно решать одни и те же задачи из учебника. Конечно, подобный запрос вышел из-под пера учителя, *не умеющего составлять собственные задачи!* Но увы, учить будущего учителя искусству составления задач современные учебные планы не требуют!

Обучающим и обучаемым всегда приятно отличаться среди коллег быстрым, красивым или кратким решением той или иной проблемы. Математик Пойа написал книгу «Как решать задачу», а психолог Фридман «Как научиться решать задачу». Лейтмотив же данной книги существенно отличен от подобного традиционного взгляда, отождествляющего понятия «математика» и «решение готовых задач», то есть чужих, сконструированных кем угодно (Евклидом, Эйлером или учителем — безразлично), но не мной — учащимся, студентом, учителем! Между тем вернейший путь в мир нераскрытых еще математических тайн — это изобретение и решение собственных задач! Основное же мыслительное средство такой творческой стратегии, как мы увидели выше, — это поиск и использование аналогий понятий и суждений.

Характерная черта «фундаментальной четверки» — это наличие следующих парных категорий:

1 а. Треугольник как простейший многоугольник.

2 а. Окружность, описанная около треугольника.

3 а. Центр описанной окружности как пересечение симметралей двух сторон, исходящих из одной вершины:

$$A = \sigma_{A_2} \cap \sigma_{A_3}.$$

4 а. Центральная симметрия (относительно точки).

1 б. Тетраэдр как простейший многогранник.

2 б. Сфера, описанная около тетраэдра.

3 б. Центр описанной сферы как пересечение симметралей трех ребер с общей вершиной:

$$A = \sigma_{A_2} \cap \sigma_{A_3} \cap \sigma_{A_4}.$$

4 б. Осевая симметрия относительно прямой (плоскости).

Эффективность использования таких комплексов объяснима психофизиологическим фактором: «Противопоставление облегчает и ускоряет наше здоровое мышление» (И. П. Павлов).

Противопоставление контрастных рассуждений становится технологически неизбежным, если фиксировать два сходных правила двухэтажной записи, например: если отразить центр  $A$  описанной окружности от  $\frac{\text{трех сторон}}{\text{четырёх граней}}$  вписанного в него  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$ , то прообраз и образ будут центрально-симметричными:  $S_{\alpha_1}(A_1A_2A_3(A_4)) = B_1B_2B_3(B_4)$ .

Слова над чертой — это достижение первооткрывателя плоскостной теоремы, под чертой — попытка «приобщиться» к славе Карно счастливым обобщением на тетраэдр, которое почему-то никому, вероятно, до сих пор так и не пришло в голову....

Проводником в лабиринтах логики служит нам аналогия *понятий*. Параллельная фиксация сопоставляемой информации породила матричные (четверные) связи из-за «наложения» свойств тетраэдра и треугольника. В итоге найдено существенно новое доказательство составной теоремы, ставшей тем самым двуединой. Примечательно, что если бы теорема, зафиксированная под чертой, была бы нами опубликована без ссылки на прототип, то никто не усомнился бы в действительном приоритете авторов. Не потому ли в литературе избегают указывать на «источник вдохновения» и стало неписанным правилом изолированное изложение задач, теорем, даже целых разделов в математике, без намеков на существующие прототипы.

Достойна внимания методистов взаимосвязь взаимности и обратимости суждений в приведенном доказательстве:

а) прообраз и образ взаимозаменяемы:

$$S_{\alpha_1}(A) = B_1, \quad \text{где } \alpha_1 = A_2A_3A_4$$

$\downarrow \uparrow$

$$S_{\beta_1}(B) = A_1, \quad \text{где } \beta_1 = B_2B_3B_4;$$

б) обратимость суждений о двух видах симметрии (центральной и осевой):

$$S_{\Pi}(A_1) = B_1$$

↓ ↑

$$S_{\alpha_1}(A) = B_1.$$

Красота и изящество процесса сопоставления теоремы Карно и ее естественного обобщения возрастают из-за удачного символического и терминологического оформления. «Знаки умнее нас», — отмечал для подобных случаев Карно. Автоматизм переноса суждения с плоскости на пространство объясняется в конечном счете такими деталями, как индексация букв, обозначающих вершины фигур, или употребление словесного их кода (прообраз — образ).

Аппарат классических парных категорий анализа-синтеза, индукции-дедукции оказывается здесь недостаточным для выявления специфики *творческих умозаключений*, подобных использованному в данном параграфе. Усложненные творческие упражнения изобилуют неожиданными «затруднениями», преодоление которых приносит уму совершенно новую информацию.

Так, в нашем случае совместное рассмотрение отрезка и треугольника как оси и плоскости симметрии  $\frac{\text{двух}}{\text{трех}}$ -мерных точек, сделано неизбежным подсо-

знательное выявление контрапозиции:  $\frac{\text{две окружности}}{\text{три сферы}}$

пересекаются в двух  $\frac{\text{двойных}}{\text{тройных}}$  точках.

В чем же причина такого *саморазвития* знания? Оказывается, что понятие «точка на плоскости как пересечение *двух линий*» многократно встречалось в том или ином виде в практике школьного обучения. Но вот естественный аналог предыдущему: «точка трехмерного пространства как факт пересечения в одном месте *трех сфер*» многие открывают впервые для себя и, возможно, благодаря рассмотренной задаче «фундаментальной четверки». Подобные мини-открытия рождаются как бы попутно на магистралях полнокровных рассуждений по аналогии.

У учителя математики нет сейчас оснований сетовать на недостаток «задачной» литературы.

Книжный рынок предлагает пособия с призывными названиями задач «повышенной трудности», «олимпиадных», «экзаменационных», «для самообразования» и т. п. . Но полезной привычкой любителя математики должно стать поистине новое веяние подходить к задаче с точки зрения возможности ее обращения и обобщения, попыток переноса на большее число данных, измерений, и, в особенности, — с попыток перекодирования информации с плоскости на пространство.

Доказательство двумерной теоремы «окружность — сфера» («треугольник — тетраэдр») имеет важным результатом достижение качества целостности знания. Целостность — это категория философская. Н. И. - Лобачевский не признавал раздельного изучения планиметрии и стереометрии, издав единый учебник геометрии. Феликс Клейн объявил еще 100 лет назад *фузионизм* (слияние планиметрии и стереометрии) прогрессивной тенденцией дидактики математики. Но почему этот верный тезис не нашел своей реализации в школьных учебниках?

Поучительно логическое своеобразие совместного рассмотрения двух- и трехмерной задач: так, в нашем случае подготовительные рассуждения по построению фигур велись параллельно для обеих фигур (треугольника и тетраэдра), но осуществить полностью доказательство для тетраэдра стало возможным лишь после того, когда было завершено доказательство для треугольника. (Этот момент проявился также и во второй нашей находке — при доказательстве теоремы Содди для пяти сфер, что будет рассмотрено ниже.) Примечательно, что при применении метода математической индукции встречается то же самое явление, когда первым логическим этапом выступает исчерпывающее непосредственное доказательство утверждения для простейшего случая.

Читателю известна традиция в изложении геометрии, берущая начало у Евклида. Классическим примером могут служить два тома элементарной геометрии академика Адамара: I том — «Планиметрия», II том — «Стереометрия». Этому порядку неукоснительно следуют авторы книг по проективной или дифференциальной геометрии. А вот две книги



по занимательной геометрии: «Новая геометрия треугольника» С. И. Зетеля и «Геометрия тетраэдра» Г. П. Бевза. Гипотетический автор «Зетельбевз» при меньшем объеме синтезированного сочинения мог бы дать читателю четверной (!) прирост освоенной информации из-за самопроизвольного возникновения информации перехода (треугольник  $\rightarrow$  тетраэдр  $\rightarrow$  треугольник). Структурная информация высшего уровня возникает благодаря механизму двуплановых рассуждений, феномена оперативной памяти, активизации подсознания, а также правополушарного мышления. И все это вызвано — говоря кратко — наличием аналогии в рассуждениях.

Задачи, как и куплеты стихов, мотивы песен, рождаются у человека редко. Они имеют ценность, стоимость; приоритет задачных сооружений надо оберегать, воспитывая здоровый дух соревнования в конкурсе задачных конструкций. Математик Морлей обессмертил свое имя не благодаря серьезным исследованиям по дифференциальным уравнениям, а открытием удивительного факта (без доказательства): трисектрисы треугольника образуют правильный треугольник! Физик Содди также лишь первым нашел формулу четырех соприкасающихся окружностей (пяти сфер); доказал же формулу через четверть века Госсет.

Приведем несколько задач, простых и не очень, которые пока известны в литературе в «одномерном» варианте, а обобщить их мог бы каждый (но, увы, читателю, вероятно, было недосуг). Всюду мы указываем далее источник или автора исходной задачи, если таковой прототип нам известен.

В книге И. Ф. Шарыгина и В. И. Голубева «Факультативный курс по математике» приведено решение задачи № 33: доказать, что  $R \geq 2r$ , где  $R$  и  $r$  соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей произвольного треугольника.

**12** Заменяя здесь лишь коэффициент в правой части ( $R \geq 3r$ ), мы получили великолепное обобщение этой задачи на описанную и вписанную сферы тетраэдра.

В книге Р. Хонсбергера «Математические изюминки» нас привлекла задача № 19 (ее формулировка —

над чертой): если провести из оснований высот  $\frac{\text{треугольника}}{\text{ортоцентрического тетраэдра}}$  перпендикуляры к  $\frac{\text{двум}}{\text{трем}}$  другим  $\frac{\text{сторонам}}{\text{граням}}$ , то  $\frac{\text{шесть}}{\text{восемь}}$  оснований этих перпендикуляров лежат на одной  $\frac{\text{окружности}}{\text{сфере}}$ .

**13** Мы сочинили гипотезу, заключенную в словах, записанных под чертой.

В содержательной подборке «задач на один зубок» В. Произолов приводит задачу № 7 о центроидах плоских фигур: в прямоугольнике вырезали дырку прямоугольной формы. Провести прямую линию, которая делит на две части равной площади образовавшуюся фигуру («Математика», приложение к газете «Первое сентября», № 3, 1994) (рис. 41).

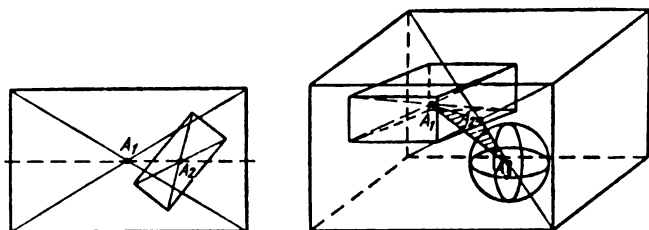
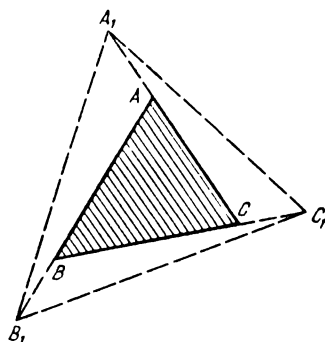


Рис. 41

Буквально «просится на язык» естественное обобщение задачи на пространство, для чего достаточно заменить прямоугольники параллелепипедами и поместить внутрь одного из них пустой шар.

**14** Ответ: плоскость, проведенная через центроиды всех трех фигур.

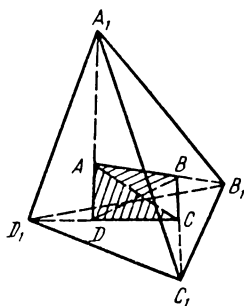
В книге Э. А. Кременя «Развивающие задачи для математического досуга» приведена задача № 7: дан  $\triangle ABC$ . На его сторонах построены отрезки  $AB_1 = 2AB$ ;  $BC_1 = 2BC$ ;  $CA_1 = 2CA$ . Найти отношение площадей  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  (рис. 42).



$$S_{A_1B_1C_1} = 7S_{ABC}$$

Рис. 42

- 15 На ум приходит немедленная аналогия, возникает хорошая задача на сообразительность: дан тетраэдр  $ABCD$ . На его ребрах последовательно построены отрезки  $AB_1 = 2AB$ ;  $BC_1 = 2BC$ ;  $CD_1 = 2CD$ ;  $DA_1 = 2DA$  (рис. 43). Найти отношение объемов тетраэдров  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ .



$$V_{A_1B_1C_1D_1} = kV_{ABCD}$$

Рис. 43

В содержательной книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии» приводится без доказательства красивое неравенство:

$$ax + by + cz \geq 4S, \quad (9)$$

где  $a, b, c$  — длины сторон, а  $x, y, z$  — расстояния от произвольной точки  $O$  до противоположных вершин треугольника.

Удается тут же сконструировать аналогичное неравенство для тетраэдра:

$$ax + by + cz + dt \geq 9V, \quad (10)$$

**16** где вместо сторон фигурируют площади граней, а также расстояния от точки  $O$  до вершин, противолежащих граням. Примечательно, что мы нашли и единый метод доказательства обоих неравенств (9) и (10).

В двух сборниках олимпиадных задач и в одной книге\* мы нашли задачи типа следующей: дан  $\triangle A_1B_1C_1$ . Построен треугольник  $A_2B_2C_2$ , стороны которого параллельны сторонам первого и отстоят от них на расстояние 1 см. Доказать, что периметр второго треугольника больше периметра первого *по меньшей мере* на 6 единиц.

Ключевое число 6 в условиях этих задач отсутствует. Авторы варьируют действительно поучительную задачную ситуацию; однако характерно, что ни в одной из этих работ не сделано основного скачка от многоугольника к многограннику.

А ведь именно сдвоенный по аналогии текст вызывает поистине эстетическое удовлетворение от достигнутой полноты информации: дан многоугольник. На расстоянии в 1 см от каждой стороны гранник. проведены прямые плоскости, образующие внешний многоугольник гранник (рис. 44). Доказать:

1) у внешнего многоугольника  $\frac{\text{периметр}}{\text{площадь}}$  больше, чем у внутреннего, не менее чем на  $\frac{2\pi \text{ см} (> 6 \text{ см})}{\pi \text{ см}^2 (> 3 \text{ см}^2)}$ ;

\* Международные математические олимпиады. — М., 1967. С. 34, 99.

Московские математические олимпиады. — М., 1986. С. 194. В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии.

2) у внешнего многогранника

- 17  $\frac{\text{площадь поверхности}}{\text{объем}}$  больше, чем у внутреннего,  
не менее чем на  $\frac{4\pi \text{ см}^2}{3} (> 12 \text{ см}^2)$   
 $\frac{4}{3}\pi \text{ см}^3 (> 4 \text{ см}^3)$ .

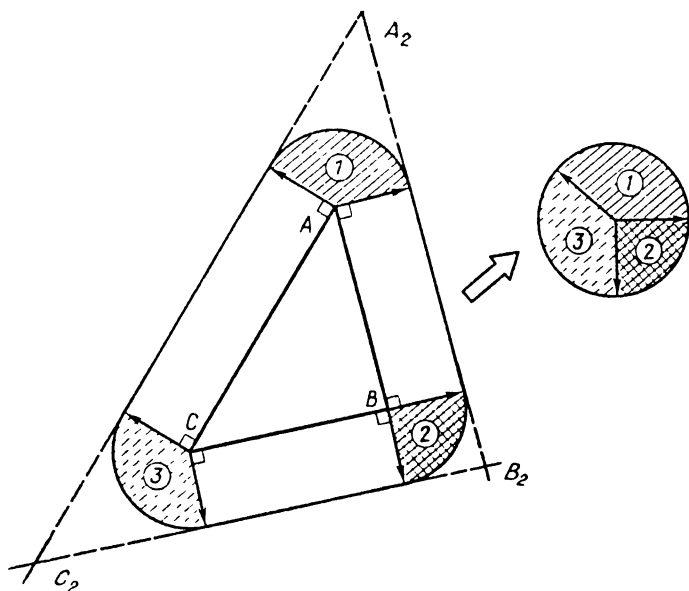


Рис. 44

Гениальный знаток свойств чисел Рамануджан (Индия) заставил изумиться и маститых математиков своими числовыми рядами, например, следующим:

$\sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + 4\sqrt{9 \dots}}}} = 4$ . Следуя Рамануджану, нам удалось, например, составить ряд, который представляется не менее интересным:

$$18 \sqrt{27 + 2\sqrt{31 + 6\sqrt{35 + 10\sqrt{39 + 14\sqrt{43 + 18\sqrt{\dots}}}}}} = 7.$$

Предлагаем читателю раскрыть секрет великого манипулятора чисел; быть может, кому-то удастся соорудить похожий ряд с ... кубическими корнями!

Возвращаясь к рассмотренной выше основной

нашей «фундаментальной четверке», укажем, что ее можно образно назвать «*эталонной задачей*» (И. В. Арнольд) или «*хорошей задачей*» (В. И. Рыжик).

«Хорошая задача» — это задача, которую удастся развить, продолжить в разных направлениях или получить оригинальные следствия для важных частных случаев. Так, в случае преобразования треугольника оказывается, что окружность девяти точек Эйлера — общая для обоих треугольников. Аналогия тут как тут: при симметрическом преобразовании ортоцентрического тетраэдра сфера 12 точек (первая сфера Эйлера) также оказывается общей для тетраэдра — прообраза и образа. Речь идет «фундаментальной четверке»).

Но вот еще одно неожиданное следствие проблемы: при преобразовании  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$  посредством симметрии относительно граней сумма  $\frac{\text{плоских}}{\text{трехгранных}}$  углов при вершинах образовавшегося  $\frac{\text{треугольника}}{\text{четырёхгранника}}$  равна  $\frac{2\pi \text{ радианам}}{4\pi \text{ стерадианам}}$ .

- 19 Так, трехгранные углы с вершинами в  $A$  и  $B_1$ , опирающиеся на  $\triangle A_2A_3A_4$ , равны (рис. 45). Равны также трехгранные углы с вершинами в  $B$  и  $A_1$ , опирающиеся на  $\triangle B_2B_3B_4$ .

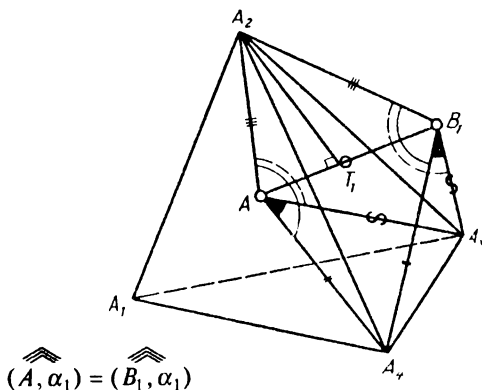


Рис. 45

Весьма вероятно, удастся обнаружить и другие, не описанные еще в литературе, следствия «фундаментальной четверки».

Красной нитью через всю нашу книгу проходит линия *информационной базы экономного обучения*: полнота и надежность знаний достигается при оформлении учебной информации по возможности на всех доступных кодах одновременно: предмет (модель), рисунок, слово, символ и число. Причем здесь «число»? — вправе спросить читатель. Доказательством сказанному может служить, например, изучение векторного аппарата на координатной (числовой) основе, например:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a}_1 \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 3+1 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

В геометрии существует великолепная пара теорем, также относящаяся к четверке фигур: треугольник, тетраэдр, окружность 6 точек Эйлера — сфера 8 точек Эйлера\*.

Треугольник (тетраэдр), проходящий через основания  $\frac{\text{медиан}}{\text{высот}}$ , назовем соответственно  $\frac{\text{среди́нным}}{\text{орто}}$  треугольником (тетраэдром).

Вот классическая теорема об окружности Эйлера: окружность, описанная около срединного треугольника, совпадает с окружностью, описанной около ортотреугольника (эту окружность Эйлера удобно иногда называть для краткости окружностью 6 точек (в литературе — «9 точек»)).

Особо интересна аналогия о «сфере Эйлера 8

---

\* Мы намеренно упростили для краткости традиционное название: «Окружность 9 точек, сфера 12 точек».

точек»: пусть дан ортоцентрический тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ . Пусть описана сфера около срединного тетраэдра  $M_1M_2M_3M_4$  ( $M_i$  — центроиды граней). На этой сфере лежат основания высот тетраэдра  $H_i$ .

В дальнейшем изложении мы сравним свойства остроугольного треугольника и ортоцентрического тетраэдра. В ортоцентрическом тетраэдре сфера, описанная около срединного тетраэдра, и сфера, описанная около ортотетраэдра, совпадают.

Сначала рассмотрим классическую теорему Эйлера об окружности 9 точек. Пусть три высоты треугольника  $A_1A_2A_3$  пересекаются в точке  $H$ :

$$A_1H_1 \cap A_2H_2 \cap A_3H_3 = H,$$

а три медианы пересекаются в точке  $M$  (рис. 46):

$$A_1M_1 \cap A_2M_2 \cap A_3M_3 = M.$$

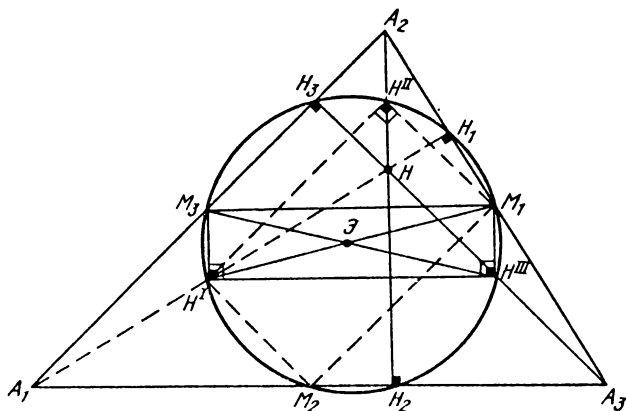


Рис. 46

Отложим от ортоцентра  $H$  отрезки  $HH_i = \frac{1}{2} HA_i$ . Построим отрезок  $M_1M_3$  — среднюю линию  $\triangle A_1A_2A_3$ , которая равна половине основания и параллельна ему:

$$M_1M_3 \# \frac{1}{2} A_1A_3^*. \quad (11)$$

\* Знак # обозначает «равно и параллельно».



Аналогично  $H'H'''$  — средняя линия  $\triangle HA_1A_3$ , или

$$H'H''' \# \frac{1}{2} A_1A_3. \quad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), мы видим, что  $H'H'''M_1M_3$  — параллелограмм, так как  $H'H''' \# M_1M_3$ . Однако высота треугольника  $A_2H_2$  перпендикулярна к двум сторонам параллелограмма:

$$A_2H_2 \perp M_3M_1. \quad (13)$$

В  $\triangle A_1A_2H$  средняя линия  $M_3H'$  параллельна основанию  $A_2H$ , откуда следует:

$$\begin{array}{ccc} M_3H' \parallel A_2H_2 & & A_2H_2 \perp M_3M_1 \\ \downarrow & & \\ M_3A' \perp M_3M_1, & & \end{array}$$

$H'M_3M_1H'''$  — прямоугольник.

Точка пересечения диагоналей этого прямоугольника Э равноудалена от четырех его вершин. Также доказывается, что четырехугольник  $H'H''M_1M_2$  — прямоугольник, причем  $H'M_1$  — общая диагональ двух построенных прямоугольников. Точка Э — середина общей диагонали и равноудалена от оснований всех медиан, или  $\mathcal{E}M_i = R$ . Окружность  $\mathcal{E}(R)$  описана около срединного треугольника  $\triangle M_1M_2M_3$  (рис. 47).

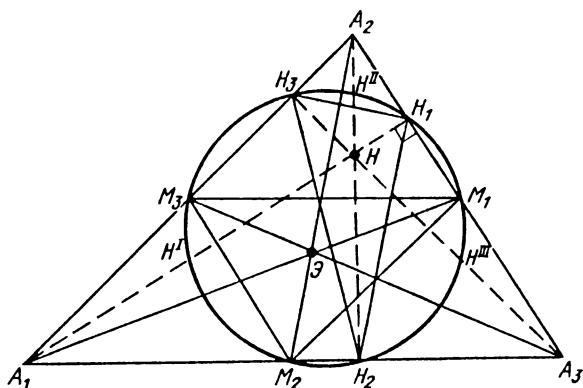


Рис. 47

Рассмотрим прямоугольный  $\triangle H'M_1H_1$ . Окружность с центром в  $\mathcal{E}$  и радиусом  $R = \mathcal{E}M_1$  имеет диаметром диагональ прямоугольника  $A_1M_1$ ; на этот диаметр опирается прямой угол  $A_1H_1M_1$ . Значит, точка  $H_1$  лежит на окружности  $\mathcal{E}(R)$ . Аналогично доказывается, что на той же окружности  $\mathcal{E}(\mathcal{E}M_1)$  лежат основания других высот  $H_2, H_3$ , а также точки  $H', H'', H'''$ .

Итак, окружность Эйлера  $\mathcal{E}(R)$  проходит через вершины ортотреугольника  $H_1H_2H_3$ . Всего на окружности Эйлера лежат девять точек, из них по паре точек  $M_i, H_i$ , расположенных на каждой стороне треугольника.

Удобно сказать кратко так: окружность Эйлера  $\mathcal{E}(R)$  описана как около срединного треугольника  $M_1M_2M_3$ , так и около ортотреугольника  $H_1H_2H_3$ . Поэтому для краткости удобно ее называть «окружностью 6 точек».

Пусть далее нам дан ортоцентрический тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , у которого все высоты пересекаются в одной точке:  $\cap A_iH_i = H$  и все медианы пересекаются в одной точке:  $\cap A_iM_i = M$ . В этом случае на каждом из 6 ребер оказываются по паре точек  $M_i$  и  $H_i$  и существует сфера Эйлера, проходящая через эти 12 точек. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

Но наиболее поучительным в данном случае оказывается обобщение теоремы, когда от точек, данных на 3 сторонах треугольника, совершается выход к точкам, расположенным на 4 гранях тетраэдра! Речь идет о теореме: ортотетраэдр и срединный тетраэдр ортоцентрического тетраэдра вписаны в одну и ту же сферу Эйлера  $\mathcal{E}(R)$  (удобно эту сферу называть сферой 8 точек Эйлера).

Если доказательство теоремы об окружности Эйлера (для остроугольного треугольника) достаточно наглядно, то строгое доказательство пространственной теоремы весьма непростое (оно основано на свойстве гомотетического преобразования).

Нередко бывает целесообразно специально создать познавательный интерес к поиску доказательства сформулированной теоремы. В этих целях прелюдией к доказательству может быть использован предвари-

тельный контроль теоремы при конкретных числовых значениях элементов фигуры.

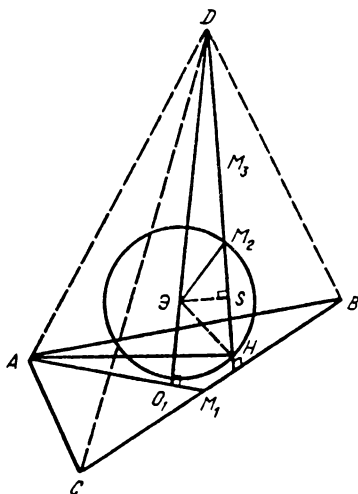


Рис. 48

Нередко логически доказанное требует для полной убедительности и числовых иллюстраций (рис. 48). В этом случае совпадение числовых выражений выполняет роль особой информационной составляющей математического мышления.

Приведем один пример числового контроля теоремы.

Пусть нам дан ортоцентрический тетраэдр, являющийся правильной трехгранной пирамидой  $ABCD$  (основание  $ABC$  — правильный треугольник). Пусть  $DM_1$  — апофема боковой грани  $BCD$ . Наметим следующие числовые значения элементов пирамиды:  $AM_1 = 6$  ( $AM_1 \perp BC$ );  $DO_1 \perp ABC$ ;  $AO_1 = 4$ ;  $O_1M_1 = 2$ . Несложными вычислениями далее находим:  $DM_1 = 12$ ,  $DM_3 = M_3M_2 = M_2M_1 = 4$ .

Согласно условию проверяемой теоремы сфера Эйлера должна пройти через три точки в плоскости треугольника  $ADM_1$ , а именно через точки  $M_2$ ,  $H$  и  $O_1$  (при этом точка  $O_1$  есть слившиеся ортоцентр

и центроид грани  $ABC$ ). Центр этой сферы точка  $\mathcal{E}$  есть пересечение симметралы  $\mathcal{E}S$  отрезка  $M_2H$  с высотой  $DO_1$ , т.е.  $DO_1 \cap \mathcal{E}S = \mathcal{E}$ .

Проверка сводится к установлению равенства длин отрезков:  $\mathcal{E}M_2 = \mathcal{E}O_1$  или к проверке равенства

выражений  $\sqrt{225 + \frac{95^2}{35}} \quad ? \quad 20\sqrt{35} - \frac{6 \cdot 95}{\sqrt{35}}.$

Дальше возможно идти двумя путями:

- а) либо с помощью калькулятора вычислять значения обеих частей (поучительно здесь то, что иррациональные числа, полученные из существенно разных выражений, будут совпадать с любой степенью точности);
- 20** б) либо последовательными упрощениями убедиться в равенстве исходных выражений:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}M_2 &= \mathcal{E}O_1, \\ \sqrt{225 + \frac{95^2}{35}} &? \quad 20\sqrt{35} - \frac{6 \cdot 95}{\sqrt{35}}, \\ \frac{\sqrt{225 \cdot 35 + 95^2}}{\sqrt{35}} &? \quad \frac{20 \cdot 35 - 6 \cdot 95}{\sqrt{35}}, \\ \sqrt{16900} &? \quad 700 - 570, \\ 130 &= 130. \end{aligned}$$

В обоих случаях прямые вычисления выступают подспорьем собственно логических рассуждений.

Подобные упражнения представляются весьма уместными при изучении квадратных радикалов в курсе алгебры: геометрические теоремы становятся источниками числовых равенств, имеющих в обеих частях формально разные представления.

Убедительность и уверенность приносит факт *совпадения* числовых величин в двух частях предполагаемого равенства в той же степени, как факт прохождения трех прямых через одну точку при контроле теоремы проективной геометрии точными построениями! В обоих случаях алгебра и геометрия помогают друг другу. Убедившись в частном случае в справедливости обобщенной теоремы, нередко учащийся может загореться желанием самостоятельно

разобраться по книгам с логическим доказательством теоремы. Подобная тактика преподавателя воспитывает волю и настойчивость учащихся, идущие рука об руку с любознательностью.

В начальной паре задач объединяющим был общий метод построения производной фигуры посредством отражения центра  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ , описанной около  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$ , около его  $\frac{\text{сторон}}{\text{граней}}$ . Завершим данную беседу столь же красивой двусоставной задачей, как и та, с которой начиналась наша беседа: радиусы вписанной и внеписанной  $\frac{\text{окружностей}}{\text{сфер}}$  по отношению к данному  $\frac{\text{треугольнику}}{\text{тетраэдру}}$  связаны следующим соотношением:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (\text{в треугольнике}) \quad (\text{рис. 49});$$

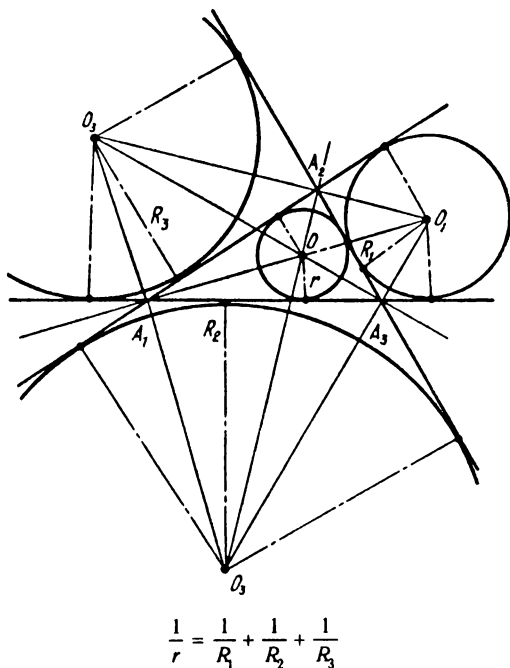
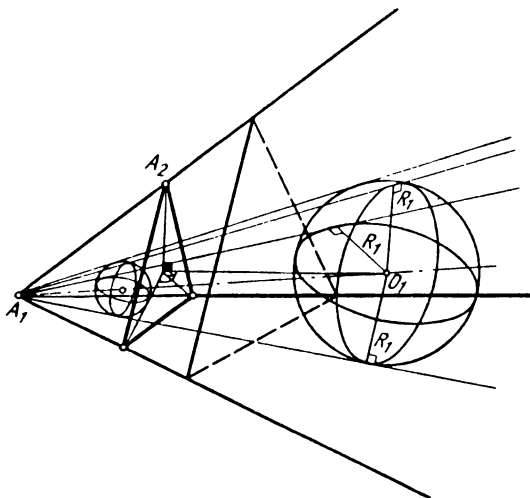


Рис. 49

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \quad (\text{в тетраэдре}) \quad (\text{рис. 50}).$$



$$\frac{2}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Рис. 50

При параллельном изложении доказательства подобных двусоставных теорем видна важная роль единства носителей информации, общности символики и терминов. Пусть в  $\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$  вписана

$\frac{\text{окружность}}{\text{сфера}}$

$O(R)$ . Построим также центр вневписан-

ной  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$

$O_1(R_1)$ , как точки пересечения

двух биссектрис внешних углов

$\frac{\text{трех биссектральных плоскостей внешних двугранных углов}}{\text{тетраэдра}}$

$$A_2O_1 \cap A_3O_1 = O_1 \quad | \quad A_2A_3O_1 \cap A_3A_4O_1 \cap A_4A_2O_1 = O_1.$$

Введем единые обозначения  $\frac{\text{сторон}}{\text{граней}}$  и их  $\frac{\text{длин}}{\text{площадей}}$ :

$$\begin{array}{l|l} A_2A_3 = a_1 \quad (\text{против } A_1) & A_2A_3A_4 = \alpha_1 \quad (\text{против } A_1) \\ A_3A_1 = a_2 & A_3A_4A_1 = \alpha_2 \quad \text{и т. д.} \\ A_1A_2 = a_3 \quad \text{и т. д.;} & \end{array}$$

Вневписанная  $\frac{\text{окружность}}{\text{сфера}} O_1(R_1)$  касается  $\frac{\text{стороны } a_1}{\text{границы } \alpha_1}$  и продолжений остальных  $\frac{\text{сторон } a_2, a_3}{\text{граней } \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}$ .

Вспомним формулу для вычисления  $\frac{\text{площади треугольника}}{\text{объема тетраэдра}}$ :

$$S = \frac{1}{2} ah$$

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

Представим  $\frac{\text{площадь четырехугольника}}{\text{объем пятивершинника}}$  двумя способами:

1) как сумму  $\frac{\text{площадей}}{\text{объемов}}$  исходной и дополнительной фигуры  $\frac{S_1 + S'}{V_1 + V'}$ ;

2) как сумму  $\frac{\text{площадей}}{\text{объемов}}$   $\frac{\text{двух треугольников}}{\text{трех тетраэдров}}$ :

$S = S_{A_1 A_2 O A_3 A_4},$ $S_1 = \frac{1}{2} r \cdot P =$ $= \frac{1}{2} r(a + a + a), \quad (14 \text{ а})$ $S = S_1 + S' = S_2 + S_3; \quad (15 \text{ а})$	$V = V_{A_1 A_2 O A_3 A_4},$ $V_1 = \frac{1}{3} r \cdot \Sigma =$ $\frac{1}{3} r(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4), \quad (14 \text{ б})$ $V = V_1 + V' = V_2 + V_3 + V_4. \quad (15 \text{ б})$
--	---

В этих формулах записаны суждения (14 а), (14 б):

$\frac{\text{площадь треугольника}}{\text{объем тетраэдра}}$  равны  $\frac{\text{половине}}{\text{трети}}$  произведения его

$\frac{\text{периметра } P = a_1 + a_2 + a_3}{\text{поверхности } \Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$  на радиус  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}} r$ ,

вписанной в  $\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$ .

Равенства (15 а) и (15 б) имеют следующий смысл:

$S_1 = S_{A_1 A_2 A_3}; \quad S' = S_{A_2 A_3 A_4},$ $S_2 = S_{A_1 A_2 O}; \quad S_3 = S_{A_1 A_3 O};$	$V_1 = V_{A_1 A_2 A_3 A_4}; \quad V' = V_{O A_1 A_2 A_4},$ $V_2 = V_{A_1 A_3 A_4 O}; \quad V_3 = V_{A_1 A_2 A_4 O},$ $V_4 = V_{A_1 A_2 A_3 O}.$
--	---

Подставим в (15 а) и (15 б) выражения  $\frac{\text{площадей}}{\text{объемов}}$  элементарных фигур, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + a_3) + \frac{1}{2}a_1R_1 = & \left| \frac{1}{3}r(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \frac{1}{3}\alpha_1R_1 = \right. \\ = \frac{1}{2}a_3R_1 + \frac{1}{2}a_2R_1; & \left. = \frac{1}{3}\alpha_2R_1 + \frac{1}{3}\alpha_3R_1 + \frac{1}{3}\alpha_4R_1. \right. \end{aligned}$$

Упростив, получим:

$$\begin{aligned} P \cdot r = (a_3 + a_2 - a_1)R_1, & \left| \Sigma \cdot r = (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1) \cdot R_1, \right. \\ \frac{P \cdot r}{R_1} = a_3 + a_2 - a_1; & (16 \text{ а}) \left| \frac{\Sigma \cdot r}{R_1} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1. \right. (16 \text{ б}) \end{aligned}$$

По аналогии получим:

$$\frac{P \cdot r}{R_2} = a_3 + a_1 - a_2, \quad (17 \text{ а}) \quad \left| \frac{\Sigma \cdot r}{R_1} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1, \quad (17 \text{ б}) \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{P \cdot r}{R_3} = a_2 + a_1 - a_3; & (18 \text{ а}) \quad \left| \frac{\Sigma \cdot r}{R_1} = \dots, \right. \\ & \left| \frac{\Sigma \cdot r}{R_3} = \dots, \right. \\ & \left| \frac{\Sigma \cdot r}{R_4} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4. \right. (18 \text{ б}) \end{aligned}$$

Сложив по частям равенства (16) — (18), имеем:

$$\begin{aligned} P r \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = P, & \left| \Sigma \cdot r \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = 2 \cdot \Sigma, \right. \\ \text{или } \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{r}; & \left| \text{или } \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{r}, \right. \end{aligned}$$

что и требовалось.

Поучительно выполнить числовой контроль введенной слева формулы, для чего радиусы четырех точно построенных окружностей измерить в миллиметрах.



## Беседа 5

# ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ, ЧЕВЫ, ДЕЗАРГА. ПОЭМА О ТОЧКАХ И ПРЯМЫХ

Данную беседу мы посвятим «теоремам одной линейки»: в них пойдет речь лишь о фигурах, изображаемых прямыми линиями и точками их пересечения. При всей видимой элементарности исследуемых объектов (точки и прямые), как убедится читатель, раскрытие «секретов» взаимного расположения точек ознаменовало важнейшие вехи в истории математики. Мы надеемся, что читатель, ознакомившись с нашим вариантом укрупненного изложения начальных глав проективной геометрии, одобрит предлагаемое дидактическое решение данного вопроса.

Поэму геометрии можно увидеть, если будет найдена удачная последовательность теорем, обеспечивающая естественность переходов от теоремы к теореме. В качестве прелюдии к поэме о прямых и точках повторно предложим теорему Паппа (II век) о девяти прямых и девяти точках их пересечения. Имея под рукой карандаш и лист бумаги, надо выполнить следующее:

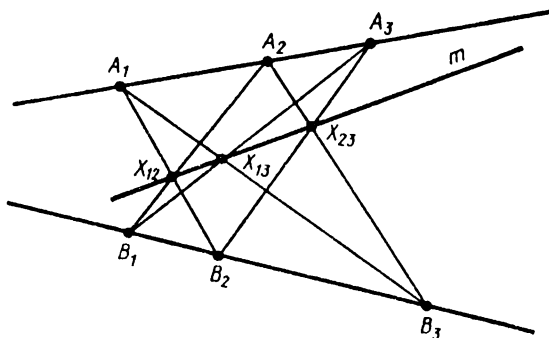


Рис. 51

1. Начертить две произвольные прямые (рис. 51).
2. Наметить на них на произвольных расстояниях друг от друга по три точки.

3. Найти точки пересечения пар прямых:  $A_1B_2 \cap A_2B_1 = X_{12}$ ,  $A_2B_3 \cap A_3B_2 = X_{23}$ .

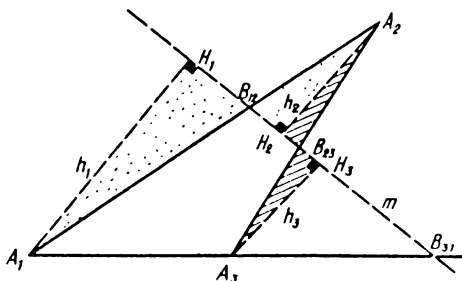
4. Провести прямую  $m$  через две полученные точки  $X_{12}$  и  $X_{23}$ .

5. Результат: точка пересечения третьей пары прямых окажется на той же прямой.

В последующем изложении мы вернемся к вопросу о доказательстве теоремы Паппа.

Рассмотрим теоремы Менелая (II век) и Чевы (XVII век). Этим теоремам «повезло» больше, чем многим другим математическим открытиям: они встречаются рядом почти во всех учебниках высшей геометрии; они оказываются верными не только в трехмерном пространстве, но и в многомерных пространствах, в гиперболической и сферической геометрии.

Сначала докажем теорему Менелая для плоского треугольника  $A_1A_2A_3$ , стороны которого пересечены трансверсалью  $B_{12}B_{23}B_{31}$ . Предлагаем прочитать прямую и обратную теорему Менелая по символической записи (рис. 52).



$$B_{12}, B_{23}, B_{31} \in m$$

$\downarrow \uparrow$

$$A_1H_1 \perp m$$

$$A_1H_1 = h_1$$

$$\frac{A_1B_{12}}{B_{12}A_2} \cdot \frac{A_2B_{23}}{B_{23}A_3} \cdot \frac{A_3B_{31}}{B_{31}A_1} = -1$$

Рис. 52

**Прямая теорема Менелая:** если прямая Менелая  $m$  пересекает две стороны и продолжение третьей

стороны в указанных точках, то произведение трех отношений равно  $-1$ .

Для доказательства теоремы опустим перпендикуляры  $A_i H_i = h_i$  из трех вершин на прямую Менелая  $m$ . Сравнивая подобные прямоугольные треугольники, напомним пропорции, например:

$$\Delta A_1 N_1 B_{12} \sim \Delta A_2 H_2 B_{23}$$

↓

$$\frac{A_1 H_1}{A_1 B_{12}} = \frac{A_2 H_2}{B_{12} A_2}$$

↓

$$\frac{h_1}{A_1 B_{12}} = \frac{h_2}{B_{12} A_2}$$

↓

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} = \frac{h_1}{h_2}. \quad (1)$$

По аналогии получим:

$$\frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} = \frac{h_2}{h_3}, \quad (2)$$

$$\frac{A_3 B_{31}}{B_{31} A_1} = -\frac{h_3}{h_2}. \quad (3)$$

Последняя дробь представляет отрицательное число, так как в ней берется отношение *противоположно направленных* отрезков (векторов).

Перемножив по частям (1), (2), (3), получим:

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 B_{31}}{B_{31} A_1} = -1. \quad (4)$$

Мы доказали *необходимое условие* инцидентности (принадлежности) трех точек одной прямой.

Докажем *обратную теорему Менелая* (*признак инцидентности* трех точек одной прямой): если на сторонах  $\Delta A_1 A_2 A_3$  (или их продолжениях) взяты точки  $B_{12}$ ,  $B_{23}$ ,  $B_{31}$  такие, что выполняется соотношение (4), то эти точки лежат на одной прямой.

Пусть дано соотношение (4). Проведем прямую  $n$  через две точки:  $n = B_{12} B_{23}$ , которая пересекает продолжение третьей стороны в некоторой точке  $C_{31}$ , отличающейся от точки  $B_{31}$ :  $A_1 A_3 \cap n = C_{31}$ .

Трансверсаль  $n$  пересекает три стороны  $\Delta A_1 A_2 A_3$  в трех точках  $B_{12}$ ,  $B_{23}$ ,  $C_{31}$ , и, согласно доказанной прямой теореме, запишем равенство:

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 C_{31}}{C_{31} A_1} = -1. \quad (5)$$

Разделив по частям (4) на (5), имеем:

$$\frac{A_3 B_{31}}{B_{31} A_1} = \frac{C_{31} A_1}{A_3 C_{31}}. \quad (6)$$

Согласно условию,  $A_3 B_{31} = n$ ,  $B_{31} A_1 = m$  ( $m \neq n$ ). Пусть точка  $C_{31}$  отстоит от  $A_3$  дальше, чем  $B_{31}$ , на отрезок  $x$  (рис. 53).

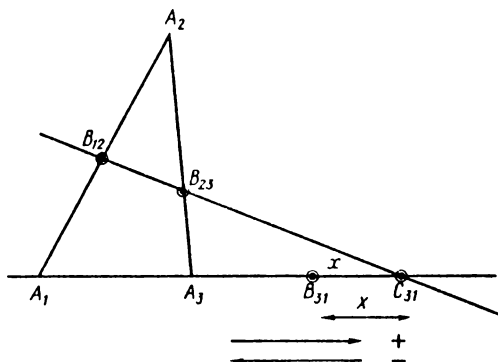


Рис. 53

Тогда  $A_3 C_{31} = n + x$ ,  $C_{31} A_1 = m + x$ . Подставив эти значения в (6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} &= \frac{n+x}{m+x}, \\ nm + nx &= mn + mx, \quad m \neq n, \\ x(m-n) &= 0, \quad m-n \neq 0, \\ &\downarrow \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Если произведение двух сомножителей равно нулю, а один из них не нуль, то второй сомножитель равен нулю. Итак, соотношение (6) может быть лишь при  $x=0$ , т. е. при совпадении точек  $B_{31}$  и  $C_{31}$ . Таким образом, мы доказали, что точки  $B_{12}$ ,  $B_{23}$ ,  $B_{31}$  лежат на одной прямой (коллинеарны), что и требовалось.

Теорема Менелая справедлива в самом общем

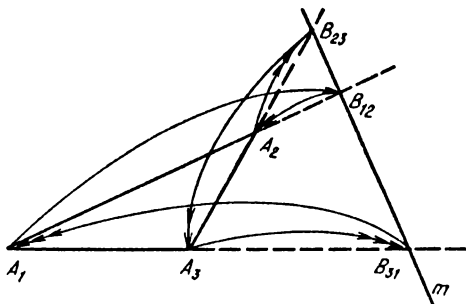
смысле. Так, если трансверсаль пересекает продолжения всех трех сторон треугольника  $A_1A_2A_3$ , то справедливость теоремы сохраняется.

В дидактическом плане целесообразно помнить следующие детали символического оформления записи теорем Менелая и рассмотренных ниже теорем Чевы и Дезарга:

1) на каждой стороне треугольника должны быть три точки;

2) третью точку стороны удобно обозначить двойным индексом, который информирует о номере конца стороны, на которой взята эта третья точка ( $A_1$ ,  $B_{21}$ ,  $A_2$ );

3) движение зрительного луча по сторонам завершается при обходе вершин на той из них, с которой начался отсчет перемножаемых отношений (рис. 54).



$$\frac{A_1B_{12}}{B_{12}A_2} \cdot \frac{A_2B_{23}}{B_{23}A_3} \cdot \frac{A_3B_{31}}{B_{31}A_1} = -1$$

Рис. 54

Кто изучал высшую геометрию, тот, несомненно, обратил внимание на то, что теоремы Менелая и Чевы излагаются во всех книгах неразлучно рядом, как бы дополняя друг друга, хотя теорема Чевы была открыта через полторы тысячи лет после теоремы Менелая; между тем обе теоремы могли быть открыты одним лицом. Поистине, этот момент — психологическая загадка; возможно, открытие Менелаем теоремы, известной нам как теорема Чевы, было утеряно.

Родство двух теорем установлено академиком

Адамаром, которым выведена *теорема Чевы* как *следствие теоремы Менеля*. Приведем это поучительное доказательство. Предлагаем читателю вначале дать словесные формулировки взаимно-обратных теорем Чевы по следующей символической записи:

$$A_1 B_{23} \cap A_2 B_{13} \cap A_3 B_{21} = \text{Ч} \quad (7)$$

↓↑

$$\frac{A_1 B_{23}}{B_{23} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{13}}{B_{13} A_3} \cdot \frac{A_3 B_{21}}{B_{21} A_1} = 1. \quad (8)$$

Пары отрезков на сторонах  $\triangle A_1 A_2 A_3$  в (8) все одного направления; поэтому все три отношения в левой части (8) одного знака. Адамар в своем курсе «Элементарная геометрия» применяет к одному чертежу *дважды* ранее доказанную теорему Менеля (рис. 55):

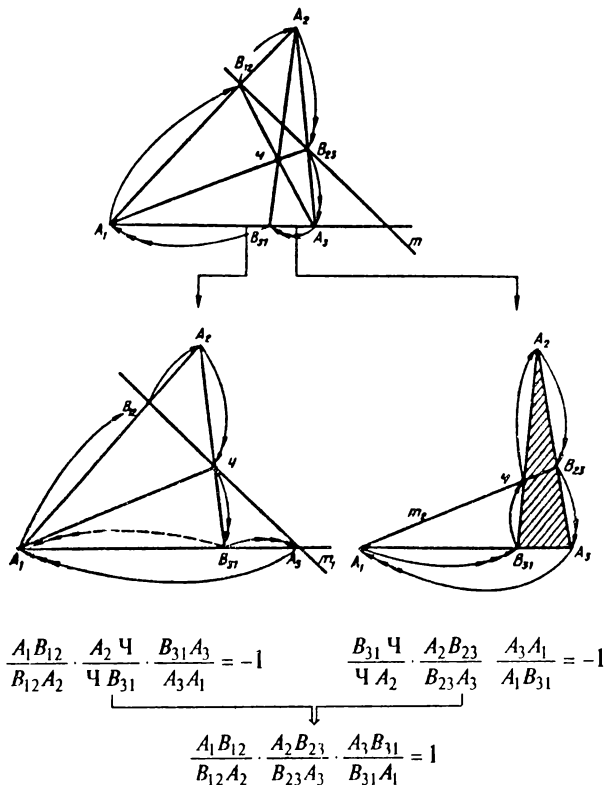


Рис. 55

1)  $\Delta A_1 A_2 B_{31}$  пересекается прямой Менелая  $B_{12} \mathcal{C}$ ;  
 2)  $\Delta B_{31} A_2 A_3$  пересекается прямой Менелая  $\mathcal{C} B_{23}$ . Записывается соотношение Менелая (4):

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 \mathcal{C}}{\mathcal{C} B_{31}} \cdot \frac{B_{31} A_3}{A_3 A_1} = -1 \quad \text{в случае 1) .}$$

и  $\frac{B_{31} \mathcal{C}}{\mathcal{C} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 A_1}{A_1 B_{31}} = -1 \quad \text{в случае 2) .}$

Перемножив по частям указанные соотношения и выполнив несколько красивых сокращений, получим доказываемое соотношение Чевы (8).

*Обратная теорема Чевы* является признаком принадлежности трех прямых (конкурентности) одной точке. Предлагаем доказать ее самостоятельно (см. ниже второй способ доказательства теоремы Чевы).

Подобно тому, как теорема Менелая верна при любом расположении трансверсали (лишь бы она пересекала стороны треугольника или их продолжения в трех точках), так и теорема Чевы допускает трактовку при любом положении точки  $\mathcal{C}$  (точки Чевы), лишь бы точка  $\mathcal{C}$  не оказалась на одной из сторон.

**21** Приведем оригинальный числовой пример, иллюстрирующий теорему Чевы для точки, расположенной вне  $\Delta A_1 A_2 A_3$  (рис. 56).

Чевiana  $A_3 \mathcal{C}$  пересекает сторону  $a_3$ , а две другие чевианы пересекают продолжения сторон треугольника в точках с координатами:  $A_1 \mathcal{C} \cap A_2 A_3 = B_{32} = (-8; 12)$ ,  $A_2 \mathcal{C} \cap A_3 A_1 = B_{13} = (-8; 0)$ ,  $A_3 \mathcal{C} \cap A_1 A_2 = B_{12} = (0; 2)$ .

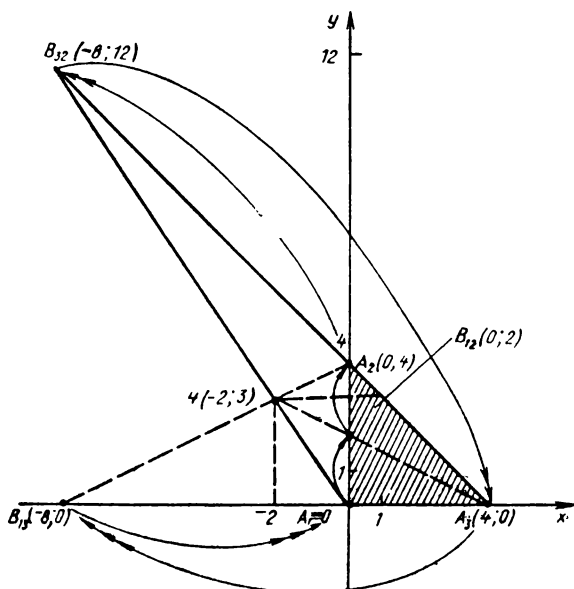
$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 B_{31}}{B_{31} A_1} = 1, \quad \leftarrow$$

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{\sqrt{12^2 + 12^2}} \cdot \frac{12}{8} \quad ? \quad 1,$$

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} - \frac{12}{8} = 1,$$

$$1 = 1.$$

Поскольку теоремы Менелая и Чевы верны для произвольного положения прямой Менелая  $m$  (или точки Чевы  $\mathcal{C}$ ) относительно  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , то возникает следующая проблема:



$$\Psi \in A_1 A_2 A_3$$

$$(A_2 A_3) \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$$

↓

$$\frac{x}{4} - \frac{3x}{8} = 1$$

$$-\frac{x}{8} = 1$$

$$x = -8$$

$$y = -\frac{3}{2}(-8) = +\frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$

$$A_1 \Psi \cap A_2 \Psi \cap A_3 \Psi = \Psi$$

↓

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 B_{31}}{B_{31} A_1} = 1$$

$$A_1 B_{12} = 2;$$

$$B_{12} A_2 = 2 \dots$$

Рис. 56



Пусть вначале была доказана теорема Чевы, причем независимо от теоремы Менелая (подобное доказательство мы приведем дальше) и надо вывести теорему Менелая как следствие доказанной теоремы Чевы (такая постановка вопроса, хотя и противоречит ходу истории математики, в собственно логическом плане представляет некоторый интерес).

Рассмотрим взаимосвязь теорем Менелая, Чевы и Дезарга.

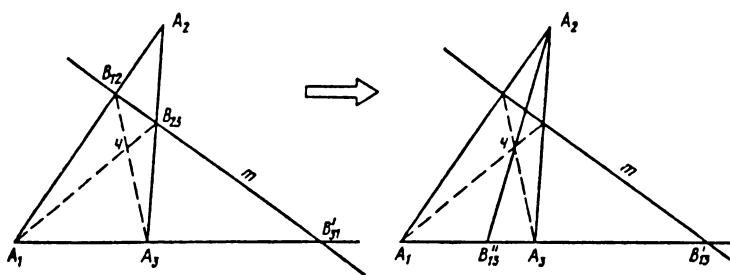
1. Поучительно убедиться в дидактическом плане в логическом родстве указанных теорем, которые по воле исторических случайностей все еще рассматриваются как независимые друг от друга сущности, в произвольном порядке следования друг за другом.

2. Вспомним рисунок, изображающий теорему Менелая (см. рис. 5). На том же чертеже при полной неизменности взаимного положения шести точек построим седьмую точку Чевы — точку Ч как функцию четырех элементов:  $\text{Ч} = \text{Ч}(A_1, A_2, A_3, m)$  (рис. 57). Положение точки Ч зависит от положения трех вершин  $A_1, A_2, A_3$  и прямой Менелая  $m$ . В книгах по проективной геометрии точку Ч называют еще точкой пересечения диагоналей «полного четырехсторонника»  $A_1B_{12}B_{23}A_3$ .

Точка Ч как бы логически «равноценна» двум точкам  $B_{12}$  и  $B_{23}$ , определившим положение прямой Менелая  $m = B_{12}B_{23}$  (верно и обратное). Это означает: если дана прямая  $m$  (дополнительно к точкам  $A_1, A_2, A_3$ ), то существует единственная точка Ч, и наоборот: если дан  $\triangle A_1A_2A_3$  и точка Ч, то тем самым мы можем определить однозначно положение прямой Менелая  $m = B_{21}B_{23}$ , ибо  $A_1\text{Ч} \cap A_2A_3 = B_{23}$ ;  $A_3\text{Ч} \cap A_1A_2 = B_{12}$ . В первом случае сначала строится  $m \cap A_2A_3 = B'_{13}$ , а потом  $B''_{13}$ .

Итак, мы убедились в логической эквивалентности четырех элементов друг другу:  $(A_1, A_2, A_3, \text{Ч}) \equiv (A_1, A_2, A_3, m)$ .

Однако через точку Ч для симметрии можно провести прямую  $A_2B''_{13}$ , и в этот момент чертеж приобретает новое качество: на прямой Менелая  $m$  и на основании  $A_1A_3$  появляется четверка гармони-



$$A_1 B_{23} \cap A_2 B'_{31} \cap A_3 B''_{13} = \text{Ч}$$

↓ ↑

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 B'_{31}}{B'_{31} A_1} = 1 \quad (\text{II})$$

**Рис. 57**

ческих точек  $A_1, A_3, B''_{13}, B'_{31}$  (но об этом ниже).

Теорема, обратная теореме Чевы, является признаком конкурентности (пересечения в одной точке) трех прямых (см. рис. 57).

3. Обратим «попутно» внимание на то, что в символических записях теорем Менелая и Чевы усматривается *алгебраическое родство*: в левых частях два отношения идентичны (мы развиваем один и тот же исходный рисунок, не меняя обозначений!).

Обозначим общую часть формул (4) и (8) (теорем Менелая и Чевы) одной буквой  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 B'_{31}}{B'_{31} A_1}.$$

Из (4) и (8) получаем соответственно:

$$\Phi = - \frac{B'_{31} A_1}{A_3 B'_{31}}, \quad (9)$$

$$\Phi = \frac{B''_{13} A_1}{A_3 B''_{13}}. \quad (9 \text{ а})$$

Так как исторически открытие Менелая предшествует в нашей «музыке прямых», то точка  $M'_{31}$  несет сигнал истории — один штрих вверху!

Точка Чебы (точка Ч) породила три чевианы, пересекающиеся в ней:

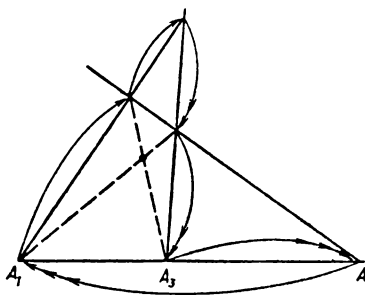
$$A_1 A_{23} \cap A_2 A_{13} \cap A_3 A_{21} = Ч.$$

Третья по счету чевиана  $A_2 B''_{21} = A_2 B_{21}$  пересекается с основанием в запоздавшей «точке с двумя штрихами»:

$$A_2 Ч \cap A_1 A_3 = B''_{13} = B''.$$

Смысл знака минус в теореме Менелая (4) и отсутствие его в теореме Чебы (8) можно выяснить сравнением направлений отрезков, образующих указанные отношения (рис. 58).

#### ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ



$\vec{A_3 A'}$  и  $\vec{A' A_1}$  разного направления

$\vec{A_3 A''}$  и  $\vec{A'' A_1}$  одного направления

#### ТЕОРЕМА ЧЕБЫ

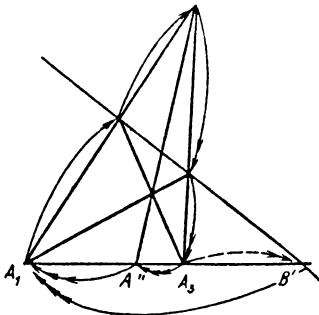


Рис. 58

Приравняв правые части (9) и (9а), получим:

$$-\frac{B_{31} A_1}{A_3 B_{31}} = \frac{B_{31} A_1}{A_3 B_{31}}. \quad (10)$$

Учитывая, что в (10) по существу мы имеем дело с отношением коллинеарных векторов, расположенных на основании треугольника  $A_1 A_3$ , учтем

следующее правило:  $\vec{KP} = -\vec{PK}$ . При перестановке начала и конца векторов образуется противоположный вектор, поэтому

$$-B_{31}' \vec{A}_1 = A_1 \vec{B}_{31}' = A_1 \vec{B}', \quad (11)$$

откуда следует

$$\frac{A_1 B_{31}'}{A_3 B_{31}'} = \frac{B_{31}'' A_1}{A_3 B''} \quad (12)$$

↓

$$\frac{A_1 B'}{B'' A_1} = \frac{A_3 B'}{A_3 B''} \quad (12 \text{ а})$$

↓

$$-\frac{A_1 B'}{A_1 B''} = \frac{A_3 B'}{A_3 B''}$$

↓

$$A_1 \frac{B'}{B''} = -A_3 \frac{B'}{B''}. \quad (13)$$

Прочитаем соотношение (13): расстояние от  $A_1$  до  $B'$  относится к расстоянию от  $A_1$  до  $B''$  так же, как  $\square$  к  $\square$ .

Формула (13) — многозначительная: она выражает центральное понятие проективной геометрии, а именно: гармоническое отношение четырех точек  $A_1, A_3, B', B''$ , расположенных на одной прямой (или гармоническое отношение двух отрезков  $A_1 A_3$  и  $B' B''$ , расположенных на одной прямой). Из формулы (13) можно получить следствие (14), выражающее двойственность понятия «гармоническая четверка». Чтобы в этом убедиться, выполним преобразования пропорции, соблюдая правило знаков:\*

$$A_1 \frac{B'}{B''} = -A_3 \frac{B'}{B''},$$

$$\frac{A_1 B'}{A_1 B''} = -\frac{A_3 B'}{A_3 B''},$$

$$\frac{A_1 B'}{A_3 B''} = -\frac{A_1 B''}{A_3 B''},$$

23

\* Идея записывать повторяющиеся в (12, а) буквы  $A_1, A_3$  один раз, но большего размера, — это наш информационный «вклад» в символический аппарат проективной геометрии. Данную запись мы перенесли из своих учебников математики начальной школы, например:

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 3 \end{array} = 12, \quad \begin{array}{c} 3 \\ 4 \cdot 5 \end{array} = \frac{15}{20}.$$

$$\frac{B'A_1}{B'A_3} = -\frac{B''A_1}{B''A_3},$$

$$\mathbf{B'} \frac{A_1}{A_3} = -\mathbf{B''} \frac{A_1}{A_3}. \quad (14)$$

Итак, формулы (13) и (14) выражают двойственность понятия гармонических отношений четырех точек:

$$\mathbf{A_1 \frac{B'}{B''} = -A_3 \frac{B'}{B''}}$$

$$\downarrow \uparrow$$

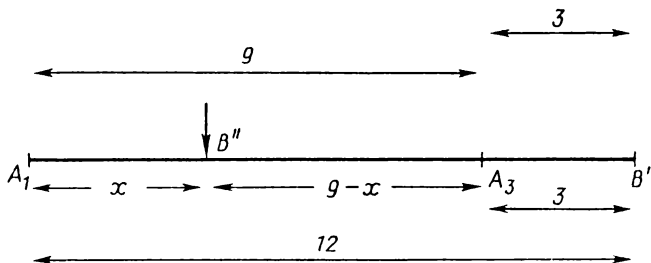
$$\mathbf{B' \frac{A_1}{A_3} = -B'' \frac{A_1}{A_3}}.$$

Если отрезок  $A_1A_3$  делится гармонически отрезком  $B'B''$  (13), то и наоборот: отрезок  $B'B''$  делится гармонически отрезком  $A_1A_3$ .

В дидактическом плане надо отметить следующее: понятие гармонической четверки точек

**24** (13) и (14) нами получено благодаря *одновременному применению* теорем Менелая и Чебы к одному рисунку (!).

Отнюдь не просто найти положения таких четырех точек на числовой прямой, чтобы они образовали гармоническую четверку. Построим пример гармонического отношения (рис. 59).



$$\begin{aligned} A_1B' &= 12 \\ A_3B' &= 3 \\ A_1B'' &= x \\ A_1A_3 &= A_1B' - A_3B' = 12 - 3 = 9 \\ A_3B'' &= 9 - x \end{aligned}$$

Рис. 59

Составим первую пропорцию (13):

$$A_1 \frac{B'}{B''} = -A_3 \frac{B'}{B''},$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{10-x},$$

$$12(10-x) = 3x,$$

$$120 - 12x = 3x,$$

$$x = 8.$$

Составим вторую пропорцию (14):

$$B' \frac{A_1}{A_3} = -B'' \frac{A_1}{A_3}.$$

Проверка:

$$\frac{12}{8} = -\frac{3}{-2},$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

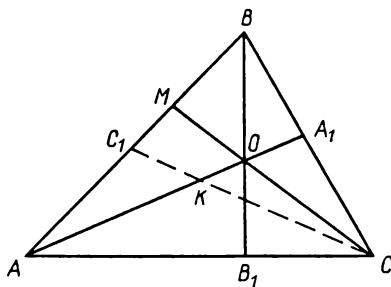
что верно.

Проверка:

$$\frac{-12}{-3} = -\frac{-8}{+2},$$

$$4 = 4.$$

Выше мы доказали теорему Чебы *опосредованно*, как следствие теоремы Менелая, доказанной в свою очередь на основе подобия треугольников. В некоторых учебных ситуациях бывает целесообразно доказать теорему Чебы для треугольника и тетраэдра единым приемом, пользуясь аддитивными свойствами площади и объема фигур. Приведем непосредственное доказательство теоремы Чебы для треугольника и тетраэдра.



$$K \neq O$$

Рис. 60

Пусть через вершины  $\triangle ABC$  проведены прямые, пересекающие противоположные стороны в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно (рис. 60). Если эти пря-

мые проходят через одну точку  $O$  внутри треугольника, то выполняется соотношение Чебы:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (15)$$

А вот обратная теорема Чебы: если три прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  таковы, что выполняется соотношение (15), то они проходят через одну точку.

Докажем сначала прямую теорему. Пусть чевианы треугольника пересекаются в одной точке  $O$ :

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O.$$

Точка  $O$  — общая вершина трех «частичных» треугольников, на которые разделен исходный треугольник  $ABC$ . Обозначим их площади так:  $S_{\Delta ABO} = x$ ,  $S_{\Delta BCO} = y$ ,  $S_{\Delta CAO} = z$ , где  $AA_0 \perp OB$ ;  $CC_0 \perp OB$ . Поэтому

$$AA_0B_1 \sim \Delta CC_0B_1$$



$$\frac{AA_0}{CC_0} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Найдем отношение площадей двух смежных «частичных» треугольников с общей стороной  $OB$ :

$$\frac{x}{y} = \frac{S_{\Delta OBA}}{S_{\Delta OBC}} = \frac{\frac{1}{2} OB \cdot AA_0}{\frac{1}{2} OB \cdot CC_0} = \frac{AA_0}{CC_0} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Итак,

$$\frac{x}{y} = \frac{AB_1}{B_1C}. \quad (16)$$

Аналогично получим:

$$\frac{y}{z} = \frac{BA_1}{A_2C}, \quad (17)$$

$$\frac{z}{x} = \frac{CB_1}{B_1A}. \quad (18)$$

Перемножив по частям (16), (17) и (18), получаем доказываемое соотношение Чебы (15).

Докажем теперь обратную теорему Чебы (см. рис. 60). Пусть

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad (19)$$

Требуется доказать:  $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$ .

Если три прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  делят противоположные стороны на части так, что выполняется соотношение (19), то они проходят через одну точку.

Проведем сначала две чевианы:  $AA_1 \cap BB_1 = O$  (две непараллельные прямые пересекаются в одной точке). Требуется доказать, что третья прямая  $CC_1$  в (19) также пройдет через точку  $O$ .

Допустим противное: пусть третья прямая  $CC_1$ , удовлетворяющая условию обратной теоремы (19), *не проходит* через точку  $O$  и пересекает  $AA_1$  в некоторой точке  $K$ , отличающейся от точки  $O$ .

Проведем прямую  $CO$  через точку  $O$ , которая пересекает  $AB$  в точке  $M$ , отличающейся от точки  $C_1$ . Тогда согласно доказанной прямой теореме должно соблюдаться равенство:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (20)$$

Перемножив по частям (19) и (20), получим:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AM}{MB}. \quad (21)$$

Но соотношение (21) — неверное, так как при переходе в (21) от левой дроби к правой дроби числитель увеличивается ( $AM > AC_1$ ), а знаменатель уменьшается ( $C_1B > MB$ ); при этом дробь должна увеличиться:  $\frac{AC_1}{C_1B} < \frac{A_1M}{MB}$ . Полученное противоречие показывает, что наше допущение не верно. Остается принять, что при условии (19) все три прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  проходят через одну точку.

Теорема Чевы позволяет получить в качестве следствий из нее *все теоремы о замечательных точках треугольника* (предлагаем это упражнение читателю)!

Рассмотрим один пример.

Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, *прямо пропорциональные* прилежащим сторонам (рис. 61).

Антибиссектриса угла делит противоположную сторону на части, *обратно пропорциональные* прилежащим сторонам.



$$AC = a$$

$$CA = b$$

$$AB = c$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{a}{b} \dots$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b} \dots$$

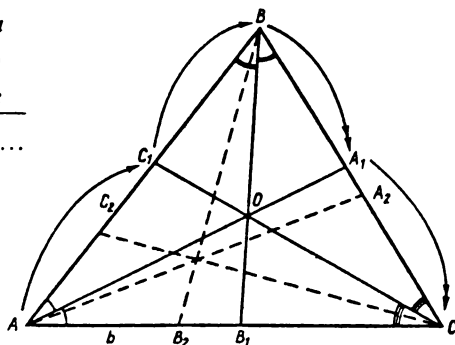


Рис. 61

Для биссектрис  
 $AA_1, BB_1, CC_1$ :

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{a}{b}, \quad (22 \text{ а})$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}, \quad (23 \text{ а})$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{b}{a}. \quad (24 \text{ а})$$

Для антибиссектрис  
 $AA_2, BB_2, CC_2$ :

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{b}{a}, \quad (22 \text{ б})$$

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{b}{c}, \quad (23 \text{ б})$$

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{a}{b}. \quad (24 \text{ б})$$

Перемножив по частям (22), (23) и (24), убеждаемся в выполнении условия Чебы: три биссектрисы (антибиссектрисы) пересекаются в одной точке.

Зная два отношения, в которых делят стороны треугольника прямые Чебы, нетрудно найти третье отношение частей  $AC$  (рис. 62).

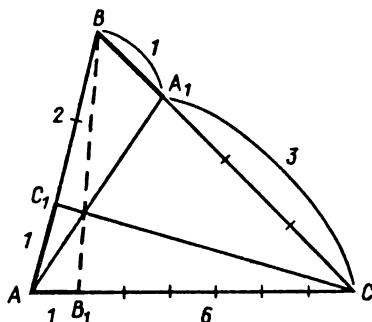


Рис. 62

Решим задачу. Пусть дано:

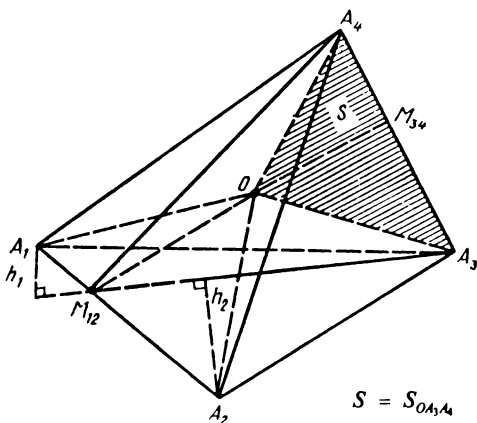
$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{3}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = x.$$

Подставим данные значения в соотношение Чебы:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Итак,  $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{6}{1} = 6.$

Поучительно исследовать вопрос о возможности обобщения теоремы Чебы на пространство, т. е. обобщения суждения с треугольника на тетраэдр.



$$S = S_{OA_3A_4}$$

$$h_1 \perp OA_3A_4$$

$$h_2 \perp OA_3A_4$$

$$\frac{V_{A_1OA_3A_4}}{V_{A_2OA_3A_4}} = \frac{\frac{1}{3}Sh_1}{\frac{1}{3}Sh_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{A_1M_{12}}{A_2M_{12}}$$

Рис. 63

Пусть внутри тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  взята точка  $O$  (рис. 63). Проведем через каждое ребро тетраэдра и точку  $O$  плоскости Чебы, которые пересекают противоположные ребра в точках  $M_{ij}$ . Рассмотрим пару плоскостей Чебы, проходящих через противоположные ребра:

$$(A_1A_2O) \cap A_3A_4 = M_{34},$$

$$(A_3 A_4 O) \cap A_1 A_2 = M_{12},$$

$$(A_1 A_2 O) \cap (A_3 A_4 O) = M_{12} M_{34}.$$

Очевидно, точка  $O$  лежит на линии пересечения этой пары плоскостей, т. е. на прямой  $M_{12} M_{34}$ . Аналогично, точка  $O$  лежит на прямой  $M_{13} M_{24}$ .

Итак, в точке  $O$  пересекаются две прямые или четыре плоскости Чевы:  $M_{14} M_{32} \cap M_{12} M_{34} = O$ .

Обозначим объемы четырех частичных тетраэдров так:  $V_{OA_2 A_3 A_4} = V_1$  и т. д. (поскольку данный тетраэдр расположен против вершины  $A_1$ ).

Рассмотрим два тетраэдра  $A_1 O A_2 A_3$  и  $A_2 O A_2 A_3$  с объемами  $V_1$  и  $V_2$ , имеющие общую грань —  $\triangle O A_2 A_3$  с площадью  $S$ . Опустим на общую грань высоты  $h_1$  и  $h_2$  из вершин  $A_1$  и  $A_2$ . При этом выполняется

пропорция  $\frac{A_1 M_{12}}{A_2 M_{12}} = \frac{h_1}{h_2}$ .

Найдем отношение объемов данных частичных тетраэдров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S h_1}{\frac{1}{3} S h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{A_1 M_{12}}{A_2 M_{12}}. \quad (25)$$

Аналогично получим:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{A_2 M_{23}}{A_3 M_{23}}. \quad (26)$$

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{A_3 M_{34}}{A_4 M_{34}}, \quad (27)$$

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{A_4 M_{41}}{A_1 M_{41}}. \quad (28)$$

Перемножив по частям (25) — (28), получим в левой части 1:

$$\frac{V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot V_1} = 1.$$

Значит, произведение правых частей тоже равно единице:

$$\frac{A_1 M_{12}}{A_2 M_{12}} \cdot \frac{A_2 M_{23}}{A_3 M_{23}} \cdot \frac{A_3 M_{34}}{A_4 M_{34}} \cdot \frac{A_4 M_{41}}{A_1 M_{41}} = 1. \quad (29)$$

Соотношение (29) есть *необходимое* условие того, чтобы четыре плоскости Чевы, проведенные через

стороны косого четырехугольника  $A_1A_3A_4A_2A_1$ , пересеклись в одной точке  $O$  (точке Чебы) (см. рис. 63). Но это же соотношение есть необходимое условие того, чтобы четыре точки  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{41}$ ,  $M_{34}$ , взятые на сторонах косого четырехугольника  $A_1A_3A_4A_2A_1$ , принадлежали одной плоскости Менелая  $\mu$ .

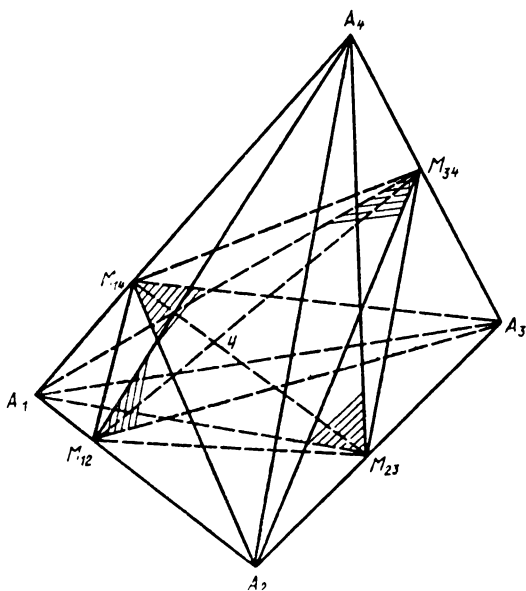
В самом деле, плоскость Менелая  $\mu$  образована двумя пересекающимися в пространстве прямыми:

$$M_{12}M_{34} \cap M_{23}M_{14} = O$$

$$\downarrow$$

$$(M_{23}M_{12}M_{34}) = \mu.$$

Предлагаем читателю доказать *достаточность* этих условий (рис. 64).



$$(A_1A_2 \text{ ч}) \cap (A_3A_4 \text{ ч}) \cap (A_2A_3 \text{ ч}) \cap (A_1A_4 \text{ ч}) = \text{ч}$$

$$\downarrow$$

$$M_{12}, M_{34}, M_{14}, M_{23} \in \mu$$

$$\downarrow$$

$$\frac{A_1M_{12}}{M_{12}A_2} \cdot \frac{A_2M_{23}}{M_{23}A_3} \cdot \frac{A_3M_{34}}{M_{34}A_4} \cdot \frac{A_4M_{41}}{M_{41}A_1} = 1$$

Рис. 64

Если выполняется соотношение (29), то:

1) четыре точки  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{34}$ ,  $M_{41}$  лежат на одной плоскости  $\mu$ ;

2) четыре плоскости, проведенные через стороны косого четырехугольника, пересекаются в одной точке:  $(A_1 A_2 M_{34}) \cap (A_2 A_3 M_{14}) \cap (A_3 A_4 M_{12}) \cap (A_4 A_1 M_{23}) = Ч$ .

Утверждение (1) — это обратная теорема Менелая для косого четырехугольника, утверждение 2 — это обратная теорема Чебы для косого четырехугольника.

Представляет познавательный интерес сравнение свойств чевиан треугольника и тетраэдра. Чевианой треугольника  
тетраэдра назовем отрезок  $A_i Ч_i$ , соединяющий

вершину  $A_i$  с точкой  $Ч_i$ , противоположной  $\frac{\text{стороне } a_i}{\text{грани } \alpha_i}$ . Чевианы пересекаются в одной точке Чебы (точке Ч):  $\cap A_i Ч_i = Ч$ .

Предлагаем вам сопоставить формулы для треугольника  
тетраэдра, образующие матрицу, и доказать формулы (рис. 65). При доказательстве этих формул используется суммирование  $\frac{\text{площадей}}{\text{объемов}}$  частичных фигур.

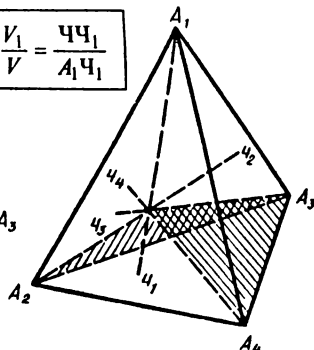
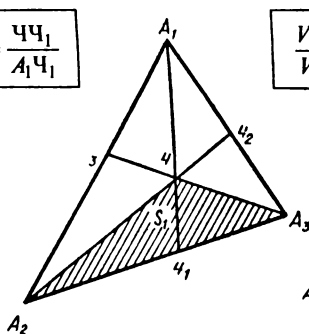
Мы осуществили постепенное наращивание геометрической информации, характеризующей взаимное положение элементов треугольника и тетраэдра. Важно здесь уяснить следующее: как только на плоскости задано положение вершин треугольника (тетраэдра)  $A_1 A_2 A_3 (A_4)$ , то точки всей плоскости (всего пространства) обретают определенную математическую зависимость от положения вершин заданной фигуры.

Итак, установлено нечто большее, чем теорема Дезарга: множество точек Чебы ( $Ч_i$ ), лежащих на одной прямой, породило множество прямых Менелая ( $m_i$ ), проходящих через одну точку ( $B'$ ).

Рассмотрим множество треугольников, соответствующие вершины которых располагаются на трех прямых, пересекающихся в одной точке  $A_2$  (центре перспективы); соответствующие стороны этих треугольников пересекаются в трех точках:  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $B'$ ,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\text{ч}\text{ч}_1}{A_1\text{ч}_1}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\text{ч}\text{ч}_1}{A_1\text{ч}_1}$$



$$S_{\text{ч} A_2 A_3} = S_1$$

$$V_{\text{ч} A_2 A_3 A_4} = V_1$$

Треугольник	Тетраэдр
$\frac{\text{ч}\text{ч}_1}{A_1\text{ч}_1} + \frac{\text{ч}\text{ч}_2}{A_2\text{ч}_2} + \frac{\text{ч}\text{ч}_3}{A_3\text{ч}_3} = 1$	$\frac{\text{ч}\text{ч}_1}{A_1\text{ч}_1} + \frac{\text{ч}\text{ч}_2}{A_2\text{ч}_2} + \frac{\text{ч}\text{ч}_3}{A_3\text{ч}_3} + \frac{\text{ч}\text{ч}_4}{A_4\text{ч}_4} = 1$
$\frac{\text{ч} A_1}{A_1\text{ч}_1} + \frac{\text{ч} A_2}{A_2\text{ч}_2} + \frac{\text{ч} A_3}{A_3\text{ч}_3} = 2$	$\frac{\text{ч} A_1}{A_1\text{ч}_1} + \frac{\text{ч} A_2}{A_2\text{ч}_2} + \frac{\text{ч} A_3}{A_3\text{ч}_3} + \frac{\text{ч} A_4}{A_4\text{ч}_4} = 3$

Рис. 65

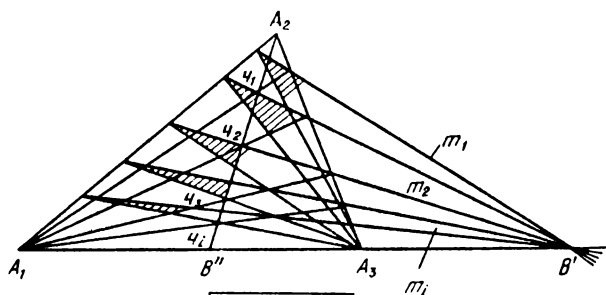
лежащих на оси перспективы (рис. 66). На рисунке ось перспективы расположена по одну сторону от треугольников, находящихся в перспективном соответствии.

Возможно и такое расположение, что ось перспективы расположена *между* перспективными фигурами (рис. 67).

Дидактически новым в нашем исследовании по изучению данного раздела проективной геометрии является идея попарного рассмотрения точки Чевы  $\text{Ч}_i$  и прямой Менелая  $t_i$ . При этом соблюдается лишь условие: точка Чевы не располагается на стороне заданного треугольника, а прямая Менелая  $t_i$  не проходит через вершину треугольника.

**25** Каждая пара «точка  $\text{Ч}_i$ » и «прямая  $t_i$ » порождает гармоническую четверку точек на соответствующем основании треугольника  $A_1A_2A_3$ .

Итак, мы создали следующую логическую цепь понятий и суждений, оказавшуюся наиболее целесообразной для освоения *теоремы Дезарга как центральной теоремы проективной геометрии*:



$$\begin{array}{c} r_i \in A_2 B'' \\ \downarrow \uparrow \\ \cap m_i = B' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \\ A_1 \frac{B'}{B''} & = - A_3 \frac{B'}{B''} & \\ \downarrow & \uparrow & \\ B' \frac{A_1}{A_3} & = - B'' \frac{A_1}{A_3} & \end{array}$$

Рис. 66

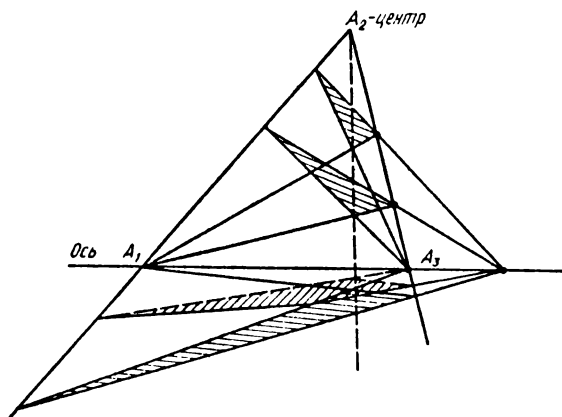


Рис. 67

1. Теорема Менелая доказана на основе подобия фигур.
2. Теорема Чевы доказана как следствие теоремы Менелая.
3. Установлен механизм решения пары эквива-

лентных задач: всякой точке Чевы  $\mathcal{C}_i$  соответствует прямая Менелая  $m_i$ . И наоборот: если проведена прямая Менелая  $m_i$ , то существует в плоскости треугольника единственная точка Чевы  $\mathcal{C}_i$ , порождающая в паре с прямой  $m_i$  гармоническую четверку точек.

Решение указанных в пункте 3 взаимно-обратных задач выглядит так:

**Прямая задача**  
Дано:  $\triangle A_1A_2A_3$ ; точка Чевы  $\mathcal{C}_1$ .

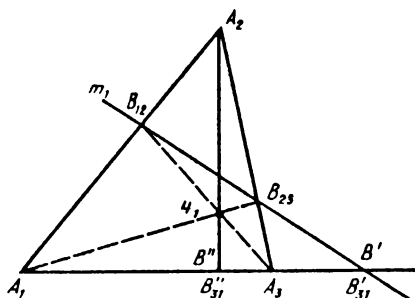
Построить соответствующую прямую Менелая  $m_1$ .

**Обратная задача**

Дано:  $\triangle A_1A_2A_3$ ; прямая Менелая  $m_1$ .

Построить соответствующую точку Чевы  $\mathcal{C}_1$ .

На рис. 68 указана последовательность построений, делящих основание  $A_1A_3$  гармонически.



$$\mathcal{C}_1 \longrightarrow m_1$$

Решение:

$$1. A_2\mathcal{C}_1 \cap A_1A_3 = B''$$

$$2. A_1\mathcal{C}_1 \cap A_2A_3 = B_{23}$$

$$A_3\mathcal{C}_1 \cap A_1A_2 = B_{12}$$

$$3. B_{12}B_{23} = m_1$$

$$4. A_1 \frac{B'}{B''} = -A_3 \frac{B'}{B''}$$

$$B' \frac{A_1}{A_3} = -B'' \frac{A_1}{A_3}$$

$$\mathcal{C}_1 \leftarrow - - - m_1 = B_{12}B_{23}$$

Решение:

$$1. A_1B_{23} \cap A_3B_{12} = \mathcal{C}_1$$

$$2. A_2\mathcal{C}_1 \cap A_1A_3 = B''$$

$$3. A_1 \frac{B'}{B''} = -A_3 \frac{B'}{B''}$$

↓

$$B' \frac{A_1}{A_3} = -B'' \frac{A_1}{A_3}$$

Рис. 68



Итак, важно уяснить следующее: если треугольник  $A_1A_2A_3$  пересечен некоторый прямой  $m_i$  (не проходящей через вершину данного треугольника), то это означает, что одной линейкой можно найти соответствующую точку Чевы  $Ч_i$ , а также построить недостающую точку  $B''$ , составляющую вместе с заданными точками  $A_1, A_3, B'_1$  гармоническую четверку.

Если же дано в треугольнике  $A_1A_2A_3$  положение точки Чевы  $Ч_i$ , то также однозначно строится соответствующая прямая Менелая  $m_i$ ; при этом одной линейкой можно построить точки  $B'$  и  $B''$ , образующие с вершинами основания гармоническую четверку точек.

Нам не встречалось в книгах по проективной геометрии следующее обобщение: если на чевиане  $A_2B$  брать произвольные точки  $Ч_i$ , то соответствующие им прямые Менелая  $m_i$  будут проходить через одну точку  $B'$ , лежащую на основании  $A_1A_3$ :

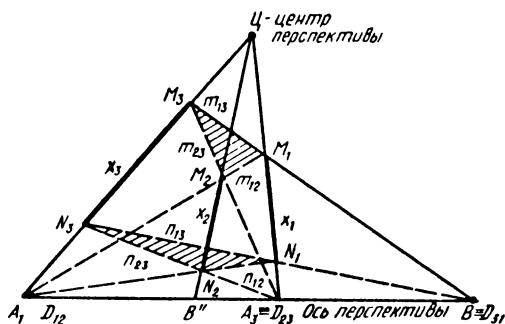
$$\begin{aligned} Ч_1, Ч_2, Ч_3 \dots \in AB'' \\ \downarrow \uparrow \\ m_1 \cap m_2 \cap m_3 \cap \dots = B'. \end{aligned}$$

Верно и обратное. Доказательство обоих утверждений очевидно: как только дано положение точки Чевы  $Ч_i$ , то тем самым дано положение *всех точек Чевы* на чевиане  $A_2B$ , тем самым определены единственным образом гармоническая четверка точек  $A_1, A_3, B', B''$ , или все прямые Менелая  $m_i$  проходят через одну и ту же точку  $B'$ , лежащую на основании треугольника  $A_1A_3$  (см. рис. 66, 67).

Примечательно, что использование в рассуждениях такой крупной информационной единицы, как парная связь между точкой Чевы ( $Ч_i \in A_2B''$ ) и соответствующей прямой Менелая ( $\cap m_i = B'$ ), не встречалось нам в сочинениях по проективной геометрии.

Теперь нам осталось сделать один шаг к формулировке и доказательству замечательной теоремы Дезарга, которую справедливо считают центральной теоремой проективной геометрии. Теорема Дезарга в сущности сводится к тому, чтобы из множества

перспективных друг другу треугольников, построенных внутри исходного  $\triangle A_1 A_2 A_3$  (рис. 69), выбрать пару треугольников; для повышения наглядности восприятия удобно изменить обозначения, сохранив прежнее расположение точек. По существу классическая теорема Дезарга относительно двух перспективных треугольников является частным случаем свойства множества перспективных треугольников, построенных относительно исходного треугольника  $A_1 A_2 A_3$ .



$\mathcal{C}$  — центр перспективы;

$M_i$  и  $N_i$  — сходственные вершины,

$m_i$  и  $n_i$  — сходственные стороны,

$\triangle M_1 M_2 M_3$  — прообраз,

$\triangle N_1 N_2 N_3$  — образ

$$M_i N_i = x_i$$

$$M_i M_j = m_{ij}$$

$$N_i N_j = n_{ij}$$

$$n_{ij} \cap m_{ij} = D_{ij}$$

$$D_{12}, D_{23}, D_{31} \in a$$

$$M_1 N_1 \cap M_2 N_2 \cap M_3 N_3 = \mathcal{C}$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$D_{12}, D_{23}, D_{31} \in a$$

Рис. 69

Сформулируем обобщенную теорему Дезарга. Пусть даны  $\triangle A_1 A_2 A_3$  и точка  $\mathcal{C}_1$ . Построено множество из  $n$  перспективных треугольников. Обозначим прямые,

проходящие через сходственные вершины  $M_i$ ,  $M_j$  через  $m_{ij}$  (аналогично  $n_{ij}$ ). Обозначим точки пересечения сходственных сторон двух треугольников  $M_1M_2M_3$  и  $N_1N_2N_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} M_1N_1 = x_1 \dots \\ M_1M_2 = m_{12} \dots \\ N_1N_2 = n_{12} \dots \end{array} \right| \begin{array}{l} n_{12} \cap m_{12} = D_{12} \\ n_{23} \cap m_{23} = D_{23} \\ n_{31} \cap m_{31} = D_{31} \end{array} \left| \begin{array}{l} D_{12}, D_{23}, D_{31} \in a. \end{array} \right.$$

Тогда верно утверждение: если прямые, содержащие множество сходственных вершин, конкурентны, то точки пересечения множества сходственных сторон — коллинеарны (и наоборот).

Теорема Дезарга о двух перспективных треугольниках есть всего-навсего частный случай приведенной выше общей теоремы о множестве перспективных треугольников (см. рис. 67).

Видный методист геометрии М. В. Потоцкий справедливо отмечал: чтобы понять теорему Дезарга, надо не рассуждать, а ... «внимательно смотреть на чертеж». Добавим: «построенный *читателем*». И действительно, доказательство теоремы Дезарга связано с постижением *эстетики рисунка*, в котором красивая перспективная связь сходственных элементов делает понятным, *очевидным* (очагами видимым!) утверждение теоремы, доказательство которой имплицитно заключено в цепи самым выполненными *точных* построений.

Теорему Дезарга надо изучать на основе собственных построений линейкой!

Итак, в  $\triangle A_1A_2A_3$  построим чевиану  $A_2B''$  и на ней возьмем две точки Чевы. В целях наибольшей наглядности чертежа введем специальные обозначения точек и отрезков, максимально облегчающие двойственное содержание взаимно-обратных теорем Дезарга (см. рис. 69).

Итак, в нашем зрительном восприятии — два перспективных треугольника:  $\triangle M_1M_2M_3$  и  $\triangle N_1N_2N_3$ . Первый треугольник назовем для краткости прообразом, второй — образом.

Сформулируем *теоремы Дезарга*.

### Прямая теорема:

если прямые, соединяющие сходственные вершины прообраза и образа, пересекаются в центре перспективы  $\Pi$ , то три точки пересечения пар сходственных сторон прообраза и образа лежат на оси перспективы  $a = A_1A_3$ .

### Обратная теорема:

если точки пересечения сходственных сторон прообраза и образа лежат на одной прямой (на оси перспективы), то прямые, соединяющие сходственные вершины их, пересекаются в одной точке (в центре перспективы).

В некоторых книгах теорему Дезарга выражают предельно лаконично: если сходственные вершины треугольников лежат на конкурентных прямых, то точки пересечения сходственных сторон — коллинеарны (и наоборот), т. е.

$$\begin{array}{c} x_1 \cap x_2 \cap x_3 = \Pi \\ \downarrow \uparrow \\ D_{12}, D_{23}, D_{31} \in a, \end{array}$$

где  $a = A_1A_3$ ,  $\Pi = \cap M_iN_i = M_1N_1 \cap M_2N_2$ .

Доказательства взаимно-обратных теорем Дазарга тому, кто выполнил предыдущие выкладки, не требуется: если аккуратно выполнить построения в точном соответствии с условием теоремы, то из них очевидно, что одновременно выполняется как условие, так и заключение теоремы (см. рис. 69).

Подчеркнем еще раз следующее: фактором, соотносящим в теоремах Дезарга образ и прообраз, является то, что они оба образуют на основании  $A_1A_3$  гармоническую четверку точек. Поэтому для реализации на занятиях предлагаемой технологии доказательства необходимо пройти последовательно через четыре логических этапа: теорема Менелая  $\rightarrow$  теорема Чевы  $\rightarrow$  гармоническая четверка точек  $\rightarrow$  теорема Дезарга.

В некоторых популярных сочинениях справедливо отмечают, что затруднение вызывает у учащихся выполнение построения чертежа для обратной теоремы. Приведем последовательные построения чертежа, иллюстрирующего обратную теорему (рис. 70).

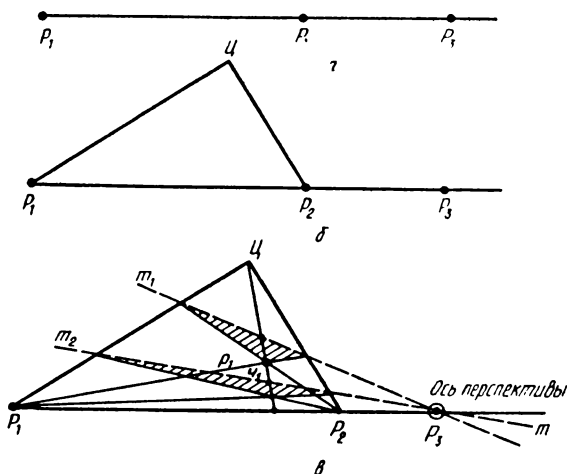


Рис. 70

Задача. Даны три точки  $P_1, P_2, P_3$ , расположенные на одной прямой. Построить два треугольника таких, чтобы в данных точках пересекались пары соответственных сторон этих треугольников.

На рис. 70 показана последовательность построений, а именно:

- 1) строим произвольный  $\triangle CP_1P_2$ ,
- 2) через точку  $P_3$  проводим две прямые Менелая:  $m_1 \cap m_2 = P_3$ ;
- 3) строим точку Чевы  $C_1$ ;
- 4) соединив точки Чевы с точками пересечения прямых Менелая  $m_1$  и  $m_2$  со сторонами, получаем два перспективных треугольника.

Известно обобщение теоремы Дезарга для трехмерного пространства: если четыре прямые, соединяющие соответственные вершины двух тетраэдров, проходят через одну точку (центр перспективы  $\mathcal{C}$ ), то четыре прямые, по которым пересекаются противоположащие грани, лежат в одной плоскости (плоскости перспективы), т. е.

$$\begin{aligned}
 x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4 &= \mathcal{C} \\
 \downarrow \uparrow \\
 a_1, a_2, a_3, a_4 &\in \gamma.
 \end{aligned}$$

В формулировке теоремы Дезарга отсутствует понятие отношения отрезков. Однако в *содержании теоремы Дезарга* как бы скрыто равенство отношений гармонической четверки отрезков.

Классические теоремы Менелая и Чевы с трудом «пробиваются» на страницы школьных учебников. Между тем, значения этих теорем, составляющих эпоху в развитии математики, для общего логического развития учащихся трудно переоценить. К тому же с распространением калькуляторов становится возможным выполнение учащимися содержательных упражнений, связанных как с точными построениями и измерениями, что само по себе важно, так и с последующими приборными вычислениями.

**У п р а ж н е н и е.** На большом листе бумаги построить линейкой произвольный треугольник  $A_1A_2A_3$ . Выбрав произвольную точку Чевы  $Ч$ , построить три чевианы, пересекающиеся в точке  $Ч$ .

**Р е ш е н и е.** Напишем формулу Чевы:

$$\frac{A_1B_{12}}{B_{12}A_2} \cdot \frac{A_2B_{23}}{B_{23}A_3} \cdot \frac{A_3B_{31}}{B_{31}A_1} = 1.$$

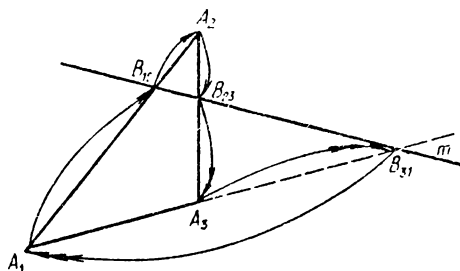
Измерим в миллиметрах на сторонах треугольника длины всех шести отрезков. Подставив эти данные в левую часть равенства, найдем значение левой части. При аккуратном выполнении задания в левой части должно получиться число, очень близкое к единице, например 0,993.

Аналогичное упражнение по вычислительному контролю можно выполнить и по формуле Менелая, причем уже в 6—7 классах, т.е. задолго до логического доказательства этих теорем. В этом случае учитель сообщает классу формулировку теоремы (без доказательства) и предлагает выполнить контроль для одного частного случая (по построенной фигуре).

Вспомним историю открытия теоремы Менелая, которая перенесется на сферическую поверхность\*. Менелай доказал свою теорему сначала для треугольника  $A_1A_2A_3$ , расположенного на плоскости

---

\* Б. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. — М., 1959.



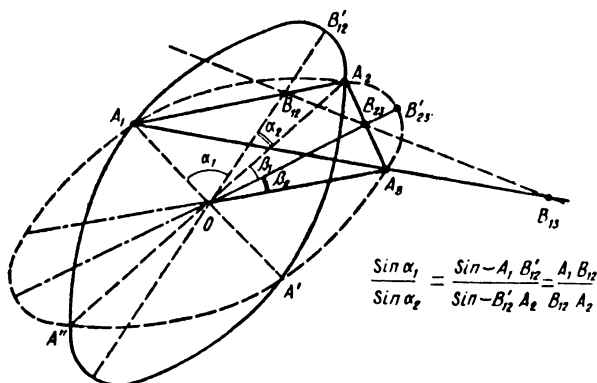
$$B_{12}, B_{23}, B_{31} \in m$$



$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \cdot \frac{A_3 B_{31}}{B_{31} A_1} = -1$$

Рис. 71

(рис. 71), потом вершины этого треугольника расположил на поверхности сферы; третьи точки, расположенные на сторонах прямолинейного треугольника (в наших обозначениях  $B_{12}$ ,  $B_{23}$ ,  $B_{31}$ ), он спроектировал из центра сферы на ее поверхность в точки  $B'_{12}$ ,  $B'_{23}$ ,  $B'_{31}$  (рис. 72). Тогда, например, точки  $A_1$ ,  $B'_{12}$ ,  $A_2$  оказываются на большой окружности, образованной пересечением плоскости  $(A_1 A_2 O)$  со сферой.



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \angle A_1 B'_{12} A_2}{\sin \angle B'_{12} A_2 B_{12}}$$

Рис. 72

Рассмотрим  $\triangle A_1A_2O$ , состоящий из двух треугольников  $A_1B_{12}O$  и  $A_2B_{12}O$  на сфере  $O (R=1)$ . По теореме синусов

из  $A_1B_{12}O$  имеем:

$$\frac{\sin A_1}{OB_{12}} = \frac{\sin \alpha_1}{A_1B_{12}},$$

$$\sin A_1 = \frac{OB_{12} \cdot \sin \alpha_1}{A_1B_{12}}$$

из  $A_2B_{12}O$  имеем:

$$\frac{\sin A_2}{OB_{12}} = \frac{\sin \alpha_2}{A_2B_{12}},$$

$$\sin A_2 = \frac{OB_{12} \cdot \sin \alpha_2}{A_2B_{12}}$$

$$A_1 = A_2$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{A_1B_{12}} = \frac{\sin \alpha_2}{A_2B_{12}}$$

↓

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{A_1B_{12}}{A_2B_{12}}.$$

Радиус  $OB'_{12}$  пересекает хорду  $A_1A_2$  на части, пропорциональные синусам дуг, на которые рассечены дуга  $\cup A_1A_2$  этим радиусом:  $\cup A_1 = \cup A_1OB'_{12}$  и т. д.

Обратим внимание на то, что выше была теорема Дезарга выведена технологически на основе применения теорем Менелая и Чебы к одному чертежу! Благодаря этому удалось ввести понятие «гармоническое отношение четырех точек», после чего мы доказали теорему Дезарга.

Примечательно, что теорема Дезарга (1591—1662) была открыта значительно раньше теоремы Чебы (1648—1734), хотя — логически — более простая теорема Чебы могла быть открыта раньше теоремы Дезарга, а Менелай вполне мог бы вывести, как простое следствие своей теоремы, теорему, известную под именем Чебы. Однако это было осуществлено академиком Адамаром в XIX веке. Увы, наука не всегда следует логике исследуемого вопроса: чаще всего последующее логическое (дидактическое) упорядочение и упрощение цепи суждений совершается, когда эти суждения найдены независимо друг от друга, учеными разных стран и эпох.

В заключение мы хотели бы обратить внимание на следующее: выдающийся геометр современности Коксетер привел доказательства таких теорем проективной геометрии, как Паппа, Чебы, Дезарга, Симпсона, Ньютона, Гаусса, сводя их к теореме Менелая как ее следствия. Но Менелай успел



доказать свою теорему для сферической поверхности. Значит, теоремы Паппа, Чевы, Дезарга и другие верны и для сферической поверхности! Здесь мы видим реальную пользу *принципа историзма*, поскольку, вероятно, мало кто из геометров обратил внимание на это обстоятельство.

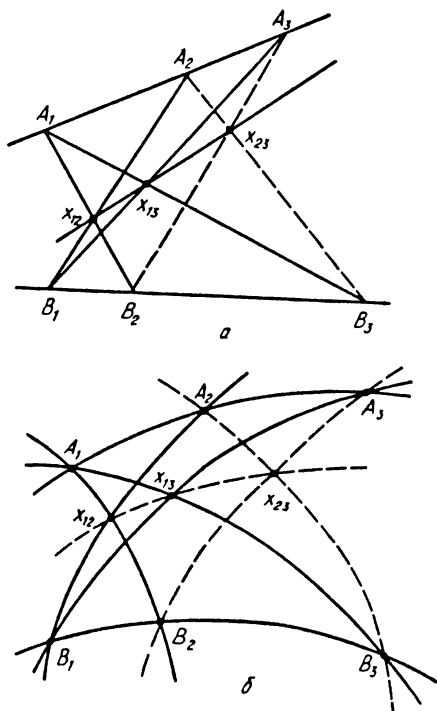


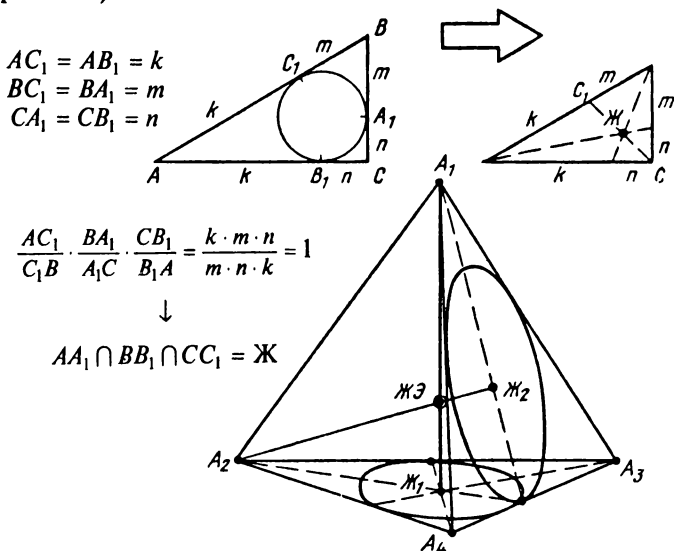
Рис. 73

26 На рис. 73 мы изобразили конфигурацию Паппа на плоскости и на сфере. Так мы убеждаемся неожиданно еще раз в пользу аналогии, поскольку она бывает «замешана» на философском принципе историзма!

В «Математический энциклопедии» читаем: «Точка Жергонна — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с противоположными этим

вершинам сторонами». Доказательство этого факта основано на теореме Чебы.

Обозначим точки касания вписанной окружности буквами  $A_1, B_1, C_1$ . Касательные, проведенные из одной вершины, равны. По обратной теореме Чебы получаем, что чевианы  $AA_1, BB_1, CC_1$  должны пересечься в одной точке (в точке Жергонна  $\triangle ABC$ ) (рис. 74).



$$A_1Ж_1 \cap A_2Ж_2 \cap A_3Ж_3 \cap A_4Ж_4 = \text{ЖЭ}$$

Рис. 74

*Теорема Жергонна* касалась лишь треугольника. Но нам повезло, когда мы сопоставили понятия: окружность, касающаяся всех сторон треугольника, и сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра. Следствием пространственного обобщения явилось следующее суждение: сфера касается всех четырех сторон полуприписанного косого четырехугольника. В этом случае верна *пространственная теорема Чебы*: произведение четырех отношений равно единице и четыре плоскости Чебы пересекаются в одной *точке Жергонна — Эрдниевых (ЖЭ)*.

Пространственную точку Жергонна — Эрдниевых удобно определить следующим образом. Пусть дан тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  и пусть  $J_i$  — точки Жергонна грани, противоположной вершине  $A_i$ . Тогда четыре прямые Жергонна  $A_iJ_i$  пересекаются в одной точке ЖЭ:

$$A_1J_1 \cap A_2J_2 \cap A_3J_3 \cap A_4J_4 = \text{ЖЭ}.$$

## Беседа 6

# АНАЛОГИЯ — КЛЮЧ К НОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Приятно, конечно, и взрослому и школьнику получить свою собственную информацию, не предусмотренную автором книги или обучающим. Академик И. В. Арнольд по этому поводу тонко подметил: «... во всей математике есть нечто таинственное. Это удивительные совпадения и связи между далекими на первый взгляд предметами и теоремами». Всякому занимающемуся математикой (и школьнику и специалисту) отнюдь не заказана неудача, если он ищет свою нишу в безбрежном море давно открытых и неоткрытых истин. Как бы эта самостоятельная находка ни выглядела скромной в общем плане, в личностном психологическом контексте она приносит не сравнимое ни с чем эстетическое удовлетворение, чувство комфорта, довольства собственным достижением (самостоятельно возникшей ассоциацией), которое нередко завершается строгим силлогизмом на радость автору новосозданного утверждения.

Предыдущая беседа намеренно была посвящена установлению новых (и неожиданных!) связей в пределах приложения «предельно известной» триады классических теорем Менелая, Чевы и Дезарга. Мы убедились, что такой подход может привести к неожиданному приращению знания, если только найти новое сочетание известных порознь теорем. В данной беседе мы постараемся, напротив, показать взаимопроникновение математических понятий, которые часто, как правило, не сопоставляют в нужном сочетании. Содержание беседы, охватывая преимущественно вопросы вузовской математики, мало обсуждалось в литературе или публикуется впервые.

### «Содружественные» многогранники

**28** Обсудим понятие «содружественные многогранники».

Сначала вспомним из арифметики понятие «содружественные числа», каковыми являются такие

два числа, у которых сумма делителей одного из них равна другому числу (и наоборот). Вот наименьшая из таких пар: 220 и 284.

Число	200	284
Сумма делителей числа	$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$	$1+2+4+71+142 = 220$

Мы задались вопросом: не существует ли подобная содружественность в мире «чистой геометрии»? Сначала обратим внимание на пары двойственных многогранников, каковы, например, гексаэдр (куб) и октаэдр. Сравним Эйлеровы характеристики этих многогранников (табл. 3).

Таблица 3

	Число граней (Г)	Число вершин (В)	Число ребер (Р)	$G+B = P+2$
Гексаэдр (шестигранник)	6	8	12	$8+6 = 12+2$
Октаэдр (восьмигранник)	8	6	12	$6+8 = 12+2$

Мы видим: в двойственных многогранниках числа ребер совпадают ( $P=12$ ), а числа вершин и граней — взаимно перестановочны. Однако гексаэдр и октаэдр все же трудно назвать «содружественными».

Сравним далее два параллелоэдра; параллелоэдрами, как известно, можно сплошь заполнить трехмерное пространство (табл. 4).

Таблица 4

	Число граней (Г)	Число вершин (В)	Число ребер (Р)	$G+B = P+2$
Ромбодекаэдр	12	14	24	$12+14 = 24+2$
Усеченный октаэдр	14	24	36	$14+24 = 36+2$

В этом случае связь между свойствами данных родственных многогранников более сложная (здесь уже нет двойственности). Чтобы получить ромбододекаэдр (12-гранник), поступают так: полувпишем в куб сферу, касающуюся всех его ребер. Затем в каждой точке касания ребра со сферой построим 12 плоскостей, касательных к сфере. Точки пересечения этих плоскостей суть вершины ромбов. Грани ромбододекаэдра — равные ромбы.

Усеченный октаэдр строят так: сначала строят правильный октаэдр; потом плоскостями, параллельными диагональным плоскостям, отрезают от каждой вершины *третьи* части ребер. Оставшееся тело — усеченный октаэдр (14-гранник). Сравним свойства обоих тел.

#### *Ромбододекаэдр*

Все грани полученного 12-гранника — равные ромбы; у него 6 равных четырехгранных углов и 8 равных трехгранных углов.

#### *Усеченный октаэдр*

Все трехгранные углы 14-гранника равны; у него 6 граней — равные правильные четырехугольники (квадраты) и 8 граней — равные правильные шестиугольники.

Удобно изобразить эти соответствия следующим образом:

Ромбододекаэдр	14 вершин	6 четырехгранных углов	8 трехгранных углов
Усеченный октаэдр	14 граней	6 квадратов	8 шестиугольников

Число вершин первого тела равно числу граней второго. Где же скрывается содружественность данных многогранников?

Как известно, равными ромбами можно сплошь заполнить плоскость. Подобно этому равными ромбододекаэдрами можно сплошь заполнить пространство (то же самое верно и для равных усеченных октаэдров). Далее. Известно, что правильный шестиугольник возможно обложить (обернуть) шестью такими же шестиугольниками; образовавшийся при этом невыпуклый многоугольник состоит из 7 ячеек равных правильных шестиугольников. Если обер-

нуть новую фигуру еще раз третьим слоем, получим «шестиугольник Адамса», состоящий из 19 равных шестиугольников. Если «обрамить» шестиугольник Адамса шестью прямыми, проходящими через наружные вершины его, то обрамление будет иметь опять же форму правильного шестиугольника.

Интересны свойства аналогичного «обернутого» ромбододекаэдра. Для этого к каждому из 12 граней исходного додекаэдра (ячейки) мы приставим такие же ромбододекаэдры; полученный так «ребристый» (невypуклый) многогранник неожиданно приобретает форму содружественного многогранника, а именно усеченного октаэдра (14-гранника), если только провести «обрамляющие плоскости» через ряды наружных вершин нового многогранника.

«Обернем» тем же приемом усеченный октаэдр. Внутреннюю ячейку обкладываем 14 равными телами. Если обрамить многогранник плоскостями, проходящими также через ряды наружных вершин, то, как мы и ожидали, получим содружественную фигуру — «ребристый ромбододекаэдр» (12-гранник).

Осуществив описанное практически на моделях (13 равных ромбододекаэдров и 15 равных усеченных октаэдров), мы убедились, что данные фигуры действительно содружественны, так как «порождают» друг друга.

Надо ожидать, что обнаруженные свойства взаимопревращения полуправильных многогранников как-то проявляются в стереохимии (в превращениях веществ друг в друга). В последние годы появились сообщения об открытии молекул новых веществ, состоящих из атомов углерода, которые названы фуллеренами. Существуют фуллерены, молекула которого состоит из 60, 70 атомов углерода, а эти числа кратны числу граней ромбододекаэдра и усеченного октаэдра!

Геометры мало внимания уделяли до сих пор параллелоэдрам. Их свойство — сплошь заполнять пространство — позволяет составить интересную задачу. Для сравнения вспомним известную задачу о магическом шестиугольнике Адамса: надо расположить числа от 1 до 19 в ячейках шестиугольника

так, чтобы в любом из трех направлений сумма трех (или четырех, или пяти) слагаемых составляла одно и то же число 38. Поистине чудачки украшают мир! Предлагаем читателю несколько отвлечься от основной темы и закончить решение этой задачи (см. рис. 20).

А теперь сопоставим две аналогичные задачи на плоскости и в пространстве о подсчете числа ячеек в обертываемом шестиугольнике (в обертываемых ромбододекаэдрах) круговыми (сферическими) слоями толщиной в одну ячейку.

Сравним сначала фигуру 2 (обернутый одним слоем шестиугольник) и тело 2 (обернутый одним слоем усеченный октаэдр, имеющий уже форму ребристого ромбододекаэдра). Подсчитаем по рядам и слоям число ячеек.

Ф и г у р а 2		Т е л о 2	
2	(I ряд)	4	2 2
3	(II ряд)	7	2 3 2
2	(III ряд)	4	2 2
Всего: $2+3+2=7$ (ячеек).		Всего: $4+7+4=15$ (ячеек).	

Анализируя полученные таблицы чисел, не-сложно уловить аналогию и дальше написать (уже без модели) числа ячеек в рядах и слоях для следующего обобщения. Обобщим далее решение задачи о подсчетах числа ячеек на фигуру 3 и тело 3 (рис. 75), имеющих по пять параллельных рядов (слоев) ячеек.

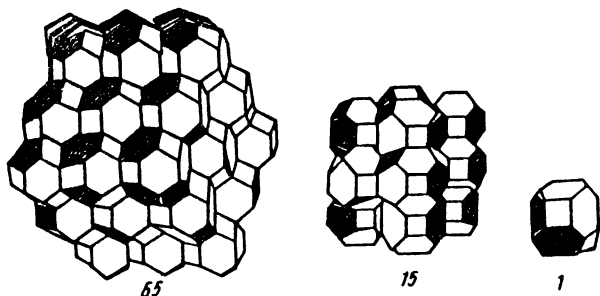


Рис. 75



### Ф и г у р а 3

3	(I)
4	(II)
5	(III)
4	(IV)
3	(V)

Всего:  $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 = 19$ .

### Т е л о 3

9		3	3	3		
14		3	4	4	3	
19	3		4	5	4	3
14		3	4	4	3	
9			3	3	3	

Всего:  $9 \cdot 2 + 14 \cdot 2 + 19 = 65$ .

Примечательно здесь следующее: число ячеек в каждом столбце тела 3 не просто установить дедуктивно, на основе чертежей, без прямого подсчета ячеек в построенной модели. Лишь непосредственное склеивание тела 2 и тела 3 из одинаковых ячеек (усеченных октаэдров) позволило нам прямым построением уловить закон изменения числа ячеек в параллельных столбцах, образующих плоский слой ячеек.

Построим по аналогии таблицы числа ячеек в фигуре 4 и теле 4.

### Ф и г у р а 4

4	(I)	16
5	(II)	23
6	(III)	30
7	(IV)	37
6	(V)	30
5	(VI)	23
4	(VII)	16

Всего: 37.

### Т е л о 4

	4		4		4		4		
	4		5		5		5		4
4		5		6		6		5	4
	5		6		7		6		5
4		5		6		6		5	4
	4		5		5		5		4
		4		4		4		4	

Всего: 175.

Очередная задача: сколько же ячеек в фигуре 5 и теле 5? Так мы приходим к постановке новой проблемы: требуется найти формулу числа ячеек в фигуре  $n$  и теле  $n$  в зависимости от числа  $n$  круговых (сферических) слоев, обернутых около первоначальной ячейки.

Рассуждаем так: число ячеек в  $\frac{\text{фигуре } n}{\text{теле } n}$  представляет  $\frac{\text{квадратичную}}{\text{кубическую}}$  функцию от числа круговых слоев  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} x(n) &= a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \\ &(\text{см. рис. 20}); \end{aligned} \right| \begin{aligned} y(n) &= b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 \\ &(\text{см. рис. 21}). \end{aligned}$$

Применим метод неопределенных коэффициентов, поскольку мы знаем конкретные значения искомых функций для  $n = 1, 2, 3$  (4). Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 = 1 \\ a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 2 + a_3 = 7 \\ a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 3 + a_3 = 19; \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1 + b_3 \cdot 1 + b_4 = 1 \\ b_1 \cdot 8 + b_2 \cdot 4 + b_3 \cdot 2 + b_4 = 15 \\ b_1 \cdot 27 + b_2 \cdot 9 + b_3 \cdot 3 + b_4 = 65 \\ b_1 \cdot 64 + b_2 \cdot 16 + b_3 \cdot 4 + b_4 = 175. \end{cases} \right.$$

Решив систему уравнений для плоскости, имеем:

$$x(n) = 3n^2 - 3n + 1.$$

Проверим для  $n=4$ :  $x(4) = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 37$ , что и должно быть, следовательно, функция  $x = x(n)$  определена верно.

Решив вторую систему уравнений с четырьмя переменными, получаем кубический четырехчлен:

$$y(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

**Проверка:**  $y(5) = 4 \cdot 125 - 6 \cdot 25 + 4 \cdot 5 - 1 = 369$ .

Такой же результат получается при прямом подсчете числа ячеек на модели тела 5:

25  
34  
43 ←  
52 ←  
61 ←  
52 ←  
43 ←

5    5    5    5    5

5    6    6    6    5

5    6    7    7    6    5

5    6    7    8    8    7    6    5

5    6    7    8    9    8    7    6    5

...    7    7    ...

...

и т. д.

И т. д.

**Всего: 369.**

Предлагаем читателю решить самостоятельно аналогичную задачу для определения числа элементарных ячеек в *ребристых усеченных октаэдрах*, порожденных обертыванием сферическими слоями из ячеек ромбододекаэдров исходного ромбододекаэдра. Иначе говоря, требуется найти коэффициенты соответствующей целочисленной функции третьей степени:

$$z(n) = c_1 \cdot n^3 + c_2 n^2 + c_3 n + c_4.$$

29

Читатель согласится с нами, если скажем: информативность задачи о числе ячеек шаровидного тела несомненно выигрывает, когда мы обсуждаем проблему в постоянном сопоставлении с плоскостным аналогом.

Мы снова убеждаемся: пару аналогичных задач решать интереснее, чем изолированные задачи, да еще порознь и в разном логическом обрамлении.

### Комплексные числа и кватернионы

Перейдем к обсуждению комплексных чисел и кватернионов. В высшей алгебре известна следующая цепь обобщений:

1. Действительное число  $a$ .
2. Комплексное число, представляющее линейную комбинацию действительной и мнимой единицы с действительными коэффициентами при них:  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  — действительные числа,  $i^2 = -1$ ).
3. Гиперкомплексное число (или *кватернион*), представляющее собой линейную комбинацию действительной единицы с тремя мнимыми единицами (коэффициенты при них — действительные числа):  $a \cdot 1 + bi + ci + dk$  (рис. 76).

Правило умножения кватернионов является обобщением соответствующего правила умножения ком-

плексных чисел. Сравним правила умножения элементов поля комплексных чисел и поля кватернионов. В матрицах произведений комплексных чисел и кватернионов имеются очевидные сходства, например:  $ii = jj = kk = -1$ .

Есть и различия: хотя и тут соблюдается ассоциативность умножения, но коммутативность для умножения кватернионов теряет силу. Воспользуемся тем, что для обоих понятий существует понятие *нормы*.

Нормой комплексного числа  $a + bi$  является действительное число

$$N = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\text{или } N^2 = a^2 + b^2.$$

Нормой кватерниона  $a + bi + cj + dk$  является действительное число

$$N = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

$$\text{или } N^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Для обоих понятий верна теорема: *норма произведения равна произведению норм*:  $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ .

Возьмем комплексное число с целочисленными коэффициентами  $z = a + bi$ .

Возьмем кватернион с целочисленными коэффициентами  $z = a + bi + cj + dk$ .

Возведем его в  $n$ -ю степень:

$$z^n = (a + bi)^n = d_1 + d_2 i;$$

$$(a + bi + cj + dk)^n = d_1 + d_2 i + d_3 j + d_4 k.$$

Тогда будет выполняться соотношение:

$$N^2(z) = d_1^2 + d_2^2;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

### Примеры

Дано комплексное число  $1 + 2i$ .

1. Найдем квадрат комплексного числа по таблице:

	1	2i
1	1	2i
2i	2i	-4

$$(1 + 2i)^2 = -3 + 4i.$$

Дан кватернион  $1 + 2i - k$ .

1. Найдем квадрат кватерниона по таблице:

	1	2i	0	-k
1	1	2i	0	-k
2i	2i	-4	0	+2j
0	0	0	0	0
-k	-k	-2j	0	-1

Рис. 76

По свойству нормы числа имеем:

$$(1^2 + 2^2)^2 = 3^2 + 4^2, \\ 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

2. Найдем четвертую степень комплексного числа:

$$(1 + 2i)^3 = -11 - 2i, \\ (1^2 + 2^2)^3 = (-11)^2 + (-2)^2, \\ 5^3 = 11^2 + 2^2, \\ (1 + 2i)^4 = -7 + 24i.$$

Значит, должно выполняться опять разложение левой части на сумму двух квадратов:  $5^4 = 7^2 + 24^2$ .

Проверка:  $625 = 49 + 576$ . Этот процесс можно продолжать далее:

$$(1 + 2)^5 = 10 - 55i. \\ \text{Поэтому } 5^5 = 10^2 + 55^2 \\ \text{и т. д.}$$

$$(1^2 + 2^2 + 1^2)^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2.$$

$$6^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2.$$

Предлагаем разложить на сумму трех квадратов:

$$6^3 = \square^2 + \square^2 + \square^2$$

2. Найдем четвертую степень кватерниона:

$$(1 + 2 + 0 - k)^4 = \\ = -4 - 32 + 16k, \\ (1^2 + 2^2 + 1^2)^4 =$$

$$= 4^2 + 32^2 + 16^2,$$

$$6^4 = 4^2 + 32^2 + 16^2.$$

Проверка:

$$1296 = 16 + 1024 + 256.$$

Таким же образом можно найти пятую степень данного кватерниона и так далее.

Предлагаем решить следующие задачи:

1) найти  $(1 + 2i)^6$  и соответственно представить в целых числах равенство  $5^6 = \square^2 + \square^2$ ;

2) найти квадрат кватерниона  $(1 + 2i - 3j + 4k)^2$  и представить в целых числах равенство:  $30^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$  ( $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ ).

**30** Мы видим, что сходные свойства комплексных и гиперкомплексных чисел позволяют составлять занимательные соотношения из теории чисел.

Итак, свойства  $\frac{\text{комплексных чисел}}{\text{кватернионов}}$  позволяют нам последовательные степени какого-то целого числа представлять соответственно в виде суммы  $\frac{\text{двух}}{\text{четырех}}$  квадратов целых чисел, например:

$$\begin{aligned}5^2 &= 3^2 + 4^2, \\5^3 &= \square^2 + \square^2, \\5^4 &= 7^2 + 24^2, \\5^5 &= 10^2 + 55^2,\end{aligned}$$

$$5^n = \square^2 + \square^2;$$

$$\begin{aligned}6^2 &= 4^2 + 4^2 + 0^2 + 2^2, \\6^3 &= \square^2 + \square^2 + \square^2, \\6^4 &= 4^2 + 16^2 + 32^2,\end{aligned}$$

$$6^n = \square^2 + \square^2 + \square^2.$$

Налицо эффективная связь алгебры и теории чисел, найденная методом аналогии. В сущности, нам удалось доказать теорему из теории чисел: любую степень всякой суммы двух (трех, четырех) квадратов всегда можно представить соответственно как сумму двух (трех, четырех) квадратов целых чисел.

### Линейные преобразования прямой линии и плоскости

Немецкий математик Феликс Клейн свою знаменитую книгу\* начинает с трех формул, написанных рядом:

$$I = \frac{1}{1!} \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}; \quad S = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ради соблюдения аналогии форм он придумал необычную запись даже для длины отрезка  $x_1x_2$  на оси  $x$ .

На ум приходит мысль-продолжение: следующий определитель пятого порядка означал бы, вероятно, «объем» четырехмерного симплекса:

$$T = \frac{1}{4!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & 1 \end{vmatrix}.$$

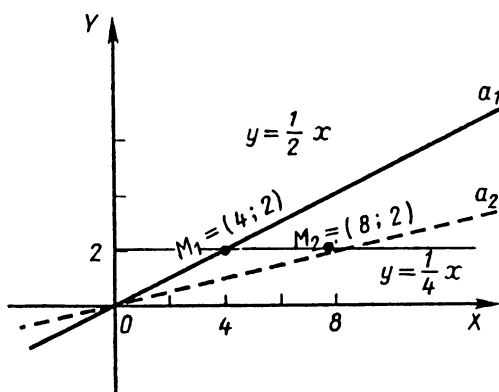
В традиционных курсах аналитической геометрии обычно ограничиваются рассмотрением *движений*, при которых расстояние между соответствующими точками фигуры не изменяется. Между тем имеется несложный путь ознакомления с содержанием красивой теоремы о более общем преобразо-

\* Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. — М., 1990.

вании: линейное (аффинное) преобразование  $\frac{\text{прямой}}{\text{плоскости}}$  эквивалентно произведению  $\frac{\text{двух}}{\text{трех}}$  растяжений вдоль координатных осей.

Доступность усвоения этой парной теоремы, не включенной в действующие программы вузов, получила в нашем опыте неожиданное доказательство: только при одновременном рассмотрении преобразования на координатном пространстве достигается понимание учащимися обоих вопросов, и это — благодаря актуализации механизмов аналогии. Парадокс: порознь — трудно, в сравнении — легко!

Мы ограничимся упрощенным изложением данного вопроса показом сущности линейного преобразования на *конкретных примерах*, при котором рельефно выделяется роль символов, моделей, рисунков (чертежей и чисел как специфических носителей математической информации). Сознательное, глубокое, прочное усвоение знаний означает в информационном плане одновременное функционирование всех кодовых систем мозга, например, при параллельном осмыслении двух- и трехмерных интерпретаций преобразования.



$$R_{Ox}^2(a_1) = a_2$$

$$R_{Ox}^2(M_1) = M_2$$

$$R_{Ox}^2(4; 2) = (8; 2)$$

$$R_{Ox}^2(x_1; b) = (2x_1; b)$$

Рис. 77

Удобно ввести сначала «матрицу растяжения» вдоль одной координатной оси:  $R_{ox}^2(a_1) = a_2$  (рис. 77). Эта запись означает: при *растяжении* (начальная буква  $R$ ) всех точек некоторой линии  $a_1$  вдоль оси  $Ox$  с коэффициентом растяжения  $k=2$  прообраз  $a_1$  преобразуется в образ  $a_2$ .

При введении преобразования растяжения важно обратить внимание на актуализацию противоположных ассоциаций.

Пусть выполняется растяжение  $R_{ox}^k(M_1) = M_2$ ;  $R_{ox}^2(4; 2) = (8; 2)$ . Тогда:

1) чтобы получить координату точки-образа  $M_2(x_2)$ , необходимо координату прообраза  $x_1$  умножить на коэффициент растяжения  $k$ :

точка-прообраз $M_1(x_1);$		точка-образ $M_2(x_2) = kx_1;$
-------------------------------	--	-----------------------------------

2) чтобы получить уравнение линии (поверхности) образа, достаточно в уравнении прообраза координату поделить на коэффициент растяжения:

линия-прообраз $y = f(x);$		линия-образ $y = f\left(\frac{x}{k}\right).$
-------------------------------	--	---

Так, в простейшем случае имеем следующую матрицу растяжения,  $k=2$  (табл. 5).

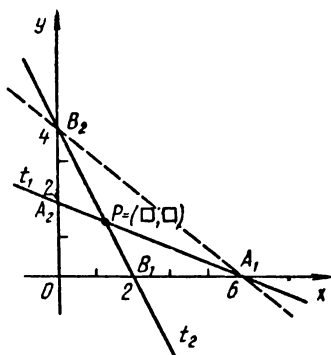
Таблица 5

	Координаты точки	Уравнение прямой
Прообраз	$x_1 = 4; \quad y_1 = 2$	$y = \frac{1}{2} x$
Образ	$x_2 = k \cdot 4; \quad y_1 = 2$	$y = \frac{1}{2k} x$

Напишем в общем виде матрицу произведения растяжений поверхности последовательно вдоль трех координатных осей (рис. 78, 79).

Смысл *линейного преобразования*  $L$  в следующих записях:  $L(\tau_1) = \tau_2$ ;  $L(M_1) = M_2$ . Линейное преобразование поверхности представляется как произведение трех растяжений (табл. 6).

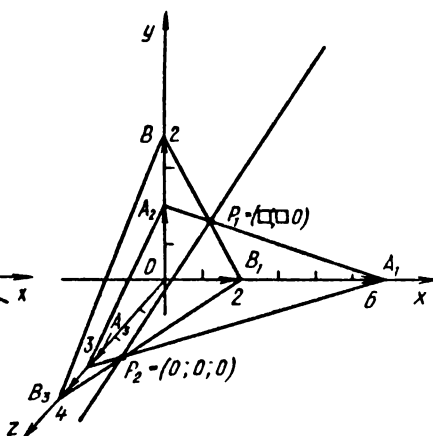




$$\begin{aligned} (t_1 = A_1 A_2) \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} &= 1 \\ (t_2 = B_1 B_2) \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} &= 1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} R_{Oy}^3 \cdot R_{Ox}^2(t_1) &= t_2 \\ L(t_1) &= t_2. \end{aligned}$$

Рис. 78



$$\begin{aligned} (\tau_1 = A_1 A_2 A_3) \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} &= 1 \\ (\tau_2 = B_1 B_2 B_3) \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} &= 1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} R_{Ox}^4 \cdot R_{Oy}^2 \cdot R_{Oz}^3(\tau_1) &= \tau_2 \\ L(\tau_1) &= \tau_2. \end{aligned}$$

Рис. 79

Таблица 6

	Координаты точки	Уравнение поверхности
Прообраз	$M_1 = (x_1, y_1, z_1)$	$F(x, y, z) = 0$
Образ	$M_2 = (k_1 x_1, k_2 y_1, k_3 z_1)$	$F(\frac{x}{k_1}, \frac{y}{k_2}, \frac{z}{k_3}) = 0$

Переходя к векторному толкованию линейного преобразования точек, удобно записать так:

вектор-прообраз

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix};$$

вектор-образ

$$\vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 x_1 \\ k_2 y_1 \\ k_3 z_1 \end{pmatrix},$$

или в виде умножения матриц:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

В учебных курсах связь линейных преобразований с растяжением как элементарным преобразованием обычно не рассматривается.

Сравнение линейного преобразования прямой и плоскости удобно выполнить по символическим записям, помещенным под рисункам (см. рис. 80). Мы изобразили технологию *совместного* изучения линейного преобразования прямой и плоскости (не лишне здесь воспользоваться популярным разъяснением сущности линейного преобразования как такого, когда прямая-прообраз переходит снова в прямую-образ; то же верно и для плоскости).

Освоению учащимися контрапозиции суждений помогает составление матрицы линейного преобразования для конкретной прямой и конкретной плоскости, изображенных в координатах. Найдем координаты произвольной точки  $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , лежащей на плоскости  $\tau_1 = A_1 A_2 A_3$ , данной своим уравнением  $x + 3y + 2z - 6 = 0$ . Пусть  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 1$ ; вычислим соответствующее значение третьей координаты  $z_1$ :

$$x_1 + 3y_1 + 2z_1 - 6 = 0,$$

$$2 + 3 \cdot 1 + 2z_1 - 6 = 0,$$

$$z_1 = 1.$$

Итак, конкретная точка-прообраз найдена:  $M_1 = (2; 1; 1)$ .

Вычислим координаты соответствующей точки-образа:

$$M_2 = (k_1 x_1, k_2 y_1, k_3 z_1),$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{3} x_1, 2y_1, \frac{4}{3} z_1\right),$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2; 2 \cdot 1; \frac{4}{3} \cdot 1\right),$$

$$M_2 = \left(\frac{2}{3}; 2; \frac{4}{3}\right),$$

или

$$L(M_1) = M_2, \quad \left| \quad L(\tau_1) = \tau_2. \right.$$

$$L(2; 1; 1) = \left( \frac{2}{3}; 2; \frac{4}{3} \right);$$

Составим матрицу линейного преобразования точки и плоскости (табл. 7).

Таблица 7

	Координаты точки	Уравнение плоскости
Прообраз	$A_1 = (x_1; y_1; z_1)$ $A_1 = (2; 1; 1)$	$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ $x + 3y + 2z - 6 = 0$
Образ	$A_2 = (k_1x_1; k_2y_1; k_3z_1)$ $A_2 = \left( \frac{2}{3}; 2; \frac{4}{3} \right)$	$\frac{a_1}{k_1}x + \frac{a_2}{k_2}y + \frac{a_3}{k_3}z + a_4 = 0$ $2x + y + z - 4 = 0$

На основе точно построенных плоскостей (прообраза и образа) удобно составлять структурно различные упражнения, например:

1. Построены прямые  $t_1$  и  $t_2$  (прообраз и образ). Найти коэффициенты растяжения  $k_1$  и  $k_2$  по осям  $Ox$  и  $Oy$ .

2. Найти координаты точки пересечения прообраза и образа (неподвижной точки)  $P = t_1 \cap t_2$ .

3. Найти уравнение неподвижной прямой, общей для обеих плоскостей, в виде  $P = \tau_1 \cap \tau_2$ ;  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} =$

$$= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Дидактическим преимуществом рассмотрения одного и того же преобразования, но применительно к плоскости и к пространству, является то, что перенос руководящих ассоциаций и умозаключений совершается в двух направлениях: как от двумерного случая к трехмерному, так и от трехмерной интерпретации к двумерной.

Так, скажем, решая последнее упражнение, сводим решение задачи об уравнениях прямой, распо-

ложенной в пространстве, к нахождению точки пересечения двух прямых на плоскости (см. рис. 78, 79):

$$(A_1A_2; B_1B_2) \in Oxy$$

↓

$$P_1 = A_1A_2 \cap B_1B_2,$$

$$P_1 = a_1 \cap a_2,$$

$$(a_1) \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$(a_2) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1, \end{cases}$$

$$P_1 = (1,8; 0,4; 0).$$

Далее, находим координаты точки-прообраза  $P = (\square; 0; \square)$ .

Остается лишь добавить дидактическое уточнение: на плоскостном рисунке (см. рис. 78) показано линейное преобразование:  $L = R_{Oy}^{k_2} \cdot R_{Ox}^{k_1}$ .

Уместно разъяснить понятие «произведение преобразований» следующим образом:

$$R_{Ox}^{k_1}(t_1) = A_1B_2 = t',$$

$$R_{Oy}^{k_2}(t') = R_{Oy}^{k_2}(A_1B_2) = A_2B_2 = t_2.$$

Нам остается упомянуть, что линейное преобразование координат точек имеет свой удобный формальный аппарат матричного преобразования координат, например:

### 1. Линейное преобразование

$$L = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

### 2. Гомотетическое преобразование

$$R_{Ox}^k \cdot R_{Oy}^k \cdot R_{Ox}^k = G_j^k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Гомотетическое преобразование — это линейное преобразование с одним и тем же коэффициентом растяжения по осям.

3. Симметрия относительно плоскости  $xOy$

$$S_{xOy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Симметрия относительно оси координат

$$S_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Симметрия относительно точки  $O$  (центра):

$$S_o = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последовательное выполнение линейных преобразований точки выражается через произведение соответствующих матриц, например:

$$S_{Ox} \cdot G_0^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Целостность знаний по важнейшему аспекту геометрии — геометрическим преобразованиям достигается, как мы видим, при следующих условиях:

- 1) совместном изучении двух- и трехмерных преобразований;
- 2) одновременном использовании кода слов, чисел, чертежей, символов и моделей;
- 3) получении не только конкретных числовых значений преобразованных точек, но и уравнений преобразованных линий и поверхностей.

### **Разрешать ли аналогию в обучении?**

На пути к освоению умозаключений по аналогии явной преградой в мышлении математика стоит, несомненно, его многолетняя практика проведения строгих рассуждений в точном соответствии

с канонами формальной логики. При всей очевидной необходимости такого «минимума строгости» эта господствующая линия в обучении поневоле создает неосознанные запреты в форме подсознательного избегания аналогии в мыслях вообще.

Замечательный популяризатор математики Мартин Гарднер объясняет психологическую причину «запоздавшего открытия» Морлеем своей знаменитой теоремы (трисектрисы углов треугольника пересекаются в точках, являющихся вершинами правильного треугольника). Теорема эта, конечно, могла быть открыта и за сотни лет до Морлея. Но многим, вероятно, помешала затверженная «логика отрицания»: будущим математикам принято твердить еще со школьных лет, что разделить циркулем и линейкой угол на три части невозможно! Но затем слова «циркуль и линейка»... выпадают! С большой долей уверенности можно полагать, например, что Эйлер, вероятно, «случайно» прошел мимо теоремы, ставшей добычей Морлея через сто лет: ведь Эйлер нашел не менее красивые и впечатляющие соотношения в геометрии треугольника!

Отметим в данной связи следующую пару теорем, между открытием которых прошли два столетия.

Теорема Паскаля  
(1623 — 1662):

в описанном шестиугольнике прямые, соединяющие пары противоположных вершин, проходят через одну точку (рис. 80).

Теорема Брианшона  
(1783 — 1864):

во вписанном шестиугольнике точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой (рис. 81).

После открытия принципа *двойственности* подобные пары суждений стали доказывать совместно.

Применение аналогии на первый взгляд кажется нарушением правил силлогизма или общепризнанных аксиом. В книгах Пойа показано, как Эйлер находил формулы представления числа  $\pi$  в виде рядов вначале «запретными» преобразованиями при кажущемся нарушении канонов математики; убедившись затем конкретными числовыми подстановками

в правильности найденного ряда, он оформлял впоследствии свое открытие, соблюдая строгие правила доказательства.

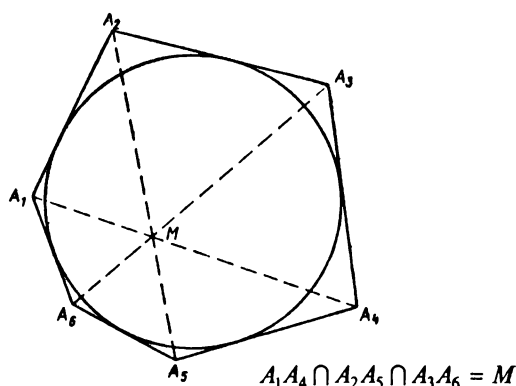


Рис. 80

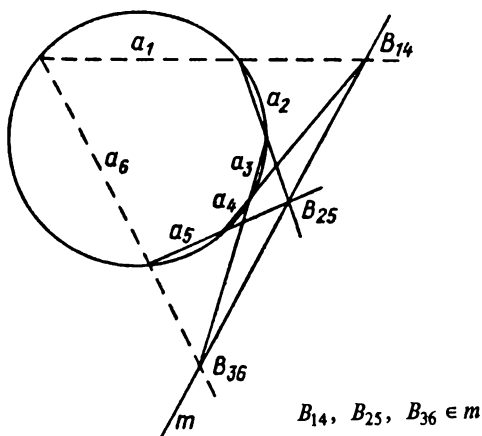


Рис. 81

Если то или иное предложение остается на этапе предположения, то это — не теорема, а гипотеза. Однако суждение, ставшие впоследствии теоремой, носит имя первооткрывателя, сформулировавшего и предложившего ее обществу, а не дока-

завшего (таковы теоремы Морлея, Содди, Эрдеша и др.).

Среди математиков, даже известных, к сожалению, встречаются и излишне осторожные суждения по нашей проблеме. Так, А. Я. Хинчин, известный автор пособий по математическому анализу, писал даже о том, что «... в математике заключения по аналогии категорически запрещены»\*. Но такое суждение появилось в печати незадолго до серьезных публикаций математиков-педагогов Пойа, Сойера, Умова и др. о роли и месте аналогии в математике. Чтобы понять неосторожность суждения Хинчина, рассмотрим следующий пример, приведенный в книге У. Сойера\*\*.

Пусть речь идет о разложении функции  $y = e^x$  в степенной ряд. В курсе математического анализа доказаны следующие формулы:

$$\begin{aligned}(e^x)^x &= e^x, \\ \int e^x dx &= e^x + c, \\ \int_0^x e^x dx &= e^x - 1.\end{aligned}$$

Далее можно условиться писать кратко:  $f = e^x$ , помня в то же время, что речь идет об операции интегрирования:

$$\int f = f - 1. \quad (1)$$

В изложении Сойера основную роль сыграло подмеченное им отдаленное сходство двух «разнокачественных» операций: разложения двучлена на множители и повторного интегрирования:

$$\begin{array}{l|l} 1 - a = 1 - a, & \int 1 dx = x, \\ 1 - a^2 = (1 - a)(1 + a), & \iint 1 \cdot dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2!}, \\ 1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2), & \iiint 1 \cdot dx = \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3!}, \end{array}$$

\* Хинчин А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Повышение эффективности обучения математике в школе. — М., 1989. С. 21.

\*\* Сойер У. Путь в современную математику. — М., 1972.



$$1 - a^4 = (1 - a)(1 + a + a^2 + a^3), \quad \left| \quad \iint \iint 1 \cdot dx = \dots = \frac{x^4}{4!}, \right.$$

Если  $a < 1$ , то при  $n \rightarrow \infty$   $a^n \rightarrow 0$ , поэтому  $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ ; (1 а)

При  $n \rightarrow \infty$  получим:  $\frac{1}{1-\int} = 1 + \int + \iint + \iiint + \dots$ . (1 б)

Строгий читатель усомнится уже в законности двух условных замен, ибо в левой части (1) опущен  $dx$ :

$$\int e^x dx = \int f. \quad (2)$$

Но Сойер усматривает здесь «смысловой контекст»: видя два знака рядом ( $\int f$ ), читатель пусть мыслит их как эквивалент определенного интегрирования, записываемого в полной форме шестью знаками:  $\int_0^x e^x dx$ . Изучающие математический анализ знают, какой сложный и долгий путь претерпело содержание, несомое каждым из этих знаков, фиксируемых на своем месте. Короче говоря, в (1) много противоречий с общепринятым толкованием формулы. Однако подвергнем (1) простейшему арифметическому преобразованию:

$$1 = f - \int f. \quad (3)$$

Далее снова попробуем выполнить нечто необоснованное: вынесем  $f$  за скобки в правой части:

$$1 = (1 - \int) f. \quad (4)$$

Вероятно, этот шаг навеян ассоциативностью интегрирования. Чтобы как-то «оправдать» переход от (2) к (4), Сойер называет его ... *лингвистическим изменением толкования формулы* (2).

Далее выводится следствие:

$$f = \frac{1}{1 - \int}. \quad (5)$$

Заметим, что в записях (3) и (4) «незаметно» появляются все новые единицы. Наделив символ интегрирования  $\int$  такими же «свойствами», что и число  $a$  в разложении дроби на слагаемые (1 а), предположим:

$$f = \frac{1}{1-f} \cdot 1 = (1 + \int + \iint + \iiint + \dots) \cdot 1.$$

Но тут вспомним, что  $\int$  — это все же не число, а символ интегрирования, которое и выполним последовательно, (1 б):

$$f = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Так мы получили известное разложение в ряд знаменитой функции  $y = e^x$ , но — весьма сомнительными операциями:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Разумеется, беседа о разложении в ряд функции  $e^x$  завершается известным алгоритмом ряда Маклорена.

Много «нарушений» общепринятого находит затем оправдание, поскольку результат, полученный подобной «эквilibристкой» на грани допустимого и недопустимого, можно затем обосновать вполне строгими рассуждениями, не нарушая ни на одном шаге строгих правил математического анализа...

Обратим здесь внимание на следующую параллель записей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-a} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \dots, \\ \frac{1}{1-f} &= 1 + \int + \iint + \iiint + \dots \end{aligned}$$

За формальным сходством в записях символов возникает серьезная содержательная новизна!

Приведем еще несколько примеров лингвистических связей преобразований, которые объединяет «исчезновение» среднего элемента:

$$\log_2 8 \cdot \log_8 64 = \log_2 64,$$

$$(A \in b) \wedge (b \subset \beta) = (A \in \beta),$$

$$z'_y \cdot y'_x = z'_x.$$

Но последовательное выполнение одной операции может связать и вполне реальные величины:

$$L = \int_0^{2\pi} R dx = 2\pi R \quad (\text{длина окружности}),$$

$$S = \int_0^R L dx = \int_0^R 2\pi R dx = \pi R^2 \quad (\text{площадь круга}),$$

$$V = \int_0^R S dx = \int_0^R \pi R^2 dx = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{объем шара}),$$

$$\int_0^R V dx = ? \quad (\text{Что это значит?})$$

# ЧИСЛО КАК ЦЕНТР КОНЦЕНТРАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Академик Б. М. Кедров посвятил специальную работу философскому анализу взаимосвязи числа и мысли в истории науки\*. Первооткрыватели законов физики и химии всегда руководствовались в своих экспериментах сопоставлением числовых данных — предполагаемых и экспериментальных; расхождение ожидаемого и реально полученного в опытах помогало им в уточнении исходных посылок об изучаемом явлении и дальнейшем совершенствовании экспериментов. Б.М. Кедров писал: «... число питает мысль, служит пищей для ее работы, для размышлений. Оно подготавливает для нее почву, фактическую основу, не дает возможности ей стать парящей в воздухе, беспочвенной. Число, предположенное мыслью, в случае его последующего обнаружения подтверждает собой правильность того, что мы угадали мыслью».

Число как сосредоточие взаимосвязанных суждений выступает объединяющим фактором и в практике применения правдоподобных умозаключений. Так, в системе обучения математике по технологии УДЕ одно из испытанных средств активизации обучения — это преобразование решенной задачи в обратную.

## Прямая задача

Купили 3 тетради по 200 рублей и резинку за 50 рублей. Сколько стоила покупка?

### Решение:

$$200 \cdot 3 + 50 = 650 \text{ (рублей).}$$

## Обратная задача

Купили резинку за 50 рублей и тетради по 200 рублей. Сколько купили тетрадей, если вся покупка стоила 650 рублей?

### Решение:

$$(650 - 50) : 200 = 3 \text{ (тетради).}$$

Учителям известно, что преобразование число-

\* Кедров Б. М. Число и мысль в истории науки. — М.: 1983.

вого примера в обратный пример доступно каждому школьнику и аксиоматически очевидно.

Сравним три формы записи, выражающие переходы от исходного выражения к производному.

1) На коде конкретных чисел:

$$\begin{aligned} 200 \cdot 3 + 50 &= 650 \\ \downarrow \\ (650 - 50) : 3 &= 200. \end{aligned}$$

2) На коде алгебраических выражений:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4x+6} &= \frac{3}{2(x+3)} \\ \downarrow \\ \left( \frac{3}{2(x+3)} + \frac{1}{4x+6} \right) : \frac{2}{x+3} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Исходное тождество (арифметическое или алгебраическое) преобразуется в производное тождество с теми же компонентами.

3) На обобщенном языке символов:

$$\begin{aligned} a \cdot b - c &= M \\ \downarrow \\ (M + c) : a &= b. \end{aligned}$$

Примечательно здесь следующее: последняя форма, будучи наиболее краткой, но абстрактной, вызывает больше затруднений у учащихся, чем первая конкретная запись. Чтобы безошибочно записать преобразование на коде букв, важно в уме восстановить связь понятий, выраженных конкретными числами.

### **Опыты, проводимые на уроках математики**

Педагоги-математики давно обратили внимание на исключительное значение *пропедевтики* знаний, которая осуществляется задолго до изучения «чистой» математики посредством грубых прикидок, на основе округления приближенных чисел (добытых не вычислением, а измерениями построенных фигур) или испытания некоторых формул в ходе соответствующих наблюдений.

Изучая линейные уравнения в 7 классе, вполне возможно провести опыт по уравнению теплового баланса: посредством смешения жидкостей разной температуры и массы возможно «предвычислить» ожидаемую температуру смеси:

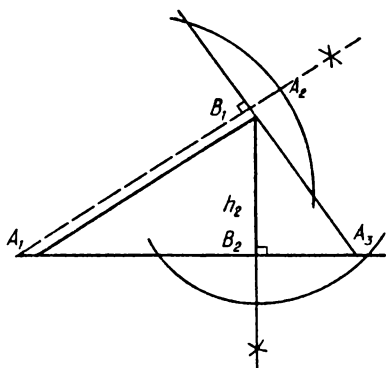
$$\frac{m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2}{m_1 + m_2} = t_{\text{ср}}.$$

При изучении понятия обратной пропорциональности нет ничего проще и полезнее провести наблюдения и вычисления по равновесию рычага.

Во всех подобных случаях проявляется малоизученное психологами явление так называемого *феномена ожидания*, а именно факта возникновения приятного *чувства комфорта* при получении в результате опыта (или даже решения задачи каким-то другим способом) ожидаемого ответа.

Особенно ценно в обучении решение геометрических задач двумя способами. В связи с внедрением компьютеров в практику обучения возникают совершенно новые возможности эстетического развития учащихся. Несложно, например, научить без всякого теоретического обсуждения уже пятиклассника алгоритму опускания перпендикуляра из точки на прямую с помощью циркуля и линейки (рис. 82). Выполнив эти точные построения на листе бумаги, затем измеряем в миллиметрах длины сторон и высот. Перемножив полученные многозначные числа на калькуляторе и округлив их, пятиклассник не может не удивиться близости двух произведений! Формула площади треугольника пусть будет строго доказана через год!

Представляет несомненный интерес лабораторная работа по нахождению высоты произвольного тетраэдра — построениями на плоскости (рис. 83). Пусть построена развертка двух смежных граней тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  вокруг ребер  $A_1A_3$  и  $A_2A_3$ . С помощью циркуля и линейки строим  $B_1M_1 \perp A_2A_3$ , а также  $B_2M_2 \perp A_1A_3$ . В пересечении двух нормалей находим построением основание  $H$  высоты тетраэдра  $A_4H$ . Реальную длину высоты тетраэдра  $h = A_4H$  можно найти как вычислением (по теореме Пифагора), так и построением прямоугольных треугольников.

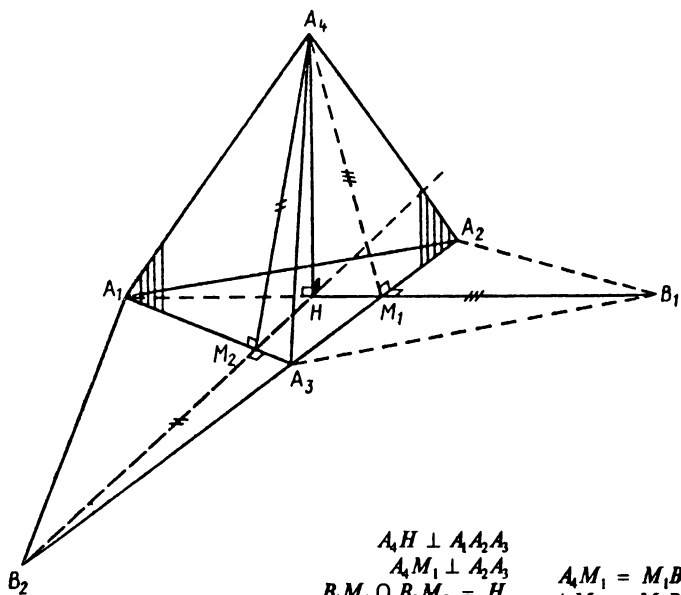


$$\begin{aligned} h_1 &= A_2B_1 \\ h_2 &= A_2B_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= A_2A_3 \\ a_2 &= A_1A_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1h_1 &= a_2h_2 \\ \downarrow \\ \frac{a_1h_1}{a_2h_2} &= 1 \end{aligned}$$

Рис. 82



$$\begin{aligned} A_4H &\perp A_1A_2A_3 \\ A_4M_1 &\perp A_2A_3 \\ B_1M_1 \cap B_2M_2 &= H \\ A_4H &= h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4M_1 &= M_1B_1 \\ A_4M_2 &= M_2B_2 \end{aligned}$$

$$h = \sqrt{A_4M_1^2 - HM_1^2} = \sqrt{A_4M_2^2 - HM_2^2}$$

Рис. 83

Психологически важно здесь получить близкие значения высоты двумя способами! В этом и заключается поучительный момент лабораторной работы, которая, кстати, была навеяна нам ее прототипом, то есть такой же работой для треугольника (см. рис. 82).

Рассуждения, сопровождающие выполнение лабораторной работы, описаны последовательностью преобразований, записанных под рисунком.

В старших классах данную лабораторную работу возможно обобщить, определяя объем тетраэдра общего вида двумя способами. При наличии калькулятора несложно вычислять приближенные значения площади треугольных граней тетраэдра по формуле Герона.

### Теорема Гульдена на занятиях по математическому анализу

Вспомним следующие известные формулы школьной геометрии:

длина половины окружности  $l = \pi R$ ,

площадь полукруга  $\sigma = \frac{\pi R^2}{2}$ ,

поверхность сферы  $S = 4\pi R^2$ ,

объем сферы  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

Для краткости рассуждений буквами, записанными слева, мы будем обозначать также и соответствующие линии, поверхности и тела.

Гульден установил два следующих правила, доказываемые в разделе интегрального исчисления:

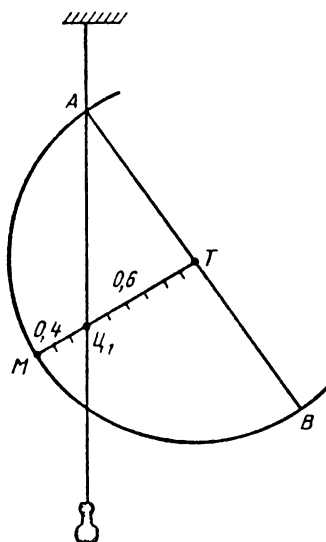
Пусть плоская линия длины  $l$  лежит в одной плоскости с осью вращения  $AB$  (рис. 84).

Если вращать эту линию вокруг оси  $AB$ , то площадь образовавшейся поверхности вращения равна произведению зна-

Пусть плоская ограниченная фигура площади  $\sigma$  лежит в одной плоскости с осью вращения  $AB$  (рис. 85).

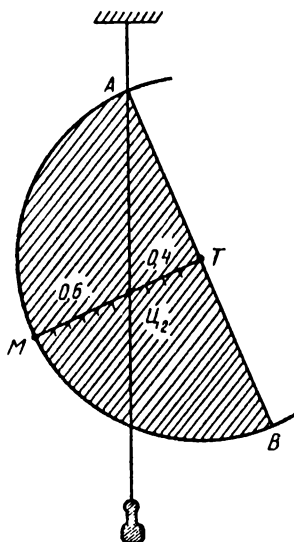
Если вращать фигуру площади  $\sigma$  вокруг оси  $AB$ , то объем образовавшегося тела вращения  $V$





$$\begin{aligned}
 MT &= R \\
 C_1 T &\perp AB \\
 \rho_1 &= C_1 T \approx 0,6 R
 \end{aligned}$$

Рис. 84



$$\begin{aligned}
 MT &= R \\
 C_2 T &\perp AB \\
 \rho_2 &= C_2 T \approx 0,4 R
 \end{aligned}$$

Рис. 85

чения длины линии на число  $2\pi\rho_1$ , где  $\rho_1$  — расстояние центра тяжести линии  $C_1$  от оси вращения  $AB$ .

Пример:

Если полуокружность вращается вокруг диаметра  $AB$ , то она описывает полную сферу с поверхностью  $S = 4\pi R^2$ .

$$W_{AB} \text{ (полуокружность) } = \text{сфера}$$

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 S &= l \cdot 2\pi\rho_1 \\
 &\downarrow \\
 4\pi R^2 &= l \cdot 2\pi\rho_1 \\
 &\downarrow
 \end{aligned}$$

равен произведению площади фигуры  $\sigma$  на  $2\pi\rho_2$ , где  $\rho_2$  — расстояние центра тяжести фигуры  $C_2$  от оси вращения  $AB$ .

Пример:

Если полукруг  $\sigma = \frac{\pi R^2}{2}$  вращается вокруг диаметра  $AB$ , то он заматывает полный шар с объемом

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$W_{AB} \text{ (полукруг) } = \text{шар}$$

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 V &= S \cdot 2\pi\rho_2 \\
 &\downarrow
 \end{aligned}$$

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi\rho_1$$

$$\downarrow$$

$$\rho_1 = \frac{2R}{\pi} \approx \frac{2}{3,14} R \approx 0,6R.$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi\rho_2$$

$$\downarrow$$

$$\rho_2 = \frac{4R}{3\pi} \approx \frac{4R}{3 \cdot 3,14} \approx 0,4R.$$

**32** Финалом данной лабораторной работы является проверка опытом положения центра тяжести полуокружности и полукруга в долях одного радиуса.

Опыт этот выполнить чрезвычайно просто. Выгнув из ровной проволоки кольцо, складываем его надвое; полуокружность стягивается диаметром  $AB$ . Как известно, центр тяжести  $C$  фигуры находится в точке пересечения двух положений линии подвеса; фигура при этом подвешивается дважды за разные точки. В нашем случае одна такая линия — это ось симметрии — радиус, делящий пополам фигуру. При аккуратном проведении опыта получаем с хорошим приближением расстояния центров тяжести от оси вращения.

Мы здесь уже не говорим о проверке теоремы Гульдена для объема, когда при вращении прямоугольника вокруг сторон образуются цилиндры, объемы которых легко вычислить *двумя способами*: по обычной формуле объема цилиндра  $V = S \cdot h$  и используя теорему Гульдена (рис. 86). Та же задача становится еще более интересной, если вращается прямоугольный треугольник попеременно вокруг каждого из катетов (рис. 87).

Теорема Гульдена — одна из немногих в математике, позволяющих провести столь убедительную проверку на опыте числовых результатов, вычисленных вначале теоретически (интегрированием). После выполнения лабораторной работы становится понятно, сколь различны понятия «центр тяжести линии (полуокружности)» и «центр тяжести сплошной фигуры (полукруга)». Пропедевтическое ознакомление с теоремами Гульдена вполне оправдано уже в 8—9 классах.

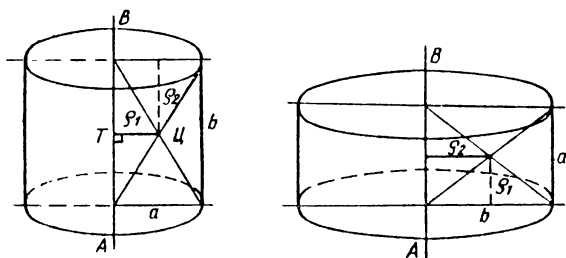


Рис. 86

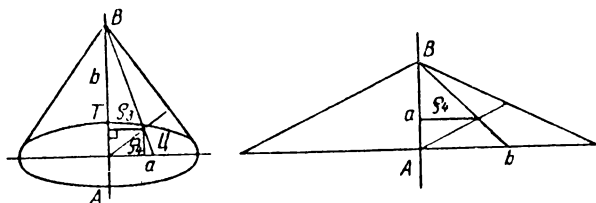


Рис. 87

## От уравнения — к неравенству

Размерность пространства, в котором разворачивается геометрия, проявляется «неожиданно», в коэффициентах соответствующих уравнений и неравенств: одномерное пространство — это точки прямой, двумерное пространство — точки плоскости (две координаты), трехмерное пространство — точки с тремя координатами.

Нельзя, конечно, полагать, что обобщение того или иного суждения с плоскости на пространство всегда приводит к успеху. Например, не всякое суждение о свойстве треугольника находит свое воплощение в геометрии тетраэдра. Однако даже получение отрицательного результата в теореме, отнесенной к пространству, само по себе является приращением суммы математических знаний. Приведем пример.

В планиметрии доказана теорема о прямой Симпсона: если из точки окружности, описанной около треугольника, опустить высоты на стороны треугольника (или на их продолжения), то основания высот окажутся на одной прямой (рис. 88). Доказательство этой теоремы содержится в большинстве пособий. Возникает привычное желание обобщить теорему на тетраэдр, коль скоро около любого тетраэдра возможно также описать сферу, а затем из произвольной точки этой сферы опустить четыре перпендикуляра на противоположащие грани тетраэдра (рис. 89), подобно тому, как три точки могут лежать на одной прямой, так и четыре точки могут лежать в одной плоскости.

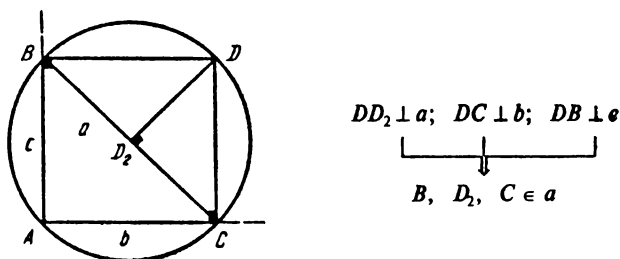
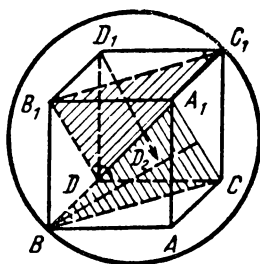


Рис. 88



$$D_1D_2 \perp \delta; D_1B_1 \perp \gamma; D_1C_1 \perp \beta; D_1D \perp \gamma$$

Но  $D_2, B_1, C_1, D \notin \delta$

Рис. 89

Итак, есть основания для формулирования следующей *гипотезы*: если около тетраэдра описана

сфера и из произвольной точки сферы опущены перпендикуляры на грани тетраэдра, то основания этих перпендикуляров лежат на одной плоскости. Хотя эта гипотеза при проверке не подтверждается, сам процесс опровержения тоже учит мыслить.

Чтобы опровергнуть утверждение, достаточно привести хотя бы один контрпример. Можем начать с «прикидки», а именно с проверки обеих теорем на простейших фигурах: прямоугольном равнобедренном треугольнике и таком же тетраэдре (пусть даже теорема еще не доказана для плоскости).

Доказательство теоремы о прямой Симпсона предоставляем читателю. Рассмотрим обобщение на пространство для простейшего случая. Опишем окружность около квадрата  $ABCD$  и сферу около куба  $ABC...D_1$  (см. рис. 89). Это означает, что окружность (сфера) описана соответственно около прямоугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  (или квадрата  $ABCD$ , что одно и то же) и прямоугольного тетраэдра  $ABCB_1$  (или куба  $ABC...D_1$ ).

Нетрудно видеть, что в первом случае проекции вершины квадрата  $D$  (то есть точки описанной окружности) на стороны треугольника  $ABC$  действительно располагаются на одной прямой (гипотенузе треугольника  $BC$ ). Совершенно иное получается во втором случае: проекции точки  $D_1$ , лежащей на сфере, описанной около тетраэдра  $B_1ABC$  (т. е. проекции вершины куба), на три взаимно перпендикулярные грани тетраэдра образуют плоскость  $DC_1A_1$ ; а проекция этой же точки на четвертую грань  $AB_1C$  (точка  $D_2$ ) оказывается вне этой плоскости.

Итак, прямая Симпсона существует, но «плоскости Симпсона» не существует! Читатель согласится с нами: уметь опровергнуть некоторые свои предположения тоже обогащает комплекс наших знаний.

Мы выше обращали внимание на такое соответствие: радиус  $\frac{\text{сферы}}{\text{окружности}}$   $R$ , описанной около правильного  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$ , больше соответствующего радиуса  $r$  вписанной в него  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$  в  $\frac{\text{два}}{\text{три}}$  раза.

Сравнивая радиусы для общего случая, получаем пару предложений (табл. 8).

Таблица 8

	Треугольник	Тетраэдр
Правильная фигура	$R = 2r$	$R = 3r$
Общий случай	$R \geq 2r$	$R \geq 3r$

**33** Итак, приведенная четверка соотношений — доказанные истины. Проблема заключается в том, чтобы их совместить.

Перебирая исторические задачи о треугольнике, мы заметили следующую *теорему Карно*: в остроугольном треугольнике сумма радиусов описанной и вписанной окружностей равна сумме расстояний от центра описанной окружности до его сторон. Немедленно возникла ассоциация с применением этого утверждения к тетраэдру.

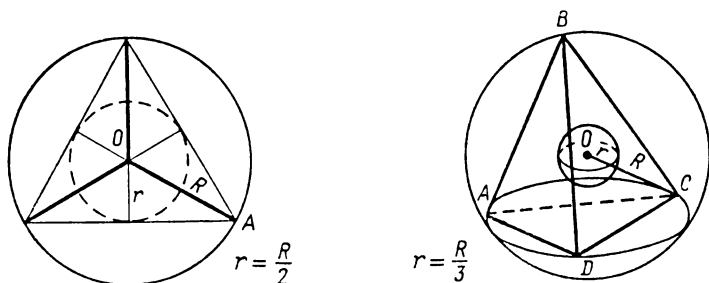


Рис. 90

Начнем с проверки теоремы для правильного треугольника и тетраэдра (рис. 90). Здесь мы получаем многообещающий результат, а именно, верна пара суждений:

для правильного  
треугольника

$$\begin{aligned} R &= 2r, \\ h_1 &= h_2 = h_3 = r, \\ R + r &= h_1 + h_2 + h_3 \\ &\quad (\text{но } h_i = r). \end{aligned}$$

Значит,  $2r + r = r + r + r$ ;

для правильного  
тетраэдра

$$\begin{aligned} R &= 3r, \\ h_1 &= h_2 = h_3 = h_4 = r, \\ R + r &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \\ &\quad (\text{но } h_i = r). \end{aligned}$$

Значит,  $3r + r = 4r$ .

Выходит, что для правильного тетраэдра верно утверждение Карно. Однако Карно не занимался тетраэдром!

Итак, мы получили собственный *результат* (хотя бы для правильного тетраэдра). Однако радоваться ... рано! Проверка обобщенного соотношения для простейшего случая (прямоугольного тетраэдра) приводит к неравенству  $R + r \leq h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ , которое, возможно, верно и для тетраэдра общего вида. Это неравенство назовем *гипотезой Карно—Эрдниевых* (КЭ).

Гипотеза КЭ появилась благодаря теореме Карно. И неподтвердившиеся аналогии приносят нам приращение знания, содействуя появлению правдоподобных суждений.

Геометрам известна красивая *теорема Эйлера*: пусть около треугольника описана окружность  $O(R)$  и в него вписана окружность  $W(r)$ . Тогда квадрат расстояния между их центрами равен квадрату радиуса описанной окружности без удвоенного произведения радиусов этих окружностей:

$$OW^2 = R^2 - 2Rr. \quad (1)$$

Обратим внимание на следующее. В правильном треугольнике тетраэдре центры описанной и вписанной окружностей сфер совпадают, и потому имеем:

Предположим,

$0 = R^2 - 2Rr, \quad R = 2r$ <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <math>\underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow}</math>  <math>0 = 4r^2 - 4r^2.</math> </div>	$0 = R^2 - kRr, \quad R = 3r$ <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <math>\underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow}</math>  <math>0 = 9r^2 - k3r^2,</math>  <math>k = 3.</math> </div>
---	---

Итак, «приоткрыв дверь» к правильному тетраэдру, мы немедленно «наскакиваем» на гипотетическое соотношение для тетраэдра:

$$OW^2 = R^2 - 3Rr. \quad (2)$$

Однако маловероятно, чтобы гипотетическое равенство (2) было верно для всех тетраэдров: вряд ли мимо него прошел Эйлер! Но сопоставление правильных фигур дало нам новую информацию: мы нашли значение коэффициента ( $k=3$ ) для предполагаемого равенства (2).

Частным случаем для испытания выберем равнобедренный прямоугольный тетраэдр, у которого все боковые ребра единичной длины взаимно перпендикулярны. Несложные вычисления дают значения:

$WO = \frac{1}{2}$ ;  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $r = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ . Подставив их в обе части (2), имеем:

$$(WO)^2 \geq R^2 - 3Rr,$$

$$\frac{1}{4} \geq \frac{6 - 3\sqrt{3}}{4},$$

$$WO^2 \geq R^2 - 3Rr, \quad (\Theta)$$

$$R + r \leq h_1 + h_2 + h_3 + h_4. \quad (\text{К}\Theta)$$

Итак, благодаря формуле Эйлера для треугольников (1) нам удалось написать гипотетическое **35** *неравенство Эрднеевых* ( $\Theta$ ) для тетраэдров, подтвердившееся, по крайней мере, для двух частных случаев.

Приведем еще несколько примеров задач, найденных нами в разных книгах; читатель убедится, что благодаря лишь соединению их в двойственной фразе возникает мысль-новообразование, которую можно обозначить философским термином «целостность знания». Вот один из примеров:  $\frac{\text{площади}}{\text{объемы}}$  двух  $\frac{\text{треугольников}}{\text{тетраэдров}}$  с общим  $\frac{\text{плоским}}{\text{трехгранным}}$  углом относятся как произведения их сторон, образующих этот угол (рис. 91).

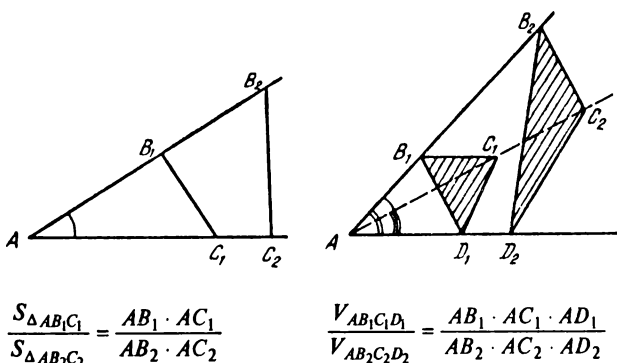


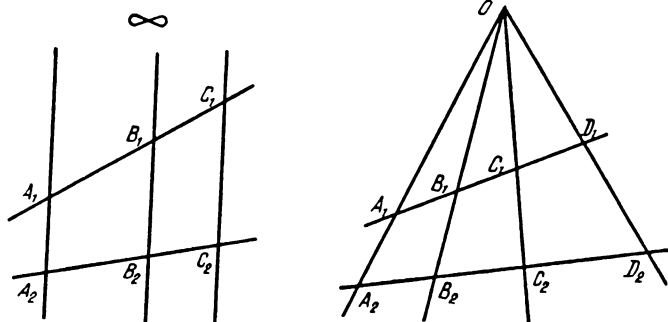
Рис. 91



Мы уже упоминали в этой книге афоризм Карно: «Знаки умнее нас». Предлагаем проверить самим это утверждение, для него достаточно перевести на словесный код следующую информацию, заключенную в рисунках и символах. Требуется обосновать по символическим записям следующий тезис:

**36** Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, но не наоборот (рис. 92).

Под чертежами подписано соотношение, характеризующее постоянство двойного отношения четырех точек. Параллельное проецирование есть центральное проецирование, полюсом которого является бесконечно удаленная точка.



$$A_1 A_2 \parallel B_1 B_2 \parallel C_1 C_2$$



$$C_1 \frac{A_1}{B_1} = C_2 \frac{A_2}{B_2}$$

Простое отношение  
трех точек

$$A_1 A_2 \cap B_1 B_2 \cap C_1 C_2 \cap D_1 D_2 = 0$$



$$C_1 \frac{A_1}{B_1} : D_1 \frac{A_1}{B_1} = C_2 \frac{A_2}{B_2} : D_2 \frac{A_2}{B_2}$$

Двойное отношение  
четырёх точек

Рис. 92

# Беседа 8

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА.

### ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

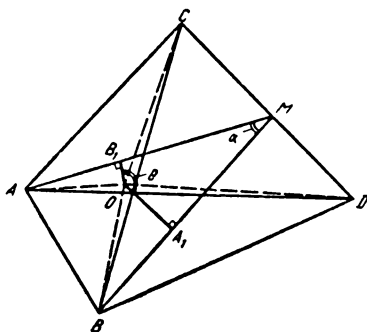
Торричелли точка — точка  $M$  треугольника  $ABC$ , обладающая тем свойством, что сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника  $AM + BM + CM$  минимальна\*.

**37** Как мы видим из приведенного определения, с именем Торричелли связано решение задачи для *трех точек плоскости*. Не повезет ли нам с этой задачей, если обобщим ее на *четыре точки пространства*?

Таким «минимальным» свойством обладает точка треугольника, из которой стороны треугольника видны под равными углами  $120^\circ (\frac{2}{3} \text{ радиана})$ . Сумма расстояний от этой точки  $M$  до вершин треугольника меньше, чем от любой иной точки  $X$ .

Будем различать следующие «рабочие» понятия:

- а) равные трехгранные углы, т.е. углы, составленные из соответственно равных плоских углов;
- б) правильные трехгранные углы.



$$AB = BD = BC = 1$$

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$CM = MD = \frac{1}{2}$$

Рис. 93

\* Математика в понятиях, определениях и терминах. Ч. II. — М., 1982. С. 271.

Разъясним второе понятие (рис. 93). Из центра  $O$  правильного тетраэдра  $ABCD$  опустим четыре равные высоты  $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$  на грани тетраэдра (углы между ними равны). Вокруг прямой  $OA$ , например, образуются три плоскости  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $OAD$ , которые друг с другом образуют двугранные углы в  $120^\circ$  (это же верно и относительно  $OA$ ,  $OC$ ,  $OD$ ).

Итак, пространство вокруг точки  $O$  будет разбито на четыре *равных* трехгранных угла, опирающихся на грани тетраэдра. Трехгранный угол, образованный тремя двугранными углами с общей вершиной, каждый в  $120^\circ$ , назовем для удобства *правильным* трехгранным углом.

Правильный трехгранный угол характеризуется равными плоскими углами его граней. Найдем величину этого плоского угла; для этого опишем около правильного тетраэдра  $ABCD$  сферу с центром в точке  $O$ . Примем длину ребра тетраэдра за 1. Очевидно, каждая грань правильного тетраэдра видна из его центра под правильным трехгранным

углом величиной в  $\frac{4\pi}{4} = \pi$  стерadians. (Вспомним:

площадь поверхности сферы  $4\pi R^2$ , а телесный угол в 1 стерадиан вырезает из сферы четвертую

часть площадью  $\frac{4\pi R^2}{4} = \pi R^2$ .) Каждая тройка из четырех высот, опущенных на грани правильного тетраэдра, также образует правильный трехгранный угол.

Итак, плоский угол правильного трехгранного угла равен углу между двумя высотами, опущенными на грани правильного тетраэдра.

Построим плоскость  $OA_1B_1$ , которая перпендикулярна ребру  $CD$  и проходит через середину этого ребра (через точку  $M$ ). В четырехугольнике  $OA_1MB_1$  два угла прямые. Значит, сумма двух других углов составляет  $180^\circ$  (см. рис. 93):  $\theta + \alpha = 180^\circ$  ( $\theta = \angle B_1OA_1$ ). В этом равенстве угол  $\theta$  — искомый плоский угол правильного трехгранного угла и угол  $\alpha$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $CD$  правильного тетраэдра, измеряющий этот двугранный угол.

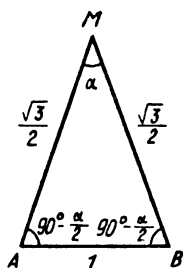


Рис. 94

Угол  $\alpha$  найдем из равнобедренного треугольника  $AMB$  (рис. 94). В треугольной грани  $BCD$  имеем:  $BD = BC = CD = 1$ ,  $MD = \frac{1}{2}$ , тогда  $BM = \sqrt{BD^2 - MD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Итак, в равнобедренном треугольнике  $AMB$  известны три стороны:  $AM = MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $AB = 1$ . По теореме синусов,

$$\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

↓

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \cos \frac{\alpha}{2}$$

↓

$$\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

↓

$$\cos \frac{\alpha}{2} (\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} - 1) = 0.$$

1)  $\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$  (не подходит);

2)  $\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 36^\circ$ ,  $\alpha \approx 72^\circ$ ,

$\theta = 180^\circ - \alpha \approx 108^\circ$ .

$$\text{Итак, } \alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \theta = \pi - 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \arccos \left(-\frac{1}{3}\right).$$

Так мы приходим к эквивалентному определению правильного трехгранного угла как образованного тремя плоскими углами величиной  $\theta = \arccos \left(-\frac{1}{3}\right) \approx 108^\circ$ .

Таким образом, мы приходим к трем эквивалентным определениям правильного тетраэдра, у которого выполняется одно из следующих условий:

- 1) все ребра равны;
- 2) все плоские углы на гранях равны  $60^\circ$ ;
- 3) все двугранные углы при ребрах  $\approx 72^\circ$ .

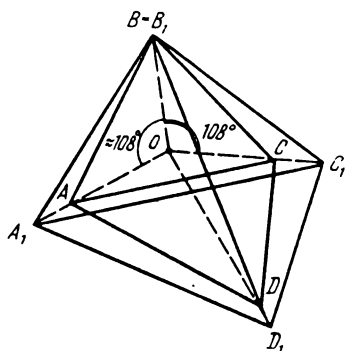
Нетрудно показать, что существуют неправильные тетраэдры, которые можно также расsects на четыре правильных трехгранных угла.

Пусть точка  $O$  — центр правильного тетраэдра  $ABCD$  (т.е. центр описанной около него сферы). На прямых  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  возьмем произвольные точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  и соединим их друг с другом (рис. 95). Итак, тетраэдр  $A_1B_1C_1D_1$ , не являющийся правильным, разбит на четыре правильных трехгранных угла, имеющих общую вершину  $O$ . Поучительно исследовать противоположную проблему: какие тетраэдры *невозможно* разбить на 4 правильных трехгранных угла?

Докажем, что если из точки  $T$ , расположенной в плоскости треугольника, все его стороны видны под равными плоскими углами, то эта точка есть точка Торричелли с минимальной суммой расстояний до вершин треугольника тетраэдра.

Сначала рассмотрим алгоритм построения такой точки  $T$ , а потом докажем ее минимальное свойство. Пусть дан  $\triangle A_1A_2A_3$ . Построим окружность  $O_1(R_1)$ , у которой хорда  $A_2A_3$  стягивает дугу, равную  $120^\circ$ :

$\cup A_2 A_3 = 120^\circ$ . Аналогично построим окружность  $O_2(R_2)$ , у которой хорда  $A_1 A_3$  стягивает дугу, также равную  $120^\circ$ :  $\cup A_1 A_3 = 120^\circ$ . Пусть эти окружности пересекаются в точке  $T$ :  $O_1(R_1) \cap O_2(R_2) = T$ . Из точки  $T$  стороны  $\Delta A_1 A_2 A_3$  видны под равными углами в  $120^\circ$ .



$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA \approx 108^\circ$$

$\downarrow \uparrow$

$$AB = AD = AC = BD = CD = BC$$

$\downarrow \uparrow$

$$\widehat{O.ABC} = \widehat{O.BCD} = \widehat{O.CDA} = \widehat{O.DAB}$$

Рис. 95

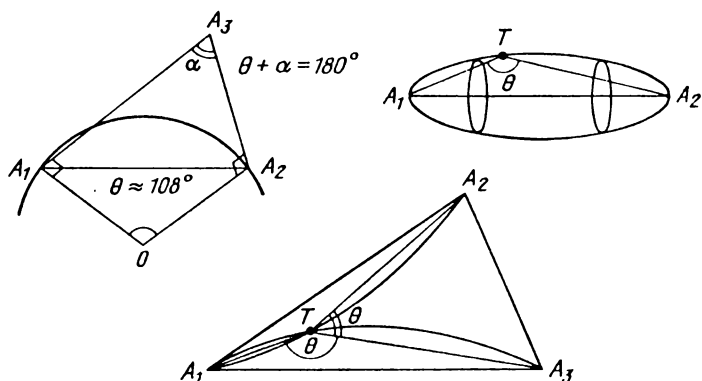


Рис. 96

Пусть теперь дан некоторый тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ . Рассмотрим ребра его основания  $A_1A_2A_3$ . Построим вначале окружность, имеющую хорду  $A_1A_2$ , причем чтобы хорда стягивала дугу, равную углу  $\theta = \arccos(-\frac{1}{3}) \approx 108^\circ$  (рис. 96). Так же поступим и с двумя другими дугами.

Рассмотрим далее поверхности вращения, образованные при вращении  $\cup A_1A_2$  вокруг хорды  $A_1A_2$  (аналогично поступим и с двумя другими дугами):  $\sigma_1 = W_{A_2A_3}(\cup A_1A_2)$ ,  $\sigma_2 = W_{A_1A_3}(\cup A_1A_2)$ ,  $\sigma_3 = W_{A_2A_1}(\cup A_2A_3)$  ( $W$  — символ вращения линии в пространстве).

Пусть три поверхности вращения пересекаются в точке  $T$ :  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3 = T$ . Очевидно, что трехгранный угол  $T$ , опирающийся на грань  $A_1A_2A_3$ , будет правильным (см. рис. 96).

Чтобы три других трехгранных угла тоже были правильными, достаточно построить в пространстве два равных плоских угла при общей вершине  $T$ :

$\widehat{A_4TA_1} = \widehat{A_4TA_2} = \widehat{A_4TA_3} = \theta$ . Если вершина  $A_4$  не удовлетворяет этому условию, то тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  не имеет искомой точки  $T$ .

Докажем следующие две теоремы.

Если стороны треугольника видны из точки  $T$  под равными плоскими углами в  $120^\circ$ , то точка  $T$  является точкой Торричелли треугольника.

Если грани тетраэдра видны из точки  $T$  под правильными трехгранными углами в  $\pi$  стерадиан, то точка  $T$  является «точкой Торричелли тетраэдра».

Сначала докажем лемму: сумма расстояний от точки правильного  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$  до его  $\frac{\text{сторон}}{\text{граней}}$  постоянна.

Пусть  $\triangle ABC$  — правильный (см. рис. 97, а). Доказательство леммы показано следующей цепью суждений:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_{\triangle ABC}$$

↓

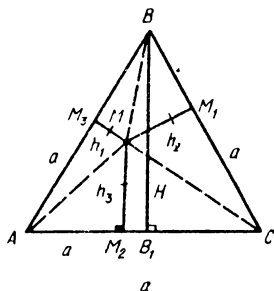
$$\frac{1}{2} ah_1 + \frac{1}{2} ah_2 + \frac{1}{2} ah_3 = \frac{1}{2} aH$$

↓

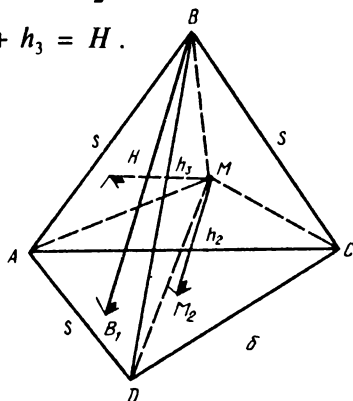
$$\frac{1}{2} a (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{2} aH,$$

или

$$h_1 + h_2 + h_3 = H.$$



$BB_1 \perp AC$   
 $MM_1 = h_1, MM_1 \perp a_1$   
 $h_1 + h_2 + h_3 = H = BB_1$   
 $AB = BC = CA = a$



$BB_1 \perp (ACD)$   
 $MM_1 \perp \alpha_1$   
 $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = H$   
 $S = S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDA} = S_{BDA}$

Рис. 97

Доказательство леммы для тетраэдра совершенно такое же (рис. 97, б). Пусть  $V = V_{ABCD} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} SH$ . Тогда

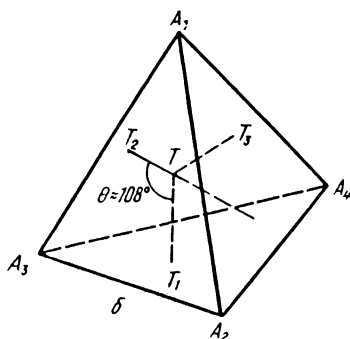
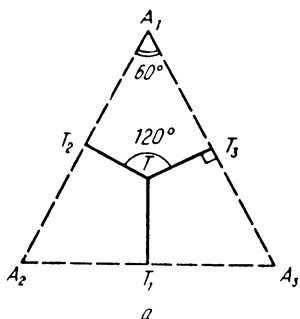
$$\frac{1}{3} Sh_1 + \dots + \frac{1}{3} Sh_4 = \frac{1}{3} SH,$$

↓

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = H.$$

Дальше проведем совмещенное доказательство обеих теорем. Пусть на плоскости взята точка  $T$ ; с общей вершиной в точке  $T$  построим три равных плоских угла, четыре правильных трехгранных угла, опирающиеся на стороны треугольника (рис. 98).





$$A_1A_2 = a_3 \\ TT_1 \perp a_1$$

$$TT_1 \perp \alpha_1 \\ A_1A_2A_3 = \alpha_4$$

Рис. 98

Для этого плоские углы между соседними отрезками должны равняться:

$$\widehat{TT_1TT_2} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ; \quad \left| \quad \widehat{TT_1TT_3} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 108^\circ.$$

Проведем через основания отрезков  $TT_i$  прямые плоскости, перпендикулярные к этим отрезкам. Введем краткие обозначения:

Сторона  $A_2A_3 = a_1$  (так как она лежит *против* вершины  $A_1$  треугольника) и т. п.;

$$TT_1 \perp \alpha_1;$$

$T_1 \in \alpha_1$  и т. п.

Докажем, что  $A_1A_2A_3$  — правильный. В самом деле, в четырехугольнике  $TT_2T_3A_1$  сумма трех углов  $300^\circ$ ;

Плоскость  $A_2A_3A_4 = \alpha_1$  (так как эта плоскость лежит *против* вершины  $A_1$  тетраэдра) и т. п.;

$$TT_1 \perp \alpha_1 \quad \left| \quad TT_2 \perp \alpha_2 \right. \\ T_1 \in \alpha_1 \quad \left| \quad T_2 \in \alpha_2.$$

Проведем плоскость  $\beta_{12} = (TT_1T_2)$ , которая перпендикулярна к обоим граням, значит, она перпендикулярна к линии пересечения данных граней:

$$\beta_{12} \perp \alpha_1, \quad \beta_{12} \perp \alpha_2, \quad \alpha_1 \cap \alpha_2 = A_3A_4$$

$$\downarrow \\ \beta_{12} \perp A_3A_4.$$

Пусть  $\beta_{12} \cap A_3A_4 = B_{34}$ . В плоскости  $\beta_{12}$  расположен четырех-

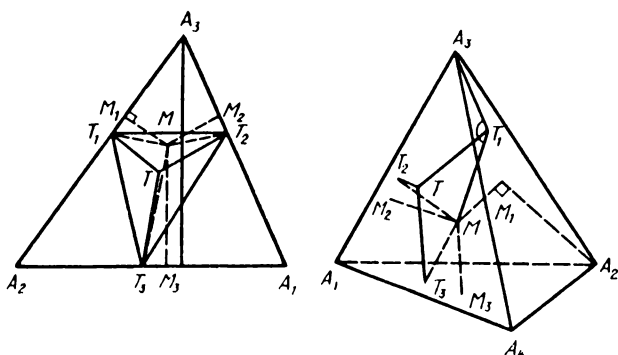
значит, четвертый угол при вершине  $A_1 = 60^\circ$ .

Аналогично  $\angle A_2 = \angle A_3 = 60^\circ$ , следовательно,  $A_1A_2A_3$  — правильный треугольник.

угольник  $TT_1T_2B_{34}$ , у которого два угла прямые:  $\angle TT_1B_{34} = \angle TT_2B_{34} = 90^\circ$ . Значит, два других противоположных угла в сумме составляют  $180^\circ$ .

Однако  $\angle T_1TT_2 = \theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 108^\circ$ ,  $\angle T_1B_{34}T_2 = \alpha = 180^\circ - \theta = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 72^\circ$ . Аналогично все шесть двугранных углов построенного тетраэдра равны, или  $A_1A_2A_3A_4$  — правильный тетраэдр.

Итак, нам были даны  $\frac{\text{треугольник } T_1T_2T_3}{\text{тетраэдр } T_1T_2T_3T_4}$ , у которых все плоские углы между смежными сторонами равны (рис. 99).



$$\begin{aligned} MM_1 + M_2M + MM_3 + (MM_4) &= H \\ TT_1 + TT_2 + TT_3 + (TT_4) &= H \end{aligned} \quad \sum MT_i \geq \sum MM_i = \sum TT_i = H$$

Рис. 99

Мы также описали около  $T_1T_2T_3(T_4)$  правильный  $\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$ , у которого  $\frac{\text{стороны}}{\text{грани}}$  перпендикулярны отрезкам  $TT_i$ , а именно  $a_i \perp TT_i$ ,  $\alpha_i \perp TT_i$ .

Требуется доказать: точка  $T$  обладает минимальной суммой расстояний до вершин  $T_1 T_2 T_3 (T_4)$ .

Пусть внутри этого  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$  дана произволь-

ная точка  $M$ , спроецированная на  $\frac{\text{стороны}}{\text{грани}}$   $A_1 A_2 A_3 (A_4)$  в точки  $M_i$ . Согласно доказанной лемме о свойствах правильного  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$  имеем:  $\sum MM_i = \sum TT_i$ .

Соединим точку  $M$  с проекциями точки  $T$  на  $\frac{\text{стороны}}{\text{грани}}$ , т. е. с точками  $T_i$ . Хотя бы некоторые из отрезков  $M_i T_i$  — суть наклонные к  $\frac{\text{сторонам}}{\text{граням}}$  (иначе точки  $M$  и  $T$  совпали бы). Поэтому имеем:  $\sum MT_i \geq \sum MM_i = \sum TT_i = H$ .

**38** Итак, мы доказали: точка  $T$  — точка Торричелли для  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$   $T_1 T_2 T_3 (T_4)$ .

В практике обучения математике нам не встречались пособия, в которых к решению задач элементарной математики прилагались бы средства высшей математики. Между тем в дидактическом плане подтверждение результата, полученного ранее геометрическими рассуждениями, скажем, дифференцированием функции (хотя бы для простейшего частного случая!), имеет большое воспитательное значение, ибо показывает разнообразие средств математики и убеждает в эффективности математического исследования, обладающего несколькими методами решения той или иной проблемы.

Пусть дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $AOB$ . Требуется найти точку Торричелли этой фигуры средствами математического анализа.

В силу симметричности треугольника точка  $T(x, y)$  будет находиться на биссектрисе  $OM$  прямого угла; координаты искомой точки будут равны ( $x = y$ ).

Соединим точку  $T(x, x)$  с вершинами  $\triangle AOB$ . Требуется доказать:

$$\varphi = \widehat{ATB} = 120^\circ$$

↓

$$\cos \varphi = \left( -\frac{1}{2} \right)$$

↓

$$\arccos \left( -\frac{1}{2} \right) = 120^\circ.$$

Сумма расстояний от точки  $T$  до вершин треугольника представляет функцию одной переменной:

$$TO = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2},$$

$$TA = TB = \sqrt{(1-x)^2 + x^2} = \sqrt{1-2x+2x^2},$$

$$F(x) = TO + 2TA = x\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1-2x+2x^2}.$$

Найдем производную этой функции по  $x$ :

$$F'(x) = \left( x\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1-2x+2x^2} \right)',$$

$$F'(x) = x\sqrt{2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot (-2 + 4x)}{2 \cdot \sqrt{1-2x+2x^2}} = 0,$$

$$-2 + 4x = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-2x+2x^2},$$

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6};$$

$$x_1 = y_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \approx 0,8 \quad (\text{точка за пределами } \triangle OAB).$$

Следовательно,

$$x_2 = y_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \quad \text{— координаты точки } T. \quad (1)$$

Для контроля найдем величину угла  $\varphi$ , для чего удобно воспользоваться скалярным произведением векторов:

$$\varphi = (\widehat{\vec{TA}, \vec{TB}}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

где

$$\vec{a} = \vec{TA} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \vec{TB} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-x \end{pmatrix}.$$

По формуле скалярного произведения имеем:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1-x \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ 1-x \end{pmatrix}}{\sqrt{(1-x)^2 + (-x)^2} \cdot \sqrt{(-x)^2 + (1-x)^2}};$$

$$\cos \varphi = \frac{-x + x^2 - x + x^2}{1 - 2x + x^2 + x^2}.$$

Итак,  $\cos \varphi = \frac{2x^2 - 2x}{1 - 2x + 2x^2}$ . Подставив в правую часть этого соотношения найденное значение (1), получаем:

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}, \text{ или } \varphi = 120^\circ.$$

Два других угла при точке  $T$  симметричны друг другу:

$$\widehat{TOA} = \widehat{OTB} = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ,$$

в чем и требовалось убедиться.

Весьма интересной оказалась следующая аналогия: если для углов при точке Торричелли для треугольника (двумерное пространство) соблюдается

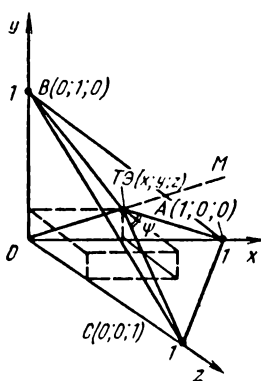
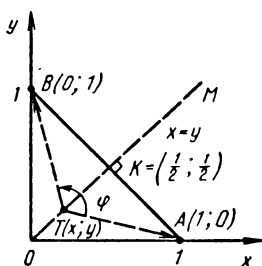
соотношение  $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$ , то для «точки

Торричелли» прямоугольного тетраэдра с прямыми углами при вершине в точке  $T$  (трехмерное пространство) надо ожидать получение плоского угла

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 108^\circ.$$

В самом деле, пусть вершины прямоугольного тетраэдра расположены на осях координат на расстояниях в 1 единицу от начала координат. Построим

ось симметрии  $OM$  трехгранного угла  $\hat{O}$ . В силу симметричности ребер тетраэдра искомая «точка Торричелли» должна находиться на этой прямой, причем все ее координаты равны друг другу ( $x = y = z$ ) (рис. 100).



$$K = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$OK \perp AB$$

$$\varphi = 120^\circ$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$T \in OM$$

$$F(x) = TO + TA + TB = TO + 2TA$$

a

$$T\Theta = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$OK \perp ABC$$

$$\psi = 108^\circ$$

$$\cos \psi = -\frac{1}{3}$$

$$T\Theta \in OM$$

$$F(x) = TO + TA + TB + TC = TO + 3TA$$

b

Рис. 100

Напишем координаты трех точек:  $T(x; y; z) = T(x; x; x)$ ,  $A = (1; 0; 0)$ ,  $C = (0; 0; 1)$ .

$$\text{Тогда } \vec{OT} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\vec{OT} + \vec{TA} = \vec{OA}$ , то  $\vec{TA} = \vec{OA} - \vec{OT}$ :

$$\vec{TA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

$$\text{Аналогично } \vec{TC} = \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix} = \vec{c}.$$

Найдем угол  $\psi$  между векторами  $\vec{d}$  и  $\vec{c}$ :

$$\cos(\widehat{\vec{d}, \vec{c}}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix}}{\left( \sqrt{(1-x)^2 + x^2 + x^2} \right)^2};$$

$$\cos \psi = \frac{(1-x) \cdot (-x) + (-x)(-x) + (-x)(1-x)}{(1-x)^2 + 2x^2},$$

$$\cos \psi = \frac{3x^2 - 2x}{1 - 2x + 3x^2}. \quad (2)$$

Выразим далее сумму расстояний от искомой точки  $T$  до вершин тетраэдра как функцию одной переменной  $x$ :

$$F(x) = OT + 3TA;$$

$$OT = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = x\sqrt{3}.$$

$$TA = TB = TC = \sqrt{(1-x)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(1-x)^2 + x^2 + x^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 2x + 3x^2}.$$

$$\text{Итак,} \quad F(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{1 - 2x + 3x^2}. \quad (3)$$

$$F'(x) = \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 + 6x}{\sqrt{1 - 2x + 3x^2}} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad -3 + 9x = -\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - 2x + 3x^2},$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{6}.$$

(Два локальных экстремума!)

Итак, все координаты искомой точки  $T$  равны  $\frac{1}{2}$ :

$$T(x; y; z) = T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Подставив найденное значение  $x = \frac{1}{2}$  в правую часть выражения (2), получаем:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= -\frac{1}{3} \\ \downarrow \\ \psi &= \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 108^\circ.\end{aligned}$$

Такие же значения получаем для остальных плоских углов в точке ТЭ. Это означает, что грани тетраэдра  $OABC$  видны из точки ТЭ под правильными трехгранными углами в  $\pi$  стерadian, что и должно было выполняться.

Торричелли решил задачу о «минимальном» свойстве *только для трех точек плоскости*. Поэтому ради образности аналогичную точку для пространства большей размерности мы обозначили двумя буквами ТЭ (точка Торричелли — Эрдниевых). Тем самым мы снова подтвердили результат, полученный нами ранее посредством геометрических соображений.

Сравнивая (2) и (3), видим, что размерность пространства, в котором решается задача, проявляется в знаменателе дроби.

Общее свойство точки ТЭ: из нее каждое ребро  $n$ -мерного симплекса видно под одним и тем же углом  $\arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$ .

Не преминем сказать попутно несколько слов о четырехмерном пространстве ( $n = 4$ ). Для координатного представления мы строили в трехмерном пространстве три взаимно перпендикулярные оси:  $Ox \perp Oy$ ,  $Oy \perp Oz$ ,  $Oz \perp Ox$ . Аналогично для четырехмерного пространства мы можем полагать наличие четырех взаимно перпендикулярных осей:  $Ox \perp Oy$ ,  $Ox \perp Oz$ ,  $Ox \perp Ot$ ,  $Oy \perp Oz$ ,  $Oy \perp Ot$ ,  $Oz \perp Ot$ . Каждая точка четырехмерного пространства имеет четыре координаты, например,  $M_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ . В четырехмерном пространстве верна та же формула скалярного произведения векторов, дающего угол между четырехмерными векторами.



Полагая, что в нашем распоряжении четырехмерный прямоугольный равнобедренный симплекс, удастся по аналогии вычислить координаты его «точки Торричелли», причем каждая сторона симплекса видна

из этой точки действительно под углом  $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx$

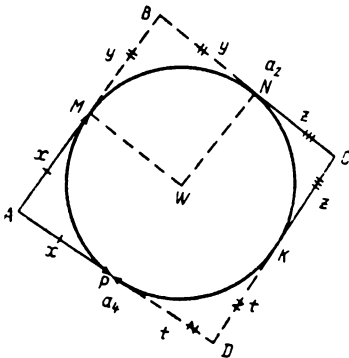
$\approx 104^\circ$ . Реальный угол между «невидимыми» четырехмерными векторами! Поистине нет ничего практичнее хорошей теории!

# ОТ ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА К ПОЛУОПИСАННОМУ ОКТАЭДРУ

Весьма поучительно устанавливать многообразные связи между плоскими и пространственными фигурами, объединенными тем общим свойством, что они имеют по четыре каких-то однородных элемента. Так, например, описанный четырехугольник может иметь немало сходных свойств с описанным тетраэдром, у которого четыре грани, с описанным четырехгранным углом или даже с описанным шестигранником, у которого четыре диагонали и т. п.

Вспомним вначале следующую четверку теорем.

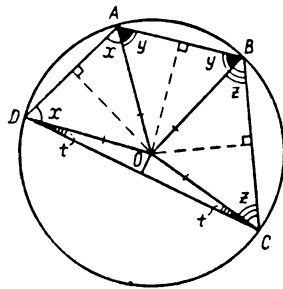
1 а. *Прямая теорема* (необходимое условие описанного четырехугольника): если четырехугольник описан около окружности, то в нем суммы противоположных сторон равны (рис. 101).



$$\begin{aligned} AB + CD &= (x + y) + (z + t) \\ BC + AD &= (y + z) + (x + t) \\ \hline AB + CD &= BC + AD \end{aligned}$$

Рис. 101

1 б. *Прямая теорема* (необходимое условие вписанного четырехугольника): если четырехугольник вписан в окружность, то в нем суммы противоположных углов равны (рис. 102).



$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} &= (\hat{x} + \hat{y}) + (\hat{z} + \hat{t}) \\ \hat{B} + \hat{D} &= (\hat{y} + \hat{z}) + (\hat{x} + \hat{t}) \\ \hline \hat{A} + \hat{C} &= \hat{B} + \hat{D} \end{aligned}$$

Рис. 102

## 2 а. Обратная теорема

(достаточное условие описанного четырехугольника): если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то он описан около окружности.

Доказательство прямой теоремы 1 а.

Касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны:  
 $AB + CD = x + y + z + t$ ,  
 $AD + BC = x + t + y + z$ .

Правые части равны, значит, равны и левые части:  $AB + CD = AD + BC$ , что и требовалось доказать.

## 2 б. Обратная теорема

(достаточное условие вписанного четырехугольника): если в четырехугольнике суммы противоположных углов равны, то он вписан в окружность.

Доказательство прямой теоремы 1 б.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \frac{\cup ADC}{2}, \quad \angle 1 = \\ &= \angle ABC = \frac{\cup ADC}{2}, \quad \angle 3 = \\ &= \angle ADC = \frac{\cup ABC}{2}, \quad \angle 1 + \\ &+ \angle 3 = \frac{\cup ADC + \cup ABC}{2} = \\ &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \text{ Аналогично} \\ \angle 2 + \angle 4 &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Итак,  $\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4$ .

Предлагаем читателю доказать самостоятельно достаточное условие описанного и вписанного четырехугольника.

Взаимно-обратные теоремы удобно записать объединенно.

Необходимым и достаточным условием описанного четырехугольника является равенство сумм противоположных сторон.

Необходимым и достаточным условием вписанного четырехугольника является равенство сумм противоположных углов

Возможно связать в общей фразе два необходимых условия (и отдельно два достаточных условия):

для того чтобы четырехугольник был описанным, необходимо и достаточно, чтобы были равны суммы противоположных сторон углов. В этом суждении — четыре теоремы!

Несколько забегаая вперед, отметим, что в случае четырехгранника наиболее интересные аналогии сосредотачиваются по линиям:

а) треугольник — четырехгранник (общего вида),

б) описанный (вписанный) четырехугольник — полуописанный четырехгранник.

Верны следующие суждения: для всякого треугольника четырёхгранника существует как описанная, так и вписанная окружность сфера (рис. 103).

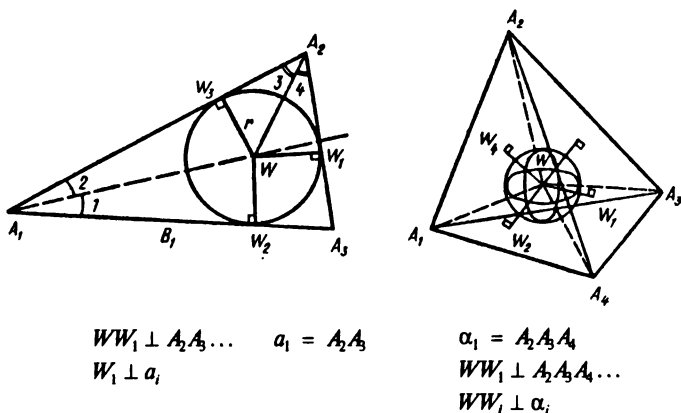


Рис. 103

Поучительно, однако, что свойства описанного и вписанного четырехугольников проявляются опять же совместно в полуописанном тетраэдре, у которого все ребра касаются полуописанной сферы, а именно: для того чтобы тетраэдр был полуописанным, необходимо и достаточно равенство сумм противоположных

ребер  
двугранных углов.

**39** Формулировку достаточного условия полуописанного тетраэдра относительно двугранных углов мы не встречали в литературе.

Прилагая метод аналогий ко все более сложным фигурам, достигаем в цепи обобщений момента, когда нужно ослабить условия, дабы сохранить истинность новых суждений.

Поучительно, например, отметить, что *необходимые* условия описанного и вписанного четырехугольников обобщаются на 6, 8, 10, ...,  $2n$ -угольники, т. е. верны теоремы: если «двух-энугольник»

( $2n$ -угольник)  $\frac{\text{описан}}{\text{вписан}}$  в окружность, то в нем суммы четных  $\frac{\text{сторон}}{\text{углов}}$  равны сумме нечетных  $\frac{\text{сторон}}{\text{углов}}$ .

Однако достаточные условия  $\frac{\text{описанного}}{\text{вписанного}}$   $2n$ -угольника ( $n > 3$ ) в рассматриваемом контексте уже не имеют места.

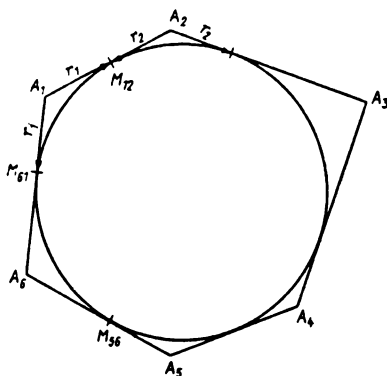
Сравним, например, условия, необходимые для того, чтобы шестиугольник был описанным около окружности.

Докажите прямую теорему о свойстве описанного шестиугольника (рис. 104). Ложность обратной теоремы усматривается из рис. 105 (сформулируйте обратную теорему).

Правильный шестиугольник  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$  описан около окружности. Эта описанная окружность вполне определена тремя точками касания, например,  $M_{56}, M_{61}, M_{12}$ . Перенесем ломаную  $B_2B_3B_4$  параллельно направлению  $B_3B_4$  в положение  $B'_3B'_4B'_5$ . Но шестиугольник  $B_1B_2B'_3B'_4B'_5B_6$  уже нельзя описать около окружности, хотя в нем сумма четных сторон по-прежнему равна сумме нечетных сторон. Это невозможно потому, что окружность, касающаяся хотя бы трех сторон нового шестиугольника, уже определена тремя точками касания  $M_{56}, M_{61}, M_{12}$ , и вне окружности остаются три перенесенные стороны нового шестиугольника.

Истинна следующая пара теорем: необходимым и достаточным условием того, чтобы все  $\frac{\text{стороны}}{\text{ребра}}$

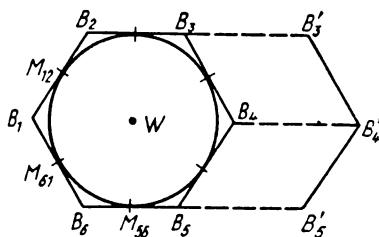
четырехугольника  
*тетраэдра* касались окружности  
*сферы*, является равен-  
ство сумм противоположных сторон  
*ребер*.



$$\begin{array}{ll} A_1A_2 = r_1 + r_2 & A_2A_3 = r_2 + r_3 \\ A_3A_4 = r_3 + r_4 & A_4A_5 = r_4 + r_5 \\ A_5A_6 = r_5 + r_6 & A_6A_1 = r_6 + r_1 \end{array}$$

$$A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1$$

**Рис. 104**



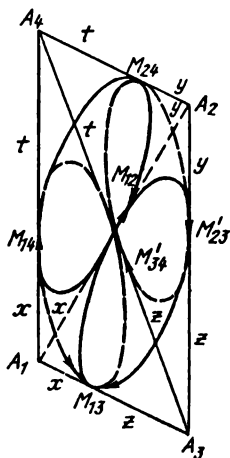
$$\begin{array}{l} B_1B_2 + B_3B_4 + B_5B_6 = B_2B_3 + B_4B_5 + B_6B_1 \\ B_1B_2 + B_3B_4' + B_5B_6' = B_2B_3' + B_4'B_5' + B_6'B_1' \end{array}$$

**Рис. 105**

Здесь речь идет о сравнении свойств описанного четырехугольника и полуописанного четырехгран-

ника. Необходимое и достаточное условия описанного четырехугольника мы доказали выше (ниже описана теорема о полуописанном тетраэдре).

Доказательство необходимости. Пусть полувписанная сфера  $O$  касается всех ребер тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  в точках  $M_{12}, M_{23}, \dots, M_{34}$  (рис. 106). Так как касательные, проведенные к сфере из одной точки, равны друг другу, то имеем:



$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_1A_3 + A_2A_4 = \dots$$

Рис. 106

$$\begin{array}{cccc} \frac{M_{12}}{A_1M_{13}} = x, & \frac{M_{21}}{A_2M_{23}} = y, & \frac{M_{31}}{A_3M_{32}} = z, & \frac{M_{41}}{A_4M_{42}} = t. \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{43} \end{array}$$

Легко видеть теперь, что суммы любых пар скрещивающихся ребер равны, ибо каждая сумма состоит из четырех разных отрезков, например,  $A_1A_2 + A_3A_4 = x + y + z + t$ .

Доказательство достаточности. Пусть в тетраэдре соблюдается соотношение

$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_1A_3 + A_2A_4 \quad (1)$$

↓

$$A_3A_4 - A_2A_4 = A_1A_3 - A_1A_2. \quad (1a)$$

Пусть круг, вписанный в грань тетраэдра  $A_1A_2A_3$ , касается его сторон в точках  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{31}$ . Введем обозначения:  $a_1 = A_2A_3$ ,  $a_2 = A_1A_3$ ,  $a_3 = A_1A_2$ .

Тогда стороны основания связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} x + y = a_3, \quad y + z = a_1, \quad z + x = a_2, \quad x + y + z = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}, \\ z = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} - a_3 = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Получаем правило: касательная  $z$ , проведенная из вершины  $A_3$ , равна одной второй суммы сторон треугольника, образующих эту вершину,  $a_1 + a_2$  без

противоположной стороны:  $z = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)$ .

Впишем окружность в грань  $A_4A_2A_3$ , смежную с основанием  $A_1A_2A_3$ . Напишем соотношение для касательной боковой грани, проведенной из вершины  $A_3$ :

$$Z' = A_3M'_{34} = A_3M'_{32} = \frac{A_3A_2 + (A_3A_4 - A_2A_4)}{2}. \quad (3)$$

Согласно условию (1 а) заменим в числителе одну разность другой:

$$Z' = \frac{A_3A_2 + A_1A_2 - A_1A_2}{2} = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}. \quad (4)$$

В равенствах (1) и (4) равны правые части, значит, равны и левые части:  $Z = Z' = A_3M_{31} = A_3M_{32} = A_3M_{34}$ . Аналогично доказывается, что при наличии соотношения вида (1) справедливы соотношения вида (4) и для других касательных.

Построив плоскости  $\delta_{ij}$ , проходящие через точки  $M_{ij}$  и перпендикулярные к ребрам  $A_iA_j$ , мы найдем в их пересечении центр  $P$  полувыписанной сферы, равноудаленной от всех ребер тетраэдра:  $PM_{ij} = r$ . Пересечение пары таких плоскостей с гранью дает центр окружности  $P_i$ , вписанной в эту грань. Значит, точка  $P$  есть центр сферы, касающейся всех ребер тетраэдра.

Итак, отправившись от аналогии «треугольник — тетраэдр» (в смысле наличия вписанной окружности и сферы), мы обнаружили аналогию между окружностью, касающейся всех сторон четырехугольника,



и сферой, касающейся всех ребер четырехгранника (тетраэдра). Аналогия здесь связана с ограничением объема понятия: не во всякий  $\frac{\text{четырёхугольник}}{\text{четырёхгранник}}$  можно вписать  $\frac{\text{окружность}}{\text{сферу}}$ , а лишь в такой, у которого суммы противоположных  $\frac{\text{сторон}}{\text{ребер}}$  равны.

Цепь аналогий полезно доводить до «предельного» случая, когда после «пика удачи» (получения интересных в том или ином отношении обобщений) она постепенно теряет свою силу и гипотетические предположения уже не подтверждаются.

С каждым шагом применения аналогии возрастает смысловое окружение исходного понятия (топология ключевого слова), вокруг которого причудливым образом нарастает клубок ассоциаций и суждений; возникающий так *укрупненный блок информации* содержательно обогащается подобно снежному кому. В конце обсуждения клубок связей мыслей обретает структуру, характеризуемую не столько увеличением количества понятий, включенных в орбиту рассуждений, сколько несравненно большим возрастанием числа связей между известными знаниями. Информация определяется не только объектами, предметами мысли как таковыми, но и *связями* между ними. В последнем случае говорят о *структурной информации*.

Напомним такую черту диалектичности мысли, как возникновение новых связей между ранее разрозненными понятиями. Применение аналогии оказывает услугу диалектизации усвоенного знания, или — как еще говорят — саморазвитию мысли вокруг исходного «затравочного» элемента (*автодидактике*). Владение искусством аналогии — одно из важнейших условий для самостоятельного расширения знаний.

Мы рассматривали вписанные (и реже) описанные окружности и сферы. Однако из-за терминологической неопределенности вне внимания математиков неожиданно остался третий вид многогранников, касающихся полувписанной сферы всеми своими ребрами. Выше мы доказали теорему о равенстве сумм противоположных ребер полувписанного (не всякого!) тетраэдра. Вначале уделим

внимание понятиям «описанный и полуописанный многогранные углы», которые образованы плоскостями, проходящими через общую точку.

Многогранный угол называется *описанным*, если все его грани касаются сферы (а сфера называется вписанной в него).

Многогранный угол называется *полуописанным*, если все его ребра касаются сферы (а сфера называется в этом случае полувписанной в многогранный угол).

Рассмотрим выпуклый четырехгранный угол. Предлагаем доказать пару следующих теорем: в  $\frac{\text{описанном}}{\text{полуописанном}} \frac{\text{плоских}}{\text{двугранных}}$  многогранном угле суммы противоположных углов равны (рис. 107).

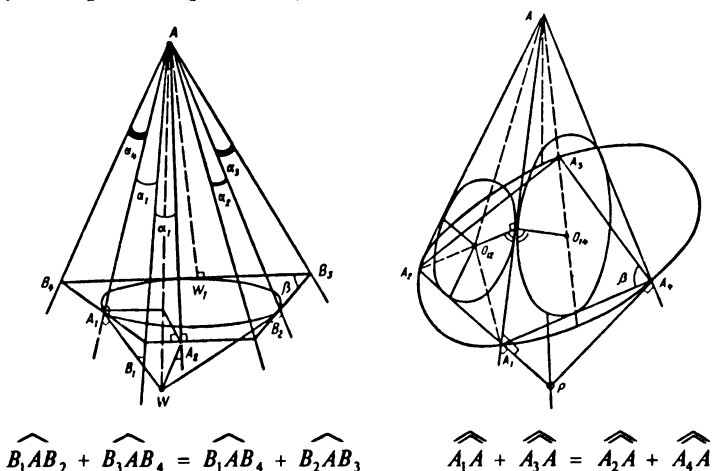


Рис. 107

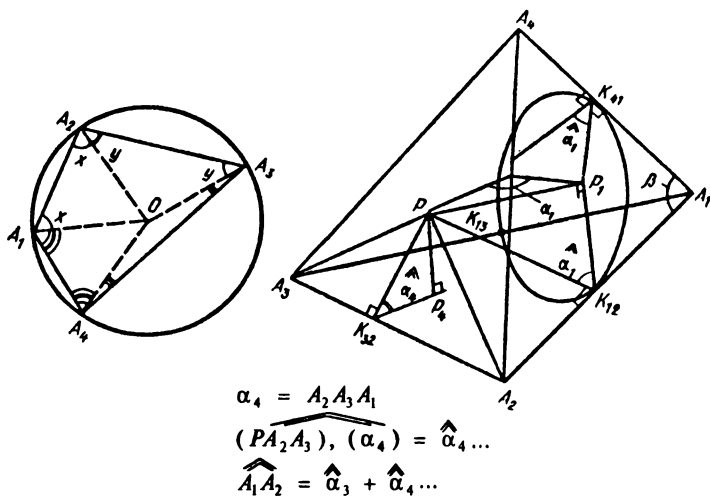
Возможно доказать и следующие аналогичные теоремы: для того чтобы  $\frac{\text{четырёхгранный угол}}{\text{четырёхгранник}}$  был полуописанным, необходимо и достаточно, чтобы суммы двугранных углов при противоположных ребрах были равны.

В этой лаконичной записи четыре теоремы. В литературе не встречалась третья и четвертая из них, а именно:

если в четырёхгранном угле  
тетраэдре суммы двугранных  
углов при противоположных ребрах равны, то  
он полуописан около сферы.

Доказательство этой теоремы предлагаем чита-  
телю. Пока же рассмотрим необходимые условия  
полуописания: если сфера полувписана в  
четырёхгранный угол (А)  
тетраэдр (Б), то в нем суммы двугран-  
ных углов при противоположных ребрах равны.

Докажем теорему Б. Сначала рассмотрим процесс  
построения полуописанного тетраэдра. Пусть дан  
трехгранный угол с вершиной  $A_1$ . На трех его  
ребрах отложим равные касательные (рис. 108):



$$\alpha_4 = \widehat{A_2 A_3 A_1}$$

$$(\widehat{P A_2 A_3}), (\alpha_4) = \hat{\alpha}_4 \dots$$

$$\widehat{A_1 A_2} = \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \dots$$

Рис. 108

$$A_1 \begin{matrix} K_{12} \\ K_{13} \\ K_{14} \end{matrix} = \varphi_1.$$

Через концы этих касательных проведем плос-  
кости, перпендикулярные к ребрам:  $\alpha_2 \perp A_1 K_{12}$ ;  
 $\alpha_3 \perp A_1 K_{13}$ ;  $\alpha_4 \perp A_1 K_{14}$ . Указанные плоскости пере-

секаются в точке  $P$ , центре полуописанной сферы.

В самом деле: следующие прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету:

$$\begin{array}{c}
 PK_{12} = PK_{13}, \quad \angle PK_{12}A_1 = \angle PK_{13}A_1, \quad A_1K_{12} = A_1K_{13} \\
 \downarrow \\
 \Delta A_1PK_{12} = \Delta A_1PK_{13} \\
 \downarrow \\
 PK_{12} = PK_{13} = \text{Ч} = PK_{34}.
 \end{array}$$

Рассмотрим проблему двугранных углов в общем плане. Пусть некоторый плоский многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  описан около окружности  $O$ . В центре  $O$  вписанной окружности восстановим перпендикуляр  $OM$  к плоскости многоугольника (рис. 109). Через высоту  $OM$  проведем плоскости, перпендикулярные к сторонам многоугольника:  $(OMN_{12}) \perp A_1A_2$  и т. д. Проведем также плоскости, проходящие через стороны основания и точку  $M$ . Так мы построим многогранный угол с вершиной  $M$ , который удобно называть *полуописанным* около некоторой сферы  $P$ .

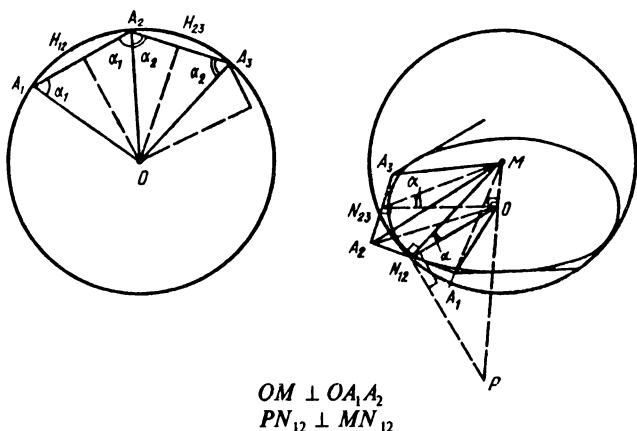


Рис. 109

Докажем, что *прилежащие* двугранные углы, образованные боковыми гранями полуописанного многогранного угла с основанием, равны.

В самом деле, прямоугольные треугольники с общей вершиной  $O$  равны по двум катетам  $OM$  и  $ON_{ij}$ . Значит, равны и их острые углы, а также измеряемые ими двугранные углы при сторонах основания:

$$\widehat{ON_{12}M} = \widehat{ON_{23}M}$$

$$\downarrow$$

$$\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots$$

Теперь вернемся к тетраэдру, полуописанному около сферы. Проведем через ребра тетраэдра и центр сферы плоскости, которые пересекут тетраэдр на четыре частичных тетраэдра. В этом рассуждении применяется прием, сходный с доказательством теоремы о сумме противоположных углов вписанного четырехугольника (в этом случае равны два острых угла, прилежащих к стороне вписанного четырехугольника).

Поскольку у тетраэдра четыре грани, то существует четыре тройки равных двугранных углов (всего 12 углов четырех видов). Поскольку у тетраэдра всего 6 ребер, то к каждому ребру с двух сторон прилегают по два прилежащих угла разной величины (всего 12 углов). Двугранный угол, прилежащий к грани, отметим тем же символом, что и грань. Например, к ребру  $A_1A_2$  прилегают двугранные углы  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ ,

поэтому  $\widehat{A_1A_2} = \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4$ . Аналогично  $\widehat{A_3A_4} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$ . И

наконец,  $\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_3A_4} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4$ . Понятно, что такова сумма двугранных углов при любой другой паре двугранных углов при противоположных ребрах полуописанного тетраэдра.

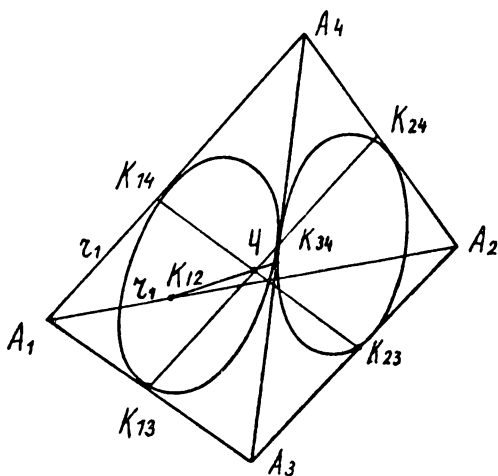
Итак, мы доказали необходимое условие существования полуописанного тетраэдра: это равенство сумм двугранных углов при противоположных его ребрах. Предлагаем читателям доказать обратную теорему, т.е. достаточное условие полуописанного тетраэдра.

Частным случаем полуописанных тетраэдров является правильный тетраэдр. Подобно этому, логично обобщить это понятие и рассматривать полуописанные окта-, додека-, икосаэдры, причем

последние сохраняют эйлеровы характеристики соответствующих правильных многогранников.

Для всех пяти видов полуописанных многогранников верна теорема: прямые, соединяющие точки касания полувписанной сферы с противоположными ребрами, пересекаются в одной точке.

Могут быть найдены и другие свойства полуописанных многогранников. Мы же ограничимся доказательством этого утверждения лишь для полуописанного тетраэдра (рис. 110).



$$K_2K_{34} \cap K_{13}K_{24} \cap K_{14}K_{23} = \text{ч}$$

Рис. 110

Пусть нам дан полуописанный тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ ; сфера с центром  $O$  касается ребер  $A_iA_j$  в точках  $K_{ij}$ . Рассмотрим любой из косых четырехугольников, например,  $A_1A_2A_3A_4A_1$ . По теореме Менелая четыре точки касания сферы у косого четырехугольника лежат на одной плоскости, так как

$$\frac{A_1K_{12}}{K_{12}A_2} \cdot \frac{A_2K_{23}}{K_{23}A_3} \cdot \frac{A_3K_{34}}{K_{34}A_4} \cdot \frac{A_4K_{41}}{K_{41}A_1} = 1.$$

В самом деле,  $\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{r_4}{r_1} = 1$ . Прямые, соеди-

няющие пары точек касания сферы с противоположными ребрами, лежат в одной плоскости и потому существует и точка их пересечения:

$$K_{12}K_{34} \cap K_{23}K_{41} = Ч.$$

Далее, точка Ч является еще и точкой Чевы тетраэдра. Отсюда следует, что три указанные прямые пересекаются в этой точке:

$$K_{12}K_{34} \cap K_{13}K_{24} \cap K_{14}K_{23} = Ч.$$

### О свойствах полуописанного гексаэдра

Нередко на исследования математиков влияет такой «случайный» фактор, как неопределенность или неточность терминологии. Приведем тому пример.

В литературе известны пять платоновых тел (*правильных* многогранников): тетраэдр (четырёхгранник), гексаэдр (шестигранник), октаэдр (восьмигранник), додекаэдр (12-гранник), икосаэдр (20-гранник). У правильных многогранников все грани — правильные многоугольники.

«Математическая энциклопедия» неожиданно придала понятию «гексаэдр» слишком широкое толкование, назвав гексаэдром вообще пятигранную пирамиду. Мы не согласны и с узким толкованием этого понятия только как куба, который точнее всего можно назвать правильным гексаэдром.

Гексаэдром удобно называть многогранники общего вида, родственные кубу (как правильному гексаэдру), который имеет общую с кубом топологическую характеристику (6 граней, 12 ребер, 8 вершин). Оправдано также различать по аналогии понятия «правильный октаэдр» и просто «октаэдр» (общего вида) с одной и той же топологической характеристикой ( $V = 6$ ;  $\Gamma = 8$ ;  $P = 12$ ).

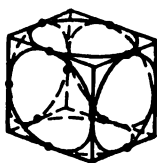
Из-за того, что геометры не употребляли вообще понятия *полуописанного многогранника*, а также и понятия гексаэдра, остались до сих пор неисследованными характеристические свойства полуописанного гексаэдра, а именно:

42  
43

необходимым и достаточным условием полуописанного гексаэдра является равенство сумм периметров противоположных граней (или равенство сумм противоположных трехгранных углов\*).

Несложно построить полуописанный гексаэдр (рис. 111). Пусть нам дан правильный гексаэдр — куб с основанием  $ABCD$ . Очевидно, существует сфера, касающаяся всех ребер куба\*\*.

ПРАВИЛЬНЫЙ  
ГЕКСАЭДР



ПОЛУОПИСАННЫЙ  
ГЕКСАЭДР

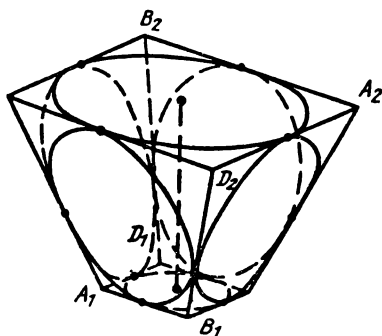


Рис. 111

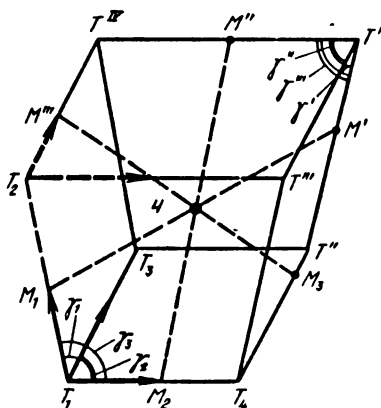
Представим теперь, что боковые ребра куба шарнирные. Оставив неизменным нижнее основание каркаса куба, удалим верхнее основание. Пусть противоположные боковые ребра перемещаются при этом преобразовании только в диагональных плоскостях. Представим далее, что полуописанную резиновую сферу слегка поддули; тогда радиус сферы увеличится, а точки касания сферы с боковыми ребрами сместятся вниз. Точки же касания сферы с нижними ребрами останутся прежними. Грани деформированного полуописанного гексаэдра будут равнобокими трапециями.

\* Обратите внимание на аналогию со свойствами полуописанного тетраэдра.

\*\* Полуописанный гексаэдр можно также построить, взяв в основании вместо квадрата дельтоид.



Определим три точки касания увеличившейся сферы со сторонами каждой трапеции: одна точка — это середина стороны основания; две — точки на боковых ребрах. В каждую трапецевидную грань впишем окружность, проходящую через указанные три точки касания. Проведем плоскость  $\gamma$  через 4 верхние симметричные точки вписанных окружностей;  $\gamma \parallel A_1 A_2 A_3 A_4$ . Плоскость  $\gamma$  пересекается с плоскостями трапеций по прямым, являющимся касательными к описанным окружностям, т. е. и к полуописанной сфере  $P$ .



$$\begin{aligned} \Pi_1 + \Pi' &= \Pi_2 + \Pi'' = \dots \\ \hat{T}_1 + \hat{T}' &= \hat{T}_2 + \hat{T}'' = \dots \\ M_1 M' \cap M_2 M'' \cap M_3 M''' &= 4 \end{aligned}$$

Рис. 112

Пусть имеется гексаэдр (шестигранник-восьми-вершинник)  $T_1 \dots A'$ , полуописанный около сферы  $P$  (рис. 112). Обозначим пары противоположных граней последовательными индексами:

левая грань  $\gamma_1$ , правая —  $\gamma'$ ;  
нижняя —  $\gamma_2$ , верхняя —  $\gamma''$ ;  
передняя —  $\gamma_3$ , задняя —  $\gamma'''$ .

Из каждой вершины полуописанного гексаэдра проведены три равных касательных к сфере  $P$

( $r_1 \dots r_8$  — всего восемь значений касательных). Каждая из шести граней гексаэдра ограничена четырьмя сторонами (ребрами). Соответственно каждая из шести граней гексаэдра представляет четырехугольник с периметром вида  $\Pi_1 = 2(r_i + r_j + r_k + r_l)$ .

Нетрудно теперь видеть, что сумма периметров всяких двух противоположных граней состоит всегда из двойного полного набора восьми различных отрезков, а именно:

$$\Pi_1 + \Pi' = 2(r_1 + r_2 + \dots + r_8) = \Pi_2 + \Pi'' = \Pi_3 + \Pi'''.$$

При каждом ребре — двугранный угол, представляющий сумму двух двугранных углов, определяемых, в свою очередь, гранями, к которым прилегают эти углы.

Итак, к каждой из шести граней прилежит по четыре равных прилежащих угла. Всего существует шесть значений прилежающих углов (по числу граней). Ребро  $T_1 T_2$  есть пересечение двух граней:

$$T_1 T_2 = \gamma_1 \cap \gamma_2.$$

Соответственно этому двугранный угол при этом ребре есть сумма двух прилежащих к этим граням двугранных углов:

$$\widehat{T_1 T_2} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2.$$

Аналогично с противоположными элементами:

$$\begin{aligned} T' T'' &= \gamma' \cap \gamma'' \\ &\downarrow \\ \widehat{T' T''} &= \hat{\alpha}' + \hat{\alpha}'' \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Впереди самое важное для нашего обсуждения, а именно, в сферической геометрии существует красивая теорема Жирара: величина трехгранного (телесного) угла определяется двугранными углами, образующими его, по следующей формуле:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 - \pi \text{ (стерадианов)*}.$$

В этой формуле  $\varepsilon$  — это величина телесного трехгранного угла в стерадианах,  $\tau_i$  — величина двугран-

---

\* Доказательство теоремы Жирара приведено в конце беседы.

ных углов при ребрах трехгранного угла, измеренного в стерадианах (1 стерадиан — это телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий из поверхности сферы площадь в квадратах радиуса  $R^2$  кв. ед.).

В противоположных вершинах полуописанного гексаэдра пересекаются по три взаимно противоположных грани (см. рис. 112):

$$\begin{aligned} T_1 &= \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3, \\ T' &= \gamma' \cap \gamma'' \cap \gamma'''. \end{aligned}$$

Найдем величины трехгранных телесных углов при этих вершинах по теореме Жирара:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= \hat{T}_1\hat{T}_2 + \hat{T}_1\hat{T}_3 + \hat{T}_1\hat{T}_4 - \pi, \\ \text{или} \quad \hat{T}_1 &= 2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3) - \pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично

$$\hat{T}' = 2(\hat{\alpha}' + \hat{\alpha}'' + \hat{\alpha}''') - \pi. \quad (6)$$

Сложив по частям (5) и (6), получаем: сумма противоположных трехгранных углов полуописанного тетраэдра составляет постоянное число:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 + \hat{T}' &= 2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}' + \hat{\alpha}'' + \hat{\alpha}''') - 2\pi = \\ &= \hat{T}_2 + \hat{T}'' = \hat{T}_3 + \hat{T}'''. \end{aligned} \quad (Э)$$

Итак, мы доказали: в полуописанном гексаэдре  
 44 равны суммы  $\frac{\text{периметров}}{\text{трехгранных углов}}$  при противо-  
 пол~~о~~жных  $\frac{\text{гранях}}{\text{вершинах}}$ . Нетрудно здесь увидеть  
 аналогию с полуописанным тетраэдром!

Указанные теоремы о свойствах ребер полуописанного гексаэдра нам не встречались в литературе. (До уточнения щепетильного вопроса о приоритете обозначим эти теоремы буквой Э по фамилии авторов.)

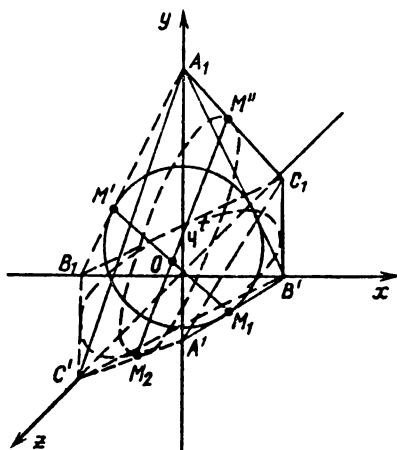
В предыдущем изложении мы говорили об обнаруженной нами «нише» в геометрии многогранников, а именно: математики прошли почему-то мимо свойств полуописанных многогранников, обладающих тем свойством, что полувписанная в них сфера касается всех их ребер. Так нам удалось сформулировать теорему:

**45** Прямые, соединяющие противоположные точки касания в полуописанном тетраэдре (гексаэдре, октаэдре, додекаэдре, икосаэдре) пересекаются в одной точке.

**46** Информационной новизной обладает полуописанный октаэдр: в нем суммы периметров противоположных граней равны! Равны также у него суммы четырехгранных углов.

Предлагая эту теорему для самостоятельных размышлений читателей, укажем лишь краткий способ построения полуописанного октаэдра (рис. 113).

### ПОЛУОПИСАННЫЙ ОКТАЭДР



$$\begin{aligned} OB_1 &= OB_2 \\ OC_1 &= OC_2 \\ OA_1 &> OA_2 \\ \Pi_1 + \Pi' &= \Pi_2 + \Pi'' = \dots \\ A_1 + A' &= A_2 + A'' = \dots \\ M_1 M' \cap M_2 M'' \cap \dots &= \text{Ч} \end{aligned}$$

Рис. 113

Построим в плоскости  $xOy$  квадрат, вершины которого расположены на осях координат, а центр — в начале координат. Впишем в квадрат окружность  $O(R)$ , которая касается квадрата в серединах сторон. Если построить сферу того же радиуса, то, построив

затем из вершины квадрата касательные к сфере в координатных плоскостях, мы получим правильный октаэдр со вписанной сферой.

Удалим боковые ребра октаэдра; если теперь слегка поддуть вписанную сферу, то сфера увеличенного радиуса будет касаться по-прежнему сторон квадрата  $ABCD$ . Проведя снова касательные к сфере, мы получим полуописанный октаэдр, не симметричный относительно плоскости  $xOy$ , но касающийся всех его 12 ребер.

Итак, еще раз налюбуйтесь цепью аналогий по линии: описанный четырехугольник (1)  $\rightarrow$  полуописанный тетраэдр (2)  $\rightarrow$  полуописанный гексаэдр (3)  $\rightarrow$  полуописанный октаэдр (4). Во всех этих фигурах суммы противоположных сторон (1), ребер (2), периметров граней (3) и (4) равны.

По линии углов аналогия наблюдается по следующей цепи понятий: описанная окружность (около четырехугольника)  $\rightarrow$  вписанная сфера (в четырехгранный угол)  $\rightarrow$  полувписанная сфера (в четырехгранный угол, в тетраэдр, гексаэдр, октаэдр; рис. 114—116).

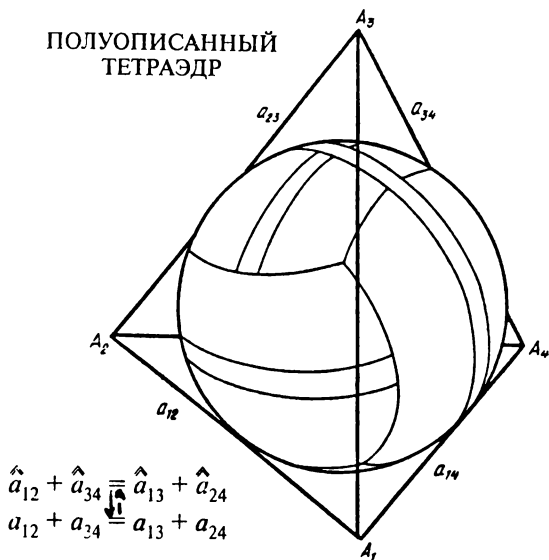


Рис. 114

ПОЛУОПИСАННЫЙ  
ГЕКСАЭДР

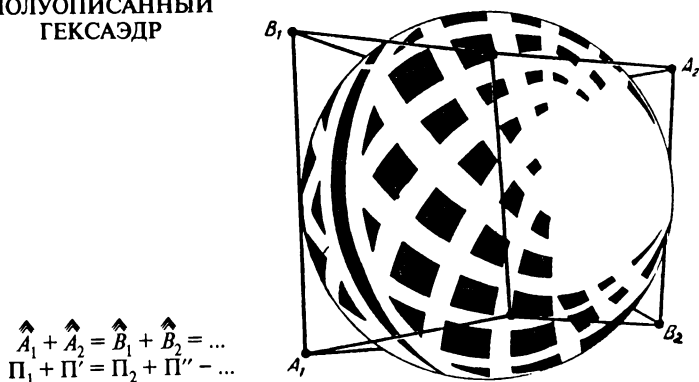


Рис. 115

ПОЛУОПИСАННЫЙ  
ОКТАЭДР

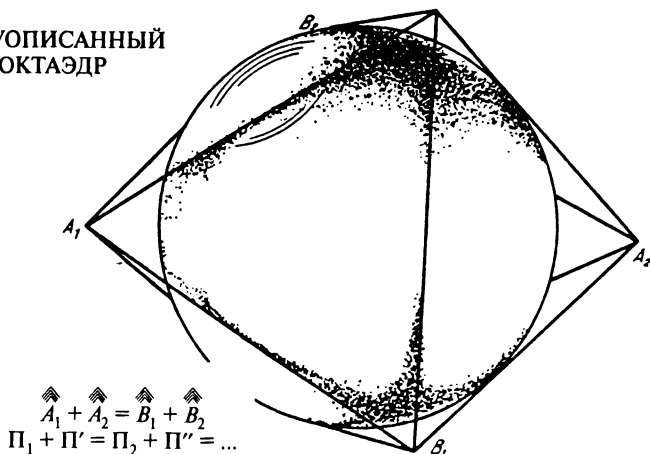


Рис. 116

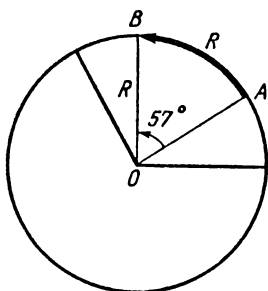
Мы назвали главу, посвященную классическим теоремам Менелая, Дезарга и Чебы поэмой о точках и прямых. Совокупность понятий, мощь и красота которых проявляется еще более красиво через механизм аналогий, — это точки касания кривых с прямыми, поверхностей с плоскостями. Повторяющаяся

в этих теоремах мелодия информации подобна звучанию флейты...

В следующей главе мы поднимемся воистину к симфонии окружностей и сфер, связанной с новейшим открытием Содди о касании окружностей и сфер (1931).

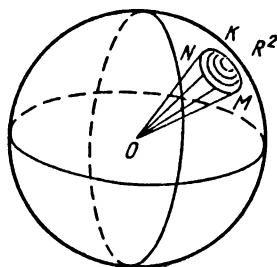
### Доказательство теоремы Жирара о трехгранном угле

Рассмотрим вопрос об измерении плоского угла в радианах и трехгранного угла в стерadians. Для этого совершим небольшой экскурс в сферическую геометрию, т.е. в геометрию дуг, образованных при пересечении больших окружностей на сфере (если пересечь сферу плоскостью, проходящей через ее центр, в сечении получим большую окружность). Большая окружность есть граница большого круга, который представляет собой пересечение с шаром плоскости, проходящей через его центр. Вспомним формулы длины окружности и площади поверхности шара (рис. 117, 118).



$$\begin{aligned}
 l(\cup AB) &= R \\
 \downarrow \\
 \widehat{AOB} &= 1 \text{ рад} \approx 57^\circ \\
 360^\circ &= 2\pi \text{ радиан} \\
 l &= 2\pi R
 \end{aligned}$$

Рис. 117



$$\begin{aligned}
 S_{NKM} &= R^2 \\
 \downarrow \\
 \widehat{MOKM} &= 1 \text{ стерadians} \\
 S &= 4\pi R^2 \text{ стерadians}
 \end{aligned}$$

Рис. 118

За единицу угла в 1 радиан принимается цент-

Построим криволинейный конус произвольной формы с вершиной в центре сферы.

ральный угол, опирающийся на дугу окружности длиной в 1 радиус. Так как на окружности укладывается радиус  $2\pi \approx 6,28$  раза, то полный угол в  $360^\circ$  приравнивается к 6,28 радианам:  $1 \text{ рад} \approx 57^\circ$ ;  $6,28 \text{ рад} \approx 370^\circ$ .

Пусть его боковая поверхность вырезает из поверхности сферы кусок ее площадью в один квадратный радиус ( $R^2$ ). Величину такого единичного телесного угла будем называть углом в 1 стерadian. Так как площадь поверхности сферы равна  $S = 4\pi R^2$ , то считают, что полный пространственный (телесный) угол вокруг одной точки (центра сферы) равен  $4\pi \approx 12,56$  стерadianам.

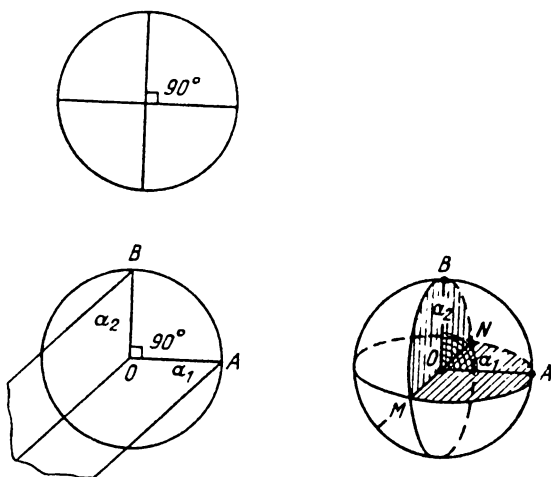
Можно сказать так:  $\frac{\text{линейный}}{\text{телесный}}$  угол пропорционален  $\frac{\text{длине дуги}}{\text{площади фигуры}}$ , вырезаемой им на  $\frac{\text{окружности}}{\text{сфере}}$  единичного радиуса.

Понятия «линейный угол» и «телесный угол» соединяются через понятие «двугранный угол», который можно измерять двояко: как в радианах, через его линейный угол, так и в стерadianах (считая этот двугранный угол телесным углом, вырезающим из сферы сегмент, обладающий определенной площадью).

Если в линейном угле двугранного угла  $x$  радианов, то телесный его угол содержит  $2x$  стерadianов (рис. 119). Так, если при измерении двугранного угла между плоскостями через его линейный угол мы получили, скажем, ответ  $\phi = 1,5$  радиана, то, представив эти плоскости пересекающимися по диаметру сферы, мы должны считать, что пространственный угол между ними содержит угол  $\phi_1 = 1,5 \cdot 2 = 3$  (стерadianа).

В самом деле, полный поворот вокруг точки на плоскости дает угол в  $2\pi$  радиан ( $360^\circ$ ); полный же поворот плоскости вокруг диаметра сферы дает телесный угол уже в  $4\pi$  стерadianа (число  $4\pi$  больше  $2\pi$  в два раза)! Итак, площадь сферического двугульника (в стерadianах) в два раза больше числового значения двугранного угла между теми же плоскостями, но измеренного в радианах.





$$\begin{aligned}
 L &= 2\pi R \\
 OA &\perp OB \\
 \downarrow \\
 \widehat{AOB} &= 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ (рад)} \\
 L &= 2\pi R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{ABM} \cdot O &= \frac{\pi}{2} \text{ (стерад)} \\
 \widehat{AMN} \cdot B &= \pi \text{ (стерад)} \\
 (\alpha_1; \alpha_2) &= 90^\circ \\
 S &= 4\pi R^2
 \end{aligned}$$

Рис. 119

Геометрия на плоскости и геометрия на сфере во многом аналогичны друг другу. Подобно тому, как в планиметрии изучается взаимное положение прямых, так и в сферической геометрии — взаимное положение дуг больших окружностей.

Для обоих разделов геометрии верна, например, аксиома: через две точки  $A$  и  $B$  на  $\frac{\text{плоскости}}{\text{сфере}}$  можно провести единственную  $\frac{\text{прямую}}{\text{большую окружность}}$  (рис. 120).

В самом деле, пусть на сфере дана точка  $A$ . Проведем через эту точку диаметр  $AA'$ . Концы

этого диаметра — точки  $A$  и  $A'$  являются центрально симметричными точками:  $S_O(A_1) = A'$ ,  $S_O(B_1) = B'$ .

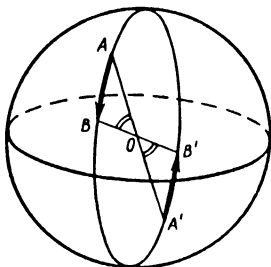


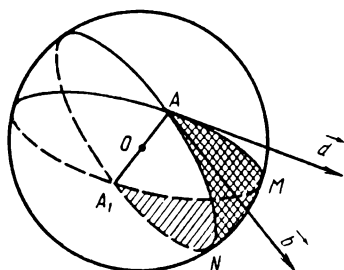
Рис. 120

Построим плоскость через три точки:  $A$ ,  $B$  и центр сферы  $O$ . Данная плоскость пересекает сферу по большой окружности  $BA$ . Точки  $A$  и  $B$  разбивают эту большую окружность на две дуги — два сферических отрезка, меньший из которых является кратчайшей линией на сфере, соединяющей  $A$  с  $B$ . Длину сферического отрезка удобно измерить не линейной мерой, а величиной угла, под которым он виден из центра сферы  $O$ . Концы диаметров симметричны относительно центра. Понятно, что величины симметричных дуг (сферических отрезков) равны, так как они видны под одним и тем же центральным углом из точки  $O$ :

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle A'OB' \\ \downarrow \\ \cup AB &= \cup A_1A'. \end{aligned}$$

В сферической геометрии (в отличие от планиметрии) отсутствуют параллельные сферические прямые (т.е. большие круги): любые две большие окружности пересекаются в диаметрально противоположных двух точках сферы  $A_1$  и  $A'$ , являющихся полюсами сферы (см. рис. 120). Угол между сферическими прямыми — большими окружностями — определяется как угол между соответствующими плоскостями (т.е. как двугранный угол), или, что то же самое, как угол между касательными к этим окружностям в точке их пересечения.

Часть сферы, заключенная между плоскостями больших кругов, пересекающихся по диаметру  $AA_1$ , образует фигуру, называемую сферическим двуугольником. Сферический двуугольник есть простейшая фигура на сфере, обладающая площадью. Поэтому сферический двуугольник есть также телесный угол, который измеряется в стерadians (рис. 121).



$$\widehat{\cup AM}, \widehat{\cup AN} = \vec{a}, \vec{b}$$

$\vec{a}$  — касательная к  $\cup AM$   
 $\vec{b}$  — касательная к  $\cup AN$

Рис. 121

Пусть две плоскости  $AMA'$  и  $ANA'$  пересекаются по диаметру  $AA'$  сферы под углом друг к другу в  $36^\circ = \frac{360^\circ}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$  радиана (пятая часть полного оборота на  $180^\circ$ ). Эти две плоскости вырезают из поверхности сферы ее десятую часть, т. е. телесный (двугранный) угол между этими плоскостями составит  $\frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$  (стерadians).

Пусть построены три большие окружности  $ABA'$ ,  $ACA'$ ,  $BCB'$ , причем диаметры  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в центре сферы  $O$ . (Заметим, что окружность  $ABA'$  расположена в плоскости чертежа.) При этом двугранный телесный угол  $B.AA'.C$  состоит из двух трехгранных углов с общей вершиной  $O$  ( $O.ABC$ ,  $O.A'BC$ ) (рис. 122).

Трехгранный угол  $O.ABC$ , будучи телесным углом, измеряется величиной площади сферического треугольника  $ABC$ , высекаемого его гранями на поверхности сферы  $O(1)$ . Аналогично трехгранный

угол  $\widehat{O.A'BC}$  измеряется площадью сферического треугольника  $A'BC$ .

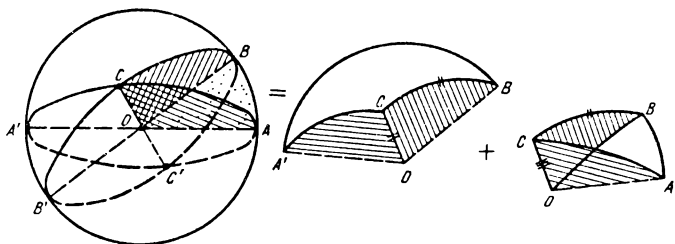


Рис. 122

Однако двугранный угол  $B.AA'.C$  высекает из сферы двуугольник, площадь которого равна сумме площадей двух указанных сферических треугольников. Поэтому телесный двугранный угол равен сумме двух трехгранных углов:

$$B.AA'.C = O.ABC + O.A'BC.$$

В отличие от планиметрии сумма двугранных углов при ребрах любого сферического треугольника больше  $180^\circ$ , причем она непостоянна, а зависит от площади треугольника. А именно, площадь треугольника на сфере радиуса 1 связана с суммой его углов  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  следующей формулой Жирара (1595—1632): трехгранный угол измеряется в стерадианах избытком суммы образующих его двугранных углов над числом  $\pi$ , т. е.

$$O.ABC = \hat{OA} + \hat{OB} + \hat{OC} - \pi$$

(в этой формуле  $\hat{OA}$ ,  $\hat{OB}$  и  $\hat{OC}$  измерены в радианах, а трехгранный угол — в стерадианах).

Приведем доказательство этой формулы. Пусть проведены через центр сферы три диаметра  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , а также три плоскости  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCA$ , являющиеся гранями трехгранного угла  $O.ABC$ . Точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , симметричные точкам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , обра-

зуют сферический треугольник  $O.A'B'C'$ , симметричный сферическому треугольнику  $O.ABC$  (и равный ему по площади). Несложно доказать, что симметричные сферические треугольники имеют одну и ту же величину, так как у них площади равны (рис. 123).

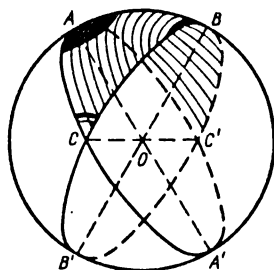


Рис. 123

Для доказательства теоремы Жирара изобразим на плоскости листа большой круг  $ABA'B'$  (научимся видеть между глазом и листом бумаги ближнюю полусферу). Пусть большой круг  $BCB'$  пересекается с большим кругом  $ACA'$  в точке  $C$  — на ближней полусфере. (Точка  $C'$ , симметричная точке  $C$ , расположена на дальней полусфере, т.е. ее надо мыслить расположенной *за плоскостью* листа бумаги.)

Заметим, что сферический треугольник  $ABC'$  симметричен сферическому треугольнику  $A'B'C$  и имеет равную с ним площадь. Обозначим одной буквой  $A$  двугульник, образованный плоскостью  $ABA$  и плоскостью  $ACA'$ . Площадь этого двугульника равна площади двух сферических треугольников  $BCA$  и  $BCA'$ .

Аналогично этому получаем следующие равенства: площадь двугульника  $B = S_{ABC} + S_{BCA'}$ , площадь двугульника  $C = S_{ABC} + S_{ACB'}$ .

Заменим в последнем равенстве сферический треугольник  $ABC'$ , расположенный *за плоскостью*

листа, равновеликим ему сферическим треугольником  $A'B'C$ , расположенным между листом и глазом. (Это — ключевое суждение данного доказательства.) Складывая по частям эти три равенства, получим:

$$S_A + S_B + S_C = 2 S_{ABC} + (S_{ABC} + S_{BCA} + S_{BAC} + S_{ACB}), \quad (7)$$

где  $S_A, S_B, S_C$  — площади двуугольников  $A, B$  и  $C$  соответственно.

Рассмотрим левую часть соотношения (7). Двуугольник  $A$  имеет площадь, заключенную на сфере между полукругами  $ACA'$  и  $ABA'$ ; числовое значение этой площади (в стерadiansах), согласно доказанному выше, в 2 раза больше числового значения двугранного угла между теми же полукругами, но выраженного в радианах. То же самое верно и относительно двух других двугранных углов,

образующих трехгранный угол  $O. \widehat{ABC}$ .

Итак, найдем величину *левой части* равенства (7) в стерadiansах:

$$\left. \begin{aligned} S_A &= 2 \hat{A} \\ S_B &= 2 \hat{B} \\ S_C &= 2 \hat{C} \end{aligned} \right| = S = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}). \quad (8)$$

В правой части равенства (7) четыре слагаемых, заключенных в скобки, дают в сумме площадь всей ближней полусферы, которая равна  $2\pi$  стерadiansам. Иными словами, сумма четырех трехгранных углов, образующих полусферу, равна  $2\pi$  стерadiansам. Эта сумма заключена в скобки в правой части равенства (7). Первое слагаемое правой части — это двойная площадь сферического треугольника  $ABC$ , т.е. удвоенная величина трехгранного угла  $ABC$ , выраженная в стерadiansах. Подставив найденные значения, получаем из (7) и (8) равенство

$$2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 2 \widehat{ABC} + 2\pi, \text{ откуда следует:}$$

$$O. \widehat{ABC} = \hat{OA} + \hat{OB} + \hat{OC} - \pi. \quad (9)$$

Таким образом, мы получили формулу Жирара, выраженную равенством (9).

# Беседа 10

## СИМФОНИЯ СФЕР И ОКРУЖНОСТЕЙ

Знаменитый ученый Кеплер (XVII век) пытался найти связь между орбитами планет и характеристиками правильных многогранников. Гениальный физик Ньютон, установив закон обратных квадратов взаимного притяжения планет, удивлялся тому, что эллиптические орбиты движения планет можно пояснить наглядно геометрически как линии пересечения касательных к сферам плоскостей с конической поверхностью.

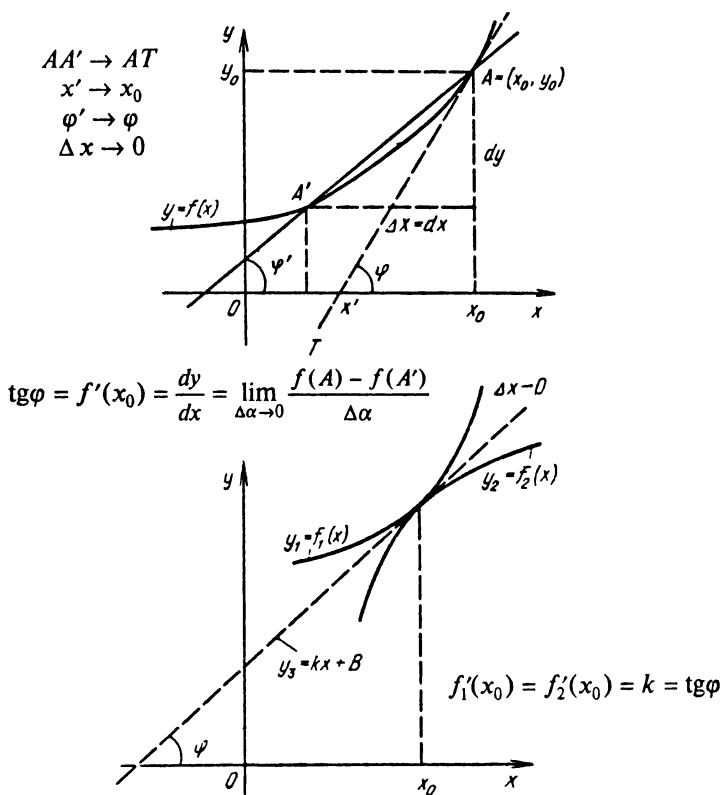


Рис. 124

Как известно, кривую можно пересечь секущей в двух точках  $A$  и  $A'$ ,  $AA' = t$  (рис. 124). Если вращать прямую  $t$  вокруг точки  $A$ , то наступает «таинственный» момент превращения секущей  $AA'$  в касательную  $AT$ ; в момент превращения секущей в касательную, как известно, точка  $A$  сливается с точкой  $A'$ , угол, образованный секущей с осью абсцисс, превращается в угол  $\varphi$ , образованный касательной с осью:  $\varphi' = (\widehat{Ox, AA'}) \rightarrow \varphi = (\widehat{Ox, AT})$ , а тангенс этого угла становится новой функцией, а именно производной исходной функции  $y' = f'(x)$ .

Это было величайшим открытием двух гигантов мысли — англичанина Ньютона и немца Лейбница. Открытие производной функции стало началом создания совершенно новых разделов математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления, основы всей современной техники.

В контексте нашего обсуждения именно изучение явления касания кривой и прямой оказалось ключевым моментом качественного скачка в математике, толчком к появлению в математике переменных величин, или, образно говоря, проникновению диалектики в математику постоянных величин.

Математики рассматривают и явление касания друг с другом двух кривых (или даже двух поверхностей), в этом случае в сущности незримо проявляется роль третьего объекта, а именно прямой (плоскости), проходящей через точку касания двух кривых (двух плоскостей).

Среди многих математических открытий XX века в смысле близости этого открытия к понятиям элементарной (школьной) геометрии особое место принадлежит открытию Ф. Содди теоремы о *взаимосоприкасающихся окружностях и сферах*. Обсудим эту красивую теорему, которая до сих пор не попала в тексты школьных или олимпиадных задач.

### Круги и шары Содди с целочисленными радиусами

Доказательство теоремы для четырех кругов изложил англичанин Коксетер (1961) в своей книге «Введение в геометрию». В дальнейшем изложении



мы всюду будем пользоваться понятием кривизны круга (шара), которая есть величина, обратная его радиусу:  $k_i = \frac{1}{r_i}$ .

В формулировке Содди теорема состоит из двух утверждений: сумма квадратов значений кривизны  $\frac{\text{четырёх кругов}}{\text{пяти шаров}}$  равна  $\frac{\text{половине}}{\text{трети}}$  квадрата суммы этих чисел, т. е.

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2,$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_5^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_5} \right)^2.$$

В символах кривизны эти формулы удобно записать так:

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2, \quad (1)$$

$$3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2. \quad (2)$$

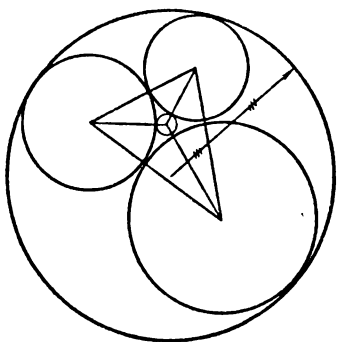
Теорема Содди рассмотрена в книгах Коксетера и Гарднера\*, вышедших на русском языке (рис. 125). Однако оба эти популярных автора не упоминают вообще о формуле (2) для пяти шаров\*\* (рис. 126). Приходится лишь гадать: не потому ли они не упомянули о пяти шарах, что не было известно *элементарного доказательства* формулы (2)?

Любителям математики известно много задач, связанных с целочисленными пифагоровыми треугольниками. Поучительно рассмотреть аналогичный вопрос о взаимосоприкасающихся окружностях и сферах с целочисленными значениями радиусов.

Начнем рассуждения с простейшего пифагорова треугольника — египетского (со сторонами 3, 4, 5). Построим с центрами в его вершинах три взаимосоприкасающиеся окружности (сферы) следующих радиусов:

\* Гарднер М. Математические досуги. — М., 1972.

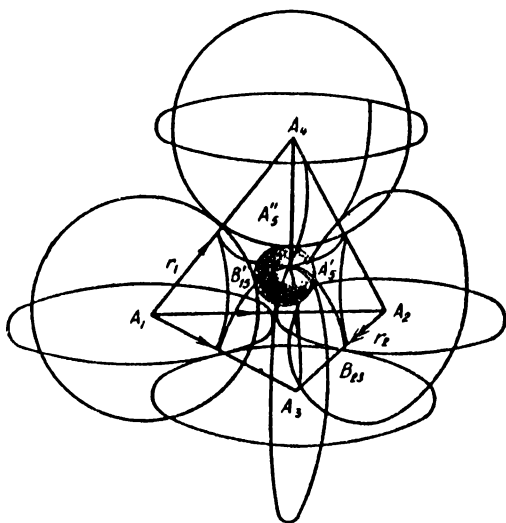
\*\* Появились сообщения, что данные формулы (но без логического доказательства) были известны гораздо раньше японским математикам: Шарыгин И. Ф., Штогрин И. И. Кто открыл формулу Содди? — «Математика в школе», 1992, № 2—3.



$$2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2$$

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

**Рис. 125**



$$3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2$$

**Рис. 126**

$$\begin{array}{l|l} r_1 = 1, & a_{23} = r_2 + r_3 = 5, \\ r_2 = 2, & a_{31} = r_3 + r_1 = 4, \\ r_3 = r_1 + r_2 = 3; & a_{12} = r_1 + r_2 = 3. \end{array}$$

В принципе, можно начать и с любого иного набора целочисленных радиусов взаимосоприкасающихся окружностей, не обязательно с пифагорова, например:

$$\begin{array}{l|l} r_1 = 4, & a = 9, \\ r_2 = 5, & b = 13, \\ r_3 = 4 + 5 = 9, & c = 14. \end{array}$$

Найдем радиусы четвертых окружностей, соприкасающихся с тремя данными:

$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + k_4^2\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k_4\right)^2. \quad (3)$$

Корни этого уравнения, приводящегося к квадратному, оказываются рациональными:  $k_4' = \frac{23}{6}$ ;

$k_4'' = -\frac{1}{6}$  (и это благодаря условию  $r_3 = r_1 + r_2$ ).

Зная одно из значений  $k_4'$  и  $k_4''$ , другое можно найти из соотношения:

$$k_4' + k_4'' = k_1 + k_2 + k_3. \quad (4)$$

Аналогичное верно и для шаров:  $k_5' + k_5'' = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ . Это означает, что внутри окружности с радиусом  $r_4' = -6$  оказываются три исходные с радиусами 1; 2; 3, а между ними оказывается окружность радиусом в  $\frac{6}{23}$ .

Школьникам интересно убедиться на опыте (непосредственным построением соприкасающихся окружностей с найденными радиусами) в справедливости двух тождеств с четверкой радиусов:

---

\* Предлагаем испытать следующий вариант уравнения (3):

$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + k_3^2 + \frac{1}{(-3)^2}\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{-3}\right)^2.$$

$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-6)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{(-6)}\right)^2, \quad (5)$$

$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{\left(\frac{6}{23}\right)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{6}{23}}\right)^2. \quad (6)$$

Для изыскания целочисленных радиусов взаимосоприкасающихся сфер учтем в данном случае то, что  $r_4'' = -6$  является и радиусом пятой сферы  $A_5(-6)$ , внутри которой расположены три исходные сферы  $A_1(1)$ ,  $A_2(2)$ ,  $A_3(3)$ , а также четвертая сфера  $A_4(x)$  неизвестного радиуса  $x$ . Чтобы найти радиус четвертой сферы, решим уравнение вида (2), приводящееся к квадратному:

$$3\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + x^2 + \frac{1}{(-6)^2}\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + x + \frac{1}{-6}\right)^2. \quad (7)$$

Уравнение (7) имеет два совпавших корня:  $x_{1,2} = \frac{5}{6}$ .

Этому соответствует тот геометрический факт, что существуют две сферы, удовлетворяющие  
**47** условию Содди, но расположенные симметрично по обе стороны от плоскости центров исходных трех сфер ( $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ).

Зная заранее длинный радиус «обнимающего» шара ( $r_5'' = -6$ ) и зная радиусы четырех взаимосоприкасающихся шаров, расположенных внутри него (1; 2; 3;  $x$ ), мы еще не знаем радиуса ( $r_5'$ ) шара, парного для  $r_5''$  (т. е. парного для обнимающего

указанные четыре шара), а именно шара  $r_5' = \frac{1}{y_5'}$ ,

расположенного между данными четырьмя шарами. Мы здесь применили привычный для технологии УДЕ прием обратной задачи.

Прямая задача выражается равенством (7). Обратная задача:

---

\* Умножив обе части (6) на  $\frac{1}{23^2}$ , в знаменателях четырех дробей получим целочисленные значения радиусов: 23, 46, 69, 6.

$$3 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{\frac{6}{5}} + y^2 \right) = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{6}{5}} + y \right)^2. \quad (8)$$

Решение обратной задачи приносит новую информацию, так как два значения неизвестного  $y$  должны нам дать два значения кривизны для обнимающей и обнимаемой сфер.

Решив (8), мы получаем:  $y'_5 = \frac{17}{6}$  ( $R'_5 = \frac{6}{17}$ );

$y''_5 = -\frac{1}{6}$  ( $R''_5 = -6$ ). Число  $R'_5 = \frac{6}{17}$  — это значение радиуса пятого шара, расположенного между четырь-

мя другими с радиусами: 1; 2; 3;  $\frac{6}{5}$ . Число  $R''_5 = -6$  есть радиус *обнимающей* сферы, что и должно было выполняться согласно предыдущей постановке задачи, а именно переходу от обнимающей окружности  $O_4(-6)$  к обнимающей сфере  $O_5(-6)$ .

Этот шаг оказался у нас ключевым для разрешения всей проблемы целочисленных сфер Содди, а затем и для элементарного доказательства формулы Содди для соприкасающихся сфер!

Небезынтересно далее выяснить причину того, что при соблюдении последовательности шагов алгоритма корнем уравнения (7) для сфер оказывается рациональное число, поскольку в уравнениях (5) и (6) для окружностей соблюдался этот же факт. Это вызвано тем, что по аналогии со свойством (4) для окружностей Содди выполняется свойство (9) для сфер Содди:

$$k'_5 + k''_5 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4. \quad (9)$$

В нашем случае имеем:  $-\frac{1}{6} + k_5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ , или

$$y' = k'_5 = \frac{17}{6} \quad (R' = \frac{6}{17}).$$

Соотношение (9) предоставляет возможность контроля решения уравнения (8).

Теорема Содди, исследованная математиками Госсетом и Коксетером в самом общем виде для  $n$ -

мерных гиперсфер, очень удобна для показа учащимся возможности выхода из конкретного трехмерного мира в четырехмерное пространство подобно тому, как мы в предыдущем изложении убедительно это осуществили, переходя от четырех окружностей Содди внешнего касания (6) к пяти сферам Содди также внешнего касания (10):

$$3 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{6}{17}\right)^2} \right) = \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{6}{17}} \right)^2. \quad (10)$$

Мы можем определить целочисленные радиусы шести взаимосоприкасающихся четырехмерных гиперсфер, т.е. требуется подыскать целые решения уравнения с шестью переменными:

$$4 \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_6^2} \right) = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_6} \right)^2. \quad (11)$$

Решение такой проблемы в целых числах логично и понятно, если оно представляет *очередной шаг* всех предыдущих геометрических умозаключений о касании окружностей и шаров.

Из соотношений (7) и (8) мы видим, что мы построили систему из пяти взаимосоприкасающихся трехмерных сфер, удовлетворяющих уравнению (10):

$$3 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)^2} + \frac{1}{(-6)^2} \right) = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{1}{-6} \right)^2. \quad (12)$$

Уравнение (12) означает, что пятая сфера  $O_5(-6)$  обнимает остальные четыре сферы, касающиеся пятой сферы *изнутри*.

Подобно тому, как мы делали переход от уравнения для четырех окружностей (5) к уравнению для пяти сфер (7), изменив коэффициент перед левой частью с 2 на 3 и увеличив число слагаемых внутри скобок на единицу, также поступим, преобразуя уравнение для пяти трехмерных сфер

(12) в очередное уравнение для шести четырехмерных гиперсфер (13):

$$4 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)^2} + z^2 + \frac{1}{(-6)^2} \right) = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{6}{5}} + z + \frac{1}{-6} \right)^2. \quad (13)$$

Решив уравнение (13), находим:  $z_{1;2} = \frac{5}{6}$ , или  $R_5 = \frac{5}{6}$ .

Итак, мы нашли шесть четырехмерных сфер с радиусами 1; 2; 3;  $\frac{6}{5}$ ;  $\frac{6}{5}$ ; -6, причем первые пять сфер касаются изнутри шестой четырехмерной сферы с радиусом в -6 единиц.

Понятно, что эти рассуждения можно продолжать и далее, последовательно переходя от трехмерных сфер к четырехмерным, от  $k$ -мерных к  $(k+1)$ -мерным и т.д. При указанном алгоритме радиусы гиперсфер получаются рациональными числами.

Помножив обе части уравнения Содди (8) на  $\frac{1}{85^2}$ , получаем *целочисленный набор* взаимосоприкасающихся сфер:

$$3 \left( \frac{1}{85^2} + \frac{1}{170^2} + \frac{1}{255^2} + \frac{1}{112^2} + \frac{1}{30^2} \right) = \left( \frac{1}{85} + \frac{1}{170} + \frac{1}{255} + \frac{1}{112} + \frac{1}{30} \right)^2.$$

Проверьте! Точно так же окружности с радиусами 23, 4, 69, 6 извне касаются друг друга (уравнение 6).

### Дидактические замечания

Формула Содди не случайно увенчана самим автором стихами. Эта формула может быть использована учителем для многообразных упражнений на занятиях по алгебре и геометрии как в школе, так и в вузе. Приведем тому примеры.

Пусть были построены четыре окружности по формуле (6). Сделав неизвестным любой из членов тождества, учитель получает (в качестве теста по теме «Квадратные уравнения») четыре различных уравнения. Если же предложить на уроке алгебры для решения уравнение вида

$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + z^2\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + z\right)^2,$$

то уравнение будет иметь два разных корня, где  $z'' = -\frac{1}{6}$  ( $R'' = -6$ ) относится к *обнимающей* окружности, а второй корень  $z' = \frac{23}{6}$  ( $R' = \frac{6}{23}$ ) дает окружность, расположенную *между* остальными тремя (внешнее касание)!

Еще больше вариантов и следствий возникает из уравнения Содди для трехмерного случая.

Задача Содди о взаимосоприкасающихся окружностях (сферах) является предельным (частным) случаем задачи Аполлония о касании окружностей и сфер. Тут возникает великолепная возможность определения пары  $\frac{\text{четвертых окружностей}}{\text{пятих сфер}}$ , касающихся извне и изнутри, если предварительно даны (построены!)  $\frac{\text{три}}{\text{четыре}}$  взаимосоприкасающиеся.

После открытия Содди возникла возможность решения этой задачи двумя способами:

1) координатным методом, т. е. алгоритмом Декарта; при этом составляется симметрическая система линейных уравнений;

2) посредством уравнения Содди, которое также выражает симметрическую функцию радиусов взаимосоприкасающихся окружностей (сфер).

Пусть известны координаты центров трех взаимосоприкасающихся окружностей и их радиусы  $O_1(R_1)$  и  $O_i = (x_i; y_i)$ . Требуется найти координаты и радиусы двух окружностей: а) при внешнем касании двух окружностей с данной  $O'_4(R'_4)$  и  $O'_4 = (x'_4; y'_4)$ ; б) при внутреннем касании трех данных  $O''_4(R''_4)$  и  $O''_4 = (x''_4; y''_4)$ .

Решение задачи а) сводится к решению системы линейных уравнений. Пусть даны три взаимосоприкасающиеся окружности  $O_1(R_1)$ ,  $O_2(R_2)$ ,  $O_3(R_3)$  (рис. 127). Построим их на координатной плоскости, причем координаты центров известны:  $O_1 = (x_1, y_1)$ ,  $O_2 = (x_2, y_2)$ ,  $O_3 = (x_3, y_3)$ . Расстояния между центрами окружностей мы можем вычислить по известной формуле





Если в правых частях вместо разности радиусов взять суммы радиусов, то найдем параметры для центра  $O'(R')$  окружности, касающейся извне трех данных.

Совершенно аналогично определение трех координат  $x, y, z$  и радиуса  $R$  сферы (два случая!), касающейся четырех взаимосоприкасающихся сфер, данных своими радиусами и координатами центров:  $O_i(r_i), O_i = (x_i, y_i, z_i)$ .

Если даны четыре взаимосоприкасающиеся сферы, то их центры оказываются вершинами *полуописанного тетраэдра*.

Мы видим, включение теоремы Содди в курс элементарной геометрии и аналитической геометрии имеет следствием обогащение фонда упражнений, позволяющих обеспечивать сочетание координатного метода с вычислениями на калькуляторе или контроль точных построений измерениями и вычислениями. Исключительно ценно в этих упражнениях воспитание через них эмоций удовлетворения от постижения глубинной красоты математических теорем. Эстетический эффект тем сильнее, чем больше взаимокорректирующих понятий и средств подключаются к процессу мышления.

Познавательная ценность упражнений, структурно связанных с полуописанными фигурами и теоремами Содди, видна из того, что эта технология обработки информации приучает учащегося самому составлять познавательную проблему, изложив ход ее исследования в творческой или курсовой работе. Пусть на координатной плоскости (в координатном пространстве) студент наметил себе  $\frac{\text{три}}{\text{четыре}}$  вершины прямоугольного треугольника полуописанного тетраэдра. Далее он может:

1) найти координаты точек взаимосоприкосновения  $\frac{\text{трех}}{\text{четырех}}$   $\frac{\text{окружностей } S_i}{\text{сфер } \sigma_i}$ , например:

$$\begin{array}{l|l} M_{12} = (2; 2), & M_{12} = (2; 2; 0), \\ M_{23} = (\square, \square), & M_{23} = (\square, \square, \square), \\ M_{31} = (\square, \square), & M_{31} = \dots, \\ & \dots \\ & M_{34} = \dots; \end{array}$$

2) найти радиусы взаимосоприкасающихся окружностей сфер;

3) по формуле Содди найти радиусы окружности сферы, расположенной *между* данными (или обнимающей данные);

4) решить задачи вторым способом на основе координатных представлений и т. д.

На старших курсах удобно продолжить параллельное исследование фигур (сначала построениями, потом привлечением теорем для логического доказательства, а также измерениями и вычислениями), например:

5) построить вписанную окружность полувписанную сферу и найти координаты ее центра;

6) проверить вычислением для данных конкретных тетраэдров пересечение трех прямых в одной точке и найти ее координаты:

$$A_3M_{12} \cap A_1M_{23} \cap A_2M_{13} = Ж \quad \Bigg| \quad M_{12}M_{34} \cap M_{13}M_{34} \cap M_{14}M_{23} = T$$

(точка Жергонна);                      (точка Торричелли).

### Элементарное доказательство теорем Содди

Мы выше обсуждали формулы Содди для взаимосоприкасающихся четырёх окружностей пяти сфер в *готовом виде*, не ставя еще вопроса об их доказательстве. Однако данные формулы достойны того, чтобы с ними познакомить учащихся как можно раньше, постепенно проводя по всем этапам пропедевтики и доведя по возможности до строгого логического доказательства в старших классах или в курсе элементарной геометрии на учительских факультетах.

Теоремы эти, будучи еще почти неизвестными учителям, весьма богаты своими прямыми и опосредованными логико-психологическими связями со многими базисными понятиями математики: касание прямой с окружностью, касание двух окружностей, симметрические функции, формулы

Герона, полуописанные многогранники, теоремы Менелая и Чебы для пространства, координаты и векторы и т. д. Многое говорит о том, что в силу *дидактической новизны* читатели могут обогатить фонд учебно-конкурсных задач, связанных с теоремой Содди (в особенности в плане исследования свойств полуописанных многогранников). Находки эти будут связаны с геометрией тетраэдра и треугольника.

Теорема Содди доказана в самом общем виде Госсетом для  $n$ -мерных гипербол в следующей записи:

$$n \sum_1^n k_i^2 = \left( \sum_1^n k_i \right)^2,$$

где  $k_i = \frac{1}{R_i}$  есть кривизна взаимосоприкасающихся гипербол. Мы обсудим вопрос об элементарном доказательстве обеих теорем для треугольника и полуописанного тетраэдра ( $n = 2; 3$ ).

Коксетер привел элементарное доказательство теоремы Содди для четырех окружностей ( $n = 2$ ). Его доказательство основано на теореме косинусов, но требует весьма громоздких преобразований (так, в одном из равенств Коксетера мы насчитали 150 знаков). Других элементарных доказательств теоремы Содди мы не обнаружили в литературе, так же как и вообще элементарного доказательства этой теоремы для пяти взаимосоприкасающихся сфер.

Сначала изложим доказательство теоремы для четырех окружностей. Итак, требуется доказать равенство:

$$2 \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \right) = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2. \quad (14)$$

Положив  $\frac{1}{r_i} = k_i$ , перепишем доказываемое равенство в виде (1) (рис. 128).

Вспомним вначале алгебраическое тождество квадрата четырехчлена:  $(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4)$ .

Введем краткие обозначения:  $C = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ ,  $D = k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4$ .

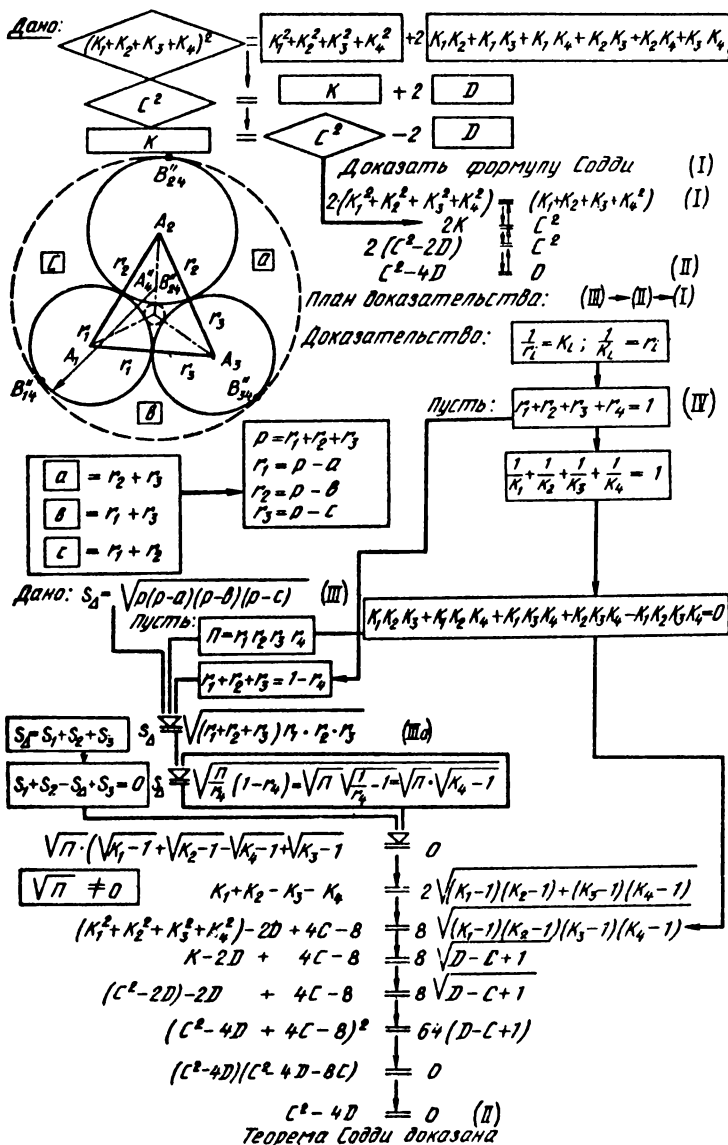


Рис. 128

Запишем алгебраическое тождество в краткой форме:  $C^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2D$ , или  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = C^2 - 2D$ .

Итак, требуется доказать:  $2(C^2 - 2D) = C^2$ , т. е.

$$C^2 - 4D = 0. \quad (15)$$

Приведенная цепь равенств обратима, т. е. чтобы доказать (14), достаточно доказать (15), и наоборот:  $(14) \Leftrightarrow (15)$ .

Представим формулу Герона как функцию четырех радиусов взаимосоприкасающихся окружностей, причем четвертая из них имеет центром точку  $A_4$  и расположена *между* остальными. Наше доказательство сводится к тому, чтобы формулу Содди вывести в качестве *следствия* из формулы Герона для площади треугольника.

Соприкасающиеся окружности с центрами в вершинах треугольника  $ABC$  касаются попарно в точках на сторонах треугольника. Это означает, что сумма радиусов равна соответствующей стороне треугольника. Выразим радиусы окружностей через длины сторон треугольника  $ABC$ :  $A_1A_2 = c = r_1 + r_2$ ,  $A_2A_3 = a = r_2 + r_3$ ,  $A_3A_1 = b = r_1 + r_3$ .

Полупериметр треугольника равен сумме радиусов взаимосоприкасающихся окружностей. В самом

$$\text{деле, } p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{2(r_1 + r_2 + r_3)}{2} = r_1 + r_2 + r_3.$$

Найдем далее следующие разности:  $p - a = (r_1 + r_2 + r_3) - (r_2 + r_3) = r_1$ . Аналогично  $p - b = r_2$ ,  $p - c = r_3$ .

Ключ своего доказательства мы нашли в счастливой идее: выразить формулу Герона как функцию не трех, а всех четырех радиусов взаимосоприкасающихся окружностей! В этих целях введем обозначения:  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$ ,  $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \Pi$ . Здесь  $r_4$  — радиус окружности, расположенной *между* тремя окружностями  $A_1(r_1)$ ,  $A_2(r_2)$ ,  $A_3(r_3)$ .

Введем замену переменных:  $r_1 + r_2 + r_3 = 1 - r_4$ ,

$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{\Pi}{r_4}$ . Тогда формула Геррона выглядит так:

$$S = \sqrt{(1 - r_4) \frac{\Pi}{r_4}}. \quad (16)$$

Соединив точку  $O$  со всеми вершинами треугольника, представим площадь  $\triangle ABC$  как сумму площадей трех треугольников:  $S = S_1 + S_2 + S_3$ . По аналогии с формулой (16) имеем далее:

$$S_{\triangle OA_1A_3} = S_1 = \sqrt{\frac{\Pi}{r_1} (1 - r_1)}.$$

Аналогично находим площади  $S_2$  и  $S_3$ .

Просуммировав площади частичных треугольников и перейдя к обозначениям  $\frac{1}{r_i} = k_i$ , получаем соотношение:

$$k_1 + k_2 + k_3 - k_4 = -2\sqrt{(k_1 - 1)(k_2 - 1) + (k_3 - 1)(k_4 - 1)}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат и используя краткие обозначения, приходим к равенству:

$$(C^2 - 4D + 4C + 8)^2 = 64(D - C + 1).$$

(см. третью строку снизу в граф-схеме на рис. 128).

Приводим дальнейшие преобразования равенства:  $64D - 64C + 64 = C^4 + 16D^2 + 16C^2 + 64 - 8C^2D + 8C^3 - 16C^2 - 32CD + 64D - 64C$ . После упрощений имеем:

$$C^4 - 8C^2D + 16D^2 + 8C^3 - 32CD = 0.$$

Представим левую часть в виде произведения двух множителей:  $(C^2 - 4D)^2 + 4C(C^2 - 4D) = 0$ ,  $(C^2 - 4D) \times (C^2 - 4D + 4C) = 0$ , откуда следует:  $C^2 - 4D = 0$  — формула Содди (15), что и требовалось доказать.

В самом деле, для любого треугольника верна формула Герона. А из формулы Герона выводится как следствие формула Содди (и наоборот).

Итак, гипотеза Содди превращена нами в теорему иным способом, чем это сделано у Коксетера. Данное доказательство нами было опубликовано в газете «Элистинские новости» за 18.VI.91.

## Доказательство формулы Содди о свойстве пяти взаимосоприкасающихся сфер

В известной нам литературе не предложено элементарного доказательства теоремы Содди для пространства. Речь идет о двух следующих суждениях:

сумма квадратов значений кривизны четырех взаимосоприкасающихся окружностей равна половине квадрата суммы этих значений,

сумма квадратов значений кривизны пяти взаимосоприкасающихся сфер равна трети квадрата суммы этих значений:

$$(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + a^2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + a)^2, \quad (17)$$

$$(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + b^2) = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + b)^2. \quad (18)$$

Укажем сразу, что в этих записях  $a$  и  $b$  означают кривизну  $\frac{\text{четвертого круга}}{\text{пятого шара}}$ , расположенного между остальными  $\frac{\text{тремя кругами}}{\text{четырьмя шарами}}$ .

Напомним, что указанные две теоремы были открыты Содди в 1936 г.; полное доказательство обобщенной теоремы для  $n$ -мерных гиперсфер дано Госсетом и опубликовано Коксетером в 1961 г. (его доказательство — неэлементарное, основано на применении свойств определителя Грама). Примечательна проблема элементарных доказательств формул (17) и (18). Коксетер напечатал элементарное доказательство формулы для плоскости (17), основанное на тригонометрических соотношениях.

Однако до сих пор не опубликовано на русском языке элементарного доказательства теоремы Содди для пяти шаров (18). Мы восполняем этот пробел.

Многое говорит о том, что со временем дидакты от математики несомненно найдут разнообразные методические вариации на мотив Содди, как это сделано авторами учебников математики, скажем, относительно теоремы Пифагора. Элементарные (доступные) доказательства «таинственных» теорем (17)



и (18), неизвестных математикам до XX века, обеспечат им особое место в занимательной математике.

В предыдущем параграфе мы привели элементарное доказательство формулы (17) для четырех окружностей. Приступая к доказательству формулы (18), учтем следующее:

1) формула (17) для взаимосоприкасающихся окружностей уже доказана;

2) принимаем как аксиому (как очевидный факт)

следующее положение: всякие  $\frac{\text{три круга}}{\text{четыре шара}}$  возможно расположить так, чтобы они взаимно соприкасались (рис. 129);

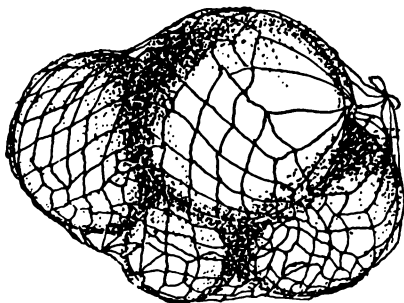


Рис. 129

3) радиус  $\frac{\text{четвертого круга } \frac{1}{a}}{\text{пятого шара } \frac{1}{b}}$ , соприкасающегося с

остальными  $\frac{\text{тремя кругами}}{\text{четырьмя шарами}}$ , можно точно вычислить,

решив систему  $\frac{\text{трех}}{\text{четырёх}}$  линейных уравнений.

Пусть нам известны координаты центров соприкасающихся шаров  $O_i = (x_i, y_i, z_i)$  и их радиусы  $r_i$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ . Требуется найти координаты  $x, y, z$  пятого шара  $O_5$ , расположенного *между* четырьмя другими (а также его радиус  $r_5$ ).

Вычисляя расстояния  $O_i O_5$ , получим следующую систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
 (A): & \left\{ \begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= (r + r_1)^2 \\ (B): & \left\{ \begin{aligned} (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 &= (r + r_2)^2 \\ (B): & \left\{ \begin{aligned} (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 &= (r + r_3)^2 \\ (Г): & \left\{ \begin{aligned} (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 &= (r + r_4)^2. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и вычитая по частям равенства последовательно друг из друга (А – Б; Б – В; В – Г; Г – А), получим систему четырех линейных уравнений относительно неизвестных  $x, y, z, r$ . Решив эту систему, находим значение радиуса  $r_5$  пятого шара,

а затем и кривизну его:  $k_5 = \frac{1}{r_5}$ .

Ключевым пунктом доказательства формулы (18) является то, что точки соприкосновения трех шаров из четырех (например,  $k_1, k_2, k_3$ ) являются одновременно и точками соприкосновения трех больших кругов этих шаров с теми же радиусами (рис. 130).

Обозначим, например, центры трех шаров так:  $A_1(k_1), A_2(k_2), A_3(k_3)$ . Тогда три соприкасающихся больших круга (экваторы трех шаров) лежат в плоскости  $A_1A_2A_3$ .

Из четырех шаров  $k_1, k_2, k_3, k_4$  мы получаем всего четыре комбинации по три:  $(k_1, k_2, k_3), (k_1, k_2, k_4), (k_1, k_3, k_4), (k_2, k_3, k_4)$ , поэтому имеются основания использовать четыре доказанных соотношения Содди для трех больших кругов (формула (17)).

Итак, рассмотрим для образца четыре взаимосоприкасающихся шара со значениями кривизны  $k_1, k_2, k_3, b$ . Приложим к ним снаружи пятый шар кривизны  $k_4$ . Пусть все пять шаров  $k_1, k_2, k_3, k_4, b$  — взаимосоприкасающиеся (здесь  $b$  — кривизна шара, расположенного между четырьмя остальными).

Теперь представим, что мы вынули из сооружения шар  $k_4$ ; затем сделали другой шар с «неизвестным» радиусом  $t$ , касающийся остальных четырех шаров. Мы получим новый набор из взаимосоприкасающихся пяти шаров и т. д.

Требуется доказать два положения:

Теорема Салли для пяти сфер  
(читать снизу вверх)

$$\Diamond = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 \quad | \quad P = K_1 + K_2 + K_3$$

Дано:

$$K_1, K_2, K_3; K_4, a, (\theta = K_3)$$

$$2(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + a^2) = (K_1 + K_2 + K_3 + a)^2$$

Доказать:

или:

$$2(\Diamond + a^2) = (P + a)^2$$

$$3(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + K_5^2) = (K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5)^2$$

$$3(\Diamond + K_4^2 + \theta^2) = (P + K_4 + \theta)^2$$

$$K_4 = t$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) &= 0 \\ \varphi_2(y) &= 0 \\ \text{По аналогии:} \\ \varphi_3(z) &= 0 \\ \varphi_4(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$3(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + t^2 + \theta^2) = (K_1 + K_2 + K_3 + t + \theta)^2$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = \frac{(P + t + \theta)^2 - 3t^2 - 3\theta^2}{3}$$

$$\Diamond = \frac{(P + a)^2 - 2a^2}{2}$$

$$\frac{(P + a)^2 - 2a^2}{2}$$

$$\Diamond = \frac{(P + t + \theta)^2 - 3t^2 - 3\theta^2}{3}$$

$$\frac{(P + t + \theta)^2 - 3t^2 - 3\theta^2}{3} = \Diamond$$

$$t^2 - (P + \theta)t + \frac{3\theta^2 - (P - \theta)^2}{2} + \frac{3}{4} [(P + a)^2 - 2a^2] = 0$$

$$t = \frac{P + \theta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P + \theta}{2}\right)^2} = \boxed{\phantom{000}}$$

Рис. 130

1) значения кривизны пяти шаров удовлетворяют уравнению Салли:

$$3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + t^2 + b^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + t + b)^2; \quad (19)$$

2) значения кривизны пятых шаров совпадают ( $k = t$ ), т. е. шары  $k_4$  и  $t$  — идентичные.

Напомним:  $k_1, k_2, k_3$  входящие в доказанное выражение (17) и в предполагаемое (18), — одни и те же числа!

Кратко обозначим постоянные величины:  $k_1 + k_2 + k_3 = P$ ;  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = T$ . Выполним алгебраические преобразования \*

$$\begin{array}{l|l} \text{в доказанном (17):} & \text{в предполагаемом (18):} \\ 2(T + a^2) = (P + a)^2, \quad (20 \text{ а}) & 3(T + t + b^2) = (P + t + b)^2, \quad (20 \text{ б}) \\ T = \frac{(P + a)^2 - 2a^2}{2} \quad (21 \text{ а}) & T = \frac{(P + t + b)^2 - 3t^2 - 3b^2}{3}. \quad (21 \text{ б}) \end{array}$$

Левые части в (21 а) и (21 б) суть *равные числа*, поэтому запишем предполагаемое равенство (21 б) в форме

$$\frac{(P - a)^2 - 2a^2}{2} = \frac{(P + t + b)^2 - 3t^2 - 3b^2}{3}. \quad (22)$$

Равенство (22) приводится к квадратному уравнению относительно неизвестного  $t$ :

$$\begin{aligned} t^2 - 2mt + n &= 0, \\ t &= m \pm \sqrt{m^2 - n}, \\ t &= m + \sqrt{m^2 - n} \end{aligned} \quad (23)$$

(мы ограничились внешним касанием сфер, т. е. положительным значением  $t$ ).

Итак, следующие равенства равносильны (см. граф-схему рис. 130): (17)  $\rightarrow$  (20 а)  $\rightarrow$  (21 а) (левая часть (19)).

Далее, пусть нами вычислена кривизна пятого шара  $t$  из формулы (22) как функция известных чисел  $P, a, b$ :

$$t = t(P, a, b). \quad (24)$$

Выполняя алгебраические преобразования, получаем цепь равносильных выражений: (24)  $\rightarrow$  (23)  $\rightarrow$  (22)  $\rightarrow$  (правая часть (19)). В этом месте нас поджидает *логическая тонкость*: переход (22)  $\rightarrow$  правая часть (19) нами совершается заменой

---

\* Подобный переход от двумерного пространства к трехмерному посредством понятия «касание больших кругов» мы успешно применили выше при поиске целочисленных шаров Содди.

в (22) выражения  $\frac{(P-a)^2 - 2a^2}{2}$  на  $T = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ . Основанием этой замены является доказанная первая теорема Содди для окружностей, из которой следует равенство:  $\frac{(P-a)^2 - 2a^2}{2} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$  (т. е. левая часть (19)).

В выражении (23) величины  $m$  и  $n$  зависят только от известных чисел  $P, a, b$ . Таким образом, неизвестное вначале значение кривизны  $t$  нам удалось выразить — благодаря доказанному соотношению Содди (17) — как функцию известных величин:  $t = t(m, n) = t(P, a, b)$ .

Соотношение (24) означает, что мы завершили анализ (поиск) доказательства формулы Содди (18) для пространства. Синтез же доказательства (18) сводится к обращению предыдущих преобразований.

Замена в (21) левой части  $\frac{(P-a)^2 - 2a^2}{2}$  через

$T = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$  находит основание в том, что получаемое так равенство верно для любой тройки из пяти взаимосоприкасающихся кругов (шаров) ( $k_i, k_j, k_p$ ). Указанный переход в «двойном» равенстве (19) от его левой части к правой действительно позволяет дойти снизу вверх до (18) цепью тождественных преобразований: правая часть (19)  $\rightarrow$  (21 б)  $\rightarrow$  (20 б)  $\rightarrow$  (18 т).

Итак, значение  $t$  удовлетворяет соотношению (18 т). Но отсюда еще не следует доказываемое (18): в роли пятого шара надо испытать еще остальные тройки больших кругов (шаров).

Рассмотрим второй набор шаров:  $k_1, k_2, z, k_4, b$ . Аналогично предыдущему докажем, что эти числа удовлетворяют другому соотношению:

$$3(k_1^2 + k_2^2 + z^2 + k_4^2 + b^2) = (k_1 + k_2 + z + k_4 + b)^2. \quad (18 z)$$

Для набора шаров ( $k_1, y, k_3, k_4, b$ ) имеем:

$$3(k_1^2 + y^2 + k_3^2 + k_4^2 + b^2) = (k_1 + y + k_3 + k_4 + b)^2. \quad (18 y)$$

Для последнего набора ( $x, k_2, k_3, k_4, b$ ) получаем:

$$3(x^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + b^2) = (x + k_2 + k_3 + k_4 + b)^2. \quad (18 x)$$

Итак, мы получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $x, y, z, t$ :

$$\begin{cases} 3(x^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + b^2) = (x + k_2 + k_3 + k_4 + b)^2 & (18 x) \\ 3(k_1^2 + y^2 + k_3^2 + k_4^2 + b^2) = (k_1 + y + k_3 + k_4 + b)^2 & (18 y) \\ 3(k_1^2 + k_2^2 + z^2 + k_4^2 + b^2) = (k_1 + k_2 + z + k_4 + b)^2 & (18 z) \\ 3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + t^2 + b^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + t + b)^2 & (18 t) \end{cases}$$

Утверждаем: решением данной системы являются значения:  $x = k_1, y = k_2, z = k_3, t = k_4$ .

В самом деле, подставив объявленные значения неизвестных в систему, мы получаем одно и то же выражение (18), становящееся тем самым соотношением Содди (2) для пяти взаимосоприкасающихся шаров с данными значениями кривизны.

В учебниках и задачниках по геометрии содержатся задачи, где рассматриваются вписанные окружности и сферы. Однако плоскостные и пространственные задачи предлагаются порознь и в разных пособиях, поскольку планиметрия и стереометрия разделены традиционно во времени изучения на годы.

Следует отметить одну особенность: если на плоскости речь идет о касании окружности с прямой, то в пространстве возникают два случая касания сферы:

- 1) касание сферы с плоскостью (гранью);
- 2) касание сферы с пространственной прямой или с ребром многогранника.

Формулы Содди связывают касание прямой и окружности на плоскости и с касанием второго рода, то есть с касанием сферы не с гранью, а с ребром многогранника.

Применение формул Содди наиболее поучительно при сравнении решений для предельных случаев. Рассмотрим уравнения

$$\begin{array}{l|l} \text{для плоскости:} & \text{для пространства:} \\ 2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + 0^2 + x^2\right) = & 3\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + 0^2 + x^2\right) = \\ = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 0 + x\right)^2, & \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + x\right)^2. \end{array} \quad \begin{matrix} (A) \\ (B) \end{matrix}$$

Определим геометрический смысл этих уравне-

ний. Нулевая кривизна  $\frac{\text{третьей окружности}}{\text{четвертой сферы}}$  означает, что эта  $\frac{\text{линия}}{\text{поверхность}}$  имеет бесконечно большой радиус:

$$\begin{aligned} R &= \infty \\ \downarrow \uparrow \\ \frac{1}{R} &= k = 0, \end{aligned}$$

т. е. представляет  $\frac{\text{прямую линию}}{\text{плоскость}}$ .

Итак, смысл данных уравнений следующий.

<p>Даны две окружности <math>O_1(1)</math>, <math>O_2(2)</math> и прямая <math>O_3(\infty)</math>. Требуется определить радиус четвертой окружности <math>O_4(x)</math>, касающейся всех данных трех линий.</p>	<p>Даны три сферы <math>O_1(1)</math>, <math>O_2(2)</math>, <math>O_3(2)</math> и плоскость <math>O_4(\infty)</math>. Требуется определить радиус пятой сферы <math>O_5(x)</math>, касающейся всех четырех данных поверхностей.</p>
---	---

Решив квадратные уравнения, полученные из (А) и (Б), получаем корни и значения радиусов:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{3 + \sqrt{10}}{2} > 0 \quad (R' = \frac{2}{3 + \sqrt{10}}), \\ x_2 &= \frac{3 - \sqrt{10}}{2} < 0 \quad (R'' = \frac{2}{3 - \sqrt{10}}); \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 0 \quad (R' = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}), \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < 0 \quad (R'' = \frac{2}{1 - \sqrt{3}}). \end{aligned} \right.$$

Условимся об индексации:  $R' > 0$  — радиус  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ , извне касающейся остальных;  $R'' < 0$  — внутреннее касание (обе фигуры располагаются по одну сторону от касательной прямой или плоскости).

Совершим небольшой экскурс в дидактику математики. Включение формулы Содди в практикум по решению задач обогащает не столько ассортимент задач, сколько общепсихологическую культуру переработки информации. Задача о построении окружности, касающейся трех заданных линий, является классической задачей (частным случаем проблемы Аполлония).

После освоения формул Содди в распоряжении

учителя оказываются три способа решения данной задачи, а именно:

1) радиус искомой окружности  $R_4$  можно вычислить по формуле Содди;

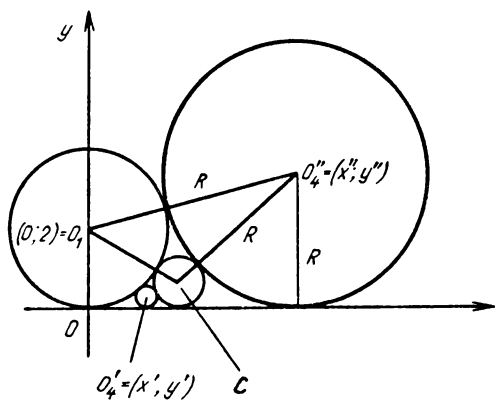
2) этот радиус можно вычислить координатным методом;

3)  $R_4$  можно найти измерением длины перпендикуляра, если предварительно точно построить искомую окружность  $O_4$  с помощью циркуля и линейки.

Наиболее ценный дидактический элемент в подобных ситуациях — это выполнение классического правила дидактики математики: *лучше одну задачу решить несколькими способами, чем несколько задач одним способом.*

Итак, способ 1 — теорема Содди, рассмотренная выше.

Способ 2. Пусть за  $O_3(\infty)$  принята ось абсцисс; построим окружность  $O_2(2)$  с центром в начале координат; окружность  $O_3(1)$  построим рядом с  $O_2$  с центром в точке  $O_3(3; 0)$ . Искомыми являются три числа: координаты центра  $O_4(x; y)$  и радиус этой окружности  $R=y$ . Кроме того, неизвестна абсцисса точки  $O_2(x; 1)$  (рис. 131).



$$\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = 2 + R \\ \sqrt{(x-x')^2 + (y-1)^2} = 3 \\ y = R \end{cases}$$

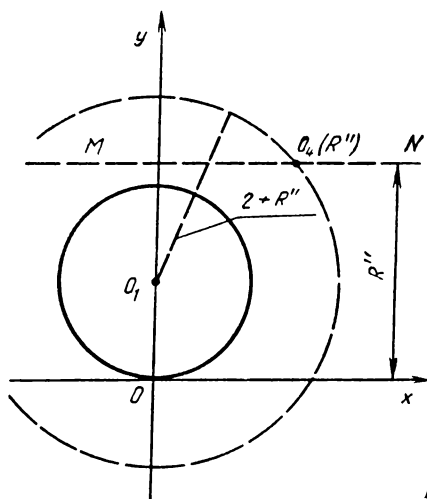
Рис. 131



Итак, рассматриваемая задача может быть решена и на занятиях по аналитической геометрии.

**Способ 3.** Пусть по формуле Содди вычислен радиус четвертой окружности,  $O_4(R'')$ , где

$R'' = \frac{2}{3 - \sqrt{10}} \approx -3,6$ . В этом случае центр четвертой окружности  $O_4(-3; 6)$ , касающейся окружности  $O_1(2)$  и оси  $Ox$ , есть точка пересечения окружности  $O_1(2; R'')$  и прямой  $MN$ , параллельной оси  $Ox$  на расстоянии  $R''$  от нее (рис. 132).



$$\begin{aligned} MN &\parallel Ox \\ MN \cap O_1(2; R'') &= O_4 \end{aligned}$$

**Рис. 132**

Разумеется, наши рассуждения и построения проведены эскизно, и тем не менее они иллюстрируют следующую мысль: формулы Содди увеличивают комбинационные возможности для решения задач элементарной геометрии.

Мы провели обсуждение того, как возможно использовать формулу Содди как неизвестное пока в школьной практике средство решения позиционной задачи на плоскости. Предлагаем читателю использовать такой же подход к параллельной задаче на

касание пятой сферы трех данных сфер и плоскости координат.

Следующий пример относится к тому предельному случаю, когда равные  $\frac{\text{две окружности}}{\text{три сферы}}$  соприкасаются взаимно с  $\frac{\text{прямой } O_3(\infty)}{\text{плоскостью } O_4(\infty)}$ . Сравним три формулы Содди при различных размерностях пространства.

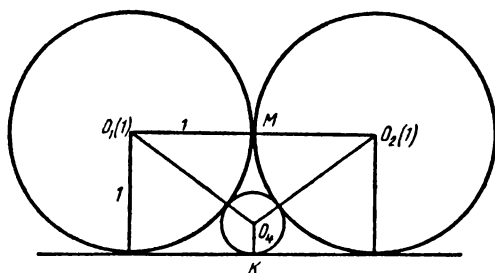
Формулы	Кривизна	Радиусы
$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + 0 + x^2\right) = \left(\frac{1}{1} + 0 + x^2\right)$ (а)	$k_1 = 4, k_2 = 0$	$R' = \frac{1}{4}, R'' = \infty$
$3\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + 0^2 + x^2\right) =$ $= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + 0 + x\right)^2$ (б)	$k_1 = 3, k_2 = 0$	$R' = \frac{1}{3}, R'' = \infty$
$4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + 0^2 + x^2\right) =$ $= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + 0 + x\right)^2$ (в)	$k_1 = \frac{8}{3}, k_2 = 0$	$R' = \frac{3}{8}, R'' = \infty$

Уравнению (а) соответствует случай, когда четвертая окружность  $O_4(\frac{1}{4})$  с радиусом, равным четверти радиусов двух других окружностей, расположена между касательной и этими двумя окружностями (рис. 133).

Уравнение (б) дает касательную прямую, которая представляет в этой задаче как бы слившиеся две линии  $O_3(\infty)$  и  $O_4'(\infty)$  (рис. 134).

Третье уравнение (в) также имеет два действительных корня (радиусы двух четырехмерных гипersфер). Реально «увидеть» четырехмерные фигуры невозможно, ибо наш мир трехмерен. Но обсуждать такие обобщения в алгебраическом смысле бывает иногда целесообразно. Примечательно здесь то, что величины радиусов возможно вычислить и непосредственно, на основе геометрических соображений. Получение тех же числовых значений радиусов

весьма ценно в плане развития интереса к математике



$$O_4K = r_4 = \frac{1}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + 0^2 + x^2\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + 0 + x\right)^2$$

$$O_4\left(\frac{1}{4}\right); O''(\infty)$$

Рис. 133

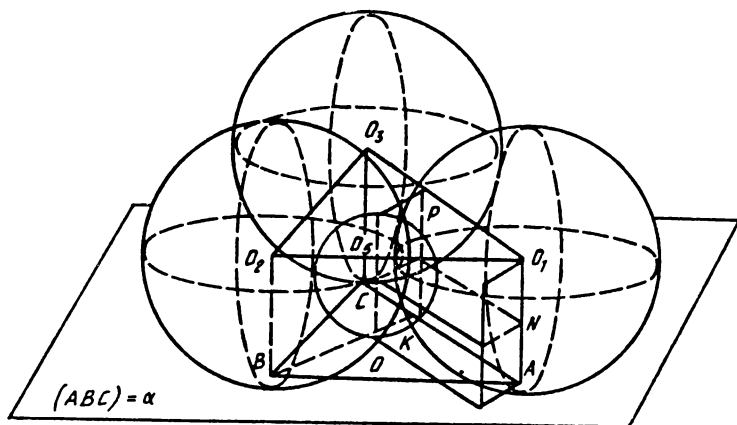
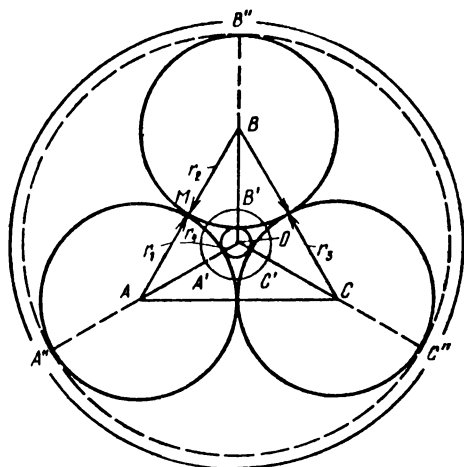


Рис. 134

Представляет интерес рассмотреть правильный треугольник и правильный тетраэдр и для обоих

случаев вычислить радиусы  $\frac{\text{четвертых окружностей}}{\text{пяти сфер}}$  с внешним и внутренним касанием (рис. 135; тетраэдр, вид сверху).

А. Пусть все стороны  $ABC$  равны 2. | Б. Пусть все ребра тетраэдра  $ABCD$  равны  $2^*$ .



А.  $2(1 + 1 + 1 + x^2) = (1 + 1 + 1 + x)^2$  (правильный треугольник)

Б.  $3(1 + 1 + 1 + 1 + x^2) = (1 + 1 + 1 + 1 + x)^2$  (правильный тетраэдр)

Рис. 135

Если построить с центром в вершинах правильного  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$   $\frac{\text{три окружности}}{\text{четыре сферы}}$  радиусом 1, то каждая из них будет касаться всех остальных.

Итак, при  $r_i = 1 = r_i^2$  значения кривизны окружностей и сфер в любой из точек касания будут равны единице:

$$k_i = \frac{1}{r_i} = \frac{1}{1} = 1 = 1^2 = k_i^2$$

\* Проекция контура пятой сферы, касающейся четырех других ( $O_5'$  и  $O_5''$ ), показана штрихами.

(обозначим для удобства вычислений искомое  $k_4 = x$ ).

Пусть  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ,  
 $2(1^2 + 1^2 + 1^2 + x^2) = (1 + 1 +$   
 $+ 1 + x)^2$ . Проверяем до-  
 казанное Коксетером ра-

венство для данного част-  
 ного случая. Решив урав-

нение  $6 + 2x^2 = 9 + 6x + x^2$ ,

получим:  $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$ ,

$r'_4 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$ ,  $r''_4 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$ .

Последняя окружность  
 объемлет три остальные  
 окружности.

Предположим:  $3(1^2 + 1^2 +$   
 $+ 1^2 + 1^2 + x^2) = (1 + 1 + 1 + 1 + x)^2$ .

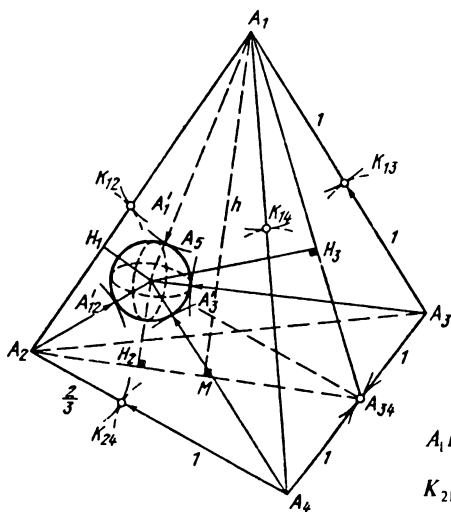
Решив уравнение, полу-  
 чим:  $12 + 3x^2 = 16 + 8x + x^2$ ,

откуда  $r'_5 = \frac{\sqrt{6} - 2}{2} > 0$   
 (внешнее касание),

$r''_5 = -\frac{2 + \sqrt{6}}{2} < 0$  (внутрен-  
 нее касание).

Последняя сфера объ-  
 емлет четыре остальные  
 сферы.

Пусть нам дан полуописанный тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ ,  
 из вершин которого проведены сферы с заданными  
 радиусами (рядом написаны соответствующие зна-  
 чения кривизны этих сфер) (рис. 136).



$$\begin{aligned} A_1K_{12} &= r_1 = \frac{4}{3} \\ K_{21}A_2 &= r_2 = \frac{2}{3} \\ \hline A_1A_2 &= r_1 + r_2 = 2 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Рис. 136

$$\begin{array}{l}
 r_1 = \frac{4}{3}, \\
 r_2 = \frac{2}{3}, \\
 r_3 = 1, \\
 r_4 = 1, \\
 r_5 = \square;
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 A_1 A_2 = r_1 + r_2 = \\
 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \text{ и т. д.;}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 k_1 = \frac{3}{4}, \\
 k_2 = \frac{3}{2}, \\
 k_3 = 1, \\
 k_4 = 1, \\
 k_5 = \frac{1}{r_5} = \square.
 \end{array}$$

Вычислим предполагаемый радиус пятой сферы  $r_5$ , касающейся извне всех четырех других сфер, по формуле:

$$3 \left( \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{3}{2} \right)^2 + 1^2 + 1^2 + k^2 \right) = \left( \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + 1 + 1 + k \right)^2.$$

После преобразований получаем квадратное уравнение  $k^2 - \frac{17}{4}k - \frac{29}{16} = 0$ , откуда  $k_5 = \frac{17 \pm 9\sqrt{5}}{8}$ .

Ограничимся сферой внешнего касания, расположенной между четырьмя другими сферами:

$$51 \quad r_5 = \frac{1}{k_5} = \frac{8}{17 + 9\sqrt{5}}, \quad r_5 \approx 0,215490468.$$

(Приближенное значение  $r_5$  нами вычислено на калькуляторе.)

Для контроля ответа первого решения найдем значение радиуса пятой сферы другим способом. Найдем суммы длин противоположных ребер полуприсланного тетраэдра, которые оказываются равными:  $A_1 A_2 + A_3 A_4 = A_1 A_3 + A_2 A_4 = A_1 A_4 + A_2 A_3 = 4$ .

Заметим, что треугольники  $A_1 A_3 A_4$  и  $A_2 A_3 A_4$  — также равнобедренные, так как  $A_1 A_3 = A_1 A_4$  и  $A_2 A_3 = A_2 A_4$  и т. д. На основе геометрических соображений для вычисления того же значения  $r_5$  приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}
 &4\sqrt{25r_5^2 + 4r_5} + 15\sqrt{r_5^2 + 28r_5} - 4 + \\
 &+ \sqrt{39r_5^2 + 58r_5} - 16 = 2\sqrt{5}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Наступает критический этап нашего рассужде-

ния: при подстановке приближенного значения  $r_5 \approx 0,215490468$  (вычисленного по формуле Содди) должно выполняться (25)! Калькулятор выдал нам числовые результаты двух частей равенства, совпадающие до седьмого знака! (Удовольствие убедиться в этом факте оставляем читателю.)

Возникает непростая дидактическая проблема: могут ли в подобной учебной ситуации выкладки на калькуляторе временно заменить вообще сложные логические доказательства равенства, которые пока учащимся недоступны, либо даже вообще неизвестны, но интересная формула им сообщена?

В данной связи поучителен опыт математических открытий, описанных Эйлером. Знаменитый математик интуитивно установленное им то или иное равенство вначале многократно проверял числовыми подстановками, лишь затем переходил к поискам строгого доказательства. Калькуляторы являются средством, ускоряющим этот процесс непосредственных числовых подстановок. Теорема Содди представляет богатый материал для осмысленных упражнений на калькуляторе.

## Беседа 11 АПОФЕОЗ АНАЛОГИЙ

В формуле Содди, сохраняющей силу и для многомерных пространств, сокрыто много тайн, которые могут быть найдены в ходе освоения теоремы. В специальной работе Коксетера, посвященной открытию Содди, исследованы локсодромы, порождаемые точками соприкосновения сфер. В небольшом числе публикаций на эту тему (Коксетер, Гарднер, Шарыгин и др.) авторы ограничиваются преимущественно точками касания и не включают в рассмотрение многоугольники и многогранники, образуемые точками касания. Не встречаются работы, указывающие на тот факт, что взаимосоприкосновение четырех сфер означает то, что центры сфер являются вершинами полуописанного тетраэдра, т. е. каждая четверка радиусов (из пяти возможных) связана аддитивно:

$$r_1 + r_3 \left| \begin{array}{l} r_2 \\ r_4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} r_3 + r_4 = A_3 A_4 \\ r_2 + r_4 = A_2 A_4 \\ r_3 + r_2 = A_3 A_4 \end{array} \right|.$$

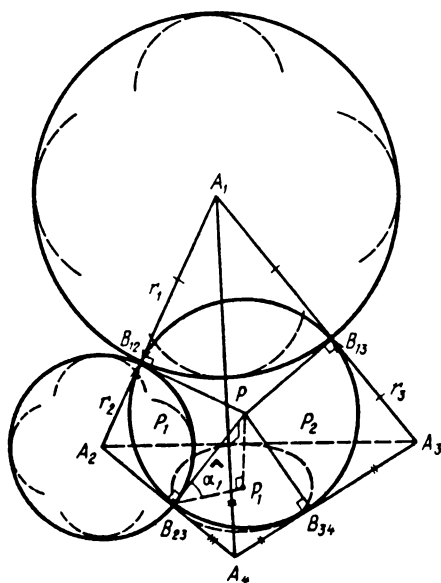
Мы исходим из того, что всякая  $\frac{\text{тройка окружностей}}{\text{четверка шаров}}$  может быть расположена так, что  $\frac{\text{окружность}}{\text{шар}}$  находится в соприкосновении с каждой(ым) из  $\frac{\text{двух}}{\text{трех}}$  других.

Включение полуописанного тетраэдра в систему логических связей соприкосновения сфер открывает новые возможности для обнаружения неожиданных свойств точек, отрезков, дуг, треугольников и тетраэдров.

Пусть речь идет о полуописанном тетраэдре  $A_1 A_2 A_3 A_4$  (рис. 137).

Точки касания его ребер с полуописанной сферой  $P(\rho)$  удобно обозначать двойными индексами:





$$\begin{aligned}
 A_1 A_2 &= r_1 + r_2 \\
 A_1(r_1) \cap A_2(r_2) &= B_{12} \\
 PB_{ij} &= \rho \\
 PP_1 &\perp \alpha_1 \\
 PP_1 &= h_1 \\
 P_1 B_{23} &= r_1 \\
 \alpha_1, (\widehat{A_2 A_4 P}) &= \hat{\alpha}_1 \\
 \arcsin \frac{h_1}{r_1} &= \hat{\alpha}_1.
 \end{aligned}$$

Рис. 137

$$A_1(r_1) \cap A_2(r_2) \cap P(\rho) \cap A_1 A_2 = B_{12} \text{ и т. д.}$$

В задачные структуры могут войти следующие элементы:  $PB_{ij} = \rho$  (радиус полувписанной сферы);  $r_i$  — радиус окружности, вписанной в грань  $\alpha_i = A_2 A_3 A_4$ , лежащую против вершины  $A_1$ . Эта окружность проходит через точки  $B_{12}, B_{23}, B_{31}$ .  $PP_i = h_i$  — высоты, опущенные из точки  $P$  на грань  $\alpha_i$ .

Плоскость  $PA_3 A_4$  образует с основанием тетраэдра  $\alpha_1$  двугранный угол  $\beta_1$ , прилежащий к этой грани:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \widehat{\alpha_1, PA_2 A_3} = \widehat{\alpha_1, PA_2 A_4} = \widehat{\alpha_1, PA_3 A_4} \\
 &\quad \downarrow \quad \uparrow \\
 \beta_1 &= \widehat{PB_{34} P_1} = \widehat{PB_{24} P_1} = \widehat{PB_{23} P_1} = \arcsin \frac{h_1}{r_1}.
 \end{aligned}$$

Каждый двугранный угол при ребре тетраэдра состоит из двух прилежащих углов, например,  $\widehat{A_3 A_4}$

противолежит углу  $\widehat{A_1A_2}$  и потому  $\widehat{A_3A_4} = \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2}$ , и наоборот:  $\widehat{A_1A_2} = \widehat{\beta_3} + \widehat{\beta_4}$ .

У тетраэдра всего 4 вида прилежащих углов по числу граней, и потому  $\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_3A_4} = \widehat{A_1A_3} + \widehat{A_2A_4} = \widehat{A_1A_4} + \widehat{A_2A_3}$ .

В задачах по полуописанному тетраэдру могут быть далее указаны (или вычислены) величины плоских, двугранных и трехгранных углов, расстояния от центров описанной, вписанной и полувписанной сферы до граней (ребер, вершин), площади граней, объем тетраэдра и его частей и т. д.

Надо полагать, что со временем в содержании конкурсных задач будут шире использоваться мотивы тетраэдра и его частных видов: правильный тетраэдр, равногранный тетраэдр, ортоцентрический тетраэдр, полуописанный тетраэдр, правильная треугольная пирамида. Дидактически оправдана практика решения пар задач по треугольнику и тетраэдру, причем важно, чтобы числовые значения некоторых величин были одни и те же, что логически объединяет такие конструкции в единое математическое упражнение.

Известно, какую значительную работу выполняют комиссии математиков и опытных учителей при подготовке заданий, скажем, для международных математических олимпиад. В подобного рода дидактических по содержанию работах могут найти свое место опять же задания, являющиеся трехмерными аналогами плоскостных исторических задач. Иногда плоскостные задачи знаменитых авторов находят великолепное обобщение, и нередко решение обобщенной задачи оказывается гораздо проще и нагляднее, чем задача-прототип.

Приведем тому пример (рис. 138).

**Теорема Ньютона (N):**  
если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

52

**Обобщение теоремы Ньютона (NЭ):**

если в гексаэдр можно полувписать сферу, то центр сферы лежит на плоскости, соединяющей середины диагоналей гексаэдра (теорема Ньютона — Эрдниевых).

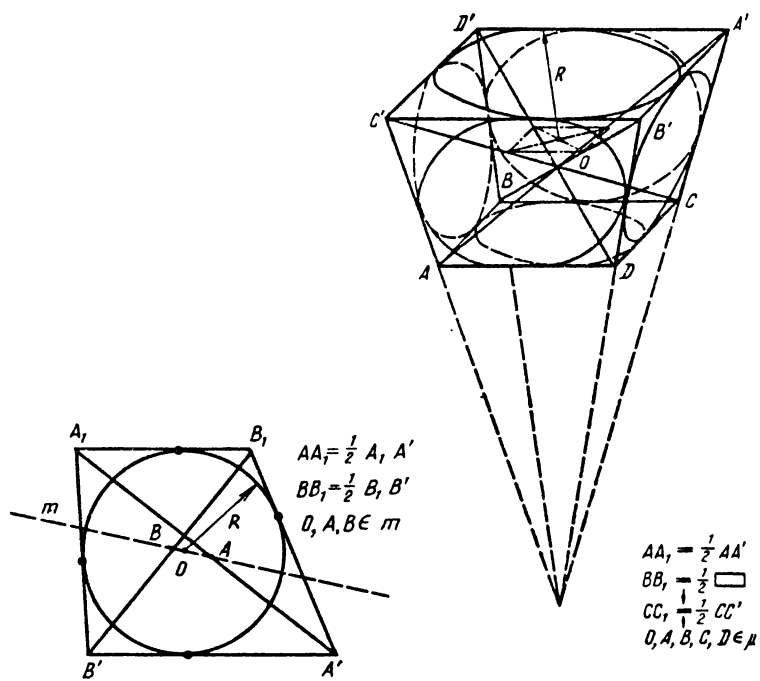


Рис. 138

А вот еще одна аналогия теорем (рис. 139).

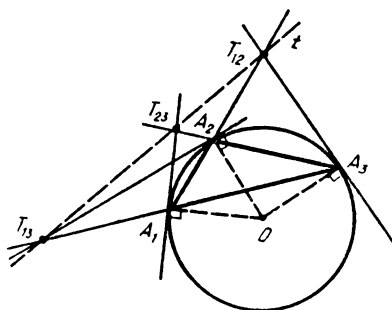


Рис. 139

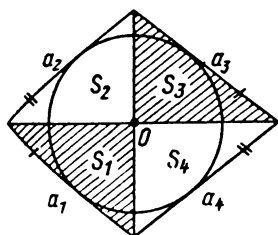
Если в окружность вписан треугольник  $A_1A_2A_3$ , то точки пересечения касательных, проведенных к окружности из вершин треугольника, с противоположной стороной треугольника лежат на одной прямой.

Если в сферу вписан тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , то прямые пересечения касательных плоскостей к сфере в вершинах тетраэдра с противоположными гранями тетраэдра лежат в одной плоскости.

Обратим здесь внимание на то, что если в основу аналогии взята площадь фигуры, то в пространстве часто соблюдается аналогия относительно объемов, например:

если соединить центр  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ , вписанной в **53**  $\frac{\text{четыреугольник}}{\text{гексаэдр}}$ , то суммы  $\frac{\text{площадей}}{\text{объемов}}$  противоположных  $\frac{\text{треугольников}}{\text{тетраэдров}}$  равны (рис. 140).

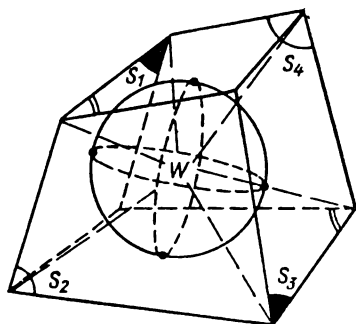
ОПИСАННЫЙ  
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



$$a_1 + a_3 = a_2 + a_4$$

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

ОПИСАННЫЙ  
ГЕКСАЭДР



$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 \quad (\text{площади})$$

$$V_1 + V_3 = V_2 + V_4 \quad (\text{объемы})$$

Рис. 140

Удачные обобщения типа теоремы Ньютона крайне редки. Чаше встречаются случаи, когда обобщение оказывается значительно сложнее исходной проблемы.

В учебнике Адамара приведено решение знаменитой задачи Маскерони на построение: в данный треугольник требуется вписать три окружности, каждая из которых касается двух сторон и двух других окружностей (рис. 141). Гораздо проще вычислительная задача обратной структуры, например: даны три взаимосоприкасающиеся окружности радиусов 1, 2, 3 и проведены прямые, касающиеся каждой пары окружностей; найти стороны и углы построенного треугольника.

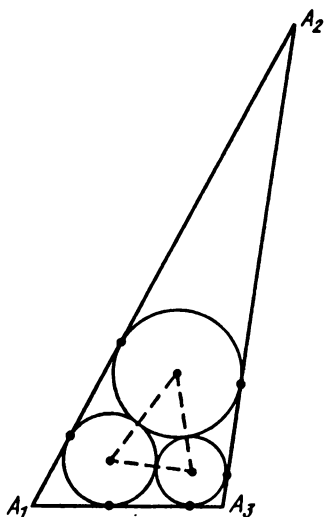


Рис. 141

Как прямая, так и обратная задачи могут быть обобщены на пространство, например:

- 54 в данной полувписанный тетраэдр  $\frac{\text{вписать}}{\text{полуписать}}$  четыре шара так, чтобы каждый из них касался трех  $\frac{\text{граней}}{\text{ребер}}$  и трех остальных шаров (рис. 142).

Возможно предлагать и задачи обратной структуры. Решение этих задач требует использования координатно-векторного метода.

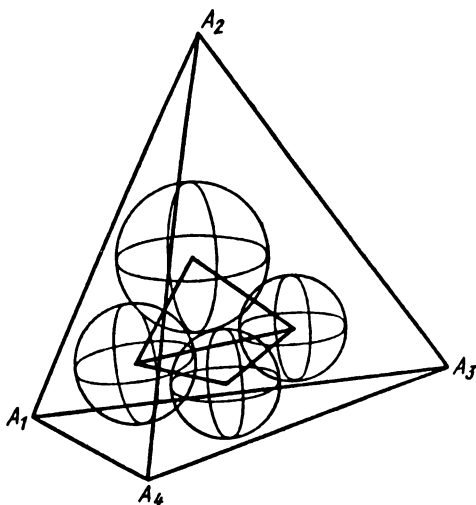


Рис. 142

Мы хотим подчеркнуть красоту и оригинальность исторических задач, обобщение которых обогащает логико-психологическую практику математического образования. При самостоятельном обобщении учащимся (студентом) задачи, сохранившей в истории науки имя своего автора, у учащихся возникает здоровый интерес к внутренней стройности исходной проблемы, признанной временем. Мы просим читателя в последующем уделить особое внимание как бы движению ищущей мысли, перерастанию двумерных представлений в трехмерные.

Пусть нам даны взаимосоприкасающиеся  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$  с центрами в вершинах  $A_i$  простейшего много  $\frac{\text{угольника}}{\text{гранника}}$  и радиусами  $r_i$ . Точки соприкосновения  $B_{ij}$   $\frac{\text{окружностей}}{\text{сфер}}$  расположены при этом на  $\frac{\text{стороне}}{\text{ребре}}$   $A_i A_j$ . Если провести через эти точки соприкосновения  $\frac{\text{прямые } m_{ij}}{\text{плоскости } \mu_{ij}}$ , перпендикулярные к соответствующей(му)

стороне ребру  $A_i A_j$ , то они пересекутся в центре вписанной окружности  $W$  полувыписанной сферы  $P$ . Например:

$$\left. \begin{array}{l} B_{12} \in m_{12}, \\ m_{12} \perp A_1 A_2 \dots \\ m_{12} \cap m_{23} \cap m_{31} = W, \\ WB_{ij} = \rho; \end{array} \right| \begin{array}{l} B_{12} \in \mu_{12}, \\ \mu_{12} \perp A_1 A_2 \\ \mu_{12} \cap \mu_{23} \cap \dots \cap \mu_{34} = P, \\ PB_{ij} = \rho. \end{array}$$

Несложно доказать, что три прямые  $m_{ij}$  шесть плоскостей  $\mu_{ij}$  пересекаются в одной точке, а именно в центре  $W$  вписанной в треугольник окружности центре  $P$  полувыписанной в тетраэдр сферы.

В самом деле, точка  $W$  точка  $P$  является общей вершиной пар касательных, проведенных к одной и той же окружности сфере, причем каждый отрезок, соединяющий этот центр с точкой соприкосновения, является общей касательной окружностей сфер, взаимосоприкасающихся в данной точке. Точки  $B_{ij}$  являются точками касания вписанной окружности со стороной треугольника полувыписанной сферы с ребром тетраэдра. Обозначим  $WB_{ij} = \rho$ ,  $PB_{ij} = \rho$ .

Далее мы рассуждаем так: треугольник характеризуется своей площадью  $S$ , а тетраэдр — своим объемом  $V$ . Попытка выразить объем полуописанного (не всякого!) тетраэдра через радиусы  $r_i$  четырех взаимосоприкасающихся сфер оказалась логически непростой задачей. Лишь в книге А. А. Скопца «Геометрия тетраэдра и его элементов» мы обнаружили искомую формулу в следующем виде:

$$V = \frac{2r_1 r_2 r_3 r_4}{3\rho}. \quad (1)$$

Понятно было наше желание выяснить вопрос: должна же существовать аналогичная (1) формула

для площади треугольника через произведение радиусов соприкасающихся окружностей. Найти такую в справочниках не удалось, но она легко была выведена нами как следствие теоремы Герона. Приведем этот вывод:

$$r_1 + r_2 + r_3 = p \text{ (полупериметр),}$$

$$a_1 = r_2 + r_3,$$

$$r_1 = p - (r_2 + r_3) = p - a_1,$$

$$r_2 = p - a_2,$$

$$r_3 = p - a_3,$$

$$S = \sqrt{p(p - a_1)(p - a_2)(p - a_3)},$$

$$S^2 = (r_1 + r_2 + r_3) r_1 r_2 r_3. \quad (2)$$

Из формул  $S = p\rho$  и (2) следует:

$$S = (r_1 + r_2 + r_3) \rho. \quad (3)$$

Поделив по частям (2) и (3), получаем искомую формулу:

$$55 \quad S = \frac{r_1 r_2 r_3}{\rho}. \quad (4)$$

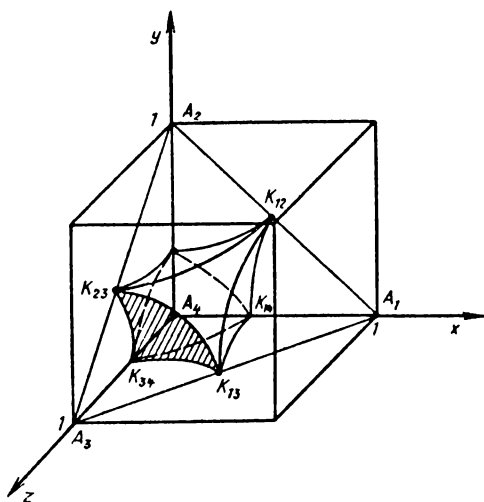
Нас, конечно, вдохновило структурное сходство найденной формулы (4) для площади треугольника и формулы объема полуописанного тетраэдра (1), тем более, что формулы (4) при всей ее простоте не найти ни в одном справочнике:

$$S = \frac{r_1 r_2 r_3}{\rho}; \quad (4) \quad \left| \quad V = \frac{2r_1 r_2 r_3 r_4}{3\rho}. \quad (1)\right.$$

В обеих формулах  $r_i$  — радиусы соприкасающихся фигур,  $\rho$  — радиус  $\frac{\text{вписанной}}{\text{полуописанной}} \frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ . Но поражает здесь контраст: при элементарной простоте вывода формулы (4) формула (1) требует для своего доказательства сложного теоретического аппарата (у А. А. Скопеца использованы для доказательства (1) такие понятия, как синус трехгранного угла, определитель Грама и др.). Неужели нет другого



пути к формуле (1)? Поиск доказательства этой формулы мы оставляем честному читателю.\*



$$V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r_4 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}$$

Рис. 143

Вспомним далее следующую пару суждений: во

---

\* Д. Поля замечает, что изучение математики должно состоять на две трети из здравого смысла и лишь на одну треть из строгих доказательств. Для вящей убедительности формулы (1) предлагаем ее проверить для простейшего полуописанного тетраэдра, а именно равнобедренного прямоугольного с боковыми ребрами в 1 единицу

(объем такого тетраэдра  $\frac{1}{6}$  куб. единиц, рис. 143).

всякий  $\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$  можно вписать единственную окружность  $\frac{\text{сферу}}$ .

Если применительно к треугольнику окружность может быть вписанной или описанной, то в случае тетраэдра (многогранника) для сферы существует еще третья возможность: она может быть полувписанной (касаться всех ребер только в случае полуописанных тетраэдров). На наше счастье, математики почему-то прошли мимо этого третьего пути...

Однако полувписать сферу, касающуюся всех шести ребер тетраэдра, удастся лишь в том случае, когда тетраэдр обладает взаимосоприкасающимися сферами, для чего должны быть равны суммы противоположных ребер:  $A_1A_2 + A_3A_4 = A_1A_3 + A_2A_4$  и т. д.

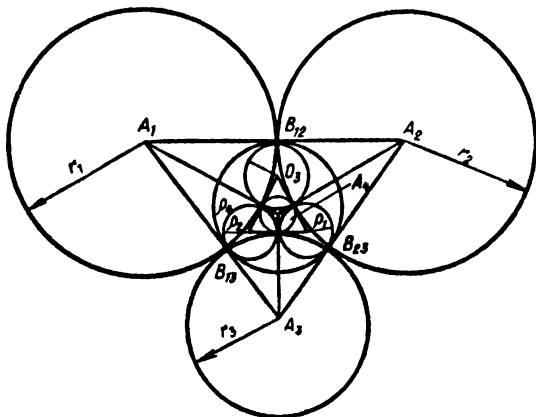
Выше мы доказали характеристическое свойство полуописанного тетраэдра: для того чтобы в тетраэдр можно было полувписать сферу, необходимо и достаточно равенства сумм противоположных ребер.

Построим далее согласно теореме Содди  $\frac{\text{четвертую окружность}}{\text{пятую сферу}}$ , расположенную между остальными  $\frac{\text{тремя}}{\text{четырьмя}}$  (внешнее касание; радиусы  $r_4 = \frac{1}{k_4}$ ,  $r_5 = \frac{1}{k_5}$  — положительные числа).

Пусть точки касания последней  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$  с остальными следующие:  $B_{41}, B_{42}, \dots B_{43}$  (на плоскости),  $B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}$  (в пространстве) (рис. 144).

Проведем через точки касания  $\frac{\text{прямые } l_{4j}}{\text{плоскости } \lambda_{5j}}$ , соответственно перпендикулярные к прямым, соединяющим  $A_4(A_5)$  с другими вершинами. Каждая точка  $O_j$  есть точка пересечения  $\frac{\text{трех прямых}}{\text{четырёх плоскостей}}$ , являющихся, в свою очередь, касательными к взаимосоприкасающимся  $\frac{\text{окружностям}}{\text{сферам}}$ . Точки  $O_j$  расположены на радиусах, соединяющих точки взаимосоприкосновения  $\frac{\text{окружностей}}{\text{сфер}}$  с центром  $P$   $\frac{\text{вписанной}}{\text{полуописанной}}$

окружности  
сферы. Если теперь соединить точку  $O_4$  с точку  $O_5$  с вершинами треугольника  $A_1 A_2 A_3$   
тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , то он разобьется на частичные три треугольника  
четыре тетраэдра. Так мы обнаружили здесь возможность бесконечного продолжения процесса «вниз».



**ОКРУЖНОСТИ:**

$A_i(r_i)$  — взаимосоприкасающиеся;

$O_i(r_i)$  — вписанные

$$K_1 K'_1 + K_2 K'_2 + K_3 K'_3 = K_4 K'_4; \quad K_i = \frac{1}{r_i}; \quad K'_i = \frac{1}{\rho_i};$$

$B_{ij}$  — точки соприкосновения

**Рис. 144**

В каждый частичный треугольник  
полувыписанный тетраэдр с общей вершиной  $O$  можно вписать окружность  
полувыписать сферу с радиусом  $\rho$ . Между новыми взаимосоприкасающимися тремя окружностями  
четырьмя сферами всегда можно вставить четвертую  
пятую с тем же свойством и т. д. Здесь выявляется ключевой момент: четвертая окружность  $O_4$   
пятая сфера  $O_5$ , будучи взаимосопри-

касающейся с заданными  $\frac{\text{тремя окружностями } O_1, O_2, O_3}{\text{четырьмя сферами } O_1, O_2, O_3, O_4}$ , является  $\frac{\text{вписанной}}{\text{полувыписанной}}$  в  $\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$ , образованный  $\frac{\text{тремя прямыми}}{\text{четырьмя плоскостями}}$ , касательными к ней в точках соприкосновения  $\frac{B_{41}, B_{42}, B_{43}}{B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}}$ .

Выполним несложные преобразования формулы  $\frac{\text{площади}}{\text{объема}}$  для частичного  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$   $O_1 A_2 A_3 (A_4)$ .

$$\left. \begin{aligned} S_1 = S_{\Delta O A_2 A_3} &= \frac{r_2 r_3 r_4}{\rho_1} = \\ &= \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 \rho_1} = \frac{\Pi}{\rho_1 \chi_1}, \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} V_1 = V_{O_1 A_2 A_3 A_4} &= \frac{2}{3} \frac{r_2 r_3 r_4 r_5}{\rho_1} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5}{\rho_1 r_1} = \frac{2}{3} \frac{\Pi}{\rho_1 \chi_1}, \end{aligned} \right|$$

где  $r_1 r_2 r_3 r_4 = \Pi$ ; где  $r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 = \Pi$ ;

$\frac{1}{r_i} = k_i$  — радиус кривизны вписанной  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ ;

$\frac{1}{\rho_i} = \mu_i$  — радиус кривизны полувыписанной  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ .

Далее, имеем

$$\left. \begin{aligned} S_i &= \frac{\Pi}{r_i \rho_i} = \Pi k_i \mu_i, \text{ однако} \\ S_4 &= S_1 + S_2 + S_3 \quad (\Pi \neq 0), \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} V_i &= \frac{\Pi}{r_i \rho_i} = \Pi k_i \mu_i, \text{ однако} \\ V_5 &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \quad (\Pi \neq 0), \end{aligned} \right|$$

или

$$\left. \begin{aligned} k_4 \mu_4 &= k_1 \mu_1 + k_2 \mu_2 + k_3 \mu_3 \\ \text{56 для треугольника } A_1 A_2 A_3; \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} k_5 \mu_5 &= k_1 \mu_1 + k_2 \mu_2 + k_3 \mu_3 + k_4 \mu_4 \text{ (I)} \\ \text{57 для полуописанного тетраэдра } A_1 A_2 A_3 A_4. \end{aligned} \right|$$

Для удобства дальнейших рассуждений за исходным  $\frac{\text{треугольником}}{\text{тетраэдром}}$   $A_1 A_2 A_3 (A_4)$  закрепим номер  $j = 4(5)$ . Так мы приходим к замечательному соотношению (I), связывающему пары сопряженных  $\frac{\text{окружностей}}{\text{сфер}}$

$A_j$  и  $O_j$ . Это означает, что  $\frac{\text{окружность } O_4}{\text{сфера } O_5}$  есть

окружность, вписанная  
сфера, полувписанная в исходный треугольник  $A_1A_2A_3$   
тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ .

Обратим внимание и на такую деталь: окружности  
сферы с общим индексом не имеют общих точек; в част-  
ности, полувписанная окружность  $O_4$   
сфера  $O_5$  находится внутри  
окружности  $A_4$ , сферы  $A_5$ , взаимосоприкасающейся с тремя  
четырьмя  
другими окружностями  
сферами (рис. 145).

# СФЕРЫ:

$A_i(r_i)$  — взаимосоприкасающиеся  
 $O_i(\rho_i)$  — полувписанные

$O_5$  — полувписан в  $A_1A_2A_3A_4$   
 $O_1$  — полувписан в  $A_5A_2A_3A_4$

$$K_i = \frac{1}{r_i}$$

$$\mu_i = \frac{1}{\rho_i}$$

$$\sum_4 K_i \mu_i = K_5 \mu_5$$

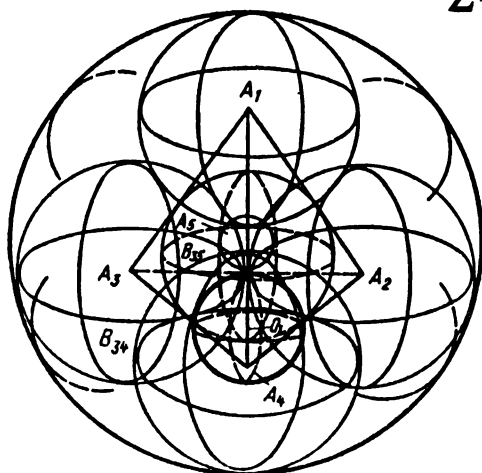


Рис. 145

Известно, что любой куб может породить при делении ребер пополам 8 малых кубов, а при удвоении длин ребер возникает больший куб, состоящий из 8 данных и т.д. Аналогичное бесконечное обновление возникает при переходе от

данного описанного треугольника к другому, в двух направлениях: как при «подъеме» ко все большим фигурам, так и при «спуске» ко все меньшим фигурам того же рода. Эти объекты, чрезвычайно богатые многообразным математическим содержанием, могут послужить хорошей иллюстрацией различных математических методов (инверсия, координаты, векторы, матрицы и др.); на этой основе могут быть составлены поучительные упражнения.

\*\*\*

Читатели обратят внимание на то, что в тексте книги широко использованы специфические приемы, облегчающие понимание родства сопоставляемых суждений: сближение формул, терминов, параллельная и двухэтажная запись и т. п.

Методологическое значение такого изложения становится понятным из высказывания знаменитого физика Максвелла, который указывал, что признание аналогии между двумя системами «приводит к более глубокому знанию обеих, чем познание, которое можно было получить, изучая каждую систему в отдельности»\*.

---

\* Максвелл. О соотношении между физикой и математикой. /Статьи и речи. М.—Л., 1940.

## Беседа 12 (заключительная)

# АНАЛОГИЯ В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подлинное знание живо и практично, оно несет в своем существе тенденцию к передаче и распространению.

*А. Ухтомский, академик*

Каждый данный момент в нашем мозгу происходит сканирование впечатлений, сопоставление наблюдений с уже сформировавшимися образами, что в конечном счете приводит к некоторому предварительному заключению.

Одна из отличительных особенностей этой процедуры состоит в широком использовании аналогий и прототипов.

*И. Пригожин,*  
лауреат Нобелевской премии

Наибольшая заслуга в установлении особой роли умозаключений по аналогии в процессе математического открытия, несомненно, принадлежит профессору Д. Пойа, чьи книги получили широкое признание. Пойа считал нужным помогать учащимся указаниями, как строить обобщения, основанные на правдоподобных суждениях. Вот одно из его заданий, адресованных участникам олимпиад в США с подробными разъяснениями\*:

А. Точка лежит внутри равностороннего треугольника и расположена на расстояниях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от трех его сторон соответственно,  $h$  — высота треугольника. Доказать:  $x + y + z = h$ .

Б. Установите и докажите аналогичную теорему в стереометрии относительно расстояний от внутренней точки до четырех граней правильного тетраэдра.

В. Обобщите обе теоремы так, чтобы они были применимы к любой точке в плоскости или пространстве соответственно (а не только к точкам внутри треугольника или тетраэдра). Дайте четкую и ясную

---

\* Пойа Дж., Килпатрик Ж. Конкурсные задачи по математике Стенфордского университета (с подсказками и решениями). — М., 1994.

формулировку утверждения и, *если у Вас будет время, также и доказательство* (выделено нами — П.Э., О.Э.).

Например, сумма расстояний от внутренней точки  $A$  до  $\frac{\text{сторон}}{\text{граней}}$  постоянна для ромба и ромбодекаэдра (у которого 12 граней, являющихся равными ромбами). Но условие Пойа выполняется и в широком смысле, а именно в случае равносторонних многоугольников и равногранных многогранников. Так, решением задачи может быть неправильный пятиугольник со сторонами в 1 см или девятигранник, ограниченный четырьмя равными треугольниками, четырьмя трапециями и одним квадратом — но все с площадью в  $1 \text{ см}^2$  (рис. 146).

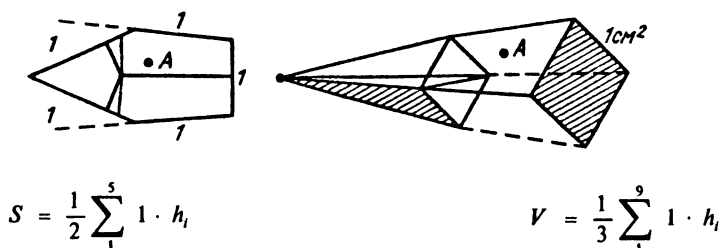


Рис. 146

Простор математическому творчеству открывается всякому, если только будут «открыты шлюзы» перед комбинациями наличных знаний у решающего. Обратим внимание на то, что Пойа советует учащемуся взяться за доказательство составленного им предположения, *если у него будет время*. Иначе говоря, совершать умозаключения по аналогии ценно само по себе, причем усилия по доказательству или опровержению новой задачи могут последовать позже, как фаза, следующая вслед за формулировкой новой мысли, еще не подвергшейся аналитическому испытанию на истинность. Дидактически более ценной является, конечно, первая фаза, требующая от человека смелости мысли и способности делать предположения, не будучи связанным узами формальной логики.

Мыслятся следующие возможные варианты функ-



ционирования суждений по аналогии как равнодопустимые в практике обучения:

1. После оформления суждения по аналогии оно сразу же доказывается или опровергается.

2. После оформления суждения по аналогии оно вообще не исследуется в силу недостатка времени или отсутствия на данном этапе необходимых знаний.

Но здесь ценен факт появления предположения! Важно здесь и то, что умозаключение по аналогии *первично*: оно совершается в полной независимости от возможности или невозможности строго доказать предположение в данный момент времени.

Разумеется, после того как состоялось в голове или на бумаге оформление правдоподобного суждения, которое пока пребывает в статусе возможного, автор данного вероятностного суждения предпринимает первые попытки его доказать. Он может при этом ограничиться проверкой гипотезы для частного случая или соображениями здравого смысла, сравнением с подобными суждениями в данной области. Но даже если этого «контрольного» этапа и не было — нет ничего предосудительного в упражнении по созданию новых предположений на основе исходной мысли-прототипа.

Упомянем, что ныне распространенной технологией обучения математике в средней и высшей школе стало *безраздельно решение готовых задач*, «чужих», составленных кем-то другим, но не обучающимся. В сочинениях типа «Как научиться решать задачи», «Психология решения задач» и т. п., по меньшей мере, отсечена первая половина целостного явления, а именно этап составления, *возникновения задачи* как некоторого комплекса мыслей, адресованного ученику (студенту), программирующего его последующую мыслительную деятельность. Надо отметить, что фаза составления задачи, будучи преимущественно синтетической, интегральной, больше требует суждений по аналогии, нежели следующая аналитическая фаза по решению уже составленного.

*Сверхзадачей современной дидактики математики служит идея совмещения обоих логических этапов в пределах головы одного субъекта, учащегося или студента, поскольку формы мыслей, специфические для*

*этапа составления и этапа решения, будучи взаимодополнительными, обогащают ум человека, если только они восприняты одним субъектом.*

Эффект аналогии как пускового механизма творческой деятельности проявляется и в том, что застревшая «занозой» в поле знаний мысль инициирует постоянные попытки разрешения в чем-то интересной проблемы.

Возвращаясь к технологическому тезису Поля, единственному в своем роде, о целесообразности соревнования учащихся в составлении собственных задачных конструкций, отметим, что оно представляет перспективное направление в методике развития математического творчества. Примечательно, что в журнале «Квант» (1994, № 6) сообщалось о так называемом творческом туре в системе школьных олимпиад\*. При проведении конкурса фигурного катания на льду ставят конкурсантам две оценки: за техничность и артистичность. Подобно этому, участники конкурсных соревнований по математике могут поделиться и собственными оригинальными идеями, наблюдениями, обобщениями на многократно перепаханном поле элементарной математики. Вот тому пример.

Группе учащихся мы как-то предложили задачу:  
описать около данного  $\frac{\text{треугольника}}{\text{тетраэдра}}$  правильный

$\frac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$  (можно предложить и вписать). Решение задачи на треугольники показано на рис. 147 слева (предлагаем найти аналогичное решение задачи на тетраэдры). Для нас было полной неожиданностью, когда один ученик предложил решить аналогичную задачу о четырехугольнике произвольной формы, вокруг которого требуется описать прямоугольник. Выяснилось, что вторая задача нигде и никем не опубликована, хотя является почти «калькой» первой задачи (там описывается около треугольника треугольник, здесь —

---

\* Подобный подход, вполне сопоставимый с практикой творческих заданий в математике, возможно реализовать и при изучении грамматики русского и любого другого языка (составление предложений, удовлетворяющих различным требованиям морфологии и синтаксиса).

четыреугольник и т. д.)\*. Задача, осмысленная с адресацией психике решающего на ее возможное обобщение, породила достойное логическое продолжение. Подобные находки станут реальностью, если только открыть свободу творчества и взрослых и детей в области математики как составного элемента обучения математике на любой ее ступени.

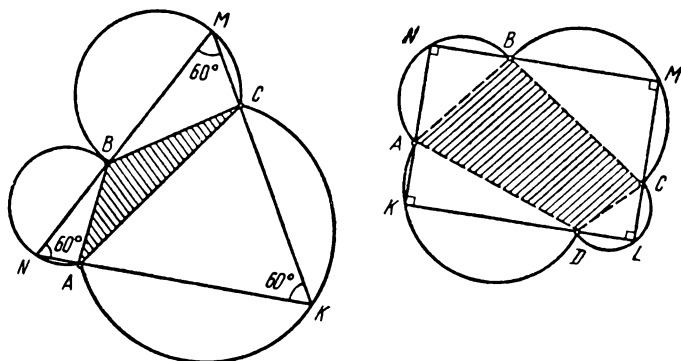


Рис. 147

\*   \*  
\*

Среди тысяч теорем элементарной геометрии некоторые получили в литературе точные эпитеты. Самой знаменитой справедливо называют, конечно, теорему Пифагора. Трудно назвать раздел геометрии, в котором нет ссылки на это умозаключение, считающееся архетипом не только науки математики, но и науки вообще.

Самой «коварной» профессор Гарднер назвал теорему Штейнера: если равны две биссектрисы треугольника, то он равнобедренный. Ее доказательство требует изящного исполнения метода от противоречащего. (Прямая теорема доказывается чрезвычайно легко: в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к

---

\* Р е ш е н и е : если в первой задаче на каждой стороне данного треугольника строится правильный треугольник, с тем чтобы вокруг него описать окружность, то во втором случае на каждой стороне четырехугольника описывается окружность как на диаметре и т. д.

боковым сторонам, равны.) Теорема Штейнера — образчик того, как постановка обратной теоремы нередко требует проникновения в глубинные слои логики рассуждений.

Самой поразительной любители считают теорему Морлея: точки пересечения трисектрис углов треугольника являются вершинами правильного треугольника. Теорема эта обессмертила имя своего автора, хотя Морлей лишь сформулировал ее, а строгое доказательство было найдено другими.

Самой таинственной можно считать теорему Содди, о которой говорилось выше.

В данной работе мы отметили специальной пометкой (большой цифрой слева) более полусотни задач и теорем, неизвестных в доступной нам литературе, но почти не уступающих по возбуждаемому ими подъему эмоций задачам-моделям и вместе с ними приносящих восхищение полнотой мысли. Иные из этих находок мы лишь сформулировали, но не доказали. Среди них, несомненно, найдутся такие суждения, которые так и дальше оставались бы вне поля зрения математиков, если бы не предпринятое нами «глобальное» испытание планиметрических задач по критерию обобщаемости на трехмерное пространство.

Важно отметить следующее. Умозаключения по аналогии как метод обучения имеют определенную связь с особым состоянием высшей нервной деятельности, а именно с проявлением закономерностей условного рефлекса (И. П. Павлов) и положительной обратной связи (П. К. Анохин). Физиолог Шеррингтон писал, что одновременное рассмотрение каких-либо родственных явлений или понятий уже само по себе облегчает возникновение желательных многосоставных нервных связей в мозгу.

*Явление самовозрастания клубка ассоциаций (психологическое толкование), или саморазвития знания в количестве и качестве на базе исходного, «затравочного» ядра (информационное толкование), или мысленных переходов по контуру «конкретное — абстрактное — конкретное» (методологическое толкование), несомненно, связано с суммацией нервных процессов во времени и пространстве при избирательном торможении рефлекторных механизмов, не участвующих в данном кон-*

*кретном мысленном поиске.* Такое физиологическое толкование нервных процессов, обеспечивающих феномен УДЕ, вполне вписывается в закономерности *доминанты*, исследованной академиком А. А. Ухтомским.

Основное место среди творческих методов освоения математики занимает (по своей доступности) осознание алгоритма умозаключений по аналогии и овладение этим логическим приемом. Начинайте хотя бы с разыскания аналогичных в чем-то задач и теорем, напечатанных в книгах разных авторов. Для сравнения и дальнейшего осмысления расположите их параллельно в две колонки. И такое предприятие уже активизирует мысль.

Придать совмещенному двусоставному суждению удобоваримую форму и символьную интерпретацию оказывается непростым делом, ибо здесь создается новая дидактическая информация из известных математических суждений. Так, в беседе о фундаментальной четверке мы ведем речь о центре окружности, описанной около треугольника; эта плоскостная задача нами была буквально «собрана» из нескольких частичных задач, напечатанных в разных книгах: в одной говорилось об окружностях, имеющих общую точку, в другой — о симметрическом преобразовании центра окружности относительно трех сторон вписанного треугольника (но в ней не говорилось о построении симметричной точки пересечением окружностей), в третьей книге велась речь об окружности, проходящей через точки пересечения трех других, но без рассмотрения свойств треугольника с вершинами в этих точках и т. д. В задаче Карно говорится о равенстве треугольников (образа и прообраза) — нам же удалось усилить это суждение, а именно: вписанные треугольники (а затем и вписанные тетраэдры) оказались сверх того и центрально симметричными и т. д.

Таким образом, поиск аналогии даже для исторических задач, носящих имя первооткрывателей, представляет необычное углубление знаний даже в пределах прототипа. Раздумья над «совмещенными» заданиями учат поневоле обнаружению сходства в рисунках, символах, понятиях, в ходах мысли и отысканию на основе этого путей создания нового комплекса знаний, обладающего исходным ядром.

К технологии успешного творчества в математике (пусть речь идет о составлении простейших уравнений и неравенств, их систем и т. д.) относятся специфические приемы, облегчающие возникновение необходимых предположений, нужных словосочетаний, сходство в графической интерпретации задач и т. д. Таковым средством, облегчающим осуществление аналогии, является единый подход в выборе обозначений и терминов (например, двузначные индексы некоторых точек).

Сделаем выводы.

1. Овладение методом аналогии и последовательная реализация идей *фузионизма* означают, что активным началом математического познания должны стать именно трехмерные геометрические представления. При таком повороте событий даже при первоначальном ознакомлении с плоскостными фигурами, такими как квадрат (параллелограмм, ромб) должны выступать аналогами соответственно куб (параллелепипед, ромбоэдр).

2. Укрупненный подход к содержанию школьных программ осуществлен в наших альтернативных учебниках математики для 5—9 классов, где изложение базируется на противопоставлениях.

Приведем примеры.

### Аксиомы

А. Через  $\frac{\text{две}}{\text{три}}$  точки  
проходит единственная  
 $\frac{\text{прямая}}{\text{плоскость}}$ .

Б.  $\frac{\text{Две прямые}}{\text{Три плоскости}}$  опре-  
деляют единственную  
точку.

### Определения.

$\frac{\text{Параллелограммом}}{\text{Параллелепипедом}}$  называется выпуклый  
 $\frac{\text{четырехугольник}}{\text{шестигранник}}$ , у которого противоположные  $\frac{\text{стороны}}{\text{грани}}$   
параллельны.

## Теоремы

А. Через  $\frac{\text{три}}{\text{четыре}}$  точки  $\frac{\text{плоскости}}{\text{пространства}}$ , не лежащие на одной  $\frac{\text{прямой}}{\text{плоскости}}$ , проходит единственная  $\frac{\text{окружность}}{\text{сфера}}$ .

Б. Уравнение  $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$  с центром в начале координат представляет равенство суммы квадратов  $\frac{\text{двух}}{\text{трех}}$  переменных координат квадрату ее радиуса, например:  $x^2 + y^2 = R^2$  (окружность);  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (сфера).

В.  $\frac{\text{Площадь треугольника}}{\text{Объем тетраэдра}}$  равна(ен)  $\frac{\text{половине}}{\text{трети}}$  произведения  $\frac{\text{длины}}{\text{площади}}$  основания на высоту:  $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$ ,

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}Sh.$$

При этом в младших классах парные суждения по пространству предлагаются без доказательства, с указанием, что они будут доказаны в старших классах. В их справедливости можно убедиться пропедевтически, постановкой опытов, измерений и сопутствующих проверочных вычислений.

Надо отметить то, что целенаправленная практика укрупнения знаний посредством умозаключений по аналогии отнюдь не привносит в систему математических знаний искусственные новообразования типа модулей функций вида  $y = |x^2 - |\sin x||$ , обобщенных степенных функций вида  $y = 2^{|\sin x|}$ , усложненных тригонометрических уравнений и т. д. Не имея никакого приложения ни в математике, ни в физике, подобные формальные ухищрения (начисто отсутствовавшие, скажем, в учебниках Киселева) часто заполняют ныне добрую половину тренировочных и конкурсных заданий по математике. Математическое содержание настоящего исследования, напротив, представляет естественное развитие изученного в школе, логическое дополнение к нему.

Так, например, если в геометрии элементарными

приемами было доказано, что ортотреугольник обладает минимальным периметром, то, обобщая эту задачу на трехмерное пространство посредством приложения методов математического анализа, нам удалось заполнить брешь, оставшуюся до сих пор неопределенной, доказав теорему: в ортоцентрическом тетраэдре ортотетраэдр обладает минимальным каркасом.

Или еще: обобщение свойства углов описанного четырехугольника на многогранные углы полуописанных гексаэдров и октаэдров становится возможным, если предварительно доказать важную теорему Жирара о выражении величины выпуклого многогранного угла через величины двугранных углов, образующих его:

$$\widehat{ABC} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi \text{ (стерадиан);}$$

$$\widehat{ABCD} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} - 2\pi \text{ (стерадиан).}$$

Сравнение теорем о плоском, двугранном и многогранном углах, очевидно, привлечет внимание учащихся к изучению свойств многогранников, в особенности правильных и полуправильных.

Читатели, надеемся, убедились в дидактических достоинствах метода неопределенных коэффициентов, координатно-векторных представлений, скрепляющих массив математических знаний новыми связями. Установлены также достоинства точных геометрических построений, приносящих материал для измерения и соответствующих вычислений на калькуляторе. Составлены упражнения, позволяющие использовать калькуляторы как новое дидактическое средство ранней пропедевтики геометрических формул (например, формул Герона, Эйлера, Содди).

Тем самым происходит тренировка не только в строгости доказательства, но и в убедительности суждений, нередко опережающих и подкрепляющих этап доказательства. Иначе говоря, сознательность математических знаний предполагает воспитание доказательного мышления на фоне здравого смысла.

**3.** Предпринятое исследование представляет в прагматическом плане важнейшее средство укрупне-



ния дидактических единиц (УДЕ), но применительно к задачам повышенной трудности, причем к усложненным, двуплановым, с интерпретацией как на плоскости, так и в пространстве.

Как показывают примеры данной книги, сейчас существуют нетронутые резервы для развития и расширения изученного в школе, так чтобы обобщение ранее изученного содействовало достижению в уме целостности знания. И потому надо сравнивать (хотя бы без доказательства) два неравенства ( $R \geq 2r$  и  $R \geq 3r$ ), что в них речь идет о сходных связях радиусов описанной  $R$  и вписанной  $r$   $\frac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$ , что они, в свою очередь, относятся к родственной паре фигур (простейшему много  $\frac{\text{угольнику}}{\text{граннику}}$ , т. е.  $\frac{\text{треугольнику}}{\text{тетраэдру}}$ ).

4. Обсуждая проблемы рационального обучения в методологическом плане, важно иметь в виду, что «... все материальные процессы и взаимодействия реализуются лишь в пространстве трех измерений» (Философский энциклопедический словарь). Нас не должен поэтому удивлять тот факт, что, скажем, касание шаров легче разъяснить и показать, чем касание окружностей, хотя сложность символического описания этих зависимостей — обратная. В умозаключениях по аналогии как бы задействованы несколько кодовых систем мозга: слово, символ, предмет, рисунок, число. Поэтому одновременное обсуждение обеих теорем на одном занятии коррелирует особенности восприятия геометрии плоскости и геометрии пространства. Хаос двумерности упорядочивает ее трехмерный аналог.

5. Важное достоинство умозаклучений по аналогии как средства формирования нового знания — это его интегральный характер. Здесь мы имеем в виду наличие в этой технологии суждений, выполняемых по схемам нечетких множеств, индуктивный характер исходных предложений, постепенно уточняемый в ходе наблюдений, опытов, проверок.

Умозаклучения по аналогии отличаются от строгих силлогизмов тем, что в них наглядно видна индуктивная сторона мышления, в частности, проявление подсознательного *эффекта парности ассоциаций*

вида: прямая — плоскость, окружность — сфера, квадрат — куб, вписанность — полувписанность и т. п. Так, скажем, при элементарном доказательстве теоремы Содди для пространства ключевым моментом оказалось то, чтобы в касании трех сфер увидеть одновременно и касание трех больших окружностей  $A_1(r_1)$ ,  $A_2(r_2)$ ,  $A_3(r_3)$ , образовавшихся в сечении трех сфер плоскостью центров  $A_1A_2A_3$ .

6. В обучении математике должна занять свое место триада исторических теорем Менелая, Чевы и Дезарга как особый тип рассуждений, обогащающий логический аппарат мышления.

В этом плане также ценен рациональный синтез таких качественно разнообразных методических средств, как логические доказательства, приборные построения, изучение полуправильных многоугольников, целочисленных функций, элементов сферической геометрии, вычисления на калькуляторе.

7. В нашей книге поневоле проявился приоритет правополушарного (геометрического) мышления в структуре математического образования. Недавнее решение Министерства образования РФ о введении письменных экзаменов по геометрии взамен устных отвечает признанной педагогами других стран целесообразности усиления роли не вообще абстрактно-геометрического, а конкретно-стереометрического элемента в пропорциях современного учебного плана.

Наши детальные предложения о наращивании трехмерного на известном двухмерном или о выведении двумерного из трехмерного находятся в русле новейших физиологических закономерностей переработки информации в мозгу человека.

Важно отметить, что сверхзадачей дня не без основания считают создание для 7—9 классов единого учебного предмета «математика» на основе слияния алгебры, геометрии и черчения (такая практика давно оправдалась в школах Германии, Польши и других стран). В данной связи создание укрупненных единиц усвоения знаний на основе сознательного совмещения планиметрического и стереометрического мы рассматриваем как прогрессивную тенденцию в обучении.

8. В некоторых беседах мы показали возможности

обобщения задач, разрешенных для двух- и трехмерных случаев, на четырехмерные пространства. Роль суждений по аналогии для такого современного направления геометрического знания трудно переоценить; убедительность такого расширения знания тем более значима, когда толкованию свойств невидимых четырехмерных (воображаемых) объектов предшествует цепь очевидных и убедительных интерпретаций на привычных плоскостных и объемных фигурах. Парадокс многомерности: фигуры исчезают, а «бестелесная» аналогия сохраняет силу!

9. В терминах современных системных исследований следует подчеркнуть, что осваиваемая в наших альтернативных учебниках технология обращения суждений (совместное изучение взаимно-обратных теорем, функций, преобразований и т. д.) означает усиление в мыслительной практике так называемых *отрицательных обратных связей*, сопровождающих углубление в изучаемые понятия, выделение характеристических свойств фигур и т. д. Вооружение учителя и ученика сверх того еще и алгоритмами обобщения обеспечивает творческое расширение знаний на путях от прообраза к образу, что и означает в информационном отношении усиление факторов *положительной обратной связи*.

Обращение и обобщение в системе математических упражнений — вот два столпа, обеспечивающих саморазвитие квалификации обучающего и ума обучаемого.

10. В учебных планах российских педвузов содержится курс «Решение задач по школьной математике». В связи со сказанным выше представляется логичным преобразовать его в целостный профессионально ориентированный курс «Составление и решение задач по школьной математике». Такая мера повлияет положительно и на профессионализацию собственно математических дисциплин, в частности приведет к созданию курса линейной математики посредством слияния соответствующих глав традиционных линейной алгебры и линейной геометрии.

## ТЕОРЕМА — СЕНСАЦИЯ!

### Найдена точка Микеля—Арслана

В математике существуют понятия, носящие имена своих первооткрывателей, например: точка Микеля, формула Жуковского, неравенство Буняковского, прямая Гаусса, окружность Эйлера, даже треугольник Наполеона.

Одной из удивительных задач планиметрии является задача о точке Микеля: «Если на плоскости даны четыре произвольные прямые общего положения, то порожденные ими четыре окружности пересекаются в общей точке (точке Микеля)»\*.

**Примечание.** «Прямые (плоскости) общего положения» означает, что среди них нет параллельных и через точку проходят не более двух прямых (не более трех плоскостей).

В некоторых сочинениях излагается обобщение задачи на 5 прямых общего положения.

Проведем следующее наблюдение.

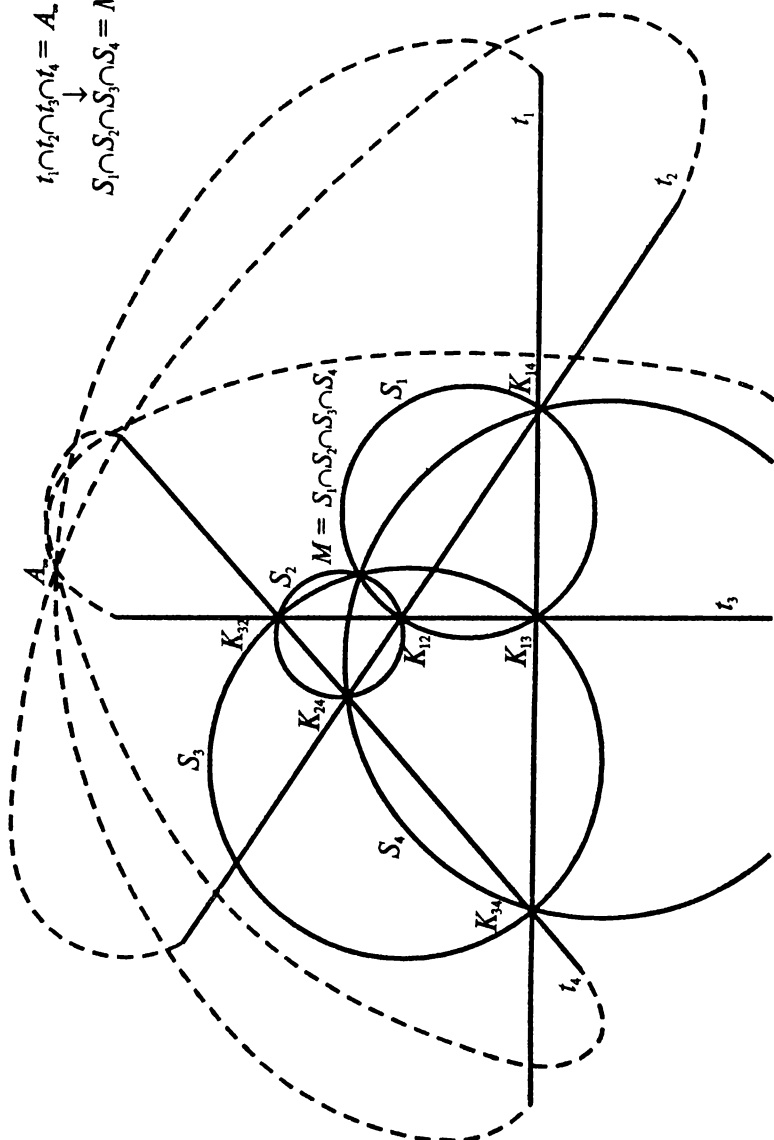
Две прямые на плоскости пересекаются в одной точке. (Это — элементарно!)

Три прямые образуют треугольник, около которого можно описать единственную окружность. (Школьная теорема!)

А что получится, если имеются четыре прямых общего положения?! Каждой тройке из них соответствует треугольник, около которого описывается «порожденная» окружность. Четыре прямые образуют четыре тройки различных прямых, то есть четыре порожденные окружности, которые пересекаются в одной точке. Таково содержание указанной выше теоремы. (Смотри чертеж на с. 272.)

---

\* Решение задачи помещено, например, в книге *А. И. Фетисова* «Геометрия в задачах» — М., «Просвещение», 1977. С. 8.



$$t_1 \cap t_2 \cap t_3 \cap t_4 = A$$

$$\downarrow$$

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = M$$

Студенту математического факультета Калмыцкого университета Арслану Эрдниеву пришла в голову счастливая идея исследовать взаимосвязь пяти произвольных плоскостей общего положения.

Ему удалось найти соответственно неизвестную в математике «точку Микеля—Арслана», а именно: удалось найти несколько доказательств стереометрической теоремы: «Пять плоскостей общего положения в трехмерном пространстве порождают пять сфер, пересекающихся в одной точке (точке Микеля—Арслана)».

Рассуждения таковы:

три плоскости общего положения порождают точку; четыре — тетраэдр с описанной около него сферой; пять плоскостей — пять различных четверок — пять тетраэдров — пять сфер, имеющих общую точку.

Символическая запись:

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \alpha_4 \cap \alpha_5 = A_{\infty}$$

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3 \cap \sigma_4 \cap \sigma_5 = (MA).$$

Студенту Арслану Эрдниеву удалось обобщить эту теорему на гиперплоскости и гиперсферы общего положения.

[Гиперплоскости общего положения удобно считать гиперсферами бесконечно большого радиуса, не пересекающимися в бесконечно удаленной точке].

## Содержание

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ .....</b>	<b>3</b>
--------------------------	----------

<b>Беседа 1 (вводная) УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ ПО АНАЛОГИИ .....</b>	<b>7</b>
---	----------

<b>Беседа 2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РАЗМИНКА .....</b>	<b>20</b>
---	-----------

<b>Беседа 3 МАГИЯ ЧИСЕЛ И ФИГУР .....</b>	<b>32</b>
---	-----------

<b>Беседа 4 ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЧЕТВЕРКА: ТРЕУГОЛЬНИК ВПИСАН В ОКРУЖНОСТЬ, СФЕРА ОПИСАНА ОКОЛО ТЕТРАЭДРА .....</b>	<b>63</b>
--	-----------

<b>Беседа 5 ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ, ЧЕВЫ, ДЕЗАРГА. ПОЭМА О ТОЧКАХ И ПРЯМЫХ. ....</b>	<b>92</b>
---	-----------

<b>Беседа 6 АНАЛОГИЯ — КЛЮЧ К НОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ. ....</b>	<b>127</b>
---	------------

<b>Беседа 7 ЧИСЛО КАК ЦЕНТР КОНЦЕНТРАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ. ....</b>	<b>151</b>
--	------------

<b>Беседа 8</b>	
<b>ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА.</b>	
<b>ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА. . . . .</b>	<b>165</b>

<b>Беседа 9</b>	
<b>ОТ ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА</b>	
<b>К ПОЛУОПИСАННОМУ ОКТАЭДРУ. . . . .</b>	<b>181</b>

<b>Беседа 10</b>	
<b>СИМФОНИЯ СФЕР И ОКРУЖНОСТЕЙ. . . . .</b>	<b>210</b>

<b>Беседа 11</b>	
<b>АПОФЕОЗ АНАЛОГИЙ . . . . .</b>	<b>243</b>

<b>Беседа 12 (заключительная)</b>	
<b>АНАЛОГИЯ В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО</b>	
<b>ОБРАЗОВАНИЯ. . . . .</b>	<b>258</b>

<b>ТЕОРЕМА — СЕНСАЦИЯ!</b>	
<b>Найдена точка Микеля—Арслана . . . . .</b>	<b>271</b>



## **Э 75 Эрдниев О. П.**

**От задачи к задаче — по аналогии/Развитие математического мышления/ Под ред. П. М. Эрдниева.—М.: АО «СТОЛЕТИЕ»,**

Обычно обучение математике ограничивается решением пусть разнообразных, но готовых, придуманных авторами учебников задач. Однако гораздо увлекательнее и продуктивнее, осознав процесс математического творчества, научиться создавать собственные задачи и теоремы и находить способы их решения. Этому важному творческому умению и посвящена книга.

Авторы, опираясь на свой практический опыт обучения, подробно раскрывают технологию изобретения новых теорем посредством умозаключений по аналогии. Во многих случаях прототипом оригинальных суждений служат исторические задачи, носящие имена первооткрывателей (школьный курс 7—9 классов).

Для учащихся, учителей математики и лиц, интересующихся математикой.

УДК 510(023)=82

**Книга издана за счет средств авторов.**

*Учебное издание*

**Очир Пюрвяевич Эрдниев**

**ОТ ЗАДАЧИ К ЗАДАЧЕ — ПО АНАЛОГИИ**  
**Развитие математического мышления**

*Под редакцией Пюрвя Мучкаевича Эрдниева*

**Оригинал-макет изготовлен фирмой «МИВАС»**

Изд. лиц. № 063236 от 04.01.94. Подп. в печать с оригинал-макета  
30.01.98. Формат 84×108 1/32. Усл. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 12,93.  
Гарн. Таймс. Бум. типогр. Печ. высокая. Тираж 5000 экз. Заказ 74

АО «СТОЛЕТИЕ», 111141, Москва, Перовская, 39, к. 1, т. (095) 165 27 09.  
Владимирская книжная типография Комитета РФ по печати  
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

# **Издательство "СТОЛЕТИЕ" предлагает:**

**Эрдниев П., Эрдниев Б. "Математика 2 класс". Книга для ученика и учителя.**

**Эрдниев П., Эрдниев Б. "Математика 5 класс". Книга для ученика и учителя.**

**Эрдниев П., Эрдниев Б. "Математика 6 класс". Книга для ученика и учителя.**

Это альтернативные учебники математики, реализующие целостную методическую систему обучения укрупнением дидактических единиц (УДЕ). Признание школой технологии УДЕ проходило все этапы утверждения системы при постоянном обсуждении теории и практики учителями и учеными. Методическая система УДЕ представляет самобытную, приоритетную и конкурентоспособную технологию обучения.

**Эрдниев П., Эрдниев Б. "Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц" Книга для учителя.**

В книге изложена разработанная авторами система обучения математике, основанная на идее укрупнения дидактических единиц (УДЕ), выражающейся, в частности, в одновременном изучении взаимосвязанного математического материала.

**Каждый данный момент в нашем мозгу происходит сканирование впечатлений, сопоставление наблюдений с уже сформировавшимися образами, что в конечном счете приводит к некоторому предварительному заключению. Одна из отличительных особенностей этой процедуры состоит в широком использовании аналогий и прототипов.**

***И. Пригожин***