К. СЛОЙЕР

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФАНТАЗИИ

Приложения элементарной математики

C. SLOYER

FANTASTIKS OF MATHEMATIKS

Applications of Secondary Mathematics

Janson Publications, Inc

Providence, R I

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

К. СЛОЙЕР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФАНТАЗИИ

Приложения элементарной математики

Перевод с английского
А. А. Бряндинской

Слойер С.

С 48 Математические фантазии: Пер. с англ.— М.: Мир, 1993. — 184 с., ил.

ISBN 5-03-002367-4

Книга американского математика, знакомящая читателя с некоторыми приложениями математики в современном научном и техническом мире. Материал изложен в простой форме, доступной читателям, не имеющим специальной математической подготовки. Изложение сопровождается большим числом наглядных рисунков и конкретных числовых примеров.

Для всех желающих ознакомиться с приложениями математики.

С $\frac{1602010000-009}{041(01)-93}$ 009-93 ББК 22.1

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-002367-4 (русск.)
ISBN 0-939765-004 (англ.)

От издательства

Сорок «фантазий», собранных в этой небольшой книжке, призваны помочь неискушенному в математике читателю (с подготовкой, скажем, девятиклассника) раскрыть глаза на фантастически богатые и разнообразные ландшафты математики и на ее связь с реальным миром.

Автор, известный американский популяризатор математики, пишет в стиле, напоминающем широко известные у нас книги Я. Перельмана, но материал, на котором он демонстрирует возможности математики, значительно более серьезный и современный. Тут и динамическое программирование, и теория игр, и математические методы в биологии; есть и компьютерные программки на Бейсике.

Некоторые «фантазии» будут интересны и читателям с более глубокой подготовкой, однако в основном материал книги совершенно элементарен — настолько элементарен, что еще десять — двадцать лет назад эту книжку можно было бы считать слишком простой для нашего читателя — школьника, студента, учителя. Но при наблюдающемся падении уровня математической подготовки возникает большая потребность именно в популярных книгах такого уровня.

Книга написана очень живо, в легком, шутливом стиле, в ней много рисунков, диаграмм, графиков.

Надеемся, что эти фантазии будут приятны и полезны школьникам, учителям и всем желающим приобщиться к миру математики.

Предисловие

Несмотря на внешнюю «развлекательность», эта книга представляет собой серьезную попытку познакомить школьных учителей, будущих учителей и студентов-гуманитариев с многочисленными проявлениями взаимодействия математики с реальной жизнью. Надеюсь, что книга вызовет у школьных преподавателей — а благодаря им и у их учеников,— а также у студентов гуманитарных институтов интерес к математике и желание поближе с ней познакомиться. Этот материал уже разбирался с несколькими сотнями учащихся, и результаты оказались весьма впечатляющими.

Читатель найдет здесь очень немного реальных практических задач. Это не случайно, потому что одной из важнейших целей занятий было побудить учащихся разработать свои собственные математические модели и приложения. Одним для этого пришлось поработать с литературой в поисках приложений элементарной математики, другие же смогли построить модели совершенно самостоятельно. Результаты такой работы либо обсуждались на классных занятиях, либо — при недостатке времени — размножались и раздавались учащимся. Все это помогло вовлечь их в активную работу в классе.

В книге не только описано множество приложений, но и сделана попытка познакомить читателя с такими сравнительно новыми разделами математики, как линейное программирование, динамическое программирование и геометрическое программирование. Вводятся и широко используются разностные уравнения. Многие обсуждаемые задачи предполагают использование компьютера. Однако поскольку компьютерную грамотность учащихся можно было оценить в диапазоне от «нулевой» до «знакомства с Фортраном или Бейсиком», то программ в книге очень немного. Тем не менее очевидно, что во многих задачах использование компьютера приносит большую пользу.

Многие из представленных здесь приложений уже использовались в школьных и институтских программах. При этом разные главы предполагают разную математическую подготовку. Например, глава «Как проехать быстрее?» разбиралась с учениками, изучающими математику по общей программе средней школы, а глава «У озера» использовалась в математических классах.

Мне хотелось бы поблагодарить Нормана Рикера за множество ценных замечаний, сделанных им при знакомстве с первоначальным вариантом книги, а также доктора Уильяма Сакко из компании «Три Аналитик, Инк.» за то, что он познакомил меня с динамическим программированием. Я благодарен также Ховарду Хэнду за любезное разрешение использовать в этой книге его заметки о математике и музыке (см. гл. 31).

Надеюсь, что эта книга вызовет у многих учащихся желание поглубже изучить математику.

Клифф Слойер

Фантазия I

КАК ПРОЕХАТЬ БЫСТРЕЕ!

Математика: *сочетания*[1])

Рассмотрим следующую задачу. Перед нами «карта» четырех городских кварталов, на которой линии обозначают улицы (рис. 1).

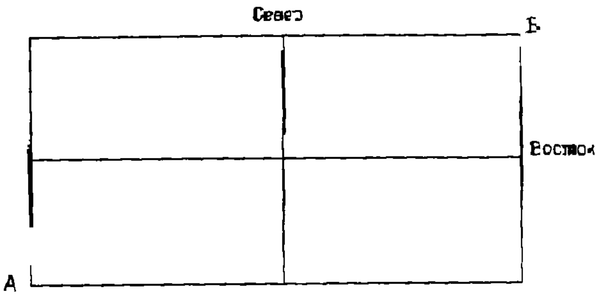


Рис. 1

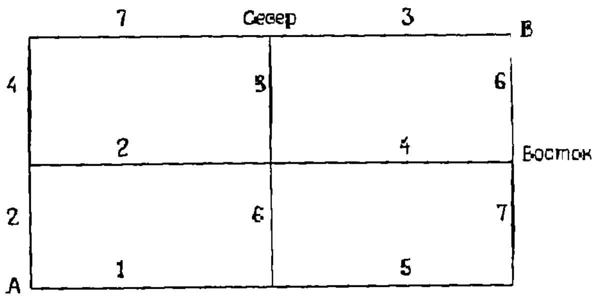


Рис. 2

Предположим, что движение на этих улицах имеет разную интенсивность и, стало быть, для проезда вокруг каждого квартала требуется разное время.

---

[1]) В начале каждой главы, после ее названия, автор приводит названия соответствующих разделов математики, которые использовались в данной главе. — *Прим. перев.*

На рис. 2 указано время в минутах. Нам надо найти самый быстрый путь из точки A в точку B, причем следует соблюдать такое правило: на каждом углу можно поворачивать только на восток или на север.

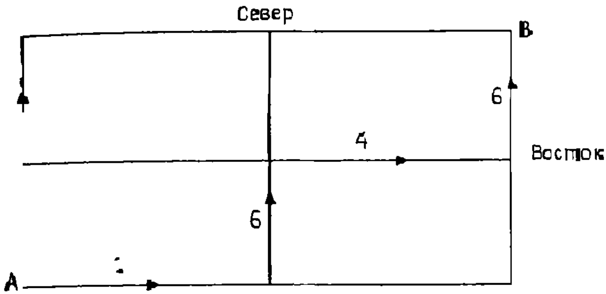


Рис. 3

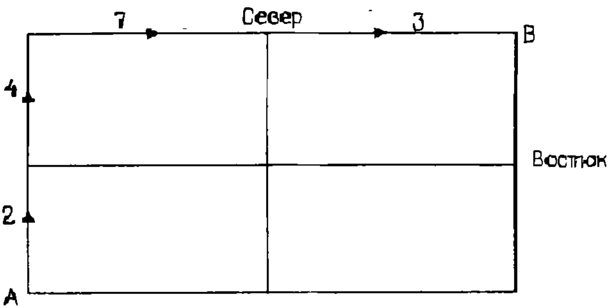


Рис. 4

Например, мы можем выбрать путь, показанный на рис. 3. Он занимает 17 минут. Обозначим этот путь *ВСВС* (здесь *В* — «шаг» на восток, а *С* — на север).

Еще один возможный путь показан на рис. 4. Он занимает 16 минут. Обозначим его *ССВВ*.

Заметим, что каждый путь состоит из 4 шагов: двух на восток и двух на север — которые можно изобразить так:

________, ________, ________, ________.

Шаг 1 Шаг 2 Шаг 3 Шаг 4

Как только мы установим, сколько шагов будут восточными, остальные, естественно, окажутся северными. Таким образом, любой набор из двух *В* и двух *С* определяет какой-то возможный путь. Следовательно, из *А* в *В* ведет

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

возможных путей. Их можно перечислить следующим образом:

Путь	Время в минутах
(1) *ВВСС*	19
(2) *ВСВС*	17
(3) *ВССВ*	18
(4) *ССВВ*	16
(5) *СВСВ*	15
(6) *СВВС*	14

Теперь посмотрим, сколько минут занимает каждый путь, и выберем тот путь (возможно, не единственный), на который нужно меньше времени. В нашем

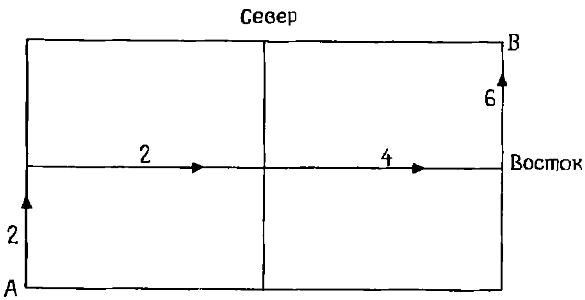


Рис. 5

списке минимум — 14 минут, и, таким образом, мы должны выбрать путь *СВВС* (рис. 5).

Итак, мы видим, что умеем решать подобные задачи и что их решение занимает не слишком много времени. Для решения нашей задачи потребовалось только 18 сложений (по три на путь) и 5 сравнений. Сравнения можно выполнять так: сравнить время пути 1 с временем пути 2; взять наименьшее из этих времен и сравнить его с временем пути 3 и т. д. Заметим, что число сравнений при этом оказывается на единицу меньше числа путей.

Предположим теперь, что у нас есть карта 10^2 (10×10) городских кварталов. Тогда каждый путь будет содержать 10 северных и 10 восточных шагов и число возможных путей составит

$$\binom{20}{10}=\frac{20!}{10!10!}=184\,756.$$

Эта задача уже побольше, и чтобы решить ее прежним способом, нам придется выполнить

19 (сложений на путь) $\times$ 184 756 (число путей) $=$
$=3\,510\,364$

сложений и 184 755 сравнений (вспомним, что число сравнений на единицу меньше числа путей). Старательный ученик, который регулярно недосыпает, сможет решить эту задачу за месяц, а компьютеру, выполняющему сложения и сравнения со скоростью $10^5 \doteq 100\,000$ операций в секунду, для ее решения потребуется около 37 секунд вычислительного времени.

А теперь рассмотрим карту 30^2 (30×30) городских кварталов. Для каждого пути потребуется 30 восточных и 30 северных шагов, и число возможных путей составит

$$\frac{60!}{30!30!}.$$

Это число превосходит 10^{17}. На каждый путь приходится 59 сложений. Следовательно, для нахождения оптимального пути потребовалось бы выполнить более 59×10^{17} сложений и более 10^{17} сравнений, т. е. в общей сложности более 10^{18} операций. У компьютера, выполняющего 100 000 арифметических операций в секунду (или около 3.1536×10^{12} операций в год), поиск наилучшего пути занял бы более $10^5 = 100\,000$ лет. Математическое ожидание времени жизни современного компьютера — около 10 лет.

Таким образом, у нас получилась такая таблица:

Размер	Число операций	Вручную	На компьютере
2×2	23	< 10 мин	—
10×10	3 695 119	$\approx$ месяц	≈ 37 с
30×30	$> 10^{18}$	—	$> 100\,000$ лет

Вычислительный метод, которым мы пользовались, называется *полным перебором*. Он предусматривает вычисление значения, соответствующего каждому

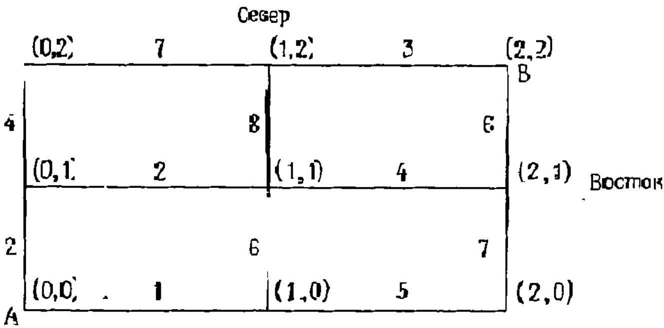


Рис. 6

возможному варианту (в нашем случае — время каждого пути). В физике, социальных и управленческих науках встает много реальных задач, в которых возможных вариантов намного больше, чем в нашей задаче о 30×30 городских кварталах. Поэтому нужен более эффективный способ решения задач такого рода. Метод, который мы сейчас проиллюстрируем, лег в основу сравнительно новой (изобретенной Ричардом Беллманом около 1950 г.) ветви математики, известной как *динамическое программирование*. С помощью метода динамического программирования задачу о 30×30 городских кварталах можно решить, выполнив меньше 3000 операций — почти невероятное уменьшение по сравнению с 10^{18} операциями в методе полного перебора.

Вернемся к нашей задаче о 2×2 городских кварталах, показанных на рис. 2. Для упрощения дальнейших рассуждений введем систему координат с началом в точке A (см. рис. 6).

Начнем с точки B и будем строить маршрут с конца. Если мы попадаем на угол $(1, 2)$, у нас нет другого пути, кроме как ехать на восток; это займет

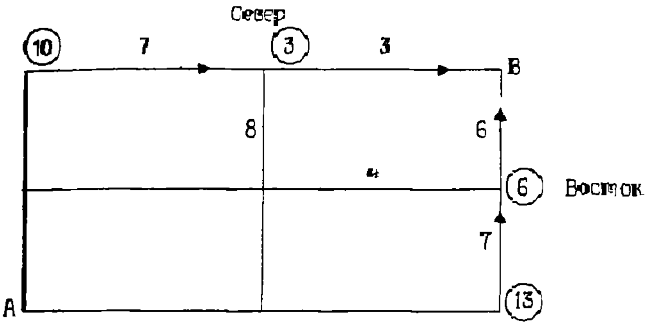


Рис. 7

3 мин. Если мы попадаем на угол $(2, 1)$, то мы можем ехать только на север, что потребует 6 мин. Аналогично, если бы мы попали на угол $(2, 0)$, то должны были бы ехать на север и для достижения B потребовалось бы 13 мин, а если бы попали на угол $(0, 2)$, мы должны были бы ехать на восток и через 10 мин достигли бы точки B. Все эти числа и направления указаны на рис. 7.

Если же мы попадаем на угол $(1, 1)$, то у нас есть выбор между B и C. Если мы поедем на восток, то путь займет 10 мин, а если на север — 11 мин. Таким образом, если мы попадаем на угол $(1, 1)$, лучшее, что мы можем сделать, — это выбрать восточное направление, и тогда нам потребуется 10 мин, чтобы попасть в точку B. Это показано на рис. 8.

Если бы мы попали на угол $(1, 0)$, у нас был бы выбор между северным и восточным направлениями.

Выбор северного направления означал бы, что поездка до B займет в лучшем случае 16 мин, а в случае выбора восточного направления пришлось бы ехать 18 мин. Значит, если мы попали на угол (1, 0), луч-

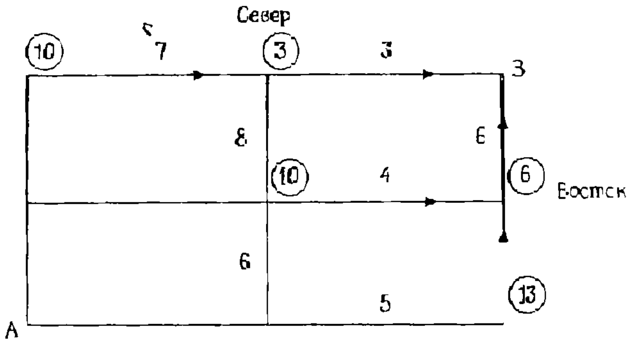


Рис. 8

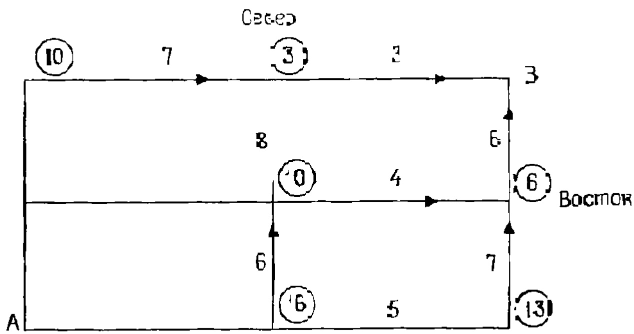


Рис. 9

шее, что мы можем сделать,— это ехать на север, и тогда путь до B займет 16 мин. Это показано на рис. 9.

Далее будем действовать таким же образом, помещая в каждый угол определенное число и указывая стрелкой направление, которое нужно выбрать. В результате мы получим схему, показанную на рис. 10.

Теперь решение нашей задачи становится очевидным. Начнем из точки A и пойдем по стрелкам, которые, как мы видим, указывают путь $CBBC$. Число, помечающее угол A, сразу показывает нам минимальное время в минутах, необходимое для поездки из

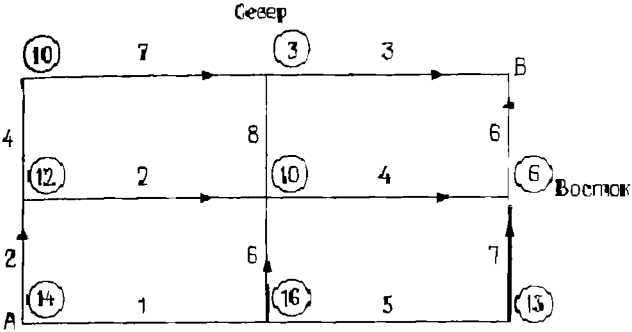


Рис. 10

A в B. Отметим, что мы получили то же самое решение $CBBC$, которое раньше нашли с помощью полного перебора. Однако новый метод намного эффективнее. На каждом углу мы делали не более двух сложений и одно сравнение, т. е. 3 операции. Например, для схемы 30×30, в которой $31 \times 31 = 961$ углов, поиск лучшего пути потребовал бы менее 3000 операций и компьютерное время снизилось бы до 3/100 с.

Таким образом, мы получили следующую таблицу:

Размер	Число операций	Вручную	На компьютере
	Полный перебор		
2×2	23	< 10 мин	—
10×10	3 695 119	$\approx$ месяц	$\approx 3{,}7$ с
30×30	$> 10^{18}$	—	$> 100\,000$ лет
	Динамическое программирование		
2×2	< 27	< 10 мин	—
10×10	< 363	≈ 10 мин	$< 4/1000$ с
30×30	< 3000	≈ 75 мин	$< 3/100$ с

Задача 1. С помощью метода динамического программирования найдите минимальное время (в минутах), за которое можно попасть из A в B (см.

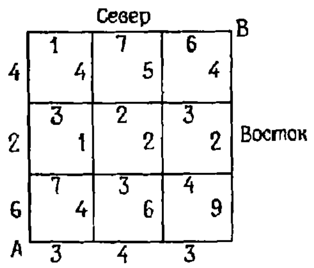


Рис. 11

рис. 11). Не забудьте, что на каждом углу надо ехать или на восток, или на север.

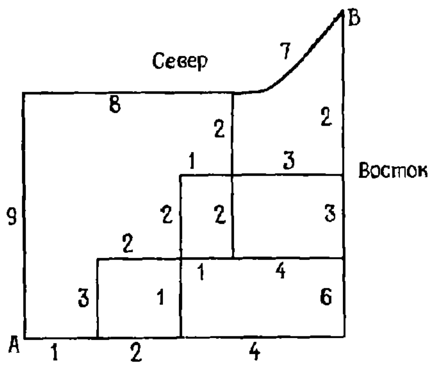


Рис. 12

Задача 2. С помощью метода динамического программирования найдите минимальное время, за которое можно попасть из A в B (см. рис. 12). Не забудьте, что на каждом углу надо ехать либо на север, либо на восток.

Задача 3. В фундаменте здания надо провести водопровод. Трубы от исходиой точки *A* к точке *B* можно проложить по-разному; это показано на рис. 13. Поскольку длины труб и характер препятствий для разных вариантов различны, разным путям соответствуют разные затраты. Стоимость труб указана под

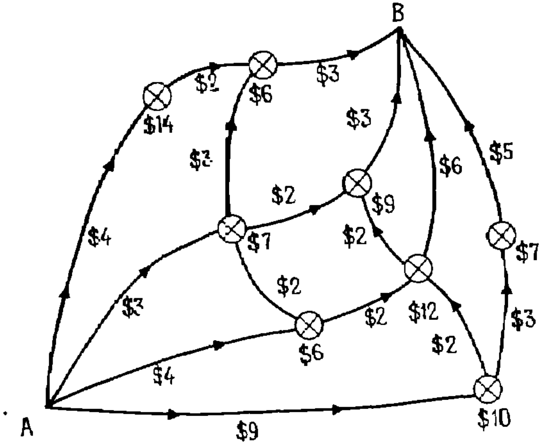


Рис. 13

каждым участком путн. Каждое препятствие отмечено значком ⊗, под которым указана стоимость устранения этого препятствия. Какой путь следует выбрать, чтобы минимизировать затраты?

Задача 4. Приведите пример, который показал бы, что в отсутствие ограничения, состоящего в том, что на каждом углу можво поворачивать только на север или на восток, метод динамического программирования не всегда дает оптимальный путь.

Фантазия 2

НА ВЕРТОЛЕТЕ

Математика: *алгебра, неравенства*

Вертолет Сикорского может перевозить грузы или внутри фюзеляжа, или снаружи, подвешенными под фюзеляжем. Груз, подвешенный снаружи, создает помеху, и средняя скорость оказывается меньше, чем при перевозке грузов внутри. Однако загрузка и разгрузка при перевозке грузов снаружи обычно занимают меньше времени, чем при перевозке внутри фюзеляжа.

Будем считать, что груз можно перевозить любым из этих способов, но их комбинация (часть груза внутри, часть снаружи) исключается. Предположим, что груз надо перевезти на 80 миль и время доставки чрезвычайно важно. Пусть числовые данные таковы:

	Средняя скорость (миля/ч)	**Время погрузки (ч)**	**Время разгрузки (ч)**
Внутри	140	1/4	1/4
Снаружи	100	1/12	1/12

Заметим, что в случае перевозки груза внутри фюзеляжа время полета равно 80/140 ч, а в случае перевозки снаружи — 80/100 ч. Таким образом, общее время доставки груза при перевозке внутри фюзеляжа равно

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{погрузка}} + \underbrace{\frac{80}{140}}_{\text{полет}} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{разгрузка}} = \frac{15}{14}\,(\approx 1.07\text{ ч}),$$

а общее время доставки груза при перевозке снаружи равно

$$\underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{погрузка}} + \underbrace{\frac{80}{100}}_{\text{полет}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{разгрузка}} = \frac{29}{39}\,(\approx 0.97\text{ ч}).$$

Таким образом, на 80 миль груз лучше перевозить подвешенным под фюзеляжем.

Теперь предположим, что надо перевезти тот же груз на 200 миль. В этом случае при перевозке груза внутри время полета составит 200/140, а при перевозке снаружи — 200/100. Таким образом, при перевозке груза внутри общее время доставки равно

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{погрузка}} + \underbrace{\frac{200}{140}}_{\text{полет}} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{разгрузка}} = \frac{27}{14}\,(\approx 1.9\text{ ч}),$$

а при перевозке снаружи

$$\underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{погрузка}} + \underbrace{\frac{200}{100}}_{\text{полет}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{разгрузка}} = \frac{13}{6}\,(\approx 2.2\text{ ч}).$$

Следовательно, в этом случае выгоднее перевозить груз внутри фюзеляжа.

Чтобы лучше понять, в чем тут дело, несколько обобщим задачу: пусть вертолет должен перевезти груз на D миль. Будем по-прежнему использовать данные из таблицы.

Заметим, что при перевозке груза внутри фюзеляжа время полета равно $D/140$, а при перевозке груза снаружи — $D/100$. Следовательно, при перевозке внутри общее время доставки равно

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{погрузка}} + \underbrace{\frac{D}{140}}_{\text{полет}} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{разгрузка}}\,,$$

а при перевозке снаружи

$$\underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{погрузка}} + \underbrace{\frac{D}{100}}_{\text{полет}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{разгрузка}}\,.$$

Перевозка груза снаружи оказывается выгоднее, если

$$\frac{1}{12} + \frac{D}{100} + \frac{1}{12} < \frac{1}{4} + \frac{D}{140} + \frac{1}{4},$$

или

$$\frac{D}{100} + \frac{1}{6} < \frac{D}{140} + \frac{1}{2},$$

или (если умножить обе части неравенства на 2100)

$$21D + 350 < 15D + 1050,$$

или

$$6D < 700,$$

или

$$D < \frac{700}{6} (\approx 117 \text{ миль}).$$

Другими словами, если расстояние $D < 117$ миль, то грузы лучше перевозить снаружи, а если $D > 117$ миль, то грузы лучше перевозить внутри. (Если же $D = 700/6$, время доставки не зависит от способа перевозки.)

Задача. Выясните, какой способ перевозки груза на расстояние D предпочтительнее при следующих данных:

	Средняя скорость (миля/ч)	Время погрузки (ч)	Время разгрузки (ч)
Внутри	200	1/4	1/4
Снаружи	150	1/8	1/8

Фантазия 3

ПОШЛЕМ ПО ПОЧТЕ КАК МОЖНО БОЛЬШЕ

Математика: *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см. приложение I)*

Почтовое ведомство США ограничило размеры ящиков для посылок следующим правилом: «длина плюс обхват не должны превышать 100 дюймов». (Напомним, что обхват — это периметр поперечного сечения.)

Наша задача — найти размеры самого большого (по объему) ящика, который можно послать по американской почте.

Пусть l, w и h — соответственно длина, ширина и высота прямоугольного ящика. Обхват такого ящика

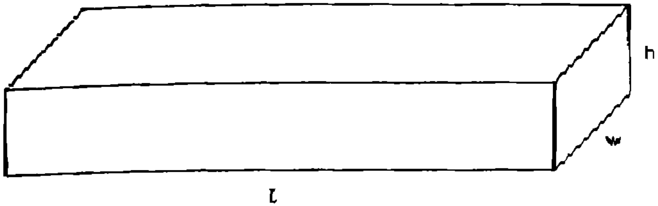


Рис. 1

равен $2w+2h$, так что длина плюс обхват составляют

$$l+2w+2h.$$

Объем V находится по формуле

$$V=lwh.$$

Наша задача — найти такие положительные числа l, w и h, что

$$l+2w+2h\leqslant 100,$$

а объем $V=lwh$ имеет наибольшее возможное значение.

Ясно, что, поскольку V должно быть как можно больше, в последнем неравенстве должно достигаться равенство:

$$l+2w+2h=100.$$

Действительно, пусть $l+2w+2h=90$. Тогда, увеличив l на 10 дюймов, получим

$$l+2w+2h=100,$$

а объем при этом возрастет.

Таким образом, мы хотим найти такие положительные числа l, w и h, что

$$l+2w+2h=100, \tag{1}$$

а $V=lwh$ как можно больше. Применив неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3},$$

получим

$$\frac{l+2w+2h}{3}\geqslant\sqrt[3]{4lwh}, \qquad (2)$$

или

$$\frac{100}{3}\geqslant\sqrt[3]{4V}, \qquad (3)$$

или

$$\frac{1}{4}\left(\frac{100}{3}\right)^3\geqslant V. \qquad (4)$$

Таким образом, невозможно сделать прямоугольный ящик, который удовлетворял бы требованиям почты и имел объем, превосходящий $\frac{1}{4}\left(\frac{100}{3}\right)^3$. А для того чтобы получить это оптимальное значение, надо, чтобы в неравенстве (4), а значит, и в неравенстве (2) достигалось равенство, откуда следует

$$l=2w=2h.\text{[1]}$$

Подставив это в (1), получим

$$3l=100,$$

или

$$l=\frac{100}{3}.$$

Таким образом, у «самого большого» ящика

$$\text{длина}=\frac{100}{3}\text{ дюймов,}$$

$$\text{ширина}=\frac{50}{3}\text{ дюймов,}$$

$$\text{высота}=\frac{50}{3}\text{ дюймов.}$$

Задача. В некоторых штатах размеры ящиков для посылок ограничены следующим правилом: «длина плюс обхват не должны превышать 72 дюйма». Каковы размеры самого большого ящика, который можно послать по почте в этих штатах?

[1] См. приложение 1.

Фантазия 4

ЕДЕМ НА ГРУЗОВИКЕ

Математика: *алгебра, неравенства*

24 ноября 1973 г. газета «Лос-Анджелес Таймс Сёрвис» сообщила, что Алан Глазенап, инженер отдела исследований и разработок фирмы «Дженерал Моторз», обнаружил, что «большие грузовики и автобусы при скорости 55 миль в час проезжают на 1 галлоне горючего в среднем на 5 % меньше миль, чем при скорости 50 миль в час». Он также утверждал, что «с точки зрения эффективности затрат не имеет смысла использовать более высокие скорости».

Если согласиться с цитированным высказыванием и оценкой 5 %, то ясно, что при скорости 50 миль в час энергия расходуется экономнее, чем при скорости 55 миль в час. Теперь посмотрим, сколько будет стоить поездка на D миль. Введем следующие обозначения:

x = число миль на галлон горючего при скорости 50 миль/ч;
f = стоимость (в долларах) одного галлона горючего;
c = эксплуатационные расходы (в долларах) на одну милю (не включая стоимость горючего и оплату труда шофера);
w = почасовая зарплата шофера (в долларах).

Тогда

$$T_{50}=\frac{D}{x}f+\frac{D}{50}w+Dc,$$

$$T_{55}=\frac{D}{0.95x}f+\frac{D}{55}w+Dc,$$

где через T_i обозначены общие затраты на поездку при скорости i миль в час.

Сравним эти затраты:

$$T_{55}-T_{50}=\frac{D}{x}f\left(\frac{1}{0.95}-1\right)+Dw\left(\frac{1}{55}-\frac{1}{50}\right).$$

или

$$T_{55} - T_{50} = \frac{D}{x} f \left(\frac{1}{19}\right) - Dw \left(\frac{1}{550}\right).$$

Следовательно,

$$T_{55} > T_{50},$$

если

$$\frac{D}{x} f \left(\frac{1}{19}\right) > Dw \left(\frac{1}{550}\right),$$

или

$$\frac{f}{wx} > \frac{19}{550}. \qquad (1)$$

Из неравенства (1) можно сделать следующие выводы:

(I) При сравнении полных затрат расстояние D и эксплуатационные расходы c не играют роли.

(II) Пусть $f = 0.54$ и $x = 6$ (эти числа основаны на данных, полученных в 1974 г. от одного местного шофера). Тогда (1) принимает вид

$$\frac{0.54}{6w} > \frac{19}{550},$$

или (с точностью до сотых)

$$2.61 > w.$$

Таким образом, в данном случае полные затраты при скорости 50 миль в час оказываются меньше, чем при скорости 55 миль в час, если шофер получает меньше 2.61 долл. в час.

(III) Пусть $x = 6$ и зарплата водителя равна 4.50 долл. в час. Тогда из неравенства (1) получаем

$$\frac{f}{(4.5)(6)} > \frac{19}{550},$$

или (с точностью до сотых)

$$f > 0.93.$$

Таким образом, в данном случае полные затраты при скорости 50 миль в час оказываются меньше, чем при скорости 55 миль в час, если цена горючего превышает 0.93 долл. за галлон.

Мы предполагали, что эксплуатационные расходы одинаковы при 50 и при 55 миль в час. Хотя специальных исследований по этому поводу не проводилось, местные шоферы полагают, что если разница и есть, то небольшая.

Проведем теперь аналогичное сравнение затрат, основываясь на данных полученных в 1981 г. от одного местного шофера.

(i) Если $f = 1.36$ долл. и $x = 6$, то из (1) получаем

$$\frac{1.36}{6w} > \frac{19}{550},$$

или (с точностью до сотых)

$$6.56 > w.$$

Таким образом, в данном случае полные затраты при скорости 50 миль в час оказываются меньше, чем при 55 миль в час, если шофер получает меньше 6.56 долл. в час.

(ii) Пусть $x = 6$ и владелец автобазы платит шоферам 12.50 долл. в час. Тогда из (1) получаем

$$\frac{f}{(12.50)\,(6)} > \frac{19}{550},$$

или (с точностью до сотых)

$$f > 2.59.$$

Задача. Предположим, что большие грузовики и автобусы при скорости 60 миль в час проезжают на 1 галлоне горючего в среднем на 10 % меньше миль, чем при скорости 55 миль в час. Постройте математическую модель и проанализируйте эффективность затрат на основе данных 1974 г. (см. **(ii)**) и на основе данных 1981 г. (см **(i)**).

Фантазия 5

СРАЗУ ИЛИ ПО ЧАСТЯМ!

Математика: *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см. приложение I)*

Часто приходится слышать, что «высокая производительность обеспечивает низкую стоимость». Это становится понятным, если сравнить стоимость стандартного нового дома со стоимостью нового дома, построенного по индивидуальному проекту. Однако во многих отраслях встречаются затраты, которые возрастают при увеличении выпуска. Например, может возникнуть необходимость кредитования; в этом случае возникают затраты на проценты. Кроме того, если произведено большое количество готовой продукции, которая не реализована немедленно, могут возникнуть затраты на ее хранение, страховку и т. д. Предположим, к примеру, что сталелитейная компания в течение года должна поставить некоему заказчику 1600 единиц некоторого изделия. Предположим, что это изделие уникально в том смысле, что оно требуется лишь данному заказчику. При этом возникнут некоторые затраты, не зависящие от числа изготовляемых изделий: они связаны с приобретением и установкой необходимых станков, изготовлением пробных образцов изделий, оплатой секретарского времени и т. д. Предположим, что эти *стартовые затраты* составят 100 долл., а *затраты на производство единицы изделия* (труд, материалы, электроэнергия, ремонт станков и т д.) — 3 долл. Кроме того, существуют *затраты на хранение* (оплата складских помещений, страховки и т. п.):

Общие затраты на хранение = \$ 2 × (среднее число изделий на складе за год).

Для начала предположим, что менеджер решит произвести все 1600 единиц изделия немедленно и что эти изделия будут продаваться равномерно в течение года. Поскольку к концу года их запас будет исчерпан, среднее число изделий на складе за год

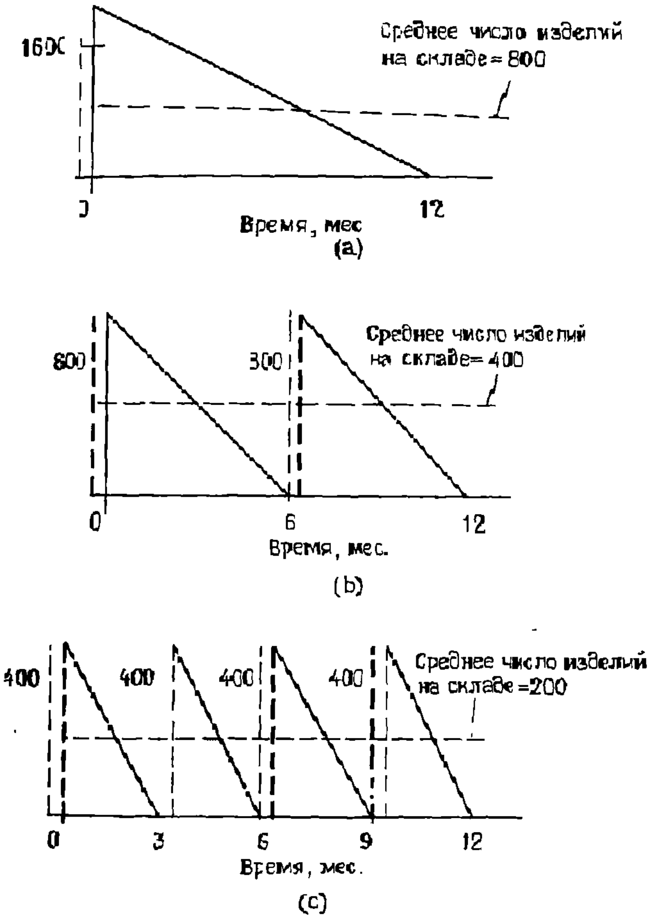


Рис. 1

составит 800. Таким образом, общие затраты описываются формулой

$$C = \underbrace{100}_{\text{стартовые затраты}} + \underbrace{2 \times 800}_{\text{затраты на хранение}} + \underbrace{3 \times 1600}_{\text{затраты на производство}},$$

или

$$C = \$6500.$$

Предположим теперь, что менеджер решит произвести сразу лишь 800 изделий, а остальные 800— через полгода. В этом случае ему придется дважды платить за наладку оборудования, а на складе в течение года будет находиться в среднем 400 изделий. Общие затраты в этом случае составят

$$C = 2 \times 100 + 3 \times 1600 + 2 \times 400,$$

или

$$C = \$5800.$$

Заметим, что общие затраты уменьшаются, если производить продукцию несколькими партиями, а не всю сразу. Мы могли бы посмотреть (и посчитать), что получится, если выпустить 4 партии по 400 изделий, 8 партий по 200 изделий, 5 партий по 320 изделий и т. д. Рис. 1 позволяет оценить всевозможные режимы производства и найти режим, который позволил бы минимизировать общие затраты и при этом произвести нужное число изделий. Однако математика поможет нам найти оптимальную стратегию, не прибегая к таким громоздким вычислениям. Предположим, что в каждой партии выпускается одинаковое количество изделий и что спрос на эти изделия остается постоянным, так что время между выпуском отдельных партий продукции остается постоянным.

Обозначим через x число изделий в каждой партии, а через N число партий. Мы должны выполнить условие $Nx = 1600$, поэтому $N = 1600/x$. Таким образом,

число партий в год $= \frac{1600}{x}$;

общие стартовые затраты $= 100\left(\frac{1600}{x}\right)$;

среднее число изделий на складе $= \frac{x}{2}$;

общие затраты на хранение $= 2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Следовательно, общие затраты C описываются формулой

$$C = 100\left(\frac{1600}{x}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\,(1600),$$

или

$$C = \frac{160\,000}{x} + x + 4800.$$

Здесь 4800 долл.— это фиксированные затраты, которые не зависят от наших решений. Теперь посмотрим на величину

$$\frac{160\,000}{x} + x.$$

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{\frac{160\,000}{x} + x}{2} \geqslant \sqrt{160\,000};$$

$$\frac{160\,000}{x} + x \geqslant 800.$$

Таким образом, затраты, которые зависят от принятого нами решения, не могут быть ниже 800 долл. Для того чтобы действительно получить эту минимальную величину, надо, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{160\,000}{x} = x;$$

$$160\,000 = x^2;$$

$$x = 400.$$

Итак, *оптимальная стратегия* заключается в том, чтобы выпускать по 400 изделий в каждой партии. Это означает выпуск 4 партий в год, по одной партии каждые 3 месяца.

Использованные здесь идеи лежат в основе сравнительно новой области математики, известной как *геометрическое программирование*.

Задача 1. Производитель ткани должен поставить заказчику 12 000 метров некоторой ткани за год. В течение года на нее сохраняется постоянный спрос, и менеджер хочет выпускать ткань равными партиями. Мы располагаем следующей информацией:

(i) стартовые затраты — \$300;
(ii) затраты на хранение — \$0.8x (x — среднее число метров ткани на складе);
(iii) производственные затраты — \$3 на метр.

Сколько метров ткани нужно выпускать в каждой партии, если мы хотим минимизировать общие затраты?

Задача 2. Обобщите полученный результат, используя следующие обозначения:

D = годовой спрос,
S = стартовые затраты,
I = коэффициент, на который умножается среднее число изделий на складе за год при вычислении годовых затрат на хранение,
C = стоимость производства одного изделия,
p = число изделий в каждой партии,
n = число партий в год.

Покажите, что оптимальная стратегия предусматривает

$$p=\sqrt{\frac{2DS}{I}}\quad \left(\text{или } n=\sqrt{\frac{DI}{2S}}\right).$$

Фантазия 6

ПОКУПКА САМОЛЕТОВ

Математика: *алгебра, системы уравнений*

Однажды президент авиакомпании «Точно в срок» прочитал в газете «Уолл-Стрит Джорнэл», что авиакомпания Лысой горы заказала 13 новых самолетов фирмы «Для наших пассажиров» на сумму 16.5 млн. долл. Президент знает, что эта фирма производит три типа самолетов и что самолет типа A стоит 1.1 млн., самолет типа B стоит 1.3 млн., а самолет типа C стоит 1.8 млн. Наш президент хочет узнать, сколько самолетов каждого типа заказано. (Кстати, зачем бы ему это знать?)

Сначала соберем все имеющиеся данные в таблицу:

Самолет	Стоимость (в млн. долл.)
A	1.1
B	1.3
C	1.8

Обозначим через x число заказанных самолетов типа A, через y — типа B, а через z — типа C. Получим уравнения

$$\begin{cases} 1.1x + 1.3y + 1.8z = 16.5, \\ x + y + z = 13. \end{cases} \tag{1}$$

На x, y и z накладывается еще одно ограничение: они должны быть целыми неотрицательными числами.

Теперь мы можем переписать уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} 11x + 13y + 18z = 165, \\ x + y + z = 13. \end{cases} \tag{2}$$

Умножив второе уравнение на -11 и сложив оба уравнения, получим

$$2y + 7z = 22. \tag{3}$$

Разделив теперь обе части уравнения (3) на 2, получим

$$y + 3z + \frac{1}{2}z = 11,$$

или

$$\frac{z}{2} = 11 - y - 3z.$$

Поскольку y и z должны быть целыми, число $11 - y - 3z$ тоже должно быть целым. Поэтому мы можем записать

$$\frac{z}{2} = n, \quad \text{где } n \text{ — целое число,}$$

или

$$z = 2n. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$2y + 14n = 22,$$

или

$$y = 11 - 7n. \qquad (5)$$

Подставляя теперь (4) и (5) во второе уравнение системы (2), находим, что

$$x + (11 - 7n) + (2n) = 13,$$

или

$$x = 2 + 5n.$$

Итак,

$$x = 2 + 5n,$$
$$y = 11 - 7n.$$
$$z = 2n,$$

где n — целое число. Посмотрим теперь следующую таблицу:

n	x	y	z
0	2	11	0
1	7	4	2

Заметим, что целое число n не может быть больше или равным 2, поскольку в этом случае y окажется отрицательным. Число n не может быть и отрицательным, потому что при этом z окажется отрицательным.

Следовательно, существует два возможных решения: авиакомпания Лысой горы заказала либо

(1) 2 самолета типа A, 11 самолетов типа B и ни одного самолета типа C,

либо

(2) 7 самолетов типа A, 4 самолета типа B и 2 самолета типа C.

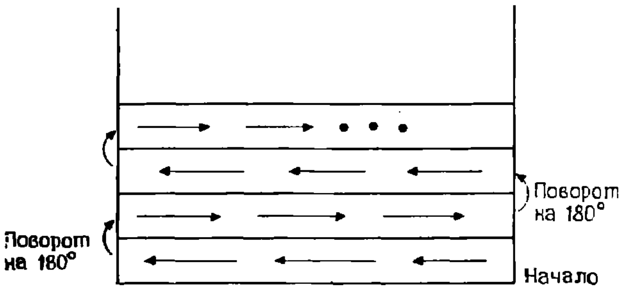
Задача. А сколько самолетов каждого типа могла бы купить авиакомпания Лысой горы, если она истратила бы на эту покупку 19.3 млн. долл.?

Фантазия 7

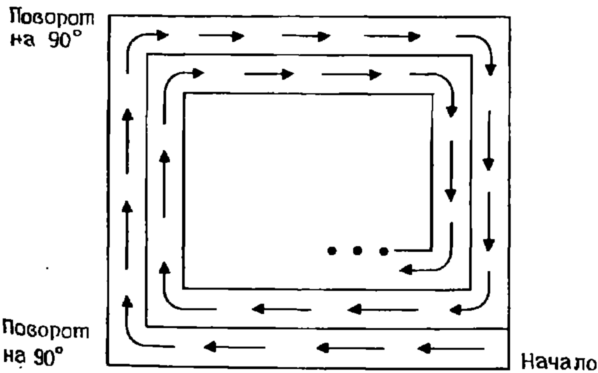
МАНЕВРЫ ГАЗОНОКОСИЛКИ

Математика: *элементарная алгебра*

Предположим, что у нас есть газон приблизительно 30 ярдов на 40 ярдов и газонокосилка. При косьбе обычно используют один из двух методов. Первый метод заключается в том, что сначала выкашивают полосу вдоль газона, затем, дойдя до конца, поворачивают обратно и снова идут вдоль газона и т. д., как показано на следующем рисунке.



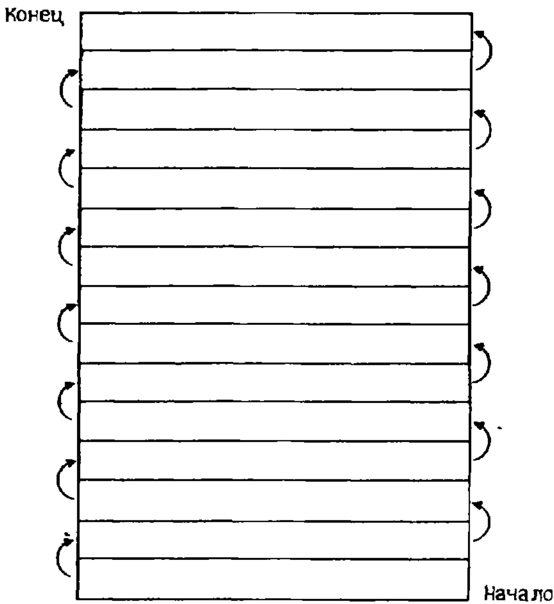
При втором методе сначала идут по периметру, затем по новому периметру и т. д., как показано на следующем рисунке.



Возникает вопрос: какой метод быстрее, если мы всегда катим газонокосилку с одинаковой скоростью?

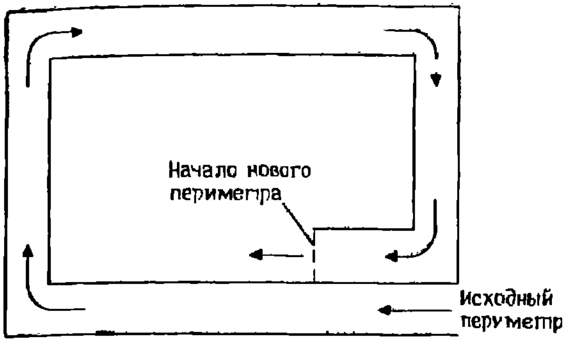
Конечно, в обоих случаях нам предстоит скосить одно и то же количество травы, поэтому задача сводится к рассмотрению времени, которое уйдет на различные повороты. Обозначим через T_c время, за которое можно повернуть на 180°, а через T_p — время, за которое можно повернуть на 90°. Будем считать, что наша косилка выкашивает полосу шириной в 2 ярда.

Если выбрать первый метод, потребуется 14 поворотов на 180°: семь налево и семь направо, как показано на следующем рисунке.

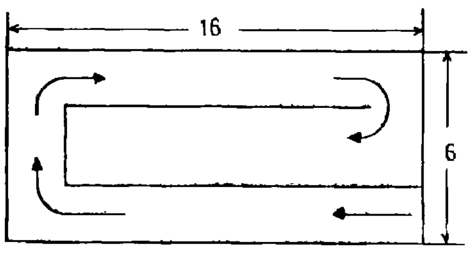


Таким образом, на повороты уйдет время, равное 14 T_c.

Для того чтобы найти время, необходимое для выполнения поворотов при втором методе, рассмотрим отдельно один периметр:



Каждый обход газона по периметру включает 4 поворота на 90°, после чего мы переходим к следующему периметру. Предположим, что мы уже сделали 6 обходов и, значит, 24 поворота на 90°. В результате мы сократили размеры нескошенного газона на 12 ярдов с каждой стороны. То, что нам остается скосить, показано на следующем рисунке:



Чтобы выкосить эту площадку, потребуется сделать еще два поворота на 90° и один поворот на 180°. Таким образом, при втором методе на все повороты уйдет время

$$26\ T_p + T_c.$$

Следовательно, второй метод будет оптимальным, если выполняется неравенство

$$26\ T_p + T_c < 14\ T_c,$$
$$26\ T_p < 13\ T_c,$$
$$2\ T_p < T_c.$$

Другими словами, второй метод следует использовать в том случае, если время поворота на 180° более чем вдвое превосходит время поворота на 90°.

(Экспериментируя с газонокосилкой, автор установил, что время поворота на 180° втрое больше времени поворота на 90°, т. е. $T_c = 3T_p$. Следовательно, в моем случае второй метод лучше.)

Задача 1. Каким был бы результат, если бы ширина захвата косилки была 20 см?

Задача 2. Каким был бы результат, если бы газон имел размеры 60 ярдов на 100 ярдов, а ширина захвата косилки была 2 ярда?

Задача 3. Обобщите полученные результаты, рассмотрев газон размером $W \times L$, где W — ширина, а L — длина, и предположив, что ширина захвата косилки равна M. (Можно считать, что W делится на M.)

Фантазия 8

ПРИТЧА О СТОЛАХ И СТУЛЬЯХ

Математика: *алгебра, неравенства*

Рассмотрим такую задачу. Маленькая фирма производит два вида продукции, например стулья и столы. Для изготовления одного стула требуется 3 фута древесины, а для изготовления одного стола — 7 футов. На изготовление стула уходит 2 часа рабочего времени, а на изготовление стола — 8 часов рабочего времени. Каждый стул приносит 1 долл. прибыли, а каждый стол — 3 долл. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 420 футами древесины и 400 часами рабочего времени и хочет получить максимальную прибыль?

Обозначим через x число стульев, которое собираемся выпустить, а через y — число столов. Сравнивая необходимое для этого количество древесины

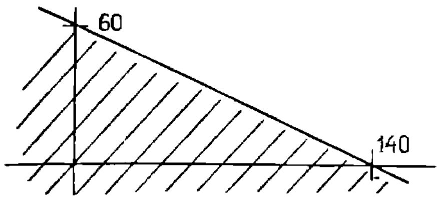


Рис. 1

с тем, что имеется в нашем распоряжении, получаем неравенство

$$3x + 7y \leqslant 420.$$

Сравнение необходимого и имеющегося рабочего времени дает второе неравенство:

$$2x + 8y \leqslant 400.$$

Прибыль от x стульев и y столов составит

$$P = x + 3y.$$

Таким образом, нашу задачу можно сформулировать следующим образом: найти такие неотрицательные числа x и y, что

$$3x + 7y \leqslant 420,$$
$$2x + 8y \leqslant 400,$$

а $P = 2x + 3y$ максимально.

График неравенства

$$3x + 7y \leqslant 420$$

представлен заштрихованной областью на рис. 1, а график неравенства

$$2x + 8y \leqslant 400$$

заштрихованной областью на рис. 2. Следовательно, множество точек (x, y), где x и y неотрицательны и удовлетворяют обоим неравенствам, совпадает с заштрихованной областью на рис. 3. Это множество точек (x, y) называется *областью допустимых значений*

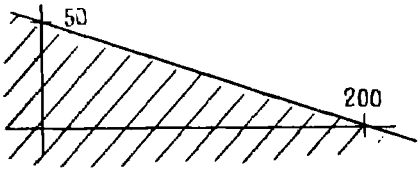


Рис. 2

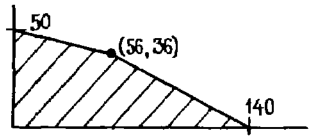


Рис. 3

Другими словами, если точка (x, y) не входит в заштрихованную область, то производство x стульев

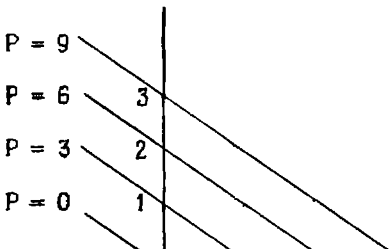


Рис. 4

и y столов в наших условиях невозможно, а если входит — возможно.

А теперь вернемся к функции прибыли

$$P = x + 3y.$$

Заметим, что при любом фиксированном значении P график этого уравнения представляет собой прямую линию, пересекающую ось y в точке $P/3$ и имеющую

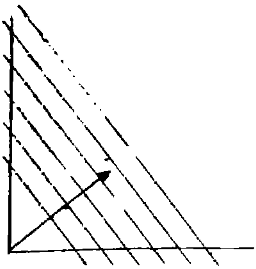


Рис. 5

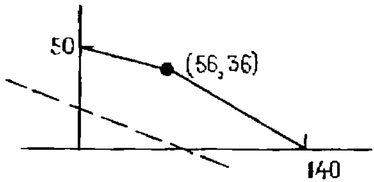


Рис. 6

наклон $-1/3$. На рис. 4 показаны прямые, соответствующие различным значениям P. Направление возрастания прибыли P указано стрелкой на рис. 5.

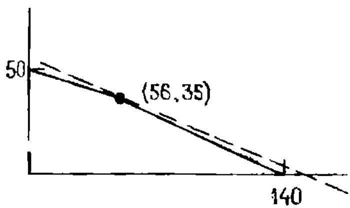


Рис. 7

Теперь совместим на одном рисунке линию равной прибыли и область допустимых значений (x, y) (рис. 6). Учитывая направление возрастания прибыли P, приходим к выводу, что если мы хотим, чтобы (x, y) было допустимым решением, а прибыль P была как можно больше, то нужно выбрать ту линию прибыли, которая показана на рис. 7. Таким образом, чтобы максимизировать прибыль P, фирма должна изготовить 56 стульев и 36 столов. Легко вычислить, что прибыль при этом составит 164 долл.

Подобные задачи называются задачами *линейного программирования.*

Задача. Небольшая фирма выпускает два вида продукции, например стулья и столы. Для изготовления одного стула требуется 3 фута древесины, а для изготовления одного стола — 7 футов. На стул уходит 2 часа рабочего времени, а на стол — 8 часов. Прибыль от каждого стула составляет 2 долл., а от каждого стола — 3 долл. Сколько изделий каждого вида должна изготовить эта фирма, чтобы получить максимальную прибыль, если в ее распоряжении 126 футов древесины и 120 часов рабочего времени?

Фантазия 9

РАЗМЫШЛЕНИЯ ОБ УДОБРЕНИЯХ

Математика: *алгебра, неравенства*

Рассмотрим такую задачу. Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный

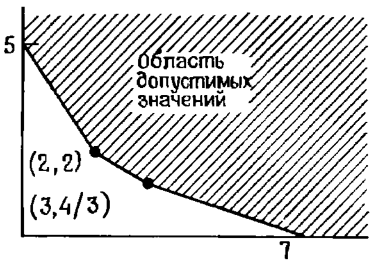


Рис. 1

и улучшенный. В обычный набор входит 3 фунта азотных, 4 фунта фосфорных и 1 фунт калийных удобрений, а в улучшенный — 2 фунта азотных, 6 фунтов фосфорных и 3 фунта калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 фунтов азотных, 20 фунтов фосфорных и 7 фунтов калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 долл., а улучшенный — 4 долл. Сколько и каких наборов удобрений надо купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

Обозначим через x число обычных наборов удобрений, которое мы собираемся купить, а через y —

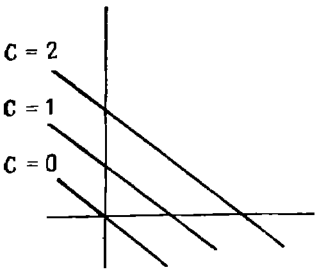


Рис. 2

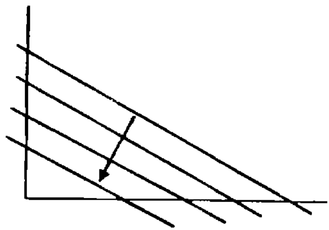


Рис. 3

число улучшенных наборов. Пусть C — стоимость такой покупки. Тогда задача принимает следующий вид: найти такие неотрицательные числа x и y, что

$$\begin{cases} 3x + 2y \geqslant 10, \\ 4x + 6y \geqslant 20, \\ x + 3y \geqslant 7 \end{cases} \qquad (1)$$

и при этом

$$C = 3x + 4y$$

минимально.

Без труда устанавливается, что множество точек (x, y), где x и y неотрицательны и удовлетворяют системе неравенств (1), имеет такой вид, как показано на рис. 1. Это и есть область допустимых значений для нашей задачи.

Теперь вернемся к функции стоимости

$$C = 3x + 4y.$$

Заме им, что при любом фиксированном значении C график этого уравнения представляет собой прямую линию, пересекающую ось y в точке $C/4$ и имеющую

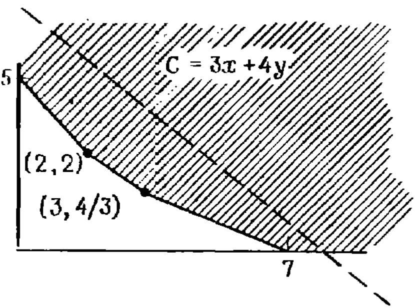


Рис. 4

наклон —3/4. На рис. 2 показаны прямые, соответству щие различным значениям C. Направление уме. ния стоимости C указано стрелкой на рис. 3.

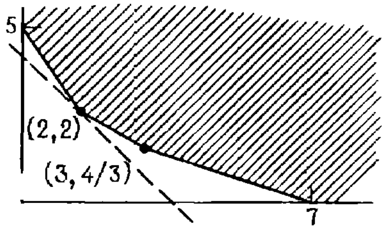


Рис. 5

Теперь совместим на одном рисунке линию стоимости и область допустимых значений (рис. 4). Если проследить направление уменьшения стоимости C, становится ясно, что если мы хотим, чтобы (x, y) было допустимым решением, а C было как можно меньше, то нужно выбрать ту линию стоимости, которая показана на рис. 5. Таким образом, если мы купи 2 обычных набора удобрений и 2 улучшенных, мы приобретем все необходимые ингредиенты, истратив минимум денег (14 долл.).

Эта задача, как и задача из «Притчи о столах и стульях», является задачей *линейного программирования*.

Задача. Некоторая фирма выпускает два вида удобрений для газонов: смесь A и смесь B. Пакет смеси A содержит 4 фунта азотных, 2 фунта фосфорных и 1 фунт калийных удобрений. Пакет смеси B содержит 3 фунта азотных, 2 фунта фосфорных и 4 фунта калийных удобрений. Пакет смеси A стоит 8 долл., а пакет смеси B — 6 долл. Для некоторого газона требуется по меньшей мере 18 фунтов азотных, 10 фунтов фосфорных и 8 фунтов калийных удобрений. Определите, сколько пакетов каждого вида следует купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость.

Фантазия 10

РАСКРОЕМ КАРТЫ

Математика: *элементарная алгебра*

Здесь мы опишем один простой карточный фокус. Его описание мы разобьем на три части. Первая часть — о том, что видит непосвященный зритель. Вторая часть — о том, что делает фокусник. А третья (математическая) часть объясняет, почему этот фокус всегда получается.

Что видит зритель? Фокусник разбивает колоду карт на несколько стопок и кладет их «лицом» вверх. Видно, что стопки неравные. Если присмотреться, можно заметить, что король выделен в отдельную стопку, дама прикрыта всего одной картой, валет — двумя картами, десятка — тремя и т. д.— вплоть до туза, который прикрыт двенадцатью картами. Таким образом, максимальное число карт в стопке — триналцать. Зритель переворачивает стопки «рубашкой» вверх и располагает их в произвольном порядке, а фокусник на это время отворачивается. Затем другому зрителю предлагается взять все стопки, кроме трех, сложить их вместе и передать фокуснику, который объединяет эти карты с остатком колоды и тасует. Затем зрителя просят открыть верхние карты в двух из трех оставшихся стопок. После этого фокусник считает оставшиеся у него в руках карты, а затем угадывает верхнюю карту в последней стопке.

В чем секрет фокуса? Раскладывая карты в стопки, фокусник начинает с числового значения первой карты и прибавляет к нему числовые значения остальных карт вплоть до тринадцати. (Числовое значение туза равно 1, валета — 11, дамы — 12, короля — 13.) Например, если первая карта — восьмерка, то считаем так: 8, 9, 10, 11, 12, 13 — получается 6 карт в стопке. Следующая карта окажется первой в следующей стопке. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не станет ясно, что на очередную стопку карт уже не хватит. Оставшиеся карты фокусник держит в руке. После того как все стопки перевернуты вверх «рубашками» и расположены произвольным образом, а потом все стопки, кроме трех, собраны вместе, все собранные карты передаются фокуснику и он тасует их вместе с теми, что у него в руках.

Секрет фокуса заключается в том, что, когда зритель открывает верхние карты двух из трех оставшихся на столе стопок, фокусник складывает их числовые значения и прибавляет к ним 10. Затем он вычитает полученное число из числа карт, которые он держит в руках. Разность и будет равна числовому значению верхней карты в третьей стопке.

Зритель может подумать, что это фокус на запоминание, однако теперь мы знаем, что дело обстоит иначе.

Почему фокус получается? Если первая карта в стопке (после переворачивания стопки она становится верхней), например, восьмерка, то до 13 надо добавить еще 5 карт. Такая стопка содержит 6, или [13 — (8 — 1)], карт. Аналогично, если верхняя карта в стопке — десятка, то в этой стопке 4, или [13 — (10 — 1)], карты. Вообще, если верхняя карта в стопке имеет числовое значение x, то в стопке [13 — (x — 1)] карт.

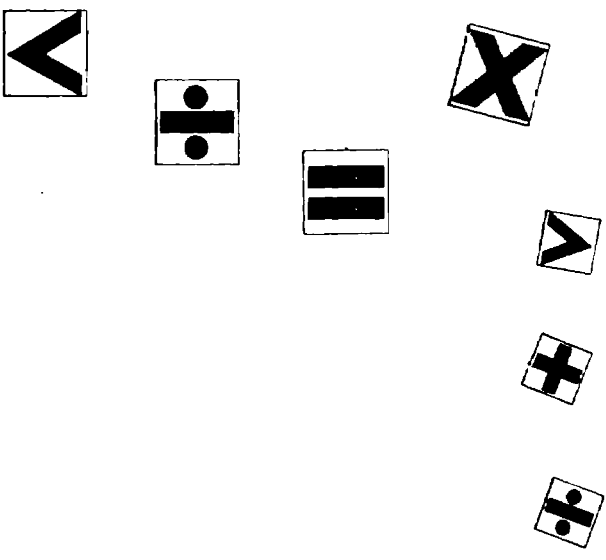
Следовательно, если a, b и c — числовые значения верхних карт в оставшихся трех стопках, то общее число карт в этих трех стопках будет равно

$$[13-(a-1)+13-(b-1)+13-(c-1)],$$

или $(42-a-b-c)$ карт, а общее число карт в руках у фокусника окажется равным

$$[52-(42-a-b-c)]=10+a+b+c.$$

Далее, если a и b — числовые значения двух открытых верхних карт, то фокусник вычитает из общего числа карт у него в руке величину $10+a+b$ и получает c — числовое значение верхней карты в последней стопке.



Фантазия II

РЫБАЦКАЯ ИСТОРИЯ

Математика: *элементарная алгебра и теория вероятностей*

Рассмотрим задачу оценки количества рыбы в некоем озере. Вот один возможный способ: выбрать наудачу место в озере и, забросив сеть, вытащить улов. Предположим, поймано 200 рыб. Этих рыб помечают и выпускают обратно. Через неделю эту операцию повторяют. На сей раз поймано 100 рыб и 40 из них помечены. Это наводит на мысль, что 40/100, или 0.4, всей рыбы в озере помечено. Если обозначить через F общее количество рыбы, то

$$0.4\,F = 200,$$

$$F = \frac{200}{0.4},$$

$$F = 500.$$

Мы можем обобщить эти рассуждения следующим образом:

Пусть

N_1 = число рыб в первом улове (эти рыбы были помечены);
N_2 = число рыб во втором улове;
T = число помеченных рыб во втором улове;
F = общее число рыб в озере.

Эти результаты позволяют предположить, что

$$\frac{T}{N_2} F = N_1,$$

$$F = \frac{N_1 N_2}{T}. \qquad (1)$$

Результат (1) называется *базовой оценкой.*

Пример 1. Предположим, что

60 = число рыб в первом улове,
80 = число рыб во втором улове,
10 = число помеченных рыб во втором улове.

Тогда базовая оценка находится по формуле

$$F = \frac{60 \cdot 80}{10} = 480$$

Теперь рассмотрим эту оценку с другой точки зрения. Предположим, что мы проделываем все то же самое с маленьким прудом, в котором плавают золотые рыбки. Пусть

$$N_1 = 3,$$
$$N_2 = 3,$$
$$T = 1.$$

Очевидно, что в пруду плавает по крайней мере 5 золотых рыбок. Наша базовая оценка в этом случае дает

$$F = \frac{3 \cdot 3}{1} = 9.$$

Теперь посмотрим, какова вероятность получить при втором улове именно такой результат, если в пруду действительно 5 рыбок:

$$P\,(\text{результат} \mid 5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.3.$$

Найдем также вероятность получить при втором улове этот результат, если в пруду плавает 6 рыбок:

$$P\,(\text{результат} \mid 6) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}} = 0.45.$$

Пожалуй, можно сказать, что в данном случае более вероятно», что в пруду плавает 6, а не 5 рыбок.

Теперь упростим обозначения: обозначим ерез $P(n)$ вероятность того, что при втором улове мы получим данный результат, если в пруду n рыб·

$$P\,(n) = P\,(\text{результат} \;\; n).$$

Составим такую таблицу:

n	$P(n)$
5	0.30
6	0.450
7	0.51429
8	0.53571
9	0.53571
10	0.5250
11	0.38182

(Проверьте хотя бы одно значение $P(n)$ для n, отличного от 5 и 6.)

Из этой таблицы можно заключить, что «наиболее вероятное» число рыб в пруду — 8 или 9. Однако, прежде чем сделать вывод, надо ответить на один вопрос: возможно ли, что если продолжить таблицу, то, начиная с некоторого значения, вероятности снова начнут возрастать? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим отношение

$$\frac{P(K)}{P(K+1)}.$$

Заметим, что вероятности в таблице будут возрастать, если

$$\frac{P(K)}{P(K+1)} < 1,$$

и убывать, если

$$\frac{P(K)}{P(K+1)} > 1.$$

В нашем случае

$$P(K) = \frac{\binom{3}{1}\binom{K-3}{2}}{\binom{5}{3}}$$

и

$$P(K+1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{(K+1)-3}{2}}{\binom{K+1}{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{P(K)}{P(K+1)}=\frac{\dfrac{\binom{3}{1}\binom{K-3}{2}}{\binom{K}{3}}}{\dfrac{\binom{3}{1}\binom{(K+1)-3}{2}}{\binom{K+1}{3}}}=$$

$$=\frac{\binom{K+1}{3}\binom{K-3}{2}}{\binom{K}{3}\binom{K-2}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{(K+1)!}{3!\,(K-2)!}\cdot\dfrac{(K-3)!}{2!\,(K-5)!}}{\dfrac{K!}{3!\,(K-3)!}\;\dfrac{(K-2)!}{2!\,(K-4)!}}=$$

$$=\frac{(K+1)!\,(K-3)!\,(K-3)!\,(K-4)!}{K!\,(K-2)!\,(K-2)!\,(K-5)!}=$$

$$=\frac{(K+1)(K-4)}{(K-2)(K-2)}=$$

$$=\frac{K^2-3K-4}{K^2-4K+4}.$$

Неравенство

$$\frac{K^2-3K-4}{K^2-4K+4}>1$$

эквивалентно тому, что

$$K^2-3K-4>K^2-4K+4,$$
$$K>8.$$

Другими словами, после значения 8 вероятности в таблице будут убывать. Таким образом, мы можем сказать, что «наиболее вероятное» число рыб в пруду равно 8 или 9. Эта оценка называется *оценкой максимального правдоподобия*. Вспомним, что нашей базовой оценкой было число 9.

Задача. Предположим, что $N_1=3$, $N_2=4$ и $T=2$. Какова базовая оценка числа рыб в пруду?

Найдите $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$ и $P(9)$. Каково «наиболее вероятное» число рыб в пруду? Проверьте, что вероятности $P(n)$ убывают после некоторого значения n.

Фантазия 12

ПОКУПАТЬ ИЛИ ЧИНИТЬ!

Математика: *алгебра, неравенства*

Перед современным человеком часто встает вопрос: когда следует заменять используемую в быту технику (например, автомобиль)? Предположим, что новая техника стоит 10 000 долл., а стоимость ее ремонта и поддержания в рабочем состоянии в течение следующих 10 лет указана в таблице 1.

Таблица 1

Год	Стоимость (в долл.)
1	500
2	780
3	940
4	1100
5	1200
6	1430
7	1920
8	2300
9	3300
10	4400

Для упрощения последующих рассуждений не будем учитывать ни скидку при покупке новой техники за сданную старую, ни выручку за сданную в утиль старую вещь. Если мы будем менять технику ежегодно, это будет стоить нам 10 500 долл. каждый год. Если мы будем менять ее каждые два года, то среднегодовой расход составит

$$\frac{10\,500 + 780}{2} = \$\,5640,$$

а если каждые три года, то

$$\frac{10\,500+780+940}{3}=\$\,4073\frac{1}{3}.$$

Продолжая в том же духе, получим таблицу 2.

Таблица 2

Год	Стоимость ремонта и поддержания техники в рабочем состоянии (в долл.)	Среднегодовой расход (в долл.)
1	500	10 500
2	780	5 640
3	940	$4\,073\frac{1}{3}$
4	1 100	3 330
5	1 200	2 904
6	1 430	$2\,658\frac{1}{3}$
7	1 920	2 552.86
8	2 300	2 521.25
9	3 300	2 607.78
10	4 400	2 787

Таблица 2 позволяет предположить, что «оптимальная стратегия» состоит в замене техники каждые 8 лет. При этом мы делаем следующее основное допущение: если продолжить таблицу 2 для 11-го, 12-го года и т. д., среднегодовые расходы будут продолжать расти. Так ли это на самом деле или с некоторого момента среднегодовые расходы могут начать уменьшаться и упасть ниже 2521.25 долларов?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся элементарной алгеброй. Предположим, что начальная стоимость техники равна C, а стоимость ее ремонта и поддержания в рабочем состоянии в 1-й, 2-й, 3-й и т. д. годы равна соответственно a_1, a_2, a_3 и т. д. Если мы пользуемся машиной n лет, то среднегодовые расходы составляют

$$\frac{C+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Теперь предположим, что встретились с ситуацией, когда *среднегодовые расходы за k лет больше, чем среднегодовые расходы за $k-1$ лет, $k > 1$*. Иными словами,

$$\frac{C + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} < \frac{C + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k}. \tag{1}$$

Полагая

$$A(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

можно переписать неравенство (1) в виде

$$\frac{C + A(k-1)}{k-1} < \frac{C + A(k)}{k}. \tag{2}$$

Теперь мы хотим найти условия, при которых среднегодовые расходы вновь возрастут, если использовать технику еще один год (т. е. всего $k+1$ лет). Значит, мы должны найти условия, при которых

$$\frac{C + A(k)}{k} < \frac{C + A(k+1)}{k+1}, \tag{3}$$

$$C\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] < \frac{A(k+1)}{k+1} - \frac{A(k)}{k},$$

$$C\left[\frac{1}{k(k+1)}\right] < \frac{kA(k+1) - (k+1)A(k)}{k(k+1)},$$

$$C < kA(k+1) - (k+1)A(k). \tag{4}$$

Вспомнив, что $A(k+1) = A(k) + a_{k+1}$, можно представить (4) в виде

$$\begin{aligned} C &< k[A(k) + a_{k+1}] - (k+1)A(k), \\ C &< ka_{k+1} - A(k). \end{aligned} \tag{5}$$

Из нашего предположения о том, что среднегодовые расходы за k лет больше, чем среднегодовые расходы за $k-1$ лет, $k > 1$, вытекает, что неравенство (5) справедливо, если заменить k на $k-1$, т. е.

$$C < (k-1)a_k - A(k-1).$$

Отсюда следует, что (5) будет доказано, если мы сможем доказать, что

$$(k-1)a_k - A(k-1) < ka_{k+1} - A(k). \qquad (6)$$

Вспомнив, что $A(k) = A(k-1) + a_k$, мы можем записать (6) в виде

$$(k-1)a_k - A(k-1) < ka_{k+1} - A(k-1) - a_k.$$

$$ka_k < ka_{k+1},$$

$$a_k < a_{k+1}. \qquad (7)$$

Неравенство (7) выполняется, если стоимость ремонта и поддержания техники в рабочем состоянии растет. Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Предположим, что в таблице, подобной таблице 2, встретилась ситуация, в которой среднегодовые расходы возросли с увеличением срока эксплуатации на один год. *Пока стоимость ремонта и поддержания техники в рабочем состоянии продолжает с каждым годом возрастать, среднегодовые расходы тоже будут продолжать расти.* Поэтому при таких условиях таблица 2 не вводит нас в заблуждение, а позволяет принять правильное решение.

Задача. Когда следует менять описанную здесь технику, если ее начальная стоимость составляет 8000 долл.?

Фантазия 13

ПОДОПЫТНАЯ МЫШЬ

Математика: *алгебра, логарифмы*

Подопытной мыши делают инъекцию одной чужеродной клетки. Через день обнаруживают уже 4 такие клетки, через два дня — 16 клеток и т. д. в соответствии со следующей таблицей:

День	Число клеток
(Сегодня) 0	1
1	4
2	16
3	64
4	256
. . .	. . .
T	4^T (полагаем $T=0,1,2,\ldots$)

Предположим, что мышь умирает, когда число чужеродных клеток превышает 1 млн. Существует метод лечения, эффективность которого составляет 96 % (т. е. уничтожается 96 % чужеродных клеток). Наша задача — определить, когда необходимо приступить к лечению, чтобы сохранить мышке жизнь.

Находим с помощью калькулятора, что

$$4^9 = 262\,144,$$
$$4^{10} = 1\,048\,576.$$

Таким образом, к лечению надо приступить между 9-м и 10-м днями.

Для того чтобы найти критический срок более точно, мы можем сделать одно из двух:

(1) Применить *линейную интерполяцию:*

Степень	Число
10	1,048,576
x	1,000,000
9	262,144

$$\frac{x-9}{10-9} = \frac{737\,856}{786\,432},$$
$$x-9 = 0.938\,232,$$
$$x = 9.938\,232 \text{ (дней)}.$$

Это больше 9 дней на 22.5 часа.

(2) Решить уравнение $4^T = 1\,000\,000$ относительно T:

$$4^T = 10^6,$$

$$T \log 4 = 6 \log 10,$$

$$T = \frac{6 \log 10}{4},$$

$$T \overset{!}{=} 9.965784 \text{ (дней).}$$

Это больше 9 дней на 23 часа.

Предположим, что лечение начинают в тот момент, когда число чужеродных клеток достигает 1 000 000. Тогда после курса лечения у мыши останется 40 000 таких клеток, через день их станет $4 \times 40\,000$ и т. д.:

День	Число клеток
(Сегодня) 0	40 000
1	$4 \times 40\,000 = 160\,000$
2	$16 \times 40\,000 = 640\,000$
3	$64 \times 40\,000 = 2\,560\,000$
. . .	. . .
T	$4^T \times 40\,000$

Ясно, что следующий курс лечения надо провести между 2-м и 3-м днями. Решаем следующее уравнение:

$$4^T \times 40\,000 = 1\,000\,000,$$

$$4^T = 25,$$

$$T \log 4 = \log 25,$$

$$T = \frac{\log 25}{\log 4},$$

$$T = 2.321928.$$

Это больше 2 дней на 7.72 часа.

Задача. Мышь получила инъекцию одной чужеродной клетки. В каждый из последующих дней число чужеродных клеток в ее организме удваивается. Когда необходимо начинать лечение, если 60 000 таких клеток убивают мышь?

Фантазия 14

ВУНДЕРКИНД

Математика: *алгебра, элементарная теория вероятностей*

Многие проблемы, встающие перед деловыми людьми, подобны той, что возникает перед подростком в классической «задаче продавца газет».

Мальчик покупает газеты по 5 центов за штуку и продает по 10 центов за штуку. На следующий день он получает 3 цента за каждую не проданную накануне газету.

Маленький продавец газет хочет попытаться предсказать, сколько газет он сможет продать, и таким образом надолго максимизировать свою прибыль. Сто дней он изучает спрос на газеты (именно спрос, а не число проданных газет), потом составляет таблицу и находит из нее вероятности. Например, вероятность того, что спрос составит 4 газеты в день, он считает равной 1/100, для 17 газет вероятность будет равна 3/100, для 26 газет — 6/100 и т. д. На основе этих вероятностей мальчик подсчитывает ожидаемый доход для каждого из чисел от 0 до 36. Например, если он купит 6 газет, то, как показывает третий столбец таблицы, вероятность продать 5 или менее газет равна 7/100, т. е. вероятность продать все 6 газет равна 93/100. Таким образом, ожидаемая прибыль составит

$$0.93 \times 0.30 + 0.03 \times 0.23 + 0.01 \times 0.16 + \\ + 0.02 \times 0.09 + 0.01 \times -0.05 = 0.2888.$$

Если же он купит 10 газет, то вероятность продать все газеты равна 88/100. В этом случае математическое ожидание составит

$$0.88 \times 0.50 + 0.01 \times 0.43 + 0.01 \times 0.36 + \\ + 0.01 \times 0.29 + 0.02 \times 0.22 + 0.03 \times 0.15 + \\ + 0.01 \times 0.08 + 0.02 \times 0.01 + 0.01 \times (-0.13) = \\ = 0.4594.$$

Проведя немало времени за этими утомительными вычислениями, мальчик выясняет, что он должен каждый день покупать 28 газет, чтобы максимизировать математическое ожидание прибыли

Однако маленький продавец сэкономил бы много времени, если бы разобрался в следующих рассуждениях. Пусть x — целое число, $0 \leqslant x \leqslant 36$, и пусть $P(x)$ — вероятность продать x или меньше газет. Эти вероятности указаны в третьем столбце таблицы. Например, $P(10) = 15/100$, $P(17) = 31/100$ и т. д.

Спрос	Число дней	Суммарное число дней
0	0	0
1	1	1
2	0	1
3	2	3
4	1	4
5	3	7
6	2	9
7	1	10
8	1	11
9	1	12
10	3	15
11	1	16
12	2	18
13	4	22
14	1	23
15	3	26
16	2	28
17	3	31
18	4	35
19	4	39
20	4	43
21	6	49
22	2	51
23	4	55
24	3	58
25	4	62
26	6	68
27	3	71
28	7	78
29	5	83
30	4	87
31	3	90
32	4	94
33	4	98
34	1	99
35	0	99
36	1	100

Предположим теперь, что мальчик заказывает x газет и смотрит, что произойдет, если заказать еще одну газету (т. е. $x+1$). На дополнительной газете он мог бы заработать 0.05 долл. с вероятностью $1-P(x)$ и потерять 0.02 долл. с вероятностью $P(x)$. Таким образом, математическое ожидание прибыли от этой дополнительной газеты составляет

$$0.05(1-P(x))+(-0.02)P(x)=0.05-0.07P(x).$$

Дополнительную газету имеет смысл покупать, если

$$0.05-0.07P(x)\geqslant 0,$$

$$P(X)\leqslant\frac{0.05}{0.07}=\frac{5}{7},$$

т. е. число газет нужно увеличивать до тех пор, пока

$$P(x)\leqslant\frac{5}{7}.$$

С точностью до тысячных $5/7\approx 0.714$. Из таблицы видно, что $P(27)=0.71$, а $P(28)=0.78$, т. е.

$$P(27)<\frac{5}{7}<P(28).$$

Отсюда следует, то «оптимальная» закупка — это 28 газет.

Задача. Предположим, что издательство, выпускающее эту газету, меняет свою тактику и начинает платить только 2 цента за каждый не проданный накануне экземпляр газеты. Какой теперь будет «оптимальная» закупка?

Фантазия 15

КАК ВЫПЛАТИТЬ ССУДУ (# % & * ?)

Математика: *алгебра, геометрическая прогрессия*

Предположим, что некто взял ссуду 80 000 долл. на 20 лет под 9 % годовых. Каждый месяц он должен делать взнос в размере P долл. Сейчас мы покажем, как определить число P.

В конце первого месяца человек платит P долл. (первый взнос). Часть этой суммы, p_1, уходит на покрытие ссуды, а $\frac{0.09}{12}(80\,000) = 0.0075\,80\,000 = \$\,600$ составляют проценты. Таким образом, ясно, что $P > \$\,600$. Запишем это так:

$$P = \underbrace{p_1}_{\text{основная сумма}} + \underbrace{80\,000 \cdot 0.0075}_{\text{проценты}}. \qquad (1)$$

Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, положим $i = 0.0075$. Тогда (1) принимает вид

$$P = p_1 + 80\,000i. \qquad (2)$$

В конце второго месяца сумма взноса P складывается из части основной суммы p_2 и процентов на остаток основной суммы $80\,000 - p_1$:

$$P = p_2 + (80\,000 - p_1)\,i. \qquad (3)$$

Для третьего месяца получим

$$P = p_3 + (80\,000 - p_1 - p_2)\,i, \qquad (4)$$

для четвертого

$$P = p_4 + (80\,000 - p_1 - p_2 - p_3)\,i. \qquad (5)$$

Вообще, для k-го месяца

$$P = p_k + (80\,000 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{k-1})\,i. \qquad (6)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$p_1 + 80\,000i = p_2 + (80\,000 - p_1)\,i,$$

или

$$p_2 = p_1(1 + i). \qquad (7)$$

Из (3) и (4) следует

$$p_2 + (80\,000 - p_1)\,i = p_3 + (80\,000 - p_1 - p_2)\,i,$$

или

$$p_3 = p_2(1 + i).$$

Объединяя это соотношение с (7), получаем

$$p_3 = p_1(1 + i)^2. \qquad (8)$$

Из (4) и (5) вытекает

$$p_4 = p_3(1+i),$$

откуда с учетом (8) получаем

$$p_4 = p_1(1+i)^3. \qquad (9)$$

Объеднним все полученные соотношения:

$$\begin{cases} p_1, \\ p_2 = p_1(1+i), \\ p_3 = p_1(1+i)^2, \\ p_4 = p_1(1+i)^3. \end{cases} \qquad (10)$$

Можно показать по индукции, что, продолжая рассуждать таким же образом, мы получим

$$p_k = p_1(1+i)^{k-1}.$$

Поскольку p_1, p_2, p_3 и т. д.— это взносы в счет погашения основной ссуды,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{240} = 80\,000,$$

или, с учетом соотношений (10),

$$p_1 + p_1(1+i) + p_1(1+i)^2 + \ldots + p_1(1+i)^{239} = \\ = 80\,000.$$

Левая часть этого уравнения — это геометрическая прогрессия. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\frac{p_1\,[(1+i)^{240}-1]}{(1+i)} = 80\,000,$$

или

$$p_1 = \frac{(80\,000)\,i}{(1+i)^{240}-1}.$$

Используя таблицы процентов, логарифмы или калькулятор, найдем p_1 с точностью до центов:

$$p_1 \approx 119.78.$$

Таким образом, по формуле (1)

$$P = 119.78 + 600,$$

или

$$P = \$\,719.78.$$

Заметим, что за 20 лет будет выплачено в общей сложности 172 747.20 долл.

Задача. Определите месячные взносы на покрытие ссуды 70 000 долл. на 25 лет под 10 % годовых.

Фантазия 16

ЛЕКАРСТВА И ПРОГРЕССИИ

Математика: *алгебра, геометрическая прогрессия*

Врач установил, что в организме больного находится 10 единиц некоего лекарства. Если это лекарство в организм больше не вводить, то через час в организме останется одна треть его первоначального количества. Все остальное выводится из организма или нейтрализуется в процессе внутренних химических реакций. Составим таблицу количества лекарства в организме:

Час	Количество лекарства
0	10
1	$(1/3)10$
2	$(1/3)^2 10$
3	$(1/3)^3 10$
4	$(1/3)^4 10$
. . .	. . .
24	$(1/3)^{24} 10$

Предположим, что через 24 часа снова производится инъекция 10 единиц этого лекарства. *Сразу после* этой (первой) инъекции количество A_1 лекарства в организме оказывается равным

$$A_1 = 10 + (1/3)^{24} 10.$$

Количество лекарства B_1 непосредственно перед этой инъекцией указано в таблице:

$$B_1 = (1/3)^{24} 10.$$

$$A_1 = 10 + (1/3)^{24}\,10,$$
$$A_2 = 10 + (1/3)^{24}\,10 + (1/3)^{2\cdot 24}\,10,$$
$$A_3 = 10 + (1/3)^{24}\,10 + (1/3)^{2\cdot 24}\,10 + (1/3)^{3\cdot 24}\,10,$$
$$A_4 = 10 + (1/3)^{24}\,10 + (1/3)^{2\cdot 24}\,10 + (1/3)^{3\cdot 24}\,10 + (1/3)^{4\cdot 24}\,10.$$

Теперь схема должна быть ясна: если этот процесс продолжить, то количества B_k и A_k лекарства в организме до и после k-й инъекции составят

$$B_k = (1/3)^{24}\,10 + (1/3)^{2\cdot 24}\,10 + (1/3)^{3\cdot 24}\,10 + \ldots + (1/3)^{k\cdot 24}\,10$$

и

$$A_k = 10 + (1/3)^{24}\,10 + (1/3)^{2\cdot 24}\,10 + (1/3)^{3\cdot 24}\,10 + \ldots + (1/3)^{k\cdot 24}\,10.$$

Итак, мы видим, что последовательности B_k и A_k образуют геометрические прогрессии. По формуле суммы геометрической прогрессии получаем

$$B_k = \frac{(1/3)^{24}\,10\,(1 - (1/3)^{k\cdot 24})}{1 - (1/3)^{24}}.$$

С ростом k величнны $1/3^{k\cdot 24}$ и $1/3^{(k+1)\cdot 24}$ стремятся к нулю. Следовательно, B_k и A_k стремятся соответственно к величинам B и A, которые задаются формулами

$$B = \frac{(1/3)^{24}\cdot 10}{1 - 1/3^{24}}$$

и

$$A = \frac{10}{1 - (1/3)^{24}}.$$

Предположим, что в какой-то момент количество лекарства в организме перед инъекцией действительно достигнет B. Тогда сразу после инъекцин это количество окажется равным

$$10 + B = 10 + \frac{(1/3)^{24}\,10}{1 - (1/3)^{24}} = \frac{10}{1 - (1/3)^{24}} = A,$$

Через час после этой инъекции лекарства останется $1/3\ A_1$, через 2 часа $(1/3)^2 A_1$, через 3 часа $(1/3)^3 A_1$ и т. д. Таким образом, если вторая инъекция производится через 24 часа после первой, то количество B_2 лекарства в организме *перед* второй инъекцией составляет

$$B_2 = (1/3)^{24} A_1,$$

или

$$B_2 = (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10.$$

Количество лекарства A_2 сразу же после второй инъекции составляет

$$A_2 = 10 + (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10.$$

Если третья инъекция производится через 24 часа после второй, то количества B_3 и A_3 лекарства в организме соответственно до и после этой инъекции оказываются равными

$$B_3 = (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10 + (1/3)^{3\cdot 24} 10$$

и

$$A_3 = 10 + (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10 + (1/3)^{3\cdot 24} 10$$

(проведите рассуждения самостоятельно).

Аналогично, если четвертая инъекция производится через 24 часа после третьей, то количества B_4 и A_4 лекарства в организме соответственно до и после инъекции равны

$$B_4 = (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10 + (1/3)^{3\cdot 24} 10 + (1/3)^{4\cdot 24} 10$$

и

$$A_4 = 10 + (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10 + (1/3)^{3\cdot 24} 10 + (1/3)^{4\cdot 24} 10$$

(проведите рассуждения самостоятельно).

Объединяя все эти формулы, получаем, что

$$B_1 = (1/3)^{24} 10,$$

$$B_2 = (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10,$$

$$B_3 = (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10 + (1/3)^{3\cdot 24} 10,$$

$$B_4 = (1/3)^{24} 10 + (1/3)^{2\cdot 24} 10 + (1/3)^{3\cdot 24} 10 + (1/3)^{4\cdot 24} 10,$$

а перед следующей инъекцией (через 24 часа) вновь составит

$$(1/3)^{24}A = \frac{(1/3)^{24}\,10}{(1-(1/3)^{24})} = B.$$

Таким образом, *на практике* всегда можно считать, что количество лекарства в организме ведет себя в соответствии со следующим графиком:

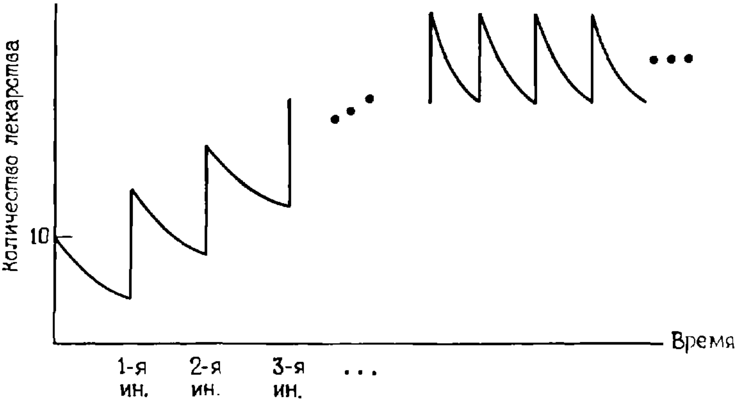


Рис. 1

Один врач отметил, что с лекарствами, которые ведут себя подобным образом, связана следующая проблема: если в процессе лечения количество лекарства в организме постоянно будет меняться так,

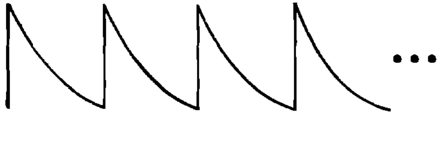


Рис. 2

как показано на рисунке, то у организма с очень большой вероятностью появится иммунитет к этому лекарству.

Задача 1. Предположим, что в организме находится 6 единиц некоторого лекарства. Если это лекарство в организм больше не вводить, то за час его количество снизится вдвое. Предположим, что каждые 9 часов производится инъекция 6 единиц лекарства. Пусть B_k и A_k — количества лекарства в организме соответственно до и после k-й инъекции. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, найдите компактные выражения для B_k и A_k. Найдите A и B. Покажите, что если перед инъекцией количество лекарства в организме равно B, то сразу после инъекции оно окажется равным A, а перед следующей инъекцией в организме опять будет B единиц этого лекарства.

Задача 2. Рассмотрим более общую постановку задачи. Предположим, что в организме находится n единиц некоторого лекарства. Если это лекарство в организм больше не вводить, то через час в организме остается r-я часть $(0 < r < 1)$ первоначального количества. Предположим, что каждые t часов производится инъекция n единиц лекарства. Пусть B_k и A_k — количество лекарства в организме соответственно до и после k-й инъекции. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, найдите компактные выражения для B_k и A_k. Найдите A и B. Покажите, что если перед инъекцией количество лекарства в организме равно B, то сразу после инъекции оно окажется равным A, а перед следующей инъекцией в организме опять будет B единиц этого лекарства.

Фантазия 17

КАК ПРЕДСКАЗАТЬ ВЫИГРЫШ

Математика: *элементарная теория вероятностей*

Давайте сыграем в такую игру: бросим кость 60 раз. Каждый раз, когда выпадет 1, вы будете платить мне 3 доллара, когда выпадет 2 или 3, я буду платить вам 12 долларов, а когда выпадет 4, 5 или 6, вы будете платить мне 6 долларов.

Когда я сделал такое предложение группе студентов колледжа, примерно половина группы захотела сыграть в эту игру, а половина отказалась (в некоторых случаях не по финансовым соображениям).

Студенты, которые согласились играть, не объяснили причин своего согласия (или объяснили их весьма невразумительно). Однако потом все они согласились со следующими рассуждениями. При 60 бросаниях кости *можно ожидать*, что 1 выпадет 10 раз, 2 или 3 выпадет 20 раз, а 4, 5 или 6 выпадет 30 раз. Поэтому ваш *ожидаемый выигрыш* составит

$$10(-3)+20(12)+30(-6).$$

Отрицательное число, например (—3), обозначает мой выигрыш и ваш проигрыш. Положительное число, например 12, показывает, что вы выиграли, а я проиграл. Итак,

$$10(-3)+20(12)+30(-6)=30.$$

Таким образом, при 60 бросаниях кости вы могли бы ожидать выигрыш в 30 долл. Это означает, что средний выигрыш при одном бросании равен 0.5 долл.

При тех же условиях предположим, что кость бросается 90 раз. Тогда можно ожидать, что 1 выпадет 15 раз, 2 или 3 — 30 раз, а 4, 5 или 6 — 45 раз. Таким образом, ваш ожидаемый выигрыш составит

$$15(-3)+30(12)+45(-6)=45.$$

При этом средний выигрыш при одном бросании попрежнему равен 0.5 долл.

В обоих случаях мы получили один и тот же средний выигрыш при одном бросании, равный 0.5 долл. Это не совпадение. Мы могли бы получить это число следующим образом: при каждом бросании кости 1 выпадает с вероятностью 1/6, 2 или 3 — с вероятностью 2/6, а 4, 5 или 6 — с вероятностью 3/6. Просуммируем:

$$\frac{1}{6}(-3)+\frac{2}{6}(12)+\frac{3}{6}(-6)=0.5.$$

Итак, мы просто складываем произведения вероятностей на соответствующие выигрыши (или проигрыши). Таким способом мы получаем средний выигрыш при одном бросании. Поэтому, например, при 150 бросаниях кости ожидаемый выигрыш составит 75 долл.

Вернемся теперь к первоначальным условиям, когда кость бросается 60 раз и можно ожидать, что единица выпадет 10 раз, 2 или 3 — 20 раз, а 4, 5 или 6—30 раз. Конечно, маловероятно, что результат в точности совпадет с ожидаемым. Можно провести эксперимент: бросить кость 60 раз и подсчитать все результаты; однако еще проще смоделировать бросание кости на компьютере. Мы написали программу на Бейсике для микрокомпьютера фирмы Apple:

```
10 PRINT «ЧЕМУ РАВНО N?»
20 INPUT N
30 I=0
50 X1=0
60 X2=0
70 X3=0
80 X4=0
90 X5=0
100 X6=0
110 VI=RND(1)*6+1
120 IF INT(VI)=1 THEN X1=X1+1
130 IF INT(VI)=2 THEN X2=X2+1
140 IF INT(VI)=3 THEN X3=X3+1
150 IF INT(VI)=4 THEN X4=X4+1
160 IF INT(VI)=5 THEN X5=X5+1
170 IF INT(VI)=6 THEN X6=X6+1
180 I=I+1
190 IF I<=N GO TO 110
200 PRINT X1, X2, X3, X4, X5, X6
210 END
```

Если ввести команду RUN, на экране появится вопрос «ЧЕМУ РАВНО N?». Число N указывает, сколько раз компьютер должен бросить кости. Если вы введете число 60, то в ответ компьютер выдаст вам шесть чисел, например

9 12 8 7 11 13.

Это означает, что

1 выпало 9 раз,
2 выпало 12 раз,
3 выпало 8 раз,
4 выпало 7 раз,
5 выпало 11 раз,
6 выпало 13 раз.

Мы запустили эту программу для 60 бросаний кости и получили следующие результаты:

Пуск I:

1	2	3	4	5	6
9	9	5	13	14	10

Сгруппировав результаты, получаем

$$\left.1\right\}\ 9\ \text{раз},\qquad \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}\ 14\ \text{раз},\qquad \left.\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right\}\ 37\ \text{раз}.$$

При этом ваш выигрыш составит $9\ (-3)+14(12)+37(-6)=-81$ долл., в то время как ожидаемый выигрыш был 30 долл.

Пуск II:

1	2	3	4	5	6
12	9	11	8	5	15

Сгруппировав результаты, получаем

$$\left.1\right\}\ 12 \text{ раз},\qquad \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}\ 20 \text{ раз},\qquad \left.\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right\}\ 28 \text{ раз}.$$

Ваш выигрыш оказался равным $12(-3)+20(12)+$ $+26(-6)=36$ долларов вместо ожидаемого выигрыша в 30 долларов.

Предположим, мы заставили компьютер смоделировать бросание кости 1200 раз. Ожидаемый выигрыш в этой ситуации равен $1200(0.5)=600$ долл.

Компьютер выдал следующие результаты:

1	2	3	4	5	6
179	204	229	183	217	188

Сгруппировав эти результаты, получаем

$$\left.1\right\}\ 179 \text{ раз},\qquad \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}\ 433 \text{ раза},\qquad \left.\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right\}\ 588 \text{ раз}.$$

Вы выиграли $179(-3)+433(12)+588(-6)=$ $=1131$ долл.

Фантазия 18

ИГРАЙТЕ ОПТИМАЛЬНО!

Математика: *алгебра, элементарная теория вероятностей*

А теперь рассмотрим следующую игру. Два игрока A и B сидят за столом друг против друга. У каждого есть монета. Оба игрока одновременно кладут на стол каждый свою монету. Правила платежа указаны в следующей таблице (буква «О» обозначает «орел», буква «Р» обозначает «решку»):

A	B	
О	О	B платит A 3 долл.
О	Р	A платнт B 1 долл.
Р	О	A платнт B 6 долл.
Р	Р	B платит A 4 долл.

Игра повторяется 100 раз.

Обычно игры записывают в *матричной* форме, т. е. в внде таблицы 2×2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & B \\ \text{О} & P \end{array} \\ A \begin{array}{c} \text{О} \\ \text{Р} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Элементы матрицы — это выигрыши (или проигрыши) игрока A. Например, 3 в первой строке и первом столбце указывает, что A выигрывает 3 доллара, если выпадут два орла, а -1 в первой строке и втором столбце указывает, что A выигрывает -1 доллар (т. е. проигрывает один доллар игроку B).

Предположим, что игрок A решил выложить орла 1/4 всех раз, а решку — остальные 3/4 раз, а игрок B решил выложить орла 1/2 раз и решку 1/2 раз. Эту информацию можно записать в следующем виде:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & B \\
 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 & & \text{О} & \text{Р} \\
A & \begin{array}{c} \frac{1}{4}\,\text{О} \\ \frac{3}{4}\,\text{Р} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Тогда можно ожидать, что $(1/4)\cdot(1/2) = 1/8$ раз оба игрока выложат орла, а $(3/4)\cdot(1/2) = 3/8$ раз A выложит решку, а B выложит орла. Рассуждая подобным образом, можно найти средний выигрыш игрока A в одной партии:

$$
\frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(-1) + \frac{3}{8}(-6) + \frac{3}{8}(4) =
$$
$$
= -\frac{4}{8} = -0.50.
$$

Таким образом, игрок A должен ожидать, что в среднем он проиграет 50 центов в каждой партии.

Основная задача теории игр заключается в том, чтобы найти оптимальную стратегию игрока A, т. е. определить, сколько раз игрок A должен выложить орла и сколько раз решку, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш.

Предположим, что игрок A решил выкладывать орла p-ю часть времени, где $0 \leqslant p \leqslant 1$. Тогда он будет выкладывать решку $(1-p)$-ю часть времени. (В нашем предыдущем примере $p = 1/4$, $(1-p) = 3/4$.) Далее предположим, что игрок B решил выкладывать орла q-ю часть времени и решку $(1-q)$-ю часть времени. Запишем это в матричной форме:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & B \\
 & & & q & 1-q \\
 & & & \text{О} & \text{Р} \\
A & \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{array}{c} \text{О} \\ \text{Р} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.}
\end{array}
$$

Ожидаемый выигрыш игрока A находится по формуле

$$G = pq(3) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-6) + \\ + (1-p)(1-q)(4).$$

Раскрывая скобки и собирая одинаковые члены, получаем

$$G = 14pq - 5p - 10q + 4,$$

$$G = 14\left(pq - \frac{5}{14}p - \frac{10}{14}q\right) + 4,$$

$$G = 14\left(p - \frac{10}{14}\right)\left(q - \frac{5}{14}\right) + \frac{6}{14}.$$

Последняя формула показывает, что если игрок A выкладывает орла 10/14 раз (т. е. $p = 10/14$), то независимо от того, что делает игрок B, ожидаемый выигрыш игрока A составляет 6/14 долл. в каждой партии. Если игрок A выберет $p > 10/14$ (так что разность $p - 10/14$ будет положительна) и игрок B узнает об этом, то он может выбрать $q < 5/14$ (так что разность $q - 5/14$ будет отрицательна) и сделать выигрыш игрока A меньше 6/14 долл., а может даже заставить его проиграть, добившись того, что G станет отрицательным (покажите, что это в самом деле возможно). Таким образом, можно сказать, что *оптимальной стратегией* игрока A является выбор $p = 10/14$. Эту стратегию можно реализовать, например, так. Поскольку $10/14 = 5/7$, игрок A может разделить круг на 7 равных частей и пронумеровать полученные секторы от 1 до 7 (см. рис. на стр. 73), а потом, запуская в центре круга волчок, выкладывать орла, если стрелка укажет на 1, 2, 3, 4 или 5, и решку, если стрелка укажет на 6 или 7.

Теперь снова рассмотрим уравнение

$$G = 14\left(p - \frac{10}{14}\right)\left(q - \frac{5}{14}\right) + \frac{6}{14}$$

и исследуем результат с точки зрения игрока B. Ему не позавидуешь: если игрок A выбирает $p = 10/14$, то ожидаемый проигрыш игрока B в каждой партии независимо от его действий составляет 6/14. Но если игрок B выберет $q > 5/14$ (так что $q - 5/14$ будет положительно), а игрок A об этом узнает, то A сможет выбрать $p > 10/14$ (так что $p - 10/14$ тоже будет отрицательно), и тогда игрок B в среднем проиграет

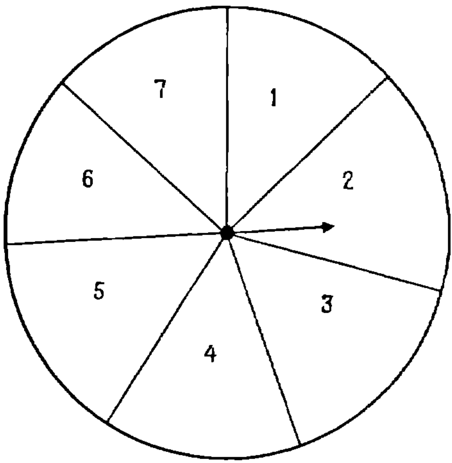


Рис. 1

больше чем 6/14 долл. в каждой партии. Таким образом, для игрока B оптимальная стратегия заключается в том, чтобы выбрать $q = 5/14$.

Задача 1. Проанализируйте каждую из следующих игр сначала с точки зрения игрока A, а затем с точки зрения игрока B:

а)

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}; \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Задача 2. Предположим, что есть две игры со следующими правилами:

a) $\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}; \end{array}$ b) $\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$

Игрок A думает, что с вероятностью 3/10 играется игра a), а с вероятностью 7/10 — игра b). Игрок B уверен, что играется игра b). Какую стратегию вы применили бы на месте игрока A? Игрока B? (Задача такого типа встала в реальной жизни, когда в 1968 г. группа американских математиков изучала вопрос о том, должны ли США вести переговоры о разоружении с СССР.)

Фантазия 19

КУДА УЛЕТЕЛО НЕБЕСНОЕ ТЕЛО?

Математика: *тригонометрия*

Две станции слежения, расположенные на расстоянии d друг от друга, измеряют угол возвышения для некоего космического тела. Измеренные углы составляют θ_1 и θ_2, где $0 < \theta_1 < 90^\circ$ и $0 < \theta < 90^\circ$, $\theta_2 > \theta_1$, как показано на следующем рисунке:

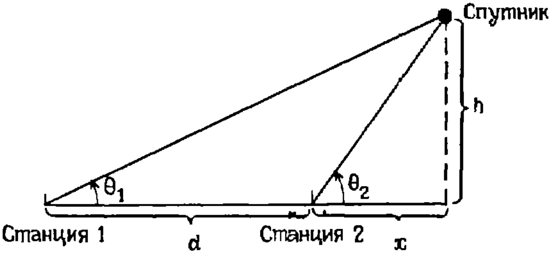


Рис. 1

Наша задача состоит в определении h. Заметим, что

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{h}{x}, \quad \text{или} \quad x = h\operatorname{ctg}\theta_2 \tag{1}$$

и что

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{h}{d+x},$$

$$\text{или } d + x = h\operatorname{ctg}\theta_1, \text{ или } x = h\operatorname{ctg}\theta_1 - d. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$h\operatorname{ctg}\theta_2 = h\operatorname{ctg}\theta_1 - d,$$

или

$$h = \frac{d}{\operatorname{ctg}\theta_1 - \operatorname{ctg}\theta_2}. \tag{3}$$

Например, если $\theta_1 = 28^\circ$, $\theta_2 = 67^\circ$ и $d = 1000$ миль, то

$$h = \frac{1000}{\operatorname{ctg}28^\circ - \operatorname{ctg}67^\circ} = 686.69 \text{ (миль)}.$$

Задача. Найдите формулу вычисления h, аналогичную (3), для всех других относительных расположений станций слежения и космического тела.

Фантазия 20

ХИЩНИК И ЖЕРТВА

Математика: *алгебра, неравенства*

Взаимодействие математики с реальным миром обычно происходит так:

1. В реальной жизни возникает некоторая задача и собирается вся относящаяся к ней информация.
2. На основе этой информации строится математическая модель (уравнение, формула и т. п.).
3. С этой моделью производятся какие-то математические операции. Они подчиняются правилам логики и опнраются на результаты, описанные в математической литературе.
4. От математическнх результатов пункта 3 мы вновь возвращаемся к реальному миру и смотрим, что же эти результаты нам говорят о той реальной задаче, которая была поставлена в п. 1. Иногда математические результаты позволяют предсказать будущее состоянне мира. В этих случаях важную роль во взаимодействии математики с реальным миром играет статистика.

Описанные четыре этапа отражает следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Математическая модель} & \rightarrow & \text{Математическне результаты} \\
\uparrow & & \downarrow \\
\text{Задача из реальной жизни} & & \text{Реальный мнр}
\end{array}$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий этот процесс.

1. Задача из реальной жизни

Большая территория земли опрыскивается инсектицидом. Этот ннсектицид используется для уничтожения некоторого вида насекомых, который служит пищей для другого внда насекомых (хищников).

Предположим, что инсектицид уничтожает некоторое количество насекомых обоих видов — и хищников, и их жертв. Задача заключается в том, чтобы установить, к каким экологическим изменениям это может привести.

Математик Вольтерра заиялся изучением задач такого типа около 1930 г. Прежде чем строить математическую модель, нужно было собрать информацию о реальной ситуации, с которой связана эта задача. По имевшнмся данным можно было заключить, что в отсутствие хищников популяция жертвы увеличивается со скоростью, пропорциональной численности популяции. Однако присутствие популяции хищника вызывает уменьшение численности популяции жертвы, а вследствие этого и самой популяции хищника. Изучение подобных случаев также показало, что в отсутствие популяции жертвы (т. е. в отсутствие пищи) популяция хищника уменьшается (вымирает от голода) со скоростью, пропорциональной численности популяции. Наличие же популяции жертвы (т. е. пищи) вызывает увеличение популяции хищника, пропорциональное произведению численности популяции жертвы и численности популяции хищника.

2. Математическая модель

Пусть в момент t численность популяции жертвы равна $H(t)$, а популяции хищника — $P(t)$. Пусть $r_H(t)$ — скорость изменения популяции жертвы в момент t, а $r_P(t)$ — скорость изменения популяции хищника в момент t. Например, если время t измеряется в днях и в некоторый момент времени $r_H(t) = 20$, это означает, что в данный момент популяция жертвы увеличивается со скоростью 20 особей в день. Если же $r_H(t) = -20$, это означает, что популяция жертвы уменьшается со скоростью 20 особей в день.

На основании информации, собранной в п. 1, можно записать, что

$$\begin{cases} r_H(t) = kH(t) - lH(t)P(t), \\ r_P(t) = mH(t)P(t) - nP(t), \end{cases}$$

или, в более простой форме,

$$r_H = kH - lHP,$$
$$r_P = mHP - nP, \tag{1}$$

где k, l, m и n — положительные числа.

Говорят, что две популяции находятся в *естественном равновесии*, если $r_H = 0$ и $r_P = 0$. Из системы (1) следует, что для этого должны выполняться соотношения

$$kH - lHP = 0,$$
$$mHP - nP = 0, \tag{2}$$

откуда

$$P = \frac{k}{l},$$
$$H = \frac{n}{m}.$$

Полученные значения численности популяций называются *равновесными* и обозначаются через P_0 и H_0. Таким образом,

$$P_0 = \frac{k}{l},$$
$$H_0 = \frac{n}{m}. \tag{3}$$

Предположим, что две популяцни находятся в естественном равновесии и их численность соответствует (3). Теперь введем в действие некий фактор (например инсектицид), который убивает h (>0) особей из популяции жертвы и p (>0) особей из популяции хищника, ие уничтожая при этом полиостью ни одиу из рассматриваемых популяций. Сразу после воздействия этого фактора численность популяций составит

$$H_0 - h > 0 \quad \text{(жертвы)},$$
$$P_0 - p > 0 \quad \text{(хищникн)}. \tag{4}$$

3. Математические результаты

Теперь мы хотим с помощью некоторых математических средств установить, как будут вестн себя r_H и r_P после воздействия упомянутого выше фактора.

В первый момент численность популяций составляет (4). На основании (1) получаем

$$\begin{cases} r_H = k(H_0 - h) - l(H_0 - h)(P_0 - p), \\ r_P = m(H_0 - h)(P_0 - p) - n(P_0 - p). \end{cases} \tag{5}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} r_H &= k(H_0 - h) - l(H_0 - h)(P_0 - p) = \\ &= (H_0 - h)[k - l(P_0 - p)] = \\ &= (H_0 - h)\left[k - l\left(\frac{k}{l} - p\right)\right] = \\ &= (P_0 - p)[-mh]. \end{aligned}$$

Поскольку $(P_0 - p) > 0$, $m > 0$ н $h > 0$, отсюда вытекает, что $r_P < 0$.

Такнм образом, наши математические результаты заключаются в том, что $r_H > 0$ и $r_P < 0$.

4. Реальный мир

Теперь дадим интерпретацию полученных результатов. Мы предполагали, что популяцни жертвы и хищника первоначально находились в естественном равновесии. Затем некоторый фактор частично (но не полностью) уничтожил популяцию жертвы и частично (но не полностью) уничтожил популяцию хищника. После воздействия этого фактора оказывается, что $r_H > 0$ и $r_P < 0$, т. е. популяция жертвы теперь увеличивается, а популяция хищника уменьшается. Это экологическое явление имеет место всегда, когда выполняются предположения, положенные в основу математической модели. При этом возникает такая экологическая проблема: популяция хищника, которая теперь уменьшается, может стать настолько маленькой, что ей будет грозить опасность полного исчезновения по другим причннам: затопление, засуха и т. п. Кроме того, популяция хищиика может оказаться настолько разреженной, что шансы воспроизведения резко упадут, и это может привести к дальнейшему уменьшению ее численности.

Случаи подобного поведения популяций наблюдались на практике. Вот отрывок из книги Макартура и Коннелла «Биология популяций»:

«Согласно принципу Вольтерра, применение инсектицидов (если только они не уничтожают насекомых практически полностью) в конечном счете приводит к увеличению популяции тех насекомых, численность которых находится под контролем других насекомых-хищников. Убедительное подтверждение этому дает тля (Icerya purchasi), случайно завезенная в 1868 г. из Австралии, которая угрожала всему производству цитрусовых в Америке. Вскоре в Австралию был завезен ее естественный враг — божья коровка Novius cardinalis, которая немедленно принялась за дело и сильно сократила популяцию тли. Когда было обнаружено, что препарат ДДТ убивает тлю, садоводы применили его в надежде на дальнейшее снижение численности этого вредителя. Однако, в полном соответствии с принципом Вольтерра, количество тли в результате увеличилось! Это показывает, как опасно вмешиваться в действие непонятных нам законов природы (Элтон, 1958)».

Фантазия 21

КАК ВЫБРАТЬ МЕСТО?

Математика: *алгебра, абсолютная величина, графики*

Предположим, что на некой фабрике имеются четыре станка m_1, m_2, m_3 и m_4, установленные в ряд (вдоль оси x), как показано на рис. 1. В этот ряд нужно поместить еще один станок. Новый станок должен каким-то образом взаимодействовать со старыми. Например, детали, изготовляемые на старых станках, поступают затем на новый станок для дальнейшей обработки. Предположим, что с каждого из четырех станков на новый станок поступает одинаковое число деталей и что стоимость перемещения одной детали на еднничное расстояние фиксирована. Мы хотим установить новый станок так, чтобы общая стоимость перемещения деталей была минимальной.

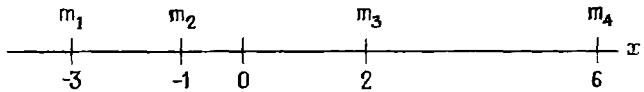


Рис. 1

С математической точки зрения задача состоит в нахождении такого места, для которого сумма расстояний до ранее установленных станков окажется минимальиой. Если обозначить место расположения нового станка через x, то наша задача принимает такой вид: найти значенне x, при котором величина

$$C(x) = |x-(-3)| + |x-(-1)| + |x-2| + |x-6|$$

минимальна. Чтобы построить график функции $C(x)$, рассмотрим следующие пять случаев:

1) $x \leqslant -3$. Тогда

$$C(x) = (-3-x) + (-1-x) + (2-x) + (6-x) = \\ = -4x + 4.$$

2) $-3 \leqslant x \leqslant -1$. Тогда

$$C(x) = (x+3) + (-1-x) + (2-x) + (6-x) = \\ = -2x + 10.$$

3) $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Тогда

$$C(x) = (x+3) + (x+1) + (2-x) + (6-x) = 12.$$

4) $2 \leqslant x \leqslant 6$. Тогда

$$C(x) = (x+3) + (x+1) + (x-2) + (6-x) = 2x + 8.$$

5) $x \geqslant 6$. Тогда

$$C(x) = (x+3) + (x+1) + (x-2) + (x-6) = 4x - 4.$$

Функцию $C(x)$ можно записать более компактно:

$$C(x)=\begin{cases} -4x+4, & x\leqslant -3,\\ -2x+10, & -3\leqslant x\leqslant -1,\\ 12, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x+8, & 2\leqslant x\leqslant 6,\\ 4x-4, & 6\leqslant x. \end{cases}$$

График $C(x)$ представлен на рис. 2 (единица измерения по оси была выбрана так, чтобы график получился удобным). Мы видим, что место для нового

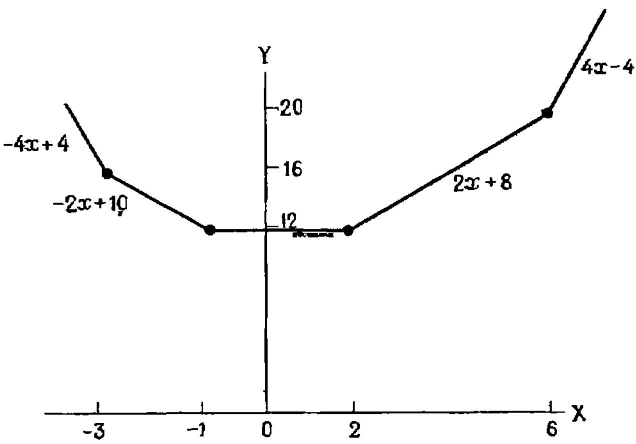


Рис. 2

станка можно выбрать в любой точке между $x=-1$ и $x=2$, поскольку для любого x из этого отрезка сумма расстояний до ранее установленных станков равна 12 — минимальному значению $C(x)$.

Рассмотрим теперь пример посложнее. Снова предположим, что на некоторой фабрике четыре станка расположены в ряд и между новым и старыми станками устанавливается взаимодействие (например, детали, изготовленные на старых станках, поступают на новый станок для дальнейшей обработки). Предположим, что со станков m_2 и m_4 на новый станок поступает одинаковое число деталей, со станка m_1 поступает вдвое больше деталей, чем со станка m_2, а со станка m_3 — втрое больше деталей, чем со станка m_2. Снова предположим, что стоимость перемещения одной детали на единичное расстояние фиксирована. Нужно найти для нового станка такое место, чтобы общая стоимость перемещения деталей была минимальной.

Поскольку с разных станков на новый станок поступает разное число деталей, мы должны приписать расстояниям между станками определенные веса. Припишем вес единица расстоянию между новым станком и станком m_2. Поскольку со станка m_4 поступает столько же деталей, расстоянию между новым станком и станком m_4 также нужно приписать вес единица. Затем расстоянию между новым станком и станком m_1 мы приписываем вес два, а расстоянию между новым станком и станком m_3 — вес три. Если обозначить место расположения нового станка через x, то наша задача принимает такой вид: найти значение x, при котором величина

$$C(x) = 2|x-(-3)| + |x-(-1)| + 3|x-2| + |x-6|$$

минимальна. Вновь рассмотрим пять случаев:

1) $x \leqslant -3$. Тогда

$$C(x) = 2(-3-x) + (-1-x) + 3(2-x) + (6-x) = \\ = -7x+5.$$

2) $-3 \leqslant x \leqslant -1$. Тогда

$$C(x) = 2(x-(-3)) + (-1-x) + 3(2-x) + (6-x) = \\ = -3x+17.$$

3) $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Тогда

$$C(x) = 2(x+3) + (x+1) + 3(2-x) + (6-x) = \\ = -x+19.$$

4) $2 \leqslant x \leqslant 6$. Тогда

$$C(x) = 2(x+3) + (x+1) + 3(x-2) + (6-x) = \\ = 5x + 7.$$

5) $6 \leqslant x$. Тогда

$$C(x) = 2(x+3) + (x+1) + 3(x-2) + (x-6) = \\ = 7x - 5.$$

Функцию $C(x)$ можно записать более компактно:

$$C(x) = \begin{cases} -7x+5, & x \leqslant -3, \\ -3x+17, & -3 \leqslant x \leqslant -1, \\ -x+19, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 5x+7, & 2 \leqslant x \leqslant 6, \\ 7x-5, & 6 \leqslant x. \end{cases}$$

График $C(x)$ показан на рис. 3. Мы видим, что новый станок следует установить в точке $x=2$. Поскольку в точке $x=2$ уже стоит станок m_3, сделать

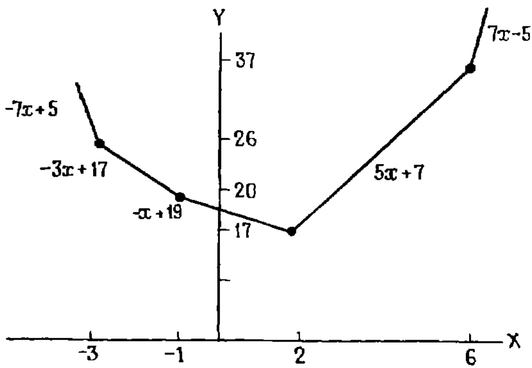
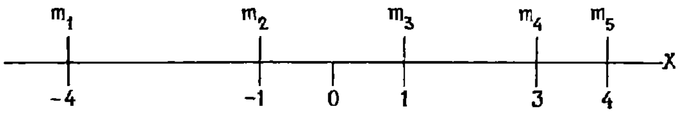


Рис. 3

это невозможно, однако полученный результат показывает, что новый станок надо поместить как можно ближе к точке $x=2$.

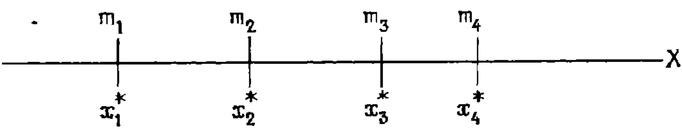
На самом деле мы можем сказать даже больше. Поскольку справа от точки $x=2$ график круче, чем слева, новый станок нужно ставить левее точки $x = 2$ и как можно ближе к ней.

Задача 1. На некоторой фабрике имеется пять станков m_1, m_2, m_3, m_4 и m_5, установленных в ряд (по оси x), как показано на следующем рисунке:



Где-то в этом же ряду надо установить новый станок. С каждого из старых станков на новый поступает для дальнейшей обработки одинаковое число деталей, и стоимость перемещения одной детали на единичное расстояние фиксирована. Где следует поставить новый станок, чтобы минимизировать общую стоимость перемещений?

Задача 2. Покажите, что во втором примере из этого раздела результат не зависит от положения ранее установленных станков, а зависит только от весов, приписанных каждому расстоянию. В частности, предположим, что на некоторой фабрике имеются станки m_1, m_2, m_3 и m_4, расположенные в ряд (по оси x) в точках x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, как показано на рисунке:



Новый станок надо разместить в том же ряду. Со станков m_2 и m_4 на новый станок поступает одинаковое число деталей, со станка m_1 — вдвое больше, чем со станка m_2, а со станка m_3 — втрое больше, чем со станка m_2. Стоимость перемещения одной детали на единичное расстояние фиксирована. Покажите, что оптимальное расположение нового станка — как можно ближе к точке m_3 слева от нее. (*Подсказка*: найдите $C(x)$ прежним способом и покажите, что $C(x_1^*) > C(x_2^*)$, $C(x_2^*) > C(x_3^*)$ и $C(x_4^*) > C(x_3^*)$.)

Фантазия 22

НАДЕЖНАЯ ОПОРА

Математика: *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см. приложение I)*

Предположим, что нам нужно построить мост через реку. Общая длина моста должна составлять

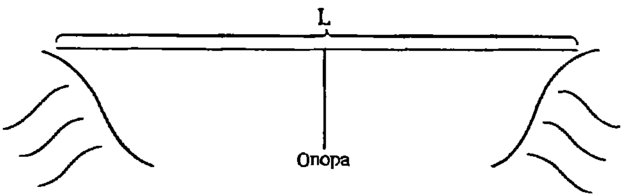


Рис. 1

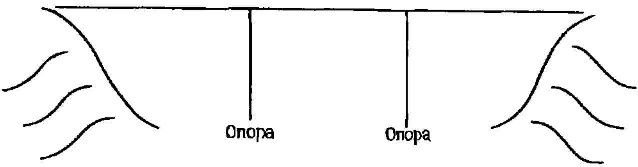


Рис. 2

L футов. Конструкция моста предусматривает опоры, расположенные на равных расстояниях друг от друга. Существует множество возможных проектов; некоторые из них показаны на рис. 1—3.

Чем больше опор, тем меньше расстояния между ними. При меньшей длине пролетов моста стоимость строительства снижается, так как можно использовать более легкую сталь, однако общая стоимость строительства опор возрастает с увеличением их числа.

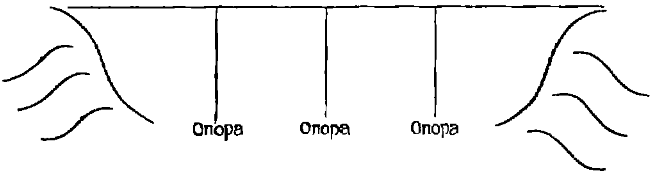


Рис. 3

Обозначим число пролетов через n. Например, на рис. 1 значение n равно 2, а на рис. 2 значение n равно 3. Отметим, что число опор равно $n-1$. Далее, пусть

l = длина пролета (в футах);
P = стоимость строительства одной опоры;
W = вес стали, идущей на один фут моста (в фунтах);
C = стоимость одного фунта стали.

Заметим, что величины n, l и L связаны следующими соотношениями:

$$nl = L,$$

или

$$n = \frac{L}{l}.$$

Общая стоимость строительства опор равна

$$(n-1)P = \left(\frac{L}{l} - 1\right)P.$$

Как мы уже упоминали, вес стали, идущей на один фут моста, зависит от длины пролетов, скажем, $W = Kl$, где $K > 0$ — коэффициент пропорциональности. Таким образом, общая стоимость стали находится по формуле

$$C(Kl)L.$$

Полную стоимость строительства моста TC можно вычислить так:

$$TC=\left(\frac{L}{l}-1\right)P+C(Kl)L,$$

или

$$TC=\frac{L}{l}P-P+C(Kl).$$

Мы хотим найти такое значение l, при котором TC будет как можно меньше.

Предположим, что значения P, L и K постоянны. Следовательно, общая стоимость T, которая зависит от нашего решения, имеет вид

$$T=\frac{L}{l}P+CKlL.$$

Значение l, минимизирующее T, будет также минимизировать TC.

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{\frac{L}{l}P+CKlL}{2}\geqslant\sqrt{L^2PKC},$$

$$\frac{T}{2}\geqslant\sqrt{L^2PKC},$$

$$T\geqslant 2\sqrt{L^2PKC}.$$

Правая часть последнего неравенства постоянна, и минимальное значение T достигается при

$$\frac{L}{l}P=CKlL,$$

$$l^2=\frac{P}{CK}.$$

Поскольку $l>0$, нужно выбрать

$$l=\sqrt{\frac{P}{CK}}.$$

Интересно, что значение l, минимизирующее общую стоимость строительства, не зависит от полной длины моста L.

Задача. Мы полагали, что n — целое положительное число, которое находится по формуле

$$n=\frac{L}{l}.$$

Предположим, что конструктор сначала вычисляет значение l, минимизирующее T (и, следовательно, TC), а затем находит n. А как выйти из положения, если полученное таким образом значение n не будет целым?

Фантазия 23

ОБСУДИМ СУДЕЙ

Математика: *алгебра, элементарная теория вероятностей*

В некотором штате исследуется вопрос об «оптимальной» численности суда присяжных. Решения суда присяжных принимаются простым большинством голосов. Если число присяжных четно, голоса могут разделиться поровну, и тогда придется проводить повторное слушание дела, что обходится достаточно дорого. А принять в суде неправильное решение было бы негуманно. Поэтому «оптимальной численностью» суда наш комитет считает такую, при которой шансы принять правильное решение при первом же слушании дела максимальны.

Мы ограничимся рассмотрением судов из 2, 3 или 4 присяжных. Предположим, что каждый судья принимает правильное решение с вероятностью p, $0 < p < 1$. В предположении, что судьи принимают решения независимо, вероятность того, что суд, состоящий из двух человек, примет правильное решение на первом заседании, равна p^2.

Если же суд состоит из трех присяжных, то его решения описываются следующей таблицей:

Присяжный 1	Присяжный 2	Присяжный 3	Вероятность
правильно	правильно	правильно	p^3
неправильно	правильно	правильно	$(1-p)p^2$
правильно	неправильно	правильно	$p(1-p)p$
правильно	правильно	неправильно	$p^2(1-p)$

Таким образом, вероятность того, что суд из трех присяжных примет правильное решение на первом заседании, находится по формуле

$$p^3 + 3p^2(1-p).$$

Для суда из четырех присяжных таблица принимает следующий вид:

П1	П2	П3	П4	Вероятность
п	п	п	п	p^4
н	п	п	п	$(1-p)p^3$
п	н	п	п	$p(1-p)p^2$
п	п	н	п	$p^2(1-p)p$
п	п	п	н	$p^3(1-p)$

Таким образом, вероятность того, что суд из четырех присяжных примет правильное решение на первом заседании, находится по формуле

$$p^4 + 4p^3(1-p).$$

Всю эту информацию можно свести в следующую таблицу:

Число судей	Вероятность принятия правильного решения на первом заседании
2	p
3	$p^3 + 3p^2(1-p)$
4	$p^4 + 4p^3(1-p)$

Таким образом, при нашем понимании «оптимальной численности» суда мы должны отдать преимущество суду из двух человек перед судом из трех человек, если

$$p^2 > p^3 + 3p^2(1-p),$$

или, если поделить на p^2,

$$1 > p + 3(1 - p),$$
$$1 > -2p + 3,$$
$$2p > 2,$$
$$p > 1. \tag{1}$$

Поскольку неравенство (1) *никогда не выполняется*, суд из двух присяжных никогда не окажется лучше суда из трех присяжных.

Суд из четырех человек окажется лучше суда из трех человек, если

$$p^4 + 4p^3(1 - p) > p^3 + 3p^2(1 - p),$$

или, если поделить на p^2,

$$p^2 + 4p(1 - p) > p + 3(1 - p),$$
$$-3p^2 + 6p - 3 > 0,$$
$$p^2 - 2p + 1 < 0,$$
$$(p - 1)^2 < 0. \tag{2}$$

Поскольку неравенство (2) никогда не выполняется, суд из четырех присяжных никогда не окажется лучше суда из трех присяжных. Проведенное исследование показывает, что суд из трех присяжных является оптимальным, если выбирать из двух, трех и четырех присяжных.

В заключение сравним суд из двух присяжных и суд из четырех присяжных. Суд из двух человек окажется лучше, чем суд из четырех человек, если

$$p^2 > p^4 + 4p^3(1 - p),$$

или, если поделить на p^2,

$$1 > p^2 + 4p(1 - p),$$
$$3p^2 - 4p + 1 > 0,$$
$$(3p - 1)(p - 1) > 0.$$

Надо рассмотреть два случая.

1-й случай. $3p - 1 > 0$ и $p - 1 > 0$. Но из второго неравенства вытекает, что $p > 1$, а это невозможно, и поэтому этот случай нужно отбросить.

2-й случай. $3p-1<0$ и $p-1<0$. Из этих неравенств следует, что $3p<1$ и $p<1$, или просто $p<\frac{1}{3}$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что суд из двух присяжных лучше суда из четырех присяжных, если $p<\frac{1}{3}$, а суд из четырех присяжных лучше, если $p>\frac{1}{3}$. Если $p=\frac{1}{3}$, то оба суда имеют одинаковые шансы принять на первом заседании правильное решение. Если же $p>\frac{1}{3}$ (а в цивилизованном обществе так и должно быть!), то суд из четырех присяжных окажется предпочтительнее суда из двух присяжных.

Сделаем одно интересное замечание, касающееся проведенных рассуждений. Мы пришли к заключению, что лучше выбрать суд из двух присяжных, а не из четырех, если $p<\frac{1}{3}$. Другими словами, если вероятность индивидуального принятия правильного решения мала, то суд из двух человек предпочтительнее суда из четырех человек, или, что то же самое, *если вероятность индивидуального принятия неправильного решения высока, то суд из двух присяжных предпочтительнее суда из четырех присяжных.*

Задача 1. Используя прежнее определение оптимальной численности суда, установите, что предпочтительнее: суд из одного присяжного или из трех?

Задача 2. Человек, отправляющийся в путешествие, может выбрать двухмоторный самолет или четырехмоторный. Если один из моторов двухмоторного самолета выйдет из строя, самолет не сможет лететь. Четырехмоторный же самолет может продолжать полет с тремя действующими моторами, но с двумя уже не может. Какой самолет следует выбрать, если:

1) вероятность выхода из строя одного мотора у обоих самолетов одинакова;
2) вероятность того, что данный мотор выйдет из строя за время путешествия, равна 1/10 для

двухмоторного самолета и 1/12 для четырехмоторного?

Задача 3. Используя прежнее определение оптимальной численности суда, установите, что предпочтительнее: суд из пяти присяжных или из трех?

Фантазия 24

НАЗНАЧИМ ЦЕНУ

Математика: *квадратичные функции*

В задачниках по алгебре часто встречаются задачи такого типа:

Владелец фабрики установил, что если он будет продавать свои изделия по цене x долл., то его годовая прибыль P составит

$$P = -20x^2 + 7000x - 300\,000.$$

Определить значение x, при котором прибыль будет максимальной.

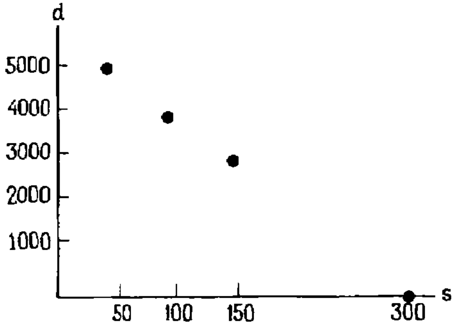
Многим ученикам такие задачи кажутся слишком искусственными, однако их можно сделать более реалистичными.

Когда фирма должна принять решение, производить ли ей некоторое новое изделие, она обычно консультируется с экспертами по маркетингу по поводу спроса на это изделие. Спрос на тот или иной товар обычно непосредственно связан с его ценой: при увеличении цены спрос падает. Предположим, что эксперты по маркетингу представили нам следующую таблицу:

Цена (в долл.)	Годовой спрос
s	d
50	5000
100	4000
150	3000
300	0

Предположим, что изготовление каждого изделия обходится в 50 долл., так что фирма, конечно, не станет продавать этот товар дешевле.

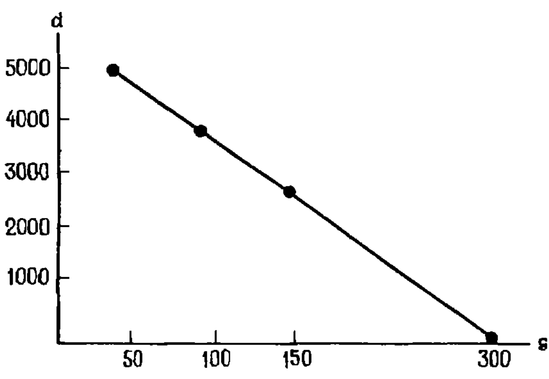
На основании этих данных можно построить следующий график:



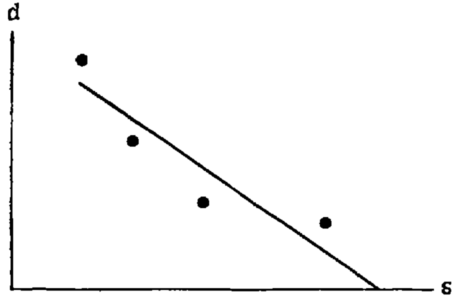
Нетрудно убедиться, что все экспериментальные точки лежат на одной прямой. Используя любые две из этих точек, получим уравненне прямой:

$$d = -20s + 6000. \qquad (1)$$

Соответствующий отрезок прямой показан на следующем графике:



Вообще, экспериментальные точки могут лечь на одну прямую, но могут и просто «лежать близко» к некоторой прямой. В этом случае для того, чтобы написать уравнение вида (1), нужно найти прямую, которая является *наилучшим приближением* в смысле *наименьших квадратов* (см. следующий рисунок).



Обозначив через P годовую прибыль, получим

$P =$ общий доход — затраты на производство,

$$P = sd - 50d,$$

$$P = (s - 50)\, d.$$

С учетом (1) получим

$$P = (s - 50)(-20s + 6000),$$

$$P = -20s^2 + 7000s - 300\,000. \qquad (2)$$

(Сравните этот результат с условием задачи, приведенной в начале раздела.)

Теперь наша задача состоит в определении цены s, $s \geqslant 50$, при которой годовая прибыль будет максимальной. Эту задачу можно решить, например, так:

$$P = -20s^2 + 7000s - 300\,000 =$$

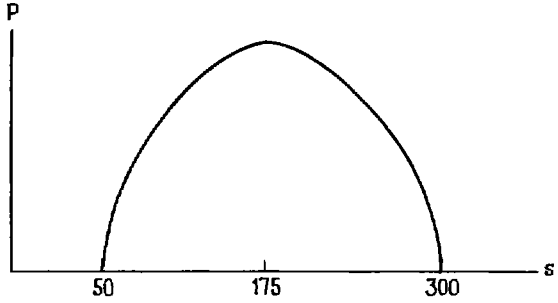
$$= -20\,[s^2 - 350s] - 300\,000 =$$

(дополняем до квадрата)

$$= -20\,[s^2 - 350s + 175^2] + 312\,500 =$$

$$= -20\,[s - 175]^2 + 312\,500. \qquad (3)$$

Формула (3) показывает, что годовая прибыль будет максимальной при $s = 175$. График s в зависимости от P выглядит так:



Задача 1. Для некоторого нового товара эксперты по маркетингу дали следующий прогноз:

Цена (в долл.) s	Годовой спрос d
100	7000
300	5000
600	2000
800	0

Затраты на производство одного изделия составляют 40 долл. Найдите цену, максимизирующую годовую прибыль.

Задача 2. Заметим, что в нашем примере, а также в задаче 1 оптимальная цена равна среднему арифметическому между минимальной и максимальной ценами. Покажите, что в подобной ситуации это всегда будет именно так. (Положите $d = As + B$, где $A < 0$ и $B > 0$, и пусть C — затраты на производство одного изделия.)

Задача 3. Предположим, что эксперты по маркетингу предоставили нам следующие данные:

Цена (в долл.)	Годовой спрос
s	d
50	5 000
100	35 000
150	3 000
300	0

Предположим, что производство каждого изделия обходится в 50 долл., так что фирма не захочет продавать товар дешевле. Найдите цену, максимизирующую годовую прибыль.

Фантазия 25

СКУЧНАЯ ВОЙНА

Математика: *алгебра, элементарная теория вероятностей (см. фантазию 18)*

Чтобы получить некоторое представление о том, как используется математика при выработке военной стратегии, рассмотрим воображаемую войну между двумя маленькими странами *A* и *B*. Сделаем следующие предположения:

1. У страны *A* есть два самолета, и из *A* в *B* существуют два воздушных маршрута. В стране *B* есть маленький мост, который для этой страны является важным военным объектом. Оба самолета страны *A* используются для разрушения моста. Для строительства нового моста нужно приблизительно 24 часа, и каждый самолет делает один рейс в день, чтобы мост не был восстановлен. Если самолет собьют, то некая сильная «нейтральная» держава позаботится о том, чтобы у страны *A* снова появился самолет.
2. У страны *B* есть два зенитных орудия, с помощью которых она пытается сбить самолеты страны *A*.

3. Поскольку из A в B ведут два воздушных пути, страна A может послать свои самолеты либо по одному маршруту, либо по разным.
4. Страна B может поместить зенитки либо вдоль одного маршрута, либо по одной зенитке на каждый маршрут.
5. Если один (два) самолет(а) летит (летят) по маршруту, вдоль которого расположена одна зенитка (две зенитки), то этот самолет (оба самолета) будет сбит (будут сбиты). Однако если два самолета летят по маршруту, вдоль которого расположена одна зенитка, то сбит будет лишь один самолет.
6. Если самолет доберется до цели, то цель будет уничтожена.

Задача, конечно, состоит в нахождении «оптимальных» в некотором смысле стратегий для стран A и B. Обозначим через D стратегию использования разных маршрутов, а через S — стратегию использования одного маршрута.

Если в некоторый день обе страны выберут стратегию D, то страна A получит нулевой выигрыш, потому что ни один самолет не достигнет цели. Если страна A выберет стратегию D, а страна B — стратегию S, то хотя бы один самолет достигнет цели и вероятность разрушения моста будет равна 1. Если A выберет S, а B выберет D, то снова один самолет прорвется к цели и вероятность разрушения моста будет равна 1. Если же обе страны выберут стратегию S, то страна A с вероятностью 1/2 выберет маршрут, на котором установлена зенитка, и, следовательно, цель будет уничтожена с вероятностью 1/2.

Запишем эти данные в стандартной игровой форме:

$$\begin{array}{cccc} & & & B \\ & & (q) & (1-q) \\ & & D & S \\ \multirow{2}{*}{A} & \begin{array}{cc} (p) & D \\ (1-p) & S \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Математическое ожидание выигрыша для A, которое обозначается через E, имеет вид

$$E=(0)pq+(1)p(1-q)+(1)(1-p)q+\frac{1}{2}(1-p)(1-q),$$

$$E=-\frac{3}{2}pq+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q+\frac{1}{2},$$

$$E=-\frac{3}{2}\left[pq-\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}q\right]+\frac{1}{2},$$

$$E=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{1}{3}\right)\left(q-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}.$$

Анализ подобных игр показывает, что «оптимальной» стратегией для A является выбор $p=1/3$. Другими словами, страна A должна посылать самолеты по разным маршрутам 1/3 времени и по одному и тому же маршруту 2/3 времени. При этом выигрыш A составит 2/3, т. е. A может ожидать, что мост будет разрушен 2/3 времени. Аналогичное исследование показывает, что страна B должна выбрать $q=1/3$.

Фантазия 26

НОВАЯ ПАРА ГЕНОВ

Математика: *алгебра, элементарная теория вероятностей*

Биологическая информация о наследственных признаках передается *генами* (их изучает наука генетика). Мы рассмотрим только две формы генов: A и a. Некая особь получает одну из этих форм от каждого из родителей. Таким образом, любую особь можно отнести к одному из следующих типов: AA, aA (либо Aa) или aa.

Приведенное ниже исследование было проделано Харди-Вайнбергом. Предположим, что:

1. Среди типов AA, aA или aa число мужских и женских особей одинаково.
2. Все члены популяции одинаково плодовиты. В частности, особи типов AA, aA и aa воспроизводятся с равной вероятностью.
3. Скрещивание является случайным относительно классификации по этим генотипам.
4. Для особи типа aA вероятность передать своему потомству ген A или a одинакова и равна 1/2.

Предположим, что в некоторый момент доли особей с наборами генов AA, aA (или Aa) и aa составляют p_0, q_0 и r_0 соответственно. Например, если $p_0 = 4/10$, это означает, что 40 % популяции имеют тип AA. Можно также интерпретировать p_0 как вероятность того, что выбранная наугад из популяции особь будет иметь тип AA. В частности, должно выполняться соотношение $p_0 + q_0 + r_0 = 1$.

Теперь мы хотим вычислить эти пропорции в следующем поколении. Обозначим их через p_1, q_1 и r_1 соответственно и будем считать это поколение «первым».

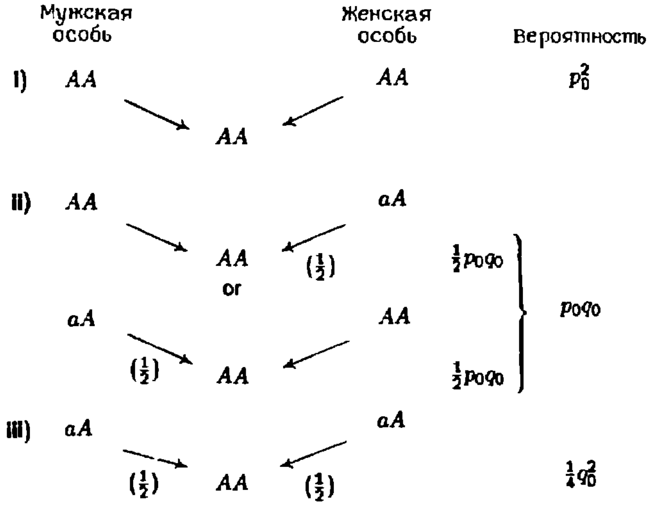
Чтобы получить в первом поколении тип AA, должно выполняться одно из следующих условий:

i) Мужская особь типа AA скрещивается с женской особью типа AA. Это происходит с вероятностью p_0^2.

ii) Мужская особь типа AA скрещивается с женской особью типа aA, причем женская особь передает ген A, или же мужская особь типа aA скрещивается с женской особью типа AA, причем мужская особь передает ген A. Это происходит с вероятностью p_0q_0.

iii) Мужская особь типа aA скрещивается с женской особью типа aA, причем каждая особь передает ген A. Это происходит с вероятностью $(1/4)\,q_0^2$.

Следующая схема поможет нам понять механизм этого процесса.



Следовательно,

$$p_1 = p_0^2 + p_0q_0 + \frac{1}{4}q_0^2,$$

$$p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right).$$

Чтобы получить в первом поколении тип Aa, должно выполняться одно из следующих условий:

i) Мужская особь типа AA скрещивается с женской особью типа aa. Это происходит с вероятностью $2p_0q_0$.

ii) Мужская особь типа AA скрещивается с женской особью типа aA, причем женская особь передает ген a, или же мужская особь типа aA скрещивается с женской особью типа AA, причем мужская особь передает ген a. Это происходит с вероятностью p_0q_0.

iii) Мужская особь типа aa скрещивается с женской особью типа aA, причем женская особь передает ген A, или же мужская особь типа aA скрещивается с женской особью типа *aa*, причем мужская особь передает ген A. Это происходит с вероятностью $q_0 r_0$.

iv) Мужская особь типа aA скрещивается с женской особью того же типа, причем мужская особь передает ген a, а женская особь передает ген A, или наоборот: мужская особь передает ген A, а женская — ген a. Это происходит с вероятностью $\frac{1}{2} q_0^2$.

Это поясняет следующая схема.

	Мужская особь		Женская особь	Вероятность	
i)	AA	$\to aA \leftarrow$	aa	$p_0 r_0$	
		or			$2p_0 r_0$
	aa	$\to aA \leftarrow$	AA	$p_0 r_0$	
ii)	AA	$\to Aa \leftarrow (\frac{1}{2})$	aA	$\frac{1}{2} p_0 q_0$	
		or			$p_0 q_0$
	aA	$(\frac{1}{2}) \to aA \leftarrow$	AA	$\frac{1}{2} p_0 q_0$	
iii)	aa	$\to aA \leftarrow (\frac{1}{2})$	aA	$\frac{1}{2} q_0 r_0$	
		or			$q_0 r_0$
	aA	$(\frac{1}{2}) \to Aa \leftarrow$	aa	$\frac{1}{2} q_0 r_0$	
iv)	aA	$(\frac{1}{2}) \to Aa \leftarrow (\frac{1}{2})$	aA	$\frac{1}{4} q_0^2$	
		or			$\frac{1}{2} q_0^2$
	aA	$(\frac{1}{2}) \to aA \leftarrow (\frac{1}{2})$	aA	$\frac{1}{4} q_0^2$	

Следовательно,

$$q_1 = 2p_0r_0 + p_0q_0r_0 + \frac{1}{2}q_0^2,$$

$$q_1 = 2\left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)\left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right).$$

Для получения особи типа *aa* в первом поколении надо, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

i) Мужская особь типа *aa* скрещивается с женской особью типа *aa*. Это происходит с вероятностью r_0^2.

ii) Мужская особь типа *aA* скрещивается с женской особью типа *aa*, причем мужская особь передает ген *a*, или же мужская особь типа *aa* скрещивается с женской особью типа *aA*, причем женская особь передает ген *a*. Это происходит с вероятностью q_0r_0.

iii) Мужская особь типа *aA* скрещивается с женской особью того же типа, причем каждая особь передает ген *a*. Это происходит с вероятностью $\frac{1}{4}q_0^2$.

Это иллюстрирует следующая схема.

	Мужская особь				Женская особь	Вероятность	
i)	*aa*				*aa*		
			aa			r_0^2	
ii)	*aA*				*aa*		
		$(\frac{1}{2})$	*aa*			$\frac{1}{2}q_0r_0$	
			or				q_0r_0
	aa				*aA*		
			aa	$(\frac{1}{2})$		$\frac{1}{2}q_0r_0$	
iii)	*aA*				*aA*		
		$(\frac{1}{2})$	*aa*	$(\frac{1}{2})$		$\frac{1}{4}q_0^2$	

Следовательно,

$$r_1 = r_0^2 + q_0 r_0 + \frac{1}{4} q_0^2,$$
$$r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2.$$

Все эти результаты мы соберем в следующей таблице:

Исходные пропорции	p_0	q_0	r_0
Пропорции в первом поколении	$\left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2$	$2\left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right) \times \left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2$	$\left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)$
	(p_1)	(q_1)	(r_1)

Отсюда мы получим следующую таблицу:

Пропорции в первом поколеиии	p_1	q_1	r_1
Пропорции во втором поколении	$\left(p_1 + \frac{1}{2} q_1\right)^2$	$2\left(p_1 + \frac{1}{2} q_1\right) \times \left(r_1 + \frac{1}{2} q_1\right)^2$	$\left(r_1 + \frac{1}{2} q_1\right)$
	(p_2)	(q_2)	(r_2)

В этой таблице мы обозначили через p_2, q_2 и r_2 пропорции во втором поколении. Получаем

$$p_2 = \left(p_1 + \frac{1}{2} q_1\right)^2 =$$
$$= \left[\left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)\left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)\right)\right]^2 =$$
$$= \left[\left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)(p_0 + q_0 + r_0)\right]^2.$$

или (поскольку $p_0+q_0+r_0=1$)

$$p_2=\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

Заметим, что $p_2=p_1$.

Аналогично,

$$q_2=2\left(p_1+\frac{1}{2}q_1\right)\left(r_1+\frac{1}{2}q_1\right)=$$

$$=2\left[\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)^2+\frac{1}{2}\left(2\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)\right)\right]\times$$

$$\times\left[\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)^2+\frac{1}{2}\left(2\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)\right)\right]=$$

$$=2\left[\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)(p_0+q_0+r_0)\right]\times$$

$$\times\left[\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)(p_0+r_0+q_0)\right],$$

или (поскольку $p_0+q_0+r_0=1$)

$$q_2=2\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right).$$

Заметим, что $q_2=q_1$.

Аналогично,

$$r_2=\left(r_1+\frac{1}{2}q_1\right)^2=$$

$$=\left[\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)^2+\frac{1}{2}\left(2\left(p_0+\frac{1}{2}q_0\right)\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)\right)\right]^2=$$

$$=\left[\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)(p_0+q_0+r_0)\right]^2,$$

или (поскольку $p_0+q_0+r_0=1$)

$$r_2=\left(r_0+\frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

Заметим, что $r_2=r_1$.

Таким образом, пропорции генотипов *AA*, *aA* и *aa* достигают «равновесия» во втором поколении.

Задача. Предположим, что в некоторый момент пропорции генотипов *AA*, *aA* (или *Aa*) и *aa* составляют 0.3, 0.6 и 0.1 соответственно. Какими станут эти пропорции в следующем поколении?

Фантазия 27

ОЧЕРЕДЬ

Математика: *алгебра, неравенства*

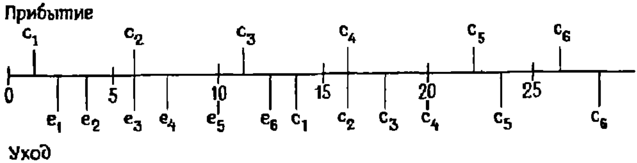
Теория очередей (теория массового обслуживания) в настоящее время представляет собой довольно большую область математики. Очереди возникают в магазинах, в ресторанах, на таможне. Как правило, клиенты на такое «обслуживающее устройство» поступают не с постоянной интенсивностью. Поэтому теория вероятностей играет главную роль в описании подобных явлений. Однако бывают такие ситуации, когда клиенты (не обязательно люди) все же поступают на обслуживающее устройство с постоянной скоростью. Например, автор не так давно побывал на машиностроительном заводе и наблюдал за работой станка, который полирует изделия. Затем эти изделия по конвейеру переходят на другой станок, который покрывает их лаком. Можно считать, что отполированные изделия играют роль «клиентов», а станок для лакировки изделий — роль «обслуживающего устройства». В этом случае клиенты поступают с постоянной скоростью. Теперь предположим, что лакировочный станок сломался. Тогда за то время, пока его чинят, около него образуется очередь. При этом возникает следующая задача: если мы знаем приблизительно, сколько времени займет ремонт, то сколько потребуется времени, чтобы ликвидировать образовавшуюся очередь, когда станок снова заработает?

Для того чтобы лучше понять задачу, рассмотрим изделия, которые поступают со станка A на станок B со скоростью 30 изделий в час. Станок B может обработать 80 изделий в час. Предположим, что станок B сломался и не работает 4 часа. Когда станок снова начинает работать, перед ним скопилась очередь в 120 изделий. В течение первого часа после возобновления работы на станок B поступают еще 30 изделий, но этот станок может обработать 80 изделий в час. Таким образом, в конце первого часа остается очередь из 70 изделий. В течение второго часа поступают 30 новых изделий, но *B* может обслужить 80. Итак, в конце второго часа у станка *B* остается очередь из 20 изделий. В течение третьего часа поступают еще 30 изделий, но этот станок может обработать 80 изделий. Таким образом, в течение третьего часа очередь на станок исчезнет и производство войдет в обычную колею (см. таблицу).

Временной фактор	Очередь
Станок *B* начинает работу	120
Конец первого часа	70
Конец второго часа	20
Конец третьего часа	0

(Очередь исчезает в течение третьего часа)

А теперь рассмотрим следующую ситуацию. Имеется обслуживающее устройство, которому для обслуживания клиента требуется три минуты. Каждые пять минут на устройство поступает новый клиент. Когда устройство начало работу, перед ним была очередь из шести клиентов, а первый «новый» клиент появился через минуту. Обозначим через p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 клиентов, которые находились в очереди в начале работы устройства (*p* — от слов «ранняя птичка»), а через c_1, c_2, c_3 и т. д. — «новых» клиентов в порядке возрастания индексов. На следующей прямой указаны времена их прибытия и ухода.



Мы видим, что c_6 — первый клиент, который не застал у обслуживающего устройства очереди. Для того чтобы обслужить очередь, потребовалось 20 минут. (Здесь имеется в виду, что очередь состоит из ожидающих клиентов и клиентов, находящихся в стадии обслуживания.)

Можно догадаться, что изображенная выше прямая с временами прибытия и ухода для большинства подобных задач окажется очень неудобной. Поэтому мы будем искать другой метод для получения нужной нам информации.

Пусть для описанного выше процесса c_{n+1} обозначает первого клиента, который не обнаруживает очереди на обслуживающем устройстве. Это означает, что оно к этому моменту обслужило уже $n+6$ клиентов. Общее время в минутах, которое потребовалось для обслуживания этих $n+6$ клиентов, равно

$$(n+6)\cdot 2.$$

Однако к тому моменту, когда поступает $(n+1)$-й клиент, устройство уже действовало $n\cdot 5+1$ минут. Таким образом, должны выполняться соотношения

$$(n+6)\cdot 2 \leqslant n\cdot 5+1,$$

$$11 \leqslant 3n,$$

$$\frac{11}{3} \leqslant n. \qquad (1)$$

Заметим, что n должно быть целым числом. К тому же мы хотим найти *первого* клиента, который поступил на устройство и не нашел очереди. Таким образом, нам нужно наименьшее целое число n, удовлетворяющее неравенству (1). Отсюда следует, что $n=4$ и, таким образом, пятый клиент c_5 является первым клиентом, который нашел устройство свободным. Общее время, требующееся для ликвидации очереди,— это просто время, необходимое для обслуживания $6+4=10$ предыдущих клиентов, которое, очевидно, равно 20 мин.

Теперь обобщим описанный процесс, обозначив через N число клиентов в очереди перед началом работы обслуживающего устройства. Пусть S — время, требующееся для обслуживания одного клиента, а T — интервал между прибытием клиентов. Пусть, далее, f обозначает время между началом работы устройства и прибытием первого нового клиента, $0 \leqslant f \leqslant T$.

Заметим, что для того, чтобы очередь исчезла, должно выполняться условие $T > S$. Если $T < S$, очередь будет просто продолжать расти. Например, посмотрим, что происходит, если станок обрабатывает 100 деталей за час и отправляет их для дальнейшей обработки на станок, который может обработать лишь 60 деталей в час. Если $T = S$, очередь будет сохраняться, и, если $N \neq 0$, она никогда не исчезнет. *Следовательно, мы должны предположить, что* $T > S$.

Далее, пусть c_{n+1} — первый клиент, прибывший на свободное обслуживающее устройство. Это означает, что оно обслужило уже $n + N$ клиентов. Общее время обслуживания этих клиентов равно

$$(n + N)S.$$

Однако когда прибывает $(n + 1)$-й клиент, время работы устройства описывается формулой

$$nT + f.$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$(n + N)S \leqslant nT + f,$$

$$NS - f \leqslant n(T - S),$$

$$\frac{NS - f}{T - S} \leqslant n. \qquad (2)$$

(Заметим, что мы использовали здесь неравенство $T > S$, или $T - S > 0$.) Таким образом, n — это наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству (2). Первый клиент, который прибывает на свободное устройство,— это c_{n+1}, а общее время, требующееся для исчезновения очереди, описывается формулой

$$(n + N)S.$$

Задача 1. Предположим, что два обслуживающих устройства обслуживают одну очередь и каждому из этих устройств требуется время S для обслуживания клиента. Используя обозначения, введенные в нашем обобщенном случае, определите первого клиента, который не застанет очереди перед обслуживающим устройством, а также полное время, требующееся для ликвидации очереди.

Задача 2. В обобщенном случае мы предполагали, что $0 \leqslant f \leqslant T$. А что произойдет, если $f \geqslant T$?

Задача 3. В обобщенном случае определите, сколько времени произвольный заданный клиент будет ждать окончания своего обслуживания.

Фантазия 28

«КРОВАВОЕ» ДЕЛО

Математика: *алгебра (см. фантазии 8 и 9)*

В фантазиях 8 и 9 мы ввели понятие линейного программирования. В этом разделе мы покажем, как можно переформулировать довольно сложную задачу таким образом, чтобы получилась задача линейного программирования. Мы не будем решать эту задачу, а просто предположим, что ее можно решить на компьютере с помощью соответствующей программы.

Допустим, клиника располагает следующими запасами крови:

Группа крови	Запас (в пинтах)	Стоимость переливания одной пинты (в долл.)
A	8	25
B	5	25
AB	2	40
O	6	20

Пусть имеются шесть пациентов, которые нуждаются в переливании крови:

Пациент	Группа крови	Требуемое количество крови (в пинтах)
1	*A*	4
2	*B*	2
3	*B*	1
4	*AB*	3
5	*O*	1
6	*O*	3

Задача состоит в том, чтобы провести все необходимые переливания крови с минимальными затратами.

Донор с группой крови *A* может дать свою кровь реципиентам с группой крови *A* или *AB*. Донор с группой крови *B* может дать кровь реципиентам с группой крови *B* или *AB*. Донор с группой крови *AB* может дать свою кровь только реципиентам с группой крови *AB*. Донор с группой крови *O* является универсальным донором: его кровь подходит реципиентам с группами крови *A*, *B*, *AB* и *O*.

Предположим, что мы составили следующую схему:

Реципиент

Донор	1	2	3	4	5	6	Меньше или равно
A	a			g			8
B		c	e	h			5
AB				j			2
O	b	d	f	k	l	m	6
Больше или равно	4	2	1	3	1	3	

где a, b, c, d, e, ..., m — число пинт крови, которое донор дает реципиенту. Таким образом, граничные неравенства для этой задачи имеют вид

$$\begin{cases} a+g\leqslant 8, \\ c+e+h\leqslant 5, \\ j\leqslant 2, \\ b+d+f+k+m\leqslant 6, \\ a+b\geqslant 4, \\ c+d\geqslant 2, \\ e+f\geqslant 1, \\ g+h+j+k\geqslant 3, \\ l\geqslant 1, \\ m\geqslant 3, \\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ \ldots,\ m\geqslant 0, \end{cases}$$

и мы замечаем, что они описывают геометрическую фигуру в 12-мерном пространстве.

Общая стоимость переливания крови описывается формулой

$$C=25(a+g)+25(c+e+h)+40(j)+$$
$$+20(b+d+f+k+l+m).$$

Таким образом, для каждого упорядоченного набора из 12 чисел $(a, b, \ldots, m)$, который удовлетворяет приведенным выше неравенствам, мы вычисляем значение C и из всех вариантов выбираем тот, для которого значение C оказывается минимальным. Это и есть оптимальное решение. Задачи такого типа (в том числе и задачи разделов 8 и 9) известны как задачи «линейного программирования».

Наши неравенства задают в 12-мерном пространстве *конечную* фигуру, аналогичную тем фигурам в двумерном пространстве, которые можно заключить в квадрат, и тем фигурам в трехмерном пространстве, которые можно заключить в куб. Функции, подобные C, достигают на таких фигурах минимального значения, причем это значение они принимают «в углу». Поэтому достаточно просто найти все угловые значения. В нашей задаче таких углов приблизительио 60. Процесс нахождеиия всех этих углов, не говоря уже о вычислении значений C в них, очень трудоемкий. Математик Георг Даициг нашел алгоритм поиска такого решеиия, а также разработал метод, сокращающий число шагов. Этот метод предусматривает, что мы начинаем поиск из любого угла и перемещаемся из данного угла в смежный с ним угол, в котором значение C становится меньше. Таким образом мы находим минимальное значение C.

Задача. Сформулируйте задачу линейного программирования для минимизации затрат на переливание крови исходя из следующих данных:

Группа крови	Запас (в пинтах)	Стоимость переливаиия одной пинты крови (в долл.)
A	9	20
B	6	20
AB	2	35
O	7	15

Пациент	Группа крови	Требуемое количество крови (в пинтах)
1	A	3
2	B	3
3	AB	2
4	O	1

Фантазия 29

ВСПОМНИМ О СПУТНИКЕ

Математика: *тригонометрия*

Предположим, что спутник выводится на экваториальную орбиту, расположенную в 300 милях над поверхностью земли. Мы хотим расположить станции слежения вдоль экватора. Каждая станция слежения располагает сканирующим экраном с диапазоиом сканирования 180°, как показано на рнс. 1.

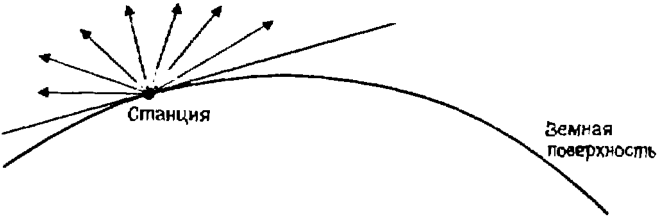


Рис. 1

Нужно расположить станции слежения таким образом, чтобы не оставалось «мертвой зоны», в которой за спутииком не будет наблюдать ни одна станция (рис. 2).

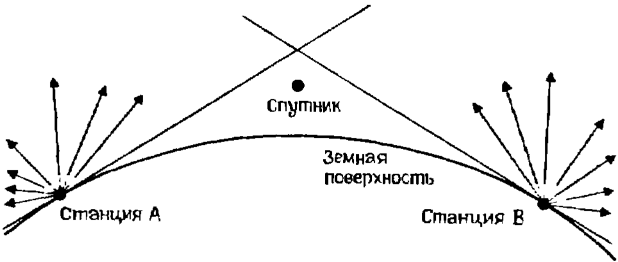


Рис. 2

Наибольшее расстояние, на которое станции A и B могут быть удалеиы друг от друга, показано на рис. 3.

Приняв радиус земли равным 4000 миль и заметив, что рис. 3 симметричен, мы увидим, что иам иужно найти расстояние d на рис. 4.

Поскольку угол CES прямой,

$$\cos\theta = \frac{4000}{4300} = 0.9302.$$

Таким образом,

$$\theta = 21.53^\circ = 0.376 \text{ рад.}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{4000} = 0.376,$$

$$d = 1504 \text{ миль}.$$

Следовательно, расстояние между двумя станциями слежения не должно превышать 3008 миль.

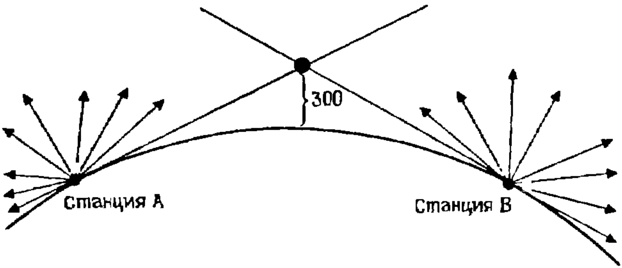


Рис. 3.

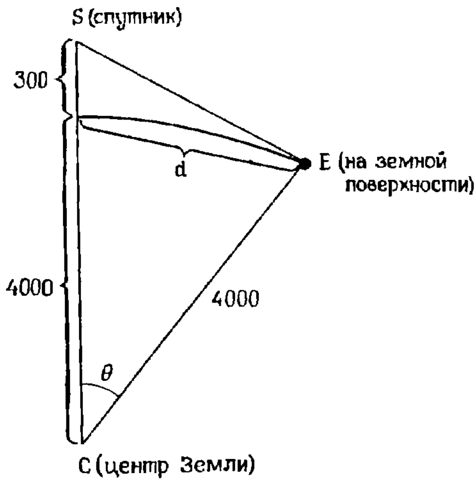


Рис. 4.

Задача. Спутник находится на экваториальной орбите на высоте 300 миль над поверхностью земли и совершает один оборот вокруг земли за 2 часа.

Две станции слежения A и B расположены на расстоянии 3000 миль друг от друга на экваторе. Станция слежения B первый раз обнаруживает спутник

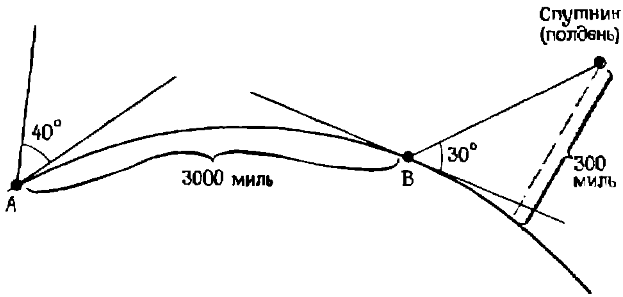


Рис. 5

в 12 часов дня в направлении 30° к горизонту. Станция слежения A направляет свой луч под углом 40° к горизонту (см. рис. 5). Когда станция A «засечет» спутник, если он не будет отклоняться от своей орбиты?

Фантазия 30

КАК СОСТАВИТЬ ТЕСТ!

Математика: *элементарная теория вероятностей, биномиальные таблицы*

Предположим, что мы хотим составить тест из десяти вопросов. На каждый вопрос нужно предложить несколько вариантов ответа, причем только один из них должен быть верным. Студент выдерживает экзамен, если он правильно отвечает не меньше чем на шесть вопросов; в противном случае экзамен считается несданным. Составитель теста хочет, чтобы вероятность выдержать экзамен, просто угадав правильные ответы, была меньше 5/100. Нужно определить, сколько ответов следует предлагать на каждый вопрос, чтобы это условие было выполнено.

Предположим, что на каждый вопрос предлагается m ответов. Тогда вероятность того, что студент сможет правильно угадать ответ, равна $1/m$. При помощи биномиального распределения находим вероятность того, что такой «догадливый» студент выдержит экзамен:

$$\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{10-k}.$$

Следовательно, надо задать m так, чтобы

$$\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{10-k}<0.05.$$

С помощью таблиц биномиальных коэффициентов можно найти, что

$$\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}(0.3)^k(0.7)^{10-k}=0.0473,$$

$$\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}(0.35)^k(0.65)^{10-k}=0.0949.$$

Отсюда следует, что наше условие будет выполнено при

$$\frac{1}{m}\leqslant 0.3, \qquad \frac{10}{3}\leqslant m.$$

Поскольку m должно быть целым, возьмем $m=4$. Другими словами, достаточно предложить четыре варианта ответа на каждый вопрос, чтобы вероятность того, что студент может выдержать экзамен, просто угадав правильные ответы, оказалась меньше чем 5/100.

Задача. Предположим, что тест состоит из десяти вопросов, на которые нужно ответить «да» или «нет». При каких результатах следует считать экзамен выдержаииым, если мы хотим, чтобы вероятность сдать его, просто угадав правильные ответы, была меньше 5/100?

Фантазия 31

СКАЗКИ О ГАММАХ

Математика: *пропорции*

Автор: Ховард Хэнд
Чоут Розмари Холл
Уоллингфорд, Коннектикут

Нельзя говорить о музыке, не имея хотя бы самого элементарного представления о том, как возникает и передается звук. Для наших целей будет достаточно очень краткого обсуждеиия. Звук возникает в результате колебаний некоторой среды — дерева, металла и т. п.— и распространяется в воздухе в виде волн повышения и понижения давления. Эти изменения давления улавливаются барабанными перепонками, преобразуются в нервные импульсы и передаются в мозг. В нашем исследовании музыки важиой характеристнкой передачи звука будет *частота* колебаний (и, следовательно, частота распространяющейся волны). Обычно эта частота измеряется числом колебаний в секунду; такая единица измерения называется *герцем*. Услышит ли звук обычное человеческое ухо — это зависит от частоты колебаний, их интенсивности и соотношения между этими двумя характеристиками. В музыке используются частоты в диапазоне от 30 до 4200 герц.

Звуки какой-то одной частоты встречаются очень редко. Обычно звук является смесью нескольких частот. Для создания звуков, имеющих только одну частоту, служит прибор камертон; такой звук называется *чистым* музыкальным тоном. В принципе существует более 4000 тонов, из которых можно составлять музыкальные *гаммы*, т. е. определенные наборы частот для формирования мелодий и гармоний. На практике, конечно, гаммы составляются не из 4000 и даже не из 1000 музыкальных тонов. Например, фортепиано — один из самых богатых музыкальных инструментов[1]) — имеет только 88 клавиш, причем лишь 12 из них имеют разные музыкальные названия. Все остальные находятся к этим 12 основным тонам в отношении, называемом октавой (октавами), и являются их повторениями. Говорят, что две ноты связаны отношением октавы, если частота одной из них равна удвоенной частоте другой. В дальнейшем мы еще поговорим на эту тему. Но как из всех тысяч имеющихся возможностей были выбраны только 12 различных нот? Именно этому вопросу посвящен данный раздел.

Обертоны и гомофония

Как мы уже говорили, мы редко слышим простые звуки, имеющие только одну частоту колебания. Это связано не только с выбором инструмента, потому что даже если мы выбираем его очень тщательно, — например, даже если попробовать извлечь звук из одной тщательно настроенной струны в надежде получить простую вибрацию, — это окажется не так просто. Если дать струне свободно колебаться, она будет производить колебания нескольких слышимых частот и нескольких частот, слишком слабых для человеческого уха. Эти дополнительные частоты, которые называются *обертонами* или *гармониками*, находятся в определенном отношении к основному тону: их частоты в целое число раз больше частоты основного тона. Так, если струна настроена на колебания

---

[1]) Ряд ограничений связан с выбором инструмента, на котором исполняется музыка. Одним из самых популярных инструментов является человеческий голос, а певческие голоса от баса до сопрано охватывают диапазон приблизительно от 80 до 900 герц.

с частотой в 440 герц, что является современным международным стандартом для ноты *ля* первой октавы, то она будет также производить колебания с частотами 880, 1760, 3520, ... герц. Относительная слышимость этих обертонов зависит от колеблющейся среды: хотя обертоны возникают в любой среде, однако слышны они будут в разных соотношениях. Именно эти соотношения определяют особое качество звучания музыкального инструмента, которое называется его *тембром* [1].

Если мы хотим ограничиться музыкой, состоящей из последовательности простых тонов (конечно, не забывая о том, что эти тона никогда не будут строго простыми), то выбор звуковых частот гаммы окажется менее сложным. Музыка, в которой две ноты никогда не исполняются одновременно, называется *гомофонической*. При этом не нужно заботиться о созвучии тонов, т. е. о том, как два тона звучат вместе. Однако в традиционной гармонии западного музыкального искусства имеются правила, описывающие приятные и неприятные звуковые последовательности. Например, небольшие скачки от одной ноты к другой предпочтительнее больших. Но нужно иметь в виду, что слишком маленькие скачки от одной частоты к другой, например всего в один или два герца, будет трудно уловить. Таким образом, при выборе гаммы нужно учитывать несколько ограничений: диапазон слышимых частот, диапазон частот данного музыкального инструмента, требование, согласно которому тона должны находиться не слишком близко друг к другу, но и не слишком далеко друг от друга, и, может быть, необходимость ограничить общее число тонов, поскольку с ростом этого числа увеличивается сложность инструмента и игры на нем.

Гармония

Сейчас мы слушаем в основном не гомофоническую, а *полифоническую музыку*, в которой две или более нот звучат одновременно. *Гармония* — это и

[1] Jeans J. Science and Music. — New York, Dover Publications, Inc., 1968, p. 84.

есть наука о сочетаниях тонов, которые приятно звучат вместе.

В пятом веке до нашей эры греческий философ и математик Пифагор занимался изучением гармонии и сделал несколько замечательных открытий. Прежде всего он открыл закон, который теперь называют первым законом Мерсенна. Этот закон гласит, что *если струна и ее натяжение остаются неизменными, а длина струны меняется, то период ее колебаний пропорционален длине*[1]. Это означает, что частота колебаний обратно пропорциональна длине струны. Если одна струна вдвое короче другой, то частота ее колебаний будет вдвое больше, чем частота другой струны. Учитывая этот принцип, Пифагор начал экспериментировать: он делил равномерно натянутую струну в различных отношениях, а затем определял на слух, при каких соотношениях длин получаются гармонические пары тонов.

Например, когда Пифагор закрепил струну в точке, отстоящей от конца струны на 2/3 ее длины, так что длины двух получившихся отрезков соотносились как 2 : 1, он обнаружил, что эти два участка струны дают очень точное созвучие. Интервал между такими звуками, как мы уже говорили, теперь называют октавой. Например, Пифагор мог слышать ноту *до* первой октавы и ноту *до* второй октавы. (Мы используем современные названия нот.) Действительно, при таком отношении частот получается интервал, который можно считать самым благозвучным. Сразу же добившись такого успеха с этим простейшим соотношением, Пифагор, наверно, захотел проверить следующее простое отношение, а именно 3 : 2. И в самом деле, две струны, длины которых относятся как 3 : 2, тоже дают очень приятное созвучие. Такой интервал мы теперь называем *квинтой*. Переходя затем к отношению 4 : 3 (поскольку 4 : 2 = 2 : 1), мы находим третью приятную и важную гармонию — *кварту*. В современной гамме

---

[1] Jeans J. Mathematics of Music. In: The World of Mathematics, ed. J. R. Newman. — New York, Simon and Schuster, 1956, p. 2297.

с основным звуком *до* интервал между *до* и *соль* составляет квинту, а интервал между *до* и *фа* — кварту. Заметим, что если мы захотим взять квинту вверх от *фа*, т. е. $(4/3)(3/2)=2$, то получим тон, составляющий октаву с исходным *до*, т. е. имеющий вдвое большую частоту. Итак, интервал между *фа* и следующим *до* составляет квинту. На музыкальном языке кварту называют *обращением* квинты. Перемещаясь вниз на кварту, мы получаем ноту с тем же названием, что и перемещаясь вверх на квинту. Таким образом, между нотами *до, фа* и *соль* существует очень важная связь, которая определяется простотой отношений их частот, а также их благозвучием. Они образуют основу простейшей гармонии. Почему же все-таки сочетания тонов, частоты которых образуют простые отношения, оказываются так приятны для слуха? Этот вопрос по-прежнему вызывает споры.

Открыв соотношение между этими тремя тонами, Пифагор, по-видимому, решил, что у него уже достаточно информации, чтобы построить гамму на основе единственного принципа: *для каждой ноты в гамме должна присутствовать другая нота, отстоящая от нее на квинту.* Ноты *до* и *фа* этому принципу уже удовлетворяют, поскольку *соль* — это квинта вверх от *до*, а *до* — от *фа*. А как же *соль?* Нужно включить в гамму еще одну ноту, частота которой относилась бы к частоте ноты *соль* как $3:2$.

Для удобства представим себе, что частота ноты *до* первой октавы, с которой мы начали, равна 100. (На самом деле по общему соглашению она устанавливается равной 261.63 герц.) Тогда частота ноты *соль* той же октавы, которая относится к частоте *до* как $3:2$, будет равна 150 герц. Следовательно, квинта вверх от *соль* должна иметь частоту $(3/2)$ (150) или $(3/2)^2(100)=900/4=225$. Но заметим, что эта новая нота, которую мы теперь называем *ре*, более чем на октаву выше исходной ноты *до*; это слишком большое расстояние (а мы уже договорились, что меньшие расстояния предпочтительнее). Таким образом, естественно будет умножить частоту 225 на $1/2$, чтобы спустить ноту *ре* на октаву вниз и приблизить ее к исходной ноте *до*. В результате получим (9/4) (1/2) (100) = (9/8) (100). Частота новой ноты *ре* относится к частоте исходной ноты *до* как 9/8.

А что дальше? Построим ноту, которая составляет квинту к *ре*, т. е. имеет частоту $(3/2)^2(100)$, затем спустим ее на октаву вниз, как мы делали это раньше, и получим ноту *ля* с частотой, составляющей 27/16 частоты ноты *до* первой октавы. Затем повторим эту процедуру еще раз; умножим частоту *ля* на 3/2 и спустим ее на октаву вниз; получим ноту *ми* с частотой 81/64, что составляет $3^4/2^6$ частоты *до* первой октавы.

Таблица 1 показывает, как соотносятся частоты первых шести нот гаммы, начиная с *до* первой октавы. Вспомним, что ноту *фа* можно получить, спустившись на квинту вниз от ноты *до* (умножив частоту *до* на 2/3), а затем поднявшись вверх на октаву (умножив частоту на 2); в результате получится соотношение частот 4/3.

Таблица 1

Метод Пифагора построения хроматической гаммы

Современное название ноты	Отношение частоты к частоте ноты *до*	
до	1	1
соль	(3/2)	1.5
ре	$(3/2)^2(1/2)$	1.125
ля	$(3/2)^3(1/2)$	1.6875
ми	$(3/2)^4(1/2)^2$	1.2656
си	$(3/2)^5(1/2)^2$	1.8984
фа-диез	$(3/2)^6(1/2)^3$	1.423
. . . .		

Долго ли мы будем продолжать в том же духе? Можно было бы продолжать и вечно, но, как мы уже заметили, очень трудно играть гаммы, в которых слишком много нот. Древняя музыка часто строилась на гаммах, состоящих лишь из пяти нот. Такая гамма называлась *пентатонической*. Ее ноты находятся в том же соотношении, что и первые пять нот, которые мы получили методом Пифагора; *до*, *соль*, *фа*, *ре* и *ля*, хотя выбор частоты исходной ноты может быть произвольным. Сам Пифагор решил остановиться после того, как получил семь различных нот, так что его гамма состоит из нот *ля*, *си*, *до*, *ре*, *ми*, *фа* *соль* — не в порядке построения, а в порядке возрастания частот.

Никакой внутренней причины для остановки этого процесса не существует, но в Греции была широко известна семиструнная лира, и, видимо, такая гамма казалась не слишком простой и не слишком сложной. Но существует ли естественная математически обоснованная точка остановки этого процесса построения нот?

Процесс мог бы остановиться естественным образом, если бы, построив новый тон на квинту выше предыдущего, мы получили исходный тон, замкнув таким образом цикл тонов. Однако достаточно взглянуть на математическую сторону такого построения, чтобы понять, что этого никогда не произойдет. Наш множитель (3/2) означает, что частота каждой новой ноты будет равна частоте ноты *до* первой октавы, умноженной на $3^n/3^m$ для некоторых целых n и m. Числитель всегда будет нечетным, а знаменатель четным, и ни для одной последующей ноты нашей гаммы мы не получим отношения 1 : 1. Метод Пифагора приводит к бесконечному порождению одного нового тона за другим, каждый в интервале квинты к предыдущему. Однако мы можем спросить, а не окажемся ли мы когда-нибудь *близко* к отношению 1 : 1? На этот раз ответ будет положительным. Построив 12 различных тонов, мы придем к тринадцатому, частота которого относится к частоте *до* первой октавы как 1.01364 : 1. Эту разницу 0.01364 называют *пифагоровой коммой*[1]. Поскольку она не слишком велика, представляется разумным остановиться после построения 12 различных тонов. Полученная таким образом гамма изобилует квинтами и достаточно богата, чтобы можно было создавать множество других интересных гармоний. Но так ли это?

[1] Backus J. The Acoustical Foundations of Music. 2nd ed. — New York, W. W. Norton & Co, 1977, p. 139.

Мажорные и минорные трезвучия

Вспомним, что метод Пифагора порождения музыкальной гаммы основан на отношениях 3/2 и 4/3, которые создают приятную гармонию. А если рассмотреть другие простые отношения — 5 : 4 или 6 : 5? Многие любители музыки полагают, что тона с такими отношениями частот тоже звучат очень приятно. В современной терминологии они известны как большая терция и малая терция соответственно. Мажорное трезвучие, состоящее из нот *до — ми — соль* (в *до* мажоре),— одна из наиболее распространенных музыкальных гармоний. Это трезвучие состоит из двух терций: от *до* до *ми* (большая терция) и от *ми* до *соль* (малая терция). Однако эти терции математически не соответствуют терции в пифагоровой гамме. В схеме Пифагора отношение частоты ноты *ми* (третьей ноты, начиная с *до*) к частоте *до* равно 1.2656 (см. табл. 1). Это отношение близко к 5 : 4 (=1.25), но разница все же достаточно велика, чтобы ее мог различить хорошо тренированный музыкальный слух. Чтобы избежать путаницы, интервал, порождаемый отношением 5 : 4, называют *точной терцией* в отличие от пифагоровой терции [1]).

---

[1]) Здесь можно сделать небольшое отступление о связи гармоник и гармонии. Напомним, что гармоники — это те тона и обертоны, которые естественным образом возникают при ударе по струне, настроенной на специфическую частоту. Все они являются целыми кратными первой частоты, так что второй гармонический обертон имеет частоту вдвое большую, чем первая, то есть находится на октаву ниже иее. Третий обертон, частота которого втрое больше частоты первого, находится в отношении 3 : 2 ко второму, то есть звучит в квинту ко второму. До этого момента обертоны также гармоничны. Четвертый обертон, частота которого в четыре раза больше частоты первого, звучит двумя октавами ниже. Кстати, он образует кварту по отношению к третьему обертону. Пятый обертон, имеющий отношение частот 5 : 4 с четвертым, составляет точную терцию к этой кварте. Если бы мы начали с *до* первой октавы, то получили бы в качестве первых пяти обертонов *до* первой октавы, *до* второй октавы, *соль* второй октавы, *до* третьей октавы, *ми* третьей октавы. Когда три ноты *до — ми — соль* первой октавы звучат вместе, они образуют так называемое мажорное трезвучие — аккорд, являющийся одной из основных конструкций традиционной западной музыки. Является ли случайным совпаде-

Можно, конечно, просто немного скорректировать пифагорову терцию. Например, можно передвинуть ноту *ми* так, чтобы она составляла с *до* первой октавы отношение 1.125, а не 1.2656. Однако это испортит интервал квинты между *ми* и находящимся ниже тоном *ля*, то есть нарушит основной принцип построения гаммы Пифагора. Увы, нельзя иметь все сразу.

Интервал малой терции над *до*, которого вовсе нет в исходной пифагоровой семитонной гамме, в том или ином приближении присутствует в двенадцатитонной гамме, построенной методом Пифагора: это нота *ре*-диез. В пифагоровой гамме тоже встречается соотношение, близкое к малой терции: это интервал от *ре* до *фа*; однако здесь отношение равно [1]) 32 : 27 (= 1.185) вместо идеального 6 : 5 (= 1.20). Опять

нием то, что эти гармоники, которые определяются физическими свойствами колеблющейся среды, образуют наиболее приятные гармонии? На этот вопрос не так-то легко ответить, поскольку если продолжить ряд обертонов, то не все они дадут такие приятные созвучия. Обертон, следующий за *ми* третьей октавы, — это нота *соль* третьей *октавы*, которая находится в отношении 6 : 5 к пятому обертону и, следовательно, образует с ним точную малую терцию. Это позволяет предположить, что эти обертоны тоже хорошо звучат вместе. Однако дальше таких совпадений не возникает. Отношения 7 : 6 и 8 : 7 не так приятны с точки зрения гармонии. Правда, соотношение 9 : 8 встречается в пифагоровой гамме как интервал от *до* первой октавы до *ре* первой октавы, но это случайное совпадение, а не прием, рассчитанный на то, чтобы эти две ноты хорошо звучали вместе. Высшие гармоники становятся все ближе друг к другу, так что среди них можно найти практически любой интервал.

Однако, поскольку более высокие обертоны обычно слышны хуже, чем низшие, можно предположить, что первые несколько обертонов играют наиболее значительную роль в нашем восприятии гармонии. Так ли проста эта роль — пока до конца не ясно. По теории Гельмгольца, созданной около 100 лет назад, созвучие не является результатом совпадения обертонов одного тона. Гельмгольц считал, что надо рассматривать, как при одновременном звучании *соль* и *до* первой октавы (или *до*, *соль* и *ми* первой октавы) обертоны каждого отдельного тона взаимодействуют с обертонами других тонов. В основе этой теории лежит идея о том, что необходимо свести к минимуму биения, возникающие при одновременном звучании близких, но не совпадающих частот. Пока придется ограничиться тем, что между гармониками и гармонией, возможно, существует какая-то связь, но какая именно — до конца не ясно.

[1]) См. сноску [1]) на с. 124, р. 141.

близко, но не «в яблочко». Мы не можем удовлетворить тех музыкантов, которые настаивают на точных квинтах и точных терциях и не признают никаких компромиссов. Гамма может содержать только один из этих интервалов.

Равиомерная темперация

А теперь снова рассмотрим гамму из двенадцати тонов, построенную методом Пифагора. Будем считать ее просто неким временным построением. Интервал между двумя последовательными тонами двенадцатитонной гаммы называется *полутоном*. Например, между *до* и *ре* два полутона: от *до* до *до*-диез и от *до*-днез до *ре*. Отношение частот *до* и *ре* равно 8 : 9. Каждый из этих полутонов получается в результате умножения частоты *до* на квадратный корень из 9/8(=1.1606), т. е. для того, чтобы из *до* получить *ре*, нужно умножить частоту *до* на $(\sqrt{9/8})^2$. Посмотрев в табл. 1, мы убедимся, что это действительно так. Аналогично, *ре*-диез получается из ноты *ре* умножением ее частоты иа 1.606, и так же из *ре*-диез получается *ми*. Между *ми* и *фа* в современной гамме лишь один полутон, а в пифагоровой гамме— один *гемитон*. Что же такое гемитон? Нота *фа* предопределена заранее: ее частота должна относиться к частоте ноты *до* как 4/3. Переходя от *ми* к *фа* в пифагоровой гамме, мы умножаем частоту *ми* на 1.0535 (т. е. на 1.3333/1.2656), а не иа 1.606. Таким образом, гемитон меньше полутона. Это тоже составляет проблему, особенно если мы хотим сыграть мажорное трезвучие не в *до* мажоре, а в другой тональности. Очевидно, малая терция (равная трем полутонам) от *ре* до *фа* отличается от малой терции от *фа* до *ля*-бемоль. Тональность *фа* минор будет звучать не так, как тональность *ре* минор. Конечно, не хочется ограничиваться какой-то одной тональностью, но в то же время не хочется, чтобы каждая тональность имела свое особое звучание. Между тем до наступления эпохи барокко клавишные инструменты настраивались так, что музыка в разных тональностях действительно имела разные гармонические характеристики.

Решеиие этой дилеммы нашел И.-С. Бах. Таким решением (которое используется в большинстве современных клавишных инструментов) стала *гамма с равномерной темперацией*. Бах сам играл на клавишных инструментах, и он решил, что музыка должна звучать одинаково хорошо во всех тональностях, даже если для этого придется пожертвовать некоторыми точными пифагоровыми отношениями частот или точными терциями. Бах сделал все полутона равными. Чтобы разделить октаву на двенадцать равных частей, надо начать с ноты *до*, умножить ее частоту на корень 12-й степени из двух, чтобы получить *до*-диез, затем умножить полученную частоту на корень 12-й степени из двух, чтобы получнть *ре*, и т. д.; таким образом, за 12 умножений мы получаем всю октаву и начинаем этот процесс сначала. Полученные в результате отношения частот представлены в таблице 2, которая позволяет сравнить их с частотами пифагоровой гаммы.

Таблица 2

Метод равномерной темперации построения гаммы

Название ноты	Отношение частоты к частоте ноты *до*	Метод Пифагора
до	1	1
ре	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = (1.05946)^2 = 1.122$	1.125
ми	$(1.05946)^4 = 1.260$	1.2656
фа	$(1.05946)^5 = 1.335$	1.333
соль	$(1.05946)^7 = 1.498$	1.500
ля	$(1.05946)^9 = 1.682$	1.6875
си	$(1.05946)^{11} = 1.888$	1.8984
до	$(1.05946)^{12} = 2.000$	2.000

При сравненни двух гамм «на бумаге» они выглядят достаточно близкими, однако, чтобы сделать точные эстетические выводы, нужно оценить эту разницу на слух.

Равномерная темперация важна прежде всего для клавишных инструментов и тех инструментов, которые звучат вместе с ними. Скрипач, играющий соло, волен играть пифагорову гамму, строгую гамму или любую другую их комбинацию. Точно так же, струнный квартет или вокальная группа может выбрать любую гамму, если все музыканты заранее договорятся, как играть и петь каждый интервал. Какие гаммы на самом деле выбирают музыканты в таких случаях — очень интересный вопрос, который стоило бы обсудить.

Нужно отметить, что в современной музыке гармония постоянно меняется. Интервалы, которые когда-то считались неприятными, теперь широко используются, а те, которые раньше казались необычными, сделались привычными. Конечно, отношения, найденные Пифагором, сохраняют свое значение, но, как мы убедились, несмотря на то, что некоторые математические отношения позволяют получить приятные гармонии, не существует такой математической системы, которая позволила бы построить гамму, удовлетворяющую абсолютно всем критериям.

Фантазия 32

СЫГРАЕМ В ПУЛ

Математика: *элементарная алгебра, подобие треугольников*

Рассмотрим стол для игры в пул[1]) размерами 42 дюйма на 84 дюйма. Предположим, что мы хотим сделать удар, показанный на рис. 1. Будем считать, что угол падения равен углу отражения, и обозначим через x расстояние (в дюймах) между точкой P

[1]) Разновидность игры в бильярд. — *Прим. перев.*

и точкой удара шара на нижней стороне стола (см. рис. 2). Очевидно, что $0 < x < 30$. Из подобия треугольников выводим следующие соотношения:

$$\frac{21}{x} = \frac{84}{30 - x},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{30 - x},$$

$$30 - x = 4x,$$

$$30 = 5x,$$

$$x = 6.$$

Рассмотрим ту же самую задачу с несколько иной точки зрения. Предположим, что мы хотим сделать тот же удар, что и раньше. Однако теперь потребуем, чтобы шар двигался так, чтобы общее пройденное

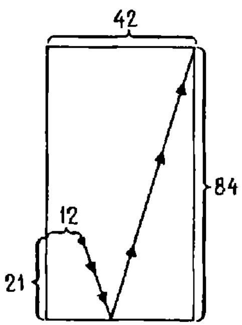


Рис. 1

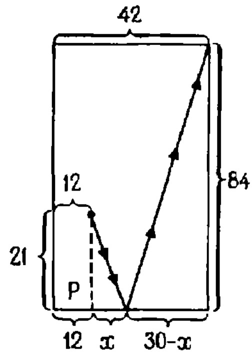


Рис. 2.

им расстояние было минимальным (т. е. по кратчайшему пути). Для большей ясности рассмотрим пути, изображенные на рис. 3. Все они имеют разную длину. Наша задача заключается в том, чтобы определить, какой путь (не обязательно один из показанных на рис. 3) будет кратчайшим.

Рассмотрим один такой путь и часть его зеркального отражения, как показано на рис. 4.

Заметим, что общее пройденное расстояние $\overline{AC} + \overline{CD}$ равно расстоянию $\overline{BC} + \overline{CD}$. Поскольку

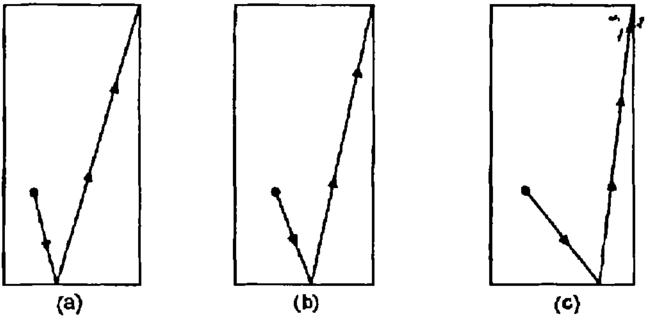


Рис. 3

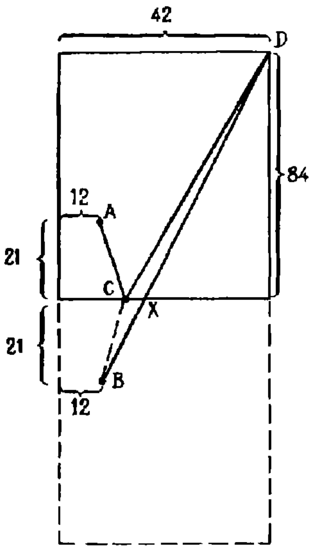


Рис. 4

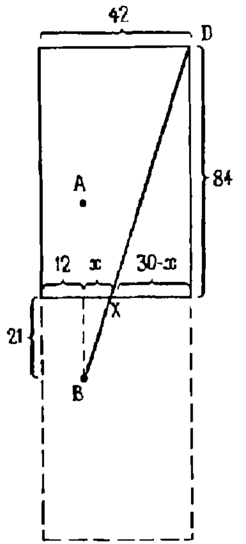


Рис. 5

сумма длин двух сторон треугольника больше длины его третьей стороны,

$$\overline{BC} + \overline{CD} > \overline{BD}.$$

Если выбрать точку X, как показано на рисунке, то путь $A - X - D$ даст расстояние, равное $\overline{BD}$. Поэтому лучшее, что мы можем сделать,— это отыскать точку X и выбрать путь $A - X - D$.

Чтобы отыскать точку X, рассмотрим рис. 5.

Из подобия треугольников следует

$$\frac{21}{x} = \frac{84}{30 - x},$$

что в точности совпадает с уравнением, которое мы решили раньше, получив

$$x = 6.$$

Эти рассуждения дают нам возможность установить одно замечательное свойство: *если шар движется так, что угол падения равен углу отражения, то он движется по кратчайшему пути, и наоборот.*

Задача. Пусть при тех же предположениях кто-то хочет сделать следующий удар:

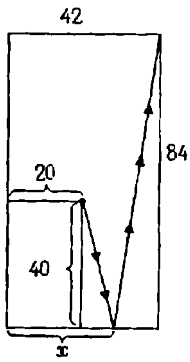


Рис. 6

Найдите соответствующее x

Фантазия 33

ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Математика: *теорема Пифагора*

Рассмотрим двух человек, *A* и *B*, которые находятся в двух разных комнатах *RA* и *RB* соответственно. Стены этих комнат стеклянные, так что *A* и *B* могут видеть друг друга:

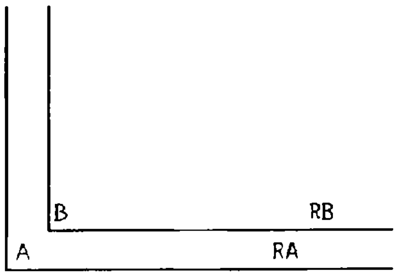


Рис. 1

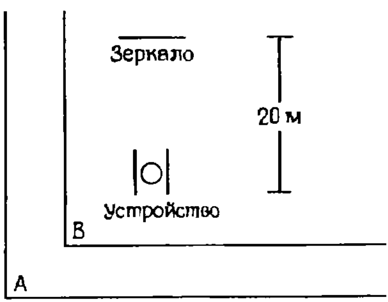


Рис. 2

У каждого из них есть очень точные часы, которые в случае необходимости могут измерять время с точностью до долей секунды. Для наглядности предположим, что все измерения можно проводить с точностью до 10^{-7}.

В комнате RB находится хитрое устройство, передающее световые импульсы. Это устройство не только испускает световой импульс, но и указывает, когда он был получен. В 20 метрах перед устройством установлено зеркало.

Время, измеренное в комнатах RA и RB, будем обозначать через t_A и t_B соответственно.

Предположим, что скорость света равна 10 м/с. Импульс, переданный нашим устройством, отражается от зеркала, возвращается обратно и снова попадает в устройство, как показано на рис. 3.

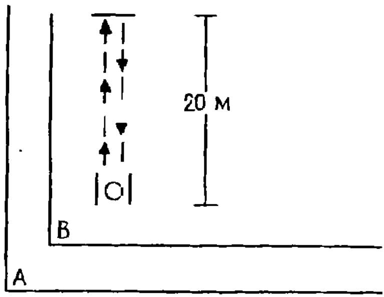


Рис. 3

Время, прошедшее между передачей и возвращением импульса, измеренное в комнатах RA и RB, равно

$$t_A = t_B = \frac{40 \text{ м}}{10 \text{ м/с}} = 4 \text{ с}.$$

(При этих вычислениях мы, конечно, предполагаем, что комнаты RA и RB неподвижны друг относительно друга.)

Теперь предположим, что комната RB движется со скоростью 3 м/с относительно комнаты RA (рис. 4).

Повторим наш эксперимент. Устройство передает импульс, который отражается в зеркале и снова попадает в устройство. Наблюдатель B видит в точ-

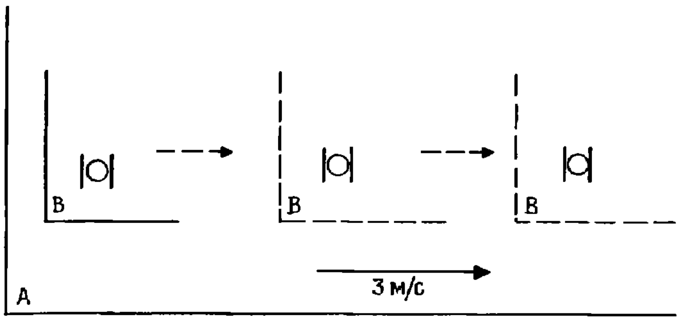


Рис. 4

ности то же самое, что и в предыдущем эксперименте (рис. 5), так что время для него по-прежнему равно

$$t_B = \frac{40\ \text{м}}{10\ \text{м/с}} = 4\ \text{с}.$$

Однако A наблюдает то, что показано на рис. 6.

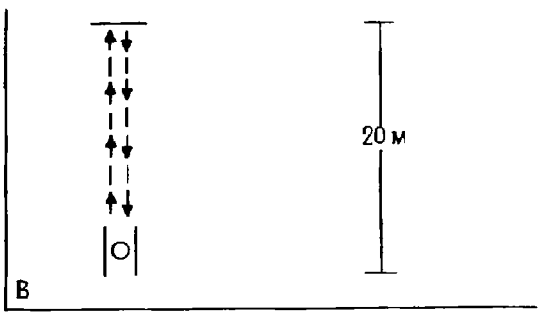


Рис. 5

Рассмотрим треугольник, показанный на рис. 7. Если t_A — время между передачей импульса и его приемом, измеренное наблюдателем A, то из формулы $d = vt$ мы видим, что $d = 3t_A$, где $3t_A$ — основание треугольника на рис. 7. Кроме того, если принять скорость света равной 10 м/с и применить формулу $d = vt$, мы обнаружим, что $2h = 10t_A$, или $h = 5t_A$,

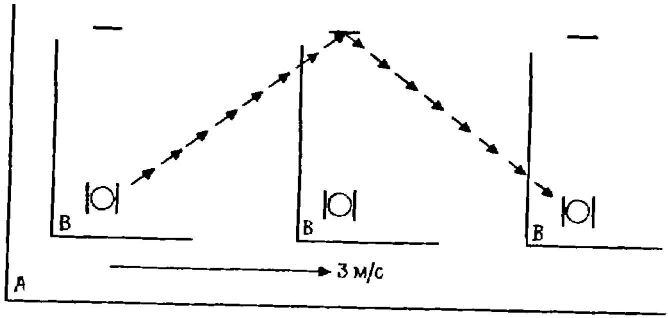


Рис. 6

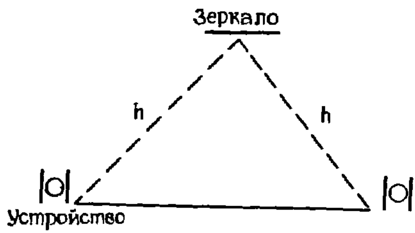


Рис. 7

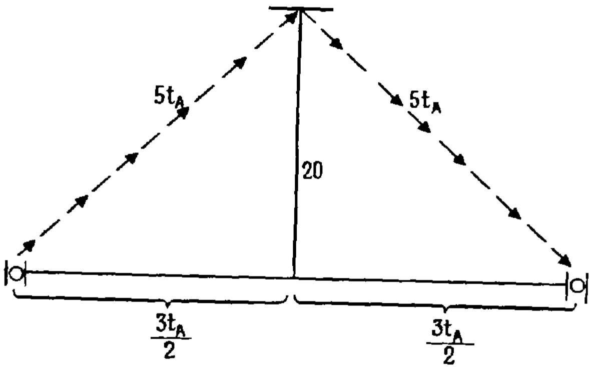


Рис. 8

где $2h$ — это расстояние, фактически пройденное светом.

Теперь мы получаем треугольник, показанный на рис. 8.

По теореме Пифагора

$$(5t_A)^2=(3t_A/2)^2+400,$$
$$(91/4)\,t_A^2=400,$$
$$t_A^2=1600/91,$$
$$t_A=4.1931393\ \text{с}.$$

Следовательно, когда для наблюдателя B время равно 4 с, для наблюдателя A время равно 4.1931393 с. Как это может быть? Теория относительности Эйнштейна объясняет этот результат тем, что часы наблюдателя B идут «медленнее», чем часы наблюдателя A. Приведя исходное время к единице, можно составить следующую таблицу:

Таблица 1

Время для *A*	**Время для *B***
1 с	0.9539392 с
1.0482848 с	1 с

Примем теперь скорость света равной 80 м/с. Наше устройство передает световой импульс, он отражается в зеркале, а затем возвращается в устройство. Интервал времени между передачей импульса и его возвращением, измеренный в комнатах RA и RB (в предположении, что они неподвижны друг относительно друга), равен (см. рис. 3)

$$t_A=t_B=\frac{40\ \text{м}}{80\ \text{м/с}}=0.5\ \text{с}.$$

Теперь вновь предположим, что комната RB движется со скоростью 3 м/с относительно комнаты RA (как на рис. 4). Повторим эксперимент. Наше устройство снова передает световой импульс, который отражается в зеркале и возвращается в устройство. Наблюдатель B видит в точности то же самое, что и в эксперименте с неподвижными комнатами, так что интервал времени для него по-прежнему равен

$$t_B=\frac{40\ \text{м}}{80\ \text{м/с}}=0.5\ \text{с}.$$

Однако A снова наблюдает тот же результат, который показан на рис. 6, т. е. мы опять получаем треугольник, приведенный на рис. 7. Основание треугольника по-прежнему равно $3t_A$, но, поскольку теперь мы приняли скорость света равной 80 м/с, мы получаем

$$2h = 80t_A,$$
$$h = 40t_A$$

и треугольник принимает такой вид:

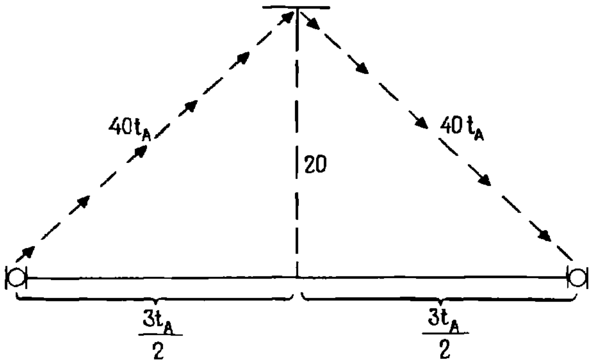


Рис. 9

По теореме Пифагора

$$(40t_A)^2 = (3t_A/2)^2 + 400,$$
$$(6391/4)\,t_A^2 = 400,$$
$$t_A^2 = 16\,000/6391,$$
$$t_A = 0.5003519 \text{ с}.$$

Удвоив эти числа, получим такую таблицу:

Таблица 2

Время для A	**Время для B**
1 с	0.9992967 с
1.0007038 с	1 с

Мы снова видим, что у наблюдателя B часы идут «медленнее», чем у наблюдателя A. Заметим, однако, что разность времен, измеренных наблюдателями A и B, в табл. 2 меньше, чем в табл. 1. Это заставляет предположнть, что если бы скорость света была еще больше, то разница во времени для A н B оказалась бы еще меньше (мы считаем, что RB продолжает двигаться со скоростью 3 м/с относительно RA).

Теперь снова примем скорость света равной 80 м/с, но предположим, что комната RB двнжется относительно комнаты RA со скоростью 60 м/с, как это видит наблюдатель A. Тогда в результате нашего эксперимента интервал временн, измеренный наблюдателем B, остается равным

$$t_B = \frac{40 \text{ м}}{80 \text{ м/с}} = 0.5 \text{ с}.$$

Для наблюдателя A треугольннк, соответствующий треугольнику на рис. 9, принимает такой вид:

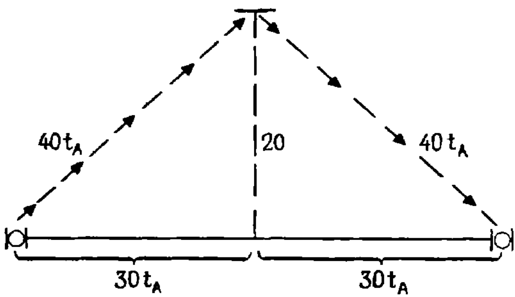


Рис. 10

По теореме Пифагора

$$(40t_A)^2 = (30t_A)^2 + 400,$$
$$700t_A^2 = 400,$$
$$t_A^2 = 0.5714286,$$
$$t_A = 0.7559289 \text{ с}.$$

Таблица времен для этого эксперимента такова:

Таблица 3

Время для A	Время для B
1.5118578 с	1 с
1 с	0.6614422 с

Заметим, что разница во времени для наблюдателей A и B возросла по сравнению с указанной в табл. 1. Действительно, если мы перейдем в табл. 3 к часам и дням, то получим

Таблица 4

Время для A	Время для B
1 ч 31 мин	1 ч
1 ч	40 мин
551.83 дней	365 дней
365 дней	241.43 дней

Задача 1. Постройте аналогичные задачи и соответствующие таблицы для других значений скорости света и скорости движения комнаты RB относительно комнаты RA. Что произойдет, если комната RB будет двигаться относительно комнаты RA со скоростью, превосходящей принятую в этой задаче скорость света?

Обобщим задачу, положив скорость света равной c м/с, а скорость движения комнаты RB равной v м/с; расстояние между устройством и зеркалом возьмем равным L. Для наблюдателя B картина такова:

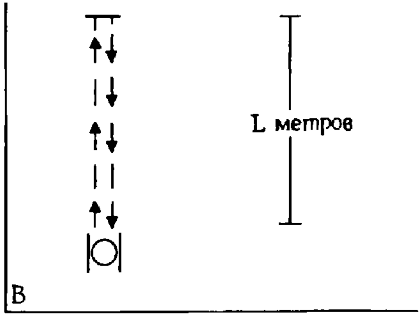


Рис. 11

По формуле $d = vt$

$$2L = ct_B,$$
$$L = \frac{ct_B}{2}. \tag{1}$$

Для наблюдателя A получаем уже знакомый нам треугольник:

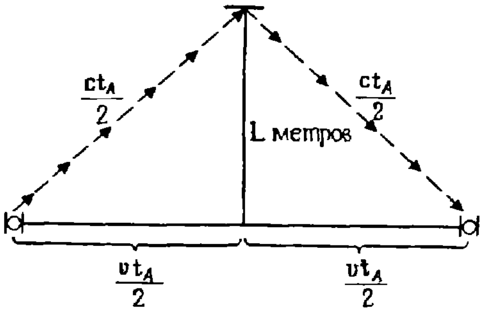


Рис. 12

Воспользовавшись соотношением $L = ct_B/2$ из (1), получим

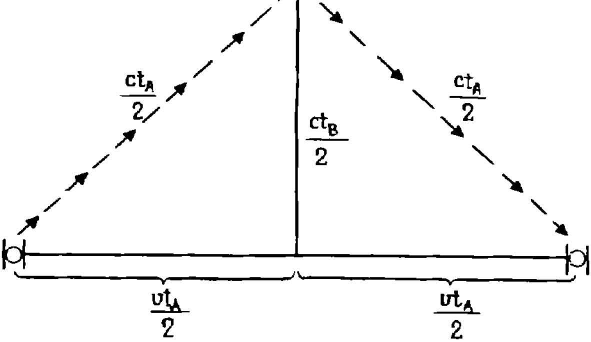


Рис. 13

По теореме Пифагора

$$(ct_A/2)^2=(vt_A/2)^2+(ct_B/2)^2,$$

$$\left[(c/2)^2-(v/2)^2\right]t_A^2=(ct_B/2)^2,$$

$$t_A=\frac{(c/2)\,t_B}{\sqrt{(c/2)^2-(v/2)^2}}.$$

Поделив числитель и знаменатель на $c/2$, получим

$$t_A=\frac{t_B}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \qquad (2)$$

Этот результат показывает соотношение между t_A и t_B. Формула (2) позволяет легко анализировать разницу во времени для наблюдателей A и B.

Задача 2. Что произойдет с соотношением между t_A и t_B, найденным по формуле (2), если 1) v близко к c и $v<c$; 2) v очень мало по сравнению с c?

Фантазия 34

МАСШТАБЫ ЭПИДЕМИИ

Математика: *алгебра*

Для того чтобы исследовать развитие эпидемии (распространение болезни), рассмотрим три группы людей: S, H и I. Группа S — это группа людей, восприимчивых к болезни. В группу H входят люди, которые уже болеют этой болезнью и могут передать ее другим. Группу I составляют люди, имеющие иммунитет к этой болезни (или уже переболевшие ею).

Точнее говоря, введем такие обозначения:

S_k — число людей, восприимчивых к болезни, на k-й день эпидемии;

H_k — число больных на k-й день эпидемии;

I_k — число людей, обладающих иммунитетом, на k-й день эпидемии.

Студентам был задан вопрос: если вам известны числа S_k, H_k и I_k, как найти S_{k+1}, H_{k+1} и I_{k+1}? В качестве ответа были предложены следующие соотношения:

$$S_{k+1} = S_k - 0.01S_k, \quad (1)$$

$$H_{k+1} = H_k - 0.2H_k + 0.01S_k, \quad (2)$$

$$I_{k+1} = I_k + 0.2H_k. \quad (3)$$

Рассуждения проводились так:

Уравнение (1): Между k-*м* и $(k+1)$-м днем определенный процент, скажем 1 %, людей, восприимчивых к болезни, заразится и покинет группу S_k.

Уравнение (2): На $(k+1)$-й день у нас будет столько же заболевших, сколько было накануне, минус те, кто выздоровел. Если предположить, что болезнь длится пять дней, можно предвидеть, что за один день примерно 1/5 (или 0.2) группы H_k выздоравливает и переходит в группу I_k имеющих иммунитет. Кроме того, нужно учесть тех людей из группы S_k, которые заболеют в течение этого дня; будем считать, что их 0.01 S_k.

Уравнение (3): На $(k+1)$-й день людей, имеющих иммунитет, будет столько же, сколько было накануне, плюс те, кто в течение дня выздоровел и переместился из группы H_k в группу I_k (мы предполагаем, что их 0.2 H_k).

Соотношения (1)—(3) можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} S_{k+1} &= 0.99S_k, \\ H_{k+1} &= 0.8H_k + 0.01S_k, \\ I_{k+1} &= I_k + 0.2H_k. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Предположим, что исходные данные таковы:

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= 90\,000, \\ H_0 &= 9000, \\ I_0 &= 1000. \end{aligned}\right\}$$

Подставив их в правые части соотношений (4), получим

$$\text{1-й день} \left\{\begin{aligned} S_1 &= 89\,100, \\ H_1 &= 8100, \\ I_1 &= 2800. \end{aligned}\right.$$

А теперь возьмем электронный калькулятор и составим такую таблицу:

Таблица 1

День	S_k	H_k	I_k
0	90,000	9,000	1.000
1	89,100	8,100	2,800
2	88,209	7,371	4.420
3	87,327	6,779	5,894
4	86,454	6.296	7,250
5	85.589	5,901	8,509
6	84,733	5,577	9,689
7	83.886	5,309	10,804
8	83,047	5,086	11,866
9	82,217	4,899	12,883
10	81,394	4,733	13,863
11	80,580	4,600	14,810
12	79,775	4,478	15,730
13	78,977	4,372	16.626
14	78,187	4,287	17.500

После того как студенты изучили результаты, им предложили сформулировать критические замечания в адрес построенной нами модели. Вот эти замечания.

1) Мы не приняли во внимание изменения общей численности населения, связанные с рождениями и естественными смертями.
2) Мы не учли, что некоторые люди из группы H могут умереть от данной болезни.
3) Нельзя считать, что ежедневно будет заболевать один и тот же процент восприимчивых

к этой болезни людей. Число заболевших должно быть связано не только с числом восприимчивых людей, но и с числом больных, которые могут передать болезнь.

4) В модели не учитывается возможная программа прививок против данной болезни.

Следующая модель эпидемии была предложена в книге Baxter W. E., Sloyer C. W. Calculus with probability, Addison-Wesley, 1973.

Рассмотрим, как распространяется такая болезнь, как свинка. Больной способен передавать ее другим только в начальный период заболевания. В течение этого начального периода он называется *заразным*. Затем следует стадия, когда он остается больным, но уже *незаразным*, и наконец, стадия, когда он приобретает *иммунитет* к болезни. Сделаем следующие предположения:

1. Некоторая часть населения обладает иммунитетом к данной болезни, и среди вновь рождающихся также некоторая фиксированная доля δ обладает иммунитетом.
2. Существует коэффициент γ ежедневного увеличения населения за счет рождений.
3. Существует коэффициент β ежедневного уменьшения населения за счет естественных смертей, которые равномерно распределены по всей популяции.
4. Доля умирающих от этой болезни среди тех, кто ею болен, ежедневно составляет α.
5. Доля больных, которые переходят из стадии заразных в стадию незаразных, ежедневно составляет ω.
6. Доля больных, переходящих из стадии незаразных в стадию обладающих иммунитетом, ежедневно составляет σ.

Предположим, что *исходная* общая численность населения составляет N_0. Пусть a_0, n_0 и i_0 — *исходные* числа заразных, незаразных и обладающих иммунитетом соответственно. Пусть N_k — численность населения на k-й день эпидемии, а a_k, n_k, i_k — число заразных, незаразных и обладающих иммунитетом на k-й день соответственно. Используя приведенные выше соображения, можно записать

$$N_{k+1} = N_k + (\gamma - \beta) N_k - \alpha(a_k + n_k), \tag{5}$$

$$n_{k+1} = n_k - \beta n_k - \alpha n_k - \sigma n_k + \omega a_k, \tag{6}$$

$$i_{k+1} = i_k - \beta i_k + \sigma n_k + \delta\gamma N_k. \tag{7}$$

Важнейшим моментом является оценка числа a_{k+1} заразных больных на $(k+1)$-й день. У нас есть соотношение

$$a_{k+1} = a_k - \beta a_k - \alpha a_k - \omega a_k + I, \tag{8}$$

где I — увеличение числа заразных больных за счет заболевания людей из группы восприимчивых. Можно предположить, что I в (8) пропорционально произведению числа восприимчивых и числа заразных больных. Обозначим через τ коэффициент пропорциональности. Тогда

$$a_{k+1} = a_k - \beta a_k - \alpha a_k - \omega a_k + \tau a_k [N_k - (a_k + n_k + i_k)].$$

С помощью калькулятора мы посчитали, что произойдет, если взять

$$\begin{array}{ll} N_0 = 1\,000\,000, & \beta = 0.002, \\ a_0 = 1\,000, & \gamma = 0.004, \\ n_0 = 1\,000, & \sigma = 0.1, \\ i_0 = 10\,000, & \omega = 0.1, \\ \alpha = 0.001, & \tau = 0.000001. \end{array}$$

Результаты приведены в табл. 2.

Для того чтобы увидеть, какие исследования можно проводить с помощью такой модели, мы вернемся к более простой модели. Будем считать, что численность населения равна постоянной величине N. Пусть опять

S_k — число восприимчивых к болезни на k-й день,
H_k — число больных на k-й день,
I_k — число обладающих иммунитетом на k-й день.

Таблица 2

$\alpha = 0.00100000$ $\omega = 0.10000000$
$\beta = 0.00200000$ $\sigma = 0.10000000$
$\gamma = 0.00400000$ $\tau = 0.00000100$
$\delta = 0.10000000$

День	Численность населения	Заразные больные	Незаразные больные	Имеющие иммунитет	Восприимчивые
0	1000000	1000	1000	10000	988000
14	1024773	692140	249011	69295	14327
28	1043379	175566	305956	546976	14881
42	1068342	55068	136162	841764	35348
56	1096792	24990	55729	952099	63974
70	1127046	17665	27133	986882	95366
84	1158445	19136	19530	997004	122775
98	1190703	28097	22257	1003695	136654
112	1223605	43385	32828	1019445	127947
126	1257067	53369	45366	1052000	106332
140	1291291	50721	49807	1096714	94049
154	1326555	44436	46487	1140808	94824
168	1362952	41276	42194	1177982	101500
182	1400443	42184	40710	1210014	107535
196	1438964	45735	42388	1241450	109391
210	1478486	49510	45708	1275845	107423
224	1519040	51683	48642	1314054	104661
238	1560690	52374	50204	1354621	103491
252	1603502	52838	50889	1395781	103994
266	1647507	53931	51645	1436945	104986
280	1692725	55681	52952	1478598	105494
294	1739178	57641	54691	1521476	105370
308	1786895	59448	56503	1565919	105025
322	1835918	61068	58179	1611823	104848
336	1886284	62672	59754	1658972	104886
350	1938033	64391	61364	1707287	104991
364	1991202	66238	63079	1756843	105042
378	2045827	68152	64889	1807764	105022
392	2101949	70091	66749	1860121	104988
406	2159607	72060	68639	1913934	104974
420	2218848	74081	70567	1969218	104982
434	2279711	76167	72550	2026005	104989
448	2342243	78316	74594	2084343	104990

Запишем

$$S_k = N - (H_k + I_k), \tag{9}$$

$$H_{k+1} = H_k + \beta S_k H_k - \alpha H_k, \tag{10}$$

$$I_{k+1} = I_k + \alpha H_k. \tag{11}$$

Читателю предлагается обосновать каждое уравнение.

Заметим, что схема вычислений для этой модели несколько отличается от схемы вычислений для первой рассмотренной модели. Если даны N, S_0, H_0 и I_0, мы можем вычислить H_1 и I_1. При помощи H_1 и I_1 мы вычисляем S_1, а затем вычисляем H_2 и I_2. Это позволяет вычислить S_2 и т. д.

Обозначим через ΔH_k изменение числа больных с k-го до $(k+1)$-го дня.

Из уравнения (10) мы видим, что

$$\Delta H_k = \beta S_k H_k - \alpha H_k. \tag{12}$$

Принимая во внимание (12), получаем

$$\Delta H_k = (\beta S_k - \alpha) H_k.$$

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы:

1) Когда $(\beta S_k - \alpha) > 0$, число больных возрастает.
2) Когда $(\beta S_k - \alpha) < 0$, число больных уменьшается.

Если число S_k людей, восприимчивых к болезни, велико, можно ожидать, что величина $\beta S_k - \alpha$ окажется положительной, и в этом случае число больных будет возрастать. Но если число S_k мало, то можно ожидать, что величина $\beta S_k - \alpha$ окажется отрицательной, и в этом случае число больных будет уменьшаться.

Эпидемия достигает *критической точки*, когда число S восприимчивых оказывается таким, что $\beta S - \alpha = 0$, или же

$$S = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Можно ожидать, что эпидемия будет развиваться так: сначала число восприимчивых, т. е. S_0, велико; затем оно убывает до S. В течение этого периода число больных возрастает. После того как число восприимчивых достигло значения S, оно продолжает убывать, но число больных теперь тоже убывает:

$$S_0 \downarrow \Big\} \text{ число больных возрастает}$$

$$S \downarrow \Big\} \text{ число больных убывает}$$

Критическую точку S можно рассматривать как точку, начиная с которой эпидемический характер распространения болезни сменяется неэпидемическим. Хотелось бы увеличить S так, чтобы характер распространения болезни (который описывается числом заболевших) изменился как можно быстрее. Заметим, что S увеличивается с увеличением α и с уменьшением β. Если будет изобретена прививка, которая окажется хотя бы частично эффективной, то можно ожидать уменьшения β. (Почему?) Если будет изобретено лекарство, которое уменьшит время болезни (и, следовательно, время, в течение которого больной заразен), то можно ожидать увеличения α. (Почему?)

Задача 1. Для последней модели, описанной в этом разделе, обозначим через ΔS_k изменение числа восприимчивых к болезни, а через ΔI_k изменение числа обладающих иммунитетом от k-го дня к $(k+1)$-му. Покажите, что ΔS_k никогда не будет положительным, а ΔI_k никогда не будет отрицательным.

Задача 2. Одна группа медиков ищет спонсоров для исследований стоимостью в 1 млн. долл. и рассчитывает за один год получить вакцину, которая позволит уменьшить величину β (в последней модели данного раздела) на 25 %. Другая группа медиков ищет спонсоров для исследований стоимостью в 1 млн. долл. и рассчитывает за один год найти лекарство, которое позволит увеличить α на 30 %. Если у нас есть только 1 млн. долл. на подобные исследования, то какую группу медиков следует поддержать?

Фантазия 35

У ОЗЕРА

Математика: *математический анализ, дифференциальные уравнения*

Пусть $W(t)$ обозначает количество отходов в некотором озере в момент t. Известно, что отходы разлагаются со скоростью, пропорциональной их количеству, т. е.

$$\frac{dW}{dt} = -KW, \qquad (1)$$

где $K > 0$ — константа, которая зависит от температуры воды, химического состава отходов и т. п. Из (1) получаем

$$\frac{dW}{W} = -K\,dt,$$

$$\int \frac{dW}{W} = \int -K\,dt,$$

$$\ln W = -Kt + a,$$

где a — постоянная. Следовательно,

$$W = be^{-Kt} \qquad (b = e^a). \qquad (2)$$

Предположим, что в момент $t = 0$, когда мы начинаем наблюдение за этим процессом, в воде находится W_0 единиц отходов. Подставляя в уравнение (2) $t = 0$, получаем

$$W_0 = b$$

и, следовательно,

$$W(t) = W_0e^{-Kt}.$$

Численные расчеты. Предположим, что $K = 0.35$. Если первоначально в озере было 1500 фунтов отходов, а время t измеряется в днях, то через 2 дня количество отходов будет равно

$$W(2) = 1500e^{-0.35(2)} = 744.878 \text{ фунтов}. \qquad (3)$$

Предположим, что $K=0.35$ и в озере первоначально находится 1500 фунтов отходов. Сколько понадобится дней, чтобы количество отходов уменьшилось до 400 фунтов? Нам иужно решить уравнение

$$400=1500e^{-0.35t} \tag{4}$$

относительно t. Из (4) получаем

$$\ln 400=\ln 1500-0.35t,$$

$$t=\frac{\ln 1500-\ln 400}{0.35},$$

$$t=3.776 \text{ дней.}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда отходы сбрасываются в озеро с постоянной скоростью L фунтов в день. Тогда

$$\frac{dW}{dt}=L-KW, \tag{5}$$

$$\frac{dW}{dt}+KW=L. \tag{6}$$

Воспользуемся стандартным методом решения таких уравнений.

1) Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dW}{dt}+KW=0$$

с характеристическим уравнением

$$r+K=0$$

и получим решение

$$W_h=ae^{-Kt} \quad (a \text{ — константа}). \tag{7}$$

2) Рассмотрим частное решение W_p уравнения (6). Предположим, что

$$W_p=b,$$

где b — константа. Тогда

$$\frac{dW_p}{dt}=0.$$

Подставляя это в (6), получаем

$$0+Kb=L,$$

$$b=\frac{L}{K}.$$

Таким образом,

$$W_p=\frac{L}{K}. \qquad (8)$$

Складывая (7) и (8), получаем общее решение уравнения (6) в виде

$$W(t)=ae^{-Kt}+\frac{L}{K}. \qquad (9)$$

Снова полагая $W=W_0$ при $t=0$, получаем

$$W_0=a+\frac{L}{K},$$

$$a=W_0-\frac{L}{K}.$$

Подставив этот результат в (9), получим

$$W(t)=\left(W_0-\frac{L}{K}\right)e^{-Kt}+\frac{L}{K}. \qquad (10)$$

Численные расчеты. Предположим, что t измеряется в днях,

$$K=0.35,$$

$$W_0=1500 \text{ фунтов},$$

$$L=180 \text{ фунт/день}.$$

Через два дня количество отходов определяется по формуле

$$W(2)=\left(1500-\frac{180}{0.35}\right)e^{-(0.35)2}+\frac{180}{0.35}=1003.777 \text{ фунтов}.$$

Проанализируем формулу (10). При больших t величина $W(t)$ становится близкой к L/K. Если $(W_0-L/K)>0$, или $W_0>L/K$, то количество отходов всегда больше чем L/K; если же $(W_0-L/K)<$ $<L/K$, то количество отходов всегда меньше L/K.

Численные расчеты. Предположим, что t измеряется в днях

$$K = 0.35,$$
$$W_0 = 1500 \text{ фунтов},$$
$$L = 180 \text{ фунт/день}.$$

Тогда

$$\frac{L}{K} = \frac{180}{0.35} = 514.286.$$

Таким образом, при больших t количество отходов в озере приближается к 514.286 фунтам. Кроме того, $W_0 - L/K = 1500 - 514.286 = 985.714 > 0$, и, следовательно, количество отходов в озере всегда будет больше чем 514.286 фунтов. Допустим, нам надо узнать, сколько дней потребуется, чтобы количество отходов в озере уменьшилось до 600 фунтов. Согласно (10), мы должны решить уравнение

$$600 = \left(500 - \frac{180}{0.35}\right) e^{-(0.35)t} + \frac{180}{0.35}$$

относительно t. Получим

$$85.714 = 985.714 e^{-0.35t},$$
$$\ln 85.714 = \ln 985.714 - 0.35t$$
$$t = \frac{\ln 985.714 - \ln 85.714}{0.35},$$
$$t = 6.978 \text{ дней}.$$

Задача 1. Предположим, что $K = 0.31$. Если первоначально в озере было 18 000 фунтов отходов и время t измеряется в днях, то сколько отходов останется в озере на третий день?

Задача 2. Предположим, что $K = 0.31$ и в озере первоначально было 1800 фунтов отходов. Пусть каждый день в озеро сбрасывается 100 фунтов отходов. Что произойдет по прошествии длительного времени? Сколько потребуется дней, чтобы количество отходов уменьшилось до 600 фунтов?

Фантазия 36

ЧТО ПРОИЗОЙДЕТ НА РЫНКЕ?

Математика: *алгебра, элементарная теория вероятностей, матричная алгебра*

Предположим, что на рынке преобладают бритвенные лезвия двух марок: марки A и марки B. Допустим, что покупатель приобретает новую пачку лезвий приблизительно раз в месяц, и сделаем следующие предположения:

i) Если в этом месяце человек пользуется лезвиями марки A, то с вероятностью 6/10 он будет использовать их и в следующем месяце, а с вероятностью 4/10 в следующем месяце он станет пользоваться лезвиями марки B.

ii) Если в этом месяце человек пользуется лезвиями марки B, то с вероятностью 7/10 он будет использовать их и в следующем месяце, а с вероятностью 3/10 в следующем месяце он станет пользоваться лезвиями марки A.

Представим эту информацию в матричной форме:

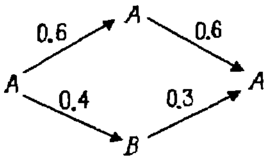
$$\begin{array}{cc} & \text{(Следующий месяц)} \\ & \begin{array}{cc} \quad A & \quad B \end{array} \\ \text{(Текущий месяц)} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Введем обозначение

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

и назовем P_1 *одноступенчатой матрицей перехода.*

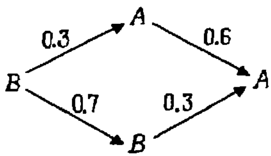
Рассмотрим вероятность того, что человек, использующий в данное время бритвенные лезвия марки A, будет их использовать еще два месяца подряд. Следующее «дерево» иллюстрирует имеющиеся здесь возможности:



Таким образом, искомая вероятность составляет

$$(0.6)\,(0.6)+(0.4)\,(0.3)=0.48.$$

Предположим, что некий человек пользуется в настоящее время бритвенными лезвиями марки B, и мы хотим найти вероятность того, что два последующих месяца он будет использовать лезвия марки A. Следующее дерево иллюстрирует имеющиеся здесь возможности:



Таким образом, искомая вероятность составляет

$$(0.3)\,(0.6)+(0.7)\,(0.3)=0.39.$$

Продолжая действовать точно так же, мы можем составить следующую *двухступенчатую матрицу перехода:*

$$P_2=\begin{array}{c} \\ (A) \\ (B) \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Трехступенчатая матрица перехода будет иметь вид

$$P_3=\begin{array}{c} \\ (A) \\ (B) \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.444 & 0.556 \\ 0.417 & 0.583 \end{pmatrix} \end{array}$$

(проверьте хотя бы один элемент этой матрицы). Интересио отметить, что

$$P_2 = P_1^2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{pmatrix}$$

и

$$P_3 = P_1^3 = P_1^2 P_1 = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.444 & 0.556 \\ 0.417 & 0.583 \end{pmatrix}.$$

На самом деле в общем случае для любого положительного k

$$P_k = P_1^k.$$

Отметим также, что сумма элементов одной строки матрицы переходов должна быть равна единице.

Предположим, что в иачале наших наблюдений за рынком объем продажи бритвенных лезвий марки A составляет 3/4 всех лезвий, а объем продажи лезвий марки B — лишь 1/4. Запишем эту информацию с помощью векторных обозначений:

$$\bar{x}_0 = (3/4,\ 1/4),$$
$$\bar{x}_0 = (0.75,\ 0.25).$$

Теперь мы хотим записать аналогичный вектор $\bar{x}_1 = (\_,\_)$, компоненты которого показывают, какую часть рынка будет контролировать каждая марка лезвий через месяц. Рассмотрим следующую таблицу:

Сейчас	Через месяц	Вероятиость
0.75	$A \xrightarrow{0.6} A$	0.45
	$A \xrightarrow{0.4} B$	0.30
0.25	$B \xrightarrow{0.3} A$	0.075
	$B \xrightarrow{0.7} B$	0.175

Таким образом, получаем

$$\bar{x}_1 = (0.525,\ 0.475).$$

Аналогично получаем

$$\bar{x}_2 = (0.4575,\ 0.5425)$$

(проведите эти вычисления сами).

Сделаем еще одно интересное наблюдение:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 P_1 = (0.75,\ 0.25)\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.525,\ 0.475)$$

и

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 P_1 = \bar{x}_0 P_1^2 = (0.75,\ 0.25)\begin{pmatrix} 0.444 & 0.556 \\ 0.417 & 0.583 \end{pmatrix} =$$

$$= (0.4575,\ 0.5425),$$

т. е.

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 P_1,$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_0 P_1^2.$$

Аналогичным образом

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_0 P_1^3$$

и в общем случае

$$\bar{x}_k = \bar{x}_0 P_1^k.$$

Векторы

$$\bar{x}_0 = (0.75,\ 0.25),$$

$$\bar{x}_1 = (0.525,\ 0.475),$$

$$\bar{x}_2 = (0.4575,\ 0.5425),$$

$$\vdots$$

и т. д.

позволяют увидеть, какие тенденции здесь будут проявляться.

Существует важная теорема (называемая *первой эргодической теоремой*), которая утверждает, что если исходная матрица P_1 не имеет нулевых элементов, то

1) Существует единственный вектор $\bar{x}$, для которого $\bar{x}P_1 = \bar{x}$ ($\bar{x}$ называется *неподвижным вектором* для P_1).

2) По мере роста k матрица $P_k (= P_1^k)$ приближается к матрице P, в которой каждая строка совпадает с $\bar{x}$.
3) Для любого исходного вектора $\bar{x}_0$ с увеличением k вектор $\bar{x}_k$ приближается к $\bar{x}$.

Эта теорема показывает, что важно вычислить вектор $\bar{x}$. Предположим, что в нашем примере

$$\bar{x} = (a, b).$$

Тогда, если $\bar{x}P_1 = \bar{x}$, должны выполняться следующие соотношения:

$$(a, b)\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (a, b),$$

$$(0.6a + 0.3b,\ 0.4a + 0.7b) = (a, b),$$

$$\left.\begin{aligned} 0.6a + 0.3b &= a \\ 0.4a + 0.7b &= b \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} -0.4a + 0.3b &= 0 \\ 0.4a + (-0.3b) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

или просто

$$0.4a - 0.3b = 0.$$

С учетом того, что $a + b = 1$, мы должны решить уравнения

$$\left.\begin{aligned} 0.4a - 0.3b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Получим

$$a = 3/7, \quad b = 4/7.$$

Другими словами,

$$\bar{x} = (3/7,\ 4/7).$$

Этот результат показывает, что, независимо от нынешнего состояния рынка, если матрица перехода остается равной P_1, то будет наблюдаться тенденция к тому, чтобы марка A контролировала 3/7 рынка, а марка B контролировала 4/7 рынка.

Подобные процессы называются *марковскими процессами* или *цепями Маркова*.

Задача. Для каждой из следующих одноступенчатых матриц перехода найдите P_2 и P_3. Для заданного вектора $\bar{x}_0 = (1/3,\ 2/3)$ найдите $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Определите вектор $\bar{x}$ и интерпретируйте его.

$$\text{i)}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}; \qquad \text{ii)}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Фантазия 37

ИЗМЕРИМ ЗДОРОВЬЕ

Математика: *формула расстояний*

Когда пациент поступает в отделение интенсивной терапии или в травматологический центр, он проходит множество обследований. В результате накапливается большое количество данных. Перед врачами встает такая проблема: как превратить эти данные в информацию, которую можно было бы непосредственно использовать в медицинской практике? Целые группы медиков и математиков посвятили немало времени и усилий тому, чтобы выделить из шестидесяти различных биохимических и физиологических параметров те, которые содержат наиболее полезную информацию. Для определенного круга проблем были выделены следующие четыре параметра:

1. Креатинин сыворотки крови (C) — показатель функционирования почек. Высокий уровень креатинина указывает на дисфункцию почек. Он измеряется в мг% и изменяется в пределах от 0 до 25.
2. Гематокрит (H) — процент красных кровяных телец в крови. Красные кровяные тельца переносят кислород, и низкий гематокрит обычно связан с нарушениями дыхания или кровообращения. Измеряется в процентах. Изменяется в пределах от 0 до 65.

3. Осмотическое давление сыворотки крови (O) — мера содержания молекул в плазме. Высокое осмотическое давление приводит к обезвоживанию тканей, что отрицательно сказывается на различных органах. Единица измерения — миллиосм. на кг воды. Приблизительная область изменения — от 260 до 400.
4. Систолическое давление крови (P) — давление, создаваемое сердцем и артериями, заставляющее кровь циркулировать по кровеносным сосудам во всем теле. Единица измерения — мм ртутного столба. Приблизительная область изменения — от 0 до 280.

Из буквенных обозначений этих параметров медики часто образуют акроним *CHOP*. Мы покажем, как с помощью знакомой нам формулы расстояний можно получить числовой медицинский показатель *CHOP*.

Рассмотрим два из этих параметров: P (систолическое давление крови) и C (креатинин сыворотки). Среднее значение параметра P для здорового взрослого человека равно 127.0 мм рт. ст. (миллиметров ртутного столба):

$$\bar{P} = 127.0.$$

Следующая формула описывает «расстояние от нормы»:

$$P_D = |P - \bar{P}| = |P - 127.0|.$$

Так, например, если кровяное давление пациента равно $P = 135$, то

$$P_D = 135 - 127 = 8.$$

Точно так же для параметра C среднее значение $\bar{C} = 1.0$ и

$$C_D = |C - \bar{C}| = |C - 1.0|.$$

Рассмотрим пациента, у которого $P = 130$ и $C = 5$. Для этого пациента $P_D = 3$ и $C_D = 4$. Если нанести точку (3.4) на плоскость $P_D C_D$, то легко видеть, что расстояние от этой точки до начала координат равно $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$. Начало координат соответствует показаниям для совершенно здорового индивидуума. Чем больше расстояние от точки (P_D, C_D) до начала координат, тем дальше здоровье пациента от нормы. Формулу

$$N=\sqrt{P_D^2+C_D^2}$$

можно использовать как меру того, насколько близко здоровье пациента к норме.

Рассмотрим пациента, который наблюдается два дня подряд (врач ищет результаты некоторого лечения.

Пример 1:

День	P	C
1	120	2.0
2	143	3.0

В первый день $P_D=7$ и $C_D=1$, так что $N=\sqrt{50}\approx 7.07$, а на следующий день $P_D=16$ и $C_D=2$, так что $N=\sqrt{260}\approx 16.12$. Таким образом, на второй день состояние пациента дальше от нормы, чем в первый день.

Рассмотрим пациента с другими показателями.

Пример 2:

День	P	C
1	149	3.0
2	138	2.0

В первый день $N\approx 22.09$, а на второй день $N\approx$ ≈ 11.05. Таким образом, состояние этого пациента во второй день оказалось ближе к норме, чем в первый.

Как читатель, возможно, уже подозревает, использование N в качестве меры «расстояния» от нормы создает некоторые трудности. Пользуясь величиной N в качестве источника медицинской информации, мы сталкиваемся с определенными проблемами. Поскольку параметр P «велик», а C «мал», величина P оказывает на N большое влияние. Например, рассмотрим следующие данные.

Пример 3:

День	*P*	*C*
1	147	2.0
2	140	4.0

В первый день $N \approx 20.02$, а на второй день $N \approx$ ≈ 13.34. Однако уровень креатинина на второй день, равный 4.0, — это гораздо более серьезный симптом, чем уровень кровяного давления 147 в первый день. В медицинском смысле этот пациент на второй день гораздо дальше от нормы, чем в первый день.

Эту проблему можно решить с помощью нормировки переменных. Если параметр X имеет среднее значение $\bar{X}$, то нормированное значение X, обозначаемое через X_n, получается так:

$$X_n = \frac{X - \bar{X}}{S(X)},$$

где $S(X)$ — это стандартное отклонение. Для параметров P и C установлено, что $S(P) = 21$, а $S(C) =$ $= 0.5$. Следовательно,

$$P_n = \frac{P - \bar{P}}{S(P)} = \frac{P - 127}{21},$$

$$C_n = \frac{C - \bar{C}}{S(C)} = \frac{C - 1.0}{0.5}.$$

Для пациента из примера 3 в первый день $P_n = 0.95$, а $C_n = 2$. Если теперь нанести точку (0.62,6) на P_nC_n-плоскость, то расстояние N_n между этой точкой и началом координат находится по формуле

$$N_n = \sqrt{0.95^2 + 2^2} \approx 2.21.$$

На второй день

$$N_n = \sqrt{0.62^2 + 6^2} \approx 6.03.$$

Таким образом, в этом новом и более точном смысле состояние данного пациента на второй день дальше от нормы, чем в первый день.

Показатель *CHOP*, который сейчас используется в медицине, представляет собой обобщение *N* на четырехмерное пространство с переменными *C*, *H*, *O* и *P*:

$$CHOP = \sqrt{C_n^2 + H_n^2 + O_n^2 + P_n^2},$$

т. е. является расстоянием от точки (C_n, H_n, O_n, P_n) до начала координат в пространстве *CHOP*.

Задача. Используя $\bar{H} = 37.0$, $S(H) = 6.0$, $\bar{O} = 292.0$ и $S(O) = 15.0$, вычислите показатель *CHOP* для следующих пациентов:

Пациент	*C*	*H*	*O*	*P*
1	1.0	37.0	292.0	127.0
2	3.0	25.0	322.0	64.0
3	0.5	43.0	307.0	106.0
4	6.0	13.0	367.0	43.0

Установите на основе показателя *CHOP*, какой пациент находится 1) в самом хорошем состоянии; 2) в самом плохом состоянии.

Фантазия 38

СНОВА О ЛЕКАРСТВАХ

Математика: *разностные уравнения (см. приложение II и фантазию 16)*

Врач установил, что в крови пациента находится 10 единиц некоторого лекарства. Если в течение часа пациент не получит дополнительных инъекций этого лекарства, то к концу этого часа в его организме останется одна треть того количества лекарства, которое было в начале часа. Все остальное будет выведено из организма в виде выделений или нейтрализовано в результате химических реакций в организме. Каждые 24 часа пациент получает инъекцию

10 единиц лекарства. Обозначим через B_k и A_k количества лекарства в организме *до* и *после* k-й инъекции соответственно. Тогда

$$B_{k+1}=(1/3)^{24}A_k \tag{1}$$

и

$$A_k=10+B_k. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем разностное уравнение

$$B_{k+1}=(1/3)^{24}10+(1/3)^{24}B_k. \tag{3}$$

Воспользуемся обычным методом решения подобных уравнений:

1) Перепишем (3) в виде

$$B_{k+1}-(1/3)^{24}B_k=(1/3)^{24}10. \tag{4}$$

2) Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$B_{k+1}-(1/3)^{24}B_k=0,$$

$$B_{k+1}=(1/3)^{24}B_k.$$

Положив $B_0=a$ $(a=\text{const})$, получим

$$B_1=(1/3)^{24}a,$$

$$B_2=(1/3)^{2\cdot 24}a,$$

$$B_3=(1/3)^{3\cdot 24}a$$

и в общем случае

$$B_k=(1/3)^{k\cdot 24}a.$$

3) Предположим, что B_k — постоянное число, равное L. Тогда, подставив его в (4), получим

$$L-(1/3)^{24}L=(1/3)^{24}10,$$

$$L=\frac{(1/3)^{24}10}{1-(1/3)^{24}}$$

(проведите необходимые преобразования).

4) Запишем общее решение уравнения (3):

$$B_k=(1/3)^{k\cdot 24}a+\frac{(1/3)^{24}10}{1-(1/3)^{24}}.$$

Положив $k=0$ и предположив, что $B_0=0$, получим

$$0=a+\frac{(1/3)^{24}\,10}{1-(1/3)^{24}},$$

$$a=-\frac{(1/3)^{24}\,10}{1-(1/3)^{24}}.$$

Таким образом,

$$B_k=(1/3)^{k\cdot 24}\left[-\frac{(1/3)^{24}\,10}{1-(1/3)^{24}}\right]+\frac{(1/3)^{24}10}{1-(1/3)^{24}},$$

$$B_k=\frac{(1/3)^{24}\,10\,[1-(1/3)^{k\cdot 24}]}{1-(1/3)^{24}}$$

(проведите необходимые преобразования). Следовательно,

$$\begin{aligned}A_k&=10+B_k=\\&=10+\frac{(1/3)^{24}\,10\,[1-(1/3)^{k\cdot 24}]}{1-(1/3)^{24}}=\\&=\frac{10\,[1-(1/3)^{(k+1)\cdot 24}]}{1-(1/3)^{24}}\end{aligned}$$

(проведите необходимые преобразования). Таким образом, получаем

$$B_k=\frac{(1/3)^{24}\,10\,[1-(1/3)^{k\cdot 24}]}{1-(1/3)^{24}}$$

и

$$A_k=\frac{10\,[1-(1/3)^{(k+1)\cdot 24}]}{1-(1/3)^{24}}.$$

С ростом k величины $(1/3)^{k\cdot 24}$ и $(1/3)^{(k+1)\cdot 24}$ стремятся к 0. Следовательно, B_k и A_k стремятся соответственно к величинам B и A, которые задаются формулами

$$B=\frac{(1/3)^{24}\,10}{1-(1/3)^{24}}$$

и

$$A=\frac{10}{1-(1/3)^{24}}.$$

Предположим, что в какой-то момент времени количество лекарства в организме перед инъекцией достигает значения B. Тогда сразу же после инъекции в организме окажется

$$10+B=10+\frac{(1/3)^{24}\,10}{1-(1/3)^{24}}=\frac{10}{1-(1/3)^{24}}=A$$

единиц лекарства. Перед следующей инъекцией (через 24 часа) в организме будет

$$(1/3)^{24}A=\frac{(1/3)^{24}\,10}{1-(1/3)^{24}}=B$$

единиц лекарства.

Задача 1. Предположим, что в данный момент в организме находится 6 единиц некоторого лекарства. Если в течение часа пациент не получит дополнительных инъекций этого лекарства, то через час в организме останется $1/2$ исходного количества. Предположим, что каждые 9 часов пациенту вводится 6 единиц лекарства. Пусть B_k и A_k — количества лекарства в организме до и после k-й инъекции соответственно. Найдите A и B. Покажите, что если перед инъекцией количество лекарства в организме достигает значения B, то непосредственно после инъекции в организме окажется A единиц лекарства.

Задача 2. Обобщим задачу из этого раздела следующим образом: предположим, что в данный момент в организме находится n единиц некоторого лекарства. Если в течение часа инъекций этого лекарства не производится, то к концу этого часа в организме остается r-я часть, $0<r<1$, исходного количества. Предположим, что каждые t часов производится инъекция n единиц лекарства. Пусть B_k и A_k — количества лекарства в организме до и после k-й инъекции соответственно. Используя разностные уравнения, найдите компактные выражения для B_k и A_k. Найдите A и B. Покажите, что если количество лекарства в организме перед инъекцией достигает B, то сразу после инъекции его количество окажется равным A, а перед следующей инъекцией в организме будет содержаться B единиц лекарства.

Фантазия 39

В АКВАРИУМЕ

Математика: *разностные уравнения (см. приложение II)*

В аквариуме находится 6 галлонов воды. Каждую неделю один галлон испаряется и в аквариум добавляют один галлон пресной воды. Предположим, что в галлоне пресной воды содержится 0.01 галлона соли. (Число 0.01 выбрано для удобства. На самом деле в пресной воде меньше соли.) Прн испарении воды соль остается. Таким образом, вначале в аквариуме было 0.06 галлона соли. Через неделю, после добавления галлона пресной воды, количество соли составит 0.07 галлоиа. Еще через неделю, после добавления еще одного галлона пресной воды, количество соли будет равным 0.08 и т. д. Получаем следующую таблицу:

Неделя	0	1	2	3	4	5	6
Содержание соли	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12

Итак, содержание соли в воде постоянно растет. В конце концов оно может оказаться настолько большим, что рыба уже не сможет жить в этом аквариуме.

А теперь предположим, что в аквариуме сначала находится 6 галлонов воды и, следовательно, 0.06 галлона соли. Через неделю в нем остается 5 галлоиов воды. Из него выливают один галлон воды и добавляют два галлона пресной воды. В предположении, что соль в воде распределена равномерно, ее содержание теперь составит

$$0.06-\frac{1}{5}(0.06)+0.02=0.8\,(0.06)+0.02=0.068.$$

Еще через неделю из аквариума снова выливают галлон воды и добавляют два галлона пресной воды. Содержание соли теперь составит

$$0.068-\frac{1}{5}(0.068)+0.02=(0.8)(0.068)+0.02=0.0744.$$

Предположив, что процесс продолжается, докажите, что еще через неделю содержание соли в аквариуме станет равным 0.07952 галлона. Таким образом, можно построить следующую таблицу:

Неделя	0	1	2	3
Содержание соли	0.06	0.068	0.0744	0.07952

Студентов попросили предсказать, что произойдет с содержанием соли в этом аквариуме. Предсказания оказались такими:

1) Содержание соли будет продолжать расти, но с меньшей скоростью, чем в том случае, когда мы просто добавляем в аквариум 1 галлон пресной воды каждую неделю (см. рис. 1).

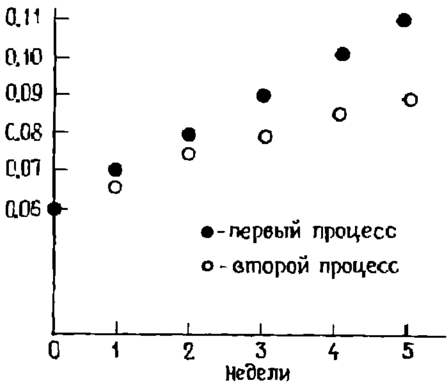


Рис. 1

2) Возможно, в воде окажется столько соли, что через неделю, когда из аквариума возьмут один галлон воды (кроме того галлона, который испарится), количество взятой соли будет больше, чем то, которое добавится с двумя новыми галлонами пресной воды. В результате содержание соли начнет колебаться, как показано на рис. 2.

Один студент заметил, что если содержание соли достигнет 0.1 галлона, то оно навсегда останется таким.

Сформулируем эту задачу следующим образом: обозначим через x_k содержание соли в резервуаре в конце k-й недели после взятия и добавления воды. Тогда

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{5} x_k + 0.02, \\ x_{k+1} &= 0.8 x_k + 0.02, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_0 = 0.06$.

Мы вычислили несколько величин x_k с помощью калькулятора и получили следующую таблицу:

Неделя	**Содержание соли**
0	0.06
1	0.068
2	0.0744
3	0.0795
4	0.0836
5	0.0869
6	0.0895
7	0.0916
8	0.0933
9	0.0946
10	0.0957
11	0.0966
12	0.0973
13	0.0978
14	0.0982
15	0.0986
16	0.0989
17	0.0991
18	0.0993
19	0.0994
20	0.0995

Тенденция совершенно очевидна: содержание соли будет возрастать, постоянно приближаясь к 0.1, но никогда не достигнет этой величины.

Уравнение (1) — это *разностное уравнение*, которое можно решить за следующие шаги:

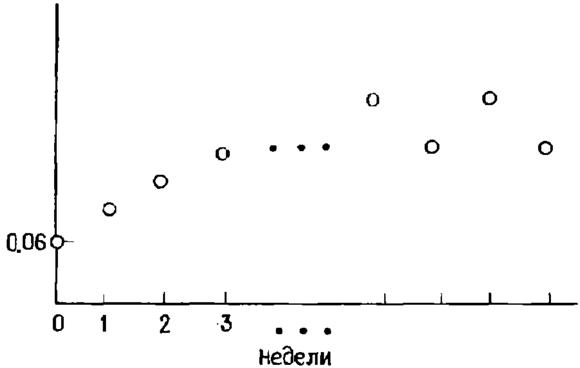


Рис. 2

1) Перепишем уравнение в виде

$$x_{k+1} - 0.8x_k = 0.02. \tag{2}$$

2) Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$x_{k+1} - 0.8x_k = 0,$$
$$x_{k+1} = 0.8x_k.$$

Положив в этом уравнении $x_0 = A$, получим

$$x_1 = 0.8A,$$
$$x_2 = (0.8)^2 A,$$
$$x_3 = (0.8)^3 A$$

и, в общем случае,

$$x_k = (0.8)^k A.$$

3) Предположим, что x_k равно постоянному числу L. Подставив в (2), получим

$$L - 0.8L = 0.02,$$
$$0.2L = 0.02,$$
$$L = 0.1.$$

4) Сложив результаты 2) и 3), запишем

$$x_k = (0.8)^k A + 0.1.$$

Положив $k = 0$, получим

$$0.06 = A + 0.1,$$
$$A = -0.04.$$

Таким образом,

$$x_k = (0.8)^k (-0.04) + 0.1.$$

Итак, мы видим, что

a) содержание соли в аквариуме всегда меньше 0.1 галлона;

b) с увеличением k величина 0.8^k становится все ближе к нулю и, следовательно, содержание соли становится все ближе к 0.1.

Задача 1. Предположим, что в конце каждой недели из аквариума отливают 2 галлона воды и добавляют 3 галлона пресной воды. Составив и решив разностное уравнение, найдите выражение для содержания соли в аквариуме в конце каждой недели. Проанализируйте полученное выражение.

Задача 2. Предположим, что рыба умирает, если содержание соли превышает 0.09 галлона. Сколько галлонов воды надо отливать из аквариума в конце каждой недели, добавляя при этом соответствующее количество пресной воды, чтобы рыба оставалась живой?

Задача 3. Предположим, что рыба умирает, если содержание соли превышает 2 галлона. Сколько воды надо отливать из аквариума в конце каждой недели, добавляя при этом соответствующее количество пресной воды, чтобы рыба оставалась живой?

Фантазия 40

ПАУТИНА

Математика: *разностные уравнения (см. приложение II)*

В этом разделе мы рассмотрим экономическую модель спроса и предложения.

Некий фермер каждый год выращивает пшеницу на продажу. Запасов, которые хранились бы больше года, он не делает. Решение о том, сколько пшеницы сеять, принимается с учетом цен предыдущего года. Если цены высокие, надо сеять больше, а если низкие — меньше. Спрос на пшеницу в течение года зависит от ее цены в момент продажи. Когда цена растет, спрос падает.

Следовательно, если обозначить цену на пшеницу в n-й год через p_n, то s_{n+1} (предложение в $(n+1)$-й год) является функцией от p_n, в то время как d_{n+1} (спрос в $(n+1)$-й год) является функцией от p_{n+1}.

В предположении, что рыночная цена определяется равновесием между спросом и предложением, будем искать такую цену, при которой $s_{n+1}=d_{n+1}$.

Предположим, что

$$s_{n+1}=ap_n-b,$$
$$d_{n+1}=-cp_{n+1}+d,$$

где a, b, c и d — положительные вещественные числа.

Мы хотим описать поведение цен p_1, p_2, p_3, ... в ближайшие годы, если известна первоначальная цена p_0.

Из соотношения $s_{n+1}=d_{n+1}$ и приведенных выше уравнений следует, что

$$ap_n-b=-cp_{n+1}+d,$$
$$p_{n+1}=-\frac{a}{c}p_n+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{c}\right),$$

или, после очевидных подстановок,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -Ap_n + B, \quad A > 0, \quad B > 0, \\ p_{n+1} + Ap_n &= B. \end{aligned} \tag{1}$$

Для того чтобы найти решение, воспользуемся обычным методом: сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$p_{n+1} + Ap_n = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) описывается соотношением

$$p_n = C(-A)^n,$$

где C — константа.

Теперь найдем частное решение уравнения (1), положив $p_n = D$ (константа) для всех n. Подставив это в (1), получим $D + AD = B$, или $D = B/(1 + A)$. Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$p_n = C(-A)^n + \frac{B}{1+A}.$$

Пусть задано p_0. Подставляя $n = 0$ в (3), получаем

$$p_0 = C(-A)^0 \frac{B}{1+A},$$

$$p_0 = C + \frac{B}{1+A},$$

$$C = p_0 - \left[\frac{B}{1+A}\right].$$

Подставляя выражение для C в (3), получаем

$$p_n = p_0(-A)^n + \left(\frac{B}{1+A}\right)[1 - (-A)^n]. \tag{4}$$

Исследуем формулу (4) для трех важных областей значений A.

(1) Предположим, что $0 < A < 1$. Тогда величина $(-A)^n$ по мере увеличения n приближается к нулю и, следовательно, p_n приближается к $B/(1 + A)$. Этот результат можно изобразить геометрически, построив графики функций d_n и s_{n+1} в зависимости от цены p_n (рис. 1).

Начнем с цены p_0. Точка на графике s, соответствующая p_0, дает значение s_1. Двигаясь горизонтально, находим значение d_1 ($d_1 = s_1$). Цена, соответствующая d_1, равна p_1. Этой цене в свою очередь соответствует предложение s_2. Снова двигаясь горизонтально, находим d_2 ($s_2 = d_2$) и продолжаем про-

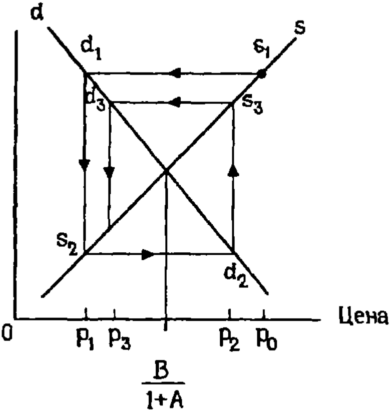


Рис. 1.

цесс. Мы видим, что наша «паутина» стягивается к цене $B/(1+A)$, соответствующей пересечению графиков s и d.

(2) Предположим, что $A = 1$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$p_n = (-1)^n p_0 + \frac{B}{2}[1 - (-1)^n]. \qquad (5)$$

Следовательно,

$$p_1 = -p_0 + B,$$
$$p_3 = -p_0 + B$$

и вообще

$$-p_0 + B = p_1 = p_3 = p_5 = \ldots.$$

Из соотношения (5) видно, что

$$p_2 = p_0, \quad p_4 = p_0$$

и вообще

$$p_0 = p_2 = p_4 = p_6 = \ldots.$$

Геометрически эта ситуация проиллюстрирована на рис. 2.

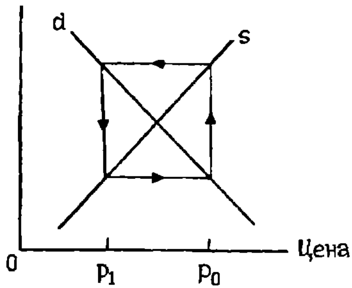


Рис. 2

(3) Предположим, что $A > 1$. Из уравнения (4) видно, что с возрастанием n возрастает амплитуда колебаний p_n. Этот процесс показан на рис. 3.

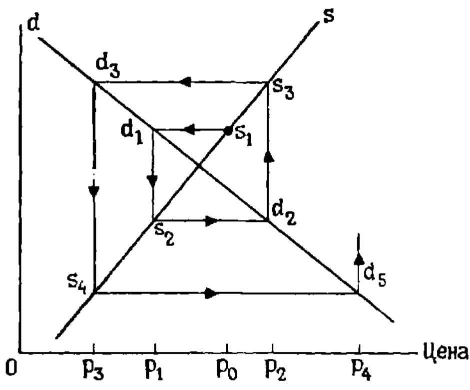


Рис. 3

Сделаем еще несколько замечаний, касающихся данной модели. Заметим, что величина A представляет собой отношение наклонов графиков спроса и предложения. Необходимо подчеркнуть, что мы сделали предположение о линейной зависимости спроса и предложения от цены. Модель, в которой этого предположения не делается, оказывается гораздо сложнее. В таких задачах далеко не всегда удается найти явное решение.

Задача. Проведите аналогичные рассуждения для

$$s_{n+1} = 3p_n - 2,$$
$$d_{n+1} = -6p_{n+1} + 8.$$

Приложение I

НЕРАВЕНСТВО МЕЖДУ СРЕДНИМ АРИФМЕТИЧЕСКИМ И СРЕДНИМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ

Начнем с основного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \tag{1}$$

где $a,\ b \geqslant 0$. Равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда $a = b$. Этот результат легко доказать исходя из известного неравенства

$$(a-b)^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Таким образом,

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$$

и (если прибавить к обеим частям $4ab$)

$$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab,$$
$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$$

Предполагая, что $a, b \geqslant 0$, и извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{3}$$

Равенство в (2) и, следовательно, в (3) достигается тогда и только тогда, когда $a=b$.

Можно показать, что

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}, \tag{4}$$

где a_1, a_2, $a_3 \geqslant 0$. Равенство в (4) достигается тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=a_3$.

Продолжая этот процесс, приходим к неравенству

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \tag{5}$$

где $a_i \geqslant 0$ при $i=1, 2, \ldots, n$. Равенство в (5) достигается тогда и только тогда, когда $a_i=a_j$ для всех i и j. Доказательство неравенства (5) можно найти в книге Slcyer C. W. Algebra and Its Applications. Addison-Wesley, 1970.

Приложение II

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение вида

$$x_{n+1}=ax_n+b, \tag{1}$$

где a и b — константы. Его называют *разностным уравнением*. Решением такого уравнения является последовательность x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ..., где $x_{k+1}=ax_k+b$ при $k=0, 1, 2, \ldots$. Мы приведем пример, иллюстрирующий метод решения разностных уравнений, а затем покажем, что этим методом можно решить любое такое уравнение.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x_{n+1}=2x_n+3, \tag{2}$$

где $x_0 = 4$. Уравнение

$$x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_{n+1} = 2x_n \tag{3}$$

называется *однородным уравнением, соответствующим* разностному уравнению (2). Положим в (3) $x_0 = A = \text{const}$. Тогда

$$x_1 = 2A,$$
$$x_2 = 2^2 A,$$
$$x_3 = 2^3 A$$

и в общем случае

$$x_n = 2^n A. \tag{4}$$

Теперь положим в (2) $x_n = B$ при всех n. Получим

$$B = 2B + 3,$$
$$B = -3.$$

Таким образом,

$$x_n = -3 \tag{5}$$

представляет собой *частное решение* уравнения (2). *Общее решение* разностного уравнения (2) теперь получается в результате сложения решений (4) и (5):

$$x_n = 2^n A - 3. \tag{6}$$

В нашем примере $x_0 = 4$. Подставляя $n = 0$ в (6), получаем

$$4 = A - 3,$$
$$A = 7.$$

Таким образом, при $x_0 = 4$ решение уравнения (2) имеет вид

$$x_n = (2^n)7 - 3. \tag{7}$$

Менее формально, решением уравнения (2) является последовательность

$$4,\ 11,\ 25,\ 53,\ 109,\ \ldots\ .$$

Теперь покажем, что этим методом можно пользоваться и в общем случае. Рассмотрим разностное уравнение

$$x_{n+1}=ax_n+b, \tag{8}$$

где x_0 задано. Заметим, что если $a=1$, то решением этого уравнения будет обычная арифметическая прогрессия

$$x_0,\ x_0+b,\ x_0+2b,\ x_0+3b,\ \dots .$$

Иными словами,

$$x_n=x_0+(n-1)b.$$

Теперь предположим, что в (8) $a\neq 1$. Для уравнения

$$x_{n+1}=ax_n+b \tag{9}$$

запишем соответствующее ему однородное уравнение

$$x_{n+1}=ax_n. \tag{10}$$

Предположим, что в (10) $x_0=A=\text{const}$. Тогда

$$x_1=aA,$$
$$x_2=a^2A,$$
$$x_3=a^3A$$

и в общем случае

$$x_n=a^nA. \tag{11}$$

Теперь положим в (9) $x_n=B$ для всех n. Получим

$$B=aB+b,$$
$$B=\frac{f}{b}\,1-a$$

(напомним, что $a\neq 1$). Другими словами,

$$x_n=\frac{b}{1-a} \tag{12}$$

представляет собой частное решение уравнения (9). Общее решение уравнения (9) получается сложением решений (11) и (12):

$$x_n=a^nA+\frac{b}{1-a}. \tag{13}$$

Поскольку мы предположили, что x_0 задано, подставив в (13) $n=0$, получим

$$x_0 = A + \frac{b}{1-a},$$

$$A = x_0 - \frac{b}{1-a}.$$

Следовательно, (13) принимает внд

$$x_n = a^n\left[x_0 - \frac{b}{1-a}\right] + \frac{b}{1-a}. \tag{14}$$

Теперь покажем, что (14) действительно является решеннем уравнения (9) прн данном x_0. Мы должны показать, что (14) удовлетворяет уравнению

$$x_{n+1} = ax_n + b. \tag{15}$$

По формуле (14)

$$x_{n+1} = a^{n+1}\left|x_0 - \frac{b}{1-a}\right| + \frac{b}{1-a} =$$
$$= a\left(a^n\left[x_0 - \frac{b}{1-a}\right]\right) + \frac{b}{1-a},$$

в то время как

$$ax_n + b = a\left(a^n\left[x_0 - \frac{b}{1-a}\right] + \frac{b}{1-a}\right) + b =$$
$$= a\left(a^n\left[x_0 - \frac{b}{1-a}\right]\right) + \frac{ab}{1-a} + b =$$
$$= a\left(a^n\left[x_0 - \frac{b}{1-a}\right]\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Следовательно, выражение (14) удовлетворяет условию $x_{n+1} = ax_n + b$.

Мы рекомендуем читателю освоить эту технику, но не пытаться запомнить формулу (14).

Пример. Рассмотрнм разностное уравнение

$$x_{n+1} = 0.2x_n + 0.7, \tag{16}$$

где $x_0 = 3$. Соответствующее однородное уравнение нмеет вид

$$x_{n+1} = 0.2 x_n.$$

Еслн $x_0 = A = \text{const}$, то

$$x_1 = 0.2A,$$

$$x_2 = (0.2)^2 A,$$

$$x_3 = (0.2)^3 A$$

и в общем случае

$$x_n = (0.2)^n A. \tag{17}$$

Чтобы найти частное решение, положнм в (16) $x_n = B$ для всех n. Получим

$$B = 0.2B + 0.7,$$

$$B = 7/8.$$

Иными словами, частным решением уравнення (16) является

$$x_n = 7/8. \tag{18}$$

Суммируя (17) и (18), получаем общее решение уравнения (16):

$$x_n = (0.2)^n A + \frac{7}{8}. \tag{19}$$

Зная, что $x_0 = 3$, и полагая в (19) $n = 0$, получаем

$$3 = A + \frac{7}{8},$$

$$A = \frac{17}{8}.$$

Следовательио, решенне уравнения (16) прн $x_0 = 3$ имеет внд

$$x_n = (0.2)^n \left[\frac{17}{8}\right] + \frac{7}{8}.$$

Задача. С помощью описанного метода найдите решение следующих разностиых уравнений:

i) $x_{n+1} = 4x_n - 1, \ x_0 = 3;$

ii) $x_{n+1} = 0.3x_n + 0.4, \ x_0 = 0.6;$

iii) $x_{n+1} = x_n + 0.1, \ x_0 = 2.$

ЧТО ПОЧИТАТЬ НА ДОСУГЕ [1])

Подробную библиографию, посвященную приложениям элементарной математики, можно найти в следующих книгах:

Applications In School Mathematics, 1979 Yearbook, published by the National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 22091.

A Sourcebook of Applications of School Mathematics, published by a joint MAA/NCTM committee, available from the National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 22091.

О современных идеях в прикладной математике можно прочитать в следующих моделях, разработанных и оттестированных при поддержке Национального научного фонда и выпущенных комитетом по усовершенствованию модулей при отделении математики Университета штата Делавэр, Ньюарк, DE 19716:

Cluster analysis: With Applications, Janson Publications, Inc., Providence, RI (на стадии подготовки).

Dynamic Programming: An Elegant Problem Solver, Janson Publications, Inc., Providence, RI, 1987.

Glyphs: Getting the Picture, Janson Publications, Inc., Providence, RI, 1987.

Graph Theory: Euler's Rich Legacy, Janson Publications, Inc., Providence, RI, 1987.

Graphical Estimations: Modern Developments in Curve Fitting, Janson Publications, Inc., Providence, RI (в печати).

Information Theory: Efficient Storage and Transmission, Janson Publications, Inc., Providence, RI (в печати).

Pattern Recognition: With Applications, Janson Publications, Inc., Providence, RI (на стадии подготовки).

Queues: Will This Wait Never End?, Janson Publications, Inc., Providence, RI, 1987.

Mathematical Theory of Search: Janson Publications, Inc., Providence, RI (на стадии подготовки).

Mathematics and Medicine: Hew Serious is the Injury?, Janson Publications, Inc., Providence, RI (на стадии подготовки).

Statistical Bootstrapping: The How and Why, Janson Publications, Inc., Providence, RI (на стадии подготовки).

[1]) К сожалению, на русском языке не существует списка литературы, подобного тому, который издается издательством «Janson Publications». Нашим читателям можно рекомендовать для чтения научно-популярные книги по математике издательств «Мир», «Наука», «Знание», а также журнал «Квант» и книги, выходящие в серии Библиотеки «Кванта». — *Прим. перев.*

Предметный указатель

Содержание

Эта книга отвечает на вопрос, который мучает тех, кому трудно дается математика: "Ну *зачем* все это нужно? *Почему* я должен разбираться во всех этих неравенствах? *Кому* на свете может понадобиться разложение полинома?" Сорок фантазий, собранных в этой книге, убедительно показывают, что математика тесно связана с реальной жизнью.

Тех же, кто любит математику, заинтересует широкий диапазон ее приложений: от составления оптимальных планов производства и обработки результатов медицинских исследований до принятия решения о том, как лучше подстричь свой газон. Эта книга научит вас строить математические модели реальных ситуаций и обрабатывать их таким образом, чтобы получать практические выводы.

ISBN 5-03-002367-4 (русск.)
ISBN 0-939765-004 (англ.)