З.И. ГУРОВА, С.Н. КАРОЛИНСКАЯ,
А.П. ОСИПОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

Под редакцией А.И. Кибзуна

издание второе,
переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов авиационных и ракетно-космических специальностей высших технических учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517
ББК 22.161
Г95

Гурова З. И., Каролинская С. Н., Осипова А. П. **Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами** / Под. ред. Кибзуна А. И. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 352 с. — ISBN 5-9221-0328-8.

Изложены основные сведения из начальных разделов курса математического анализа для втузов — «Введение в анализ», «Основы дифференциального исчисления функций одной переменной», «Методы интегрирования функций одной переменной», «Числовые ряды».

Приведены краткая теория, типовые примеры и задачи для самостоятельного решения. Предложены алгоритмы методов решения различных классов задач.

Пособие может быть использовано и как учебник, и как задачник студентами технических специальностей, курсантами военных училищ, учащимися техникумов и средних школ.

Рецензенты:
кафедра математики Военной академии ракетных войск стратегического назначения имени Петра Великого
(зав. кафедрой, д. т. н., профессор В. В. Блаженков);
д. ф.-м. н., профессор В. М. Пасконов

ISBN 5-9221-0328-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

В 1973 году на факультете прикладной математики Московского государственного авиационного института (технического университета) академиком В. С. Пугачевым была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики. За прошедший период времени на кафедре под научно-методическим руководством В. С. Пугачева были созданы и прочитаны оригинальные учебные курсы по таким дисциплинам, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы», «Математический анализ» и др. На суд читателя выносится серия учебных пособий по трем названным дисциплинам, которые отражают накопленный опыт преподавания этих дисциплин студентам технического университета МАИ, специализирующимся в области прикладной математики, радиоэлектроники, машиностроения и систем управления. Отличительной чертой данных пособий является максимально лаконичное изложение материала при достаточно полном описании современного состояния изучаемых предметов. Кроме того, значительную часть пособий занимают многочисленные примеры и задачи с решениями, что позволяет использовать эти пособия не только для чтения лекционных курсов, но и для проведения практических и лабораторных занятий. Структура изложения курсов такова, что эти пособия могут одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Поэтому пособия могут быть полезны как преподавателям и студентам, так и инженерам.

Проф., д. ф.-м. н. А. И. Кибзун

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие содержит основные сведения из начальных разделов курса математического анализа во втузе. Оно состоит из четырех глав и приложения.

Каждый параграф соответствующей главы включает в себя теорию с иллюстративными примерами, типовые примеры и задачи для самостоятельного решения. В целях доступности изложения доказаны только те теоремы, которые опираются на имеющиеся в пособии сведения. Доказательства некоторых теорем и решения отдельных примеров приведены лишь для частных случаев. Доказательства сложных теорем опущены.

В первой главе изложены краткие сведения из теории множеств, основные понятия и теоремы теории пределов последовательностей и функций одной переменной, различные методы вычисления пределов, свойства и способы исследования непрерывных функций.

Вторая глава содержит основы дифференциального исчисления функций одной переменной: определения, свойства, приложения производной и дифференциала первого и высших порядков, формулы для их вычисления. Приведены основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа, Коши), способы раскрытия неопределенностей различного вида, схема исследования функций и построения их графиков.

В третьей главе даны определения и свойства первообразной и неопределенного интеграла, методы интегрирования заменой переменной и по частям. Глава включает приемы интегрирования рациональных дробей, тригонометрических функций, некоторых иррациональных функций.

Четвертая глава посвящена теории числовых рядов. В ней изложены определения, свойства и основные признаки сходимости рядов с действительными членами. Кроме того, она содержит некоторые сведения о комплексных числах и признаках сходимости последовательностей и рядов с комплексными членами.

В приложении приведены краткие сведения о несобственных интегралах с бесконечными пределами. В конце пособия помещены ответы к задачам для самостоятельного решения.

Для определений, теорем и формул введена двойная нумерация; первое число соответствует номеру параграфу, второе — номеру определения, теоремы или формулы внутри параграфа.

К особенностям данного начального курса относятся:

— краткое изложение теории;

— большое число типовых примеров с подробными решениями;

— алгоритмизация методов решения различных классов задач. Кроме того, содержание каждого параграфа соответствует, как правило, одной лекции и одному занятию в традиционном курсе математического анализа во втузе.

Пособие может служить как учебником, так и задачником с типовыми примерами для студентов технических специальностей, курсантов военных училищ, учащихся техникумов и средних школ.

При подготовке пособия был использован многолетний опыт преподавания авторами курса математического анализа на технических факультетах МАИ.

Авторы благодарны Р. И. Шаюкову за большую работу по набору текста и разработке оригинал-макета настоящей книги.

Г Л А В А I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Некоторые сведения из теории множеств

1.1. Основные понятия. В математике первичными понятиями являются понятия множества и элемента множества. Множества обозначают большими латинскими буквами $A, B, \ldots,$ а их элементы — малыми $a, b, \ldots$ Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ или $A \ni a$. В противном случае пишут $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$. Если элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат множеству A, то записывают $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Определение 1.1. Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A является элементом множества B. Пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A *включено* в множество B или B *включает* A.

Определение 1.2. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывают $A = B$.

Если множество A включено в множество B или совпадает с ним, то пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$.

Если множество A состоит из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то пишут $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Если множество A состоит из элементов, обладающих определенным свойством, то пишут $A = \{a : \ \ldots\}$, где в фигурных скобках после двоеточия записывают указанное свойство. Например, запись $A = \{a : \ a^2 - 1 > 0\}$ означает, что множество A состоит из элементов a таких, что $a^2 - 1 > 0$.

Определение 1.3. Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов. Например, конечно множество дней недели.

Определение 1.4. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Примером бесконечного множества может служить множество всех целых положительных чисел.

Определение 1.5. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

1.2. Операции над множествами.

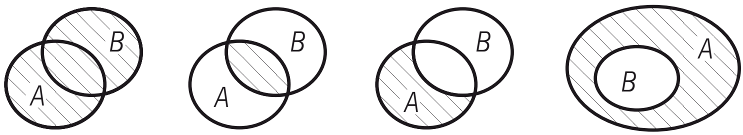
Определение 1.6. Множество C, состоящее из всех элементов двух множеств A и B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается $C = A \cup B$.

Определение 1.7. Множество C, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается $C = A \cap B$.

Определение 1.8. Множество C, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью* множеств A и B и обозначается $C = A \setminus B$.

Определение 1.9. Если множество B является подмножеством множества A, то множество $A \setminus B$ называется *дополнением* B до A.

На рис. 1.1 дана графическая иллюстрация введенных операций над множествами A и B. Заштрихованная часть плоскости соответствует объединению (рис. 1.1, *а*), пересечению (рис. 1.1, *б*), разности (рис. 1.1, *в*) множеств A и B и дополнению множества B до A (рис. 1.1, *г*).



а *б* *в* *г*

Рис. 1.1

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$. Дополнение множества B до множества A не определено, так как множество B не является подмножеством множества A.

1.3. Элементы логической символики. В табл. 1.1 приведены наиболее часто используемые логические символы.

Таблица 1.1

Символ	Значение символа
$\Rightarrow$	«следует»; «выполняется»
$\Longleftrightarrow$	равносильность утверждений, стоящих по разные стороны от символа; «необходимо и достаточно»; «тогда и только тогда»
$\forall$	«для каждого»; «для любого»; «для всякого»; «каждый»; «любой»; «всякий»
$\exists$	«существует»; «найдется»
:	«такой, что»

Так запись $\forall\, x : \ |x| < 2 \ \Rightarrow \ x^2 < 4$ означает: «для каждого x такого, что $|x| < 2$, выполняется неравенство $x^2 < 4$».

1.4. Основные числовые множества. Обычно используют следующие обозначения некоторых числовых множеств:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — *множество натуральных чисел*;

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ — *множество целых чисел*;

$\mathbf{R}$ — *множество действительных чисел.*

Очевидно, что $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.

В табл. 1.2 приведены наиболее часто используемые подмножества множества $\mathbf{R}$. Пусть $x, a, b \in \mathbf{R}$.

Таблица 1.2

Множество	Название	Обозначение
$\{x:\ a \leqslant x \leqslant b\}$	отрезок	$[a, b]$
$\{x:\ a < x < b\}$	интервал	(a, b) или $]a, b[$
$\{x:\ a < x \leqslant b\}$	полуинтервал	$(a, b]$ или $]a, b]$
$\{x:\ a \leqslant x < b\}$	полуинтервал	$[a, b)$ или $[a, b[$
$\{x:\ x \geqslant a\}$	бесконечный полуинтервал	$[a, +\infty)$ или $[a, +\infty[$
$\{x:\ x \leqslant a\}$	бесконечный полуинтервал	$(-\infty, a]$ или $]-\infty, a]$
$\{x:\ x > a\}$	бесконечный интервал	$(a, +\infty)$ или $]a, +\infty[$
$\{x:\ x < a\}$	бесконечный интервал	$(-\infty, a)$ или $]-\infty, a[$
$\{x:\ -\infty < x < +\infty\}$	бесконечный интервал	$(-\infty, +\infty)$ или $]-\infty, +\infty[$

Определение 1.10. Все приведенные в табл. 1.2 множества называют *числовыми промежутками* или, короче, *промежутками*. Промежутки $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, +\infty)$ являются *бесконечными*, а промежутки $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ — *конечными*. Числа a и b называют *концами*, а число $b - a$ — *длиной* конечного промежутка.

1.5. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел. Окрестность точки.

Определение 1.11. Прямая, на которой выбраны направление, начало отсчета — точка O — и масштаб, называется *числовой осью*. Между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно-однозначное соответствие: числу $m \in \mathbf{R}$ соответствует на оси точка M с абсциссой m. И обратно, каждой точке M числовой оси соответствует число $m \in \mathbf{R}$ — абсцисса этой точки. Точка M лежит справа от точки O, если $m > 0$; слева от точки O, если $m < 0$;

совпадает с точкой O, если $m = 0$. Поэтому действительные числа часто называют *точками*, что позволяет геометрически изображать числовые промежутки на числовой оси.

Определение 1.12. Любой интервал числовой оси, содержащий данную точку a, называют *окрестностью* этой точки и обозначают $\mathrm{O}(a)$. Если этот интервал симметричен относительно точки a и имеет длину 2ε, то его называют *ε-окрестностью* точки a и обозначают $\mathrm{O}_\varepsilon(a)$. Очевидно, что любая точка $x \in \mathrm{O}_\varepsilon(a)$ удовлетворяет неравенствам $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Определение 1.13. Правой (левой) *δ-полуокрестностью* точки a называют интервал $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ и обозначают $\mathrm{O}_\delta^+(a)$ $(\mathrm{O}_\delta^-(a))$.

Определение 1.14. Окрестность точки a без самой точки a называют *проколотой окрестностью* этой точки и обозначают $\mathrm{O}(a) \setminus a$.

Определение 1.15. Множество значений x, для которых $|x| > M$, где $M > 0$ — некоторое число, называют *M-окрестностью* символа ∞ и обозначают $\mathrm{O}_M(\infty)$. Множество значений $x > M$ (или $x < M$), где $M \in \mathbf{R}$, называют *M-окрестностью* символа $+\infty$ (или $-\infty$) и обозначают $\mathrm{O}_M(+\infty)$ (или $\mathrm{O}_M(-\infty)$).

Определение 1.16. Точка a называется *внутренней* точкой множества A, если существует окрестность этой точки, содержащая точки только этого множества и не содержащая точек, не принадлежащих множеству A. Точка a называется *граничной* точкой множества A, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие множеству A.

Например, $x = 1$ для полуинтервала $[0, 2)$ есть внутренняя точка, $x = 0$, $x = 2$ — граничные точки, причем точка $x = 0$ принадлежит данному полуинтервалу, а точка $x = 2$ — не принадлежит.

1.6. Ограниченные и неограниченные множества.

Определение 1.17. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным сверху*, если $\exists\, M \in \mathbf{R}:\ x \leqslant M\ \ \forall x \in A$.

Определение 1.18. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным снизу*, если $\exists\, m \in \mathbf{R}:\ x \geqslant m\ \ \forall x \in A$.

Определение 1.19. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу, т. е. $\exists\, m, M \in \mathbf{R}:$ $m \leqslant x \leqslant M\ \ \forall x \in A$. Из этого определения следует, что множество $A \subset \mathbf{R}$ ограничено, если $\exists\, c > 0$, $c \in \mathbf{R}:\ |x| \leqslant c\ \ \forall x \in A$.

Определение 1.20. Множество, не являющееся ограниченным, называется *неограниченным*.

Например, множество $A = \{x:\ x < 2\}$ ограничено сверху, так как $x < 2\ \ \forall x \in A$ $(M = 2)$. Множество $A = \{n:\ n \in \mathbf{N}\}$ ограничено снизу, так как $n \geqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \quad (m = 1)$. Ограниченными являются множества точек отрезка, конечного интервала или конечного полуинтервала. Множество $A = \{x_n : \ x_n = \dfrac{1}{n}, \ n \in \mathbf{N}\}$ ограничено, так как $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, или $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \quad (c = 1)$.

Множество $A = \{x : \ |x - 2| \geqslant 1\}$, состоящее из элементов x, для которых $x \geqslant 3$ или $x \leqslant 1$, является неограниченным.

1.7. Типовые примеры.

Пример 1. Записать множество

$$A = \{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0, \ x \in \mathbf{R}\},$$

перечислив его элементы.

Решение. Элементами множества A являются корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Разложим левую часть этого уравнения на множители: $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$. Следовательно, $A = \{0, 1, 2\}$. ■

Пример 2. Записать множество

$$A = \left\{x : \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5, \ x \in \mathbf{Z}\right\},$$

перечислив его элементы.

Решение. Запишем данные неравенства в виде $2^{-2} \leqslant 2^x < 5$. Логарифмируя все части неравенств по основанию 2, получим $-2 \leqslant x < \log_2 5$. По условию $x \in \mathbf{Z}$. Тогда в силу последних неравенств имеем $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. ■

Пример 3. Проверить, будут ли равны множества $A = \{1, 4, 8, 12\}$ и $B = \{4, 1, 12, 8\}$.

Решение. Данные множества равны, так как они состоят из одних и тех же элементов. ■

Пример 4. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{x : -1 < x \leqslant 2\}$, $B = \{x : 1 \leqslant x < 4\}$, $x \in \mathbf{R}$.

Решение. $A \cup B = \{x : -1 < x < 4\}$; $A \cap B = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$; $A \setminus B = \{x : -1 < x < 1\}$; $B \setminus A = \{x : 2 < x < 4\}$. ■

Пример 5. Является ли ограниченным снизу множество $A = \{x : x^2 + 1 > 0, \ x \in \mathbf{R}\}$?

Решение. Неравенство $x^2 + 1 > 0$ выполняется при любом $x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. не существует числа m такого, что $\forall x \in A$ выполнялось бы неравенство $x \geqslant m$. Следовательно, множество A не является ограниченным снизу. ■

Пример 6. Ограничено ли сверху множество точек полуинтервала $[2, 10)$?

Решение. Ограничено, так как $x < 10$ для любого $x \in [2, 10)$. ■

Пример 7. Какие из указанных ниже множеств ограничены?

$$A_1 = \{x : 0 < x < 1\}; \qquad A_4 = \{x : x \in [1,3]\};$$
$$A_2 = \{x : x \in \mathbf{N}\}; \qquad A_5 = \{x : x \in ([1,2] \cup [1,+\infty))\};$$
$$A_3 = \{x : |x| > 1\}; \qquad A_6 = \{x : x \in [-3,8) \cup (-1,9]\}.$$

Решение. Множества A_1, A_4, A_6 ограничены. Действительно, для множества A_1 существует число c (например, $c = 1$) такое, что $|x| < c \quad \forall\, x \in A_1$. Для множества A_4 таким числом будет, например, число $c = 3$, так как $|x| \leqslant 3 \quad \forall\, x \in A_4$. Для множества A_6 число $c = 9$, так как $|x| \leqslant 9 \quad \forall\, x \in A_6$. Множества A_2, A_3, A_5 неограничены.

1.8. Задачи для самостоятельного решения.

1. Записать множество
$$A = \{x : x^2 - 3x - 4 \leqslant 0,\ x \in \mathbf{N}\},$$
перечислив его элементы.

2. Записать множество всех действительных чисел x, элементами которого не являются корни уравнения $x^2 - 9x + 20 = 0$.

3. Найти объединение множеств A и B, если $A = \{x : x^2 + 2x - 3 \leqslant 0\}$, $B = \{x : x^2 - 6x - 16 > 0\}$.

4. Найти пересечение множеств A и B, если $A = \{x : (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$, $B = \{x : (x-2)(x^2 - x) = 0\}$.

5. Найти разность множеств A и B, если $A = \{x : x > 0,\ x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x : |x| < 1,\ x \in \mathbf{R}\}$.

6. Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными снизу?

$$A_1 = \{x : |x| > 1\}; \qquad A_6 = \{x : 0 \leqslant x < +\infty\};$$
$$A_2 = \{x : |x| < 1\}; \qquad A_7 = \{1, 10, 100, 1000\};$$
$$A_3 = \{x : x < 0\}; \qquad A_8 = \{x : x(x-5) < 0\};$$
$$A_4 = \{x : -4 < x \leqslant 3\}; \qquad A_9 = \{x : x \in (-\infty, -1]\};$$
$$A_5 = \{x : -\infty < x < 0\}; \qquad A_{10} = \left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

7. Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными сверху?

$$B_1 = \left\{x : x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbf{N}\right\}; \qquad B_6 = \left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\right\};$$
$$B_2 = \{x : x^2 - 6x + 8 = 0\}; \qquad B_7 = \left\{x : \cos x \sin x = \frac{1}{2}\right\};$$
$$B_3 = \{x : (x-1)(x+2) > 0\}; \qquad B_8 = \{x : x \in [1,8]\};$$
$$B_4 = \{x : 0 < x < 1\}; \qquad B_9 = \{x : x \in (-\infty, +\infty)\}.$$
$$B_5 = \{x : x^2 - 3x < 0\};$$

8. Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными?

$$C_1 = \{x : |x| > 2\}; \qquad C_5 = \{x : |x| \leqslant 1\};$$
$$C_2 = \{x : -x^2 + 2x + 8 < 0\}; \qquad C_6 = \{x : x \in (-1, 10)\};$$
$$C_3 = \left\{x : x = 1 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbf{N}\right\}; \qquad C_7 = \{x : x \in (4, 6]\}.$$
$$C_4 = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbf{N}\};$$

§ 2. Числовые последовательности. Предел последовательности

2.1. Основные определения.

Определение 2.1. Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(n \in \mathbf{N})$ поставлено в соответствие по определенному закону некоторое действительное число $x_n \in \mathbf{R}$. Тогда множество занумерованных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *числовой последовательностью* или *последовательностью* и обозначается символом $\{x_n\}$, т.е. $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Отдельные числа x_n называются элементами или членами последовательности $\{x_n\}$.

Приведем примеры последовательностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$;

3) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \ldots\}$;

4) $\left\{\dfrac{2n-1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \ldots\right\}$.

Определение 2.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие — *строго монотонными*.

Укажем примеры таких последовательностей:

1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ — убывающая (строго монотонная) последовательность;

2) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... — неубывающая (монотонная) последовательность;

3) 2, 4, 6, 8, 10, ... — возрастающая (строго монотонная) последовательность;

4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ — невозрастающая (монотонная) последовательность;

5) последовательность $-1, 1, -1, \ldots$ не является ни монотонной, ни, тем более, строго монотонной;

6) последовательность $1, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{4}, 5, -\frac{1}{6}, \ldots$ также не является монотонной.

Пример 2.1. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$, $n \in \mathbf{N}$, строго убывает начиная с $n = 2$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)!\, 2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Очевидно, что при $n \geqslant 2$ справедливы неравенства $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{2}{3} < 1$. Следовательно, $x_{n+1} < x_n$ при $n \geqslant 2$, т. е. данная последовательность убывает начиная с $n = 2$. ■

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists\, M \in \mathbf{R}: \ x_n \leqslant M \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ (см. определение 1.17).

Определение 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если $\exists\, m \in \mathbf{R}: \ x_n \geqslant m \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ (см. определение 1.18).

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists\, c > 0, \ c \in \mathbf{R}: \ |x_n| \leqslant c \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$.

Например, последовательность $\{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ ограничена сверху, так как $x_n = -n < 0 \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ $(M = 0)$. Последовательность $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ограничена снизу, так как $x_n = n \geqslant 1$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(m = 1)$. Последовательность $\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}$ ограничена, так как $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, или $\left| \frac{1}{n} \right| \leqslant 1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(c = 1)$.

Определение 2.6. Пусть задана произвольная последовательность $\{x_n\}$. Тогда любая последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$ из элементов x_n, где n_k образует возрастающую последовательность натуральных чисел $(n_k \in \mathbf{N}, \ n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$, называется *подпоследовательностью* исходной последовательности $\{x_n\}$.

Так, для последовательности $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$ последовательность $\{x_{n_k}\} = \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$ является ее подпоследовательностью.

2.2. Предел последовательности.

Определение 2.7. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

В символической форме это определение имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff$$
$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \ \forall\, n > n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с номера $n_0 + 1$ все члены x_n последовательности попадут в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. В этом интервале будет лежать бесконечное множество членов последовательности $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots,$ а вне интервала — конечное число членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ (рис. 2.1).

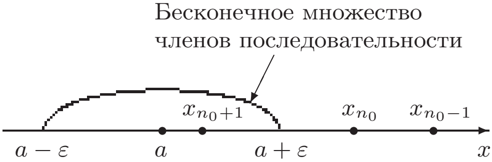


Рис. 2.1

Пример 2.2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.7, следует найти для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ номер n_0 такой, что $\forall\, n > n_0$ выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$. Из последнего неравенства находим

$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \quad \text{или} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если положить $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где символом $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ обозначена целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то при всех $n > n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ $(n \in \mathbf{N})$ будут справедливы неравенства

$$n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ найден номер $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$, или, по определению 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$, что и требовалось доказать. ■

Пусть $\varepsilon = 0.1$. Тогда

$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < 0.1.$$

Отсюда $n > 10$ и $n_0 = 10$. Очевидно, что $a - \varepsilon = 1.9$, $a + \varepsilon = 2.1$. Следовательно, все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > n_0 = 10$ лежат в интервале $(1.9, 2.1)$, а члены с номерами $n \leqslant n_0 = 10$ — вне этого интервала (рис. 2.2).

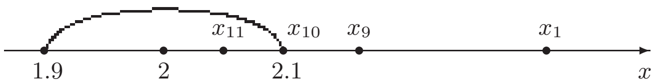


Рис. 2.2

Для $\varepsilon = 0.01$ найдем: $\dfrac{1}{n} < 0.01$, $n > 100$, $n_0 = 100$, $a - \varepsilon = 1.99$, $a + \varepsilon = 2.01$. Следовательно, члены x_n с номерами $n > n_0 = 100$ лежат в интервале $(1.99, 2.01)$, а члены с номерами $n \leqslant n_0 = 100$ — вне этого интервала.

Таким образом, различным значениям ε соответствуют различные значения n_0, т. е., действительно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Определение 2.8. Предел последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ равен бесконечности, если для любого числа $M > 0$ существует номер $n_0 = n_0(M) \in \mathbf{N}$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n| > M$. Пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad \text{или} \quad x_n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

В символической форме это определение имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0(M) \in \mathbf{N}:\ \forall\, n > n_0 \ \Rightarrow\ |x_n| > M.$$

Последнее неравенство равносильно двум неравенствам: $x_n < -M$, $x_n > M$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется номер $n_0(M)$ такой, что начиная с номера $n_0 + 1$ все члены x_n последовательности будут лежать вне отрезка $[-M, M]$. Этому отрезку будет принадлежать лишь конечное число членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Приведенные ниже определения пределов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ даны только в символической форме.

Определение 2.9.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall M \quad \exists n_0(M) \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

Определение 2.10.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall M \quad \exists n_0(M) \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < M.$$

Геометрическую интерпретацию двух последних пределов можно дать аналогично случаю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Пример 2.3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n} = \infty$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.8, требуется для произвольно заданного числа $M > 0$ найти номер $n_0 > 1$ такой, что при всех $n > n_0$ выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{n^2-1}{n}\right| > M$. Из этого неравенства находим: $\dfrac{n^2-1}{n} > M$, $n^2 - Mn - 1 > 0$. Отсюда заключаем, что если принять $n_0(M) = \left[\dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}\right] > 1$, то при всех $n > n_0$ будут справедливы неравенства: $n > \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}$, $n^2 - Mn - 1 > 0$, $\dfrac{n^2-1}{n} > M$, $\left|\dfrac{n^2-1}{n}\right| > M$ $(n \in \mathbf{N},\ n > 1)$. Таким образом, по определению 2.8, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n} = \infty$, что и требовалось доказать. ■

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k; \\ \dfrac{2n+1}{n}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(см. пример 2.2). Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ 2, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. x_n не стремится к какому-либо числу при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность *не имеет предела*.

Определение 2.11. Последовательность $\{x_n\}$, имеющая конечный предел a, называется *сходящейся*.

В этом случае говорят, что последовательность сходится к числу a.

Так, последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}$ сходится к числу $a = 2$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$ (см. пример 2.2).

Определение 2.12. Последовательность, имеющая бесконечный предел или вообще не имеющая предела, называется *расходящейся.*

Например, последовательности $\{x_n\} = \{n^2\}$ и $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ — расходящиеся, так как $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует.

2.3. Свойства сходящихся последовательностей.

Приведем основные теоремы о сходящихся последовательностях.

Теорема 2.1 (*о единственности предела*). Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2.2 (*об ограниченности сходящейся последовательности*). Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 2.3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n \leqslant y_n \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, то $a \leqslant b$.

Теорема 2.4 (*о промежуточных значениях*). Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Теорема 2.5 (*о сходимости монотонной ограниченной последовательности*). Всякая неубывающая (невозрастающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность сходится.

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. последовательность может сходиться и не быть монотонной.

Например, последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, что можно установить исходя из определения 2.7. Однако эта последовательность не является монотонной.

Замечание 2.1. Теорема 2.5 остается в силе для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и неубывающей (невозрастающей) начиная с некоторого номера.

Теорема 2.6 (*о сходимости подпоследовательности*). Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a, то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к тому же числу a.

Теорема 2.7 (*об арифметических действиях над сходящимися последовательностями*). Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

сходятся. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \text{ если } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

З а м е ч а н и е 2.2. Сходимость (расходимость) последовательности не нарушится, если все члены последовательности, начиная с некоторого номера, уменьшить или увеличить на одно и то же число.

Т е о р е м а 2.8 (*критерий Коши*[1] *сходимости последовательности*). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists$ номер n_0 такой, что $\forall\, n > n_0$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполнялось неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

П р и м е р 2.4. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, расходится.

Р е ш е н и е. Для произвольного $p \in \mathbf{N}$ запишем

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}.$$

Полагаем $p = n$. Тогда $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+(n-1)} + \dfrac{1}{n+n}$. Учитывая, что в последней сумме $\dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{n+n}$, $\dfrac{1}{n+2} > \dfrac{1}{n+n}$, $\ldots$, $\dfrac{1}{n+(n-1)} > \dfrac{1}{n+n}$, получим

$$|x_{n+p} - x_n| > \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n}}_{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $p = n$ не существует указанного в теореме 2.8 номера n_0, так как $|x_{n+p} - x_n| > \dfrac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. В силу критерия Коши последовательность $\{x_n\}$ расходится. ■

[1] О. Коши́ (1789–1857) — французский математик.

2.4. Типовые примеры.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.7, для произвольно заданного $\varepsilon>0$ следует найти номер $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ такой, что $\forall\, n>n_0$ выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. Из последнего неравенства имеем

$$\left|\frac{3n+2}{n+1}-3\right|=\left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

Отсюда $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. Полагаем $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$.

Убедимся, что этот номер n_0 — искомый. Действительно, если $n>n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$, то $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$ $(n\in\mathbf{N})$, $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Тогда $\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}\right|=\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Следовательно, найден номер n_0 такой, что $\forall\, n>n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$ и $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. Таким образом, по определению 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$, что и требовалось доказать. ■

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0\quad(a>1)$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.7, для произвольно заданного $\varepsilon>0$ требуется найти номер $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ такой, что $\forall\, n>n_0$ выполнялось бы неравенство $\dfrac{1}{a^n}<\varepsilon$ $(a>1)$. Отсюда $a^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n>\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}$. Полагаем $n_0=\left[\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Тогда $\forall\, n>n_0=\left[\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ и $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{a^n}=\left|\dfrac{1}{a^n}-0\right|<\varepsilon$. Следовательно, по определению 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0$ $(a>1)$, что и требовалось доказать. ■

2.5. Задачи для самостоятельного решения.

Доказать, что

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}=1$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{n^2+1}=5$; **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n+1}=1$.

§ 3. Функции. Предел функции

3.1. Основные определения. Способы задания функций. Определение 3.1. Пусть даны два множества — X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по определенному закону единственный элемент $y \in Y$, то это соответствие называется *функцией* или *отображением* множества X во множество Y. Обычно это отображение обозначается одним символом f или в виде $y = f(x)$.

При этом элемент x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а соответствующий элемент y — *зависимой переменной* или *функцией*. Множество X называется *областью определения* функции $y = f(x)$ и обозначается D_y или D_f. Множество значений функции $y = f(x)$ называется *областью значений* этой функции и обозначается R_y или R_f. Очевидно, что $R_y \subseteq Y$.

Отметим, что одним и тем же словом «функция» называют как само отображение множества X во множество Y, так и зависимую переменную y.

Если $R_y \neq Y$, то соответствие f называется отображением X *в* Y, если $R_y = Y$ — отображением X *на* Y.

Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется *действительной функцией действительного аргумента* x, если $D_y \subseteq \mathbf{R}$ и $R_y \subseteq \mathbf{R}$.

Например, действительной функцией действительного аргумента x будет функция $y = 5 + \sqrt{x}$. В данном случае $D_y = \{x: \ x \geqslant 0\}$, $R_y = \{y: \ y \geqslant 5\}$.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ (см. § 2) есть функция натурального аргумента, т. е. $x_n = f(n)$, для которой $D_f = \mathbf{N}$, $R_f \subset \mathbf{R}$. Например, $f_1(n) = (-1)^n\sqrt{n}$, $f_2(n) = \cos n$.

Основными способами задания функций являются аналитический, графический и табличный.

Способ задания функции называется *аналитическим*, если функция задана с помощью аналитического выражения, т. е. с помощью одной или нескольких формул, устанавливающих связь между значениями аргумента и соответствующими значениями функции.

Ниже приведены примеры таких функций:

1) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (рис. 3.1)[1];

2) $y = x^3 + 2x + 1, \ x \in \mathbf{R}$;

3) $y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

[1] sign — от лат. *signum* — знак.

4) $y = [x]$, $x \in \mathbf{R}$. Символом $[x]$ обозначают наибольшее целое число, не превосходящее x (рис. 3.2). Так, $[3.7] = 3$, $[-5.4] = -6$.

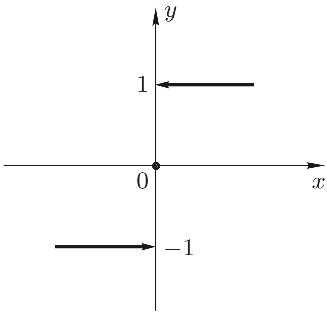


Рис. 3.1

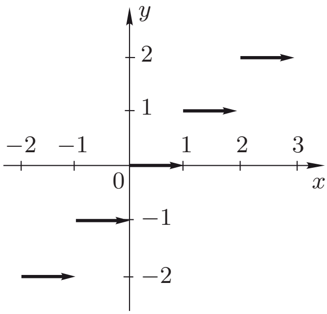


Рис. 3.2

Отметим, что если функция $y = f(x)$ задана аналитически и не указана ее область определения D_y, то под D_y понимают множество всех тех значений x, при которых $f(x)$ принимает действительные значения.

Графическим называется способ задания функции, при котором соответствие между множеством значений аргумента и множеством значений функции устанавливается графически.

Например, барограмма, записанная барографом, задает графически атмосферное давление как функцию времени.

Способ задания функции называется *табличным*, если задана таблица значений аргумента и соответствующих значений функции.

Например, зависимость температуры воздуха от времени может быть задана с помощью таблицы экспериментальных данных.

Кроме указанных способов задания функции, существуют и другие. Например, при проведении численных расчетов на компьютерах функции задаются *алгоритмическим способом*, т. е. с помощью программы вычисления их значений при требуемых значениях аргумента. Функцию можно задать также и *словесным описанием* соответствия между значениями аргумента и значениями функции. Например, «каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — 0...». Определенная таким образом функция называется *функцией Дирихле*[2].

3.2. Сложная, обратная и параметрически заданная функции.

Определение 3.3. Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве D_φ, функция $y = f(u)$ — на множестве D_f. Поставим

[2]П.Г.Л. Дирихле́ (1805–1859) — немецкий математик.

в соответствие каждому значению $x \in D_\varphi$, где $\varphi(x) = u \in D_f$, значение $y = f(u)$. В результате получим функцию $y = f(\varphi(x))$, определенную на множестве $D_y \subseteq D_\varphi$. Эту функцию называют *сложной функцией* аргумента x, или *суперпозицией* (*композицией*) функций f и φ. При этом переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* функции $y = f(\varphi(x))$.

Подчеркнем, что в область определения D_y сложной функции $y = f(\varphi(x))$ входят те и только те значения $x \in D_\varphi$, для которых $\varphi(x) \in D_f$.

Например, если $y = \ln u$, $u = 5 - x^2$, то $y = \ln(5 - x^2)$ — сложная функция аргумента x, определенная на множестве $D_y = \{x:\ -5 < < x < 5\}$. Здесь $D_\varphi = \{x:\ -\infty < x < +\infty\}$, $D_f = \{u:\ u > 0\}$.

Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов. Например, $y = y(u)$, $u = u(v)$, $v = v(w)$, $w = w(x)$. Так, функцию $y = 2^{\sin^3 \sqrt{x}}$ можно рассматривать как суперпозицию следующих функций: $y = 2^u$, $u = v^3$, $v = \sin w$, $w = \sqrt{x}$, причем $D_y = = \{x:\ x \geqslant 0\}$.

Определение 3.4. Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения D_y и областью значений R_y. Предположим, что каждому элементу $y \in R_y$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D_y$, для которого $y = f(x)$. Полученную однозначную функцию $x = \varphi(y)$, для которой $D_x = R_y$, $R_x = D_y$, называют *обратной* к функции $y = f(x)$ и обозначают f^{-1} или $x = f^{-1}(y)$.

Если для функции f употребляют термин «отображение», то для функции f^{-1} — термин «обратное отображение». Функции f и f^{-1} называют *взаимно обратными*. Очевидно, что $f(f^{-1}(y)) = y$.

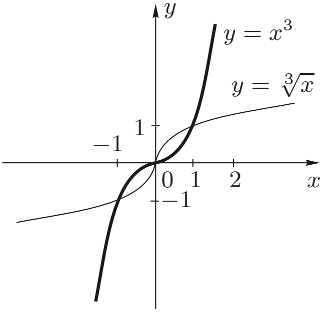


Рис. 3.3

Зададим функцию $y = x^3$ на отрезке $[1, 2]$. Тогда $D_y = [1, 2]$, $R_y = [1, 8]$. Из уравнения $y = x^3$ для любого $y \in [1, 8]$ можно найти единственное значение $x = = \sqrt[3]{y} \in [1, 2]$. Следовательно, функция $x = \sqrt[3]{y}$ отображает множество $R_y = = D_x$ на множество $D_y = R_x$ и является обратной к функции $y = x^3$.

Если функцию, обратную к функции $y = f(x)$, обозначить $y = f^{-1}(x)$, то графики функций $y = f(x)$ и $y = = f^{-1}(x)$ в одной системе координат будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. На рис. 3.3 изображены графики функции $y = = x^3$ и обратной к ней функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Некоторые функции не имеют обратных. Например, функция $y = x^2$, если ее рассматривать на всей числовой оси, не имеет обратной функции, так как каждому значению $y > 0$ соответствуют два значения x: $x = \sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$. Если же функцию $y = x^2$ рассматривать только на полупрямой $[0, +\infty)$, то для нее существует обратная функция $x = \sqrt{y}$, так как каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует единственное значение $x \in [0, +\infty)$, удовлетворяющее уравнению $y = x^2$. На полупрямой $(-\infty, 0]$ функция $y = x^2$ также имеет обратную функцию, определяемую формулой $x = -\sqrt{y}$.

Определение 3.5. Пусть на некотором множестве T заданы две функции: $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $t \in T = D_x = D_y$, $R_x = X$, $R_y = Y$. Предположим, что каждому значению $x = x(t) \in X$ поставлено в соответствие значение $y = y(t) \in Y$, отвечающее тому же значению t, что и $x(t)$. Полученное соответствие есть функция f, определенная на множестве X со значениями во множестве Y. В этом случае говорят, что функция f *задана параметрически* в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Переменная t, от которой зависят x и y, называется *параметром*.

Так, функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (графиком которой служит верхняя половина окружности радиуса R с центром в начале координат) может быть задана параметрически в виде $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, \pi]$.

Подчеркнем, что в определении 3.5 функции $x(t)$ и $y(t)$ равноправны.

Отметим, что существуют кривые, которые задаются только в параметрическом виде. К таким кривым относится циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbf{R}$. Ее графиком служит траектория точки окружности, катящейся без скольжения по оси Ox (рис. 3.4).

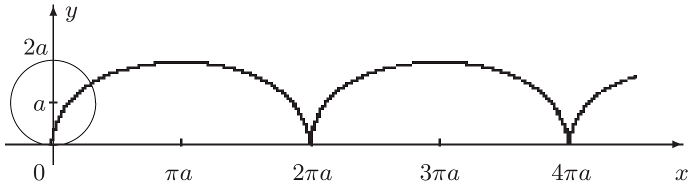


Рис. 3.4

3.3. Элементарные функции.

Определение 3.6. *Основными элементарными функциями* называются: постоянная $y = C$, степенная $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, показательная $y = a^x$ $(a > 0)$, логарифмическая $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. В дальнейшем свойства и графики основных элементарных функций предполагаются известными.

Определение 3.7. Функция, которую можно задать в виде аналитического выражения с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *элементарной функцией.*

Элементарными являются, например, функции:

1) $y = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

2) $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$;

4) $y = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

К элементарным функциям относятся, в частности, многочлены, рациональные и иррациональные функции.

Определение 3.8. *Многочленом* $P(x)$ называется функция вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}.$$

Если $a_n \neq 0$, то $P(x)$ называется *многочленом n-й степени.* Часто его обозначают $P_n(x)$, а число n называют *степенью многочлена.* Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то его называют *нулевым многочленом.*

Определение 3.9. *Рациональной* функцией (или дробью) называется функция $R(x)$, которая может быть представлена в виде $R(X) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, причем $m \geqslant 1$. Эта функция определена при всех x, для которых $Q_m(x) \neq 0$.

Определение 3.10. *Иррациональной*, т. е. не являющейся рациональной, называется функция, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций рациональных функций и степенных функций с дробными рациональными показателями.

Иррациональными являются, например, функции

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1},\ x \in \mathbf{R}; \quad y = \frac{x - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt{1 + x^2}},\ x \in \mathbf{R}.$$

Рациональные и иррациональные функции принадлежат классу *алгебраических*[3] функций. Примерами неалгебраических, или *трансцендентных*, функций являются показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

---

[3] Определение алгебраической функции см., например, в [1].

3.4. Монотонные функции.

Определение 3.11. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на некотором интервале, если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$. Неубывающая и невозрастающая функции называются *монотонными*.

Определение 3.12. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором интервале, если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Возрастающая и убывающая функции называются *строго монотонными*.

Так, функция $y = 2^x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y = x^2$ убывает на интервале $(-\infty, 0)$ и возрастает на интервале $(0, +\infty)$.

3.5. Ограниченные функции.

Определение 3.13. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* в области D_f, если ограничено сверху сверху множество ее значений в этой области, т.е. если $\exists\, M \in \mathbf{R}:\ f(x) \leqslant M\ \ \forall\, x \in D_f$ (см. определение 1.17).

Определение 3.14. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу* в области D_f, если ограничено снизу множество ее значений в этой области, т.е. если $\exists\, m \in \mathbf{R}:\ f(x) \geqslant m\ \ \forall\, x \in D_f$ (см. определение 1.18).

Определение 3.15. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в области D_f, если ограничено множество ее значений в этой области. Другими словами, функция $f(x)$ ограничена на D_f, если $\exists\, c > 0, c \in \mathbf{R}:\ |f(x)| \leqslant c\ \ \forall\, x \in D_f$ (см. определение 1.19).

Приведем несколько примеров.

1. Функция $f(x) = e^x$ определена на всей числовой прямой, т.е. $D_f = (-\infty, +\infty)$, и $\forall\, x \in D_f$ выполняется неравенство $e^x > 0$. Поэтому данная функция ограничена снизу в области D_f $(m = 0)$.

2. Функция $f(x) = 2 - x^4$ определена на всей числовой оси, т.е. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Для любого $x \in D_f$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant 2$. Следовательно, функция $f(x)$ ограничена сверху в области D_f $(M = 2)$.

3. Функция $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ определена в области $D_f = \{x:\ |x| \leqslant 1\}$. Так как для любого $x \in D_f$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant 1$, то функция $f(x)$ ограничена на D_f $(c = 1)$.

Определение 3.16. Функция $f(x)$ называется *ограниченной в окрестности* $\mathrm{O}(a)$ *точки* a, если существует число $c > 0$ такое, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$, т. е. $\exists\, c > 0: \ |f(x)| \leqslant c \ \ \forall\, x \in \mathrm{O}(a)$.

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в ε-окрестности точки $a = 1$ при $\varepsilon = 0.1$. Очевидно, что $\mathrm{O}_\varepsilon(1)$ есть интервал $(0.9, 1.1)$. Неравенство $x^2 < 1.21$ выполняется для любой точки $x \in \mathrm{O}_\varepsilon(1)$. Следовательно, функция $y = x^2$ ограничена в рассматриваемой окрестности точки $a = 1$.

3.6. Предел функции.

Определение 3.17. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \ \text{при} \ x \to a.$$

В символической форме это определение принимает вид

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \\ \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ имеем $a - \delta < x < a + \delta \quad (x \neq a)$, т. е. $x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$ (см. определения 1.12 и 1.14). Неравенство $|f(x) - - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т. е. $f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$. Таким образом,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a): \\ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow \ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A). \quad (3.2)$$

Говорят, что определение предела функции в виде (3.1) записано на «языке ε-δ», а в виде (3.2) — на «языке окрестностей».

На рис. 3.5 дана геометрическая интерпретация предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Для всех x из интервала $(a - \delta, a + \delta)$ оси Ox значения функции $f(x)$ лежат в интервале $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ оси Oy.

Замечание 3.1. Отметим, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Действительно, по определению 3.17, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \varepsilon$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| = |x - a| < \varepsilon$.

Пример 3.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5$.

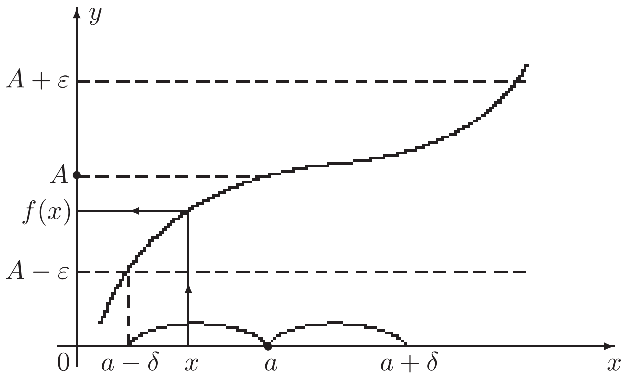


Рис. 3.5

Решение. Для доказательства, согласно определению 3.17, для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ следует найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall\, x,\ |x-1| < \delta$, выполнялось бы неравенство $|2x+3-5| < \varepsilon$. Из этого неравенства имеем $|2x+3-5| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$. Отсюда заключаем, что если положить $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то $\forall\, x,\ 0 < |x-1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, выполняется неравенство $|2x-2| = |2x+3-5| < \varepsilon$, или, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$. ■

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.2$. Тогда $\delta = \delta_1 = 0.1$ и $|x-1| < 0.1$, или $0.9 < x < 1.1$. Это означает, что для любых $x \in (0.9, 1.1)$ (т. е. $\forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_1}(1)$) значения $f(x) = 2x+3$ лежат в интервале $(4.8, 5.2)$ (т. е. $f(x) \in \mathrm{O}_{\varepsilon_1}(5)$).

Если $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0.4$, то $\delta = \delta_2 = 0.2$ и $|x-1| < 0.2$, или $0.8 < x < 1.2$. Тогда для любых $x \in (0.8, 1.2)$ (т. е. $\forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_2}(1)$) значения $f(x) = 2x+3$ будут лежать в интервале $(4.6, 5.4)$ (т. е. $f(x) \in \mathrm{O}_{\varepsilon_2}(5)$).

Таким образом, разным значениям ε соответствуют разные значения δ, т. е., действительно, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 3.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Решение. Для доказательства, в соответствии с определением 3.17, следует для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall\, x,\ 0 < |x| < \delta$, выполнялось бы неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$. По формуле тригонометрии разность $1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Учитывая, что $|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$, запишем

$$|\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

Если принять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, то $\forall\, x,\ 0 < |x| < \delta = \varepsilon$, выполняется неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$, или, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. ■

Приведенные ниже определения пределов $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ (A — число) записаны только в символической форме.

Определение 3.18. Пусть $x \to \infty$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \\ \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) > 0 :\ \forall\, x,\ |x| > M \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \\ \iff \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_M(\infty) :\ \forall\, x \in \mathrm{O}_M(\infty) \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$$

(см. определение 1.15 окрестности $\mathrm{O}_M(\infty)$).

Из определения 3.18 следует, что для всех x, лежащих в интервалах $(-\infty, -M)$ и $(M, +\infty)$ оси Ox, соответствующие значения $f(x)$ должны лежать в интервале $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ оси Oy (рис. 3.6).

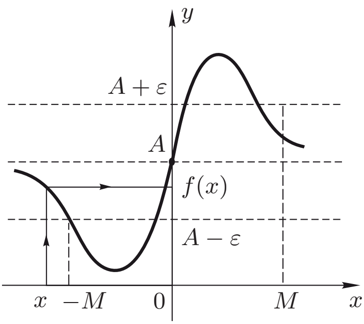


Рис. 3.6

Пример 3.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Для доказательства, согласно определению 3.18, для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ следует найти число $M > 0$ такое, что $\forall\, x,\ |x| > M$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$. Из этого неравенства имеем $|x^n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $|x|^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $|x| > \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$. Если положить $M(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$, то $\forall\, x,\ |x| > M = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| = \left|\dfrac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$, или, по определению 3.18, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$. ■

Определение 3.19. Пусть $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \iff \\ \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) :\ \forall\, x > M(\varepsilon) \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

(см. рис. 3.7) или

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \iff$$
$$\iff \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_M(+\infty):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_M(+\infty) \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$$

(см. определение 1.15 окрестности $\mathrm{O}_M(+\infty)$).

Определение 3.20. Пусть $x \to -\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \iff$$
$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon):\ \forall\, x < M(\varepsilon) \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

(см. рис. 3.8) или

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \iff$$
$$\iff \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_M(-\infty):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_M(-\infty) \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$$

(см. определение 1.15 окрестности $\mathrm{O}_M(-\infty)$).

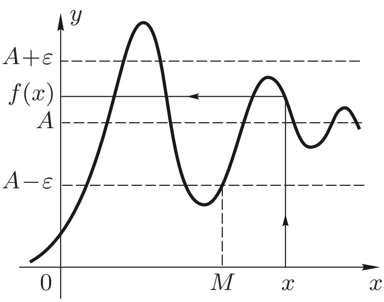


Рис. 3.7

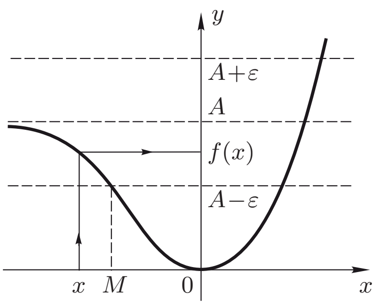


Рис. 3.8

Замечание 3.2. Из определения 3.17 предела функции следует, что постоянная функция $f(x) = C$ при $x \to a$ имеет предел, равный C, так как для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - C| = |C - C| < \varepsilon$ выполняется для всех значений x (здесь δ может быть любым положительным числом). Это заключение остается в силе, если a — один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 3.21. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен бесконечности, если для любого числа $K > 0$ существует число $\delta = \delta(K) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > K$ (рис. 3.9). Пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad f(x) \to \infty \ \text{ при } \ x \to a.$$

В символической форме это определение имеет вид

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, K > 0 \quad \exists\, \delta(K) > 0 : \ \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > K,$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_K(\infty) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a) : \ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_K(\infty).$$

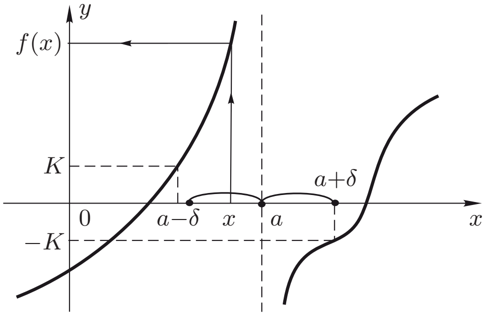


Рис. 3.9

П р и м е р 3.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbf{N})$.

Для доказательства, в соответствии с определением 3.21, следует для произвольно заданного числа $K > 0$ найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall\, x,\ 0 < |x| < \delta$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| > K$. Из этого неравенства находим $\dfrac{1}{|x|^n} > K$, $|x|^n < \dfrac{1}{K}$, $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[n]{K}}$. Если положить $\delta(K) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{K}}$, то $\forall\, x,\ 0 < |x| < \delta = \dfrac{1}{\sqrt[n]{K}}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| > K$, или, по определению 3.21, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = \infty$.

Ниже приведены определения пределов $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ только в символической форме.

О п р е д е л е н и е 3.22. Пусть $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, K \quad \exists\, \delta(K) > 0 : \ \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > K$$

(см. рис. 3.10) или

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_K(+\infty) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a) : \ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_K(+\infty).$$

Определение 3.23. Пусть $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$$
$$\iff \forall K \quad \exists\,\delta(K) > 0:\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < K$$

(см. рис. 3.11) или

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$$
$$\iff \forall\, \mathrm{O}_K(-\infty) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a):\ \forall x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_K(-\infty).$$

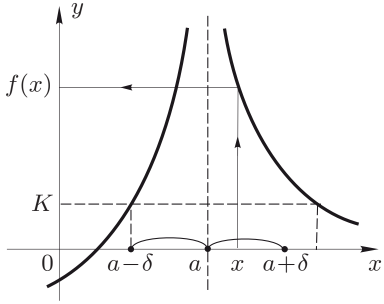


Рис. 3.10

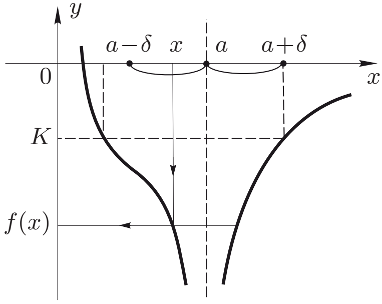


Рис. 3.11

Замечание 3.3. Подчеркнем, что в точке $x = a$ функция $f(x)$ может быть как определена, так и не определена, причем в первом случае значение $f(a)$ может совпадать с конечным пределом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ = A$, а может и не совпадать с ним.

Определения, аналогичные определениям 3.21–3.23, имеют место и для случая, когда a — один из символов $\infty,\ +\infty,\ -\infty$. Например,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff$$
$$\iff \forall K > 0 \quad \exists\, M(K) > 0:\ \forall x,\ |x| > M(K) \ \Rightarrow\ |f(x)| > K,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K \quad \exists\, M(K):\ \forall x > M(K) \ \Rightarrow\ f(x) < K.$$

Замечание 3.4. Можно доказать, что

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = \begin{cases} +\infty, & p > 0, \quad p \in \mathbf{R}; \\ 1, & p = 0; \\ 0, & p < 0, \quad p \in \mathbf{R}, \end{cases}$

в частности, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{m}{n}} = +\infty, \quad m, n \in \mathbf{N};$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots; \\ -\infty, & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Функции, как и последовательности, не всегда имеют конечный или бесконечный предел. Например, функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ не имеет предела, так как при неограниченном возрастании дроби $\dfrac{1}{x}$ значения функции $\sin\dfrac{1}{x}$ колеблются между -1 и 1, т.е. функция $f(x)$ при $x \to 0$ не стремится к какому-либо числу (рис. 3.12).

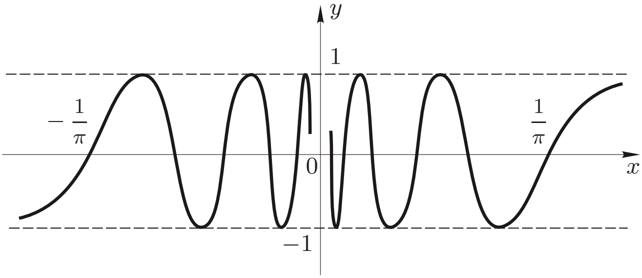


Рис. 3.12

3.7. Односторонние пределы функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки a и $x \to a$, оставаясь больше a. Записывают $x \to a + 0$ или $x \to a^+$ ($x \to +0$ или $x \to 0^+$, если $a = 0$).

Определение 3.24. *Правым пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$ называется число b, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0:\ \forall\,x,\ a < x < a + \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначают

$$b = f(a + 0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

На «языке окрестностей» это определение имеет вид

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,\mathrm{O}_\varepsilon(b) \quad \exists\,\mathrm{O}_\delta^+(a):\ \forall\,x \in \mathrm{O}_\delta^+(a)\ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b)$$

(см. определение 1.13 правой δ-полуокрестности $\mathrm{O}_\delta^+(a)$ точки a).

Пусть функция $f(x)$ определена в левой полуокрестности точки a и $x \to a$, оставаясь меньше a. Записывают $x \to a - 0$ или $x \to a^-$ ($x \to -0$ или $x \to 0^-$, если $a = 0$).

Определение 3.25. *Левым пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$ называется число b, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0:\ \forall\,x,\ a - \delta < x < a\ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначают

$$b = f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

На «языке окрестностей» это определение имеет вид

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b \iff \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(b) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta^-(a):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta^-(a) \Rightarrow f(x)\in \mathrm{O}_\varepsilon(b)$$

(см. определение 1.13 левой δ-полуокрестности $\mathrm{O}_\delta^-(a)$ точки a).

Правый и левый пределы функции при $x \to a$ называются *односторонними пределами* функции в точке a.

Подчеркнем, что для существования предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ необходимо и достаточно существование и равенство числу b обоих односторонних пределов функции $f(x)$ при $x\to a$, т. е.

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b.$$

Пример 3.5. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$ в точке $x=3$ (рис. 3.13).

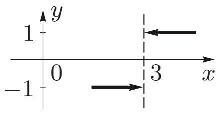


Рис. 3.13

Решение. Имеем

$$f(3+0) = \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} \frac{x-3}{x-3} = 1;$$

$$f(3-0) = \lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1. \ \blacksquare$$

Пример 3.6. Найти односторонние пределы функции

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} \ \ 1, & x>0;\\ \ \ 0, & x=0;\\ -1, & x<0 \end{cases}$$

в точке $x=0$ (рис. 3.1).

Решение. Вычислим

$$f(+0) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} 1 = 1;$$

$$f(-0) = \lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} (-1) = -1. \ \blacksquare$$

В дальнейшем вместо символов $\delta(\varepsilon)$, $\delta(K)$, $M(\varepsilon)$ будем писать для краткости только δ, M.

3.8. Типовые примеры.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$.

Решение. Для доказательства, в соответствии с определением 3.17, для произвольно заданного числа $\varepsilon>0$ необходимо найти число $\delta>0$ такое, что $\forall x$, $0<|x-1|<\delta$, выполнялось бы неравенство $|(3x-1)-2|<\varepsilon$. Отсюда $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Полагаем $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Убедимся, что найденное $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ — искомое. В самом деле, если $0<|x-1|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, то $3\,|x-1|<\varepsilon$, $|3x-3|<\varepsilon$, или $|(3x-1)-2|<\varepsilon$. Следовательно, найдено число $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ такое, что $\forall x$, $0<|x-1|<\delta$, и $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется неравенство $|(3x-1)-2|<\varepsilon$. Таким образом, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$, что и требовалось доказать. ■

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

Решение. Согласно определению 3.17, для доказательства следует для произвольно заданного числа $\varepsilon>0$ найти число δ такое, что $\forall x$, $0<|x-2|<\delta$, выполнялось бы неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Учитывая, что для любых a и b справедливы соотношения $|ab|=|a||b|$, $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, имеем

$$|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=|x-2||x+2|=\\ =|x-2||(x-2)+4|\leqslant|x-2|(|x-2|+4)<\varepsilon.$$

Обозначим $\alpha=x-2$. Из уравнения $\alpha(\alpha+4)=\varepsilon$, или $\alpha^2+4\alpha-\varepsilon=0$, находим $\alpha_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+\varepsilon}$. Полагаем $\delta=\alpha_1=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$.

Покажем, что полученное $\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$ — искомое. Действительно, если $0<|x-2|<\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$, то $|x^2-4|\leqslant|x-2|\times(|x-2|+4)<\delta(\delta+4)=(-2+\sqrt{4+\varepsilon})(2+\sqrt{4+\varepsilon})=-4+4+\varepsilon=\varepsilon$. Следовательно, найдено число $\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$ такое, что $\forall\,x$, $0<|x-2|<\delta$, и $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Итак, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$, что и требовалось доказать. ■

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+3}=1$.

Для доказательства требуется найти для произвольно заданного числа $\varepsilon>0$ число $M>0$ такое, что $\forall x$, $|x|>M$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<\varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство:

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\left|\frac{x^2-1-x^2-3}{x^2+3}\right|=\left|\frac{-4}{x^2+3}\right|=\\ =\frac{4}{|x^2+3|}=\frac{4}{|x|^2+3}<\frac{4}{|x|^2}<\varepsilon.$$

Отсюда $|x| > \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$. Полагаем $M = \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Убедимся, что найденное число $M = \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ — искомое. Действительно, если $|x| > M = \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$, то

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+3} - 1\right| = \frac{4}{|x^2+3|} = \frac{4}{|x|^2+3} < \frac{4}{|x|^2} < \frac{4}{M^2} = \frac{4}{\left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Итак, найдено число $M = \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ такое, что $\forall\, x,\ |x| > M$, и $\forall\, \varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3} - 1\right| < \varepsilon$. Следовательно, по определению 3.18, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+3} = 1$, что и требовалось доказать. ■

3.9. Задачи для самостоятельного решения.

Доказать, что

1. $\lim\limits_{x\to 0}(6x+4) = 4$; **2.** $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1) = 10$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$; **4.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$.

§ 4. Теоремы о пределах функций

Все теоремы данного параграфа о пределах функций при $x \to a$ справедливы для случаев, когда a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$. Эти теоремы остаются в силе и для односторонних пределов функций при $x \to a+0$ или $x \to a-0$. Доказательства некоторых теорем даны только для случая, когда a — число.

4.1. Основные теоремы о пределах функций.

Теорема 4.1 (*о единственности предела*). Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет два различных конечных предела b_1 и b_2, $b_1 \neq b_2$. Выберем

$\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестности $\mathrm{O}_\varepsilon(b_1)$ и $\mathrm{O}_\varepsilon(b_2)$ не пересекались. По определению 3.17

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \iff \text{для выбранного } \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_1 > 0 : \quad \forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_1}(a) \setminus a \Rightarrow f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b_1);$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_2 \iff \text{для выбранного } \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_2 > 0 : \quad \forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_2}(a) \setminus a \Rightarrow f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b_2).$$

Возьмем число δ, равное наименьшему из чисел δ_1 и δ_2, и рассмотрим окрестность $\mathrm{O}_\delta(a)$. При $x \in \mathrm{O}_\delta(a)\setminus a$ имеем $f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b_1)$ и $f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b_2)$, т. е. окрестности $\mathrm{O}_\varepsilon(b_1)$ и $\mathrm{O}_\varepsilon(b_2)$ пересекаются, что противоречит выбору ε. Следовательно, исходное предположение неверно, и функция $f(x)$ имеет единственный предел при $x \to a$. ■

Теорема 4.2 (*об ограниченности функции, имеющей конечный предел*). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда на основании определения 3.17 предела функции $\forall\,\varepsilon > 0$ и, в частности, для $\varepsilon = 1$ найдется такое $\delta > 0$, что $\forall\, x, 0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < 1$. Так как $|f(x)| = |f(x) - b + b| \leqslant |f(x) - b| + |b|$, то $\forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| < 1 + |b|$, что и означает ограниченность функции $f(x)$ в окрестности точки a (см. определение 3.16).

Теорема 4.3 (*о пределе сложной функции*). Пусть функция $u = \varphi(x)$ задана на множестве D_φ, функция $y = f(u)$ — на множестве D_f и $\varphi(x) \in D_f$ (см. определение 3.3). Если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$, $\lim\limits_{u\to b} f(u) = B$ и $\varphi(x) \neq b$ при $x \neq a$, то сложная функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ имеет предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a} f\left(\varphi(x)\right) = \lim_{u\to b} f(u)$$

(b, B — числа или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$).

Теорема 4.3 позволяет осуществлять замену переменной под знаком предела, когда от старой переменной $x \to a$ переходят к новой переменной $u = \varphi(x) \to b$ при $x \to a$.

Пример 4.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \cos x^2$.

Решение. Полагаем $u = x^2$, где $u \to 0$ при $x \to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \cos x^2 = \lim\limits_{u\to 0} \cos u = 1$ (см. пример 3.2). ■

4.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.

Определение 4.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ (a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$). В случае, когда a — число, согласно определению 3.17, имеем

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \qquad \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Используя определение предела 3.17, можно доказать, что бесконечно малыми будут, например, следующие функции:

1) $\alpha(x) = x$ при $x \to 0$;

2) $\alpha(x) = \dfrac{C}{x^n}$ при $x \to \infty$ (C — постоянная);

3) $\alpha(x) = 1 - x$ при $x \to 1$.

Теорема 4.4 (*о связи функции и ее предела*). Для того чтобы функция $y = f(x)$ при $x \to a$ имела конечный предел b, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$. Другими словами,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff f(x) = b + \varphi(x), \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (a — число). Тогда, по определению 3.17, можно записать

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \ \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Следовательно, по определению 4.1, $f(x) - b = \alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$. Из последнего равенства имеем $f(x) = b + \alpha(x)$.

Достаточность. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $f(x) - b = \alpha(x)$. Согласно определению 4.1 бесконечно малой функции запишем

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \ \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |\alpha(x)| = |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Отсюда, на основании определения предела 3.17, заключаем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Теорема полностью доказана. ■

Теорема 4.5. Сумма (разность) двух бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, т. е. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ (a — число). Выберем произвольно число $\varepsilon > 0$. По определению 4.1 имеем

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0 \iff \text{для выбранного } \varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta_1 > 0: \quad \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{x\to a}\beta(x) = 0 \iff \text{для выбранного } \varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta_2 > 0: \quad \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем в качестве δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда, используя неравенство для модуля суммы (разности), $\forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta$, получим

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, по определению 4.1, сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ (разность $\alpha(x) - \beta(x)$) есть бесконечно малая функция при $x \to a$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 4.5 может быть обобщена на любое конечное число бесконечно малых функций, т. е. алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема 4.6. Произведение двух бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Отсюда следует, что произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема 4.7. Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ на функцию, ограниченную в некоторой окрестности точки a, есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, функция $\varphi(x)$ ограничена в δ-окрестности точки a. Тогда по определению 3.16, существует число $c > 0$ такое, что $\forall\,x,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |\varphi(x)| < c$. Согласно определению 4.1, $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0:\ \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Найдем $|\alpha(x)\cdot\varphi(x)| = |\alpha(x)|\cdot|\varphi(x)| < c\cdot\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \quad \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta$. Таким образом,

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0:\ \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |\alpha(x)\cdot\varphi(x)| < \varepsilon,$$

т. е., по определению 4.1, функция $\alpha(x)\cdot\varphi(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$. Теорема доказана. ■

Пример 4.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, а функция $\sin\dfrac{1}{x}$ ограничена $\forall\, x \neq 0$ $\left(\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1 \text{ при всех } x\neq 0\right)$, то $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. ■

Замечание 4.1. О пределе частного двух бесконечно малых функций ничего определенного сказать нельзя. Этот предел может быть конечным или бесконечным или не существовать вообще. Говорят, что в этом случае имеет место *неопределенность вида* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ (*ноль делить на ноль*).

Например,

1) если $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\beta(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$;

2) если $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\beta(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x} = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

3) если $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\beta(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

Определение 4.2. Функция, имеющая бесконечный предел при $x\to a$, называется *бесконечно большой* при $x\to a$ (a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$). Если ее предел равен $+\infty$ ($-\infty$), то функция называется *положительной* (*отрицательной*) *бесконечно большой*.

Так, функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x\to 0$ есть положительная бесконечно большая, функция $\varphi(x) = -x^3$ при $x\to+\infty$ — отрицательная бесконечно большая.

Замечание 4.2. Определения, аналогичные определениям 4.1 и 4.2, имеют место и для случаев, когда $x\to a+0$ или $x\to a-0$.

Теорема 4.8. Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x\to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x\to a$. Если $f(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to a$ и $f(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая при $x\to a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x\to a$ (a — число). По определению 4.2, с учетом определения 3.21, имеем

$$\forall\, K = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad \exists\,\delta > 0:\ \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > K.$$

Для тех же x имеем $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \dfrac{1}{K} = \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$.

Пусть $f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, и $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $x = a$. Согласно определению 4.1 запишем

$$\forall\, \varepsilon = \frac{1}{K} > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \ \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)| < \varepsilon.$$

Для тех же x имеем $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon} = K$, т. е. $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая при $x \to a$. Теорема полностью доказана. ■

Например, функция $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$ — бесконечно малая при $x \to 0$, и $f(x) \neq 0$ в любой окрестности точки $x = 0$. Следовательно, $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^n}$ — бесконечно большая функция при $x \to 0$. Так как $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$ — бесконечно большая функция при $x \to \infty$, то $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^n}$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

Теорема 4.9. Сумма двух бесконечно больших функций одного знака при $x \to a$ есть бесконечно большая функция того же знака при $x \to a$.

Так, например, если $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 2n) = +\infty$.

Замечание 4.3. Разность двух бесконечно больших одного знака есть неопределенность вида $[\infty - \infty]$ (о понятии «неопределенность» см. замечание 4.1).

Теорема 4.10. Произведение двух бесконечно больших функций при $x \to a$ есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Например, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x \cdot e^x) = +\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Теорема 4.11. Произведение бесконечно большой функции при $x \to a$ на функцию, имеющую при $x \to a$ бесконечный или конечный, но отличный от нуля предел, есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

Например, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (x \cdot \operatorname{tg} x) = +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

Замечание 4.4. Отметим, что предел частного двух бесконечно больших функций и предел произведения бесконечно малой на бесконечно большую функцию не определены. Принято говорить, что в этих случаях имеет место *неопределенность* соответственно вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $[0 \cdot \infty]$ (см. замечание 4.1). Нахождение предела во всех подобных случаях часто называют «раскрытием неопределенности».

4.3. Теоремы о пределах функций, связанные с арифметическими операциями.

Теорема 4.12. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b_2$. Тогда существуют конечные пределы суммы, разности и произведения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = b_1 \pm b_2, \quad \lim_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = b_1 \cdot b_2.$$

Доказательство. Докажем эту теорему для суммы двух функций (для разности и произведения двух функций доказательства аналогичны).

На основании теоремы 4.4 о связи функции и ее предела, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно записать в виде $f_1(x) = b_1 + \alpha_1(x)$ и $f_2(x) = b_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$. Тогда $f_1(x) + f_2(x) = \big(b_1 + \alpha_1(x)\big) + \big(b_2 + \alpha_2(x)\big) = (b_1 + b_2) + \big(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)\big)$. Сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$ (см. теорему 4.5). Таким образом, функция $f_1(x) + f_2(x)$ представлена в виде суммы числа $(b_1 + b_2)$ и бесконечно малой $\big(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)\big)$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to a} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = b_1 + b_2$. Теорема доказана. ■

Замечание 4.5. Теорема 4.12 верна для алгебраической суммы или произведения любого конечного числа функций, имеющих при $x \to a$ конечный предел. Если в произведении все сомножители равны, то

$$\lim_{x \to a} \big(f(x)\big)^n = \lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)\big) = \\ = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to a} f(x) = \Big(\lim_{x \to a} f(x)\Big)^n.$$

Отсюда следует вывод: предел степенной функции с натуральным показателем n равен n-й степени предела основания, если предел основания существует. В частности, $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

Например, $\lim\limits_{x \to 2} \big(x^2 + x^3\big) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} x^3 = 2^2 + 2^3 = 12$.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела. Действительно, если C — постоянный множитель, то $\lim\limits_{x \to a} C = C$ (см. замечание 3.2) и $\lim\limits_{x \to a} (Cf(x)) = \lim\limits_{x \to a} C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Пусть $P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$ — многочлен степени n. Найдем

$$\lim_{x \to a} P_n(x) = \lim_{x \to a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0) = \\ = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \ldots + b_0 = P_n(a).$$

Следовательно, многочлен $P_n(x)$ имеет предел при $x \to a$, равный значению этого многочлена в точке a.

Пример 4.3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2 - 2x - 1\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2 - 2x - 1\right) = 3\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 1 = 20$. ■

Теорема 4.13. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$ и $b_2 \neq 0$, то существует конечный предел частного функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — два многочлена степени n и m соответственно. Для рациональной дроби $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеем

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = R(a), \quad Q_m(a) \neq 0.$$

Следовательно, рациональная дробь имеет предел в каждой точке a, в которой знаменатель не равен нулю, и этот предел равен значению дроби в указанной точке.

Пример 4.4. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3 - 5x - 2}{2x^2 - 3x + 4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3 - 5x - 2}{2x^2 - 3x + 4} = \dfrac{(-1)^3 - 5\cdot(-1) - 2}{2\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) + 4} = \dfrac{2}{9}$. ■

Пример 4.5. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение. В данном случае теорему 4.13 непосредственно применить нельзя, так как при $x \to 4$ предел числителя и предел знаменателя равны нулю, т. е имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преобразуем дробь под знаком предела:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $x - 4$ (деление возможно, так как $x \to 4$, но $x \neq 4$, т. е. $x - 4 \neq 0$). Окончательно получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}. \ ■$$

Замечание 4.6. Пусть

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \ \ (a_n \neq 0,\ n \in \mathbf{N}),$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0 \ \ (b_m \neq 0,\ m \in \mathbf{N}).$$

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Имеем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=$$
$$=\frac{x^n(a_n+a_{n-1}x^{-1}+\ldots+a_0x^{-n})}{x^m(b_m+b_{m-1}x^{-1}+\ldots+b_0x^{-m}}=$$
$$=x^{n-m}\frac{a_n+a_{n-1}x^{-1}+\ldots+a_0x^{-n}}{b_m+b_{m-1}x^{-1}+\ldots+b_0x^{-m}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}0, & \text{если } n<m;\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{если } n=m;\\ \infty, & \text{если } n>m.\end{cases}$$

Пример 4.6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+2}{6x^2+4x+1}$.

Решение. В данном случае $n=m=2$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+2}{6x^2+4x+1}=\frac{5}{6}.\ \blacksquare$$

Пример 4.7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{x^4-x+3}$.

Решение. Так как $n=3$, $m=4$, $n<m$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{x^4-x+3}=0.\ \blacksquare$$

Пример 4.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{3x^2-4x+5}$.

Решение. Здесь $n=3$, $m=2$, $n>m$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{3x^2-4x+5}=\infty.\ \blacksquare$$

4.4. Теоремы о пределах функций, связанные с неравенствами.

Теорема 4.14. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b_1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b_2$ и $b_1<b_2$ $(b_1>b_2)$, то $\exists\,\mathrm{O}_\delta(a):\ f(x)<\varphi(x)\quad(f(x)>\varphi(x))\ \ \forall\,x\in\mathrm{O}_\delta(a)\setminus a$.

Доказательство. Приведем доказательство для случая $b_1<b_2$.

Возьмем число c такое, что $b_1<c<b_2$. Выберем $\varepsilon_1=c-b_1$, $\varepsilon_2=b_2-c$. По определению 3.17, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b_1$, если для выбранного

$\varepsilon_1 > 0\ \ \exists\, \mathrm{O}_{\delta_1}(a):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_1}(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_{\varepsilon_1}(b_1)$, или $|f(x) - b_1| < \varepsilon_1 = c - b_1$, т. е. $b_1 - c < f(x) - b_1 < c - b_1$. Из правого неравенства находим $f(x) < c$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$, если для выбранного $\varepsilon_2 > 0\ \ \exists\, \mathrm{O}_{\delta_2}(a):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_2}(a) \setminus a \ \Rightarrow\ \varphi(x) \in \mathrm{O}_{\varepsilon_2}(b_2)$, или $|\varphi(x) - b_2| < \varepsilon_2 = b_2 - c$, т. е. $c - b_2 < \varphi(x) - b_2 < b_2 - c$. Из левого неравенства следует, что $c < \varphi(x)$. Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда $f(x) < c$, $c < \varphi(x)$ $\forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$. Следовательно, $f(x) < \varphi(x)$ $\forall x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$. Теорема доказана. ■

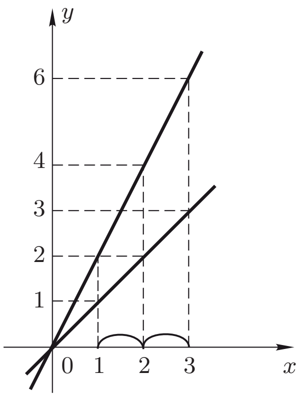


Рис. 4.1

Рассмотрим пределы двух функций $f(x) = x$ и $\varphi(x) = 2x$ при $x \to 2$. Имеем $b_1 = \lim\limits_{x\to 2} x = 2$, $b_2 = \lim\limits_{x\to 2} 2x = 4$ $(b_1 < b_2)$. Возьмем $\delta = 1$. Очевидно (см. рис. 4.1), что $f(x) < \varphi(x)$ $\forall\, x \in (1, 3)$.

Теорема 4.15. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$ и $\exists\, \mathrm{O}_\delta(a):\ f(x) > \varphi(x)$ $(f(x) < \varphi(x))$ $\forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$, то $b_1 \geqslant b_2$ $(b_1 \leqslant b_2)$.

Доказательство. Приведем доказательство для случая $f(x) > \varphi(x)$. Предположим противное, т. е. $b_1 < b_2$. По теореме 4.14 $\exists\, \mathrm{O}_{\delta_1}(a):\ f(x) < \varphi(x)$ $\forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_1}(a) \setminus a$. Тогда в пересечении окрестностей $\mathrm{O}_{\delta_1}(a)$ и $\mathrm{O}_\delta(a)$ должно выполняться неравенство $f(x) < \varphi(x)$, что противоречит условию. Следовательно, исходное предположение неверно, и $b_1 \geqslant b_2$. ■

Теорема 4.15 остается в силе, если $f(x) \geqslant \varphi(x)$ $(f(x) \leqslant \varphi(x))$.

Теорема 4.16 (*о пределе промежуточной функции*). Если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = b$ и $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ $\forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_0}(a) \setminus a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Доказательство. По определению предела 3.17, из условий теоремы следует, что

$$\forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(b) \quad \exists\, \mathrm{O}_{\delta_1}(a), \quad \exists\, \mathrm{O}_{\delta_2}(a):$$
$$\forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_1}(a) \setminus a \ \Rightarrow\ \varphi(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b), \text{ или } b - \varepsilon < \varphi(x) < b + \varepsilon,$$
$$\forall\, x \in \mathrm{O}_{\delta_2}(a) \setminus a \ \Rightarrow\ \psi(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b), \text{ или } b - \varepsilon < \psi(x) < b + \varepsilon.$$

Примем за δ наименьшее из чисел δ_0, δ_1, δ_2. Тогда $\forall x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$, или $\forall\, x$, $0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ b - \varepsilon < \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) < b + \varepsilon$, т. е. $|f(x) - b| < \varepsilon$, или, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Теорема доказана. ■

Пример 4.9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Решение. Так как $\ln x > 1$ при $x > e$ и $\ln x < x \quad \forall\, x$, то при $x > e$ имеем $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{\ln x}{x^2} < \dfrac{1}{x}$. Обозначим $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (см. пример 3.3). Следовательно, по теореме 4.16, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. ■

Теорема 4.17. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b > 0$, то $\exists\, \mathrm{O}_\delta(a):\ f(x) > 0 \ \ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $b - \varepsilon > 0$. Так как по условию $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для выбранного $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0:\ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(b)$, или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Таким образом, в ε-окрестности точки b значения функции $f(x)$ положительны, что и требовалось доказать. ■

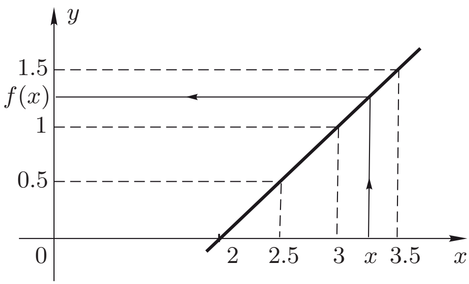


Рис. 4.2

Рассмотрим функцию $y = x - 2$ в окрестности точки $x = 3$. Имеем $\lim\limits_{x\to 3}(x - 2) = 1$, т.е. $b = 1 > 0$. Положим $\delta = 0.5$. Тогда $\mathrm{O}_\delta(3) = (2.5, 3.5)$. Очевидно, что $y > 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(3)$ (рис. 4.2).

Аналогично можно доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b < 0$, то $\exists\, \mathrm{O}_\delta(a):\ f(x) < 0 \ \ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$.

Теорема 4.18. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $f(x) < 0$ или $f(x) \leqslant 0$, то $b \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $f(x) < 0$ или $f(x) \leqslant 0$. Предположим, что $b > 0$. Тогда по теореме 4.17 функция $f(x)$ окажется больше нуля начиная с некоторого значения x в окрестности точки $x = a$, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно, и $b \leqslant 0$.

Аналогично можно доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $f(x)>0$ или $f(x)\geqslant 0$, то $b\geqslant 0$. ■

Отметим, что у строго положительной (строго отрицательной) функции предел может быть равным нулю. Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, хотя $\dfrac{1}{x}>0\quad\forall\, x>0$.

Замечание 4.7. При вычислении пределов функций часто используют различные приемы. Например, если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, то при нахождении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в случае, когда a — число и $\lim\limits_{x\to a} P_n(x)=\lim\limits_{x\to a} Q_m(x)=0$, разлагают числитель и знаменатель на множители и до перехода к пределу сокращают дробь на множитель $(x-a)$ (так как $x\to a$, но $x\neq a$). При $x\to\infty$ делят числитель $P_n(x)$ и знаменатель $Q_m(x)$ на x^m или сразу используют известный результат (см. замечание 4.6). Для раскрытия неопределенности в случае иррациональной дроби переводят иррациональность либо из числителя в знаменатель, либо из знаменателя в числитель, или освобождаются от иррациональности с помощью замены переменной. Если, например, под знаком предела стоит иррациональная функция, содержащая $x^{\frac{p}{q}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, где $p,q,m,n\in\mathbf{N}$, то от иррациональности можно освободиться переходом к новой переменной $t=\sqrt[s]{x}$ (или $x=t^s$), где s — наименьшее общее кратное чисел q и n. При $x\to\infty$ часто переходят к новой переменной $\alpha=\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$. Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$ или $[\infty-\infty]$ сводят к неопределенностям вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ путем преобразования функции под знаком предела.

Это замечание относится и к вычислению пределов последовательностей $\{x_n\}=\{f(n)\}$.

Отметим, кроме того, что для любой элементарной функции $f(x)$ справедливо равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, если точка $x=a$ принадлежит области определения функции $f(x)$. В частности, $\lim\limits_{x\to a} x^{\frac{m}{n}}=$ $=a^{\frac{m}{n}}$, где $m,n\in\mathbf{N}$ (см. § 6).

4.5. Типовые примеры.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Решение. Общий член x_n данной последовательности представляет собой сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$. Известно, что для геометрической прогрессии $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ со знаменателем q сумма S_n первых n членов находится по формуле $S_n = \dfrac{b_1 - b_n q}{1 - q}$. Следовательно, $x_n = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$. Используя теорему 4.12 и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, найдем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1. \blacksquare$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3}{2n^2+3} - \dfrac{5n^2}{5n+1} \right)$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком предела: $\dfrac{2n^3}{2n^2+3} - \dfrac{5n^2}{5n+1} = \dfrac{2n^3 - 15n^2}{10n^3 + 2n^2 + 15n + 3}$. Разделив числитель и знаменатель на n^3, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 15n^2}{10n^3 + 2n^2 + 15n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{15}{n}}{10 + \frac{2}{n} + \frac{15}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Отметим, что ответ можно было записать сразу, без деления числителя и знаменателя дроби на n^3, учитывая замечание 4.6. $\blacksquare$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1} - 1}{5^n + 1}$.

Решение. Преобразуем дробь под знаком предела:

$$\frac{5^{n+1} - 1}{5^n + 1} = \frac{5^n\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{5 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{5^n}}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5^n} = 0$, найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{5^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}} = \frac{5}{1} = 5. \blacksquare$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т. е. на сумму $(\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1})$, а затем разделим числитель и знаменатель на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3-n+1}{\sqrt{n}(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}. \ \blacksquare$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}(5x^2-6x+8)$.

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to1}(5x^2-6x+8)=5\cdot(1^2)-6\cdot(1)+8=7. \ \blacksquare$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$.

Решение. Знаменатель дроби $4x^3+x+1\neq0$ при $x=0$. Подставляя значение $x=0$ в функцию под знаком предела, найдем

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+x}{4x^3+x+10}=\lim_{x\to0}\frac{3\cdot(0)^2+0}{4\cdot(0)^3+0+10}=0. \ \blacksquare$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x^3+8}{3x^4-7}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^4, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^3+8}{3x^4-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{8}{x^4}}{3-\dfrac{7}{x^4}}=\frac{2}{3}.$$

Отметим, что ответ можно было записать, не преобразовывая дробь, а используя замечание 4.6. $\blacksquare$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=2$ приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Это означает, что числитель и знаменатель дроби можно разложить на множители, один из которых равен $(x-2)$. Так как $(x-2)\neq0$ при $x\to2$, то числитель и знаменатель дроби можно разделить на $(x-2)$. В результате имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{1}{8}.\ \blacksquare$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Умножая числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т. е. на сумму $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1.\ \blacksquare$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разлагая числитель дроби как разность кубов на множители, т. е. записывая $x-8=(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$, найдем

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}=$$
$$=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4=12.\ \blacksquare$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Освободимся от иррациональности, переходя к новой переменной t и полагая $x+1=t^6$, где $t\to 1$ при $x\to 0$. Тогда искомый предел будет равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.\ \blacksquare$$

4.6. Задачи для самостоятельного решения.

В примерах 1–20 найти указанные пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-8n^2}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4+x^3}{x^4+2x^3}$;

11. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right)$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+5x^2+2}{x-10^{10}}$;

13. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;

14. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

15. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$;

16. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{36x^5+5}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x-1}\right)$;

19. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

20. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

§ 5. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций

5.1. Замечательные пределы. Многие задачи математического анализа связаны с первым замечательным пределом.

Рассмотрим в координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 5.1). Обозначим через x, где $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, величину острого угла $\angle AOB$ в радианах. Тогда длина дуги $\overset{\smile}{AB}$ равна x. Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника COB соответственно, причем $S_1 = \dfrac{1}{2}\,OB\cdot AD = \dfrac{1}{2}\sin x$, $S_2 = \dfrac{1}{2}\,(OB)^2 x = \dfrac{1}{2}\,x$, $S_3 = \dfrac{1}{2}\,OB\cdot BC = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Очевидно, что площади S_1, S_2, S_3 связаны соотношением

$$S_1 < S_2 < S_3,$$

или

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Отсюда $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Если $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x > 0$. Следовательно,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

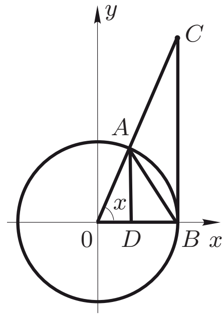


Рис. 5.1

Полученные неравенства справедливы и при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ в силу четности функций $\dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos x$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то по теореме 4.16 о пределе промежуточной функции имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{5.1}$$

Этот предел и называют *первым замечательным пределом.*

Приведем некоторые пределы, который можно свести к пределу (5.1) после перехода к новой переменной (см. теорему 4.3):

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1, \quad t = x - a \to 0$ при $x \to a$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1, \quad t = kx \to 0$ при $x \to 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1, \quad t = \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq$ $\neq 0$ в некоторой окрестности точки $x = a$.

Пример 5.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преобразуем дробь и воспользуемся замечанием 4.5 о пределе степенной функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

Ко второму замечательному пределу приходят, рассматривая числовую последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказано, что эта последовательность имеет пределом иррациональное число, обозначаемое буквой e, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где $e\approx 2.718282\ldots$ Доказано также, что предел функции $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ тоже равен e, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5.2}$$

Этот предел называют *вторым замечательным пределом.* Величина e может быть определена численным методом с любой степенью точности.

Если положить $\alpha=\dfrac{1}{x}$ ($\alpha\to 0$ при $x\to\infty$), то предел (5.2) можно записать в виде

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{5.3}$$

Заметим, что показательную функцию a^x с основанием $a=e$, т. е. функцию e^x, часто записывают в виде $e^x\equiv\exp\{x\}$. В частности, $e=e^1=\exp\{1\}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$. Пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ и $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки $x=a$. Тогда, переходя к новой переменной $\alpha=\alpha(x)$, получим

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} = e = \exp\{1\}. \tag{5.4}$$

Пример 5.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-1}$.

Решение. Преобразуем дробь, выделяя единицу в данной неправильной дроби:

$$\frac{x+3}{x-1} = 1+\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right) = 1+\frac{x+3-x+1}{x-1} = 1+\frac{4}{x-1}.$$

Запишем показатель функции, стоящей под знаком предела, в виде $x-1=\dfrac{x-1}{4}\cdot 4$. Обозначая $\alpha=\dfrac{4}{x-1}$, где $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$, и учитывая замечание 4.5, найдем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right)^4 = \lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^4 = e^4. \blacksquare$$

Пусть $(f(x))^{\varphi(x)}$ $(f(x)>0)$ — показательно-степенная функция,

$A, B \in \mathbf{R}$, a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$. Можно доказать, что

1) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$, то

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{\varphi(x)} = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} = A^B; \tag{5.5}$$

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 1$ (или $A < 1$), $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{\varphi(x)} = +\infty \quad (\text{или } 0); \tag{5.6}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 1$ (или $A < 1$), $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{\varphi(x)} = 0 \quad (\text{или } +\infty); \tag{5.7}$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A = 1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то имеет место неопределенность вида $[1^\infty]$ (см. замечание 4.1). Эту неопределенность можно раскрыть, используя второй замечательный предел. Полагаем $f(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $x = a$. Преобразуя функцию под знаком предела и учитывая формулу (5.4), получим

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \left((1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)\cdot\varphi(x)}\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to a} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\varphi(x)} = \lim_{\alpha\to 0} \left((1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\varphi(x)} =$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to a} \alpha(x)\varphi(x)\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to a} (f(x) - 1)\varphi(x)\right\}. \tag{5.8}$$

Пример 5.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{x+5}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Преобразуем функцию под знаком предела:

$$\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+5} = \left(1 + \left(\frac{x+4}{x+1} - 1\right)\right)^{x+5} =$$

$$= \left(1 + \frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}\cdot\frac{3(x+5)}{x+1}} = \left(\left(1 + \frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{3(x+5)}{x+1}}.$$

Полагая $\alpha = \dfrac{3}{x+1}$, где $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{3(x+5)}{x+1}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+5)}{x+1}} =$$

$$= \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+5)}{x+1}} = e^3,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3(x+5)}{x+1} = 3$. ■

5.2. Сравнение бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$, и $\beta(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки a (a — число или один из символов ∞, $-\infty$, $+\infty$).

Определение 5.1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $\beta(x)$ *при* $x \to a$. В этом случае пишут: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ($\alpha(x)$ есть o малое от $\beta(x)$) при $x \to a$.

Определение 5.2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $\alpha(x)$ *при* $x \to a$.

Например, функции $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = \dfrac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми при $x \to \infty$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x^3}{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$, то функция $\dfrac{1}{x^3}$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с функцией $\dfrac{1}{x}$. Такой же вывод получим, если рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Определение 5.3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$ ($A \neq 0$, $A \neq \infty$), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка при* $x \to a$. Записывают: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ($\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$) при $x \to a$.

Например, функции $\alpha(x) = \operatorname{tg} 2x$ и $\beta(x) = x$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cdot\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x} = 2\cdot 1 = 2.$$

Определение 5.4. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=A$ $(k>0,\quad A\neq 0,$ $A\neq\infty)$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка k по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$ при $x\to a$*. Пишут: $\alpha(x)=O(\beta^k(x))$ ($\alpha(x)$ есть O большое от $\beta^k(x)$) при $x\to a$.

Пример 5.4. Определить порядок бесконечно малой функции $\alpha(x)=1-\cos x$ по сравнению с функцией $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Решение. В примере 5.1 найден $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, функция $\alpha(x)=1-\cos x$ есть бесконечно малая второго порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to 0$. ■

Определение 5.5. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ называются *несравнимыми между собой*, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует.

Например, для функций $\alpha(x)=x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x)=x^2$, бесконечно малых при $x\to 0$, предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует. Следовательно, эти бесконечно малые несравнимы.

Определение 5.6. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Пишут: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Приводимая таблица содержит основные соотношения эквивалентности бесконечно малых функций. Эти соотношения будут доказаны в этом и следующем параграфах для случая $\alpha(x)=x,\ a=0$.

Таблица 5.1

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$	
1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
2	$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
4	$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
5	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
6	$(1+\alpha(x))^p-1\sim p\alpha(x),\quad p\in\mathbf{R},\ p\neq 0$
7	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$
8	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$

Приведем несколько примеров соотношений эквивалентности. Так, $\sin\left(x^2-1\right) \sim x^2-1$ при $x \to 1$ $\left(\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0\right)$, $e^{x-2}-1 \sim x-2$ при $x \to 2$ $\left(\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0\right)$, $\ln(1+\cos x) \sim \cos x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos x=0\right)$.

Определение 5.7. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$. Функция $\beta(x)$ называется *главной частью* бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to a$, если $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$ при $x \to a$.

Пусть $\alpha(x)=10x+x^2+x^3$, $x \to 0$. Обозначим $\beta(x)=10x$. Тогда $\alpha(x)=\beta(x)+x^2+x^3$, где $x^2+x^3=o(10x)$ при $x \to 0$. Следовательно, $\beta(x)=10x$ — главная часть функции $\alpha(x)$.

Главная часть бесконечно малой функции определяется неоднозначно. Так, для вышеприведенной функции $\alpha(x)=10x+x^2+x^3$ функция $\beta_1(x)=10x+x^2$ также является главной частью, так как $x^3=o(\beta_1(x))=o(10x+x^2)$ при $x \to 0$.

5.3. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ и $\gamma(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$ и отличны от нуля в некоторой окрестности точки $x=a$ (a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$). Тогда при $x \to a$ справедливы следующие свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

Свойство 5.1 (*рефлексивность*). $\alpha(x) \sim \alpha(x)$, так как

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Свойство 5.2 (*симметричность*). Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$, поскольку

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}}=\frac{1}{1}=1.$$

Свойство 5.3 (*транзитивность*). Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$. Действительно,

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\beta(x)\cdot\gamma(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1\cdot 1=1.$$

Свойство 5.4. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. В самом деле,

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot 1=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Свойство 5.5. Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$ (так как $\beta(x)\sim\beta(x)$).

Свойство 5.6. Если $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}$ (так как $\alpha(x)\sim\alpha(x)$).

Замечание 5.1. Из свойств 5.4–5.6 следует важный для приложений вывод: предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если числитель и знаменатель (или только один из них) заменить на бесконечно малые, им эквивалентные.

Пример 5.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 7x}$.

Решение. Так как $\operatorname{arctg}2x\sim 2x$, $\sin 7x\sim 7x$ при $x\to 0$ (см. табл. 5.1), то, заменяя числитель и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{7x}=\frac{2}{7}.\ \blacksquare$$

Теорема 5.1. Для того чтобы функция $\alpha(x)$ была эквивалентна функции $\beta(x)$ при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x\to a$ выполнялось равенство $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Тогда по теореме 4.4 о связи функции и ее предела имеем $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1+\delta(x)$, где $\delta(x)\to 0$ при $x\to a$. Отсюда

$$\alpha(x)=\beta(x)+\delta(x)\cdot\beta(x)=\beta(x)+o(\beta(x)),$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$ при $x\to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)+o(\beta(x))}{\beta(x)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{o(\beta(x))}{\beta(x)}\right)=\lim_{x\to a}1+\lim_{x\to a}\frac{o(\beta(x))}{\beta(x)}=1,$$

т.е. $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. $\blacksquare$

Отсюда следует вывод: бесконечно малая эквивалентна своей главной части.

Замечание 5.2. Пусть $o(x)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с x при $x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x} = 0$. Отметим некоторые свойства символа $o(x)$:

1) $o(cx) = o(x)$, где c — постоянная;
2) $c \cdot o(x) = o(x)$;
3) $o(x) + o(x) = o(x)$;
4) $o(o(x)) = o(x)$;
5) $o\left(x^n\right) \cdot o\left(x^m\right) = o\left(x^{n+m}\right)$, $n, m \in \mathbf{N}$;
6) $x^{n-1} \cdot o(x) = o\left(x^n\right)$, $n \in \mathbf{N}$;
7) $\dfrac{o\left(x^n\right)}{x} = o\left(x^{n-1}\right)$, $n \in \mathbf{N}$, $x \neq 0$.

Пример 5.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x + 3\sin 2x + x^3}{\ln(1+3x) + x}$.

Решение. При $x \to 0$ имеем $\sin 2x \sim 2x$, $\ln(1+3x) \sim 3x$. Следовательно, $\sin 2x = 2x + o(2x)$, $\ln(1+3x) = 3x + o(3x)$ при $x \to 0$. Учитывая, что $3 \cdot o(2x) + x^3 = o(x)$, $o(3x) = o(x)$ при $x \to 0$, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x + 3\sin 2x + x^3}{\ln(1+3x) + x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x + 6x + 3\cdot o(2x) + x^3}{3x + o(3x) + x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{10x + o(x)}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{10x}{4x} = \frac{5}{2}. \ \blacksquare$$

Подчеркнем, что заменять бесконечно малые функции на эквивалентные им можно только в отношении. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. Учитывая, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = 1$ (см. пример 3.4) и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (см. пример 5.1), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Если заменить сразу в числителе исходной дроби функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ на эквивалентную им при $x \to 0$ функцию x, то под знаком предела получим дробь, числитель которой тождественно равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Предел такой дроби, очевидно, равен нулю[1].

[1] Чтобы избежать указанной ошибки, следует воспользоваться более точными формулами: $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

5.4. Типовые примеры.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1,$$

т. е. $\operatorname{tg}x\sim x$ при $x\to 0$. ■

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Полагаем $t=\arcsin x$, где $t\to 0$ при $x\to 0$. Тогда $x=\sin t$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{1}=1,$$

т. е. $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$. ■

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$.

Решение. Обозначим $t=\operatorname{arctg}x$ $(t\to 0$ при $x\to 0)$. Отсюда $x=\operatorname{tg}t$. Учитывая пример 1, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}t}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}t}{t}}=\frac{1}{1}=1,$$

т. е. $\operatorname{arctg}x\sim x$ при $x\to 0$. ■

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$.

Решение. Полагая $t=\cos x$, где $t\to 0$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$, найдем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=1. \ ■$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}2x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

Решение. Записывая произведение $x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ в виде $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ и полагая $\dfrac{1}{x}=t$ $(t\to 0$ при $x\to\infty)$, получим

$$\lim_{x\to\infty}2x\cdot\sin\frac{1}{x}=2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2. \ ■$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Заменим в числителе дробь $\dfrac{1}{2}$ на $\sin\dfrac{\pi}{6}$ и преобразуем разность $\sin x - \sin\dfrac{\pi}{6}$ по формуле тригонометрии:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right).$$

Обозначим $t=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{12}$, где $t\to 0$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right) = 1\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \ \blacksquare$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Полагаем $t=x-1$, где $t\to 0$ при $x\to 1$. Преобразуем дробь под знаком предела, учитывая, что $x=t+1$. Тогда $\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\sin\pi x}=\dfrac{-t\cdot(2+t)}{\sin(\pi+\pi t)}$. Используя формулу приведения $\sin(\pi+\pi t)=-\sin\pi t$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x} = \lim_{t\to 0}\frac{-t(2+t)}{-\sin\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{2+t}{\pi\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}(2+t)}{\pi\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}} = \frac{2}{\pi}. \ \blacksquare$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(5x)^{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2}5x=10$, $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$, то по формуле (5.5) получим $\lim\limits_{x\to 2}(5x)^{x^2}=10^4$. $\blacksquare$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. При $x \to 0$ дробь $\dfrac{2+x}{3-x} \to \dfrac{2}{3}$, дробь $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$. Так как $\dfrac{2}{3} < 1$, то $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to 0$ при $x \to 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 0$ (см. формулу (5.6)). ■

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Преобразуем функцию под знаком предела:

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \left(1+\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)\right)^{x+2} = \left(\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)}.$$

Полагаем $\alpha = \dfrac{-4}{x+3}$, где $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Учитывая формулу (5.8), найдем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} -4\cdot\frac{x+2}{x+3}} = \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-4} = e^{-4}. \ ■$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Запишем показатель у функции под знаком предела в виде $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}$. Обозначим $\alpha = \sin x$, где $\alpha \to 0$ при $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1} = e. \ ■$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. В данном случае также имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Преобразуя функцию под знаком предела, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-2}{x^2+1}\right)\right)^{\frac{x^2+1}{-2}\cdot\frac{-2}{x^2+1}\cdot x^2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-2}{x^2+1}\right)\right)^{\frac{x^2+1}{-2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2+1}}.$$

Обозначая $\alpha = \dfrac{-2}{x^2+1}$ ($\alpha\to 0$ при $x\to\infty$) и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2+1} = -2$, окончательно найдем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-2} = e^{-2}. \ \blacksquare$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Полагаем $\operatorname{tg} x = 1+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $x\to\dfrac{\pi}{4}$. Используя формулу тригонометрии для тангенса двойного угла, запишем $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = -\dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2)}$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{-2(\alpha+1)}{\alpha+2}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{-2(\alpha+1)}{\alpha+2}} = e^{-1},$$

так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{-2(\alpha+1)}{\alpha+2} = -1$. $\blacksquare$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{5n-2}$.

Решение. Преобразуя функцию под знаком предела, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{5n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{n+4}{n+1}-1\right)\right)^{5n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}\cdot\frac{3}{n+1}\cdot(5n-2)}\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(5n-2)}{n+1}} = \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{15} = e^{15},$$

где $\alpha = \dfrac{3}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(5n-2)}{n+1} = 15$. ■

Пример 15. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ и $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Решение. Учитывая, что $\sin 2x \sim 2x$ при $x \to 0$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \sin^2 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 4x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 8x = 0.$$

Следовательно, функция $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с функцией $\beta(x) = x$ при $x \to 0$. Найдем предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 4x^2}{x^2} = 8.$$

Так как полученный предел конечен и не равен нулю, то функция $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ — бесконечно малая второго порядка по сравнению с функцией $\beta(x) = x$ при $x \to 0$. ■

Пример 16. Сравнить бесконечно малые функции $y_1 = \dfrac{1-x}{1+x}$ и $y_2 = 1 - \sqrt{x}$ при $x \to 1$.

Решение. Учитывая, что $1 - x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$, найдем

$$\lim_{x\to 1} \frac{y_1}{y_2} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+x)(1-\sqrt{x})} = 1.$$

Следовательно, бесконечно малые функции y_1 и y_2 эквивалентны при $x \to 1$. ■

Пример 17. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x) = \sin\sqrt{2x}$ и $\beta(x) = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

Решение. Так как $\sin\sqrt{2x} \sim \sqrt{2x}$, $\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{2x}}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt{2}\cdot \lim_{x\to 0} \sqrt[6]{x} = 0,$$

т. е. $\alpha(x) = \sin\sqrt{2x}$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\beta(x) = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$. Найдем этот порядок путем подбора. Вычислим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{2x}}{(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x}}{(\sqrt[3]{x})^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, бесконечно малая $\alpha(x) = \sin\sqrt{2x}$ имеет порядок $k = \dfrac{3}{2}$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x) = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$. ■

Пример 18. Определить порядок бесконечно малой функции $y_1 = \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$ по сравнению с функцией $y_2 = x$ при $x \to 0$.

Решение. Найдем число k такое, чтобы

$$\lim_{x\to 0}\frac{y_1}{(y_2)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x^k}=\text{const}\neq 0.$$

Учитывая, что $(1+\alpha(x))^p-1\sim p\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$ (см. табл. 5.1), запишем: $\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}-1\sim\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4}$. Подбором определяем $k=\dfrac{1}{3}$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4\cdot\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{4}$. Следовательно, функция $y_1=\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ имеет порядок $k=\dfrac{1}{3}$ по сравнению с функцией $y_2=x$ при $x\to 0$. ■

Пример 19. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Решение. В данном случае и числитель, и знаменатель дроби являются бесконечно малыми функциями при $x\to 3$. Так как при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ на эквивалентную ей при $x\to 3$ функцию $x-3$ искомый предел отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}. \ ■$$

Пример 20. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Решение. Воспользуемся соотношением эквивалентности $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$ (см. табл. 5.1). Запишем числитель в виде $\ln(\cos x)=\ln(1+(\cos x-1))$. Так как $\cos x-1\to 0$ при $x\to 0$, то $\ln(\cos x)=\ln(1+(\cos x-1))\sim\cos x-1$ при $x\to 0$. Учитывая, что $\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}. \ ■$$

Пример 21. Найти $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Заменяя в числителе дроби единицу на $\ln e$ и преобразуя числитель, имеем

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\dfrac{x}{e}}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\left(\dfrac{x}{e}-1\right)\right)}{x-e}.$$

Так как $\dfrac{x}{e}-1\to 0$ при $x\to e$, то $\ln\left(1+\left(\dfrac{x}{e}-1\right)\right)\sim\dfrac{x}{e}-1$ при $x\to e$. Окончательно получим

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{x-e}{e(x-e)}=\frac{1}{e}. \ \blacksquare$$

Пример 22. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$.

Решение. Учитывая, что $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{4}x\sim\dfrac{7}{4}x$, $e^{-2x}-1\sim -2x$ при $x\to 0$, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{-2x}=-\frac{7}{8}. \ \blacksquare$$

Пример 23. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3+x^5}{3x+x^6}$.

Решение. Функция $\beta(x)=\sin x$ есть главная часть бесконечно малой функции $\alpha(x)=\sin x+x^3+x^5$ при $x\to 0$, так как $\alpha(x)-\beta(x)=x^3+x^5=o(\sin x)$ при $x\to 0$. Действительно, учитывая, что $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^5}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^2+x^4\right)=0.$$

Следовательно, $\alpha(x)=\sin x+x^3+x^5\sim\beta(x)=\sin x$ при $x\to 0$ (см. теорему 5.1. Очевидно, что функция $\beta_1(x)=3x$ есть главная часть функции $\alpha_1(x)=3x+x^6$ при $x\to 0$, и поэтому $\alpha_1(x)=3x+x^6\sim\beta_1(x)=3x$ при $x\to 0$. Таким образом, используя еще раз эквивалентность $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3+x^5}{3x+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}. \ \blacksquare$$

Пример 24. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x+x^5}{\ln(1+2x)+x}$.

Решение. При $x\to 0$ имеем $\arcsin 3x\sim 3x$, $\ln(1+2x)\sim 2x$. Следовательно, $\arcsin 3x=3x+o(3x)$, $\ln(1+2x)=2x+o(2x)$ при $x\to 0$. Учитывая, что $2\cdot o(3x)+x^5=o(x)$, $o(2x)=o(x)$ при $x\to 0$ (см. замечание 5.2), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin 3x+x^5}{\ln(1+2x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+2\cdot o(3x)+x^5}{2x+o(2x)+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x+o(x)}{3x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x}=2,$$

так как $6x+o(x)\sim 6x$, $3x+o(x)\sim 3x$ при $x\to 0$. $\blacksquare$

5.5. Задачи для самостоятельного решения.

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{4x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{5x}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$;

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{1-\sqrt{x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^n$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{3-2n}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1-6x}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-3}{1+8x}\right)^{x+8}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$;

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+3}$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{2x^2}}$.

21. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x)=1-\sqrt[3]{x}$ и $\beta(x)=1-x$ при $x\to 1$.

22. Определить порядок k функции $y_1=e^{\sqrt[3]{x}}-1$ по сравнению с функцией $y_2=x$ при $x\to 0$.

23. Определить порядок k фукции $y_1=\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ по сравнению с функцией $y_2=\sqrt[3]{x}$ при $x\to 0$.

24. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x)=e^{2x}-e^{x}$ и $\beta(x)=\sin 2x-\sin x$ при $x\to 0$.

25. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ и $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

26. Определить порядок k функции $\alpha(x)=\sqrt[3]{1-\cos x}$ по сравнению с функцией $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

27. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=\dfrac{x^3}{3-x}$ и $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0$.

28. Установить, какие из функций $y_1=\sin^3 x+x^2$, $y_2=\ln(1+x^2)$, $y_3=x^3+\operatorname{tg}x$, $y_4=\sqrt[3]{3x+1}-1$ являются бесконечно малыми более высокого порядка по сравнению с функцией $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Найти пределы:

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$;

30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$;

32. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x - x^4 + x^2}{\operatorname{arctg} 3x}$;

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 3x}{x^2+5x}$;

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x^3}{\operatorname{arctg} 2x}$;

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$;

37. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[4]{1+2x}}{\ln(1-4x)}$.

§ 6. Непрерывность функций

6.1. Основные определения.

Определение 6.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки, существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.1}$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности функции в точке x_0, в отличие от определения предела функции в этой точке, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки x_0 (см. определение 1.13), и пределом функции при $x \to x_0$ является значение функции в точке x_0.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то пишут $f(x) \in C(x_0)$.

Определение 6.1 непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, выраженное равенством 6.1, сформулируем на «языке ε-δ» в следующем виде:

$$f(x) \in C(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 :$$
$$\forall\, x,\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

или

$$\forall\, x,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

То же определение запишем на «языке окрестностей»:

$$f(x) \in C(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(f(x_0)) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(x_0):$$
$$\forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Приведем геометрическую интерпретацию определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (рис. 6.1).

Рассмотрим кривую $y = f(x)$ и точку $M(x_0, f(x_0))$ на ней. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и отметим точки $f(x_0) - \varepsilon$ и $f(x_0) + \varepsilon$ на оси Oy. Найдем на оси Ox две точки A_1 и A_2, соответствующие точкам $f(x_0) - \varepsilon$ и $f(x_0) + \varepsilon$ на оси Oy. Примем за δ расстояние от точки x_0 до ближайшей из точек A_1 и A_2 и отметим точки $x_0 - \delta$ и $x_0 + \delta$ на оси Ox. Очевидно, что для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

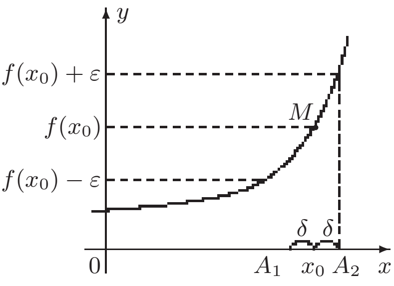


Рис. 6.1

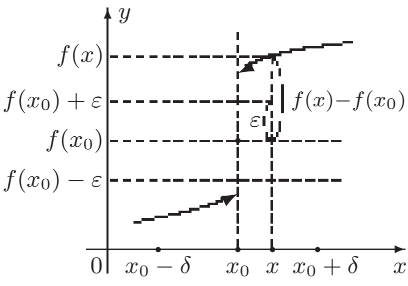


Рис. 6.2

Рассмотрим функцию, график которой приведен на рис. 6.2. В точке x_0 значение этой функции равно $f(x_0)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, как показано на рисунке. Как бы мало ни было $\delta > 0$, среди значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, есть такие, а именно бо́льшие x_0, что для них разность $f(x) - f(x_0) > \varepsilon$. Следовательно, функция не будет непрерывной в точке x_0.

Отметим, что определение 6.1 непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 можно сформулировать и в таком виде: функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции, $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента в точке x_0. Другими словами, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке.

Определение 6.2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа в точке* x_0 (обозначают $f(x) \in C^+(x_0)$), если $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее правой полуокрестности и правый предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. $f(x_0+0) = f(x_0)$. Иначе это определение можно записать в виде

$$f(x) \in C^+(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \\ \forall x,\ x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Определение 6.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева в точке* x_0 (обозначают $f(x) \in C^-(x_0)$), если $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее левой полуокрестности и левый предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. $f(x_0-0) = f(x_0)$. В символической форме это определение имеет вид

$$f(x) \in C^-(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \\ \forall x,\ x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

На рис. 6.3 приведен пример функции, непрерывной справа в точке x_0, на рис. 6.4 — непрерывной слева в точке x_0. Непрерывность функции слева или справа в некоторой точке называется *односторонней непрерывностью*.

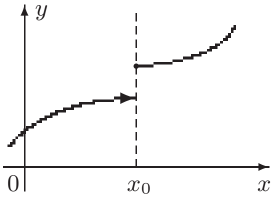


Рис. 6.3

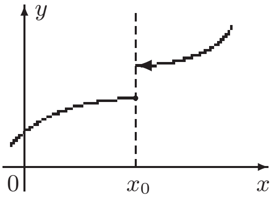


Рис. 6.4

Замечание 6.1. Из определений 6.1, 6.2 и 6.3 следует, что для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была непрерывна и справа, и слева в точке x_0, т. е. чтобы выполнялись следующие равенства:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0).$$

6.2. Свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 6.1. Сумма, разность, произведение двух функций, непрерывных в точке x_0, непрерывны в этой точке.

Доказательство. Пусть $f(x), \varphi(x) \in C(x_0)$. Докажем, что $f(x) + \varphi(x) \in C(x_0)$.

По условию $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Используя теорему 4.12 о пределе суммы двух функций, найдем

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0)+\varphi(x_0).$$

Следовательно, предел функции $(f(x)+\varphi(x))$ в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. $f(x)+\varphi(x) \in C(x_0)$, что и требовалось доказать.

Для разности и произведения двух функций теорема доказывается аналогично. ■

Теорема 6.1 верна для алгебраической суммы и произведения любого конечного числа функций.

Рассмотрим функцию $y=x$ с областью определения $D_y = \mathbf{R}$. Для любого $x_0 \in \mathbf{R}$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ (см. замечание 3.1). Следовательно, функция $y=x$ непрерывна в каждой точке числовой оси. Из теоремы 6.1 следует, что функция $y=x^n$, $n\in\mathbf{N}$, и любой многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ суть также непрерывные функции в каждой точке числовой оси.

Теорема 6.2. Частное двух функций, непрерывных в точке x_0, непрерывно в этой точке при условии, что знаменатель не равен нулю в точке x_0.

Доказательство. Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 и $\varphi(x_0)\neq 0$. Тогда по теореме 4.13 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = $
$= \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \dfrac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$ $(\varphi(x)\neq 0)$, что и требовалось доказать. ■

Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, непрерывна в каждой точке x_0 числовой оси, где $Q_m(x_0)\neq 0$.

Например, функция $y = \dfrac{x^2+5x+3}{x^2-1}$ непрерывна на всей числовой оси, за исключением точек $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, в которых знаменатель дроби $x^2-1=0$.

Теорема 6.3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ сохраняет знак.

Доказательство. По условию $f(x)\in C(x_0)$, т. е.

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0:\ \forall\, x,\ |x-x_0|<\delta \ \Rightarrow\ f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Тогда

$$f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

Если $f(x_0) > 0$, то из левого неравенства следует

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \quad \forall\, x,\ |x - x_0| < \delta,$$

т. е. $f(x) > 0\ \ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(x_0)$. Если $f(x_0) < 0$, то из правого неравенства следует

$$f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0 \quad \forall\, x,\ |x - x_0| < \delta,$$

т. е. $f(x) < 0\ \ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(x_0)$. Теорема доказана. ■

Теорема 6.4 (*о непрерывности основных элементарных функций*). Все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Теорема 6.5 (*о переходе к пределу под знаком непрерывной функции*). Пусть функция $u = \varphi(x)$ задана на множестве D_φ, функция $y = f(u)$ — на множестве D_f и $\varphi(x) \in D_f$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$ и функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = f\Big(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\Big). \tag{6.2}$$

Доказательство. По условию $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$. Используя теорему 4.3 о пределе сложной функции, запишем

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0).$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, окончательно получим

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = f(u_0) = f\Big(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\Big).$$

Теорема доказана. ■

Из теоремы 6.5 следует возможность перехода к пределу под знаком непрерывной функции, т. е. символы предела и непрерывной функции перестановочны.

Формула (6.2) есть обобщение формулы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\Big(\lim_{x \to x_0} x\Big)$$

(см. замечание 3.1).

Теорема 6.6 (*о непрерывности сложной функции*). Пусть функции $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$ определены соответственно на D_φ и D_f и $\varphi(x) \in D_y$. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D_\varphi$, функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 \in D_f$, где $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. (Иначе: суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.)

Доказательство. По условию $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$. Используя теорему 6.5, получим

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f\Big(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\Big) = f(\varphi(x_0)), \tag{6.3}$$

что и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi(x))$ в точке x_0. Теорема доказана. ■

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \ln\sin x$.

Решение. Функция $u = \sin x$ непрерывна в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, функция $y = \ln u$ непрерывна в точке $u_0 = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. Следовательно, данная сложная функция непрерывна в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. По формуле (6.3) найдем

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln\sin\frac{\pi}{2} = \ln 1 = 0. \ ■$$

Рассмотрим три предела — неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, на основе которых получим некоторые соотношения эквивалентности бесконечно малых функций (см. табл. 5.1).

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение. Перепишем функцию под знаком предела в виде $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Используя непрерывность логарифмической функции (см. теорему 6.4 и формулу (6.2)) и второй замечательный предел (см. формулу (5.1)), получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$$

В частности, при $a = e$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, или $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. ■

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ $(a \neq 1,\ a > 0)$.

Решение. Полагаем $t = a^x - 1$, где $t \to 0$ при $x \to 0$. Тогда $x = \log_a(1+t)$. Учитывая пример 6.2, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

В частности, при $a=e$ получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, или $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$. ■

Пример 6.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}$ $(p\in\mathbf{R},\ p\neq 0)$.

Решение. Обозначим $t=(1+x)^p-1$, где $t\to 0$ при $x\to 0$. Из равенства $(1+x)^p=1+t$ имеем $p\ln(1+x)=\ln(1+t)$. Поэтому $\frac{(1+x)^p-1}{x}=\frac{t}{x}=\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{p\ln(1+x)}{x}$. Используя пример 6.2, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{p\ln(1+x)}{x}=$$
$$=p\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=p.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{px}=1$, или $(1+x)^p-1\sim px$ при $x\to 0$. ■

Таким образом, доказаны все соотношения эквивалентности бесконечно малых функций из табл. 5.1 для функции $\alpha(x)=x$, $a=0$ (см. формулу (5.1), типовые примеры 1–3 из § 5, примеры 6.2–6.4).

6.3. Непрерывность функций на интервале, полуинтервале, отрезке.

Определение 6.4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Обозначают $f(x)\in C(a,b)$.

Определение 6.5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на полуинтервале* $[a,b)$ (или $(a,b]$), если она непрерывна на интервале (a,b) и непрерывна справа в точке a (или непрерывна слева в точке b). Пишут $f(x)\in C[a,b)$ (или $f(x)\in C(a,b]$).

Определение 6.6. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна на интервале (a,b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b. Обозначают $f(x)\in C[a,b]$.

Теорема 6.7. Каждая основная элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Доказательство следует из теоремы 6.4 и определений 6.4–6.6.

6.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 6.1. Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.

Свойство 6.2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т. е. существуют такие точки ξ и η отрезка $[a, b]$, что $f(\xi) = m$, $f(\eta) = M$, и для всех точек x этого отрезка выполняются неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Свойство 6.3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, причем $A \neq B$, то для любого C такого, что $A < C < B$, найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = C$.

Как следствие из свойства 6.3 получаем: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = 0$. Точка ξ, в которой $f(\xi) = 0$, называется *нулем* функции $f(x)$.

Теорема 6.8. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна (возрастает или убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена, строго монотонна (возрастает или убывает) и непрерывна на соответствующем отрезке оси Oy.

6.5. Точки разрыва функций и их классификация.

Согласно определению 6.1 для функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, должны выполняться три условия непрерывности:

1) функция определена в точке x_0 $(\exists\, f(x_0))$;

2) функция имеет конечный предел при $x \to x_0$ ($\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$);

3) предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в самой точке x_0 $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$.

Определение 6.7. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, а сама функция — *разры́вной* в точке x_0, если она не является непрерывной в этой точке, т. е. если нарушено хотя бы одно из указанных выше условий: либо $x_0 \notin D_f$, либо не существует конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Рассмотрим функции, заданные графически на рис. 6.5. Для всех этих функций x_0 — точка разрыва.

В первом случае (рис. 6.5, *а*) не выполнено условие 1, так как в точке x_0 функция не определена.

Во втором случае (рис. 6.5, *б*) нарушено условие 2, так как предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

В третьем случае (рис. 6.5, *в*) не выполнено условие 3, так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$.

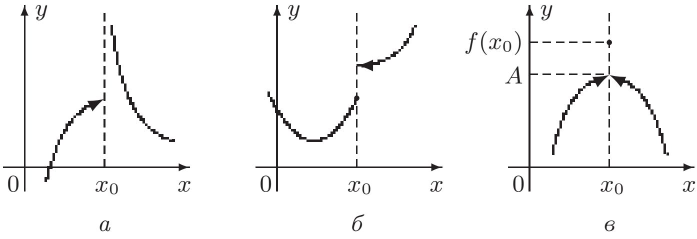


Рис. 6.5

Определение 6.8. Пусть x_0 — точка разрыва функции $f(x)$. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если функция имеет в этой точке конечные пределы справа и слева, т. е.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \neq \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \neq \infty.$$

В этом случае либо $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, либо $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq$ $\neq f(x_0)$, причем $f(x)$ может быть и не определена в точке x_0.

Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называют *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 6.9. Точка разрыва первого рода x_0, в которой $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, называется *точкой устранимого разрыва.*

Рассмотрим функцию $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, для которой $x_0 = 0$ есть точка разрыва, так как функция не определена в этой точке. Односторонние пределы функции в этой точке конечны и равны, поскольку $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Следовательно, $x_0 = 0$ — точка устранимого разрыва. Полагая $f(0) = f(+0) = f(-0) = 0$, получим функцию, непрерывную в точке $x_0 = 0:$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тем самым данную функцию $f(x)$ мы доопределили по непрерывности в точке $x_0 = 0$.

Определение 6.10. Точка разрыва x_0, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода.* В этом случае хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или равен бесконечности.

Замечание 6.2. Принимая во внимание замечание 6.1 и определение 6.7, подчеркнем еще раз: для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 $(\exists\, f(x_0))$;

2) существуют конечные односторонние пределы функции в этой точке $(\exists\, f(x_0+0) \neq \infty,\ \exists\, f(x_0-0) \neq \infty)$;

3) односторонние пределы функции в точке x_0 равны значению функции в этой точке $(f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0))$.

Поэтому при исследовании функции на непрерывность и определении точек разрыва функции рекомендуется придерживаться следующей схемы.

1. Найти область определения функции.

2. Указать промежутки области определения, на которых функция непрерывна.

3. Выявить точки, в которых может быть нарушена непрерывность функции.

4. Найти односторонние пределы функции в каждой из указанных точек. Если функция определена в них, то найти значения функции в этих точках.

5. Сравнить в каждой такой точке найденные односторонние пределы и значение функции, если она определена в этой точке, и установить либо непрерывность, либо разрыв функции в каждой из полученных точек.

6. В случае разрыва функции определить тип точки разрыва.

6.6. Типовые примеры.

Пример 1. Найти односторонние пределы в точке $x_0 = 1$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leqslant x < 1; \\ 3x+2, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Решение. Найдем правый предел $f(1+0)$ функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$, т. е. при $x \to 1$ и $x > 1$. Имеем

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (3x+2) = 5.$$

Для левого предела $f(1-0)$ в точке $x_0 = 1$ $(x \to 1,\ x < 1)$ получим

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x+1) = 2. \ \blacksquare$$

Пример 2. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ и определить тип каждой точки разрыва.

Решение. Точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва функции, так как в ней функция не определена. Найдем правый и левый пределы функции в этой точке:

$$f(+0) = \lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{x} = 1;$$

$$f(-0) = \lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{-x}{x} = -1.$$

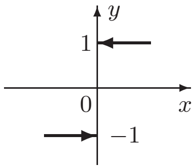


Рис. 6.6

Односторонние пределы конечны и различны. Следовательно, точка $x_0 = 0$ — точка разрыва первого рода. На графике (рис. 6.6) виден конечный скачок функции в точке $x_0 = 0$, равный $f(+0) - f(-0) = 2$. ■

Пример 3. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ и определить тип каждой точки разрыва.

Решение. В точке $x_0 = 0$ функция не определена, и, следовательно, $x_0 = 0$ — точка разрыва функции. Найдем правый и левый пределы функции в этой точке:

$$f(+0) = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$f(-0) = \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

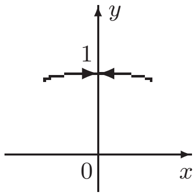


Рис. 6.7

Так как односторонние пределы конечны и равны, т. е. $f(+0) = f(-0)$, то $x_0 = 0$ — точка устранимого разрыва данной функции (рис. 6.7). ■

Если положить $f(0) = 1$, то разрыв можно устранить. Тем самым, первоначальную функцию доопределим по непрерывности в точке $x_0 = 0$. Аналитически новую функцию $\varphi(x)$, непрерывную на всей числовой оси, запишем в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x > 0; \\ 2, & x < 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функции $y_1 = x^3 + 2$ и $y_2 = 2$ непрерывны при любом x. Единственной точкой, в которой функция $f(x)$ может иметь разрыв, является точка $x_0 = 0$. Вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в этой точке:

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}(x^3 + 2) = 2;$$

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} 2 = 2.$$

Так как $f(0)=1\neq f(+0)=f(-0)=2$, то $x_0=0$ — точка разрыва первого рода данной функции (рис. 6.8). ■

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

Решение. Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x_0=0$. Рассмотрим $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\sin\dfrac{1}{x}$. Так как $\dfrac{1}{x}\to+\infty$ при $x\to+0$ и значения функции $f(x)$ колеблются между -1 и 1, не приближаясь к какому-либо определенному значению, то $f(+0)$ не существует. Аналогично, не существует и $f(-0)$. Следовательно, $x_0=0$ — точка разрыва второго рода (рис. 3.11). ■

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

Решение. Данная рациональная функция непрерывна всюду, кроме точек, где знаменатель обращается в ноль. Следовательно, функция терпит разрыв в точках $x_1=2$ и $x_2=-2$. Найдем односторонние пределы данной функции в этих точках:

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}\frac{x}{x^2-4}=+\infty,$$

$$f(2-0)=\lim_{x\to2-0}\frac{x}{x^2-4}=-\infty;$$

$$f(-2+0)=\lim_{x\to-2+0}\frac{x}{x^2-4}=+\infty,$$

$$f(-2-0)=\lim_{x\to-2-0}\frac{x}{x^2-4}=-\infty.$$

Точки $x_1=2$ и $x_2=-2$ — точки разрыва второго рода (рис. 6.9). ■

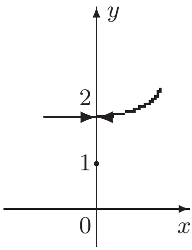


Рис. 6.8

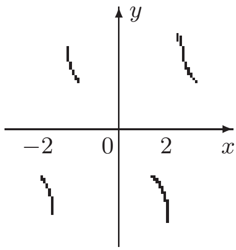


Рис. 6.9

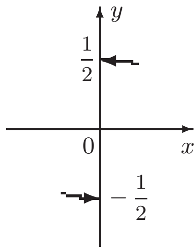


Рис. 6.10

Пример 7. Исследовать на непрерывность в точке $x_0=0$ функцию $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{2x}$.

Решение. В точке $x_0=0$ функция не определена. Следовательно, $x_0=0$ — точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в этой точке. Если $x \to 0$ и $x > 0$, то $\dfrac{|\sin x|}{2x} > 0$ и $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{|\sin x|}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Если $x \to 0$ и $x < 0$, то $\dfrac{|\sin x|}{2x} < 0$ и $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{|\sin x|}{2x} = -\dfrac{1}{2}$. Так как односторонние пределы $f(+0)$ и $f(-0)$ конечны и различны, то $x_0 = 0$ — точка разрыва первого рода, причем скачок функции в этой точке равен $f(+0) - f(-0) = \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$ (рис. 6.10). ■

Пример 8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x < 2; \\ 2x - 1, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ определена всюду на $[-1, 3]$, непрерывна на полуинтервале $[-1, 2)$ и на отрезке $[2, 3]$. Единственной точкой, в которой возможен разрыв функции $f(x)$, является точка $x_0 = 2$. Вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в этой точке:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} x^2 = 4,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (2x - 1) = 3.$$

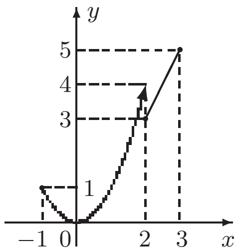


Рис. 6.11

Односторонние пределы $f(2-0)$ и $f(2+0)$ конечны и различны. Следовательно, $x_0 = 2$ — точка разрыва первого рода. Скачок функции в точке $x_0 = 2$ равен $f(2+0) - f(2-0) = 3 - 4 = -1$ (рис. 6.11). ■

Пример 9. Найти и исследовать точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 2x}$.

Решение. Точками разрыва функции $f(x)$ будут точки $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$, в которых функция $f(x)$ не определена $(x^2 + 2x = 0)$.

Исследуем точку $x_1 = 0$. При $x \to 0$ и $x > 0$ функция $\sin x > 0$, $\dfrac{\sin x}{x(x+2)} > 0$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x(x+2)} = \dfrac{1}{2}$. При $x \to 0$ и $x < 0$ функция $\sin x < 0$, $\dfrac{\sin x}{x(x+2)} > 0$, $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x(x+2)} = \dfrac{1}{2}$. Односторонние пределы $f(+0)$ и $f(-0)$ в точке $x_1 = 0$ конечны и равны. Следовательно, $x_1 = 0$ —

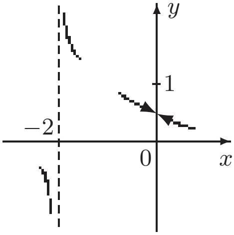


Рис. 6.12

точка устранимого разрыва. Разрыв устраняется, если положить $f(0) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим точку $x_2 = -2$. Если $x \to -2$ и $x > -2$, то $\sin x < 0$, $x < 0$, $x + 2 > 0$, $\frac{\sin x}{x(x+2)} > 0$ и $f(-2+0) = \lim\limits_{x\to-2+0} \frac{\sin x}{x(x+2)} = +\infty$. Если $x \to -2$ и $x < -2$, то $\sin x < 0$, $x < 0$, $x + 2 < 0$, $\frac{\sin x}{x(x+2)} < 0$ и $f(-2-0) = \lim\limits_{x\to-2-0} \frac{\sin x}{x(x+2)} = -\infty$. Следовательно, $x_2 = -2$ — точка разрыва второго рода (рис. 6.12). ■

Пример 10. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$.

Решение. Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x_0 = -3$. Найдем односторонние пределы $f(-3+0)$ и $f(-3-0)$ функции в этой точке. Если $x \to -3$ и $x > -3$, то $x + 3 > 0$, $\frac{1}{x+3} \to +\infty$ и $f(-3+0) = \lim\limits_{x\to-3+0} e^{\frac{1}{x+3}} = +\infty$. Если $x \to -3$ и $x < -3$, то $x + 3 < 0$, $\frac{1}{x+3} \to -\infty$ и $f(-3-0) = \lim\limits_{x\to-3-0} e^{\frac{1}{x+3}} = 0$. Следовательно, точка $x_0 = -3$ — точка разрыва второго рода (рис. 6.13). ■

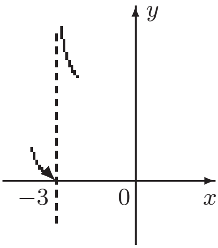


Рис. 6.13

Пример 11. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{2 - 2^{1/x}}$.

Решение. Данная функция непрерывна всюду, кроме точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, так как в точке $x_1 = 0$ не определена дробь $\frac{1}{x}$, в точке $x_2 = 1$ знаменатель $2 - 2^{1/x}$ исходной дроби равен нулю. Найдем односторонние пределы данной функции в точках x_1 и x_2.

При $x \to 0$ и $x > 0$ дробь $\frac{1}{x} \to +\infty$, $2^{1/x} \to +\infty$ и $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{2 - 2^{1/x}} = 0$. При $x \to 0$ и $x < 0$ дробь $\frac{1}{x} \to -\infty$, $2^{1/x} \to 0$ и $f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{2 - 2^{1/x}} = \frac{1}{2}$. Так как в точке $x_1 = 0$ односторонние пределы $f(+0) = 0$ и $f(-0) = \frac{1}{2}$ конечны и различны, то x_1 — точка разрыва первого рода.

Найдем $f(1+0)$ и $f(1-0)$. При $x \to 1$ и $x > 1$ дробь $\dfrac{1}{x} < 1$, $2^{1/x} < 2$, разность $2 - 2^{1/x} \to 0$, оставаясь положительной. Поэтому $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{2-2^{1/x}} = +\infty$. При $x \to 1$ и $x < 1$ дробь $\dfrac{1}{x} > 1$, $2^{1/x} > 2$, разность $2 - 2^{1/x} \to 0$, оставаясь отрицательной, и $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{2-2^{1/x}} = -\infty$. Следовательно, $x_2 = 1$ — точка разрыва второго рода (рис. 6.14). ■

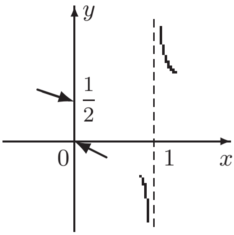


Рис. 6.14

Замечание 6.3. Отметим, что в типовых примерах выделены отдельно точки устранимого разрыва функции, т. е. те точки разрыва первого рода, для которых существуют равные односторонние пределы функции.

6.7. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

2. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+12}-3}{x^2-9}$ в точке $x_0 = -3$.

3. Найти односторонние пределы функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & -\infty < x < 0; \\ \sin \dfrac{1}{x}, & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$.

4. Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 1$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi x}{2}, & -\infty < x < 1; \\ x - 1, & 1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

5. Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$. Указать в ответе односторонние пределы функции в этой точке.

6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$.

8. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{|x|}{x-x^2}$.

9. Установить характер разрыва функции $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$.

10. Установить характер разрыва функции $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x+3}-3)}{x^2-36}$ в точке $x_0 = 6$.

11. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sqrt[x]{2} - 1$.

12. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{|x+2|}$.

13. Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

14. Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 1$ функцию

$$f(x) = \ln\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|.$$

Г Л А В А II

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 7. Производная функции, ее свойства и приложения

7.1. Определение производной функции в точке.

Определение 7.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. *Производной* $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует и конечен, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (7.1)$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Часто производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают $y'_x(x_0)$, $y'(x_0)$ или $y_x(x_0)$.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* функции.

Пример 7.1. Используя определение 7.1, найти производную функции $y(x) = x^3$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. Запишем приращение функции:

$$\Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = (-1 + \Delta x)^3 - (-1)^3 = \\ = -1 + 3\Delta x - 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1 = \Delta x(3 - 3\Delta x + (\Delta x)^2).$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3 - 3\Delta x + (\Delta x)^2$ и

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3 - 3\Delta x + (\Delta x)^2) = 3. \blacksquare$$

Предел (7.1) в точке x_0 может не существовать или быть бесконечным. В этом случае функция $f(x)$ *не имеет производной* в точке x_0. Если предел (7.1) равен ∞, $-\infty$ или $+\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет бесконечную производную в точке x_0.

Пример 7.2. Используя определение 7.1, найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точках: 1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$.

Решение. Найдем предел в формуле (7.1) для каждого случая:

$$1)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1} = \frac{1}{2};$$

$$2)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty.$$

Следовательно, функция $y = \sqrt(x)$ в точке $x_0 = 1$ имеет конечную производную $y'(1) = \dfrac{1}{2}$, в точке $x_0 = 0$ — бесконечную производную. ■

Пример 7.3. Показать, что функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

Решение. Учитывая, что $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ вычислим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x} = \\ = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \quad (x\to +0), \\ -1, & \Delta x < 0 \quad (x \to -0). \end{cases}$$

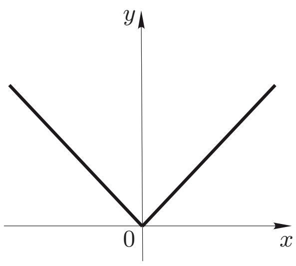


Рис. 7.1

Пределы справа и слева в точке $x_0 = 0$ существуют, конечны, но не равны между собой, и поэтому предела (7.1) в точке $x_0 = 0$ не существует. Следовательно, функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в этой точке (рис. 7.1). ■

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда за ее производную в точке $x_0 = a$ или в точке $x_0 = b$ принимают соответственно предел справа или предел слева отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $x \to x_0$ (см. определения 3.24, 3.25). Эти пределы называют соответственно *правой* или *левой производной* функции $f(x)$ в точке $x = a$ или в точке $x = b$.

Отметим, что если функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке и $f'(x)$ существует в каждой точке этого промежутка, то формула

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

определяет производную $f'(x)$ как *функцию* аргумента x. . В дальнейшем при дифференцировании функции $y = f(x)$, если не указана точка, будем находить производную при всех допустимых значениях аргумента x и записывать ее в виде $y'(x)$ или y'.

Пример 7.4. Найти производную постоянной функции $y = c$.

Решение. Очевидно, что $\Delta y = c - c = 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Согласно формуле (7.1) имеем $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Следовательно, $c' = 0$. ■

Пример 7.5. Найти производную функции $y = \sin x$.

Решение. Используя формулу для разности синусов двух углов и учитывая, что $\sin \dfrac{\Delta x}{2} \sim \dfrac{\Delta x}{2}$ при $x \to 0$ (см. табл. 5.1), находим

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Следовательно, $(\sin x)' = \cos x$. ■

Пример 7.6. Продифференцировать функцию $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Решение. Запишем $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Учитывая, что $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \cdot \ln a$ при $\Delta x \to 0$ (см. табл. 5.1), получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Следовательно, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$. В частности, $(e^x)' = e^x$. ■

7.2. Табличное дифференцирование. Производные основных элементарных функций. Табл. 7.1 содержит производные основных элементарных функций, полученные на основе вычисления предела (7.1). Приведем для примера вывод формулы 7а этой табл.

Пусть $y = \arccos x$. Введем новые обозначения, полагая $\alpha = \arccos x$, $\beta = \arccos(x + \Delta x)$. Тогда $x = \cos\alpha$, $x + \Delta x = \cos\beta$, $\Delta x = (x+\Delta x) - x = \cos\beta - \cos\alpha$. Учитывая, что $\beta \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$, находим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\arccos(x+\Delta x) - \arccos(x)}{\Delta x} = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\beta - \alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}\,.$$

Таблица 7.1

№	$y = y(x)$	$y'(x)$
1	$y = x^\alpha$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$
1а	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
1б	$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
2	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a, \quad a \in \mathbf{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$
2а	$y = e^x$	$y' = e^x$
3	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a \in \mathbf{R},$ $a > 0, \quad a \neq 1$
3а	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
4	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6а	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7а	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
8а	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Используя формулу тригонометрии для разности косинусов двух углов, эквивалентность $\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2} \sim \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ при $\beta\to\alpha$ и непрерывность функции $\sin x$ при всех $x\in\mathbf{R}$, имеем

$$y' = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta-\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha} = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta-\alpha}{-2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta-\alpha}{-2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\cdot\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}} = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{-1}{\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}} = \frac{-1}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Следовательно, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Производные, включенные в табл. 7.1, называют *табличными*, а дифференцирование функций с использованием этой табл. называют *табличным дифференцированием*.

Пример 7.7. Найти производные функций $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ и $y_2 = \log_2 x$.

Решение. Используя формулу 1 табл. 7.1 при $\alpha = -\dfrac{2}{5}$ для y_1 и формулу 3 при $a=2$ для y_2, найдем

$$y_1' = -\frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{2}{5}-1} = -\frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{7}{5}}, \quad y_2' = \frac{1}{x}\cdot\log_2 e = \frac{1}{x\ln 2}. \ \blacksquare$$

Теорема 7.1 (*необходимое условие существования производной*). Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По условию в точке x существует производная функции $f(x)$, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

Из теоремы 4.3 о связи функции и ее предела следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Отсюда $\Delta y = (y'(x)+\alpha)\Delta x$. Следовательно, $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x. $\blacksquare$

Отметим, что утверждение, обратное теореме 7.1, неверно, т. е. из непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x не следует существования производной в этой точке. Так, функция $y=|x|$, непрерывная в точке $x=0$, не имеет производной в этой точке (см. пример 7.3).

7.3. Свойства производной.

Теорема 7.2. Если существуют производные функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ в точке x_0, то в этой точке существует производная суммы $u + v = y$, причем
$$y'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0),$$
или
$$(u + v)' = u' + v'. \tag{7.2}$$

Доказательство. Давая приращение Δx аргументу x в точке x_0, получим приращения Δu, Δv и Δy функций u, v и $y = u + v$ в этой точке. Запишем
$$\Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (u + v) = \Delta u + \Delta v.$$
Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$. По теореме 4.12 о пределе суммы двух функций находим
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v',$$
т. е. $(u + v)' = u' + v'$. Теорема доказана. ■

Пример 7.8. Найти производные функций: а) $y = x^2 + \sin x$; б) $y = \operatorname{arctg} x + e^x$.

Решение. а) $y' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$; б) $y' = (\operatorname{arctg} x)' + (e^x)' = \dfrac{1}{1 + x^2} + e^x$. ■

Теорема 7.3. Если существуют производные функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ в точке x_0, то в этой точке существует производная произведения $u \cdot v = y$, причем
$$y'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0),$$
или
$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{7.3}$$

Доказательство. Давая приращение Δx аргументу x в точке x_0, получим приращения Δu, Δv и Δy функций u, v и $y = u \cdot v$ в этой точке, причем
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v.$$
Составим отношение
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v. \tag{7.4}$$
В силу необходимого условия существования производной функции $v(x)$ (см. теорему 7.1) имеем $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Кроме того,

по условию предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ существует и конечен. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ в равенстве (7.4) и используя теорему 4.12, получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+ \\ +\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right)=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Следовательно, $(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, что и требовалось доказать. ■

Если $v(x)=C$, то $(u\cdot v)'=(uC)'=Cu'(x)$, т. е. постоянный множитель выносится за знак производной.

Пример 7.9. Найти производную функции $y=3x\cdot\cos x$.

Решение. Используя формулу (7.3), найдем $y'=3(x\cos x)'=$ $=3(x'\cos x+x(\cos x)')=3(\cos x-x\sin x)$. ■

Теорема 7.4. Если существуют производные функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ в точке x_0 и $v(x_0)\neq 0$, то в этой точке существует производная частного $\dfrac{u}{v}=y$, причем

$$y'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)},\quad v(x_0)\neq 0,$$

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},\quad v\neq 0. \tag{7.5}$$

Доказательство. Давая приращение Δx аргументу x в точке x_0, получим приращения Δu и Δv функций u и v в этой точке. Соответствующее приращение функции y имеет вид

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{u\cdot v+\Delta u\cdot v-u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Запишем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и используя теоремы 4.12, 4.13, найдем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(v+\Delta v)}.$$

По теореме 7.1 приращение $\Delta v\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x_0)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x_0)$, из последнего равенства окончательно получим формулу (7.5) для производной частного $\dfrac{u}{v}$ функций u и v. Теорема доказана. ■

Пример 7.10. Найти производные функций $y_1 = \dfrac{e^x}{\cos x}$, $y_2 = xe^x + \dfrac{\sin x}{\ln x}$.

Решение. Используя формулу (7.5) и формулы 2а и 5 табл. 7.1, получим

$$y_1' = \frac{(e^x)'\cos x - e^x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x\cos x - e^x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}.$$

Учитывая формулы (7.2), (7.3) и (7.5), а также формулы 1, 2а и 4 табл. 7.1, найдем

$$y_2' = (x\cdot e^x)' + \left(\frac{\sin x}{\ln x}\right)' = x'\cdot e^x + x\cdot(e^x)' + \\ + \frac{(\sin x)'\ln x - \sin x(\ln x)'}{\ln^2 x} = e^x + x\cdot e^x + \\ + \frac{\cos x\cdot\ln x - \sin x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = e^x + x\cdot e^x + \frac{x\cdot\cos x\cdot\ln x - \sin x}{x\cdot\ln^2 x}. \ ■$$

7.4. Геометрический и механический смысл производной.

Определение 7.2. Пусть дан график функции $y = f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 (рис. 7.2). *Касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ называется предельное положение секущей MN при стремлении точки N к точке M по кривой.

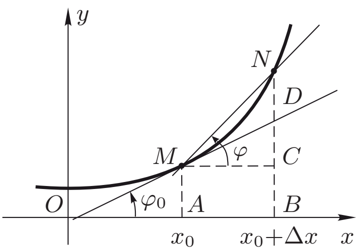


Рис. 7.2

Установим геометрический смысл производной $f'(x_0)$. По определению 7.1 производная $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Числа x_0, Δx, $x_0 + \Delta x$, $f(x_0)$, $f(x_0+\Delta x)$, $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ геометрически выражают соответственно длины следующих отрезков: OA, $AB = MC$, OB, $AM = BC$, BN, NC. Тогда дробь $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{NC}{MC}$ есть отношение катетов прямоугольного треугольника MCN, т. е. тангенс угла $\varphi = \angle NMC$. Если $\Delta x \to 0$, то точка N стремится по кривой к точке M, причем секущая MN

стремится занять положение касательной к кривой в точке M. Тогда $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{N \to M} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0$, где φ_0 — угол между положительным направлением оси Ox и касательной к кривой в точке M.

Итак, *геометрический смысл производной* состоит в следующем: производная $y'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла между положительным направлением оси Ox и касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, т. е. угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Пример 7.11. Определить угол α наклона линии $y = e^x$ к положительному направлению оси Ox в точке пересечения линии с осью Oy.

Решение. График функции $y = e^x$ пересекает ось Oy в точке $x_0 = 0$. Тангенс искомого угла α равен тангенсу угла наклона к положительному направлению оси Ox касательной к кривой $y = e^x$ в точке $x_0 = 0$ (рис. 7.3) и, следовательно, равен значению производной функции $y = e^x$ в указанной точке. Так как $y'(x) = e^x$, то $y'(0) = e^0 = 1 = \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда искомый угол $\alpha = 45^\circ$. ■

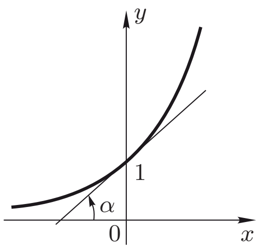


Рис. 7.3

Выясним механический смысл производной. Пусть материальная точка движется по прямой так, что в каждый момент времени t она находится на расстоянии $s(t)$ от некоторой начальной неподвижной точки O. В этом случае функция $s = s(t)$ определяет закон движения этой точки. За промежуток времени Δt от момента t до момента $t + \Delta t$ точка пройдет путь, равный $s(t + \Delta t) - s(t)$. Средняя скорость $v_{\text{ср}}(t)$ такого движения равна $v_{\text{ср}}(t) = \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. За истинную скорость $v(t)$ движения точки в момент t принимают предел средней скорости $v_{\text{ср}}(t)$ при неограниченном уменьшении промежутка времени Δt, т. е.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Таким образом, *с механической точки зрения* производная функции $s = s(t)$, задающей закон прямолинейного движения точки, равна мгновенной скорости движения точки в момент времени t. В более широком смысле — производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна скорости изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Пример 7.12. Летательный аппарат (ЛА) движется по закону $s(t) = t^2$ м. Определить:

а) среднюю скорость движения ЛА за первые 3 секунды пути;

б) скорость в момент времени $t = 3$ с.

Решение. а) Найдем среднюю скорость $v_{\text{ср}}(t)$ по формуле

$$v_{\text{ср}}(t) = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \\ = \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t.$$

При $t = 0$, $\Delta t = 3$ имеем $v_{\text{ср}} = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ (м/с).

б) Определим скорость $v(t)$ в момент $t = 3$ с: $v(3) = s'(3) = 2t\big|_{t=3} = 2 \cdot 3 = 6$ (м/с). ■

7.5. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

Пример 7.13. Вывести уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 7.4).

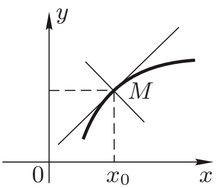


Рис. 7.4

Решение. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha$, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Так как угловой коэффициент k касательной к графику функции $y = f(x)$ равен значению производной функции в точке касания, т. е. $k = y'(x_0)$, то уравнение касательной, как прямой, проходящей через точку касания (x_0, y_0), запишется в виде

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \quad ■ \tag{7.6}$$

Пример 7.14. Записать уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $O(0, 0)$.

Решение. Учитывая формулу 6 табл. 7.1, найдем угловой коэффициент k касательной в точке $O(0, 0)$:

$$k = y'(0) = (\operatorname{tg} x)'\Big|_{x_0=0} = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x_0=0} = 1.$$

Уравнение касательной (7.6) примет вид $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, или $y = x$. ■

Пример 7.15. Записать уравнение касательной к кривой $y = \ln x$ в точке ее пересечения с осью Ox.

Решение. Найдем абсциссу точки M пересечения кривой с осью Ox из уравнения $\ln x = 0$. Отсюда $x_0 = 1$. Очевидно, что $y_0 = y(x_0) = \ln 1 = 0$. Составим уравнение касательной в точке $M(1, 0)$. Найдем угловой коэффициент касательной в этой точке, используя формулу 3а табл. 7.1: $y'(1) = (\ln x)'\Big|_{x_0=1} = \dfrac{1}{x}\Big|_{x_0=1} = 1$. Подставляя

$x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $y'(1) = 1$ в уравнение (7.6), получим искомое уравнение касательной: $y - 0 = 1(x - 1)$, или $y = x - 1$. ■

Определение 7.3. *Нормалью* к кривой в заданной точке M называется прямая, проведенная через эту точку перпендикулярно касательной к кривой в точке M (рис. 7.4).

Пример 7.16. Вывести уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в заданной точке $M(x_0, y_0)$.

Решение. Угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух взаимно перпендикулярных прямых удовлетворяют условию $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$. Так как касательная и нормаль к кривой взаимно перпендикулярны и угловой коэффициент касательной в точке x_0 равен $y'(x_0)$, то угловой коэффициент нормали равен $-\dfrac{1}{y'(x_0)}$. Запишем уравнение нормали, как уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\dfrac{1}{y'(x_0)}$, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$, в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0). \ ■ \tag{7.7}$$

Пример 7.17. Записать уравнение нормали к кривой $y = e^x$ в точке $M(0, 1)$.

Решение. Так как $y'(x) = (e^x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (см. формулу 2а табл. 7.1), то $y'(0) = e^0 = 1$. Угловой коэффициент нормали в точке $M(0, 1)$ будет равен $-\dfrac{1}{y'(0)} = -1$. Следовательно, уравнение нормали (7.7) имеет вид $y - 0 = -1 \cdot (x - 0)$, или $y = -x$. ■

Пример 7.18. Записать уравнение нормали к кривой $y = \ln x$ в точке ее пересечения с осью Ox.

Решение. В примере 7.15 найдены точка $M(1, 0)$ пересечения данной кривой с осью Ox и угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке, равный $y'(1) = 1$. Угловой коэффициент нормали в точке $M(1, 0)$ будет равен $-\dfrac{1}{y'(1)} = -1$, и уравнение нормали (7.7) примет вид $y - 0 = -1(x - 1)$, или $y = 1 - x$. ■

7.6. Типовые примеры.

Пример 1. Вычислить производную функции $y = 5x^2 - 7x - 4$ в точке $x_0 = 1$, используя формулу (7.1).

Решение. Найдем $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 5(1 + \Delta x)^2 - 7(1 + \Delta x) - 4 - 5 + 7 + 4 = 3\Delta x + 5\Delta x^2$. Разделим Δy на Δx: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3 + 5\Delta x$. По формуле (7.1) получим

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (3+5\Delta x) = 3. \ \blacksquare$$

Пример 2. Найти производную функции $y(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ в точке x, используя формулу 7.1.

Решение. Очевидно, что

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{2(x+\Delta x)+1} - \frac{1}{2x+1} =$$
$$= \frac{2x+1-2x-2\Delta x-1}{((2x+1)+2\Delta x)(2x+1)} = -\frac{2\Delta x}{(2x+1)^2+2(2x+1)\Delta x}.$$

Для производной $y'(x)$ получим

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2\Delta x}{\Big((2x+1)^2+2(2x+1)\Delta x\Big)\Delta x} = \frac{-2}{(2x+1)^2}. \ \blacksquare$$

В примерах 3–6 найти производные функций в точке $x_0 \in D_y$, используя формулы для производных основных элементарных функций и свойства производных (D_y — область определения функции $y = f(x)$).

Пример 3. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$, $x_0 = x \in D_y$.

Решение. $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + (4)' = 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 7\cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$. $\blacksquare$

Пример 4. $y = e^x \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.

Решение. $y' = (e^x)' \operatorname{arctg} x + e^x(\operatorname{arctg} x)' = e^x \cdot \operatorname{arctg} x + e^x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$, $y'(0) = 1$. $\blacksquare$

Пример 5. $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $x_0 = x \in D_y$.

Решение. $y' = \dfrac{x^2\cdot(\sin x)' - \sin x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \dfrac{x^2\cdot\cos x - \sin x\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$. $\blacksquare$

Пример 6. $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$.

Решение. $y' = \dfrac{(\ln x)'\cdot x - \ln x\cdot(x)'}{(x)^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y'(e) = 0$. $\blacksquare$

Пример 7. Найти угол α наклона к положительной полуоси Ox касательной к кривой $y = \sin x$ в начале координат.

Решение. 1) Находим производную заданной функции и вычисляем ее значение в точке касания $O(0,0)$: $y'(x) = \cos x$, $y'(0) = 1$.

2) Полагаем угловой коэффициент k касательной равным значению производной в точке касания: $k = \operatorname{tg}\alpha = y'(0) = 1$.

3) Определяем угол α наклона касательной: $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$. ■

Пример 8. Найти угол α, под которым кривая $y = 1 + x^3$ пересекает ось Ox (α — угол между осью Ox и касательной к кривой в точке ее пересечения с осью Ox).

Решение. 1) Определим точку x_0 пересечения кривой $y = 1 + x^3$ с осью Ox из условия $y = 0$, или $1 + x^3 = 0$. Отсюда $x_0 = -1$.

2) Найдем производную функции $y = 1 + x^3$ и вычислим ее значение в точке $x_0 = -1$: $y'(x) = 3x^2$, $y'(-1) = 3$.

3) Так как тангенс искомого угла α равен значению производной в точке $x_0 = -1$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = y'(-1) = 3$, то $\alpha = \operatorname{arctg} 3$. ■

Пример 9. Найти угол между кривыми $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^4$. (За угол между кривыми принимают наименьший из двух смежных углов, образуемых касательными к кривым в точке их пересечения.)

Решение. 1) Найдем точки пересечения кривых y_1 и y_2 из уравнения $y_1 = y_2$, или $x^2 = x^4$. Отсюда $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$. Следовательно, точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(-1,1)$ — точки пересечения кривых.

2) Вычислим угловые коэффициенты $k_1(x)$ и $k_2(x)$ касательных к данным кривым $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точках их пересечения $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(-1,1)$:

$$k_1(x) = y_1'(x) = 2x, \qquad k_2(x) = y_2'(x) = 4x^3.$$

В точке M_1 имеем: $k_1(0) = 0$, $k_2(0) = 0$; в точке M_2 — $k_1(1) = 2$, $k_2(1) = 4$; в точке M_3 — $k_1(-1) = -2$, $k_2(-1) = -4$.

3) Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3 углы между касательными к данным кривым соответственно в точках M_1, M_2, M_3. Если α и β — углы наклона двух прямых к положительной полуоси Ox, то угол между этими прямыми $\varphi = \alpha - \beta$ $\left(\varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. В данном случае $\operatorname{tg}\alpha = k_1$, $\operatorname{tg}\beta = k_2$.

4) Найдем $\operatorname{tg}\varphi$, подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу для тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Отсюда для точек M_1, M_2, M_3 соответственно получим: $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{2}{9}$, $\operatorname{tg}\varphi_3 = \dfrac{2}{9}$. Следовательно, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{9}$. ■

Пример 10. Пусть закон движения летательного аппарата (ЛА) по оси Ox имеет вид $x(t) = 3t^3 - t^2$. Найти скорость движения $v(t)$ ЛА в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (x задается в метрах, t — в секундах).

Решение. 1) Найдем скорость движения ЛА в произвольный момент времени t: $v(t) = x'(t) = 9t^2 - 2t$.

2) Вычислим значения скорости в заданные моменты времени: $v(0) = x'(0) = 0$ м/с, $v(1) = x'(1) = 7$ м/с, $v(2) = x'(2) = 32$ м/с. ■

Пример 11. По оси Ox движутся в одном направлении две ракеты, имеющие законы движения $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2$ и $x_2(t) = 100 + 5t$, где $t > 0$. С какой скоростью удаляются эти ракеты друг от друга в момент встречи (x задается в метрах, t — в секундах)?

Решение. 1) Определим момент встречи ракет из уравнения $x_1(t) = x_2(t)$, или $\frac{1}{2}t^2 = 100 + 5t$, $t^2 - 10t - 200 = 0$. Отсюда $t_1 = 20$, $t_2 = -10$. Так как $t > 0$, то момент встречи $t_1 = 20$ с.

2) Найдем скорости движения ракет в момент встречи t_1: $v_1(t_1) = x_1'(t_1) = t\Big|_{t=20} = 20$ м/с; $v_2(t_1) = x_2'(t_1) = 5$ м/с.

3) Искомая скорость v_0 удаления ракет друг от друга в момент $t = t_1$ равна разности скоростей их движения, т. е. $v_0 = v_1(t_1) - v_2(t_1) = 20$ м/с $- 5$ м/с $= 15$ м/с. ■

Пример 12. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. 1) Запишем уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0,f(x_0))$ соответственно в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{и} \quad y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

где $k = y'(x_0)$.

2) Вычислим $y_0 = y(x_0)$. Так как $x_0 = 1$, то $y_0 = y(1) = x^3\Big|_{x=1} = 1$.

3) Найдем $k = y'(1) = (x^3)'\Big|_{x=1} = 3x^2\Big|_{x=1} = 3$.

4) Подставляя значения $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $k = 3$ в уравнение касательной, получим $y - 1 = 3(x - 1)$, или $3x - y - 2 = 0$. Уравнение нормали запишем в виде $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$, или $x + 3y - 2 = 0$. ■

Пример 13. В какой точке $M(x_0, y_0)$ касательная к кривой $y = x^4$ перпендикулярна прямой $x + 4y + 8 = 0$?

Решение. 1) Найдем угловой коэффициент k_1 касательной к данной кривой в точке $M(x_0, y_0)$:

$$k_1 = y'(x_0) = (4x^3)'\Big|_{x=x_0} = 4x_0^3.$$

2) Запишем уравнение данной прямой $x + 4y + 8 = 0$ в виде $y = -\frac{1}{4}x - 2$. Угловой коэффициент этой прямой $k_2 = -\frac{1}{4}$.

3) По условию $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$, или $4x_0^3 = -\dfrac{1}{-\dfrac{1}{4}} = 4$. Отсюда $x_0^3 = 1$ и $x_0 = 1$. Тогда $y_0 = y(x_0) = x^4\Big|_{x_0=1} = 1$.

4) Следовательно, искомая точка есть точка $M(1, 1)$. ■

7.7. Задачи для самостоятельного решения.

В задачах 1–3 найти производные функций либо в заданной точке x_0, либо в произвольной точке $x \in D_y$, используя определение производной:

1. $y = x^2 + x + 1,\ x_0 = 1;$ **2.** $y = \sqrt{x^2 - 1},\ x \in D_y;$

3. $y = 5\sin x + 3\cos x,\ x \in D_y.$

В задачах 4–6 найти производные функций в точке $x_0 \in D_y$, используя формулы для производных основных элементарных функций и свойства производных:

4. $y = \dfrac{\arcsin x}{x},\ x_0 = x \in D_y;$ **5.** $y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1;$

6. $y = x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2),\ x_0 = 1.$

В задачах 7–16 найти производные указанных функций $\forall\, x \in D_y$:

7. $y = x^5 - 4x^3 + 2x;$ **8.** $y = \arcsin x + \arccos x;$

9. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x;$ **10.** $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x};$

11. $y = \dfrac{e^x}{x^2};$ **12.** $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5};$

13. $y = x\operatorname{ctg} x;$ **14.** $y = 2x\sin x + (x^2 - 2)\cos x;$

15. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x;$ **16.** $y = \dfrac{x^2}{\ln x}.$

17. Под каким углом α кривая $y = x^5$ пересекает ось абсцисс?

18. Под каким углом α кривая $y = 1 - (x-1)^2$ пересекает ось ординат?

19. Найти углы между параболами $y = x^2$ и $y = x^3$.

20. Найти углы между кривыми $y_1 = -x^2 + 2x$ и $y_2 = x^3$.

21. Угол φ поворота тела вращения вокруг оси вращения изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 3t - e^{-3t} + 1$. Найти угловую скорость ω вращения тела в момент $t = 2$ с (угол φ измеряется в радианах).

22. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ в точке $(-2, 5)$.

23. Найти абсциссы точек, в которых касательные к кривой $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ параллельны оси абсцисс.

24. В какой точке $M(x_0, y_0)$ касательная к параболе $y = x^2 - 7x + 3$ перпендикулярна прямой $x - 5y - 3 = 0$?

§ 8. Дифференцирование сложной функции, обратной функции и параметрически заданной функции

8.1. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.

Теорема 8.1 (*правило дифференцирования сложной функции*). Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве D_φ, функция $y = f(u)$ — на множестве D_f, $\varphi(x) \in D_f$, и, следовательно, на множестве $D_y = D_\varphi$ определена сложная функция $y(x) = f(\varphi(x))$.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in D_\varphi$, функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(x_0) \in D_f$, то в точке x_0 существует производная $y'_x(x_0)$ сложной функции $y(x) = f(\varphi(x))$, причем

$$y'_x(x_0) = f'_u(u_0)) \cdot \varphi'_x(x_0). \tag{8.1}$$

В формуле (8.1) через $y'_x(x_0)$ обозначена производная функции $f(\varphi(x))$ по переменной x в точке x_0, т. е.

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\varphi(x_0 + \Delta x)) - f(\varphi(x_0))}{\Delta x},$$

через $f'_u(u_0)$ — производная функции $f(u)$ по переменной u в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, т. е.

$$f'_u(u_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u}\Bigg|_{u_0 = \varphi(x_0)},$$

через $\varphi'_x(x_0)$ — производная функции $\varphi(x)$ по переменной x в точке x_0, т. е.

$$\varphi'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}.$$

Доказательство. Приведем доказательство теоремы 8.1 для случая $\Delta u \neq 0$. Запишем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Используя теорему 4.12 о пределе произведения двух функций, получим

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Из условия существования производной функции $u = \varphi(x)$ в точке x_0 следует непрерывность этой функции в точке x_0 (см. теорему 7.1), т. е. $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{8.2}$$

Так как $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u(u_0)$ при $u_0 = \varphi(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'_x(x_0)$, то из равенства (8.2) окончательно получим формулу (8.1). Теорема доказана. ■

Приведенное доказательство теряет силу, если $\Delta u = 0$. Можно доказать, что теорема 8.1 и в этом случае остается справедливой.

Замечание 8.1. Обычно на практике при использовании теоремы 8.1 опускают индекс «0» у аргументов x и u, предполагая, что в точках x и $u = \varphi(x)$ выполнены все условия теоремы 8.1, и записывают формулу (8.1) в виде

$$y'_x(x) = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x), \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{8.3}$$

В дальнейшем, если не указана конкретная точка, производная $y'_x(x)$ вычисляется при всех допустимых значениях аргумента x. Напомним, что функцию $u = \varphi(x)$ в формуле (8.3) называют промежуточным аргументом сложной функции $y = f(\varphi(x))$. Формула (8.3) может быть обобщена на любое число промежуточных аргументов. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y'_x(x) = f'_u(u) \cdot \varphi'_v(v) \cdot \psi'_x(x) \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x. \tag{8.4}$$

Пример 8.1. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2+1}$.

Решение. Данная функция $y(x)$ может быть записана в виде $y(x) = f(u(x))$, где $f(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = x^2 + 1$. Поэтому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sqrt{u})' \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \ ■$$

Пример 8.2. Найти производную функции $y = \sin \dfrac{1}{x}$.

Решение. Очевидно, что $y = f(u(x))$, где $f(u) = \sin u$, $u(x) = \dfrac{1}{x}$. По формуле (8.3) найдем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)' \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \cos u \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}. \ ■$$

Пример 8.3. Найти производную функции $y = \ln(\cos x^2)$.

Решение. Запишем данную функцию в виде $y(x) = f(u(v(x)))$, где $f(u) = \ln u$, $u(v) = \cos v$, $v(x) = x^2$. По формуле (8.4) получим

$$y'_x = f'_u(u)\cdot u'_v(v)\cdot v'_x(x) = (\ln u)'_u\cdot(\cos v)'_v\cdot(x^2)'_x = \\ = \frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot 2x = \frac{1}{\cos v}\cdot(-\sin v)\cdot 2x = \\ = \frac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x = -2x\cdot\operatorname{tg} x^2. \blacksquare$$

Отметим, что на практике при дифференцировании сложных функций обычно опускают обозначения промежуточных аргументов.

Пример 8.4. Найти производные следующих сложных функций, используя замечание 8.1 и опуская обозначения промежуточных аргументов: а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{e^x + x^2}$; б) $y = \ln(\arcsin x^4)$; в) $y = e^{\arccos 3x}$.

Решение. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{e^x + x^2}$,

$$y' = (\operatorname{arctg}\sqrt{e^x + x^2})'_{u=\sqrt{e^x+x^2}}\cdot(\sqrt{e^x + x^2})'_{v=e^x+x^2}\cdot(e^x + x^2)'_x = \\ = \frac{1}{1+e^x+x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^x+x^2}}(e^x + 2x) = \frac{e^x+2x}{2(1+e^x+x^2)\sqrt{e^x+x^2}};$$

б) $y = \ln(\arcsin x^4)$,

$$y' = \frac{1}{\arcsin x^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^8}}\cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}\cdot\arcsin x^4};$$

в) $y = e^{\arccos 3x}$,

$$y' = e^{\arccos 3x}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\right)\cdot 3 = -\frac{3e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}. \blacksquare$$

Определение 8.1. *Логарифмической производной* функции $y = f(x)$ называется производная от натурального логарифма модуля этой функции, т. е.

$$(\ln|y|)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{8.5}$$

Формула (8.5) получена из формулы (8.3) с учетом равенства $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$. Последнее справедливо, так как $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$ и $(\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$ при $x < 0$.

Из формулы (8.5) для производной y' функции $y = f(x)$ имеем

$$y' = y\cdot(\ln|y|)'. \tag{8.6}$$

Пример 8.5. Найти производную функции

$$y = (x+1)^5(5-3x)^4 e^{2x}\sqrt[3]{(x+2)^5}.$$

Решение. Запишем $\ln|y| = 5\ln|x+1| + 4\ln|5-3x| + 2x + \frac{5}{3}\ln|x+2|$. Дифференцируя, получим

$$(\ln|y|)' = \frac{5}{x+1} + \frac{4}{5-3x}\cdot(-3) + 2 + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

Используя формулу (8.6), найдем производную данной функции:

$$y' = y\cdot(\ln|y|)' = (x+1)^5(5-3x)^4e^{2x}\sqrt[3]{(x+2)^5}\times \times\left(\frac{5}{x+1} - \frac{12}{5-3x} + 2 + \frac{5}{3(x+2)}\right). \ \blacksquare$$

Пример 8.6. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$ $(\cos x > 0)$.

Решение. Очевидно, что $\ln|y| = \operatorname{tg} x\cdot\ln(\cos x)$. Тогда

$$(\ln|y|)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln(\cos x) + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}\cdot(-\sin x).$$

Следовательно, $y' = y\cdot(\ln|y|)' = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$. $\blacksquare$

8.2. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Теорема 8.2. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке $y'(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует производная обратной функции $x = f^{-1}(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}, \quad \text{или} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{8.7}$$

Доказательство. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. По теореме 6.7 для функции $y = f(x)$, непрерывной и строго монотонной в окрестности точки x_0, существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и строго монотонная в соответствующей окрестности точки $y_0 = f(x_0)$. Поэтому, если для функции $y = f(x)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, где $\Delta y \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$, то для обратной функции $x = f^{-1}(y)$ будем иметь $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x = 0$, где $\Delta x \neq 0$ при $\Delta y \neq 0$. Учитывая это, запишем производную обратной функции в виде

$$x(y)'\Big|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)\big|_{x=x_0}},$$

т. е.

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}, \quad \text{или} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Теорема доказана. ■

Для функций

$$y = x^n \ (n \in \mathbf{N}), \quad y = a^x \ (a > 0, \ a \neq 1),$$
$$y = \sin x \ \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \quad y = \cos x \ (x \in [0, \pi]),$$
$$y = \operatorname{tg} x \ \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad y = \operatorname{ctg} x \ (x \in (0, \pi)) \quad (8.8)$$

обратными являются соответственно функции

$$x = \sqrt[n]{y}, \quad x = \log_a y, \quad x = \arcsin y, \quad x = \arccos y,$$
$$x = \operatorname{arctg} y, \quad x = \operatorname{arcctg} y. \quad (8.9)$$

С помощью равенств (8.9) переменная x явно выражается через переменную y, связанную с x равенствами (8.8). Теорема 8.2 позволяет вычислять производные функций (8.9) по известным производным функций (8.8). Приведем вывод формул 3, 3а, 7, 7а, 8, 8а табл. 7.1, используя формулу (8.7)

Пример 8.7. Найти производные функций: а) $y = \log_a x$; б) $y = \arcsin x$; в) $y = \arccos x$; г) $y = \operatorname{arctg} x$; д) $y = \operatorname{arcctg} x$ в любой точке x из области определения соответствующей функции.

Решение. а) Пусть $y = \log_a x$ $(a > 0, \ a \neq 1)$, $x \in (0, +\infty)$. Тогда $x = a^y$, $y \in (-\infty, +\infty)$. По формуле (8.7) имеем $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{a^y \cdot \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$, или $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. В частности, при $a = e$ получим $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

б) Если $y = \arcsin x$, то $x = \sin y$, где $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как формула (8.7) не применима при $x = \pm 1$ и $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то будем считать, что $x \neq \pm 1$, $y \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$, т. е. $x \in (-1, 1)$, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда, учитывая, что $\cos y > 0 \ \forall y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, находим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

или $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

в) Если $y = \arccos x$, то $x = \cos y$, где $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$. Формула (8.7) не применима при $x = \pm 1$, $y = 0$ и $y = \pi$. Исключая концы отрезков $[-1,1]$ и $[0,\pi]$, будем считать, что $x \in (-1,1)$, $y \in (0,\pi)$. Так как $\sin y > 0 \quad \forall y \in (0,\pi)$, то

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

или $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

г) Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $x = \operatorname{tg} y$, где $x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

или $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

д) Если $y = \operatorname{arcctg} x$, то $x = \operatorname{ctg} y$, где $x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in (0,\pi)$. По формуле (8.7) находим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

или $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. ■

8.3. Производная параметрически заданной функции.

Теорема 8.3. Пусть функция задана параметрически в виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (см. определение 3.5). Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна в окрестности этой точки и $x'(t_0) \neq 0$, то существует производная y'_x функции $y(t(x))$ в точке $x_0 = x(t_0)$, причем

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}, \quad x_0 = x(t_0),$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad x = x(t). \tag{8.10}$$

Доказательство. По теореме 8.1 о производной сложной функции (см. формулу (8.3)) имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Подставляя сюда $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ (см. формулу (8.7), получим $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 8.2. В прикладных задачах, где параметром t часто служит время, производную функции $y = f(t)$ обозначают $\dot{y}$, т. е. $\dot{y} = y'_t$.

Пример 8.8. Найти производную функции, заданной параметрически в виде $x = e^t$, $y = \cos t$, и вычислить ее значение в точке $x_0 = 1$.

Решение. Используя формулу (8.10), получим

$$y'_x = \frac{(\cos t)'}{(e^t)'} = \frac{-\sin t}{e^t}, \quad x = e^t.$$

Найдем значение параметра t_0, соответствующее точке $x_0 = 1$. Так как $x = e^t = 1$ при $t = 0$, то $t_0 = 0$. Вычислим искомое значение производной:

$$y'_x\Big|_{x_0=1} = \frac{-\sin t}{e^t}\Big|_{t_0=0} = \frac{-\sin 0}{1} = 0. \ \blacksquare$$

Пример 8.9. Найти производную параметрически заданной функции $x = \sin t$, $y = \cos t$ в произвольной точке ее области определения.

Решение. По формуле (8.10) находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, \quad x = \sin t. \ \blacksquare$$

Пример 8.10. Составить уравнение касательной к параметрически заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $M(x_0, y_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Подставим в это уравнение выражение для $y'_x(x_0)$ из формулы (8.10):

$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot (x - x_0),$$

где t_0 — значение параметра, соответствующее точке касания $M(x_0, y_0)$.

После преобразования получим уравнение касательной к данной кривой в точке $M(x(t_0), y(t_0))$ в виде

$$x'(t_0) \cdot (y - y_0) - y'(t_0) \cdot (x - x_0) = 0. \ \blacksquare \tag{8.11}$$

Пример 8.11. Составить уравнение нормали к параметрически заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $M(x_0, y_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

Решение. Используем уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Подставляя в это уравнение выражение для $y'_x(x_0)$ из формулы (8.10), найдем искомое уравнение нормали:

$$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)=0. \tag{8.12}$$

Значение $t=t_0$ соответствует точке касания $M(x_0,y_0)$. ■

Пример 8.12. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $x=t^2-1$, $y=t+1$ в точке $M(0,2)$.

Решение. Так как $x=t^2-1=0$ при $t=\pm 1$, $y=t+1=2$ при $t=1$, то данной точке $M(0,2)$ соответствует значение параметра $t_0=1$. Очевидно, что $x'(t)=2t$, $x'(t_0)=x'(1)=2$; $y'(t)=1$, $y'(t_0)=$ $=y'(1)=1$.

Подставляя в уравнения (8.11) и (8.12) значения производных, получим уравнение касательной в точке $M(0,2)$:

$$2(y-2)-1(x-0)=0, \quad \text{или} \quad x-2y+4=0,$$

и уравнение нормали в той же точке:

$$2(x-0)+1(y-2)=0, \quad \text{или} \quad 2x+y-2=0. \;\blacksquare$$

Замечание 8.3. Из табл. 7.1 и теорем о дифференцировании суммы, разности, произведения, частного двух функций и о дифференцировании сложной функции следует важный вывод: производная любой элементарной функции также представляет собой элементарную функцию. Таким образом, операция дифференцирования не выводит функцию из класса элементарных функций.

8.4. Типовые примеры.

Пример 1. Представить в виде суперпозиции функций сложные функции: а) $y=\sin^2 2x$; б) $y=\cos\bigl(\ln(x^2+1)\bigr)$; в) $y=e^{\operatorname{tg}\sqrt{x+2}}$.

Решение. а) Обозначим $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=2x$. Тогда функция $y=\sin^2 2x=y\bigl(u(v(x))\bigr)$ есть суперпозиция трех функций — степенной $y=u^2$, тригонометрической $u=\sin v$ и линейной $v=$ $=2x$ исходного аргумента x (функции u и v — промежуточные аргументы).

б) Полагаем $y=\cos u$, $u=\ln v$, $v=x^2+1$. В этом случае данная функция есть суперпозиция трех функций — тригонометрической аргумента u, логарифмической аргумента v и многочлена второй степени независимой переменной x, т. е. $y=y\bigl(u(v(x))\bigr)$.

в) Если $y=e^u$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=\sqrt{w}$, $w=x+2$, то исходная функция есть суперпозиция четырех функций — показательной e^u, тригонометрической $u=\operatorname{tg} v$, степенной $u=\sqrt{w}$ и линейной $w=$ $=x+2$, или $y=y\bigl(u(v(w(x)))\bigr)$. ■

Пример 2. Найти производные сложных функций: а) $y=$ $=\sin^2 2x$; б) $y=\cos\bigl(\ln(x^2+1)\bigr)$; в) $y=e^{\operatorname{tg}\sqrt{x+2}}$.

Решение. Используя запись каждой функции в виде суперпозиции основных элементарных функций (см. пример 1), по формуле (8.4) найдем:

а) $y' = (u^2)' \cdot (\sin v)' \cdot (2x)' = 2u \cdot \cos v \cdot 2 =$
$$= 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2 \cdot \sin 4x;$$

б) $y' = (\cos u)' \cdot (\ln v)' \cdot (x^2+1)' = (-\sin u) \cdot \dfrac{1}{v} \cdot 2x =$
$$= -\sin\left(\ln(x^2+1)\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = -\frac{2x}{x^2+1} \cdot \sin\left(\ln(x^2+1)\right);$$

в) $y' = (e^u)' \cdot (\operatorname{tg} v)' \cdot (\sqrt{w})' \cdot (x+2)' = e^u \cdot \dfrac{1}{\cos^2 v} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{w}} \cdot 1 =$
$$= e^{\operatorname{tg}\sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}\cos^2\sqrt{x+2}} \cdot e^{\operatorname{tg}\sqrt{x+2}}. \ \blacksquare$$

Пример 3. Найти y', если $y = \operatorname{arctg}\left(\ln(\sin x^3)\right)$.

Решение. Последовательно дифференцируем данную сложную функцию, опуская обозначения промежуточных аргументов:
$$y' = \frac{1}{1+\ln^2(\sin x^3)} \cdot \frac{1}{\sin x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 \cdot \cos x^3}{\left(1+\ln^2(\sin x^3)\right) \cdot \sin x^3}. \ \blacksquare$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

Решение. Используем логарифмическую производную и формулу (8.6). Последовательно находим:

1) $\ln|y| = 3\ln|2x-1| + \dfrac{1}{2}\ln|3x+2| - 2\ln|5x+4| - \dfrac{1}{3}\ln|1-x|;$

2) $(\ln|y|)' = \dfrac{3}{2x-1} \cdot 2 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3x+2} \cdot 3 - 2 \cdot \dfrac{1}{5x+4} \cdot 5 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-1)}{1-x};$

3) $y' = y \cdot (\ln|y|)' = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}} \times$
$$\times \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right). \ \blacksquare$$

Пример 5. Найти y', если $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Используем логарифмическую производную и формулу (8.6). Последовательно находим:

1) $\ln|y| = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x);$

2) $(\ln|y|)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln(\sin x) + \operatorname{tg} x \cdot (\ln(\sin x))' =$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(\sin x) + \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(\sin x) + 1;$$

3) $y' = y \cdot (\ln|y|)' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right)$. ■

Пример 6. Найти производную y'_x, если $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

Решение. Используем формулу (8.10). Очевидно, что $x'(t) = x'_t = 3t^2 + 3$, $y'(t) = y'_t = 15t^4 + 15t^2$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$, $x = t^3 + 3t + 1$. ■

Пример 7. Записать уравнения касательной и нормали к циклоиде $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, проведенных в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Найдем координаты x_0 и y_0 точки касания, которой соответствует значение $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Имеем $x_0 = \dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1$, $y_0 = 1 - \cos\dfrac{\pi}{2} = 1$. Вычислим $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Так как $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$, то $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Уравнения (8.11) и (8.12) касательной и нормали примут соответственно вид: $1(y-1) - 1\left(x - \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)\right) = 0$, или $y - x + \dfrac{\pi}{2} - 2 = 0$, и $1(y-1) + 1\left(x - \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)\right) = 0$, или $y + x - \dfrac{\pi}{2} = 0$. ■

8.5. Задачи для самостоятельного решения.

В задачах 1–9 найти производные функций:

1. $y = \sqrt{\sin x}$; **2.** $y = e^{x^2}$;

3. $y = \dfrac{1}{\cos(\ln x)}$; **4.** $y = \arcsin e^{\operatorname{tg} x^4}$;

5. $y = \ln(\sin x)$; **6.** $y = e^{\sqrt{2x+1}}$;

7. $y = \dfrac{1}{\arcsin x^2}$; **8.** $y = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^3}}$;

9. $y = \operatorname{arctg}(2e^x + 1)$.

В задачах 10–16 найти производные функций, используя логарифмическую производную:

10. $y = (x+5)^2(2x-7)^3(2-x)$; **11.** $y = x^x$ $(x > 0)$;

12. $y = \sqrt{\dfrac{2+x}{5-2x}}$; **13.** $y = \dfrac{5x}{x^2+1} \cdot \cos^4 x$;

14. $y = x^{x^2}$ $(x > 0)$; **15.** $y = \dfrac{\cos 4x}{e^{2x}\ln^2 x}$;

16. $y = (\sin x)^{\ln x} \quad (0 < x < \pi)$.

17. Найти y'_x, если $x = e^{-t}\sin t$, $y = e^t \cos t$.

18. Найти y'_x, если $x = a(1-t)$, $y = at$ $(a = \mathrm{const})$.

19. Найти y'_x в точке, соответствующей значению $t_0 = \dfrac{\pi}{8}$, если $x = \sin 2t$, $y = \sin^2 t$.

20. Найти y'_x в точке $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, если $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

21. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $x = 3t - 5$, $y = t^2 - 4$ в точке, соответствующей значению $t_0 = 3$.

22. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $x = t^2$, $y = t^3$ в точке, соответствующей значению $t_0 = 2$.

23. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $x = 2\cos t + 3\sin t$, $y = \cos t + 2\sin t$ в точке, соответствующей значению $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

§ 9. Дифференциал функции, его свойства и приложения

9.1. Дифференцируемость функции. Дифференциал.

Определение 9.1. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ этой функции в точке x_0, отвечающее приращению аргумента Δx, можно представить в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x), \tag{9.1}$$

где A — функция, зависящая только от x_0 и не зависящая от Δx, $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$ (см. определение 5.1). Обозначают: $f(x) \in D(x_0)$.

Заметим, что приращение аргумента Δx может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение 9.2. Главная линейная относительно приращения аргумента часть приращения функции в разложении (9.1), т. е. выражение $A\Delta x$, где $A \neq 0$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $dy = A\,\Delta x$ или $df = A\,\Delta x$.

При $A = 0$ дифференциал функции по определению считается равным нулю.

Таким образом, приращение функции, дифференцируемой в точке x_0, можно представить в виде

$$\Delta y = dy + o(\Delta x). \tag{9.2}$$

Пример 9.1. Найти дифференциал функции $y = 1 - x^2$ при $x_0 = 1$, $\Delta x = -\dfrac{1}{3}$, используя определение 9.2.

Решение. Так как $y(x) = 1 - x^2$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - (x_0 + \Delta x)^2 - 1 + x_0^2 =$$
$$= -x_0^2 - 2x_0\,\Delta x - \Delta x^2 + x_0^2 = -2x_0\,\Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x) = -(\Delta x)^2$.

Отсюда $dy = -2x_0\Delta x$. Окончательно находим

$$dy\Big|_{\substack{x_0=1,\\ \Delta x=-\frac{1}{3}}} = -2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}. \ \blacksquare$$

Определение 9.3. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой на некотором интервале* (a, b), если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Обозначают: $f(x) \in D(a, b)$. Тогда в разложении (9.1) коэффициент A будет функцией x, а дифференциал dy — функцией x и Δx, т. е. $dy = A(x)\,\Delta x$.

Теорема 9.1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная $f'(x)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е., по определению 9.1, ее приращение в этой точке записывается в виде $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$. Здесь A не зависит от Δx, а $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с Δx, т. е. $o(\Delta x) = \alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$. Следовательно, производная $f'(x)$ существует и равна A.

Достаточность. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тогда по теореме 4.3 о связи функции и ее предела отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$, т. е. по определению 9.1 функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Теорема доказана. $\blacksquare$

Замечание 9.1. Из теоремы 9.1 следует равносильность утверждений о дифференцируемости функции в точке и о существовании конечной производной функции в этой точке.

Так как в разложении (9.1) коэффициент $A(x) = f'(x)$, то

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x). \tag{9.3}$$

Из определения 9.2 дифференциала имеем

$$df = f'(x)\,\Delta x, \quad \text{или} \quad dy = y'\,\Delta x. \tag{9.4}$$

В частности, для $f(x) = x$ из формулы (9.4) получаем $dx = 1 \cdot \Delta x$. Тогда

$$df = f'(x)\,dx, \quad \text{или} \quad dy = y'dx. \tag{9.5}$$

Отсюда следует, что производную $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала dy функции к дифференциалу dx аргумента. Таким образом, имеем еще одно обозначение производной функции $y = f(x)$:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}, \quad \text{или} \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Пример 9.2. Найти в произвольной точке x дифференциал dy функций: а) $y = 2x^3 + 5x^2 - 1$; б) $y = xe^x$.

Решение. По формуле (9.5) получаем

а) $dy = y'dx = (2x^3 + 5x^2 - 1)'dx = (6x^2 + 10x)\,dx$;

б) $dy = y'dx = (xe^x)'dx = (e^x + xe^x)\,dx$. ■

Замечание 9.2. Из теорем 7.1, 9.1 и замечания 9.1 следует необходимое условие дифференцируемости функций: если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

9.2. Свойства дифференциала. Приведенные далее свойства дифференциала справедливы в каждой точке x интервала, на котором дифференцируемы функции $u = u(x)$, $v = v(x)$. Доказательство этих свойств следует из формулы (9.5) и свойств производных (см. теоремы 7.2–7.4).

1°. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

2°. $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$.

3°. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \quad v \neq 0$.

Например, если $u = \sin x$ и $v = e^x$, то

$$d(\sin x \pm e^x) = d(\sin x) \pm d(e^x) = \cos x\,dx \pm e^x dx = (\cos x \pm e^x)\,dx,$$

$$d(\sin x \cdot e^x) = \sin x\,d(e^x) + e^x d(\sin x) = (\sin x \cdot e^x + e^x \cos x)\,dx,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(\frac{\sin x}{e^x}\right) = \frac{e^x \cdot d(\sin x) - \sin x \cdot d(e^x)}{(e^x)^2} = \\ = \frac{e^x \cos x\,dx - \sin x \cdot e^x\,dx}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}\,dx.$$

9.3. Геометрический смысл дифференциала. Вычисление приближенных значений функций с помощью дифференциала. Пусть график дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции $y = f(x)$ имеет вид, представленный на рис. 7.2 (см. с. 94). Величины Δx, $f(x_0)$, $f(x_0 + \Delta x)$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ геометрически выражают соответственно длины отрезков $AB = MC$, AM, BN и CN. Прямая MD — касательная к графику функции в точке M. В силу геометрического смысла производной, $f'(x_0) = = \operatorname{tg}(\angle DMC) = \dfrac{CD}{MC}$. Отсюда $CD = f'(x_0) \cdot MC = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$.

Следовательно, дифференциал $dy = f'(x_0)\,dx$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть *приращение ординаты касательной* к графику функции в точке x_0 при переходе из точки x_0 в точку $x_0 + \Delta x$.

Представление приращения функции Δy по формуле (9.2) в виде двух слагаемых, т. е. $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x)$, соответствует разбиению отрезка CN на два отрезка: $CN = CD + DN$. Длина отрезка CD соответствует дифференциалу $dy = f'(x)\Delta x$, а длина отрезка DN — бесконечно малой $o(\Delta x)$.

Запишем по формуле (9.3) приращение Δy дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$ в виде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + df(x_0) + o(\Delta x). \tag{9.6}$$

Заменим равенство (9.6) приближенным равенством

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0), \tag{9.7}$$

т. е. отбросим $o(\Delta x)$ — слагаемое более высокого порядка малости по сравнению с Δx.

Формулу (9.7) используют для приближенного вычисления в окрестности точки x_0 значения $f(x_0 + \Delta x)$ функции, дифференцируемой в точке x_0.

Для вычисления приближенного значения функции $f(x_0 + \Delta x)$ с помощью дифференциала предлагается следующая схема.

1. Указать общий вид функции $f(x)$, значение которой требуется вычислить.
2. Определить из условия задачи x_0 и Δx.
3. Вычислить $f(x_0)$ и $df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$.
4. Использовать формулу (9.7) для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$.

Пример 9.3. Вычислить приближенно значение $\cos 61^\circ$ с тремя десятичными знаками после точки, используя формулу (9.7).

Решение. Проведем вычисления по приведенной выше схеме.

1. В данном случае $f(x) = \cos x$.

2. $x_0 = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$, $x_0 + \Delta x = 61^\circ$, $\Delta x = 61^\circ - 60^\circ = 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$.

3. $f(x_0) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $f'(x_0) = f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}$.

4. По формуле (9.7) получим

$$\cos 61^\circ = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0.485. \quad \blacksquare$$

9.4. Инвариантность формы записи дифференциала. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда ее дифференциал в этой точке, согласно формуле (9.5), имеет вид $dy = f'(x)\,dx$, где x — независимая переменная. Докажем, что эта форма записи дифференциала сохраняет свой вид и в случае, когда аргумент x сам является дифференцируемой функцией независимой переменной t, т.е. $x = \varphi(t)$. Это свойство дифференциала функции называют *инвариантностью формы его записи.*

Теорема 9.2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена на множестве D_φ, функция $y = f(x)$ — на множестве D_f, где $\varphi(t) \in D_f$, и на множестве $D_y = D_\varphi$ определена сложная функция $y = f(\varphi(t))$. Предположим, кроме того, что функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке t, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, соответствующей точке t. Тогда дифференциал dy может быть записан в виде

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как для сложной функции $y = f(\varphi(t))$ аргумент t является независимой переменной, то по формуле (9.5) имеем: $dy = y'_t\,dt = (f(\varphi(t)))'_t\,dt$. Используя формулу (8.2) для производной сложной функции и учитывая выражение для $dx = \varphi(t)\,dt$, находим

$$dy = (f(\varphi(t)))'_t\,dt = f'(x)\cdot\varphi'(t)\,dt = f'(x)\,dx.$$

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$ есть зависимая переменная, имеет тот же вид, что и дифференциал dy функции $y = f(x)$, где x — независимая переменная. Теорема доказана. $\blacksquare$

Пример 9.4. Записать дифференциал функции $y = e^{\sin x}$ при условии: 1) x — независимая переменная; 2) $x = t^2$, t — независимая переменная.

Решение. В первом случае по формуле (9.5) получаем

$$dy = y'_x dx = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

В втором случае $y = e^{\sin x} = e^{\sin t^2}$ и

$$dy = y'_t \cdot dt = e^{\sin t^2} \cdot \cos t^2 \cdot 2t \cdot dt = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

В обоих случаях дифференциал dy, как и следовало ожидать, имеет один и тот же вид: $dy = y'_x\,dx$. ■

9.5. Типовые примеры.

Пример 1. Сравнить приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 2x^3 + 5x^2$. Найти их значения в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0.01$.

Решение. Запишем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^3 + 5(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^3 - 5x_0^2 = (6x_0^2 + 10x_0)\Delta x + (6x_0 + 5)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$. Согласно определению 9.2, дифференциал $dy = (6x_0^2 + 10x_0)\Delta x$. Очевидно, что разность $\Delta y - dy = (6x_0 + 5)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с Δx, т. е. $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ (см. формулу (9.2)). Вычислим значения Δy и dy при $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0.01$:

$$\Delta y\Big|_{\substack{x_0=1,\\ \Delta x=0.01}} = (6 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1) \cdot 0.01 + (6 \cdot 1 + 5 + 2 \cdot 0.01) \cdot (0.01)^2 = \\ = 0.16 + 11.02 \cdot 10^{-4} = 0.16 + 0.1102 \cdot 10^{-2};$$

$$dy\Big|_{\substack{x_0=1,\\ \Delta x=0.01}} = (6 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1) \cdot 0.01 = 0.16.$$

Разность приращения функции Δy и ее дифференциала dy в заданной точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0.01$ равна $\Delta y - dy = 0.1102 \cdot 10^{-2}$. ■

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = e^{3x}$ в точке $x_0 = 0$ при $\Delta x = 0.1$.

Решение. По формуле (9.4) получим

$$dy = y'(x_0)\Delta x = \left(e^{3x}\right)'\Big|_{x=0} \cdot (0.1) = 3e^{3x}\Big|_{x=0} \cdot 0.1 = 3 \cdot 0.1 = 0.3. \;■$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y = \sin x + \cos x$ в точке $x_0 = \pi$.

Решение. По формуле (9.5) находим

$$dy = y'(x_0)\,dx = (\sin x + \cos x)'\Big|_{x=\pi} dx = \\ = (\cos x - \sin x)\Big|_{x=\pi} dx = -dx. \;■$$

Пример 4. Используя формулу (9.5), найти в точке x дифференциалы следующих функций: а) $y_1 = 3\operatorname{arctg} x$; б) $y_2 = e^x$; в) $y_3 = (2x - 3)$.

Решение. а) $dy_1 = y_1'\,dx = 3(\operatorname{arctg} x)'\,dx = \dfrac{3\,dx}{1+x^2}$;

б) $dy_2 = y_2'\,dx = e^x\,dx$;

в) $dy_3 = y_3'\,dx = 2\,dx$. ■

Пример 5. Используя свойства дифференциала, найти dy для функций $y_1 = 2u + 3v$, $y_2 = u - v^3$, $y_3 = u \cdot v^2$, $y_4 = \dfrac{u}{v+1}$, если $u = \sin x$, $v = e^x$ и x — любая точка из области определения функций y_1, y_2, y_3, y_4.

Решение. Подставляя $u = \sin x$ и $v = e^x$ в заданные функции y_1, y_2, y_3 и y_4, получим

$$dy_1 = d(2u+3v) = d(2\sin x + 3e^x) = 2d(\sin x) + 3d(e^x) = \\ = 2\cos x\,dx + 3e^x\,dx = (2\cos x + 3e^x)\,dx;$$

$$dy_2 = d(u - v^3) = d(\sin x - e^{3x}) = d\sin x - de^{3x} = \\ = \cos x\,dx - 3e^{3x}\,dx = (\cos x - 3e^{3x})\,dx;$$

$$dy_3 = d(u\cdot v^2) = u\,d(v^2) + v^2du = u\cdot 2v\,dv + v^2du = \\ = 2\sin x\cdot e^{2x}dx + e^{2x}\cdot\cos x\,dx = e^{2x}(2\sin x + \cos x)\,dx;$$

$$dy_4 = d\left(\frac{u}{v+1}\right) = \frac{(v+1)\,du - u\,d(v+1)}{(v+1)^2} = \\ = \frac{(e^x+1)\,d(\sin x) - \sin x\,d(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \\ = \frac{(e^x+1)\cos x\,dx - \sin x e^x\,dx}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)\cos x - \sin x e^x}{(e^x+1)^2}\,dx. \ ■$$

Пример 6. Найти приближенное значение $\sin 31^\circ$ с четырьмя десятичными знаками после точки.

Решение. Используем формулу (9.7).

1. Запишем общий вид функции: $f(x) = \sin x$.

2. Из условия имеем $x_0 = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$; $x_0 + \Delta x = 31^\circ = 30^\circ + 1^\circ = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}$; $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$.

3. Вычислим $f(x_0) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$; $f'(x_0) = f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}$.

4. Окончательно найдем по формуле (9.7):

$$\sin 31^\circ = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0.5151. \ ■$$

Пример 7. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{0.988}$ с точностью до трех десятичных знаков после точки.

Решение.

1. Запишем общий вид функции: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

2. Из условия находим $x_0 = 1$; $x_0 + \Delta x = 0.988$; $\Delta x = 0.988 - x_0 = 0.988 - 1 = -0.012$.

3. Вычислим $f(x_0) = \sqrt[3]{1} = 1$; $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{3}\,x^{-2/3}\Big|_{x=1} = \frac{1}{3}$; $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{3}\,(-0.012) = -0.004$.

4. По формуле (9.7) получим

$$\sqrt[3]{0.988} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = 1 - 0.004 = 0.996. \ \blacksquare$$

Пример 8. Доказать, что с точностью до бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx имеет место приближенная формула

$$(1 + \Delta x)^p \approx 1 + p\,\Delta x, \quad p \in \mathbf{R}, \tag{9.8}$$

и вычислить приближенно $(1.03)^5$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$, где $x \in (-\infty, +\infty)$. Запишем $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^p$, $dy = f'(x)\Delta x = px^{p-1}\Delta x$. По формуле (9.7) имеем $(x + \Delta x)^p \approx x^p + px^{p-1}\Delta x$. Полагая $x = 1$, для достаточно малых Δx получим приближенное равенство $(1 + \Delta x)^p \approx 1 + p\,\Delta x$.

Применяя эту формулу для вычисления приближенного значения $(1.03)^5$, найдем $(1.03)^5 = (1 + 0.03)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0.03 = 1.15$. $\blacksquare$

9.6. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти дифференциал функции $y = x^2 + 2x$ в точке $x_0 = -3$ при $\Delta x = 0.01$ используя определение 9.2.

2. Найти дифференциал функции $y = x(\ln x - 1)$ в точке $x_0 = e$ при $\Delta x = -0.01$ используя формулу (9.5).

3. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1+x}{x}$ в точке $x_0 = -2$ используя формулу (9.5).

4. Найти дифференциал функции $y = x^2 + \operatorname{tg} x$ в произвольной точке x используя формулу (9.5) и свойства дифференциала.

5. Найти dy функции $y = e^x \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$.

6. Вычислить dy функции $y = x^2 + \dfrac{x-1}{x+2}$ при $x_0 = 1$ и $dx = \dfrac{1}{3}$ и записать dy в виде десятичной дроби с тремя знаками после точки.

7. Найти с помощью дифференциала приближенное значение $\sqrt[7]{e}$, взяв три знака после десятичной точки.

8. Найти по формуле (9.7) приближенное значение $\operatorname{tg} 44^\circ$ с тремя десятичными знаками после точки.

9. Найти по формуле (9.7) приближенное значение $\ln(1+x)$ при $x = 0{,}03$, взяв два десятичных знака после точки.

10. Вычислить приближенно по формуле (9.8) значение $\sqrt[5]{1.02}$ с тремя десятичными знаками после точки.

11. Вычислить приближенно по формуле (9.8) значение $\dfrac{1}{1.0005}$, взяв четыре десятичных знака после точки.

12. Вычислить приближенно по формуле (9.8) значение $\dfrac{1}{0.9988}$, взяв три десятичных знака после точки.

§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков

10.1. Производные высших порядков.

Определение 10.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $y' = f'(x)$, и эта производная есть функция, дифференцируемая в точке x. Производная $(y')' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = (f'(x))'$ от производной функции $f(x)$ называется *производной второго порядка* (или *второй производной*) функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается одним из символов y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$.

Если производная второго порядка функции $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то производная от нее есть производная третьего порядка данной функции в точке x.

Определение 10.2. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференцируемую производную $(n-1)$-го порядка, обозначаемую $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$. Тогда производная от нее $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ называется *производной n-го порядка* (или *n-й производной*) данной функции в точке x и обозначается одним из символов $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$.

Например, если $f(x) = x^4$, то $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$; $f'''(x) = 24x$; $f^{(4)}(x) = 24$; $f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \ldots = 0$.

За производную нулевого порядка принимается сама функция, т. е. $y^{(0)} = y$.

Пусть функция задана параметрически в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда первая производная $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x = x(t)$ (см. теорему 8.3). Используя формулу (8.2) для производной сложной функции и формулу (8.7) для производной обратной функции, получим

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t},$$

или, в других обозначениях,

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Аналогично можно получить формулы для производных более высокого порядка. Так,

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy''}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Пример 10.1. Найти вторую производную y''_{xx} функции, заданной параметрически: $x = \alpha\cos t$, $y = \alpha\sin t$.

Решение. Первая производная данной функции равна

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\alpha\cos t}{-\alpha\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad x = \alpha\cos t.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'}{-\alpha\sin t} = -\frac{1}{\alpha\sin^3 t},$$

$x = \alpha\cos t$. ∎

Установим *механический смысл второй производной.* Пусть закон прямолинейного движения точки M записан в виде $s = s(t)$, где s — длина пути, t — время. Предположим, что точка M в момент времени t имеет скорость v, а в момент $t + \Delta t$ — скорость $v + \Delta v$. Отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = a_{\text{ср}}(t)$ называется *средним ускорением прямолинейного движения* за время Δt. За истинное ускорение $a(t)$ движения точки M в момент времени t принимают предел среднего ускорения $a_{\text{ср}}(t)$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot v(t).$$

Так как $v = \dot s(t)$, то $a = \ddot s(t)$, т. е. *ускорение прямолинейного движения точки равно второй производной от пути по времени.*

Пример 10.2. Ракета движется по закону $s(t) = t^3$ начиная с момента времени $t_0 = 0$. Определить:

а) среднее ускорение движения за первые 4 секунды пути;

б) ускорение ракеты в момент времени $t = 4$ с.

Решение. а) Учитывая, что скорость движения равна $v(t) = \dot s(t) = 3t^2$, найдем среднее ускорение $a_{\text{ср}}$ по формуле

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t} = \frac{\dot{s}(t_0+\Delta t)-\dot{s}(t_0)}{\Delta t} = \\ = \frac{3(t_0+\Delta t)^2-3t_0^2}{\Delta t} = \frac{3t_0^2+6t_0\Delta t+3(\Delta t)^2-3t_0^2}{\Delta t} = 6t_0+3\Delta t.$$

При $t_0 = 0$, $\Delta t = 4$ получим $a_{\text{ср}} = 6\cdot 0 + 3\cdot 4 = 12$ (м/с^2).

б) Определим ускорение ракеты $a(t)$ в момент времени $t = 4$ с. Так как $a(t) = \ddot{s}(t) = 6t$, то при $t = 4$ с имеем $a(4) = 24$ м/с^2. ■

10.2. Формула Лейбница.

Теорема 10.1 (*формула Лейбница*[1]). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на некотором промежутке все производные до n-го порядка включительно. Тогда в каждой точке x этого промежутка справедлива формула

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + n\cdot u'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot u''v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}v. \quad (10.1)$$

Теорема доказывается методом полной математической индукции.

Замечание 10.1. *Метод полной математической индукции* используют для доказательства справедливости утверждений, зависящих от натурального аргумента n. При применении этого метода поступают следующим образом:

1) устанавливают справедливость доказываемого утверждения для некоторого начального значения $n = n_0$ (как правило, $n_0 = 1$);

2) в предположении, что утверждение верно при $n = k$, доказывают его справедливость при $n = k+1$ (k — *произвольное* натуральное число); после этого делают вывод о справедливости данного утверждения *при любом* $n \in \mathbf{N}$.

Пример 10.3. Используя метод полной математической индукции, найти производную n-го порядка функции $f(x) = \sin x$.

Решение. Докажем, что производная n-го порядка данной функции

$$(\sin x)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \quad (10.2)$$

Первая производная

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, при $n = 1$ формула (10.2) верна.

Предположим, что формула (10.2) справедлива при $n = k$, т. е.

$$(\sin x)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right).$$

[1]Г.В. Ле́йбниц (1646–1716) — немецкий математик, физик, философ.

Тогда для $n = k + 1$ находим

$$(\sin x)^{(k+1)}(x) = \left((\sin x)^{(k)}(x)\right)' = \left(\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right)' =$$
$$= \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, мы доказали справедливость формулы (10.2) при $n = k + 1$. Так как эта формула верна при $n = 1$, то она справедлива при любом n. Формула (10.2) доказана. ■

Пример 10.4. Найти с помощью формулы Лейбница производную n-го порядка функции $f(x) = (2x+1)\cdot e^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$.

Решение. Полагаем $u(x) = 2x + 1$, $v(x) = e^{\alpha x}$. Очевидно, что $u'(x) = (2x+1)' = 2$, $u^{(n)} = (2x+1)^{(n)} = 0$ для $n \geqslant 2$. Выведем формулу для n-й производной функции $v(x)$, используя метод полной математической индукции. Докажем, что

$$(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}. \tag{10.3}$$

Найдем $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$. Следовательно, формула (10.3) верна при $n = 1$.

Предположим, что эта формула справедлива при $n = k$, т. е.

$$(e^{\alpha x})^{(k)} = \alpha^k \cdot e^{\alpha x}.$$

Тогда для $(e^{\alpha x})^{(k+1)}$ получим

$$(e^{\alpha x})^{(k+1)} = \left((e^{\alpha x})^{(k)}\right)' = \left(\alpha^k \cdot e^{\alpha x}\right)' = \alpha^{k+1}\cdot e^{\alpha x}.$$

Отсюда следует справедливость формулы (10.3) при $n = k + 1$. Поскольку эта формула верна при $n = 1$, то она справедлива при любом n. Подставляя $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $u^{(n)}(x) = 0$ $(n \geqslant 2)$, $v(x) = e^{\alpha x}$, $v^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}$ $(n \geqslant 1)$ в формулу Лейбница (10.1), окончательно найдем

$$((2x+1)\cdot e^{\alpha x})^{(n)} = (2x+1)\cdot(e^{\alpha x})^{(n)} +$$
$$+ n\cdot 2\,(e^{\alpha x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 0\cdot(e^{\alpha x})^{(n-2)} + \ldots + 0\cdot e^{\alpha x} =$$
$$= (2x+1)\alpha^n\cdot e^{\alpha x} + 2n\alpha^{n-1}\cdot e^{\alpha x}.$$ ■

Пример 10.5. Записать формулу Лейбница для функции $y = x^2\ln x$ и вычислить $y^{(5)}(1)$.

Решение. Выведем формулу для производной $(\ln x)^{(n)}$, используя метод полной математической индукции. Очевидно, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$; $(\ln x)''' = (-1)(-2)\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1\cdot 2}{x^3}\cdot(-1)^2$; $(\ln x)^{(4)} = (-1)^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3x^{-4}$. Пусть при $n = k$ имеет место формула

$$(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)}{x^k} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Тогда

$$(\ln x)^{(k+1)} = \left((\ln x)^{(k)}\right)' = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^{k+1}} \cdot (-k) = (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Следовательно, при любом n справедлива формула

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}. \tag{10.4}$$

Полагаем $u(x) = x^2$, $v(x) = \ln x$. Учитывая, что $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$, $u^{(n)} = 0$ $(n \geqslant 3)$, по формуле Лейбница (10.1) получим

$$y^{(n)}(x) = (x^2 \ln x)^{(n)} = x^2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} + \\ + n \cdot 2x \cdot (-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \frac{(n-3)!}{x^{n-2}}.$$

При $n = 5$, $x = 1$ найдем

$$y^{(5)}(1) = 1 \cdot (-1)^4 \cdot 4! + 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)^3 \cdot 3! + 5 \cdot 4 \cdot (-1)^2 \cdot 2! = \\ = 24 - 60 + 40 = 4. \ \blacksquare$$

10.3. Дифференциалы высших порядков.

Определение 10.3. Пусть дифференциал $dy = y'(x)\,\Delta x$ функции $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция в точке x. Дифференциал от дифференциала называется *дифференциалом второго порядка* (или *вторым дифференциалом*) функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $d^2 y = d(dy)$.

Используя формулу (9.4), запишем

$$d^2 y = d(y'(x)\,\Delta x) = (y'(x)\,\Delta x)'\,\Delta x = y''(x)\,\Delta x\,\Delta x = y''(x)(\Delta x)^2.$$

Если x — независимая переменная, то $dx = \Delta x$, и дифференциал второго порядка принимает вид

$$d^2 y = y''(x)\,(dx)^2 = y''(x)\,dx^2.$$

Определение 10.4. Если второй дифференциал $d^2 y$ функции $y = f(x)$ есть функция, дифференцируемая в точке x, то дифференциал от него есть дифференциал третьего порядка (или третий дифференциал) данной функции в точке x и записывается в виде

$$d^3 y = d(d^2 y) = (d^2 y)'\Delta x = (y''(\Delta x)^2)'\Delta x = y'''(\Delta x)^3.$$

Так как $\Delta x = dx$ для независимой переменной x, то

$$d^3y = y''' dx^3.$$

Определение 10.5. Дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$ называется *дифференциалом n-го порядка* (или *n-м дифференциалом*) функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $d^n y = d(d^{n-1}y)$. По формуле 9.4 получим

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n \quad \text{или} \quad d^n y = y^{(n)} dx^n \tag{10.5}$$

для независимой переменной x.

Пример 10.6. Найти дифференциал второго порядка функции $y(x) = \sin 2x$.

Решение. По формуле (10.5) имеем

$$d^2y = y''\,dx^2 = (\sin 2x)''\,dx^2 = (2\cos 2x)'\,dx^2 = -4(\sin 2x)\,dx^2. \ \blacksquare$$

Пример 10.7. Найти дифференциал $d^n y$ функции $y(x) = \ln x$.

Решение. По формуле (10.5) запишем $d^n y = (\ln x)^{(n)}\,dx^n$. Используя формулу (10.4) для n-й производной функции $y(x) = \ln x$, найдем

$$d^n(\ln x) = (\ln x)^{(n)}\,dx^n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} \cdot dx^n. \ \blacksquare$$

Для дифференциала n-го порядка справедливы формулы:

$$d^n(u+v) = d^n u + d^n v,$$
$$d^n(u \cdot v) = u \cdot d^n v + n \cdot du \cdot d^{n-1}v + \ldots + d^n u \cdot v.$$

Последняя формула, как и формула (10.1), называется *формулой Лейбница.*

Замечание 10.2. Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы их записи, в отличие от дифференциала первого порядка. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Найдем $d^2y(x)$, используя определение дифференциала второго порядка. Если x — независимая переменная, то dx не зависит от x $(dx = \Delta x \quad \forall x)$. В этом случае dx при нахождении d^2y выносится за знак дифференциала, т. е.

$$d^2y(x) = d(dy(x)) = d(y'(x)\,dx) = (y'(x)\,dx)'\,dx = \\ = y''(x)\,dx \cdot dx = y''(x)\,dx^2. \tag{10.6}$$

Если же x — зависимая переменная, то dx зависит от x (в общем случае $dx \neq \Delta x$), и при нахождении дифференциала $d^2y = d(y'(x)\,dx)$ используется формула для вычисления дифференциала произведения, т. е.

$$d^2y(x) = d(y'(x)\,dx) = dy'(x)\cdot dx + y'(x)\cdot d(dx) = \\ = y''(x)\,dx^2 + y'(x)\,d^2x. \quad (10.7)$$

Сравнивая выражения (10.6) и (10.7), заключаем, что d^2y не обладает свойством инвариантности формы записи. Тем более не обладают этим свойством дифференциалы более высоких порядков.

Замечание 10.3. Если функция $y = f(x)$ имеет конечные производные до $(n-1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, имеет конечную производную n-го порядка в самой точке x_0, то говорят, что функция *n раз дифференцируема* в точке x_0. Если производная n-го порядка непрерывна в точке x_0, то говорят, что функция n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0.

В дальнейшем производные и дифференциалы высших порядков функций будем находить в произвольной точке x из области определения функций, если не указана конкретная точка.

10.4. Типовые примеры.

Пример 1. Найти y''' функции $y = 5x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x$.

Решение. Последовательно дифференцируя, находим: $y' = 25x^4 + 12x^3 - 4x + 1$; $y'' = 100x^3 + 36x^2 - 4$; $y''' = 300x^2 + 72x$. ■

Пример 2. Вычислить y'' функции $y = x\cos x$ в точке $x = \pi$.

Решение. Найдем последовательно y', y'': $y' = \cos x - x\sin x$; $y'' = -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x$. Тогда

$$y''(\pi) = -2\sin\pi - \pi\cos\pi = 0 - \pi(-1) = \pi. \ ■$$

Пример 3. Найти $y^{(100)}$ функции $y = xe^x$, используя формулу Лейбница.

Решение. 1) Полагаем $u(x) = x$, $v(x) = e^x$. Очевидно, что $u'(x) = 1$, $u^{(n)}(x) = 0$ $(n \geqslant 2)$, $v^{(n)}(x) = e^x$ $(n \geqslant 1)$ (см. формулу (10.3)).

2) Используя формулу Лейбница, получим

$$y^{(n)} = x\cdot e^x + n\cdot 1\cdot e^x + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 0\cdot e^x + \ldots + 0\cdot e^x = xe^x + ne^x.$$

3) Полагая $n = 100$ в этом равенстве, найдем производную 100-го порядка, не прибегая к последовательному дифференцированию функции и не вычисляя все производные до 100-го порядка:

$$y^{(100)} = xe^x + 100e^x. \ ■$$

Пример 4. Вывести формулу для $y^{(n)}$ функции $y=(3x^2+2x+1)\sin x$. Записать $y^{(50)}$.

Решение. 1) Согласно формуле (10.2) для $y^{(n)}$ функции $y=\sin x$ имеем

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

2) Используем формулу Лейбница при $u(x)=3x^2+2x-1$, $v(x)=\sin x$. Найдем $u'(x)=6x+2$, $u''(x)=6$, $u^{(n)}(x)=0$ $(n\geqslant 3)$. Тогда

$$y^{(n)}=(3x^2+2x-1)\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+ \\ +n(6x+2)\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+ \\ +\frac{n(n-1)}{2}\cdot 6\cdot\sin\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right).$$

3) Запишем $y^{(50)}$, полагая $n=50$:

$$y^{(50)}=(3x^2+2x-1)\sin(x+25\pi)+ \\ +50(6x+2)\sin\left(x+\frac{49}{2}\pi\right)+50\cdot 49\cdot 3\sin(x+24\pi)= \\ =-(3x^2+2x-1)\sin x+100(3x+1)\cos x+150\cdot 49\cdot\sin x= \\ =(7350-3x^2-2x+1)\sin x+100(3x+1)\cos x. \blacksquare$$

Пример 5. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически в виде $x=t^2+2t$, $y=\ln(t+1)$.

Решение. Имеем

$$x_t=\frac{dx}{dt}=2t+2,\qquad y_t=\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t+1}.$$

Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y_t}{x_t}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}:(2t+2)=\frac{1}{2}(t+1)^{-2}.$$

Так как $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'}{dt}:\dfrac{dx}{dt}$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(t+1)^{-2}\right):\frac{d}{dt}\left(t^2+2t\right)= \\ =\frac{-1}{(t+1)^3}:2(t+1)=\frac{-1}{2(t+1)^4},\quad x=t^2+2t. \blacksquare$$

Пример 6. Функция задана параметрически в виде $x=1+e^{at}$, $y=at+e^{-at}$. Найти значение производной $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке, соответствующей значению $t=0$.

Решение. Используя общие формулы для производных до 3-го порядка включительно функции, заданной параметрически, получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{a - ae^{-at}}{ae^{at}} = e^{-at} - e^{-2at};$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{2ae^{-2at} - ae^{-at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - e^{-2at};$$
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{2ae^{-2at} - 6ae^{-3at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - 6e^{-4at}.$$

Искомое значение $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{t=0} = 2 - 6 = -4.$ ■

Пример 7. Для функции $y = x(\operatorname{tg} x - 1)$ найти:

а) d^2y в общем виде;

б) d^2y в точке $x = 0$ при произвольном dx;

в) d^2y в точке $x = 0$ при $dx = 0{,}1$.

Решение. Найдем последовательно y' и y'':

$$y' = \operatorname{tg} x - 1 + \frac{x}{\cos^2 x};$$

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1 \cdot \cos^2 x - x \cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2(\cos x + x\sin x)}{\cos^3 x}.$$

а) По формуле $d^2y = y''dx^2$ получим

$$d^2y = \frac{2(\cos x + x\sin x)}{\cos^3 x}\, dx^2;$$

б) $\left.d^2y\right|_{x=0} = 2\,dx^2;$

в) $\left.d^2y\right|_{\substack{x=0,\\ dx=0.1}} = 2(0.1)^2 = 2 \cdot 0.01 = 0.02.$ ■

Пример 8. Найти dy и d^2y функции $y = x^4 - 3x^2 + 2$, если: 1) x — независимая переменная; 2) x — функция независимой переменной.

Решение. Дифференциал первого порядка dy в силу инвариантности его формы имеет в обоих случаях один и тот же вид

$$dy = y'dx = (4x^3 - 6x)dx = 2(2x^3 - 3x)dx.$$

В первом случае dx есть приращение Δx независимой переменной ($dx = \Delta x$), во втором — дифференциал dx есть функция, и поэтому $dx \neq \Delta x$. Для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности формы записи нарушается (см. замечание 10.2). Следовательно, при нахождении d^2y приходится решать задачу для каждого случая отдельно.

1) Пусть x — независимая переменная. В этом случае дифференциал dx не зависит от x и его можно выносить за знак дифференциала. Получим

$$d^2y = d(dy) = d\big(2(2x^3-3x)dx\big) = 2dx\cdot d(2x^3-3x) = \\ = 2dx\cdot(6x^2-3)dx = 2(6x^2-3)\,dx^2 = 6(2x^2-1)\,dx^2.$$

2) Пусть x есть функция некоторой переменной. В этом случае дифференциал dx зависит от этой переменной и выносить его за знак дифференциала, как это было сделано в первом случае, нельзя. Вычисляя дифференциал произведения двух функций, найдем

$$d^2y = d(dy) = d\big(2(2x^3-3x)dx\big) = 2d\big((2x^3-3x)dx\big) = \\ = 2(2x^3-3x)d(dx) + 2dx\cdot d(2x^3-3x) = 2(2x^3-3x)\,d^2x + \\ + 2dx(6x^2-3)dx = 2(2x^3-3x)\,d^2x + 6(2x^2-1)\,dx^2.$$

Дифференциал d^2y во втором случае (x — зависимая переменная) отличается от d^2y в первом случае (x — независимая переменная) на слагаемое $2(2x^3-3x)\,d^2x$. ■

10.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить y'' функции $y = x\sin x$ в точке $x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$.

В задачах 2–6 найти указанные производные:

2. $y = \sin^3 x,\ \ y'' = ?$

3. $y = e^{-3x},\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

4. $f(x) = \ln x,\ \ f''(x) = ?$

5. $f(x) = \cos 2x,\ \ \dfrac{d^2f}{dx^2} = ?$

6. $y = \sqrt{1+x^2},\ \ y''(1) = ?$

7. Найти производную $y^{(n)}$ функции $y = (x+1)e^{-x}$ и вычислить ее значение при $n = 100$ и $x = 0$.

8. Найти производную $y^{(n)}$ функции $y = x^2\ln x$ и вычислить ее значение при $n = 4$ и $x = 1$.

9. Найти $y^{(n)}$, если $y = x\cos 2x$.

10. Найти $y^{(n)}$, если $y = (x^2+x-1)\sin x$.

11. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точке, соответствующей значению $t = 1$, если $x = t^2$, $y = t^3 + t$.

12. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точке, соответствующей значению $t = \dfrac{\pi}{6}$, если $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

13. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке, соответствующей значению $t = \dfrac{1}{3}$, если $x = \ln t$, $y = \dfrac{1}{t}$.

14. Вычислить d^2y функции $y = x^2 \sin x$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$.

15. Найти d^2y, если $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$; вычислить значение d^2y при $x = 2$ и $dx = 0.01$.

16. Найти d^3y функции $y = x\,(\ln x - 1)$.

17. Вычислить d^3y функции $y = (2x+1)e^{-x}$ при $x = 1$ и $dx = 0.1$.

18. Найти d^2y функции $y = e^x \cos x$, если: а) x — независимая переменная; б) x — зависимая переменная.

19. Найти d^2y функции $y = \ln\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right|$, если: а) x — независимая переменная; б) x — зависимая переменная.

§ 11. Основные теоремы дифференциального исчисления. Раскрытие неопределенностей

11.1. Теорема Ролля (теорема о нуле производной).

Теорема 11.1 (*теорема Ро́лля*[1]). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ $(f(x) \in C[a,b])$, дифференцируема на интервале (a,b) $(f(x) \in D(a,b))$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

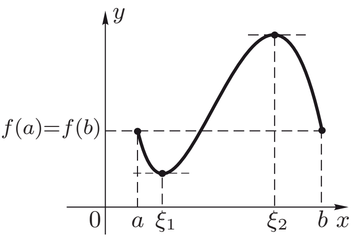


Рис. 11.1

Замечание 11.1 (*геометрический смысл теоремы Ролля*). Если выполнены все условия теоремы Ролля, то в точке $(\xi, f(\xi))$, где $\xi \in (a,b)$ и $f'(\xi) = 0$, касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна оси Ox. На интервале (a,b) может быть несколько точек ξ таких, что $f'(\xi) = 0$ На рис. 11.1 функция $y = f(x)$ имеет две точки ξ_1 и ξ_2 такие, что $f'(\xi_1) = 0$ и $f'(\xi_2) = 0$.

Замечание 11.2 (*следствие из теоремы Ролля*). Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$. Другими словами, между двумя нулями дифференцируемой функции лежит по крайней мере один нуль ее производной.

[1]М. Ролль (1652–1719) — французский математик.

Пример 11.1. Проверить выполнение условий теоремы Ролля для функции $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1, 1]$ и найти соответствующие значения ξ.

Решение. Очевидно, что $f(x) \in C[-1, 1]$, $f(x) \in D(-1, 1)$ (поскольку на интервале $(-1, 1)$ существует $f'(x) = 2x$) (см. замечание 9.1) и $f(-1) = f(1) = 0$. Все условия теоремы Ролля выполнены. Следовательно, существует хотя бы одна точка $\xi \in (-1, 1)$, для которой $f'(\xi) = 0$. Из уравнения $f'(x) = 2x = 0$ находим единственную точку $x = \xi = 0$. В точке $(0, -1)$ касательная к кривой $y = x^2 - 1$ параллельна оси Ox (рис. 11.2).

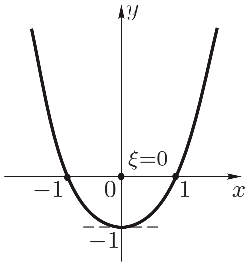


Рис. 11.2

11.2. Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений.

Теорема 11.2 (*теорема Лагранжа*[2]). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $(f(x) \in C[a, b])$ и дифференцируема на интервале (a, b) $(f(x) \in D(a, b))$. Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b. \tag{11.1}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \tag{11.2}$$

где λ — некоторая постоянная. Определим λ из условия $F(a) = F(b)$, или $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$:

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11.3}$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x) \in C[a, b]$, $F(x) \in D(a, b)$, $F(a) = F(b)$. Поэтому существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$. Из формулы (11.2) имеем $F'(x) = f'(x) - \lambda$. Тогда из уравнения $F'(\xi) = 0$, или $f'(\xi) - \lambda = 0$ найдем $\lambda = f'(\xi)$. Подставляя это значение λ в (11.3), получим

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{11.4}$$

или $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Теорема доказана. ■

Замечание 11.3 (*геометрический смысл теоремы Лагранжа*). Правая часть равенства (11.4) есть тангенс угла наклона хорды AB,

[2] Ж. Л. Лагра́нж (1736–1813) — французский математик и механик.

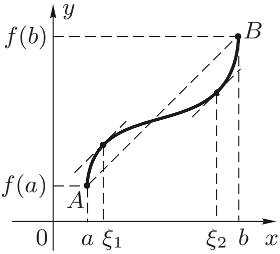


Рис. 11.3

стягивающей конечные точки графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, к положительному направлению оси абсцисс (рис. 11.3). Левая часть этого равенства равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в некоторой точке $(\xi, f(\xi))$, где $\xi \in (a, b)$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что, если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы, то найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что касательная к кривой в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна хорде, стягивающей концы кривой AB. Из рисунка 11.3 видно, что в данном случае существуют две точки ξ_1 и ξ_2, для которых справедлива формула (11.4).

Замечание 11.4.

1) Теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа, так как при $f(a) = f(b)$ формула Лагранжа (11.4) сводится к равенству $f'(\xi) = 0$.

2) Формулу Лагранжа можно записать в другом виде, если учесть, что $\xi = a + \theta(b - a)$, где $\theta \in (0, 1)$. Тогда из формулы (11.4) имеем

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.5}$$

Заметим, что формула Лагранжа справедлива как для $a < b$, так и для $a > b$.

3) Если положить $a = x$, $b = x + \Delta x$, то $b - a = \Delta x$, и формула Лагранжа примет вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.6}$$

Формула (11.6) называется *формулой конечных приращений*. Она дает точное значение приращения функции в точке x при любом конечном приращении аргумента Δx, в отличие от приближенной формулы $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ (см. формулу 9.7).

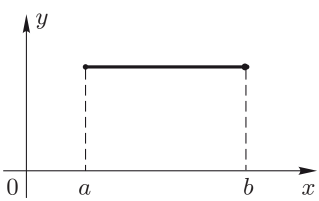


Рис. 11.4

Замечание 11.5 (*следствие из теоремы Лагранжа*). Если $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$ и $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (a, b)$, то $f(x) = \mathrm{const}$ на отрезке $[a, b]$. Этот вывод следует, например, из геометрического смысла производной. Если $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (a, b)$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) параллельна оси Ox. Следовательно, $f(x) = \mathrm{const}$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 11.4).

Пример 11.2. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x - x^3$ на отрезке $[-2, 1]$ и найти соответствующие значения ξ.

Решение. Очевидно, что $f(x) \in C[-2, 1]$, $f(x) \in D(-2, 1)$, так как $\forall x \in (-2, 1)$ существует $f'(x) = 1 - 3x^2$. Условия теоремы Лагранжа выполнены. Следовательно, на интервале $(-2, 1)$ существует хотя бы одна точка ξ, для которой справедливо равенство $f(1) - f(-2) = f'(\xi)(1 - (-2))$. Так как $f(1) = 0$, $f(-2) = 6$, то $0 - 6 = f'(\xi) \cdot 3$, $f'(\xi) = -2$. Учитывая, что $f'(x) = 1 - 3x^2$, найдем точку ξ из уравнения $f'(\xi) = 1 - 3\xi^2 = -2$. Отсюда $\xi_{1,2} = \pm 1$. Искомой является точка $\xi_1 = -1$, так как только $\xi_1 = -1 \in (-2, 1)$. ■

11.3. Теорема Коши. Обобщенная формула конечных приращений.

Теорема 11.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ $(f(x), g(x) \in C[a, b])$, дифференцируемы на интервале (a, b) $(f(x), g(x) \in D(a, b))$ и $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b. \tag{11.7}$$

Формулу (11.7) называют *обобщенной формулой конечных приращений* или *формулой Коши*.

1) Формула Лагранжа (11.1) есть частный случай формулы Коши при $g(x) = x$.

2) Формула Коши, как и формула Лагранжа, справедлива и для $a < b$, и для $a > b$.

Пример 11.3. Проверить выполнение условий теоремы Коши для функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2$ на отрезке $[1, 3]$ и найти соответствующие значения ξ.

Решение. Очевидно, что $f(x)$, $g(x) \in C[1, 3]$, $f(x)$, $g(x) \in$ $\in D(1, 3)$, так как на интервале $(1, 3)$ существуют производные $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$. Кроме того, $g'(x) = 2x \neq 0$ на $(1, 3)$. Таким образом, все условия теоремы Коши выполнены. Следовательно, на интервале $(1, 3)$ существует хотя бы одна точка ξ, для которой справедливо равенство $\dfrac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, или $\dfrac{13}{4} = \dfrac{3x^2}{2x}\Big|_{x=\xi} =$ $= \dfrac{3}{2}\xi$. Отсюда $\xi = \dfrac{13}{6}$. Полученное значение $\xi = \dfrac{13}{6}$ и является искомым, так как $\xi = \dfrac{13}{6} \in (1, 3)$. ■

11.4. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. Во многих случаях вычисление предела функций, заданных аналитически, приводит к неопределенностям вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ (см. замечания 4.1 и 4.4).

Теорема 11.4 (*раскрытие неопределенности вида* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$). Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки a;

2) $g(x) \neq 0$ в этой окрестности точки a;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

4) существует конечный или бесконечный предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения функций $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{11.8}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда a — число. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, полагая $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a и будут удовлетворять условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки a. Следовательно, для любой точки x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между точками a и x (т. е. $\xi = a + \theta(x-a)$, где $0 < \theta < 1$), такая что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.9}$$

Очевидно, что $\xi \to a$ при $x \to a$. Поэтому, если существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Переходя к пределу в равенстве (11.9) при $x \to a$, получим требуемую формулу (11.8):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана. ■

Пример 11.4. Найти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{x-3}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 3}\ln(x^2-8)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$, то имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Функции $f(x)=\ln(x^2-8)$ и $g(x)=x-3$ удовлетворяют условиям теоремы 11.4 в окрестности точки $x=3$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-8)}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(\ln(x^2-8))'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{(x^2-8)\cdot 1}=6. \blacksquare$$

Замечание 11.6. Теорема 11.4 остается справедливой, если $x\to a+0$ или $x\to a-0$, а также в случае, когда a есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 11.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$. Функции $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x$ и $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ удовлетворяют условиям теоремы 11.4 в окрестности символа $+\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)'}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+x)}{x\,(1+x^2)}=1.$$

Теорема 11.5 (*раскрытие непределенности вида* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$). Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки a;

2) $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности точки a;

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Отметим, что теорема 11.5 остается в силе, если a есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, $a+0$, $a-0$.

Пример 11.6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, где $\alpha>0$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$ при $\alpha>0$. Функции $f(x)=\ln x$ и $g(x)=x^\alpha$ удовлетворяют условиям теоремы 11.5 в окрестности символа $+\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0. \blacksquare$$

Полученный результат означает, что при $x\to+\infty$ любая степенная функция $g(x)=x^\alpha$ с положительным показателем $\alpha>0$ растет быстрее логарифмической функции $f(x)=\ln x$.

Указанный в теоремах 11.4 и 11.5 способ вычисления предела отношения функций по формуле

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

называют *правилом Лопиталя*[3].

В приведенных далее примерах 11.7, 11.9–11.14 для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно использовать правило Лопиталя, так как соответствующие функции $f(x)$ и $g(x)$ в этих примерах удовлетворяют условиям или теоремы 11.4, или теоремы 11.5.

Пример 11.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+0}(1+2\ln(\sin x))=-\infty$. Учитывая, что $\sin x\sim$ $\sim x$ при $x\to 0$ (см. таблицу 5.1), найдем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln(\sin x))'}=$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}. \blacksquare$$

[3] Г. Ф. А. Лопитáль (1661–1704) — французский математик.

Замечание 11.7. Если при $x \to a$ не существует предела отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то правило Лопиталя неприменимо. При этом предел отношения функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ может существовать и может быть найден другим способом.

Пример 11.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. (При вычислении первого предела использована теорема 4.7 о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.)

В данном случае правило Лопиталя неприменимо, так как не существует предела отношения производных. Действительно, производная числителя $\left(x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ предела не имеет, так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ не существует. Однако предел можно найти, если преобразовать функцию под знаком предела, использовать теорему 4.7 и учесть, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Иногда правило Лопиталя применяют несколько раз.

Пример 11.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$. Найдем

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ сохранилась. Вычислим предел отношения производных функций $f_1(x) = 1 - \cos x$ и $g_1(x) = 3x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, применяя правило Лопиталя дважды, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$
$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}. \blacksquare$$

Пример 11.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$, если $a>1$, $n\in\mathbf{N}$.

Решение. Для раскрытия данной неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ применим правило Лопиталя n раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(nx^{n-1})'}{(a^x\ln a)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x(\ln a)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ldots$$
$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{a^x(\ln a)^n}=0. \blacksquare$$

Полученный ответ означает, что при $x\to+\infty$ показательная функция $g(x)=a^x$ $(a>1)$ растет быстрее степенной функции $f(x)=$ $=x^n$ с натуральным показателем.

Замечание 11.8 (*раскрытие неопределенностей вида* $[0\cdot\infty]$ *и* $[\infty-\infty]$). Указанные неопределенности можно свести к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ с помощью алгебраических преобразований функции под знаком предела.

Действительно, пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=[\infty-\infty]=$$
$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]. \blacksquare$$

Пример 11.11. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Записывая произведение функций под знаком предела в виде отношения и применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0. \ \blacksquare$$

Пример 11.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$, то имеет место неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Преобразуя функцию под знаком предела и дважды применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+2} = \frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

Замечание 11.9. (*Раскрытие неопределенностей вида* $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$.) К данным неопределенностям приводит вычисление пределов показательно-степенной функции $y=(f(x))^{g(x)}$, $f(x)>0$, так как

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \begin{cases} [1^\infty], & \text{если} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=1, \\ & \phantom{\text{если}} \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty; \\ [\infty^0], & \text{если} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \\ & \phantom{\text{если}} \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0; \\ [0^0], & \text{если} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \\ & \phantom{\text{если}} \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0. \end{cases}$$

Указанные пределы можно найти, если перейти к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$. Используем основное логарифмическое тождество ($x=e^{\ln x}$, или $x=\exp\{\ln x\}$ $\forall\, x>0$) для записи функции под знаком предела. Учитывая непрерывность показательной функции и опуская аргумент у функций f и g, получим

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} e^{\ln f^g} = \lim_{x\to a}\exp\{\ln f^g\} = \exp\left\{\lim_{x\to a}\ln f^g\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to a}(g\cdot\ln f)\right\}. \quad (11.10)$$

Так как $f^g = y$, $g \ln f = \ln y$, то из (11.10) имеем

$$\lim_{x\to a} y = \exp\left\{\lim_{x\to a} \ln y\right\} \quad (y > 0). \tag{11.11}$$

Отметим, что для всех рассматриваемых неопределенностей ($[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$) предел $\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a}(g \cdot \ln f)$ есть неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$. Пусть найден предел $\lim\limits_{x\to a} \ln y = A$. Тогда

$$\lim_{x\to a} y = \exp\left\{\lim_{x\to a} \ln y\right\} = \begin{cases} e^A, & A \text{ — число;} \\ 0, & A = -\infty; \\ +\infty, & A = +\infty. \end{cases}$$

Пример 11.13. Найти $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x^2} = \infty$. Полагая $y = x^{\frac{1}{1-x^2}}$ и учитывая формулу (11.11), запишем:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} y = \exp\left\{\lim_{x\to 1} \ln y\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x^2}}\right\}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x^2} \cdot \ln x\right) = [\infty \cdot 0] =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(1-x^2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}} = \exp\left\{\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x^2}}\right\} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \ \blacksquare$$

Пример 11.14. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty^0]$, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + 2^x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Обозначим $y = (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$. По формуле (11.11) запишем $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} y = \exp\left\{\lim\limits_{x\to +\infty} \ln y\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to +\infty} \ln (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}\right\}$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to +\infty} x2^{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$ (см. пример 11.10), вычислим

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\cdot\ln(x+2^x)\right) =$$
$$= [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x+2^x))'}{x'} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x\ln 2}{(x+2^x)\cdot 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{-x}+\ln 2}{x\cdot 2^{-x}+1} = \ln 2.$$

Окончательно найдем

$$\lim_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} \ln(x+2^x)^{\frac{1}{x}}\right\} = e^{\ln 2} = 2. \blacksquare$$

11.5. Типовые примеры. В примерах 1–8 для вычисления пределов $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ правомерно использование правила Лопиталя, поскольку соответствующие функции $f(x)$ и $g(x)$ в этих примерах удовлетворяют условиям или теоремы 11.4, или теоремы 11.5.

П р и м е р 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\ln\cos x}{x+\sin x}$.

Р е ш е н и е. В данном случае имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(x+\ln\cos x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x) = 0$. Найдем производные функций $f(x) = x+\ln\cos x$ и $g(x) = x+\sin x$: $f'(x) = (x+\ln\cos x)' = 1 - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1-\operatorname{tg} x$; $g'(x) = (x+\sin x)' = 1+\cos x$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\ln\cos x}{x+\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+\ln\cos x)'}{(x+\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

П р и м е р 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

Р е ш е н и е. Данный предел есть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln(1-x) = -\infty$. Найдем производные функций $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ и $g(x) = \ln(1-x)$:

$$f'(x) = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)' = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}; \qquad g'(x) = (\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x}.$$

По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 1-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)'}{(\ln(1-x))'}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\pi(x-1)}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}.$$

Полученный предел есть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем еще раз правило Лопиталя. Найдем производные функций $f_1(x)=$ $=\pi(x-1)$ и $g_1(x)=2\cos^2\frac{\pi x}{2}$:

$$f_1'(x)=(\pi(x-1))'=\pi;$$

$$g_1'(x)=\left(2\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'=4\cos\frac{\pi x}{2}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi\sin\pi x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\pi(x-1)}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1-0}\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{(\pi(x-1))'}{\left(2\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\pi}{-\pi\sin\pi x}=-\infty.$$

Итак, после двукратного применения правила Лопиталя получим окончательный ответ:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 1-0}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)'}{(\ln(1-x))'}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\pi(x-1)}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1-0}\frac{(\pi(x-1))'}{\left(2\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\pi}{-\pi\sin\pi x}=-\infty. \blacksquare$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x^2}=\infty$. Преобразуем произведение функций под знаком предела в отношение и определим вид полученной неопределенности:

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, найдем

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{1/x^2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}\cdot(-2x^{-3})}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty. \blacksquare$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. Данный предел есть неопределенность вида $[0\cdot\infty]$, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\infty$. Преобразуем произведение функций под знаком предела в отношение и определим вид полученной неопределенности:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

По правилу Лопиталя получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = -\dfrac{2}{\pi}$. $\blacksquare$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{e^x-1}\right)$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9}{x}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{e^x-1}=\infty$. Преобразуем разность функций под знаком предела в отношение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{9}{x}-\frac{4}{e^x-1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{9(e^x-1)-4x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Применим правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{9(e^x-1)-4x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(9e^x-9-4x)'}{(xe^x-x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{9e^x-4}{e^x+xe^x-1} = \infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{e^x-1}\right)=\infty$. ■

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$. Обозначим $y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ и запишем предел в виде

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}y=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\ln y\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right\}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x+x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Используя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2.$$

Окончательно получим

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=e^2. \blacksquare$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $[0^0]$, так как $\lim\limits_{x\to +0}x=0$, $\lim\limits_{x\to +0}\sin x=0$. Обозначим $y=x^{\sin x}$. Тогда

$$\lim_{x\to +0}x^{\sin x}=\lim_{x\to +0}y=\exp\left\{\lim_{x\to +0}\ln y\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to +0}\ln x^{\sin x}\right\}.$$

Найдем

$$\lim_{x\to +0}\ln x^{\sin x}=\lim_{x\to +0}(\sin x\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

По правилу Лопиталя получим

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{(\sin^{-1}x)'}=$$
$$=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{(-\sin^{-2}x)\cdot\cos x}=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=-\lim_{x\to +0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$
$$=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} = \exp\Big\{\lim_{x\to+0} \ln x^{\sin x}\Big\} = e^0 = 1. \ \blacksquare$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty^0]$, так как $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{ctg} x = \infty$ и $\lim\limits_{x\to+0} x = 0$. Обозначим $y = (\operatorname{ctg} x)^x$ и по формуле (11.11) запишем данный предел в виде

$$\lim_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to+0} y = \exp\left\{\lim_{x\to+0}\ln y\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to+0}\ln(\operatorname{ctg} x)^x\right\}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to+0}\ln(\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to+0}(x\cdot\ln(\operatorname{ctg} x)) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln(\operatorname{ctg} x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x\cdot x^2}{\cos x\cdot\sin^2 x} = \lim_{x\to+0}\frac{x^2}{\cos x\cdot\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^x = \exp\left\{\lim\limits_{x\to+0}\ln(\operatorname{ctg} x)^x\right\} = e^0 = 1.$ $\blacksquare$

11.6. Задачи для самостоятельного решения.

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+2x)}$; **2.** $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 5x)}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$; **4.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x - x}{x^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; **6.** $\lim\limits_{x\to1}\left(1-\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$; **8.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$; **10.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$;

11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2 - e^{x^2}\right)^{\frac{1}{1-\cos \pi x}}$; **12.** $\lim\limits_{x\to 1-0} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

13. $\lim\limits_{x\to 1-0} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x-1}$; **14.** $\lim\limits_{x\to 3+0} (x^2 - 4x + 3)^{\frac{1}{\ln(x-3)}}$;

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; **16.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$.

§ 12. Формула Тейлора

12.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема 12.1. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 (см. замечание 10.3). Тогда для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 справедливо разложение

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \quad (12.1)$$

где $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать существование многочлена $P_n(x)$ степени не выше n такого, что $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$, где

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad (12.2)$$
$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n). \quad (12.3)$$

В случае $n = 1$ такой многочлен существует и имеет вид

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \quad (12.4)$$

так как $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1'(x_0) = f'(x_0)$,

$$r_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) =$$
$$= \Delta y - f'(x_0)\Delta x = \Delta y - dy = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = f'(x_0)\Delta x$.

По аналогии с формулой (12.4) будем искать многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (12.2) и (12.3), в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \\ + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n. \quad (12.5)$$

Продифференцируем равенство (12.5) n раз:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \ldots + (n-1)\,na_n(x - x_0)^{n-2},$$
$$P_n'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)\,na_n(x - x_0)^{n-3},$$
$$\ldots$$
$$P_n^{(n-1)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)na_n(x - x_0),$$
$$P_n^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot na_n = n!\,a_n. \quad (12.6)$$

Полагая в равенствах (12.5) и (12.6) $x = x_0$ и учитывая условия (12.2), получим

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}. \quad (12.7)$$

Таким образом, если коэффициенты многочлена (12.5) выбраны согласно формулам (12.7), то этот многочлен удовлетворяет условию (12.2). Покажем, что этот многочлен удовлетворяет и условиям (12.3).

Отметим, что в силу соотношений (12.2) для функции $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ имеют место равенства

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n-1)}(x_0) = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \quad (12.8)$$

Вычислим $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$. Из условия теоремы следует, что правило Лопиталя можно применить $(n-1)$ раз. Учитывая равенства (12.8), найдем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots$$
$$\ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Отсюда следует, что $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, т.е. выполнено условие (12.3). Теорема полностью доказана. ■

Определение 12.1. Формула (12.1) называется *формулой Тейлора*[1] *порядка n для функции $f(x)$ в точке $x = x_0$*, многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (12.9)$$

[1] Б. Тéйлор (1685–1731) — английский математик.

называется *многочленом Тейлора,* функция $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ — *остаточным членом формулы Тейлора,* а его представление в виде

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \tag{12.10}$$

— записью остаточного члена *в форме Пеано*[2].

Частный случай формулы Тейлора при $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена*[3] n-го порядка и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + r_n(x), \tag{12.11}$$

где остаточный член в форме Пеано $r_n(x) = o(x^n)$.

Теорема 12.2. Если функция $f(x)$ задана в окрестности точки x_0 и ее разложение имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \tag{12.12}$$

то такое разложение единственно.

Замечание 12.1. Из теоремы 12.2 следует, что если для функции, n раз дифференцируемой в точке x_0, получено разложение (12.12), то это разложение является ее разложением по формуле Тейлора, т. е. в разложении (12.12) коэффициенты $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. В самом деле, при сделанных предположениях, согласно теореме 12.1, такое разложение существует, а другого, в силу теоремы 12.2, быть не может. Отсюда следует равносильность утверждений о разложении функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 и о разложении функции по степеням разности $(x - x_0)$.

Пример 12.1. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ по формуле Тейлора 2-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ удовлетворяет условиям теоремы 12.1 в точке $x_0 = 1$. Запишем формулу Тейлора 2-го порядка для функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\,(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x - 1)^2 + o((x - 1)^2).$$

Так как $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$, то $f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = -6$. Следовательно, требуемое разложение

[2] Д. Пеáно (1858–1932) — итальянский математик.

[3] К. Маклóрен (1698–1746) — шотландский математик.

будет иметь вид

$$\frac{1}{x^2} = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

В данном случае многочлен Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = 1$ $P_2(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$. ■

Пример 12.2. Записать формулу Маклорена 3-го порядка для функции $f(x) = \arcsin x$.

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.1 при $x_0 = 0$. Запишем для $f(x)$ формулу Маклорена 3-го порядка:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + o(x^3).$$

Вычислим $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ для функции $f(x) = \arcsin x$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \quad f'''(x) = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

Отсюда $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$. Формула Маклорена 3-го порядка для данной функции принимает вид

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3). \ ■$$

Пример 12.3. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ по степеням разности $(x-2)$.

Решение. Найдем значение многочлена и его производных в точке $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned}
&P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2, && P(2) = 0;\\
&P'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 10x + 1, && P'(2) = -7;\\
&P''(x) = 12x^2 - 30x + 10, && P''(2) = -2;\\
&P'''(x) = 24x - 30, && P'''(2) = 18;\\
&P^{(4)}(x) = 24, && P^{(4)}(2) = 24;\\
&P^{(k)}(x) = 0,\ k > 4, && P^{(k)}(2) = 0,\ k > 4.
\end{aligned}$$

Запишем данный многочлен по формуле Тейлора:

$$P(x) = 0 - 7(x-2) - \frac{2}{2!}(x-2)^2 + \frac{18}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4 = \\ = -7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

Замечание 12.2. Единственность представления функций по степеням разности $(x - x_0)$ позволяет использовать для разложения этих функций в окрестности точки x_0 различные приемы и методы.

Пример 12.4. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ по степеням x.

Решение. *Первый способ.* Используем формулу Маклорена (12.11). Вычислим $f(0)$, $f'(0)$, …, $f^{(n)}(0)$. Очевидно, что $f(0)=1$. Так как $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, то

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}, && f'(0) = 1 = 1!,\\
&f''(x) = (-2)(-1)(1-x)^{-3} = 2(1-x)^{-3}, && f''(0) = 2 = 2!,\\
&f'''(x) = 2(-3)(-1)(1-x)^{-4} = 2\cdot 3(1-x)^{-4}, && f'''(0) = 3!,\\
&\ldots && \ldots\\
&f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(1-x)^{-n-1} = n!(1-x)^{-1-n}, && f^{(n)}(0) = n!.
\end{aligned}$$

По формуле (12.11) запишем:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

Второй способ. Заметим, что дробь $\dfrac{1}{1-x}$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$, $|q| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Полагая $P_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$, запишем функцию $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ в виде $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$, где $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = x^{n+1}(1 + x + \ldots) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x} \to 0$ при $x \to 0$. Так как $r_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ при $x \to 0$, то

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

Разложения, полученные двумя разными способами, в силу теоремы 12.2, совпадают. ■

12.2. Формула Тейлора для некоторых основных элементарных функций. Формула Тейлора имеет наиболее простой вид при $x_0 = 0$ (см. формулу Маклорена (12.11)). При $x_0 \neq 0$ к этому частному случаю приходят, полагая $x - x_0 = t$, где $t \to 0$ при $x \to x_0$.

Пример 12.5. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \sin x$.

Решение. Так как $f(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\,\dfrac{\pi}{2})$ (см. формулу 10.3), то

$$f^{(n)}(0) = \sin n\,\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

Заметим, что остаточный член записан в виде $o(x^{2n+2})$, так как первое слагаемое остаточного члена содержит x^{2n+3}. ■

Пример 12.6. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = e^x$.

Решение. Имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Поэтому

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \ ■$$

Аналогично могут быть разложены по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$, $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$. В табл. 12.1 приведены разложения по формуле Маклорена пяти основных элементарных функций.

Таблица 12.1

1	$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0$
2	$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right),\ x \to 0$
3	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right),\ x \to 0$
4	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\ x \to 0$
5	$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n),\ x \to 0$

Формула Тейлора требует вычисления производных высших порядков, что в ряде случаев затрудняет ее использование. Комбинируя разложения основных элементарных функций из табл. 12.1 и учитывая единственность представления функций по степеням разности $(x-x_0)$, можно получить разложения различных функций, не прибегая непосредственно к формуле Тейлора.

Пример 12.7. Разложить функцию $f(x)=e^{\sin x}$ по степеням x до члена с x^3 включительно.

Решение. Заменяя в формуле 1 табл. 12.1 аргумент x на $\sin x$ и учитывая, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $o(\sin^3 x)=o(x^3)$, получим $e^{\sin x}=1+\sin x+\dfrac{(\sin x)^2}{2!}+\dfrac{(\sin x)^3}{3!}+o(x^3)$ при $x\to 0$. С другой стороны, $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$ (см. формулу 2 табл. 12.1). Подставляя это выражение для $\sin x$ в разложение функции $e^{\sin x}$, найдем

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3+o(x^3)=$$
$$=1+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3). \;\blacksquare$$

Пример 12.8. Разложить функцию $f(x)=\sqrt[5]{x}$ по формуле Тейлора n-го порядка в окрестности точки $x_0=1$.

Решение. Введем новую переменную $t=x-1$, где $t\to 0$ при $x\to 1$. Тогда $x=t+1$, $\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{t+1}=(1+t)^{\frac{1}{5}}$. Разложим функцию $\varphi(t)=(1+t)^{\frac{1}{5}}$ по формуле Маклорена. Используя формулу 4 табл. 12.1 при $\alpha=\dfrac{1}{5}$, найдем

$$(1+t)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}t+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)t^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)t^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{5}-n+1\right)t^n+o(t^n).$$

Возвращаясь к переменной x, т. е. полагая $t=x-1$ в последнем выражении, окончательно получим требуемое разложение функции $f(x)=\sqrt[5]{x}$ по формуле Тейлора порядка n в окрестности точки $x_0=1$:

$$\sqrt[5]{x}=1+\frac{1}{5}(x-1)-\frac{1\cdot 4}{2!\,5^2}(x-1)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{3!\,5^3}(x-1)^3+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot(5n-6)}{n!\,5^n}(x-1)^n+o((x-1)^n). \;\blacksquare$$

12.3. Различные формы остаточного члена. Форма Пеано (12.10) остаточного члена формулы Тейлора указывает лишь его порядок относительно разности $(x-x_0)$. Однако в ряде задач возникает необходимость численной оценки абсолютной погрешности приближенного равенства $f(x)\approx P_n(x)$, т.е. модуля остаточного члена $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

Теорема 12.3. Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную $(n+1)$-го порядка и x — любая точка из этой окрестности. Тогда между точками x_0 и x найдется точка $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$ такая, что справедлива формула

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \tag{12.13}$$

где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 (см. формулу (12.9)), остаточный член

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{12.14}$$

или

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(1-\theta)^n(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{12.15}$$

Выражения (12.14) и (12.15) называются соответственно формой Лагранжа и формой Коши остаточного члена $r_n(x)$ формулы Тейлора (12.13). В формуле Маклорена (12.11) остаточный член в форме Лагранжа (12.14) или в форме Коши (12.15) имеет соответственно вид

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{12.16}$$

или

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{12.17}$$

Пример 12.9. Вычислить приближенно $\ln 1.5$ по формуле Маклорена 4-го порядка. Указать абсолютную погрешность вычисления.

Решение. Запишем формулу Маклорена 4-го порядка для функции $f(x) = \ln(1+x)$ (см. табл. 12.1):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + r_4(x).$$

Найдем остаточный член $r_4(x)$ в форме Лагранжа, используя выражение для $f^{(n+1)}(x)$ функции $f(x) = \ln(1+x)$. Так как $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(1+x)^{-n-1}$ (см. пример 10.5), то из формулы (12.16) получим

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n(1+\theta x)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда при $n = 4$ имеем $r_4(x) = \dfrac{x^5}{5(1+\theta x)^5}$, $0 < \theta < 1$. Заменим функцию $f(x) = \ln(1+x)$ многочленом четвертой степени и запишем приближенное равенство

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Учитывая, что в данном случае $x = 0.5$, найдем

$$\ln 1.5 = \ln(1+0.5) \approx 0.5 - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{4} = 0.401,$$

причем $r_4(0.5) = \dfrac{(0.5)^5}{5(1+\theta\cdot 0.5)^5}$, $0<\theta<1$. Оценим $r_4(0.5)$. Очевидно, что $r_4(0.5)$ принимает наибольшее значение при $\theta = 0$, т. е. $|r_4(0.5)| \leqslant \leqslant \dfrac{(0.5)^5}{5} < 0.007$. Следовательно, $\ln 1.5 = 0.401 + \delta$, где $|\delta| < 0.007$. ■

Замечание 12.3. Формулу Тейлора (12.1) можно записать в ином виде. Полагая $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$ и используя остаточный член в форме Лагранжа, имеем

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\,\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \quad 0<\theta<1. \quad (12.18)$$

Формула Тейлора (12.18) является обобщением формулы Лагранжа (см. теорему 11.2) и содержит ее как частный случай при $n = 0$:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0+\theta\,\Delta x)\cdot\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

Замечание 12.4. Ниже предлагается схема 1 разложения произвольной функции $f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа.

1. Записать в общем виде (12.1) формулу Тейлора порядка n для произвольной функции $f(x)$ в заданной точке x_0 с остаточным членом $r_n(x)$, где порядок n определяется условием задачи.

2. Найти производные данной функции $f(x)$ до порядка n, если $r_n(x)$ имеет форму Пеано, или до порядка $(n+1)$, если $r_n(x)$ имеет форму Лагранжа.

3. Вычислить значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$.

4. Записать остаточный член $r_n(x)$ в форме Пеано (по формуле (12.10)) или в форме Лагранжа (по формуле (12.14)).

5. Записать окончательное требуемое разложение для функции $f(x)$ по формуле Тейлора, подставляя значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\ldots$ $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$ и выражение для $r_n(x)$ в формулу (12.1).

Для разложения произвольной функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с использованием разложений основных элементарных функций (см. табл. 12.1) рекомендуется схема 2.

1. Преобразовать функцию $f(x)$ к виду, содержащему основные элементарные функции.

2. Выписать разложения этих элементарных функций, используя табл. 12.1.

3. Записать окончательное разложение функции $f(x)$, подставляя разложения из п. 2 в преобразованную функцию $f(x)$, используя свойства бесконечно малых и записывая остаточный член в форме Пеано. В случае $x_0 \neq 0$ с помощью замены переменной $t = x - x_0$, где $t \to 0$ при $x \to x_0$, разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ заменить разложением функции $\varphi(t)$ по степеням t с последующим возвратом к переменной $x = t + x_0$.

12.4. Типовые примеры.

Пример 1. Разложить многочлен $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ по степеням $(x+1)$, используя схему 1 (см. замечание 12.4).

Решение. 1) Запишем в общем виде формулу Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = -1$:

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n + r_n(x). \quad (12.19)$$

2) Найдем производные данного многочлена:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3; \quad f''(x) = 6x - 4; \quad f'''(x) = 6;$$
$$f^{(4)}(x) = 0; \quad f^{(k)}(x) = 0, \ k > 4.$$

3) Вычислим значения многочлена и его производных в точке $x_0 = -1$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 5 = -1;$$
$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 10; \quad f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 4 = -10;$$
$$f'''(-1) = 6; \quad f^{(4)}(-1) = 0; \quad f^{(k)}(-1) = 0, \ k > 4.$$

4) Запишем $r_n(x)$. Так как $f^{(k)}(x) = 0$ при $k \geqslant 4$, то $r_n(x) = 0$ для $n \geqslant 3$.

5) Запишем разложение данного многочлена по степеням $(x+1)$, подставляя значения многочлена и его производных в точке $x_0 = -1$ и остаточный член $r_n(x)$ в формулу (12.19):

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = -1 + 10(x+1) - \frac{10}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3 + 0 =$$
$$= -1 + 10(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3. \ \blacksquare$$

Пример 2. Записать формулу Тейлора 3-го порядка с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$, применяя схему 1.

Решение. 1) Запишем общий вид формулы Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + r_3(x). \quad (12.20)$$

2) Найдем производные функции $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ до 3-го порядка включительно: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-2}$, $f''(x) = 2(x-1)^{-3}$, $f'''(x) = -6(x-1)^{-4}$.

3) Вычислим значения функции и ее производных $f^{(k)}(x)$ $(k \leqslant 3)$ в точке $x_0 = 2$:

$$f(2) = 2; \quad f'(2) = -1; \quad f''(2) = 2; \quad f'''(2) = -6.$$

4) Запишем остаточный член в форме Пеано. Так как $f^{(4)}(x) = 24(x-1)^{-5}$, $f^{(4)}(2) \neq 0$, то $r_3(x) = o\left((x-2)^3\right)$.

5) Запишем требуемое разложение функции $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ по формуле Тейлора 3-го порядка, подставляя значения $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$ и $r_3(x)$ в формулу (12.20):

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 - \frac{6}{3!}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right) = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right). \ \blacksquare$$

Пример 3. Записать формулу Маклорена 4-го порядка с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, используя схему 1.

Решение. 1) Запишем общий вид формулы Маклорена 4-го порядка для произвольной функции $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + r_4(x). \quad (12.21)$$

2) Найдем производные функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ до 4-го порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x; \quad f''(x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x;$$

$$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x;$$

$$f^{(4)}(x) = 24\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x + 16\cos^{-3} x \cdot \sin x.$$

3) Вычислим значения функции и ее производных $f^{(k)}(x)$ $(k \leqslant 4)$ в точке $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 2; \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

4) Запишем остаточный член в форме Пеано: $r_4(x) = o(x^4)$, так как $f^{(4)}(0) = 0$.

5) Запишем искомое разложение функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, подставляя значения функции и ее производных в точке $x_0 = 0$ и остаточный член $r_4(x)$ в формулу (12.21):

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!} \cdot x^3 + o(x^4) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \ \blacksquare$$

П р и м е р 4. Записать формулу Маклорена 3-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$, применяя схему 1.

Р е ш е н и е. 1) Запишем формулу Маклорена 3-го порядка в общем виде для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + r_3(x). \tag{12.22}$$

2) Найдем производные функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до 4-го порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}; \quad f''(x) = (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x;$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x^2)^{-3} \cdot (2x)^2 + (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2 = \\ = (6x^2 - 2)(1+x^2)^{-3};$$

$$f^{(4)}(x) = 12x(1+x^2)^{-3} + (-3)(1+x^2)^{-4} \cdot 2x \cdot (6x^2 - 2) = \\ = 24x(1-x^2)(1+x^2)^{-4}.$$

3) Вычислим $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -2.$$

4) Запишем остаточный член в форме Лагранжа. Так как $r_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4$, где $\xi = \theta x$ и $0 < \theta < 1$, то

$$r_3(x) = \frac{24\,\theta x(1 - \theta^2 x^2)}{(1+\theta^2 x^2)^4} \cdot \frac{x^4}{4!}.$$

5) Запишем требуемое разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$, подставляя значения $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ и $r_3(x)$ в формулу (12.22):

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{24\,\theta x(1-\theta^2x^2)}{(1+\theta^2x^2)^4} \cdot \frac{x^4}{4!}, \qquad 0<\theta<1. \ \blacksquare$$

Пример 5. Разложить функцию $f(x)=\ln(1+\sin x)$ в окрестности точки $x_0=0$ до члена x^3 включительно, используя схему 2.

Решение. 1) Запишем функцию $f(x)$ через основные элементарные функции в виде $f(x)=\ln(1+t)$, где $t=\sin x$.

2) Разложим функции $\ln(1+t)$ и $\sin x$, используя табл. 12.1:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3); \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

3) Заменим t на $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$ в разложении функции $\ln(1+t)$ и при возведении в степень сохраним лишь члены до порядка x^3. Остальные слагаемые включим в $o(x^3)$ с учетом свойств бесконечно малых ($o(t^3)=o(\sin^3 x)=o(x^3)$ при $x\to 0$). В результате получим

$$f(x)=\ln(1+\sin x) = \left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right) - \\ - \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^3}{3} + o(x^3) = \\ = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \ \blacksquare$$

Пример 6. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5+4x}}$ в окрестности точки $x_0=1$ до члена с $(x-1)^2$ включительно, применяя схему 2.

Решение. 1) Введем новую переменную $t=x-1$, где $t\to 0$ при $x\to 1$. Полагая $x=t+1$, запишем функцию $f(x)\big|_{x=t+1}=\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{5+4(t+1)}} = \frac{1}{\sqrt{9+4t}} = \frac{1}{3\sqrt{1+\frac{4}{9}\,t}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}\,t\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

2) Разложим функцию $\left(1+\dfrac{4}{9}\,t\right)^{-\frac{1}{2}}$ до члена с t^2 включительно. Используем разложение функции $(1+x)^\alpha$ из табл. 12.1. Заменяя в этом разложении x на $\dfrac{4}{9}\,t$ и полагая $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, получим

$$\left(1+\frac{4}{9}\,t\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{9}\,t + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{9}\,t\right)^2 + o(t^2) = \\ = 1 - \frac{2}{9}\,t + \frac{2}{27}\,t^2 + o(t^2).$$

3) Подставим последнее разложение в функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\,t\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{27}\,t + \frac{2}{81}\,t^2 + o(t^2).$$

Учитывая, что $t = x - 1$, окончательно запишем искомое разложение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5+4x}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{27}\,(x-1) + \frac{2}{81}\,(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right). \ \blacksquare$$

12.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Записать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = -1$ с остаточным членом в форме Пеано для многочлена $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$.

2. Разложить функцию $f(x) = \ln(\cos x)$ по степеням x до члена с x^4 включительно, записав остаточный член в общем виде.

3. Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до члена с x^3 включительно.

4. Записать разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \sqrt{1+2x}$ до члена с x^3 включительно и записать остаточный член в форме Лагранжа.

5. Записать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = 3$ с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

6. Разложить по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано функцию $f(x) = \cos(\sin x)$ до члена с x^4.

7. Записать формулу Тейлора 4-го порядка с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \sin^2 x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

8. Записать формулу Тейлора 3-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0 = -2$.

В задачах 9–12 использовать разложения основных элементарных функций из табл. 12.1.

9. Разложить функцию $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ по степеням x до члена с x^6 включительно.

10. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ в окрестности точки $x_0 = 0$ до члена с x^4 включительно.

11. Разложить функцию $f(x) = \sqrt[3]{20+12x}$ в окрестности точки $x_0 = -1$ до члена с $(x+1)^3$ включительно.

12. Разложить функцию $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+2x}}$ по степеням x до члена с x^5 включительно.

§ 13. Возрастание, убывание, экстремум функции

13.1. Возрастание и убывание функции. Согласно определению 3.12 функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на данном интервале, если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Другими словами, функция $f(x)$ возрастает (убывает) на данном интервале, если в каждой точке x этого интервала приращение аргумента Δx и соответствующее ему приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ имеют одинаковые (противоположные) знаки.

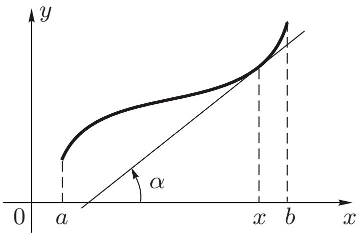


Рис. 13.1

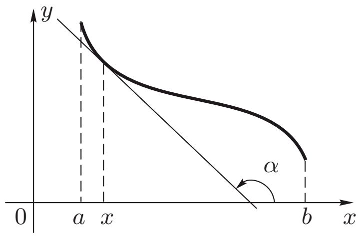


Рис. 13.2

Теорема 13.1 (*необходимое условие возрастания* (*убывания*) *дифференцируемой функции*). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале и возрастает (убывает) на нем. Тогда в любой точке x этого интервала $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).

Геометрически утверждение теоремы 13.1 означает, что в каждой точке графика возрастающей функции касательная либо образует острый угол с положительным направлением оси Ox, либо параллельна оси Ox, а в каждой точке графика убывающей функции касательная либо образует тупой угол с положительным направлением оси Ox, либо параллельна оси Ox (рис. 13.1 и 13.2).

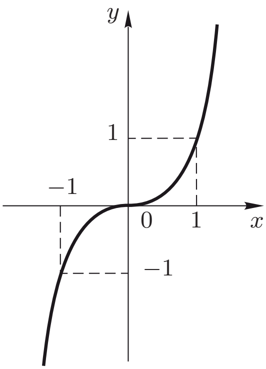


Рис. 13.3

Например, функция $y = x^5$ возрастает на всей числовой оси. Ее производная $y' = 5x^4$ неотрицательна при всех x. Касательная к графику данной функции в точке $O(0,0)$ параллельна оси Ox, а в остальных точках графика образует с осью Ox острый угол (рис. 13.3).

Теорема 13.2 (*достаточное условие возрастания* (*убывания*) *функции*). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале и в каждой точке x этого интервала $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает (убывает) на данном интервале.

Доказательство. Пусть на некотором интервале $f'(x) > 0$ и x_1, x_2 — две произвольные точки этого интервала. Тогда по теореме Лагранжа (см. теорему 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$, где точка ξ лежит между точками x_1 и x_2. Так как по условию $f'(\xi) > 0$, то знаки разностей $(x_2 - x_1)$ и $f(x_2) - f(x_1)$ совпадают, т. е. функция $f(x)$ возрастает на данном интервале.

Для случая $f'(x) < 0$ доказательство аналогично. ■

Определение 13.1. Интервал, на котором функция возрастает (убывает), называется *интервалом возрастания* (*убывания*) функции. Интервалы возрастания и убывания называются *интервалами монотонности* функции.

Пример 13.1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 6x + 7$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Найдем первую производную: $y' = 2(x - 3)$. Имеем $y' > 0$ при $x > 3$, $y' < 0$ при $x < 3$. Следовательно, данная функция убывает на интервале $(-\infty, 3)$ и возрастает на интервале $(3, +\infty)$, т. е. эти интервалы являются интервалами монотонности данной функции.

Пример 13.2. Найти интервалы монотонности функции $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Найдем первую производную: $y' = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$. Очевидно, что $y' < 0$ при $x < 0$ и $y' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, на интервале $(-\infty, 0)$ функция убывает, а на интервале $(0, +\infty)$ — возрастает. Интервалы монотонности $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ разделяет точка $x = 0$, в которой производная $y' = \infty$ (рис. 13.4). ■

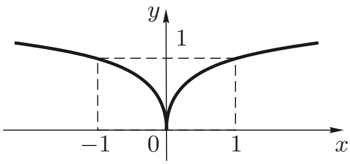


Рис. 13.4

Определение 13.2. *Критической точкой функции $y = f(x)$ по первой производной* называется точка из области определения функции, в которой производная этой функции равна нулю или не имеет конечного значения.

Определение 13.3. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$, в которой $f'(x_0) = 0$, называется *точкой стационарности функции $y = f(x)$*. Иначе говоря, точка стационарности функции есть нуль ее производной.

Пример 13.3. Найти критические точки функции $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ по первой производной.

Решение. Область определения функции — вся числовая ось.

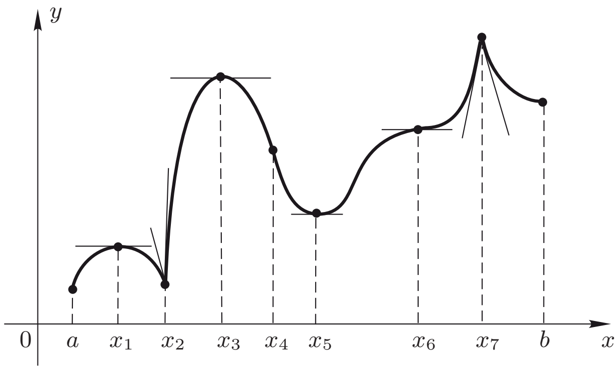


Рис. 13.5

Находим первую производную:

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что $y' = 0$ при $\sqrt[3]{x^2} = 1$, $y' = \infty$ при $x = 0$. Следовательно, точки стационарности функции $x_{1,2} = \pm 1$ и точка $x_3 = 0$ являются критическими точками функции по первой производной. ■

З а м е ч а н и е 13.1. Пусть функция $y = f(x)$ в своей области определения дифференцируема всюду за исключением, быть может, конечного числа точек. Можно доказать, что в этом случае интервалы монотонности функции разделяются ее критическими точками по первой производной. Обратное утверждение неверно, т. е. не каждая критическая точка функции по первой производной будет разделять интервалы монотонности.

З а м е ч а н и е 13.2. Условимся точку $(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$, в которой проведена касательная, обозначать для краткости только ее абсциссой x_0.

П р и м е р 13.4. Найти интервалы монотонности функции $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 13.5.

Р е ш е н и е. Данная функция не имеет конечной производной в точках x_2, x_4 и x_7: в точках x_2 и x_7 правая и левая касательные не совпадают (нет общей касательной к кривой в этих точках). Производная $f'(x_4) = \infty$, и в точке x_4 кривая имеет вертикальную касательную. В точках x_1, x_3, x_5, x_6 производная $f'(x)$ равна нулю, и касательная к графику в этих точках параллельна оси Ox. Следовательно, точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 являются критическими точками данной функции по первой производной.

На интервалах (a, x_1), (x_2, x_3) и (x_5, x_7) функция возрастает, на интервалах (x_1, x_2), (x_3, x_5) и (x_7, b) убывает, т. е. эти интервалы являются интервалами монотонности функции. Они разделяются критическими точками x_1, x_2, x_3, x_5, x_7. Критические точки x_4 и x_6 не разделяют интервалы монотонности. ■

Пример 13.5. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$.

Решение. Область определения функции — вся числовая ось. Определим критические точки функции по первой производной. Имеем

$$y'(x) = \sqrt[3]{x} + (x-4)\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3x+x-4}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что $y'(x) = 0$ при $x = 1$, $y'(x) = \infty$ при $x = 0$. Итак, функция имеет две критические точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Найдем интервалы монотонности. Критические точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Определим знак первой производной $y'(x) = \dfrac{4(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ на каждом из этих интервалов. Имеем $y'(x) > 0$ для $x \in (1,+\infty)$ и $y'(x) < 0$ для $x \in (-\infty,0)\cup(0,1)$. Следовательно, на интервале $(1,+\infty)$ функция возрастает, на интервалах $(-\infty,1)$, $(0,1)$ — убывает. ■

13.2. Экстремум функции.

Определение 13.4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a,b), содержащем точку x_0. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех точек x $(x \neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Определение 13.4 означает, что x_0 — точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если для достаточно малого приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ любого знака приращение функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$ (> 0).

Определение 13.5. Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Значение функции $f(x)$ в точке максимума (минимума) называют *максимумом* (*минимумом*) функции или *экстремумом* функции.

Для точек экстремума x_0 функции $f(x)$, и только для них, приращение функции Δy сохраняет знак при изменении знака достаточно малого приращения аргумента $\Delta x \neq 0$: $\Delta y < 0$ для точек максимума и $\Delta y > 0$ для точек минимума.

Из определения 13.4 следует, что точка экстремума x_0 лежит внутри интервала (a,b), так как сравниваются значения функции $f(x)$ в точке x_0 и в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0, т. е. определение экстремума носит «локальный» характер.

Замечание 13.3. Точки максимума (минимума) функции $f(x)$ иногда определяют следующим образом: точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x этой окрестности $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$.

В дальнейшем мы будем пользоваться определениями 13.4 и 13.5, т. е. рассматривать так называемый «строгий» экстремум, в отличие от «нестрогого» экстремума (см. замечание 13.3). Все теоремы, которые будут приведены для «строгого» экстремума, с небольшими изменениями можно перенести на случай «нестрогого» экстремума.

Функция $f(x)$ на данном интервале может иметь несколько экстремумов, причем некоторые минимумы функции могут быть больше некоторых ее максимумов.

Так, функция, график которой изображен на рис. 13.5, имеет максимумы в точках x_1, x_3, x_7 и минимумы в точках x_2, x_5. При этом минимум функции в точке x_5 больше ее максимума в точке x_1.

Теорема 13.3 (*необходимое условие экстремума дифференцируемой функции*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум. Тогда $f'(x) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум. Тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ при любом достаточно малом Δx. Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ (см теорему 4.18).

По условию $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Следовательно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Таким образом, одновременно $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0$, что возможно лишь при условии $f'(x_0) = 0$. Для случая, когда функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, доказательство аналогично. ■

Замечание 13.4. Равенство нулю производной в точке x_0 является только необходимым условием экстремума дифференцируемой функции, т. е. из условия $f'(x_0) = 0$ не следует существования экстремума функции в этой точке.

Рассмотрим функцию $y_1 = x^3$ (рис. 13.6, *а*). Ее производная $y_1' = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю, но функция в этой точке экстремума не имеет. Функция $y_2 = \sqrt[3]{x}$ (рис. 13.6, *б*) в точке $x = 0$ не имеет конечной производной, так как $y_2'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и $y_2'(0) = \infty$. Для

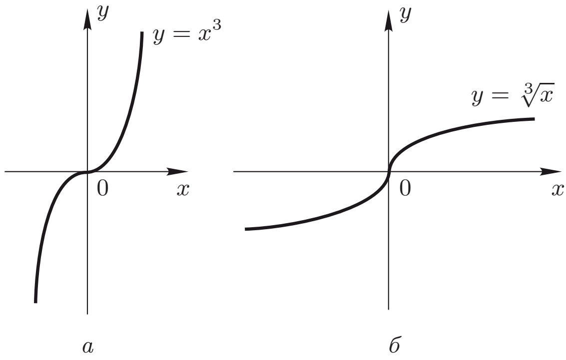


Рис. 13.6

этой функции точка $x = 0$ также не является точкой экстремума. Производные функций y_1 и y_2 положительны в окрестности точки $x = 0$, и обе функции возрастают и справа, и слева от точки $x = 0$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой в точке x_0 параллельна оси Ox (точки x_1, x_3, x_5, x_6 на рис. 13.5). Если функция $y = f(x)$ не дифференцируема в точке x_0, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 либо перпендикулярна оси Ox $(f'(x_0) = \infty$, точка x_4 на рис. 13.5), либо вообще не существует. В последнем случае x_0 есть угловая точка, когда существуют правая и левая касательные, не совпадающие между собой, т. е. отсутствует общая касательная (точки x_2, x_7 на рис. 13.5).

Функция, график которой приведен на рис. 13.5, имеет экстремум в точках x_1, x_3, x_5, где она дифференцируема, и в точках x_2, x_7, где она не дифференцируема. Отметим, что точка экстремума всегда является критической точкой функции по первой производной.

Условимся говорить, что функция $f(x)$ *меняет знак с плюса на минус* (*с минуса на плюс*) при переходе через точку x_0, если для всех точек x из достаточно малой окрестности точки x_0 выполняются неравенства $f(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f(x) < 0$ при $x > x_0$ ($f(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$).

Теорема 13.4 (*достаточные условия экстремума*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0 и дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то функция $f(x)$ имеет максимум в данной точке. Если же производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум.

Доказательство. Пусть, например, при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус. По теореме Лагранжа (см. теорему 11.2), для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 имеем $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где точка ξ лежит между x и x_0. По условию, при $x < x_0$ производная $f'(\xi) > 0$, и, следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$. Если $x > x_0$, то $f'(\xi) < 0$ и $f(x) - f(x_0) < 0$.

Таким образом, в любой точке x из рассматриваемой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $\Delta y = f(x) - f(x_0) < 0$. Это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая, когда производная $f'(x_0)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, доказательство аналогично. ■

Из теоремы 13.4 следует, что, если $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0, то в этой точке экстремума нет. В этом случае приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ изменяет знак при изменении знака приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$. Ее первая производная $f'(x) = 5x^4$ не меняет знака при переходе через точку $x_0 = 0:$ $f'(x) = 5x^4 > 0$ слева и справа от точки $x_0 = 0$. Точка x_0 не является точкой экстремума, так как разность $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x) - f(0) = x^5$ изменяет знак в окрестности этой точки: $\Delta y < 0$ при $\Delta x = x < 0$ и $\Delta y > 0$ при $\Delta x = x > 0$ (рис. 13.3).

Пример 13.6. Имеет ли функция $y = \sqrt[5]{(x-3)^4}$ экстремум в точке $x_0 = 3$?

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Находим первую производную: $y' = \dfrac{4}{5 \cdot \sqrt[5]{x-3}}$. Так как $y' = \infty$ при $x = 3$, то $x_0 = 3$ — критическая точка данной функции по первой производной.

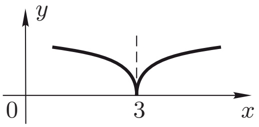


Рис. 13.7

Очевидно, что $y' < 0$ при $x < 3$, $y' > 0$ при $x > 3$, т.е. производная y' меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x_0 = 3$. Следовательно, $x_0 = 3$ — точка минимума функции, причем $y_{\min} = y(3) = 0$.

График функции в точке $x_0 = 3$ имеет вертикальную касательную (рис. 13.7). ■

Пример 13.7. Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^{\frac{2}{3}}(x - 5).$$

Решение. Область определения функции — вся числовая ось. Найдем критические точки функции по первой производной. Имеем

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-5) + x^{\frac{2}{3}} = \frac{5(x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

Очевидно, что $y' = 0$ при $x_1 = 2$, $y' = \infty$ при $x_2 = 0$. Таким образом, функция имеет две критические точки: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

Определим знак y' в окрестности критических точек. При переходе через точку $x_1 = 2$ производная y' меняет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку $x_2 = 0$ — с плюса на минус. Следовательно, $x_1 = 2$ — точка минимума, $x_2 = 0$ — точка максимума данной функции, причем $y_{\min} = y(2) = -3\sqrt[3]{4}$, $y_{\max} = y(0) = 0$. ■

Теорема 13.5 (*достаточные условия экстремума функции по производным высших порядков*). Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n четно, то x_0 — точка экстремума функции (точка максимума при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и точка минимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$); если n нечетно, то в точке x_0 экстремума нет.

Пример 13.8. Найти экстремумы функции $y = xe^x$, используя производные высших порядков.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Найдем первую производную:

$$y' = e^x + xe^x = e^x(x+1).$$

Так как производная y' существует при всех значениях x, то экстремум функции y возможен только в нулях ее производной. Очевидно, что $y' = 0$ при $x = -1$. Определим знак y'' в точке $x = -1$. Имеем

$$y'' = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2), \quad y''(-1) = e^{-1} > 0.$$

Следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет минимум, причем

$$y_{\min} = y(-1) = -e^{-1}. \ ■$$

Замечание 13.5. При исследовании функции на экстремум полезно использовать следующие свойства функций.

1° Точки экстремума сложной функции $y = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ при целом положительном n совпадают с точками экстремума функции $\varphi(x)$, лежащими в области определения функции y.

2° Дробь с постоянным положительным числителем и ее знаменатель имеют разноименные экстремумы в одних и тех же точках: там, где знаменатель имеет максимум, дробь имеет минимум, и наоборот.

Пример 13.9. Найти экстремумы функции

$$y(x) = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$$

Решение. Данная функция и функция $y_1(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ имеют разноименные экстремумы в одних и тех же точках (см.

замечание 13.5). Найдем точки экстремума функции y_1. Эта функция определена на всей числовой оси. Имеем

$$y_1'(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 6 \cdot (2x^2 - 3x + 1).$$

Критические точки функции y_1 по первой производной определим из уравнения $y_1'(x) = 0$, или $6 \cdot (2x^2 - 3x + 1) = 0$. Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Выясним, имеет ли функция y_1 экстремум в найденных критических точках, используя вторую производную (см. теорему 13.5). Так как $y_1''(x) = 6 \cdot (4x - 3)$, то $y_1''(1) = 6 > 0$, $y_1''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -6 < 0$. Поэтому $x_1 = 1$ — точка минимума функции y_1, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ — точка максимума функции y_1. Следовательно, для заданной функции $x_1 = 1$ — точка максимума, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ — точка минимума, причем $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 8$, $y_{\max} = y(1) = 10$. ■

13.3. Наибольшее и наименьшее значения функции. Согласно теореме 6.3 для функции, непрерывной на отрезке, существует хотя бы одна точка, в которой функция принимает наибольшее значение M, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение m.

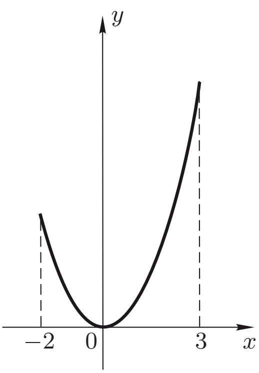


Рис. 13.8

Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечное число k критических точек по первой производной — x_1, x_2, $\ldots$, x_k. Тогда наибольшее M (наименьшее m) значение функции $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно наибольшему (наименьшему) из чисел $y(a)$, $y(x_1)$, $\ldots$, $y(x_k)$, $y(b)$.

Например, функция $y = x^2$, $x \in [-2, 3]$, достигает наибольшее значение M на правом конце отрезка при $x = 3$, т.е. $M = y(3) = 9$. Наименьшее значение m функция принимает в точке минимума $x = 0$, лежащей на интервале $(-2, 3)$, т.е. $m = y_{\min}(0) = 0$ (рис. 13.8).

П р и м е р 13.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{x(5 - x)}$ в ее области определения.

Р е ш е н и е. Данная функция определена при $x(5 - x) \geqslant 0$. Поэтому ее область определения есть отрезок $[0, 5]$. Найдем критические точки функции по первой производной, которые будут совпадать с критическими точками функции $y_1(x) = x(5-x)$ (см. замечание 13.5). Из уравнения $y_1' = 0$, или $5 - 2x = 0$, найдем критическую точку $x_0 = \dfrac{5}{2}$ функции $y_1(x)$, и, следовательно, функции $y(x)$. Эта точка принадлежит интервалу $(0, 5)$. Вычислим значения функции в критической точке $x_0 = \dfrac{5}{2}$ и на концах отрезка $[0, 5]$:

$$y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y(5) = 0.$$

Сравнивая полученные значения, найдем $M = y\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$, $m = y(0) = y(5) = 0$. Отметим, что в данном случае функция принимает наименьшее значение в двух точках. ■

Замечание 13.6. Если функция непрерывна на интервале, то она может не иметь на нем наибольшего (наименьшего) значения. Но если функция, дифференцируемая на интервале (a, b), имеет на нем только один экстремум — максимум (минимум), то наибольшее (наименьшее) значение функции на рассматриваемом интервале будет совпадать с максимумом (минимумом) этой функции.

Например, функция $y = x^2$ на интервале $(0, 3)$ не имеет экстремумов и поэтому не принимает на нем ни наименьшего, ни наибольшего значения. Функция $y = x^4$ на интервале $(-1, 1)$ имеет единственный минимум в точке $x = 0$. На этом интервале наименьшее значение функции $m = y_{\min}(0) = 0$. Наибольшего значения M функция на заданном интервале не достигает.

Пример 13.11. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ на интервале $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Функция определена всюду, кроме точек $x = \pm 1$. Интервал $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ принадлежит области определения функции.

Найдем критические точки функции по первой производной. Производная функции $y' = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$; $y' = 0$ при $x = 0$. На интервале $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ лежит единственная критическая точка $x = 0$. Легко видеть, что функция $y(x)$ имеет в этой точке минимум, так как производная y' меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = 0$.

Поскольку точка $x = 0$ на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ — единственная точка экстремума (минимума), то в этой точке функция достигает наименьшее значение m, причем

$$m = y_{\min}(0) = 1.$$

Наибольшего значения M функция на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ не принимает. ■

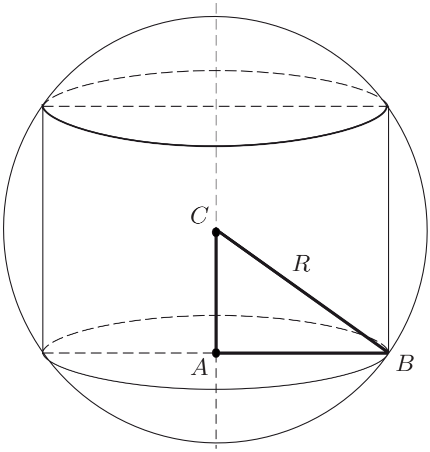


Рис. 13.9

П р и м е р 13.12. Вписать в шар радиуса R цилиндр с боковой поверхностью наибольшей площади (рис. 13.9).

Р е ш е н и е. Площадь S боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Пусть точка C — центр шара. Обозначим высоту цилиндра через x. Тогда $AC = \dfrac{x}{2}$. Из $\triangle ABC$ найдем $AB = r = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4}}$. Площадь $S(x)$ боковой поверхности цилиндра запишем в виде $S(x) = 2\pi\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4}} \cdot x$, где $x \in (0, 2R)$.

Наибольшее значение боковая поверхность цилиндра $S(x)$ достигает при тех же значениях x, что и функция $y(x) = x^2\left(R^2 - \dfrac{x^2}{4}\right) = x^2R^2 - \dfrac{x^4}{4}$ на интервале $(0, 2R)$ (см. замечание 13.5). Найдем точки стационарности функции $y(x)$, совпадающие с точками стационарности функции $S(x)$. Очевидно, что $y'(x) = 2xR^2 - x^3 = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm R\sqrt{2}$. На интервале $(0, 2R)$ лежит единственная точка стационарности $x_2 = R\sqrt{2}$ функции $y(x)$, и, следовательно, функции $S(x)$. Нетрудно убедиться, что функция $y(x)$ и площадь боковой поверхности цилиндра $S(x)$ имеют в этой точке максимум, так как

$$y''(R\sqrt{2}) = (2R^2 - 3x^2)\big|_{x=R\sqrt{2}} = 2R^2 - 6R^2 = -4R^2 < 0$$

(см. теорему 13.5). Так как $x_2 = R\sqrt{2}$ — единственная точка экстремума функции $S(x)$ на интервале $(0, 2R)$, то площадь S боковой поверхности цилиндра, вписанного в шар радиуса R, будет наибольшей, если его высота $h = x_2 = R\sqrt{2}$. Вычислим

$$S_{\max}(R\sqrt{2}) = 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{R^2\cdot 2}{4}}\cdot R\sqrt{2} = 2\pi\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot R\cdot\sqrt{2} = 2\pi R^2. \ \blacksquare$$

Для исследования функции $y = f(x)$ на возрастание (убывание) предлагается следующая схема 1.

1) Найти область определения D_y функции.

2) Найти критические точки функции по первой производной, принадлежащие области определения D_y.

3) Критическими точками разбить область определения функции на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет знак.

4) Определить знак $f'(x)$ на каждом из полученных интервалов: если на интервале $f'(x) > 0$, то этот интервал — интервал возрастания, если $f'(x) < 0$, то — интервал убывания функции.

Для исследования функции $y = f(x)$ на экстремум рекомендуется схема 2.

1) Найти область определения D_y функции.

2) Найти критические точки функции по первой производной, принадлежащие области определения D_y.

3) Исследовать знак $f'(x)$ в окрестности каждой критической точки (в точке стационарности x_0, где $f'(x_0) = 0$, можно вычислить $f^{(n)}(x_0)$, $n \geqslant 2$) и установить точки экстремума.

4) Найти экстремумы функции.

Для определения наибольшего M и наименьшего m значений функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, можно придерживаться схемы 3.

1) Найти область определения D_y функции и проверить, принадлежит ли отрезок $[a, b]$ области D_y.

2) Найти критические точки функции по первой производной, принадлежащие интервалу (a, b).

3) Вычислить значения функции в полученных критических точках.

4) Вычислить значения функции на концах отрезка $[a, b]$.

5) Сравнить значения функции, вычисленные в п.3 и п.4, и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

13.4. Типовые примеры.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^3 + 4x^2 - 7$.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая ось, т. е. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2) Найдем первую производную и критические точки функции по первой производной: $y' = 3x^2 + 8x = x(3x + 8)$. Очевидно, что y' существует $\forall\, x \in D_y$ и равна нулю в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{8}{3}$.

3) Разобьем область определения функции критическими точками x_1 и x_2 на интервалы $\left(-\infty, -\dfrac{8}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{8}{3}, 0\right)$, $(0, +\infty)$.

4) Определим знак y' на каждом из полученных интервалов: $y' > 0$ при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{8}{3}\right) \cup (0, +\infty)$; $y' < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{8}{3}, 0\right)$.

Следовательно, на интервалах $\left(-\infty, -\dfrac{8}{3}\right)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает, на интервале $\left(-\dfrac{8}{3}, 0\right)$ — убывает. ■

Пример 2. Найти интервалы монотонности функции $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Решение. 1) Функция определена при всех $x > 0$, кроме точки $x = 1$, где $\ln x = 0$. Следовательно, $D_y = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Найдем первую производную функции:

$$y' = \frac{\ln x - x\,\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Первая производная $y' = \infty$, если $\ln^2 x = 0$, т. е. при $x = 1$. Эта точка не входит в область определения функции. Очевидно, что $y' = 0$, если $\ln x - 1 = 0$, т. е. при $x = e$. Следовательно, функция имеет одну критическую точку $x = e \in D_y$.

3) Разобьем область определения функции точками $x = e$ и $x = 1$ на интервалы $(0, 1)$, $(1, e)$, $(e, +\infty)$.

4) Определим знак первой производной функции на каждом из этих интервалов: $y' < 0$ при $x \in (0, 1) \cup (1, e)$, $y' > 0$ при $x \in (e, +\infty)$.

Отсюда заключаем, что на интервале $(e, +\infty)$ функция возрастает, а на интервалах $(0, 1)$ и $(1, e)$ — убывает. ■

Пример 3. Найти экстремумы функции $y = \dfrac{5x}{1 + x^2}$.

Решение. 1) Область определения функции есть вся числовая ось, т. е. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2) Найдем критические точки функции по первой производной.

Имеем $y' = \dfrac{5(1+x^2) - 5x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$. Первая производная существует всюду в D_y и равна нулю, если $5 - 5x^2 = 0$, т. е. при $x = \pm 1$. Таким образом, функция имеет две критические точки: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

3) Определим знак первой производной y' функции в окрестности критических точек. При переходе через точку $x_1 = 1$ производная y' меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x_2 = -1$ — с минуса на плюс. Следовательно, $x_1 = 1$ есть точка максимума, $x_2 = -1$ — точка минимума функции.

4) Вычислим $y_{\max} = y(1) = \dfrac{5}{2}$, $y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{5}{2}$. ■

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, используя производные высших порядков.

Решение. 1) Область определения функции $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2) Найдем первую производную функции: $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Очевидно, что y' существует всюду в D_y и $y' = 0$ при $x = 0$. Следовательно, функция имеет одну критическую точку $x = 0$.

3) Найдем вторую производную y'' функции и вычислим ее значение в точке $x = 0$: $y'' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y''(0) = 1$. Так как $y''(0) > 0$, то $x = 0$ есть точка минимума функции.

4) Вычислим $y_{\min} = y(0) = 1$. ■

Пример 5. Найти экстремумы функции

$$y = \sqrt[3]{(x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2)}.$$

Решение. Согласно замечанию 13.5 функция y и функция $y_1 = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$ имеют одноименные экстремумы в одних и тех же точках. Найдем точки экстремума функции y_1.

1) Область определения функций y и y_1 — вся числовая ось, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

2) Найдем производную y_1':

$$y_1' = 4x^3 + 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 + 3x + 4) = 2x(2x+1)(x+1).$$

Так как y_1' существует при любом $x \in (-\infty, +\infty)$, то критические точки определим из уравнения $y_1' = 0$ или $2x(2x+1)(x+1) = 0$. Отсюда получим три критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = 0$.

3) Найдем $y_1'' = (4x^3 + 6x^2 + 2x)' = 2(6x^2 + 6x + 1)$. В критических точках имеем $y_1''(-1) = 2 > 0$, $y_1''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2 < 0$, $y_1''(0) = 2 > 0$. Так как во всех критических точках $y_1'' \neq 0$, то x_1, x_2, x_3 —

точки экстремума, причем $x_1 = -1$ и $x_3 = 0$ — точки минимума, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ — точка максимума функций y_1 и y.

4) Вычислим

$$y_{\min} = y(-1) = y(0) = -\sqrt[3]{4}, \qquad y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt[3]{\frac{63}{16}}. \blacksquare$$

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию $y = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$ в точке $x = 0$.

Решение. 1) Данная функция определена в точке $x = 0$, так как $y(0) = 0$.

2) Вычислим $y'(0)$. Найдем $y' = -\sin x + x - \dfrac{x^2}{2}$. Так как $y'(0) = 0$, то $x = 0$ есть точка стационарности данной функции.

3) Имеем $y'' = -\cos x + 1 - x$, $y''(0) = 0$, $y''' = \sin x - 1$, $y'''(0) = -1 \neq 0$. Итак, первая отличная от нуля производная в точке $x = 0$ есть производная третьего (т. е. нечетного) порядка.

4) Следовательно, в точке $x = 0$ данная функция экстремума не имеет. $\blacksquare$

Пример 7. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0, 10]$.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая ось, т. е. $D_y = (-\infty, +\infty)$, причем отрезок $[0, 10] \subset D_y$.

2) Определим критические точки функции по первой производной из уравнения $y' = 0$, или $3x^2 - 27 = 0$. Отсюда $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Только точка $x_2 = 3 \in (0, 10)$.

3) Вычислим значение функции в критической точке $x_2 = 3$: $y(3) = -54$.

4) Найдем значения функции на концах отрезка $[0, 10]$: $y(0) = 0$, $y(10) = 730$.

5) Сравнивая полученные значения $y(3)$, $y(0)$, $y(10)$, заключаем, что $M = y(10) = 730$, $m = y(3) = -54$. $\blacksquare$

Пример 8. Найти наименьшее значение m функции $y = x \ln x$ в области определения.

Решение. 1) Областью определения функции является интервал $(0, +\infty)$, т. е. $D_y = (0, +\infty)$.

2) Определим критические точки функции по первой производной из уравнения $y' = 0$. Так как $y' = \ln x + 1 = 0$ при $x = \dfrac{1}{e}$, то в области D_y существует единственная критическая точка — точка стационарности $x = \dfrac{1}{e}$.

3) Проверим, имеет ли функция в точке $x = \dfrac{1}{e}$ экстремум, используя производные высших порядков. Находим $y'' = \dfrac{1}{x}$, $y''\left(\dfrac{1}{e}\right) = e > 0$. Следовательно, $x = \dfrac{1}{e}$ есть точка минимума функции.

4) Так как в области определения, т. е. на интервале $(0, +\infty)$, функция имеет единственный минимум, то наименьшее значение m данной функции в ее области определения и есть этот минимум, т. е. $m = y_{\min}\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$. ■

Пример 9. Найти длины сторон прямоугольного бассейна с периметром 72 м, имеющего наибольшую площадь.

Решение. 1) Обозначим длины сторон прямоугольника через x и y. Запишем площадь S и периметр P в виде $S = xy$, $P = 2(x+y) = 72$. Выразим отсюда y через x: $y = \dfrac{P}{2} - x = 36 - x$. Тогда $S = xy = x(36-x)$, где, согласно условию задачи, $x \in (0, 36)$. Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $S(x)$ на интервале $(0, 36)$.

2) Найдем $S'(x) = 36 - 2x$. Очевидно, что $S' = 0$ в единственной критической точке $x = 18$, которая принадлежит интервалу $(0, 36)$.

3) При переходе через точку $x = 18$ производная S' меняет знак с «+» на «−». Следовательно, $x = 18$ есть точка максимума функции $S(x)$ и $S_{\max}(18) = 324$.

4) Так как функция $S(x)$ имеет на интервале $(0, 36)$ единственный максимум $S_{\max}(18) = 324$, то наибольшее значение M функции $S(x)$ на этом интервале совпадает с ее максимумом, т. е. $M = S_{\max}(18) = 324$. Таким образом, искомые стороны бассейна $x = 18$ м, $y = 18$ м.

13.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти интервалы монотонности функции $y = e^{-x}(x^2 + 2x - 1)$.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$.

4. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции $y = x^2 e^{-x}$.

5. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

6. Найти экстремумы функции $y = x + \sqrt{1-x}$ с помощью производной второго порядка.

7. Исследовать на экстремум в точке $x = \dfrac{4\pi}{3}$ функцию $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, используя производные высших порядков.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$ на отрезке $[1, 6]$.

9. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

10. Открытый бак цилиндрической формы должен вмещать V литров. При какой высоте H и каком радиусе r основания бака на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

11. Найти высоту H прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

§ 14. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой. Асимптоты кривой

14.1. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой.

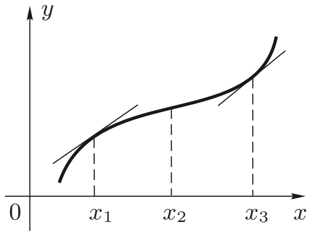


Рис. 14.1

Определение 14.1. Пусть кривая $y = f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ касательную, не параллельную оси Oy (т. е. функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в точке x_0). Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) *в точке* $(x_0, f(x_0))$, если в некоторой окрестности точки x_0 кривая расположена ниже (выше) касательной, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$.

Условимся точку $(x_0, f(x_0))$, в которой кривая $y = f(x)$ выпукла (вогнута), обозначать ее абсциссой x_0.

На рис. 14.1 показана кривая, выпуклая в точке x_1 и вогнутая в точке x_3.

Определение 14.2. Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) *на интервале*, если она выпукла (вогнута) в каждой точке этого интервала.

Определение 14.3. Точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* кривой $y = f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 для $x < x_0$ кривая выпукла (вогнута), а для $x > x_0$ — вогнута (выпукла).

На рис. 14.1 точка $(x_2, f(x_2))$ — точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Замечание 14.1. В точке перегиба кривая меняет характер своей изогнутости: при переходе подвижной точки по кривой через точку перегиба кривая из выпуклой становится вогнутой, или наоборот. Из определения 14.3 следует, что касательная, если она существует, в точке перегиба кривой пересекает эту кривую. Заметим, что о точке перегиба $(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ можно говорить лишь в случае, когда кривая имеет касательную в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

В дальнейшем точку перегиба $(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ будем обозначать только ее абсциссой x_0.

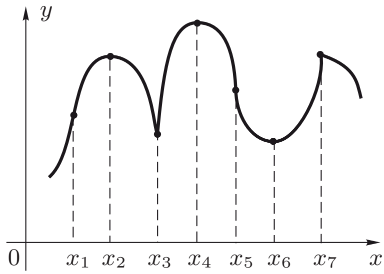


Рис. 14.2

Рассмотрим кривую, изображенную на рис. 14.2. Точки x_1, x_5 и x_7 являются ее точками перегиба, причем касательная в точке x_1 не вертикальная, в точке x_5 — вертикальная, в точке x_7 вообще не существует касательной. В точках x_2, x_3, x_4, x_6 перегиба нет.

Теорема 14.1 (*достаточные условия выпуклости* (*вогнутости*) *кривой в точке*). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную $f''(x_0)$, непрерывную в точке x_0. Тогда при условии $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$ кривая $y = f(x)$ выпукла (вогнута) в точке x_0.

Доказательство. Запишем разложение функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора (см. теорему 12.1), полагая $n = 2$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

где точка ξ лежит между x и x_0.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(см. пример 7.13). Так как $y_{\text{кр}} = f(x)$, то из последних двух соотношений следует

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Знак разности $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}}$ совпадает со знаком $f''(\xi)$. По условию $f''(x)$ — функция непрерывная в точке x_0 и $f''(x_0) \neq 0$. Следовательно, в достаточно малой окрестности точки x_0 функция $f''(x)$

сохраняет знак (см. теорему 6.3). В этой окрестности знак $f''(\xi)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$.

Учитывая, что $(x - x_0)^2 > 0$ при $x \neq x_0$, заключаем, что знак разности $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}}$ совпадает со знаком $f''(x_0)$. При этом, если $f''(x_0) < 0$, то $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y_{\text{кр}} < y_{\text{кас}}$ и, следовательно, кривая выпукла в точке x_0. Если же $f''(x_0) > 0$, то $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} > 0$, $y_{\text{кр}} > y_{\text{кас}}$ и поэтому кривая вогнута в точке x_0. Теорема доказана.

Из определения 14.2 и теоремы 14.1 следует, что если функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке x интервала (a, b) непрерывную вторую производную $f''(x)$ и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ $\forall\, x \in (a, b)$, то кривая $y = f(x)$ выпукла (вогнута) на интервале (a, b). Учитывая, что $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона к положительной полуоси Ox касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x, легко представить выпуклую или вогнутую кривую на некотором интервале. Если $f''(x) < 0$ на (a, b) $(f''(x) > 0$ на $(b, c))$, то производная $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ и одновременно угол α убывают (возрастают) с ростом x, и кривая $y = f(x)$ выпукла на интервале (a, b) (вогнута на интервале (b, c)) (рис. 14.3).

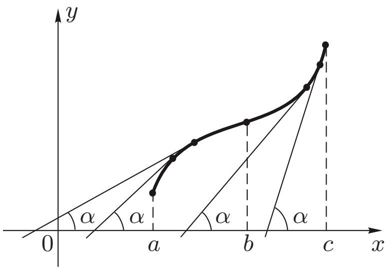


Рис. 14.3

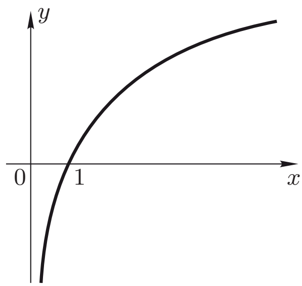


Рис. 14.4

Рассмотрим функцию $y = \ln x$, определенную на интервале $(0, +\infty)$ (рис. 14.4). Найдем ее вторую производную: $y' = \dfrac{1}{x}$; $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Так как $y'' < 0$ для любого $x \in (0, +\infty)$, то кривая $y = \ln x$ выпукла во всей области определения.

Теорема 14.2 (*необходимое условие существования точки перегиба*). Пусть x_0 — точка перегиба кривой $y = f(x)$ и функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную $f''(x)$, непрерывную в точке x_0. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для определенности $f''(x_0) < 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x) < 0$ (см. теорему 6.3). Следовательно, по теореме 14.1, в этой окрестности кривая выпукла, т. е. точка x_0 не является точкой перегиба, что противоречит условию. Аналогично приходим к противоречию, предполагая $f''(x_0) > 0$. Следовательно, $f''(x_0) = 0$. Теорема доказана. ■

Подчеркнем, что равенство $f''(x_0) = 0$ есть только необходимое условие существования точки перегиба кривой $y = f(x)$. Из условия $f''(x_0) = 0$ не следует, что x_0 есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Рассмотрим две функции $y_1 = x^3$ и $y_2 = x^4$. Вторые производные этих функций $y_1'' = 6x$ и $y_2'' = 12x^2$ в точке $x = 0$ равны нулю. При этом для кривой $y_1 = x^3$ точка $x = 0$ является точкой перегиба, а кривая $y_2 = x^4$ в точке $x = 0$ перегиба не имеет.

Теорема 14.3 (*достаточное условие существования точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ в окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе x через точку x_0, то x_0 — точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Доказательство. Если $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то при переходе через эту точку вогнутость кривой меняется на выпуклость, и, следовательно, x_0 — точка перегиба кривой $y = f(x)$. Аналогично можно доказать, что x_0 является точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. ■

Заметим, что если $f''(x)$ сохраняет знак при переходе через точку x_0, то в точке x_0 кривая $y = f(x)$ не имеет перегиба.

Определение 14.4. Точки, в которых функция $y = f(x)$ определена, а вторая производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо не имеет конечного значения, называются *критическими точками функции по второй производной.*

Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ всюду в области определения, кроме, быть может, конечного числа точек. Тогда можно доказать, что интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = f(x)$ разделяются критическими точками функции $f(x)$ по второй производной.

Пример 14.1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^2 - x^3$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси. Найдем ее критические точки по второй производной. Имеем $y' = 2x - 3x^2$, $\quad y'' = 2 - 6x = 6\left(\frac{1}{3} - x\right)$. Из уравнения $y'' = 0$ находим $x = \frac{1}{3}$. Следовательно, $x = \frac{1}{3}$ — критическая точка данной функции. Далее, $y'' > 0$ при всех $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $y'' < 0$ при всех $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Следовательно, кривая вогнута на интервале $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ и выпукла на интервале $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$. Точка $x = \dfrac{1}{3}$ есть точка перегиба данной кривой, так как она разделяет интервалы выпуклости и вогнутости. ■

Пример 14.2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = (1 + x^2)e^x$.

Решение. Данная функция определена при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Имеем $y' = e^x(1+x)^2$, $y'' = e^x(1+x)^2 + 2(1+x)e^x = e^x(1+x)(3+x)$. Находим критические точки функции по второй производной из уравнения $y'' = 0$, или $e^x(1+x)(3+x) = 0$. Отсюда $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Эти точки разбивают область определения функции на три интервала: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$ и $(-1, +\infty)$. Определим знак y'' на каждом из полученных интервалов. Очевидно, что $y'' > 0$ при $x \in \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ и $y'' < 0$ при $x \in (-3, -1)$. Следовательно, кривая $y = (1 + x^2)e^x$ вогнута на интервалах $(-\infty, -3)$ и $(-1, +\infty)$ и выпукла на интервале $(-3, -1)$. Точки $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$, разделяющие интервалы выпуклости и вогнутости, являются точками перегиба кривой. ■

14.2. Асимптоты кривой.

Определение 14.5. Прямая называется *асимптотой* кривой, если расстояние MP от точки кривой M до прямой стремится к нулю при удалении этой точки по кривой от начала координат (рис. 14.5).

Существуют кривые, не имеющие асимптот, например, эллипс. В то же время кривая может иметь несколько асимптот.

Асимптоты кривой $y = f(x)$ могут быть *вертикальными* (параллельными оси Oy) и *наклонными* (в частности, *горизонтальными*, т. е. параллельными оси Ox). Кривая может иметь бесконечное число вертикальных асимптот и не более двух наклонных.

Так, график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 14.6) состоит из бесконечного числа одинаковых кривых и имеет бесконечное число вертикальных асимптот.

Пусть прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота кривой $y = f(x)$ (рис. 14.5). Очевидно, что если $MP \to 0$ при $x \to \infty$, то и $MN = f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to \infty$, т. е.

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x), \tag{14.1}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Теорема 14.4. Для того чтобы кривая $y = f(x)$ при $x \to \infty$ имела асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{14.2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{14.3}$$

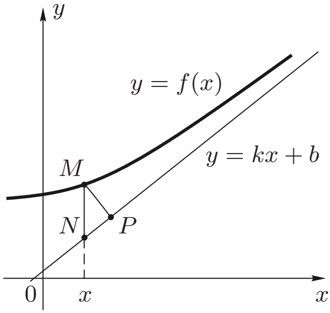


Рис. 14.5

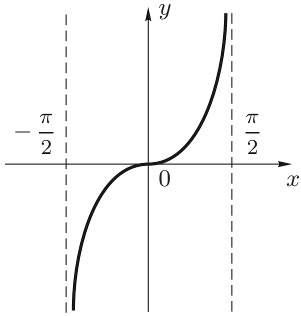


Рис. 14.6

Доказательство. *Необходимость.* Пусть кривая $y = f(x)$ имеет при $x \to \infty$ асимптоту $y = kx + b$, т. е. справедлива формула (14.1). Тогда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы (14.2) и (14.3). Тогда из формулы (14.3), где k определяется по формуле (14.2), следует, что разность $f(x) - kx - b$ есть бесконечно малая при $x \to \infty$ (см. теорему 4.4). Обозначая эту бесконечно малую через $\alpha(x)$, получим формулу (14.1). Теорема доказана. ■

Подчеркнем, что пределы (14.2) и (14.3) следует рассматривать как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. Если эти пределы существуют при $x \to +\infty$, то кривая $y = f(x)$ имеет правую асимптоту $y = kx + b$. Если пределы (14.2) и (14.3) существуют при $x \to -\infty$, то кривая $y = f(x)$ имеет левую асимптоту $y = kx + b$. Если пределы (14.2) и (14.3) при $x \to +\infty$ совпадают с соответствующими пределами при $x \to -\infty$, то кривая $y = f(x)$ имеет одну и ту же асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Если хотя бы один из указанных пределов не существует, то кривая не имеет соответствующей асимптоты.

Например, кривая $y = e^{-x}$ имеет только правую асимптоту $y = 0$. Действительно,

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-e^{-x}) = -\infty$$

(при вычислении последнего предела использовано правило Лопиталя). Так как $k_2 = -\infty$, то левой асимптоты не существует.

Вычислим $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x} - 0\cdot x) = 0$. Итак, прямая $y = 0$ является правой асимптотой (при $x \to +\infty$) кривой $y = e^{-x}$ (рис. 14.7).

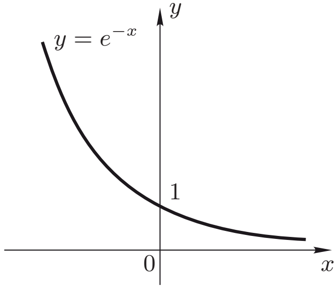


Рис. 14.7

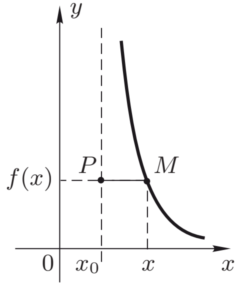


Рис. 14.8

О п р е д е л е н и е 14.6. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой, быть может односторонней, окрестности точки x_0, и пусть выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty. \tag{14.4}$$

Тогда прямая $x = x_0$ (рис. 14.6) называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$.

В случае вертикальной асимптоты расстояние $|MP| = |x - x_0|$ между точкой $M(x, f(x))$ кривой и точкой $P(x_0, f(x))$ асимптоты $x = x_0$ стремится к нулю, когда точка стремится по кривой в бесконечность, т. е. при $x \to x_0 - 0$ или при $x \to x_0 + 0$ (рис. 14.8).

Для нахождения вертикальных асимптот следует найти такие точки x_0, для которых выполняется хотя бы одно из условий (14.4). В этом случае прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$. Непрерывные функции вертикальных асимптот не имеют.

П р и м е р 14.3. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x-3}$.

Р е ш е н и е. Найдем вертикальные асимптоты. Точка $x = 3$ является точкой разрыва функции второго рода, причем

$$\lim_{x\to3+0}\frac{x^2+3x+2}{x-3} = +\infty, \qquad \lim_{x\to3-0}\frac{x^2+3x+2}{x-3} = -\infty.$$

Следовательно, данная кривая имеет единственную вертикальную асимптоту $x = 3$.

Найдем наклонные асимптоты кривой. Запишем уравнение асимптоты в виде $y = kx + b$. Согласно формулам (14.2) и (14.3) имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2}{x(x-3)} = 1, \tag{14.5}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x+2}{x-3} = 6 \tag{14.6}$$

(пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ как в формуле (14.5), так и в формуле (14.6) совпадают). Следовательно, прямая $y = x + 6$ является наклонной асимптотой данной кривой. ■

Ниже предлагается схема 1 исследования кривой $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость и перегиб.

1. Найти область определения D_y функции $y = f(x)$.

2. Определить критические точки функции $f(x)$ по второй производной, принадлежащие области определения D_y.

3. Установить интервалы, на которые эти точки разбивают область определения функции, и определить знак $f''(x)$ на каждом из полученных интервалов: если $f''(x) > 0$, то этот интервал — интервал вогнутости, если $f''(x) < 0$ — интервал выпуклости.

4. Найти точки перегиба кривой.

При нахождении асимптот кривой $y = f(x)$ можно придерживаться схемы 2.

1. Найти вертикальные асимптоты, для чего:

а) найти точки разрыва второго рода функции $y = f(x)$: $x = x_k$, $k = 1, \ldots, n$;

б) вычислить односторонние пределы

$$f(x_k - 0) = \lim_{x\to x_k-0} f(x), \qquad f(x_k + 0) = \lim_{x\to x_k+0} f(x);$$

в) сделать заключение о существовании вертикальных асимптот, учитывая, что $x = x_k$ — вертикальная асимптота, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_k - 0)$ или $f(x_k + 0)$ равен бесконечности.

2. Найти наклонные асимптоты $y = kx + b$, используя формулы (14.2) и (14.3).

14.3. Типовые примеры.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$.

Решение. 1) Область определения функции $D_y = [1, +\infty)$.

2) Найдем критические точки функции по второй производной:

$$y' = 10\sqrt{(x-1)^3} + 30\sqrt{x-1},$$

$$y'' = 15\sqrt{x-1} + \frac{15}{\sqrt{x-1}} = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}.$$

Очевидно, что $y'' = 0$, если $x = 0$; $y'' = \infty$, если $x = 1$. Так как точка $x = 0$ не входит в область определения функции, то функция имеет в области определения единственную критическую точку по второй производной $x = 1$.

3) Всюду на интервале $(1, +\infty)$ производная $y'' > 0$. Следовательно, кривая вогнута во всех точках этого интервала.

4) Так как критическая точка $x = 1$ является концом полуинтервала $[1, +\infty)$, то кривая не имеет точек перегиба. ■

Пример 2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение. 1) Функция определена $\forall\, x \in D_y = (-\infty, +\infty)$.

2) Найдем первую и вторую производные функции:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Вторая производная существует при любом x из области определения D_y и равна нулю, если $2x(x^2-3) = 0$. Отсюда получаем три критические точки функции по второй производной: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

3) Найденные критические точки разбивают область определения функции на четыре интервала: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$. Определим знак y'' на полученных интервалах. Имеем $y'' > 0$ для $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; $y'' < 0$ для $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \cup (0, \sqrt{3})$. Таким образом, на интервалах $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$ кривая вогнута, на интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$ — выпукла.

4) Точки $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ являются точками перегиба кривой, так как они разделяют интервалы выпуклости и вогнутости кривой. ■

Пример 3. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{3x}{x-1} + 3x$.

Решение. 1) Найдем вертикальные асимптоты кривой. Точка $x = 1$ является единственной точкой разрыва функции, причем

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{3x}{x-1} + 3x\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3x}{x-1} + 3x\right) = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота кривой.

2) Найдем наклонные асимптоты кривой. По формуле (14.2) получим

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1} + 3\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3. \tag{14.7}$$

Так как $k \neq 0$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, то кривая не имеет горизонтальных асимптот. По формуле (14.3) найдем

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x - 3x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3. \quad (14.8)$$

Пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ в формуле (14.7) совпадают. Также равны пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ в формуле (14.8). Таким образом, прямая $y = 3x + 3$ есть наклонная асимптота данной кривой. ■

Пример 4. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Решение. 1) Функция имеет разрыв в точке $x = 0$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке. Так как $e^x \to 1 + 0$ при $x \to +0$, $e^x \to 1 - 0$ при $x \to -0$, то $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{e^x - 1} = -\infty$.

Отсюда следует, что прямая $x = 0$ есть вертикальная асимптота кривой.

2) Найдем наклонные асимптоты. По формуле (14.2) получим $k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(e^x - 1)} = 0$, $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x(e^x - 1)} = 0$. По формуле (14.3) вычислим $b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0$, $b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1$. Таким образом, прямые $y_1 = 0$ и $y_2 = -1$ являются горизонтальными асимптотами кривой (первая — при $x \to +\infty$, вторая — при $x \to -\infty$). ■

14.4. Задачи для самостоятельного решения.

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых:

1. $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$; **2.** $y = x^2 \ln x$;

3. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; **4.** $y = \dfrac{x+1}{x^2}$.

Найти асимптоты кривых:

5. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$; **6.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

7. $y = e^{-x^2} + 2x$; **8.** $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

§ 15. Исследование функций и построение их графиков

15.1. Схема исследования функции. При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется придерживаться следующей схемы.

1) Найти область определения функции.

2) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

3) Найти точки разрыва функции и определить их характер.

4) Найти асимптоты графика функции, исследовать поведение функции вблизи граничных точек области определения.

5) Определить интервалы возрастания, убывания и зкстремумы функции.

6) Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции, найти значения функции в точках перегиба.

7) Свести все данные в таблицу.

8) Используя полученные результаты, построить график функции.

Замечание 15.1. Область определения функции следует искать, используя известные свойства элементарных функций, например такие:

а) корни четной степени $\sqrt[2n]{x}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ определены только при неотрицательных значениях x $(x \geqslant 0)$;

б) логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена только при положительных значениях x $(x > 0)$;

в) функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не определена при тех значениях x, для которых $g(x) = 0$;

г) функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены только для $x \in [-1, 1]$.

15.2. Типовые примеры.

Пример 1. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x + 2$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена $\forall\, x \in D_y = (-\infty, +\infty)$.

2) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

Если $x = 0$, то $y = 2$, т. е. график функции пересекает ось Oy в точке $M_1(0, 2)$.

Пусть $y = 0$. Тогда из уравнения $x^3 - 3x + 2 = 0$ найдем $x_1 = -2$ и $x_2 = x_3 = 1$. Следовательно, график функции пересекает ось Ox в двух точках: $M_2(-2, 0)$ и $M_3(1, 0)$.

3) Исследуемая функция непрерывна во всех точках числовой оси как многочлен третьей степени.

4) График функции не имеет вертикальных асимптот, так как функция непрерывна всюду. График функции не имеет и наклонных асимптот $(y = kx + b)$, так как

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = +\infty,$$
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = +\infty.$$

Исследуем поведение функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty.$$

5) Исследуем функцию на возрастание, убывание, экстремумы. Найдем первую производную функции и приравняем ее нулю. Имеем $y' = 3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Из решения неравенства $3x^2 - 3 > 0$ следует, что $y' > 0$ для $x \in (-\infty, -1) \cup \cup (1, +\infty)$ и $y' < 0$ для $x \in (-1, 1)$. Итак, функция $y = x^3 - 3x + + 2$ возрастает на интервале $(-\infty, -1)$, убывает на интервале $(-1, 1)$ и снова возрастает на интервале $(1, +\infty)$.

В точке $x_1 = -1$ функция имеет максимум, в точке $x_2 = 1$ — минимум, так как эти точки разделяют интервалы монотонности данной непрерывной фунции (при переходе через точку x_1 производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку x_2 — с минуса на плюс). Вычислим $y_{\max} = y(-1) = 4$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

6) Определим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. Найдем вторую производную. Имеем $y'' = = (3x^2 - 3)' = 6x$. Очевидно, что $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, кривая выпукла на интервале $(-\infty, 0)$ и вогнута на интервале $(0, +\infty)$, $x = 0$ — точка перегиба.

7) Объединим все полученные результаты в таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow \cap$	max 4	$\cap \searrow$	т. п. 2	$\searrow \cup$	min 0	$\cup \nearrow$

8) График функции изображен на рис. 15.1.

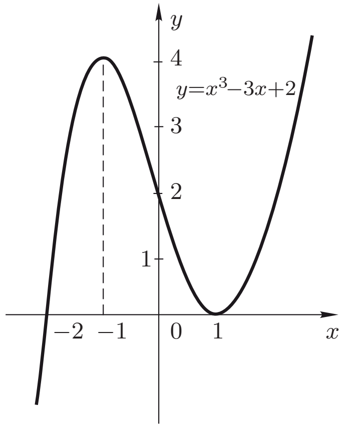


Рис. 15.1

Пример 2. Исследовать функцию $y = x\ln x$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения функции — интервал $(0, +\infty)$, т. е. $D_y = \{x : x > 0\}$.

2) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Из уравнения $y = x\ln x = 0$ имеем $x = 0$ и $x = 1$. График функции пересекает ось Ox в точке $(1, 0)$ и не пересекает ось Oy, так как точка $x = 0$ не входит в область определения функции.

3) В области определения функция является непрерывной, как произведение двух непрерывных функций.

4) В силу непрерывности функции ее график не имеет вертикальных асимптот.

График функции не имеет и наклонных асимптот $(y = kx + b)$, так как

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Исследуем поведение функции вблизи граничной точки $x = 0$ $(x > > 0)$ и при $x \to +\infty$. Применяя правило Лопиталя (см. теорему 11.4), вычислим предел

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$.

5) Найдем интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции. Приравнивая нулю первую производную функции, из уравнения $y' = 0$, или $\ln x + 1 = 0$, получим $x = \dfrac{1}{e}$. Если $x \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, то $y' < 0$; если $x \in \left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$, то $y' > 0$. Следовательно, функция $y = x\ln x$ убывает на интервале $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ и возрастает на интервале $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$. В точке $x = \dfrac{1}{e}$ функция имеет минимум, причем $y_{\min}\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$.

6) Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и перегиб. Найдем вторую производную данной функции. Очевидно, что

$y'' = \dfrac{1}{x}$. Так как $y'' > 0$ для всех $x > 0$, то кривая выпукла для всех $x > 0$ и не имеет точек перегиба.

7) Объединим полученные результаты в таблицу:

x	0	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$
y''	$+\infty$	$+$	$+$	$+$
y		$\searrow \cup$	min $-\frac{1}{e}$	$\cup \nearrow$

8) График функции изображен на рисунке 15.2.

Замечание 15.2. Стрелка на графике (рис. 15.2) означает, что точка $x = 0$ не входит в область определения функции, причем функция имеет конечный предел при $x \to +0$.

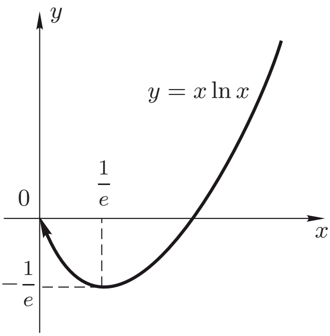


Рис. 15.2

Пример 3. Исследовать функцию $y = x^2 e^{-x}$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения функции — вся числовая ось, т. е. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2) График функции пересекает оси координат в единственной точке $O(0, 0)$: если $y = 0$, то $x = 0$; если $x = 0$, то $y = 0$. Очевидно, что $y > 0$ всюду в области определения D_y, кроме точки $x = 0$, где $y = 0$.

3) Функция $y = x^2 e^{-x}$ непрерывна $\forall x \in D_y$, как произведение двух непрерывных функций.

4) График функции не имеет вертикальных асимптот, так как функция непрерывна в области определения.

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот. По формуле (14.2) имеем

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}.$$

Рассмотрим два случая: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Используя правило Лопиталя (см. теорему 11.5), получим

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Так как
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} (xe^{-x}) = -\infty,$$
то кривая не имеет левой асимптоты при $x \to -\infty$.

Найдем
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$
(см. пример 11.10). Итак, график функции имеет только правую асимптоту $y = 0$ (при $x \to +\infty$).

5) Определим интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции. Найдем первую производную:
$$y' = f'(x) = (x^2 e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2).$$

Так как $e^{-x} > 0$ для всех значений x, то знак y' совпадает со знаком сомножителя $(2x - x^2)$. Из неравенств $2x - x^2 > 0$ и $2x - x^2 < 0$ следует, что функция возрастает на интервале $(0, 2)$ и убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$. Очевидно, что $y' = 0$, если $2x - x^2 = 0$. Отсюда $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ — точки стационарности данной функции. В точке $x_1 = 0$ функция имеет минимум, в точке $x_2 = 2$ — максимум. Соответствующие значения функции $y_{\min} = y(0) = 0$ и $y_{\max} = y(2) = 4e^{-2}$.

6) Установим интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции. Найдем вторую производную функции:
$$y'' = ((2x - x^2)e^{-x})' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Из уравнения $y'' = 0$, или $x^2 - 4x + 2 = 0$, получим $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Очевидно, что $y'' > 0$, если $x^2 - 4x + 2 > 0$. Из этого неравенства следует, что кривая выпукла на интервалах $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ и $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$. Производная $y'' < 0$, если $x^2 - 4x + 2 < 0$, и поэтому кривая вогнута на интервале $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Следовательно, $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ — точки перегиба графика функции, причем $y_1 = x_1^2 \cdot e^{-x_1} \approx 0.2$, $y_2 = x_2^2 \cdot e^{-x_2} \approx 0.4$.

7) Объединим полученные результаты в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2 - \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{2}$	$(2 - \sqrt{2}, 2)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\searrow\cup$	min 0	$\cup\nearrow$	т. п. y_1	$\nearrow\cap$

x	2	$(2, 2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2}, +\infty)$
y'	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	max $\frac{4}{e^2}$	$\cap \searrow$	т. п. y_2	$\searrow \cup$

8) График функции изображен на рис. 15.3.

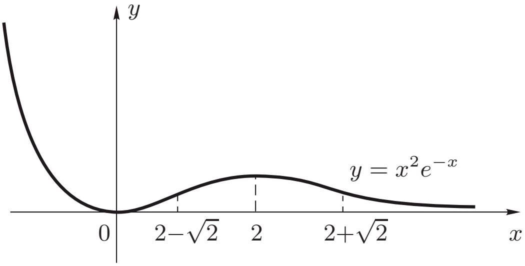


Рис. 15.3

Пример 4. Исследовать функцию $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях $x \neq 0$, т. е. $D_y = \{x : x \neq 0\}$. Кроме того, функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

2) График функции не пересекает ось Oy, так как точка $x = 0$ не входит в область определения функции.

Запишем функцию в виде $y = \dfrac{x^2+1}{x}$. Отсюда следует, что в области определения $y \neq 0$, т. е. график функции не пересекает и ось Ox.

3) Найдем точки разрыва и определим их характер. Функция $f(x)$ не определена при $x = 0$. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Следовательно, $x = 0$ есть точка разрыва второго рода.

4) Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x\to+0} y = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} y = -\infty.$$

Найдем наклонные асимптоты кривой. Имеем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \dfrac{1}{x}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0$$

(пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ совпадают). Таким образом, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

5) Исследуем функцию на возрастание, убывание, экстремум. Найдем первую производную функции: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$. Производная $y' = 0$ при $x_{1,2} = \pm 1$ и не существует при $x = 0$. Заметим, что $x = 0$ не является критической точкой функции по первой производной, так как эта точка не принадлежит области определения функции. Точки $x_{1,2} = \pm 1$ и $x = 0$ разбивают область определения на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Производная y' положительна при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и отрицательна при $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Следовательно, данная функция возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, убывает на интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, в точке $x = -1$ имеет максимум, в точке $x = 1$ — минимум, причем $y_{\max} = y(-1) = -2$, $y_{\min} = y(1) = 2$. В точке $x = 0$ экстремума нет, так как эта точка не принадлежит области определения функции.

6) Определим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой. Найдем вторую производную функции: $y'' = \dfrac{2}{x^3}$. Очевидно, что $y'' > 0$ для $x \in (0, +\infty)$, $y'' < 0$ для $x \in (-\infty, 0)$. Следовательно, кривая вогнута на интервале $(0, +\infty)$ и выпукла на интервале $(-\infty, 0)$. Точек перегиба у кривой нет, так как в точке $x = 0$, разделяющей интервалы выпуклости и вогнутости, функция не определена.

7) Объединим полученные результаты в таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	-2	$-$	$+$	2	$+$
y	$\nearrow\cap$	max -2	$\cap\searrow$	$\searrow\cup$	min 2	$\cup\nearrow$

8) График функции изображен на рис. 15.4.

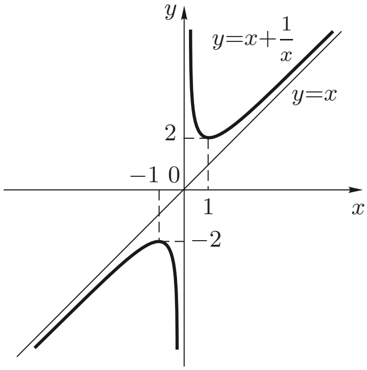


Рис. 15.4

Замечание 15.3. В последнем примере в силу нечетности функции $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$ достаточно было исследовать функцию и построить ее график только при $x > 0$, а затем достроить график при $x < 0$ симметрично относительно начала координат.

Пример 5. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{9}{2x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена $\forall\, x \neq 0$, т. е.

$$D_y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2) Определим точки пересечения графика функции с осью Ox. Функция $y = \dfrac{2x^3 - 27}{6x^2} = 0$, если $2x^3 - 27 = 0$, т. е. при $x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Следовательно, график функции пересекает ось Ox в точке $x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$. График функции не пересекает оси Oy, так как $y \to -\infty$ как при $x \to -0$, так и при $x \to +0$.

3) Найдем точки разрыва функции. Так как функция не определена при $x = 0$, то $x = 0$ — точка разрыва функции. Поскольку

$$y(+0) = \lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{3} - \frac{9}{2x^2}\right) = -\infty,$$

$$y(-0) = \lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0}\left(\frac{x}{3} - \frac{9}{2x^2}\right) = -\infty,$$

то $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

4) Найдем асимптоты графика функции. В точке $x = 0$ односторонние пределы функции $y(+0) = -\infty$, $y(-0) = -\infty$ (см. п.3). Следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты. Имеем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{2x^3}\right) = \frac{1}{3};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{3}x\right) = 0.$$

Отсюда следует, что кривая имеет наклонную асимптоту $y = \dfrac{x}{3}$ и не имеет горизонтальных асимптот $(k \neq 0)$.

5) Для определения интервалов возрастания, убывания и экстремумов функции найдем критические точки функции по первой производной. Имеем $y' = \dfrac{1}{3} + \dfrac{9}{x^3} = \dfrac{x^3+27}{3x^3}$. Очевидно, что $y' = 0$ при $x = -3$; $y' = \infty$ при $x = 0$. Функция имеет одну критическую точку по первой производной: $x = -3$, поскольку точка $x = 0$ не входит в область определения функции. Точки $x = 3$ и $x = 0$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, +\infty)$. Так как $y' > 0$ для $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, $y' < 0$ для $x \in (-3, 0)$, то функция возрастает на интервалах $(-\infty, -3)$ и $(0, +\infty)$ и убывает на интервале $(-3, 0)$. В точке $x = -3$ функция имеет максимум, так как при переходе через эту точку производная y' меняет знак с плюса на минус, причем $y_{\max} = y(-3) = -\dfrac{3}{2}$. В точке $x = 0$ экстремума нет, так как эта точка не входит в область определения функции.

6) Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и перегиб. Найдем $y'' = -\dfrac{27}{x^4}$. Так как $y'' < 0$ $\forall\, x \in D_y$, то график функции выпуклый всюду в ее области определения и не имеет точек перегиба.

7) Полученные данные объединим в таблицу:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$
y	$\nearrow$	max $-\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$\nearrow$

8) По результатам исследования построим график функции (рис. 15.5).

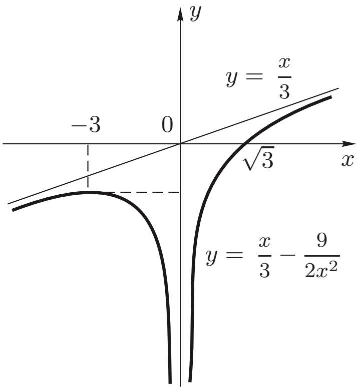


Рис. 15.5

15.3. Задачи для самостоятельного решения.

Исследовать следующие функции по приведенной выше схеме и построить их графики:

1. $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$; **2.** $y = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$; **3.** $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$.

ГЛАВА III

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 16. Первообразная функции и неопределенный интеграл

16.1. Определение и свойства неопределенного интеграла.

Определение 16.1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке (отрезке, конечном или бесконечном интервале или полуинтервале). Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на этом промежутке, если $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ (или $dF = f(x)\,dx$) в каждой точке данного промежутка.

Например, функция $F(x) = \sin x$ есть первообразная функции $f(x) = \cos x$ на бесконечной прямой, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$ $\forall\ x \in (-\infty, +\infty)$. Функция $F(x) = \ln x$ есть первообразная функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на полупрямой $x > 0$, так как $F'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\forall\, x \in (0, +\infty)$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также есть первообразная функции $f(x)$, поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = F'(x) = f(x)$.

Теорема 16.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные функции $f(x)$ на некотором промежутке, то $F_2(x) - F_1(x) = C$, где C — произвольная постоянная.

Доказательство. По условию $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$. Так как производная разности двух функций равна разности производных этих функций, то

$$(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Функция $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x)$, дифференцируемая на некотором промежутке и имеющая всюду на нем производную $\varphi'(x) = 0$, есть постоянная на этом промежутке (см. замечание 11.5). Следовательно, $F_2(x) - F_1(x) = C$. Теорема доказана. ■

Из теоремы 16.1 следует, что если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то любая другая первообразная на этом промежутке $\Phi(x) = F(x) + C$, т. е. выражение $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, охватывает все первообразные функции $f(x)$ на данном промежутке.

Определение 16.2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ на некотором промежутке называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке, обозначают символом $\int f(x)\,dx$ и пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ есть некоторая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке, C — произвольная постоянная. При этом знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования, C — постоянной интегрирования.

Определение 16.3. Операцию нахождения первообразной функции $f(x)$ или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называют *интегрированием* данной функции.

Пример 16.1. Найти интегралы:

$$\mathcal{I}_1 = \int 3x^2\,dx; \qquad \mathcal{I}_2 = \int \sin x\,dx.$$

Решение. Первообразной функции $f(x) = 3x^2$ служит функция $F(x) = x^3$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$. Следовательно, $\mathcal{I}_1 = x^3 + C$. $\mathcal{I}_2 = -\cos x + C$, поскольку $(-\cos x)' = \sin x$. ■

Теорема 16.2 (*достаточное условие существования неопределенного интеграла*). Любая непрерывная на некотором промежутке функция имеет первообразную на этом промежутке.

Теорема 16.3. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке и $F(x)$ — первообразная этой функции, т. е. $F'(x) = f(x)$ или $dF = f(x)\,dx$. Тогда справедливы следующие свойства неопределенного интеграла:

$$1^\circ.\ \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad 2^\circ.\ d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx,$$

$$3^\circ.\ \int F'(x)\,dx = F(x) + C, \qquad 4^\circ.\ \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$5^\circ.\ \int \bigl(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\bigr)\,dx = k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx,$$

где k_1, k_2 — постоянные (свойство линейности неопределенного интеграла).

Доказательство свойств 1°–5° следует из определения 16.2 неопределенного интеграла.

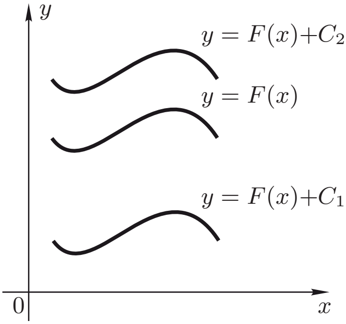


Рис. 16.1

Задача интегрирования функции $f(x)$ имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть по заданной функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$ такую, чтобы $F'(x) = f(x)$. Как известно (см. п. 7.4), производная $F'(x)$ функции $F(x)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = F(x)$ в точке x. Поэтому задачу интегрирования функции $f(x)$ можно сформулировать так: найти кривую $y = F(x)$, если задан закон изменения углового коэффициента k касательной к кривой, т. е. $k = f(x) = F'(x)$. Если $y = F(x)$ есть одна из таких кривых, то все остальные могут быть получены из нее параллельным сдвигом на произвольное число C вдоль оси Oy (рис. 16.1).

Следовательно, $y = F(x) + C$, где $F(x) = \int f(x)\,dx$, а C — параметр, есть уравнение однопараметрического семейства кривых с заданным законом изменения углового коэффициента $k = F'(x)$ касательных вдоль этих кривых.

Операция интегрирования есть операция, обратная дифференцированию, так как при интегрировании по заданной производной функции восстанавливают функцию (с точностью до постоянного слагаемого). Для проверки результата интегрирования достаточно продифференцировать найденную первообразную и убедиться, что ее производная совпадает с подынтегральной функцией.

Табл. 16.1 основных неопределенных интегралов получена на основе табл. 7.1 производных и определения 16.2 неопределенного интеграла.

16.2. Основные методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Определение 16.4. Интегрирование функций на основе свойства 5° линейности неопределенного интеграла и табл. 16.1 основных интегралов называют *непосредственным интегрированием.*

Пример 16.2. Найти интегралы: 1) $\int x^2\,dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{x^2+5}$; 3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 4) $\int 8\cos x\,dx$; 5) $\int \left(e^x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{5}{x}\right) dx$.

Решение. Используя табл. 16.1, получим 1) $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$;

Таблица 16.1

№	Неопределенный интеграл
1	$\int 0\,dx = C$
2	$\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \forall\ \alpha \neq -1$
3	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad \forall\ a > 0,\ a \neq 1$
4a	$\int e^x\,dx = e^x + C$
5	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
6	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7	$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
8	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
10	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
11	$\int \sec x\,dx = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C = \ln\lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$
12	$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert + C = \ln\lvert\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x\rvert + C$
13	$\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
14	$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
15	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
16	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

2) $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + {}$ $+ C$; 4) $\int 8\cos x\, dx = 8\int \cos x\, dx = 8(\sin x + C_1) = 8\sin x + 8C_1 = {}$ $= 8\sin x + C,\ C = 8C_1$; 5) $\int \left(e^x - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x}\right) dx = \int e^x - \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + {}$ $+ 5\int \frac{dx}{x} = (e^x + C_1) - (2\sqrt{x} + C_2) + 5(\ln|x| + C_3) = e^x - 2\sqrt{x} + 5\ln|x| + {}$ $+ C,\ C = C_1 - C_2 + 5C_3$. ■

При интегрировании суммы функций постоянные интегрирования от отдельных слагаемых в конечном результате объединяют в одну постоянную.

Задача интегрирования функций значительно сложнее задачи дифференцирования. Здесь отсутствуют правила интегрирования произведения и частного двух функций, сложной и обратной функций. Имеются лишь некоторые приемы, позволяющие интегрировать отдельные классы функций.

Метод замены переменной (метод подстановки).

Теорема 16.4. Пусть функции $t = \varphi(x)$ и $y = f(t)$ определены соответственно на множествах D_φ и D_f, причем $\varphi(x) \in D_f \ \ \forall x \in {}$ $\in D_\varphi$. Пусть, кроме того, функция $f(t)$ имеет на множестве D_f первообразную $F(t)$, т. е.

$$\int f(t)dt = F(t) + C, \tag{16.1}$$

а функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на D_φ. Тогда функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет на множестве D_φ первообразную, причем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt\Big|_{t=\varphi(x)}. \tag{16.2}$$

Пусть в исходном интеграле $\int g(x)\, dx$ подынтегральное выражение удалось представить в виде $g(x)\, dx = f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = f(t)\, dt$, где функции $f(t)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 16.4. Тогда согласно формуле (16.2) имеем

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt\Big|_{t=\varphi(x)}. \tag{16.3}$$

Формулу (16.3) называют *формулой интегрирования подстановкой*, а именно подстановкой $t = \varphi(x)$.

Пример 16.3. Найти интеграл $\mathcal{I} = \int \sin 2x\, dx$.

Решение. Очевидно, что $\mathcal{I} = 2\int \sin x \cos x\, dx$. Полагаем $t = {}$ $= \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = 2\int \sin x \cos x \, dx = 2\int t\, dt = 2\,\frac{t^2}{2} + C = t^2 + C = \sin^2 x + C. \ \blacksquare$$

Пример 16.4. Найти интеграл $\mathcal{I} = \int (ax^2 + b)x\, dx$.

Решение. Обозначим $t = ax^2 + b$. Тогда $dt = 2ax\, dx$. Поэтому

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2a}\int t\, dt = \frac{1}{4a}t^2 + C = \frac{1}{4a}(ax^2+b)^2 + C. \ \blacksquare$$

Для следующих интегралов указаны соответствующие подстановки:

1) $\int f(\sin x)\cos x\, dx$, $t = \sin x$;

2) $\int f(\cos x)\sin x\, dx$, $t = \cos x$;

3) $\int f(\operatorname{tg} x)\,\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, $t = \operatorname{tg} x$;

Рассмотрим интеграл $\mathcal{I} = \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx$. Полагая $t = f(x)$, найдем $dt = f'(x)\, dx$. Тогда $\mathcal{I} = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$. Следовательно,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{(1+x^3)'\, dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C.$$

Замечание 16.1. Подчеркнем, что в конечном результате интегрирования следует вернуться к старой переменной x, используя подстановку $t = \varphi(x)$. Из формулы (16.3) следует, что

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, d\varphi(x) = \int f(\varphi)\, d\varphi.$$

Если в табл. 16.1 существует интеграл $\int f(\varphi)\, d\varphi = F(\varphi) + C$, то для исходного интеграла получим

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \tag{16.4}$$

Этот способ интегрирования (вариант метода подстановки) называют *методом подведения под знак дифференциала* (производную $\varphi'(x)$ подводят под знак дифференциала dx, т. е. записывают $\varphi'(x)\, dx = d\varphi(x)$). В этом методе не обозначают через t новую переменную интегрирования, а интегрируют сразу по новой переменной $\varphi = \varphi(x)$.

При интегрировании часто используют следующие свойства дифференциала:

1° $dx = d(x + a)$; 2° $dx = \dfrac{1}{a}\, d(ax)$, где a — постоянная.

Пример 16.5. Найти $\mathcal{I} = \int \cos^3 x\, dx$.

Решение. Представим подынтегральное выражение в виде $\cos^2 x \cos x\, dx$ и подведем множитель $\cos x$ под знак дифференциала dx, т. е. запишем $\cos x\, dx = d \sin x$. Принимая функцию $\sin x$ за новую переменную интегрирования, учитывая свойство 4° неопределенного интеграла (см. теорему 16.3) и формулу 2 табл. 16.1, получим

$$\mathcal{I} = \int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, d \sin x =$$
$$= \int d \sin x - \int \sin^2 x\, d \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \ \blacksquare$$

Пример 16.6. Найти интегралы

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - x^4}}; \qquad \mathcal{I}_2 = \int \frac{e^x\, dx}{4 + e^{2x}}.$$

Решение. Подводя в интеграле $\mathcal{I}_1$ множитель x под знак дифференциала, т. е. записывая $x\, dx = \dfrac{1}{2}\, d\left(x^2\right)$ и используя формулу 15 табл. 16.1, найдем

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{9 - x^4}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{3} + C.$$

Учитывая, что в интеграле $\mathcal{I}_2$ произведение $e^x\, dx = de^x$, согласно формуле 13 табл. 16.1 получим

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{e^x\, dx}{4 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{4 + e^{2x}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C. \ \blacksquare$$

Теорема 16.5. Пусть $x = \psi(t)$ — функция, строго монотонная и непрерывно дифференцируемая на множестве D_ψ, $y = f(x)$ — функция, непрерывная на множестве D_f, и $\psi(t) \in D_f \ \ \forall\, t \in D_\psi$. Если функция $f(x)$ имеет на D_f первообразную $F(x)$, т. е.

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \tag{16.5}$$

то функция $f(\psi(t))\psi'(t)$ имеет на множестве D_ψ первообразную $F(\psi(t))$, причем

$$\int f(x)\, dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\, dt \Big|_{t = \psi^{-1}(x)}, \tag{16.6}$$

где $t = \psi^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $x = \psi(t)$.

Существование интегралов в формуле (16.6) обеспечено непрерывностью функций $f(x)$, $\psi(t)$, $\psi'(t)$ на соответствующих множествах, а существование функции $t = \psi^{-1}(x)$ — строгой монотонностью функции $x = \psi(t)$ на множестве D_ψ.

Формулу (16.6) называют *формулой интегрирования заменой переменной*, а именно заменой $x = \psi(t)$.

Пример 16.7. Найти $\mathcal{I} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Введем замену $x = \sin t$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $dx = \cos t\,dt$. Учитывая, что $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)$, и используя метод подведения под знак дифференциала, получим

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \\ = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,d(2t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Так как $t = \arcsin x$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$, то окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C. \ \blacksquare$$

На практике обычно не различают понятия «подстановки» и «замены переменной». Обе формулы (16.2) и (16.6) преследуют одну и ту же цель — свести исходный интеграл к более простому с помощью перехода от старой переменной интегрирования x к новой переменной t. Эти формулы отличаются только способом введения новой переменной: $t = \varphi(x)$ в формуле (16.2) или $x = \psi(t)$ в формуле (16.6).

Ниже предлагается *схема* интегрирования функций с помощью *метода замены переменной* (*метода подстановки*) в интеграле $\int f(x)\,dx$.

1. Выбрать подстановку $t = \varphi(x)$ или $x = \psi(t)$.

2. Преобразовать подынтегральную функцию $f(x)$, дифференциал dx и записать исходный интеграл в виде $\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt$.

3. Найти первообразную $G(t)$ новой подынтегральной функции $g(t)$.

4. Вернуться в окончательном результате от новой переменной интегрирования t к старой переменной x следующим образом:

а) если $t = \varphi(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G(t)\Big|_{t=\varphi(x)} + C = G\,[\varphi(x)] + C;$$

б) если $x = \psi(t)$, то

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G(t)\Big|_{t=\psi^{-1}(x)} + C = G\left(\psi^{-1}(x)\right) + C,$$

где $t = \psi^{-1}(x)$ есть функция, обратная к функции $x = \psi(t)$.

Метод интегрирования по частям.

Теорема 16.6. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на некотором промежутке. Тогда в каждой точке данного промежутка справедливо равенство

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{16.7}$$

Доказательство. Для производной произведения двух функций имеем $(uv)' = u'v + uv'$. Отсюда $uv' = (uv)' - u'v$. Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int vu'\,dx.$$

Учитывая, что $\int (uv)'\,dx = uv + C$, и присоединяя постоянную C к интегралу $\int vu'\,dx$, получим

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx, \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Теорема доказана. ■

Отметим, что при определении функции v по дифференциалу dv можно брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит (что можно проверить, заменяя в формуле (16.7) функцию v на $v + C$). Обычно полагают $C = 0$, и поэтому $v = \int dv$.

Пример 16.8. Найти $\int xe^x\,dx$.

Решение. Полагаем $u = x$, $e^x\,dx = dv$. Отсюда $du = dx$, $v = \int e^x\,dx = e^x$. Тогда $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$. ■

С помощью метода интегрирования по частям находят следующие интегралы.

1. $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$, $\int P_n(x)\sin ax\,dx$,

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, a — постоянная. В данных интегралах за u принимают многочлен $P_n(x)$, за dv — оставшееся выражение, причем формулу (16.7) применяют n раз.

2. $\int P_n(x)\ln ax\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P_n(x)\arccos ax\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} ax\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} ax\,dx$.

В этих интегралах за u принимают трансцендентную функцию, за dv — произведение $P_n(x)\,dx$.

3. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, где a и b — постоянные.

Обозначая любой из указанных интегралов через $\mathcal{I}$ и дважды интегрируя, приходят к уравнению первого порядка относительно $\mathcal{I}$, из которого и находят соответствующий интеграл. В некоторых случаях метод интегрирования по частям применяют несколько раз.

В дальнейшем в процессе интегрирования будем указывать в комментарии, выделенном вертикальными прямыми, введенные обозначения, или подстановку, или какие-либо дополнительные замечания.

Предлагается следующая *схема метода интегрирования по частям*:

1. Выбрать в подынтегральном выражении исходного интеграла функцию u и дифференциал dv.

2. Найти дифференциал du по u и функцию v по dv, где $v = \int dv$.

3. Записать формулу (16.7) и найти интеграл $\int v du$.

Пример 16.9. Найти $\int x^2\ln x\,dx$.

Решение. Используя формулу (16.7), получим

$$\int x^2\ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & dv = x^2\,dx, \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=\displaystyle\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}\end{array}\right| = \\ = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C. \quad \blacksquare$$

Пример 16.10. Найти $\int x^2\sin x\,dx$.

Решение. Дважды применяя формулу (16.7), найдем

$$\int x^2\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u=x^2, & dv=\sin x\,dx, \\ du=2x\,dx, & v=\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x\end{array}\right| = \\ = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \left|\begin{array}{ll} u=x, & dv=\cos x\,dx, \\ du=dx, & v=\sin x\end{array}\right| = \\ = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) = \\ = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C. \quad \blacksquare$$

Пример 16.11. Найти $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Решение. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{I}=\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=e^{2x}, & dv=\sin 3x\,dx, \\ du=2e^{2x}\,dx, & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=$$
$$=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=e^{2x}, & dv=\cos 3x\,dx, \\ du=2e^{2x}\,dx, & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right|=$$
$$=-\frac{1}{3}\,e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right)=$$
$$=-\frac{1}{3}\,e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{3}\,e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\,\mathcal{I},$$

т. е.

$$\mathcal{I}=-\frac{1}{3}\,e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\,\mathcal{I},$$

где $\mathcal{I}=\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Из этого уравнения найдем исходный интеграл:

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{13}\,(2\sin 3x-3\cos 3x).\ \blacksquare$$

Отметим, что при интегрировании одной и той же функции в зависимости от способа интегрирования можно получить ответы, отличающиеся на произвольную постоянную.

Пример 16.12. Найти $\mathcal{I}=\int\sin x\cos x\,dx$.

Решение. Способ I. Учитывая, что $\cos x\,dx=d\sin x$, имеем

$$\mathcal{I}=\int\sin x\,d\sin x=\frac{\sin^2 x}{2}+C_1.$$

Способ II. Так как $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$, то можно записать

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\sin 2x\,d(2x)=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2.$$

Согласно известной формуле тригонометрии $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, или $\dfrac{\sin^2 x}{2}=\dfrac{1-\cos 2x}{4}$. Следовательно, $C_2=C_1+\dfrac{1}{4}$. $\blacksquare$

16.3. Типовые примеры.

В примерах 1–14 найти интегралы.

Пример 1. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{3x^4 + 5x^3 - 6x\sqrt[4]{x} + 4}{x}\,dx.$

Решение. Используя формулы 2 и 3 табл. 16.1, получим

$$\mathcal{I} = 3\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 6\int x^{\frac{1}{4}} dx + 4\int \frac{dx}{x} = \\ = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{24}{5}x^{\frac{5}{4}} + 4\ln|x| + C. \ \blacksquare$$

Пример 2. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2} - 3\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx.$

Решение. На основании формул 15 и 16 табл. 16.1 будем иметь

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx - 3\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \\ = \arcsin\frac{x}{2} - 3\ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C. \ \blacksquare$$

Пример 3. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\,dx.$

Решение. Преобразуя подынтегральную функцию и учитывая формулу 4 табл. 16.1, найдем

$$\mathcal{I} = \int \left(\frac{2}{10}\right)^x dx + \int \left(\frac{5}{10}\right)^x dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \\ = \left(\frac{1}{5}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + C = -\left(\frac{1}{5}\right)^x \frac{1}{\ln 5} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\ln 2} + C. \ \blacksquare$$

Пример 4. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$

Решение. Перейдем к переменной t, полагая $x = t^2$. Подставляя $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ в данный интеграл и интегрируя, запишем

$$\mathcal{I} = \int \frac{t}{t^2+1}2t\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = \\ = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x и учитывая, что $t = \sqrt{x}$, получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C. \ \blacksquare$$

Пример 5. $\mathcal{I} = \int x(2x-1)^5\,dx.$

Решение. Введем новую переменную $t = 2x - 1$. Тогда $x = \frac{1}{2}(t+1)$. Подставляя $x = \frac{1}{2}(t+1)$, $dx = \frac{1}{2}\,dt$ в исходный интеграл, интегрируя и возвращаясь к переменной x, найдем

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{2}(t+1)t^5 \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int (t^6+t^5)\,dt = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right) + C = \frac{1}{28}(2x-1)^7 + \frac{1}{24}(2x-1)^6 + C. \blacksquare$$

Пример 6. $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{e^x+2}.$

Решение. Применим подстановку $t = e^x + 2$. Тогда $dt = e^x\,dx$, $e^x = t - 2$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-2}$. После перехода к новой переменной t имеем

$$\mathcal{I} = \int \frac{dt}{(t-2)t} = \int \frac{dt}{(t^2-2t+1)-1} = \int \frac{dt}{(t-1)^2-1}.$$

Так как $dt = d(t-1)$, то $\int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2-1}$ есть табличный интеграл с переменной интегрирования $(t-1)$ (см. формулу 14 табл. 16.1). Интегрируя и возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{e^x+2} = \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1-1}{t-1+1}\right| + C = \\ = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x+2-2}{e^x+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{e^x}{e^x+2} + C. \blacksquare$$

Пример 7. $\mathcal{I} = \int xe^{x^2}\,dx.$

Решение. Используем метод подведения под знак дифференциала. Учитывая, что $x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$, найдем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C,$$

где функция x^2 есть новая переменная интегрирования (см. формулу 4а табл. 16.1). $\blacksquare$

Пример 8. $\mathcal{I} = \int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx.$

Решение. Применяя метод подведения под знак дифференциала и учитывая, что $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, получим

$$\mathcal{I} = \int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{1}{4}\ln^4 x + C,$$

где новой переменной интегрирования служит функция $\ln x$ (см. формулу 2 табл. 16.1). ■

Пример 9. $\mathcal{I} = \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx$.

Решение. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$, и используя формулу 6 табл. 16.1, будем иметь

$$\mathcal{I} = -\int \sin \frac{1}{x}\, d\left(\frac{1}{x}\right) = -\cos \frac{1}{x} + C,$$

где новой переменной интегрирования является дробь $\frac{1}{x}$. ■

Пример 10. $\mathcal{I} = \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos x\, dx$.

Решение. Учитывая, что $\cos x\, dx = d(\sin x)$, найдем

$$\mathcal{I} = \int (\sin x)^{\frac{2}{3}}\, d(\sin x) = \frac{3}{5} (\sin x)^{\frac{5}{3}} + C,$$

где функция $\sin x$ есть новая переменная интегрирования (см. формулу 2 табл. 16.1). ■

Пример 11. $\mathcal{I} = \int \ln x\, dx$.

Решение. Полагаем $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Используя формулу (16.7), получим

$$\mathcal{I} = \int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C. \ ■$$

Пример 12. $\mathcal{I} = \int x \sin x\, dx$.

Решение. По формуле (16.7) будем иметь

$$\mathcal{I} = \int x \sin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & dv = \sin x\, dx, \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C. \ ■$$

Пример 13. $\mathcal{I} = \int x^2 e^x\, dx$.

Решение. Дважды применяя формулу (16.7), найдем

$$\mathcal{I} = \int x^2 e^x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & dv = e^x\, dx, \\ du = 2x\, dx, & v = e^x \end{array} \right| =$$
$$= x^2 e^x - 2\int e^x x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x\, dx, \\ du = dx, & v = e^x \end{array} \right| =$$
$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x\, dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \ ■$$

Пример 14. $\mathcal{I} = \int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение. Применяя формулу (16.7), запишем

$$\mathcal{I} = \int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & dv = x \, dx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$$

Найдем

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \quad \blacksquare$$

16.4. Задачи для самостоятельного решения.

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{7x^4 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} \, dx$; **2.** $\displaystyle\int e^x (2^x + 3^x) \, dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{25-x^2} + 4\sqrt{25+x^2}}{\sqrt{625-x^4}} \, dx$; **4.** $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}$;

5. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \, dx$; **6.** $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} \, dx$;

7. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$; **8.** $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{(x^2+25)^3}$;

9. $\displaystyle\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$; **10.** $\displaystyle\int (\operatorname{arctg} x)^2 \frac{dx}{1+x^2}$;

11. $\displaystyle\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} \, dx$; **12.** $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1} \, dx$;

13. $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{\cos^2 x} \, dx$; **14.** $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x} \, dx$;

15. $\displaystyle\int x \ln x \, dx$; **16.** $\displaystyle\int (x^2 + 7x + 5) \cos 2x \, dx$;

17. $\displaystyle\int \left(x^2 + x + 1\right) e^x \, dx$; **18.** $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$;

19. $\displaystyle\int (x+4) \sin x \, dx$; **20.** $\displaystyle\int (2x+1)^2 e^{-x} \, dx$;

21. $\displaystyle\int (2-x) \ln x \, dx$.

§ 17. Интегрирование рациональных дробей

17.1. Краткие сведения из алгебры многочленов.

Определение 17.1. Пусть $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots \ldots + c_1 x + c_0$ $(c_n \neq 0)$ есть многочлен степени n с действительными или комплексными[1] коэффициентами. Всякое действительное или комплексное число $x = a$ называется *корнем многочлена* $P_n(x)$, если $P(a) = 0$.

Теорема 17.1 (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень.

Теорема 17.2 (*теорема Безу*). Число $x = a$ есть корень многочлена тогда и только тогда когда этот многочлен делится без остатка на двучлен $(x - a)$.

Определение 17.2. Число a называется *корнем кратности* m многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x) = (x - a)^m \varphi(x)$, где $\varphi(a) \neq 0$, $m \in \mathbf{N}$.

На основе теоремы 17.1 можно доказать, что многочлен $P_n(x)$ степени n имеет ровно n корней с учетом их кратности.

Из теорем 17.1 и 17.2 следует, что всякий многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде произведения линейных множителей вида $(x - x_k)$ $(k = \overline{1, n})$ и постоянного множителя c_n — коэффициента при x^n :

$$P_n(x) = c_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Если среди корней многочлена $P_n(x)$ имеются корни $x_1, x_2, \ldots, x_q$ соответственно кратности $k, l, \ldots, m$, то его можно записать в виде $P_n(x) = c_n(x - x_1)^k (x - x_2)^l \cdot \ldots \cdot (x - x_q)^m$, где $k + l + \ldots + m = n$.

Можно доказать, что если комплексное число $a = u + iv$ является корнем кратности m многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами, то сопряженный корень $\overline{a} = u - iv$ также является корнем той же кратности m этого многочлена.

Согласно определению 3.9, рациональная дробь $R(x)$ имеет вид $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, $m \geqslant 1$.

Определение 17.3. Рациональная дробь $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, т. е. $n < m$. В противном случае дробь называется *неправильной*.

[1] О компле́ксных числах см. § 23.

В дальнейшем будем рассматривать многочлены и рациональные дроби только с действительными коэффициентами.

Теорема 17.3. Всякий многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами следующим образом:

$$Q_m(x) = c_m(x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\mu,$$

где $\alpha + \ldots + \beta + 2\lambda + \ldots + 2\mu = m$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0, \ldots, \dfrac{r^2}{4} - s < 0$.

Подчеркнем, что каждому линейному множителю соответствует действительный корень многочлена, каждому квадратичному — два комплексно сопряженных корня. Напомним, что любой квадратный трехчлен x^2+px+q, где p и q — действительные числа, не имеет действительных корней при $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$.

Определение 17.4. *Элементарными дробями* называются дроби следующих четырех видов:

$$1)\ \frac{1}{x-a}; \quad 2)\ \frac{1}{(x-a)^m}; \quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, $a, p, q, M, N \in \mathbf{R}$.

Теорема 17.4. Пусть $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь $(n < m)$, знаменатель которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$Q_m(x) = c_n(x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\mu.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму элементарных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots \\ \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \\ + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots \\ \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}, \end{aligned} \tag{17.1}$$

где $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots, B_1, \ldots, B_\beta, M_1, \ldots, M_\lambda, N_1, \ldots, N_\lambda, \ldots, R_1, \ldots$ $\ldots, R_\mu, S_1, \ldots, S_\mu \in \mathbf{R}$; $\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu \in \mathbf{N}$; $\dfrac{p^2}{4} - q < 0, \ldots$ $\ldots, \dfrac{r^2}{4} - s < 0$.

На практике правильную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ разлагают на элементарные дроби, используя метод неопределенных коэффициентов. Для этого знаменатель $Q_m(x)$ записывают в виде произведения линейных и квадратичных множителей. Дробь представляют в виде (17.1) с неопределенными коэффициентами $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots, B_1, \ldots, B_\beta$, $M_1, \ldots, M_\lambda, N_1, \ldots, N_\lambda, \ldots, R_1, \ldots, R_\mu, S_1, \ldots, S_\mu$, подлежащими определению. Затем приводят элементарные дроби к общему знаменателю $Q_m(x)$ и приравнивают числители. Так как числители — многочлены — тождественно равны (т. е. равны при любых значениях x), то должны быть равными и коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходят к системе алгебраических линейных уравнений относительно искомых неопределенных коэффициентов $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots, B_1, \ldots, B_\beta, M_1, \ldots, M_\lambda, N_1, \ldots, N_\lambda, \ldots, R_1, \ldots$ $\ldots, R_\mu, S_1, \ldots, S_\mu$.

Можно получить систему относительно этих коэффициентов другим способом, подставляя в равенство числителей произвольные значения переменной x. Обычно в качестве таких значений выбирают действительные корни многочлена $Q_m(x)$. Иногда часть коэффициентов определяют одним способом, часть — другим способом.

П р и м е р 17.1. Разложить на сумму элементарных дробей правильную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)(x^2-6x+8)}$.

Р е ш е н и е. Первый множитель (x^2+1) в знаменателе не имеет действительных корней. Разложим второй множитель — квадратный трехчлен — на линейные множители: $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$. Запишем дробь в виде суммы элементарных дробей с неопределенными коэффициентами, подлежащими определению:

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2-6x+8)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$2x+1 = A(x-4)(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)(x-4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в последнем равенстве, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
x^3:&\quad 0 = A+B+C,\\
x^2:&\quad 0 = -4A-2B-6C+D,\\
x^1:&\quad 2 = A+B+8C-6D,\\
x^0:&\quad 1 = -4A-2B+8D.
\end{aligned}$$

Из этой системы определим $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{9}{34}$, $C = \dfrac{4}{17}$, $D = -\dfrac{1}{17}$.

Искомое разложение запишем в виде

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2-6x+8)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{9}{34}\cdot\frac{1}{x-4} + \frac{1}{17}\cdot\frac{4x-1}{x^2+1}\,.$$

Можно прийти к более простой системе относительно коэффициентов A, B, C, D. Сначала, полагая последовательно $x = 2$, $x = 4$ в равенстве числителей, получим два уравнения относительно A и B. Далее, сравнивая коэффициенты при x^0 и при x^3 в том же равенстве числителей, найдем еще два уравнения. В результате будем иметь более простую систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
x=2:&\qquad 5 = -10A,\\
x=4:&\qquad 9 = 34B,\\
x^0:&\qquad 1 = -4A-2B+8D,\\
x^3:&\qquad 0 = A+B+C.
\end{aligned}$$

Из этой системы найдем те же самые значения коэффициентов, причем коэффициенты A и B определим сразу из первых двух уравнений, а коэффициенты C и D — из двух последних уравнений.

17.2. Интегрирование элементарных дробей.

Теорема 17.5. Интеграл от каждой элементарной дроби выражается через элементарные функции.

Доказательство. Запишем интегралы от элементарных дробей:

$$\text{I.}\int\frac{dx}{x-a};\quad \text{II.}\int\frac{dx}{(x-a)^m};\quad \text{III.}\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx;\quad \text{IV.}\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx,$$

где $m, n\in\mathbf{N}$, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, $a, p, q, M, N\in\mathbf{R}$.

Интегралы I и II приводятся к табличным с помощью подстановки $t = x-a$:

I. $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-a| + C;$

II. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^m} = \int\frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$

III. Пусть $\mathcal{I} = \displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$, где $q-\dfrac{p^2}{4}>0$. Преобразуем квадратный трехчлен: $x^2+px+q = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)$. Учитывая, что $q-\dfrac{p^2}{4}>0$, обозначим через s арифметический корень из разности $q - \dfrac{p^2}{4}$, т. е. $s = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Введем новую переменную $t = x + \dfrac{p}{2}$. Тогда $x = t - \dfrac{p}{2}$, $dx = dt$, $x^2 + px + q = t^2 + s^2$. Подставляя x и dx в $\mathcal{I}$, интегрируя и возвращаясь к переменной x, получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+s^2}\,dt = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{MP}{2}\right)}{t^2+s^2}\,dt =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+s^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+s^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+s^2\right)}{t^2+s^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{s}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{s}\right) + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+s^2\right) + \frac{2N - Mp}{2s}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{s}\right) + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right) + C.$$

IV. Пусть $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, где $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Используем введенные выше подстановку $t = x + \dfrac{p}{2}$ и обозначение $s = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Запишем интеграл $\mathcal{I}$ в виде

$$\mathcal{I} = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{MP}{2}\right)}{(t^2+s^2)^n}\,dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^n} +$$
$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} = \frac{M}{2}\cdot K + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\mathcal{I}_n,$$

где $K = \displaystyle\int \frac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^n} = -\frac{1}{(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} + C$, $\mathcal{I}_n = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n}$. Установим рекуррентную формулу, связывающую интегралы $\mathcal{I}_n$ и $\mathcal{I}_{n-1}$. Преобразуя подынтегральную функцию в интеграле $\mathcal{I}_n$, запишем

$$\mathcal{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^n} = \frac{1}{s^2}\int \frac{s^2+t^2-t^2}{(t^2+s^2)^n}dt = \frac{1}{s^2}\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^{n-1}} -$$
$$- \frac{1}{2s^2}\int t\cdot\frac{2t}{(t^2+s^2)^n}dt = \frac{1}{s^2}\mathcal{I}_{n-1} - \frac{1}{2s^2}\int t\cdot\frac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^n}.$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = t$, $dv = \dfrac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^n}$. Отсюда $du = dt$,

$v = -\dfrac{1}{(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}}$. Тогда

$$\int t \cdot \frac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^n} = -\frac{t}{(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^{n-1}}.$$

Следовательно, $\mathcal{I}_n = \dfrac{1}{s^2}\,\mathcal{I}_{n-1} + \dfrac{t}{2s^2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} - \dfrac{1}{2s^2(n-1)}\,\mathcal{I}_{n-1}$. Из этого равенства получим

$$\mathcal{I}_n = \frac{t}{2s^2(n-1)(t^2+s^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s^2(2n-2)}\,\mathcal{I}_{n-1}. \qquad (17.2)$$

Рекуррентная формула (17.2) позволяет найти $\mathcal{I}_n$ для любого $n = 2, 3, \ldots,$ так как

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dt}{t^2+s^2} = \frac{1}{s}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{s}\right) + C.$$

Итак, найден интеграл вида IV.

Таким образом, показано, что каждый из интегралов I–IV выражается через элементарные функции, а именно: интеграл I есть логарифмическая функция, II — рациональная дробь, III — линейная комбинация логарифмической функции и арктангенса, IV — линейная комбинация рациональных дробей и арктангенса. Теорема доказана. ■

Пример 17.2. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{(3x-5)^2}$.

Решение. Преобразуем знаменатель и используем подстановку $t = x - \dfrac{3}{5}$. Учитывая, что $dx = dt$, получим

$$\mathcal{I} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{9t} + C = -\frac{1}{9\left(x-\frac{5}{3}\right)} + C = -\frac{1}{3(3x-5)} + C.$$

В данном случае исходный интеграл можно сразу свести к табличному $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$, если учесть, что $dx = \dfrac{1}{3}\,d(3x-5)$, т. е.

$$\mathcal{I} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-5)}{(3x-5)^2} = -\frac{1}{3(3x-5)} + C. \ ■$$

Пример 17.3. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{7x-5}{x^2-6x+13}\,dx$.

Решение. Выделим в знаменателе дроби полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 - 9 + 13 = (x-3)^2 + 4.$$

Преобразуем числитель, выделяя двучлен $(x-3)$:

$$7x-5=7\left(x-3+3-\frac{5}{7}\right)=7(x-3)+16.$$

Используя подстановку $t=x-3$, интегрируя и возвращаясь к переменной x, найдем

$$\mathcal{I}=\int\frac{7(x-3)+16}{(x-3)^2+4}\,dx=\int\frac{7t+16}{t^2+4}\,dt=7\int\frac{t\,dt}{t^2+4}+16\int\frac{dt}{t^2+4}=$$
$$=7\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+16\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{7}{2}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{16}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$
$$=\frac{7}{2}\ln\left(x^2-6x+13\right)+8\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C.$$

Отметим, что данный интеграл можно найти, не вводя явно переменную t. Для этого в числителе выделим производную знаменателя и разобьем интеграл на два слагаемых. Используя метод подведения под знак дифференциала, будем иметь

$$\mathcal{I}=\int\frac{(2x-6)\,\frac{7}{2}+21-5}{x^2-6x+13}\,dx=\frac{7}{2}\int\frac{(2x-6)\,dx}{x^2-6x+13}+16\int\frac{dt}{(x-3)^2+4}=$$
$$=\frac{7}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+16\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}=$$
$$=\frac{7}{2}\ln\left(x^2-6x+13\right)+8\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C. \blacksquare$$

Пример 17.4. Найти $\mathcal{I}=\displaystyle\int\frac{2x+7}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене в знаменателе дроби:

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1.$$

Преобразуем числитель, выделяя двучлен $(x+1)$:

$$2x+7=2(x+1)+5.$$

Используя подстановку $t=x+1$ и интегрируя, приведем интеграл $\mathcal{I}$ к виду

$$\mathcal{I}=\int\frac{2(x+1)+5}{((x+1)^2+1)^3}\,dx=\int\frac{2t+5}{(t^2+1)^3}\,dt=$$
$$=\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^3}+5\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}=-\frac{1}{2(t^2+1)^2}+5\mathcal{I}_3,$$

где $\mathcal{I}_3=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Найдем интеграл $\mathcal{I}_3$ по рекуррентной формуле (17.2), применяя ее сначала при $n = 3$, затем при $n = 2$ и учитывая, что $s^2 = 1$:

$$\mathcal{I}_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\mathcal{I}_2 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \\ + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\mathcal{I}_1\right) = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{8}\int\frac{dt}{t^2+1} = \\ = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + C.$$

Так как $t = x+1$, $t^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$, то окончательно получим исходный интеграл

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{2(x^2+2x+2)^2} + \frac{5(x+1)}{4(x^2+2x+2)^2} + \\ + \frac{15(x+1)}{8(x^2+2x+2)} + \frac{15}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C. \blacksquare$$

Если интеграл от функции выражается через элементарные функции, то говорят, что *функция интегрируема в элементарных функциях.*

17.3. Интегрирование рациональных дробей.

Теорема 17.6. Всякая рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях на любом промежутке, где знаменатель дроби не обращается в нуль.

Доказательство. Пусть $R(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ — неправильная рациональная дробь ($k \geqslant m$). Выделим целую часть и представим дробь $R(x)$ в виде $R(x) = T(x) + \dfrac{\tilde{P}_n(x)}{Q_m(x)}$, где $T(x)$ — многочлен, $\dfrac{\tilde{P}_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь ($n < m$). Разложим последнюю дробь на сумму элементарных дробей по формуле (17.1). Интеграл от $R(x)$ будет равен сумме интеграла от многочлена $T(x)$ и интегралов от элементарных дробей. Интеграл от многочлена есть многочлен, интегралы от элементарных дробей, согласно теореме 17.5, представляют собой элементарные функции. Таким образом, интеграл от любой рациональной дроби выражается в виде линейной комбинации многочлена (если дробь неправильная), правильных рациональных дробей, арктангенсов и логарифмической функции. Теорема доказана. $\blacksquare$

Пример 17.5. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx.$

Р е ш е н и е. Выделим в подынтегральной функции — неправильной рациональной дроби — целую часть. Разделим числитель на знаменатель, например, «углом»:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & x^3-x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-x^3+x^2-x} & x+1 \\
\qquad x^3-x^2+x & \\
\qquad \underline{x^3-x^2+x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1. &
\end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^4}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}$. Преобразуя знаменатель дроби, разложим его на множители:

$$x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^2+1).$$

Представим правильную дробь в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

где коэффициенты A, B, C подлежат определению. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Составим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C. Полагая сначала $x=1$ в последнем равенстве и сравнивая затем коэффициенты при x^2 и x^0 слева и справа в этом равенстве, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{rrcl}
x=1: & 1 & = & 2A, \\
x^2: & 0 & = & A+B, \\
x^0: & 1 & = & A-C.
\end{array}$$

Из этой системы найдем $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{1}{2}$. Подставляя эти коэффициенты в разложение правильной дроби в подынтегральной функции и интегрируя, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int\left(x+1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \\
&= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \\
&= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

17.4. Типовые примеры.

Пример 1. Разложить на сумму элементарных дробей (без вычисления коэффициентов) рациональную дробь

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{(x+1)x^2(x-2)^3(x^2+x+1)(x^2+x+3)^2}, \quad \text{где } n < 12.$$

Решение. Данная дробь правильная, так как по условию степень числителя n меньше степени знаменателя $m = 1 + 2 + 3 + 2 + 4 = 12$. Следуя схеме (17.1) разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей и учитывая, что квадратные трехчлены $x^2 + x + 1$ и $x^2 + x + 3$ не имеют действительных корней, запишем

$$R(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{C_1}{x-2} + \frac{C_2}{(x-2)^2} + \frac{C_3}{(x-2)^3} + \\ + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{F_1x+G_1}{x^2+x+3} + \frac{F_2x+G_2}{(x^2+x+3)^2}. \ \blacksquare$$

Пример 2. Разложить на сумму элементарных дробей с числовыми коэффициентами дробь

$$R(x) = \frac{3x-1}{x(x-1)(x+2)}.$$

Решение. Используя схему разложения (17.1) правильной дроби, запишем $\dfrac{3x-1}{x(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$. Приведем дроби справа к общему знаменателю и приравняем числители правой и левой частей:

$$3x - 1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1). \qquad (17.3)$$

Найдем коэффициенты A, B и C двумя способами.

Способ I. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, приходим к системе уравнений относительно коэффициентов A, B, C:

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 0 = A + B + C, \\ x^1: &\quad 3 = -A + 2A + 2B - C, \\ x^0: &\quad -1 = -2A. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения найдем $A = \dfrac{1}{2}$. Сложив два первых уравнения, получим $3 = 2A + 3B$. Отсюда $B = \dfrac{2}{3}$. Из первого уравнения имеем $C = -(A+B) = -\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{7}{6}$.

Способ II. Знаменатель данной дроби имеет простые действительные корни, равные 0, 1, -2. Полагая последовательно $x = 0$,

$x = 1$, $x = -2$ в равенстве (17.3), получим более простую систему уравнений относительно коэффициентов A, B и C:

$$\begin{aligned} x=0: &\quad -1 = A\cdot(-1)\cdot 2,\\ x=1: &\quad 3-1 = B\cdot 1\cdot 3,\\ x=-2: &\quad -6-1 = C\cdot(-2)\cdot(-3). \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим $A = \dfrac{1}{2}$, из второго — $B = \dfrac{2}{3}$, из третьего — $C = -\dfrac{7}{6}$.

Следовательно,

$$\frac{3x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{1}{2x} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{7}{6(x+2)}. \ \blacksquare$$

П р и м е р 3. Разложить на сумму элементарных дробей с числовыми коэффициентами правильную дробь

$$R(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2(x-1)(x^2+1)}.$$

Р е ш е н и е. Согласно схеме разложения (17.1) запишем

$$\frac{x^2+2x-1}{x^2(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2+2x-1 = Ax(x-1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + \\ + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^2(x-1). \quad (17.4)$$

Полагая в равенстве (17.4) последовательно $x = 0$ и $x = 1$, получим систему уравнений относительно коэффициентов B и C:

$$\begin{aligned} x=0: &\quad -1 = -B,\\ x=1: &\quad 1+2-1 = C\cdot 2. \end{aligned}$$

Отсюда найдем $B = 1$, $C = 1$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в равенстве (17.4), запишем систему уравнений, из которой определим коэффициенты A, D, E:

$$\begin{aligned} x^4: &\quad 0 = A+C+D,\\ x^3: &\quad 0 = -A+B+E-D,\\ x^2: &\quad 1 = A-B+C-E, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 = A+D,\\ -1 = -A-D+E,\\ \ \ 1 = A-E. \end{cases}$$

Складывая первые два уравнения, найдем $E = -2$. Из третьего уравнения будем иметь $A = 1 + E = 1 - 2 = -1$, из первого уравнения получим $D = -1 - A = 0$. Итак,

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2+1}. \ \blacksquare$$

Пример 4. Разложить на сумму многочлена и элементарных дробей без вычисления коэффициентов неправильную дробь

$$R(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + 5}{x(x^2-1)}.$$

Решение. Выделим целую часть неправильной дроби, разделив числитель на знаменатель, например, «углом»:

$$\begin{array}{rl|l}
x^5 + 3x^2 + 5 & & x^3 - x \\ \cline{3-3}
\underline{x^5 - x^3 \qquad\qquad} & & x^2 + 1 \\
x^3 + 3x^2 + 5 & & \\
\underline{x^3 - x \qquad\qquad} & & \\
3x^2 + x + 5. & &
\end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^5 + 3x^2 + 5}{x(x^2-1)} = x^2 + 1 + \dfrac{3x^2 + x + 5}{x(x^2-1)}$. Разложим на сумму элементарных дробей правильную дробь:

$$\frac{3x^2 + x + 5}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}. \tag{17.5}$$

Искомое разложение окончательно будет иметь вид

$$R(x) = x^2 + 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}. \ \blacksquare$$

Пример 5. Найти числовые коэффициенты A, B и C в разложении дроби $R(x)$ в примере 4.

Решение. Приведем к общему знаменателю дроби в правой части равенства (17.5) и приравняем числители слева и справа:

$$3x^2 + x + 5 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Полагая последовательно $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{rrcl}
x = 0: & 5 & = & -A, \\
x = -1: & 3 - 1 + 5 & = & C \cdot (-1) \cdot (-2), \\
x = 1: & 3 + 1 + 5 & = & B \cdot 2.
\end{array}$$

Из этой системы найдем $A = -5$, $B = \dfrac{9}{2}$, $C = \dfrac{7}{2}$. Окончательно имеем

$$R(x) = x^2 + 1 - \frac{5}{x} + \frac{9}{2(x-1)} + \frac{7}{2(x+1)}. \ \blacksquare$$

В примерах 6–12 найти интегралы.

Пример 6. $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{2x+1}$.

Решение. Используя подстановку $t = x + \frac{1}{2}$, получим

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C_1 = \\ = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right| + C_1 = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,$$

где $C = -\frac{1}{2}\ln 2 + C_1$. Отметим, что данный интеграл можно сразу привести к табличному, учитывая, что $dx = \frac{1}{2}\,d(2x+1)$, и принимая за новую переменную интегрирования сумму $(2x+1)$, т. е.

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C. \blacksquare$$

Пример 7. $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{(2-3x)^5}$.

Решение. Запишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(2-3x)^5} = \left(-\frac{1}{3}\right)^5 \frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^5}.$$

Введем подстановку $t = x - \frac{2}{3}$. Тогда

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{3^5}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^5} = -\frac{1}{3^5}\int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{3^5}\cdot\frac{-1}{4}\,t^{-4} + C = \frac{1}{12(3x-2)^4} + C.$$

Данный интеграл можно сразу свести к табличному, учитывая, что $dx = -\frac{1}{3}\,d(2-3x)$, и принимая за новую переменную интегрирования разность $(2-3x)$, т. е.

$$\int \frac{dx}{(2-3x)^5} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(2-3x)}{(2-3x)^5} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(3x-2)^4} + C. \blacksquare$$

Пример 8. $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{x^2+5x+7}$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене: $x^2 + 5x + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Введем новую переменную $t = x + \frac{5}{2}$. Отсюда $x = t - \frac{5}{2}$, $dx = dt$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{3}} + C.$$

Данный интеграл можно сразу свести к табличному $\int \frac{dt}{t^2+s^2}$, выделяя в знаменателе полный квадрат и учитывая, что $dx = d\left(x + \frac{5}{2}\right)$. Действительно,

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{3}} + C. \blacksquare$$

Пример 9. $\mathcal{I} = \int \frac{x+1}{2x^2 - x + 2}\, dx$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2 - \frac{1}{2}x + 1}\, dx$.

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 1 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}.$$

Преобразуем числитель и введем новую переменную $t = x - \frac{1}{4}$. Тогда

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{t + \frac{5}{4}}{t^2 + \frac{15}{16}}\, dt = \frac{1}{4} \int \frac{2t\, dt}{t^2 + \frac{15}{16}} + {}$$

$$+ \frac{5}{8} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{15}{16}} = \frac{1}{4} \ln\left(t^2 + \frac{15}{16}\right) + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4t}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

Возвращаясь к переменной x, полагая $t = x - \frac{1}{4}$, окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4} \ln\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right) + \frac{5}{2\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{15}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right) + \frac{5}{2\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{15}}\right) + C. \blacksquare$$

Данный интеграл можно вычислить иначе, выделив в числителе производную знаменателя и разбив затем интеграл на два слагаемых. Запишем

$$\int \frac{x+1}{2x^2-x+2}\,dx = \int \frac{(4x-1)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}{2x^2-x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x-1}{2x^2-x+2}\,dx + \frac{5}{8}\int \frac{5}{x^2-\frac{1}{2}x+1}\,dx.$$

Учитывая, что $(4x-1)dx = d\left(2x^2-x+2\right)$, $x^2-\dfrac{x}{2}+1=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+$ $+\dfrac{15}{16}$, получим

$$\int \frac{x+1}{2x^2-x+2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2-x+2)}{2x^2-x+2} + \frac{5}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-x+2\right| + \frac{5}{2\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot 4}{\sqrt{15}}\right) + C_1,$$

где $C_1 = C - \dfrac{1}{4}\ln 2$. ■

П р и м е р 10. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+3)^2}$.

Р е ш е н и е. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене: $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$. Введем новую переменную $t=x+1$. Отсюда $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда

$$\mathcal{I} = \int \frac{(x+1)-1}{((x+1)^2+2)^2}\,dx = \int \frac{(x+1)\,dx}{((x+1)^2+2)^2} - \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \int \frac{t\,dt}{(t^2+2)^2} -$$
$$- \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} - \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2(t^2+2)} - \mathcal{I}_2,$$

где $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}$. Найдем $\mathcal{I}_2$ по рекуррентной формуле (17.2) при $n=2$ и $s^2=2$:

$$\mathcal{I}_2 = \frac{t}{2\cdot 2(2-1)(t^2+2)} + \frac{2\cdot 2-3}{2(2\cdot 2-2)}\mathcal{I}_1 = \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4}\mathcal{I}_1 =$$
$$= \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Возвращаясь к старой переменной x, полагая $t=x+1$, окончательно получим исходный интеграл в виде

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C. \blacksquare$$

Пример 11. $\mathcal{I} = \int \frac{3x^2+x+5}{x(x^2-1)}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция в примерах 4, 5 разложена на сумму элементарных дробей с числовыми коэффициентами:

$$\frac{3x^2+x+5}{x(x^2-1)} = -\frac{5}{x} + \frac{9}{2(x-1)} + \frac{7}{2(x+1)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{I} = \int\left(-\frac{5}{x} + \frac{9}{2(x-1)} + \frac{7}{2(x+1)}\right)dx =$$
$$= -5\ln|x| + \frac{9}{2}\ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln|x+1| + C. \blacksquare$$

Пример 12. $\mathcal{I} = \int \frac{2x^3+2x^2+3x-3}{x^2+x+1}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция есть неправильная дробь. Выделим целую часть, преобразуя числитель:

$$\frac{2x^3+2x^2+3x-3}{x^2+x+1} = \frac{2x(x^2+x+1)+x-3}{x^2+x+1} = 2x + \frac{x-3}{x^2+x+1}.$$

Проинтегрируем целую часть и правильную дробь:

$$\int\left(2x + \frac{x-3}{x^2+x+1}\right)dx = x^2 + \int\frac{x-3}{x^2+x+1}\,dx.$$

Найдем интеграл в правой части последнего равенства, преобразуя подынтегральную функцию:

$$\int\frac{x-3}{x^2+x+1}dx = \int\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \left|x+\frac{1}{2}=t,\ \ dx=dt\right| =$$
$$= \int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{7\cdot 2}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, полагая $t = x + \frac{1}{2}$, окончательно получим

$$\mathcal{I} = x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Отметим, что целую часть в подынтегральной функции можно было выделить, разделив числитель на знаменатель «углом».

17.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Разложить дробь $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{x(x^2-1)(x^3+1)(x^2+x+1)}$ $(m < 8)$ на сумму элементарных дробей без вычисления коэффициентов.

2. Разложить дробь $R(x) = \dfrac{x+2}{x(x^2+x+3)}$ на сумму элементарных дробей с числовыми коэффициентами.

3. Разложить неправильную дробь $R(x) = \dfrac{3x^4+5x^2+2}{x^2(x^2+2x+4)}$ на сумму многочлена и элементарных дробей без вычисления коэффициентов.

В задачах 4–18 найти интегралы:

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5x}$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^7}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$;

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

8. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x^2-2x+4}$;

9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x^2+x+1}$;

10. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-x+3}\,dx$;

11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-2x+2)^2}$;

12. $\displaystyle\int \frac{x}{27+x^3}\,dx$;

13. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x(x^3+8)}\,dx$;

14. $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x+3}\,dx$;

15. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{2x^2-x+1}\,dx$;

16. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$;

17. $\displaystyle\int \frac{x^3+5}{x(x^2+x+1)}\,dx$;

18. $\displaystyle\int \frac{2x^5\,dx}{(x^2+1)(x^2-4)}$.

§ 18. Интегрирование тригонометрических функций

18.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Определение 18.1. *Многочленом* $P(u,v)$ *относительно двух переменных* u и v называется сумма конечного числа слагаемых вида $a_{mk}u^m v^k$, где $m,\,k \in \mathbf{N}$, $a_{mk} \in \mathbf{R}$, т. е.

$$P_n(u,v) = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n0}u^n + \ldots + a_{0n}v^n.$$

Переменные u и v могут быть функциями независимой переменной x.

Например, если $P(u,v) = u + 3uv^2 - v^3$ и $u = e^x$, $v = x$, то $P(e^x, x) = e^x + 3e^x x^2 - x^3$.

Определение 18.2. Отношение $\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где числитель $P(u,v)$ и знаменатель $Q(u,v)$ — многочлены указанного выше вида, называется *рациональной функцией* относительно переменных u и v и обозначается $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$.

Пусть $R(u,v) = \dfrac{u^2+v^4}{2+u^3v^2}$ и $u = \sin x$, $v = \cos x$. Тогда $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos^4 x}{2+\sin^3 x \cos^2 x}$ — рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Определение 18.3. Функция $R(u,v)$ называется четной относительно u и v, если $R(-u,-v) = R(u,v)$, нечетной относительно u, если $R(-u,v) = -R(u,v)$, нечетной относительно v, если $R(u,-v) = -R(u,v)$.

Так, функция $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\cos x \sin^3 x}$ — четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, функция $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^3 x}$ — нечетная относительно $\sin x$, функция $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin x + 2}$ — нечетная относительно $\cos x$.

Теорема 18.1. Интеграл $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ сводится к интегралу от рациональной функции одного аргумента t.

Доказательство. Пусть $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Отсюда $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$,

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{18.1}$$

Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Учитывая, что $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$, $\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2} = 1$, запишем

$$\sin x = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{18.2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}}{\sin^2 \dfrac{x}{2} + \cos^2 \dfrac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{18.3}$$

Подставим dx, $\sin x$ и $\cos x$ из формул (18.1), (18.2) и (18.3) в интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Тогда интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx =$ $= \int R\Big(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\Big) \dfrac{2}{1+t^2}\, dt = \int r(t)\, dt$, где $r(t)$ — рациональная функция аргумента t. Теорема доказана. ■

Замечание 18.1. Из теорем 18.1 и 17.6 следует, что интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ с помощью универсальной подстановки $t = \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}$ всегда выражается через элементарные функции. Поэтому эту подстановку называют *универсальной.*

Пример 18.1. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 5}$.

Решение. Полагаем $t = \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}$. Используя формулы (18.1)–(18.3), интегрируя и возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{2\, dt}{\left(\dfrac{8t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5\right)(1+t^2)} = \int \frac{2\, dt}{4t^2 + 8t + 6} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + \dfrac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2 + \dfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,(t+1)\sqrt{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C. \ ■$$

Пример 18.2. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sin x}$.

Решение. Вводя подстановку $t = \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}$ и учитывая формулы (18.1), (18.2), получим

$$\mathcal{I} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1 - \dfrac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1 - \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}} + C. \ ■$$

Универсальная подстановка $t = \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}$ может быть использована для нахождения в элементарных функциях любого интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Однако она часто приводит к интегралу от весьма сложной рациональной функции. В отдельных случаях используют приемы, позволяющие быстрее найти исходный интеграл.

18.2. Интегрирование функций, нечетных относительно $\sin x$ или $\cos x$.

Теорема 18.2. Пусть $R(\sin x, \cos x)$ — функция, нечетная относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тогда интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ с помощью подстановки $t = \sin x$ сводится к интегралу от рациональной функции одного аргумента t.

Доказательство. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\cos x$:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x\,dx.$$

Дробь $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ будет четной функцией относительно $\cos x$, так как $\dfrac{R(\sin x, -\cos x)}{-\cos x} = \dfrac{-R(\sin x, \cos x)}{-\cos x} = \dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$. Поэтому эта дробь содержит $\cos x$ лишь в четных степенях. С помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ четные степени $\cos x$ рационально выражаются через $\sin x$. Следовательно, дробь $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ является рациональной функцией от $\sin x$, т. е. $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} = r(\sin x)$. Итак, интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int r(\sin x)\cos x\,dx = \int r(\sin x)\,d\sin x$, так как $\cos x\,dx = d\sin x$. Полагая $\sin x = t$, придем к интегралу от рациональной функции одного аргумента t, т. е. к интегралу $\int r(t)\,dt$. Теорема доказана. ■

Теорема 18.3. Пусть $R(\sin x, \cos x)$ — функция, нечетная относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тогда интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ с помощью подстановки $t = \cos x$ сводится к интегралу от рациональной функции одного аргумента t.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 18.2.

Пример 18.3. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\mathcal{I} = \int \frac{2\sin x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} + \int \frac{\cos x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}.$$

В первом слагаемом подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, во втором слагаемом — нечетна относительно $\cos x$. В первом интеграле используем подстановку $t = \cos x$, во втором — подстановку

$u = \sin x$. Тогда получим

$$\mathcal{I} = -2\int \frac{d\cos x}{3(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x} + \int \frac{d\sin x}{3\sin^2 x + 4(1-\sin^2 x)} =$$
$$= -2\int \frac{dt}{3+t^2} + \int \frac{du}{4-u^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + C =$$
$$= \left|\begin{array}{c} t=\cos x \\ u=\sin x \end{array}\right| = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right| + C. \blacksquare$$

Теоремы 18.2 и 18.3 обычно применяют при интегрировании произведения $\sin^m x \cos^n x$, где $m, n \in \mathbf{N}$ и m или n (или m и n) — нечетные.

Пример 18.4. Найти $\mathcal{I} = \int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$.

Решение. Используем подстановку $t = \sin x$, так как подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$. Учитывая, что $\cos x\, dx = d\sin x = dt$, запишем

$$\mathcal{I} = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int t^4(1-t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\, dt =$$
$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \blacksquare$$

Пример 18.5. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, учитывая, что она нечетна относительно $\sin x$. Имеем

$$\mathcal{I} = \int \sin^3 x \cos^{-\frac{4}{3}} x\, dx = \int \sin^2 x \cos^{-\frac{4}{3}} x \sin x\, dx =$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{4}{3}} x\, d\cos x.$$

Полагая $\cos x = t$, получим

$$\mathcal{I} = -\int \left(1-t^2\right) t^{-\frac{4}{3}}\, dt = -\int \left(t^{-\frac{4}{3}} - t^{\frac{2}{3}}\right) dt =$$
$$= 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x} + C. \blacksquare$$

Теоремы 18.2 и 18.3 могут быть использованы для интегрирования нечетных положительных степеней $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ и $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$. Однако указанные подстановки приводят к громоздким выражениям. В этих случаях часто применяют метод интегрирования по частям.

Пример 18.6. Найти $\mathcal{I} = \int \dfrac{dx}{\cos^3 x}$.

Решение. Способ I. Так как функция $\dfrac{1}{\cos^3 x}$ нечетна относительно $\cos x$, то можно использовать подстановку $t = \sin x$. Сначала преобразуем подынтегральное выражение и введем подстановку $t = \sin x$. Затем разложим дробь на сумму элементарных дробей:

$$\mathcal{I} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2} = \\ = \int \frac{A}{1-t}\, dt + \int \frac{B}{(1-t)^2}\, dt + \int \frac{C}{1+t}\, dt + \int \frac{D}{(1+t)^2}\, dt.$$

Таким образом, исходный интеграл свели к сумме интегралов от элементарных дробей.

Способ II. Учитывая основное тригонометрическое тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, запишем

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin x \sin x\, dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Используя для первого слагаемого метод интегрирования по частям (см. формулу (16.7)), получим

$$\int \sin x \cdot \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x} = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x, & dv = \dfrac{\sin x\, dx}{\cos^3 x} = -\dfrac{d\cos x}{\cos^3 x}, \\ du = \cos x\, dx, & v = \dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{array} \right| = \\ = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \int \frac{1}{2\cos^2 x}\cos x\, dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}.$$

Учитывая формулу 11 табл. 16.1, окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \\ = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C. \quad \blacksquare$$

18.3. Интегрирование функций, четных относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Теорема 18.4. Пусть $R(\sin x, \cos x)$ есть четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Тогда интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$ ($t = \operatorname{ctg} x$) сводится к интегралу от рациональной функции одного аргумента t.

Пример 18.7. Найти $\mathcal{I} = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$. Разделим числитель и знаменатель дроби под интегралом на $\cos^2 x$. Применяя подстановку $t = \operatorname{tg} x$, найдем

$$\mathcal{I} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\sin x}{\cos x} - 1} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}\right| + C. \blacksquare$$

На практике часто встречаются интегралы от произведения $\sin^m x \cos^n x$, где m и n — четные неотрицательные числа. Такие интегралы находят без применения подстановки $t = \operatorname{tg} x$ ($t = \operatorname{ctg} x$), заменяя четные степени синуса и косинуса синусами и косинусами кратных аргументов. Для этого используют известные формулы тригонометрии (формулы понижения степени):

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = \frac{1-\cos 4\alpha}{8}. \tag{18.4}$$

Пример 18.8. Найти $\mathcal{I} = \int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

Решение. Используя формулу (18.4), получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{8}\,(1-\cos 4x)\,dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\,\sin 4x + C. \blacksquare$$

Интегралы от целых (бóльших единицы) степеней $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ и от четных положительных степеней $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ удобнее находить, используя соотношения $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ и $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$.

Пример 18.9. Найти $\mathcal{I} = \int \operatorname{ctg}^5 x\, dx$.

Решение. Выражая $\operatorname{ctg}^2 x$ через $\operatorname{cosec}^2 x$ и учитывая, что $\operatorname{cosec}^2 x\, dx = -d\operatorname{ctg} x$, запишем

$$\mathcal{I} = \int \operatorname{ctg}^3 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\int \operatorname{ctg}^3 x\, d\operatorname{ctg} x - \int \operatorname{ctg}^3 x\, dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \int \operatorname{ctg} x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \int \operatorname{ctg} x\, d\operatorname{ctg} x +$$

$$+ \int \operatorname{ctg} x\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C. \blacksquare$$

Пример 18.10. Найти $\mathcal{I} = \int \sec^8 x\, dx$.

Решение. Используя соотношение $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ и учитывая, что $\sec^2 x\, dx = d\, \operatorname{tg} x$, получим

$$\mathcal{I} = \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^3 \sec^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^3\, d \operatorname{tg} x =$$
$$= \int \left(1 + 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^6 x\right)\, d\operatorname{tg} x =$$
$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \ \blacksquare$$

18.4. Интегрирование произведений синусов и косинусов различных аргументов. При интегрировании произведений вида $\sin px \cos qx$, $\sin px \sin qx$, $\cos px \cos qx$ обычно используют формулы тригонометрии для суммы или разности синусов и косинусов двух углов. Из этих формул следует:

$$\sin px \cos qx = \frac{1}{2}\big(\sin (p+q)x + \sin (p-q)x\big); \tag{18.5}$$
$$\sin px \sin qx = \frac{1}{2}\big(\cos (p-q)x - \cos (p+q)x\big); \tag{18.6}$$
$$\cos px \cos qx = \frac{1}{2}\big(\cos (p-q)x + \cos (p+q)x\big). \tag{18.7}$$

Применение данных формул позволяет заменить интеграл от произведения двух функций суммой двух табличных интегралов.

Пример 18.11. Найти $\mathcal{I} = \int \sin 2x \cos 5x\, dx$.

Решение. Полагая $p = 2$, $q = 5$ в формуле (18.5), найдем

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{2}\big(\sin (2+5)x + \sin (2-5)x\big)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx -$$
$$- \frac{1}{2}\int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C. \ \blacksquare$$

Пример 18.12. Найти $\mathcal{I} = \int \sin 3x \cos 3x \sin x\, dx$.

Решение. Согласно формуле (18.5) при $p = q = 3$ имеем $\sin 3x \cos 3x = \dfrac{1}{2}\sin 6x$. Далее, применяя формулу (18.6) при $p = 6$, $q = 1$, получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{2}\sin 6x \sin x\, dx = \int \frac{1}{4}\big(\cos (6-1)x - \cos (6+1)x\big)\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos 5x\, dx - \frac{1}{4}\int \cos 7x\, dx = \frac{1}{20}\sin 5x - \frac{1}{28}\sin 7x + C. \ \blacksquare$$

Пример 18.13. Найти $\mathcal{I} = \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}\, dx$.

Решение. Используя для произведения $\cos x \cos \frac{x}{2}$ формулу (18.7) при $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$, запишем

$$\mathcal{I} = \int \left(\cos x \cos \frac{x}{2}\right) \cos \frac{x}{4}\, dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos\left(1 - \frac{1}{2}\right) x + \cos\left(1 + \frac{1}{2}\right) x\right) \times$$
$$\times \cos \frac{x}{4}\, dx = \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}\, dx + \frac{1}{2} \int \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{4}\, dx.$$

Еще раз применяя формулу (18.7) к каждому из интегралов, окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4} \int \left(\cos \frac{x}{4} + \cos \frac{3}{4}x\right) dx + \frac{1}{4} \int \left(\cos \frac{5}{4}x + \cos \frac{7}{4}x\right) dx =$$
$$= \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{4}x + \frac{1}{5} \sin \frac{5}{4}x + \frac{1}{7} \sin \frac{7}{4}x + C. \blacksquare$$

18.5. Типовые примеры.

Найти интегралы.

Пример 1. $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{3 + 2\cos x}$.

Решение. Введем подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Учитывая формулы (18.1) и (18.3), запишем

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{3 + \dfrac{2 - 2t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2\, dt}{1 + t^2} = 2 \int \frac{dt}{5 + t^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\mathcal{I} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right) + C. \blacksquare$$

Пример 2. $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 1}$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и используя формулы (18.1), (18.3), найдем

$$\mathcal{I} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{2\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 1} = \int \frac{2(1+t^2)\,dt)}{(1+t^2)\,(4t+3-3t^2-1-t^2)} =$$

$$= -\int \frac{2\,dt}{4t^2-4t-2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-t-\dfrac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{t-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1-\sqrt{3}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1+\sqrt{3}}\right| + C. \ \blacksquare$$

Пример 3. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, так как $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$. Используем подстановку $t = \sin x$. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $1 + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$, $\cos x\,dx = d\sin x = dt$, то

$$\mathcal{I} = \int \frac{(1+\cos^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x}d\sin x = \int \frac{2-t^2}{t^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{2}{t} - t + C = -\frac{2}{\sin x} - \sin x + C. \ \blacksquare$$

Пример 4. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, так как $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$. Полагая $\cos x = t$ и учитывая, что $\sin x\,dx = -d\cos x = -dt$, найдем

$$\mathcal{I} = -\int \cos^2 x \sin^2 x\,d\cos x = -\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)\,d\cos x =$$

$$= -\int t^2(1-t^2)\,dt = -\int (t^2-t^4)\,dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \ \blacksquare$$

Пример 5. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Решение. Преобразуя подынтегральную функцию с помощью основного тригонометрического тождества $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos x\cdot\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$$

Первое слагаемое есть табличный интеграл (см. формулу 12 табл. 16.1). Второй интеграл найдем методом интегрирования по частям, преобразуя подынтегральное выражение:

$$\int \frac{\cos x\, d\sin x}{\sin^3 x} = \int \cos x\, d\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & dv = d\left(-\dfrac{1}{2\sin^2 x}\right), \\ du = -\sin x\, dx, & v = -\dfrac{1}{2\sin^2 x} \end{array} \right| = \cos x \cdot \left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) -$$

$$- \int \left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right)(-\sin x\, dx) = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \int \frac{dx}{2\sin x}.$$

Учитывая формулу 12 табл. 16.1, окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\sin x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C. \quad \blacksquare$$

Пример 6. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin x\cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, так как $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Введем подстановку $t = \operatorname{tg} x$, предварительно разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x$. Так как $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg} x$, то

$$\mathcal{I} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{1 + 4\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{1+4t} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4t)}{1+4t} = \frac{1}{4}\ln|1+4t| + C = \frac{1}{4}\ln|1 + 4\operatorname{tg} x| + C. \quad \blacksquare$$

Пример 7. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\, dx$.

Решение. Используя формулы (18.4) понижения степени, запишем $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \dfrac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$. Тогда

$$\mathcal{I} = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos^2 2x\right)(1 + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos^2 2x + \cos 2x - \cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos^2 2x + \cos 2x\right) dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx.$$

Учитывая, что $\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$, $\cos^3 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\cos^2 2x\,d\sin 2x = \dfrac{1-\sin^2 2x}{2}\cdot d\sin 2x$, получим

$$\mathcal{I} = \frac{1}{8}\int\Bigl(1 - \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos 2x\Bigr)\,dx - \frac{1}{8}\int\frac{1-\sin^2 2x}{2}\,d\sin 2x =$$
$$= \frac{1}{8}\Bigl(x - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\Bigr) + C =$$
$$= \frac{1}{16}\,x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \ \blacksquare$$

Пример 8. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\operatorname{tg}^5 x = \operatorname{tg}^3 x\cdot\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^3 x\,(\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg}^3 x\cdot\sec^2 x - \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}^2 x =$$
$$= \operatorname{tg}^3 x\cdot\sec^2 x - \operatorname{tg} x\,(\sec^2 x - 1) = (\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x)\sec^2 x + \operatorname{tg} x.$$

Так как $\sec^2 x\,dx = d\operatorname{tg} x$, то

$$\mathcal{I} = \int\bigl((\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x)\sec^2 x + \operatorname{tg} x\bigr)\,dx = \int(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x)\ d\operatorname{tg} x +$$
$$+ \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C. \ \blacksquare$$

Пример 9. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

Решение. Запишем подынтегральную функцию в виде $\operatorname{ctg}^4 x = \operatorname{ctg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)$. Учитывая, что $\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -d\operatorname{ctg} x$, найдем

$$\mathcal{I} = -\int\operatorname{ctg}^2 x\,d\operatorname{ctg} x - \int\operatorname{ctg}^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x -$$
$$- \int(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\ dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C. \ \blacksquare$$

Пример 10. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \cos 3x\sin 7x\,dx$.

Решение. Используя формулу (18.5) при $p = 7$, $q = 3$, запишем $\cos 3x\sin 7x = \dfrac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x)$. Тогда

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int(\sin 10x + \sin 4x)dx = \frac{1}{2}\Bigl(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{4}\cos 4x\Bigr) + C =$$
$$= -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{8}\cos 4x + C. \ \blacksquare$$

Пример 11. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \cos x\cos\frac{x}{2}\ dx$.

Решение. Применяя формулу (18.7) при $p = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$, будем иметь

$$\cos x \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3}{2}x\right).$$

Следовательно,

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int \left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3}{2}x\right)dx = \\ = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x\right) + C = \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x + C. \blacksquare$$

Пример 12. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \sin x \sin 11x \sin 4x\, dx.$

Решение. Используем формулу (18.6) при $p = 1$, $q = 11$ для произведения первых двух сомножителей в подынтегральной функции. Тогда $\sin x \sin 11x = \dfrac{1}{2}\big(\cos(-10x) - \cos 12x\big) = \dfrac{1}{2}\big(\cos 10x - - \cos 12x\big)$. Перепишем интеграл $\mathcal{I}$ в виде

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int \big(\cos 10x - \cos 12x\big)\sin 4x\, dx = \\ = \frac{1}{2}\int \big(\cos 10x \sin 4x - \cos 12x \sin 4x\big)\, dx.$$

Применяя формулу (18.5) к каждому из произведений в подынтегральной функции, получим

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4}\int\big(\sin 14x + \sin(-6x) - \sin 16x - \sin(-8x)\big)\, dx = \\ = \frac{1}{4}\int\big(\sin 14x - \sin 6x - \sin 16x + \sin 8x\big)\, dx = \\ = -\frac{1}{56}\cos 14x + \frac{1}{24}\cos 6x + \frac{1}{64}\cos 16x - \frac{1}{32}\cos 8x. \blacksquare$$

18.6. Задачи для самостоятельного решения.

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 - \sin x}\, dx;$ **2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 4\sin^2 x};$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin 3x + \cos 3x};$ **4.** $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\, dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt[3]{\cos x}}\, dx;$ **6.** $\displaystyle\int \frac{dx}{16\cos^2 x - \sin^2 x};$

7. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x + \sin 2x}{1 + \cos x}\, dx;$ **8.** $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin x + 5};$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$; **10.** $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 3x \sin^2 3x}$; **12.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

13. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}\, dx$; **14.** $\displaystyle\int \sin 5x \cos \frac{x}{2}\, dx$;

15. $\displaystyle\int \sin x \sin 6x\, dx$.

§ 19. Интегрирование некоторых иррациональных функций

19.1. Интегрирование функций, рациональных относительно аргумента и корня из дробно-линейной функции.

Теорема 19.1. Интеграл вида $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$, рационализируется, т. е. приводится к интегралу от рациональной функции одного аргумента t, подстановкой $t = \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Доказательство. Пусть $t = \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Тогда $t^n = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. Отсюда

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, \quad dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}\right) dt = \left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}\right)' \cdot dt.$$

Перепишем интеграл в виде

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx = \int R\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, t\right)\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}\right)' dt = \int r(t)\, dt,$$

где $r(t)$ — рациональная функция аргумента t. Теорема доказана. ■

В частности, интеграл $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\alpha x+\beta}\right) dx$ рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{\alpha x+\beta}$.

Понятия многочлена $P(u, v)$ и рациональной функции $R(u, v)$ относительно двух переменных u и v можно обобщить на случай трех и большего числа переменных.

Теорема 19.2. Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx,$$

где $p, \ldots, r, q, \ldots, s \in \mathbf{N}$, рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, где n — наименьшее общее кратное чисел $q, \ldots, s$.

Пример 19.1. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}$.

Решение. Так как в данном случае $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{1}{2}$, то $q = 3$, $s = 2$, $n = 6$. Используем подстановку $t = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$. Тогда $2x+1 = t^6$, $x = \dfrac{1}{2}(t^6-1)$, $dx = 3t^5\,dt$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = \\ = 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{3t^2}{2} + 3t + 3\ln|t-1| + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x и полагая $t = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$, получим

$$\mathcal{I} = \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}} + 3(2x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}} - 1\right| + C. \ \blacksquare$$

19.2. Интегрирование функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена. Интегралы $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ имеют широкое практическое применение. Рассмотрим некоторые интегралы, принадлежащие к указанному виду.

1°. Пусть $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Данный интеграл можно свести к интегралу 15 или 16 табл. 16.1, если предварительно выделить полный квадрат в квадратном трехчлене.

Пример 19.2. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен, выделяя полный квадрат: $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$. Учитывая формулу 16 табл. 16.1, получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C. \ \blacksquare$$

П р и м е р 19.3. Найти $\mathcal{I} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем подкоренное выражение и выделим полный квадрат:

$$-3x^2+4x-1 = -3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right) = -3\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -3\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right) = 3\left(\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right).$$

Используя формулу 15 табл. 16.1, найдем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right) + C. \ \blacksquare$$

2°. Пусть $\mathcal{I} = \int \dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad (M,\ N\in\mathbf{R},\ \ M\neq 0)$.

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и разложим интеграл на сумму двух интегралов. Используя в первом слагаемом метод подведения под знак дифференциала, получим

$$\mathcal{I} = \int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int\frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+N-\frac{Mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \int\frac{N-\frac{Mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первое слагаемое содержит интеграл 2 табл. 16.1 при $t = ax^2+bx+c$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, второе слагаемое есть интеграл, рассмотренный в п. 1°.

П р и м е р 19.4. Найти $\mathcal{I} = \int\dfrac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$5x-3 = (4x+8)\,\frac{5}{4} - 10 - 3 = \frac{5}{4}\,(4x+8) - 13.$$

Следовательно,

$$\mathcal{I} = \frac{5}{4}\int \frac{(4x+8)\,dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+1)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C. \blacksquare$$

3°. Пусть $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

Данный интеграл с помощью «обратной подстановки» $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$ сводится к интегралу, рассмотренному в п. 1°.

Пример 19.5. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение. Полагаем $t = \dfrac{1}{x}$. Тогда $x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$. Подставляя x и dx в данный интеграл, интегрируя и возвращаясь к старой переменной x, найдем

$$\mathcal{I} = -\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} =$$

$$= -\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+4}} = -\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right| + C. \blacksquare$$

Пример 19.6. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{(3x+4)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$.

Решение. Выделим из линейной функции в числителе двучлен $x+1$:

$$\mathcal{I} = \int \frac{3(x+1)+1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx.$$

Разложим интеграл на сумму двух слагаемых:

$$\mathcal{I} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} + \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

В первом слагаемом интеграл $\mathcal{I}_1$ сведем к табличному:

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} = \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \\ = \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + C_1.$$

Во втором слагаемом используем «обратную подстановку», полагая $t = \dfrac{1}{x+1}$. Тогда $x+1 = \dfrac{1}{t}$, $x = \dfrac{1}{t} - 1$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$. Интеграл $\mathcal{I}_2$ запишем в виде

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = -\int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t-1}\right)+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\,\right| + C_2 =$$

$$= \left|t = \frac{1}{x+1}\right| = -\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\,\right| + C_2.$$

Так как $\mathcal{I} = 3\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$, то окончательно получим

$$\mathcal{I} = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\,\right| - \ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\,\right| + C,$$

где $C = 3C_1 + C_2$. ■

4°. Пусть $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Доказано, что этот интеграл может быть представлен в виде

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (19.1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — постоянная.

Интеграл указанного вида находят с помощью метода неопределенных коэффициентов по следующей схеме. Записывают равенство (19.1), в котором коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и множитель λ подлежат определению. Дифференцируют обе части этого равенства, приводят полученное выражение к общему знаменателю и приравнивают числители. Затем, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях полученного равенства, составляют систему уравнений, их которой определяют коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ. Интеграл в правой части равенства (19.1) рассмотрен в п. 1°.

Указанный метод обычно применяют в случае, когда степень многочлена $n \geqslant 2$. Случаи, когда $n = 0,\ 1$, рассмотрены в пп. 1°, 2°.

Пример 19.7. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

Решение. Так как $n = 3$, то равенство (19.1) имеет вид

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

где коэффициенты A, B, C и число λ подлежат определению. Дифференцируя обе части этого равенства, получим

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2} + (Ax^2+Bx+C)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^3+2x^2+3x+4 = (2Ax+B)(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+C)(x+1) + \lambda,$$

или

$$x^3+2x^2+3x+4 = 3Ax^3 + (5A+2B)x^2 + (4A+3B+C)x + (2B+C+\lambda).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C и числа λ:

$$\begin{array}{lrcl} x^3: & 1 &=& 3A,\\ x^2: & 2 &=& 5A+2B,\\ x^1: & 3 &=& 4A+3B+C,\\ x^0: & 4 &=& 2B+C+\lambda. \end{array}$$

Из этой системы определим $A = \dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{1}{6}$, $C = \dfrac{7}{6}$, $\lambda = \dfrac{5}{2}$.

Учитывая, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,\right|,$$

окончательно получим для исходного интеграла

$$\mathcal{I} = \left(\frac{1}{3}\,x^2+\frac{1}{6}\,x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+ \\ +\frac{5}{2}\,\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,\right|+C. \blacksquare$$

В пп. 1°–4° были рассмотрены некоторые частные интегралы $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, приводимые к табличным. Рассмотрим интеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ в общем виде. Квадратный корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ можно преобразовать путем выделения полного квадрата в подкоренном выражении и замены переменной к одному из трех видов: $\sqrt{m^2-u^2}$, $\sqrt{m^2+u^2}$, $\sqrt{u^2-m^2}$. Таким образом, интеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ после указанных преобразований будет принадлежать одному из следующих типов:

$$\mathcal{I}_1 = \int R_1\left(u,\sqrt{m^2-u^2}\right)\,du;\quad \mathcal{I}_2 = \int R_2\left(u,\sqrt{m^2+u^2}\right)\,du;$$
$$\mathcal{I}_3 = \int R_3\left(u,\sqrt{u^2-m^2}\right)\,du.$$

Теорема 19.3. Интеграл $\mathcal{I}_1 = \int R_1\left(u,\sqrt{m^2-u^2}\right)du$ подстановкой $u=m\sin t$ (или $u=m\cos t$) сводится к интегралу от функции, рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Доказательство. Пусть $u=m\sin t$, $m>0$. Тогда $\sqrt{m^2-u^2} = m\cos t$, $du=m\cos t\,dt$. Следовательно,

$$\mathcal{I}_1 = \int R_1(m\sin t, m\cos t)m\cos t\,dt = \int r_1(\sin t,\cos t)\,dt,$$

где $r_1(\sin t,\cos t)$ — рациональная функция своих аргументов. $\blacksquare$

Теорема 19.4. Интеграл $\mathcal{I}_2 = \int R_2\left(u,\sqrt{m^2+u^2}\right)du$ подстановкой $u=m\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u=m\,\mathrm{ctg}\,t$) сводится к интегралу от функции, рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Доказательство. Пусть $u=m\,\mathrm{tg}\,t$, $m>0$. Тогда $\sqrt{m^2+u^2} = m\sec t$, $du=m\,\mathrm{tg}\,t\sec^2 t\,dt$. Поэтому

$$\mathcal{I}_2 = \int R_2(m\,\mathrm{tg}\,t, m\sec t)m\sec^2 t\,dt = \int r_2(\sin t,\cos t)\,dt,$$

где $r_2(\sin t, \cos t)$ — рациональная функция своих аргументов. ■

Теорема 19.5. Интеграл $\mathcal{I}_3 = \int R_3\left(u, \sqrt{u^2 - m^2}\right) du$ подстановкой $u = m \sec t$ (или $u = m \operatorname{cosec} t$) сводится к интегралу от функции, рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Доказательство. Пусть $u = m \sec t$, $m > 0$. Тогда $\sqrt{u^2 - m^2} = m \operatorname{tg} t$, $du = m \sec t \operatorname{tg} t \, dt$. Следовательно,

$$\mathcal{I}_3 = \int R_3(m \sec t, m \operatorname{tg} t) m \operatorname{tg} t \sec t \, dt = \int r_3(\sin t, \cos t) \, dt,$$

где $r_3(\sin t, \cos t)$ — рациональная функция своих аргументов.

Как было установлено выше (см. замечание 18.1), интегралы от функций, рациональных относительно $\sin t$ и $\cos t$, выражаются через элементарные функции. Таким образом, доказано, что любой интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ может быть выражен через элементарные функции. ■

Пример 19.8. Найти $\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx$.

Решение. Полагаем $x = a \sin t$. Тогда $dx = a \cos t \, dt$. Используя формулы 6 и 12 табл. 16.1, запишем

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}{a \sin t} a \cos t \, dt =$$
$$= a \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} \, dt = a \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \, dt = a \int \frac{dt}{\sin t} - a \int \sin t \, dt =$$
$$= a \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + a \cos t + C.$$

Учитывая, что $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, $\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{1 - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{\frac{x}{a}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, окончательно получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx = a \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C. \ ■$$

Пример 19.9. Найти $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Решение. Введем замену переменной $x = a \operatorname{tg} t$. Отсюда $dx = a \sec^2 t \, dt$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \sec^2 t \, dt}{a \operatorname{tg} t \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg} t}} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec^2 t \, dt}{\operatorname{tg} t \sec t} =$$
$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sec t}{\operatorname{tg} t} \, dt = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C.$$

Так как $\operatorname{tg} t = \dfrac{x}{a}$, $\operatorname{ctg} t = \dfrac{a}{x}$, $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$, то в результате получим

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right| + C. \ \blacksquare$$

Пример 19.10. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решение. Полагая $x = a\sec t$, будем иметь $dx = a\sec t\operatorname{tg} t\,dt$. Тогда

$$\mathcal{I} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a^2\sec^2 t a\sec t\operatorname{tg} t}{\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}}\,dt = a^2\int \sec^3 t\,dt.$$

В примере 18.6 был найден интеграл

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \sec^3 t\,dt = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg} t| + C.$$

Очевидно, что

$$\sec t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{a}{x}, \quad \sin t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

После перехода к старой переменной x окончательно найдем исходный интеграл:

$$\mathcal{I} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg} t| + C =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C. \ \blacksquare$$

19.3. Типовые примеры.

Найти интегралы.

Пример 1. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

Решение. Полагаем $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Выразим x через t. Имеем $t^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$, $(x+1)t^2 = x-1$, $(t^2-1)x = -t^2-1$. Отсюда $x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$. Тогда

$$dx = \frac{2t(1-t^2)-(-2t)(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{2t(1-t^2+1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,dt\,\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Интеграл перепишем в виде

$$\mathcal{I} = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{t\cdot 4t}{(1-t^2)^2}\,dt = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\,dt =$$
$$= 4\int \frac{t^2}{(1+t^2)(1-t)(1+t)}\,dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму элементарных дробей:

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

где коэффициенты A, B, C, D подлежат определению. Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$t^2 = A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2). \qquad (19.2)$$

Полагая в этом равенстве последовательно $t=1$, $t=-1$, $t=0$, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, D:

$$\begin{aligned} t &= 1: & 1 &= 4A,\\ t &= -1: & 1 &= 4B,\\ t &= 0: & 0 &= A+B+D. \end{aligned}$$

Из этой системы определим $A = B = \dfrac{1}{4}$, $D = -(A+B) = -\dfrac{1}{2}$. Далее сравним коэффициенты при t^3 слева и справа в равенстве (19.2): $0 = A - B - C$. Отсюда найдем $C = A - B = 0$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = 4\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} - \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}\right)dt = \int\frac{dt}{1-t} + \int\frac{dt}{1+t} - 2\int\frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= -\ln|1-t| + \ln|1+t| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x и полагая $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, окончательно получим:

$$\mathcal{I} = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C. \ \blacksquare$$

Пример 2. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

Решение. Введем подстановку $t = \sqrt{x-1}$. Отсюда $x = t^2 + 1$, $dx = 2t\,dt$. Подставляя x и dx в подынтегральное выражение и интегрируя, запишем

$$\mathcal{I}=\int\frac{(t^2+1)^3 2t\,dt}{t}=2\int\left(t^2+1\right)^3 dt=2\int\left(t^6+3t^4+3t^2+1\right)dt=$$
$$=2\left(\frac{1}{7}t^7+\frac{3}{5}t^5+\frac{3}{3}t^3+t\right)+C=\frac{2}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+2t^3+2t+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, учитывая, что $t=\sqrt{x-1}$, окончательно получим

$$\mathcal{I}=\frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+2(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C. \blacksquare$$

Пример 3. $\mathcal{I}=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Так как подынтегральная функция рациональна относительно $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$, то используем подстановку $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$. Подставим выражения для x и dx в интеграл $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3}{t-1}\,dt.$$

Подынтегральная функция есть неправильная дробь, которая после выделения целой части примет вид

$$\frac{t^3}{t-1}=\frac{t^3-1+1}{t-1}=\frac{t^3-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}=t^2+t+1+\frac{1}{t-1}.$$

Подставляя это разложение в интеграл $\mathcal{I}$ и интегрируя, будем иметь

$$\mathcal{I}=6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=6\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+\ln|t-1|\right)+C=$$
$$=6\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C=$$
$$=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C. \blacksquare$$

Пример 4. $\mathcal{I}=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+2}\left(1+\sqrt[4]{x+2}\right)^3}$.

Решение. Полагая $x+2=t^4$, найдем $x=t^4-2$, $dx=4t^3\,dt$. Учитывая, что $t=\sqrt[4]{x+2}$, получим

$$\mathcal{I}=4\int\frac{t^3\,dt}{t^2(1+t)^3}=4\int\frac{t+1-1}{(1+t)^3}\,dt=4\int\frac{dt}{(1+t)^2}-4\int\frac{dt}{(1+t)^3}=$$
$$=-\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}+C=-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x+2}}+\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x+2})^2}+C. \blacksquare$$

Пример 5. $\mathcal{I}=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене, сведем данный интеграл к интегралу 16 табл. 16.1:

$$\mathcal{I} = \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}} = \left| t = x + \frac{3}{2} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{25}{4}}} =$$

$$= \ln\left| t + \sqrt{t^2 - \frac{25}{4}} \right| + C = \ln\left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x-4} \right| + C. \ \blacksquare$$

Пример 6. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx.$

Решение. Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня в знаменателе. Затем разобьем интеграл на два слагаемых. Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении второго слагаемого, запишем

$$\mathcal{I} = \int \frac{(2x+1)\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3}{\sqrt{x^2+x+2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}} +$$

$$+ \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}} + \frac{5}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}}.$$

Оба интеграла являются табличными (см. формулы 2 и 16 табл. 16.1): первый — $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C \ \left(t = x^2+x+2\right)$, второй — $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+a^2}\right| + C \ \left(t = x + \frac{1}{2},\ a^2 = \frac{7}{4}\right)$. Окончательно получим

$$\mathcal{I} = \sqrt{x^2+x+2} + \frac{5}{2}\ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2} \right| + C. \ \blacksquare$$

Пример 7. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+4}}.$

Решение. В данном случае сведем интеграл к табличному с помощью «обратной подстановки» $t = \dfrac{1}{x}$. Отсюда $x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}\, dt$. Подставляя x и dx в интеграл, интегрируя и возвращаясь к старой переменной x, будем иметь

$$\mathcal{I} = \int \frac{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{8}{t} + 4}} = -\int \frac{t\,dt}{t\sqrt{4t^2+8t+1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(t+1)}{\sqrt{(t+1)^2-\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+1+\sqrt{t^2+2t+\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= \left|t = \frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+2+\sqrt{x^2+8x+4}}{2x}\right| + C. \ \blacksquare$$

Пример 8. $\mathcal{I} = \int \dfrac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}$.

Решение. Введем «обратную подстановку» $t = \dfrac{1}{x+2}$. Тогда $x+2 = \dfrac{1}{t}$, $x = \dfrac{1}{t} - 2$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, $x^2+4x+3 = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{4}{t} + 4 + \dfrac{4}{t} - 8 + 3 = \dfrac{1}{t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{t^2}$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C =$$

$$= \left|t = \frac{1}{x+2}\right| = -\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right) + C. \ \blacksquare$$

Пример 9. $\mathcal{I} = \int \dfrac{3x^2+2x+1}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx$.

Решение. Используем равенство (19.1). В данном случае $P_2(x) = 3x^2+2x+1$, $Q_1(x) = Ax+B$. Следовательно,

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{-x^2+4x+2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{-x^2+4x+2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+2}}, \quad (19.3)$$

где коэффициенты A, B и λ подлежат определению. Дифференцируя это равенство, получим $\dfrac{3x^2+2x+1}{\sqrt{-x^2+4x+2}} = A\sqrt{-x^2+4x+2} + \dfrac{(Ax+B)(-2x+4)}{2\sqrt{-x^2+4x+2}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{-x^2+4x+2}}$.

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$3x^2+2x+1 = A(-x^2+4x+2) + (Ax+B)(-x+2) + \lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B и λ:

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad 3 = -2A, \\ x^1 &: \quad 2 = 4A + 2A - B, \\ x^0 &: \quad 1 = 2A + 2B + \lambda. \end{aligned}$$

Из этой системы определим $A = -\dfrac{3}{2}$, $B = 6A - 2 = -11$, $\lambda = 1 - 2A - 2B = 26$. Подставляя найденные значения A, B и λ в равенство (19.3) и преобразуя подынтегральное выражение в интеграле справа, окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \left(-\frac{3}{2}x - 11\right)\sqrt{-x^2+4x+2} + 26\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{6-(x-2)^2}} =$$
$$= \left(-\frac{3}{2}x - 11\right)\sqrt{-x^2+4x+2} + 26\arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + C. \blacksquare$$

Пример 10. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

Решение. Записывая интеграл с помощью равенства (19.1) и учитывая, что $P_3(x) = x^3$, $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, получим

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} =$$
$$= (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x-1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}. \quad (19.4)$$

Дифференцируем равенство (19.4):

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2x-1}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x-1} +$$
$$+ \frac{(Ax^2+Bx+C)(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x-1}}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^3 = (2Ax+B)(x^2+2x-1) + (Ax^2+Bx+C)(x+1) + \lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, составим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C, λ:

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad 1 = 2A + A, \\ x^2 &: \quad 0 = 4A + B + A + B, \\ x^1 &: \quad 0 = -2A + 2B + B + C, \\ x^0 &: \quad 0 = -B + C + \lambda. \end{aligned}$$

Из этой системы находим $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{5}{6}$, $C = \dfrac{19}{6}$, $\lambda = \dfrac{1}{4}$. Подставляя найденные значения A, B, C и λ в равенство (19.4) и преобразуя подкоренное выражение в интеграле справа, окончательно получим

$$\mathcal{I} = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{19}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-2}} =$$

$$= \frac{2x^2-5x+19}{6}\sqrt{x^2+2x-1} + \frac{1}{4}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right| + C. \blacksquare$$

Пример 11. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Полагаем $x = 2\sin t$. Подставляя $x = 2\sin t$ и $dx = 2\cos t\,dt$ в данный интеграл и преобразуя подынтегральную функцию, найдем

$$\mathcal{I} = \int \frac{2\cos t\,dt}{(4\sin^2 t - 3)2\cos t} = \int \frac{dt}{4\sin^2 t - 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{4\sin^2 t - 3(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \int \frac{dt}{\sin^2 t - 3\cos^2 t}.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле четна относительно $\sin t$ и $\cos t$ и, следовательно, может быть выражена через $\operatorname{tg} t = u$ (см. теорему 18.3). Разделим числитель и знаменатель дроби под интегралом на $\cos^2 t$:

$$\mathcal{I} = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - 3} = \int \frac{d(\operatorname{tg} t)}{\operatorname{tg}^2 t - 3} = \left|\operatorname{tg} t = u\right| =$$

$$= \int \frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Вернемся к переменной x, учитывая, что $\sin t = \dfrac{x}{2}$, $u = \operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}} = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Окончательно получим исходный интеграл в виде

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3(4-x^2)}}{x+\sqrt{3(4-x^2)}}\right| + C. \blacksquare$$

Пример 12. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})}$.

Решение. Введем замену переменной $x = \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$, $1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} t + \dfrac{1}{\cos t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t\, dt}{\sin t + 1} = \int \frac{d(\sin t + 1)}{\sin t + 1} = \ln|\sin t + 1| + C.$$

Учитывая, что

$$\sin t + 1 = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + 1 = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}},$$

окончательно найдем

$$\mathcal{I} = \ln\left|\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}\right| + C. \blacksquare$$

Пример 13. $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\, dx$.

Решение. Полагаем $x = \sec t = \dfrac{1}{\cos t}$. Подставляя в интеграл $\mathcal{I}$ $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \operatorname{tg} t$, получим

$$\mathcal{I} = \int \cos t \operatorname{tg} t \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt = \operatorname{tg} t - t + C.$$

Так как $\cos t = \dfrac{1}{x}$, $t = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\operatorname{tg} t = \sqrt{x^2 - 1}$, то в итоге будем иметь

$$\mathcal{I} = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

Пример 14. Найти $\mathcal{I} = \displaystyle\int \sqrt{1 - 2x - x^2}\, dx$.

Решение. Способ I. Преобразуем подкоренное выражение:

$$1 - 2x - x^2 = 2 - (x + 1)^2.$$

Обозначим $x + 1 = \sqrt{2}\sin t$, где t — новая переменная интегрирования. Тогда $dx = \sqrt{2}\cos t\, dt$, $\sqrt{1 - 2x - x^2} = \sqrt{2 - (x + 1)^2} = \sqrt{2 - 2\sin^2 t} = \sqrt{2}\cos t$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{2}\cos t \sqrt{2}\cos t\, dt = \int 2\cos^2 t\, dt = \int (1 + \cos 2t)\, dt = t + \frac{\sin 2t}{2} + C.$$

Очевидно, что

$$\sin t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}, \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{\sqrt{2}} = (x+1)\sqrt{1-2x-x^2}.$$

Учитывая, что $t = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$, в результате получим

$$\mathcal{I} = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\,(x+1)\sqrt{1-2x-x^2} + C.$$

Способ II. Переведем иррациональность под интегралом в знаменатель и, используя метод неопределенных коэффициентов, запишем

$$\mathcal{I} = \int \frac{1-2x-x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{1-2x-x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = A\sqrt{1-2x-x^2} + \frac{(Ax+B)(-2-2x)}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$1-2x-x^2 = A(1-2x-x^2) + (Ax+B)(-1-x) + \lambda.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{aligned} x^2:&\quad -1 = -A - A,\\ x^1:&\quad -2 = -2A - A - B,\\ x^0:&\quad \;\;\,1 = A - B + \lambda. \end{aligned}$$

Из этой системы определим $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$, $\lambda = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} =$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C. \quad \blacksquare$$

Замечание 19.1. Интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($n \in \mathbf{N}$; $n > 1$, случай $n = 1$ рассмотрен выше) с помощью «обратной подстановки» $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$ сводится к интегралу $\displaystyle\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}}$. Последний интеграл можно найти, используя соответствующую тригонометрическую подстановку или метод неопределенных коэффициентов.

Пример 15. Найти $\mathcal{I} = \int \dfrac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Решение. Введем новую переменную $t = \dfrac{1}{x-1}$. Отсюда $x-1 = \dfrac{1}{t}$, $x = 1 + \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, $x^2 - 2x - 1 = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^2 - 2\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) - 1 = 1 + \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t^2} - 2 - \dfrac{2}{t} - 1 = \dfrac{1}{t^2} - 2 = \dfrac{1-2t^2}{t^2}$. Тогда

$$\mathcal{I} = -\int \frac{t^3 \cdot t}{t^2\sqrt{1-2t^2}}\, dt = -\int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1-2t^2}}. \tag{19.5}$$

Преобразуем подынтегральную функцию в интеграле справа:

$$-\int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1-2t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\dfrac{1}{2} - t^2}}.$$

Используем тригонометрическую подстановку, полагая $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin u$. Тогда $dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos u\, du$, $\dfrac{1}{2} - t^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin^2 u = \dfrac{1}{2}\cos^2 u$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\dfrac{1}{2}\sin^2 u\, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos u}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos u}\, du = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \sin^2 u\, du =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int (1 - \cos 2u)\, du = -\frac{1}{4\sqrt{2}} u + \frac{1}{8\sqrt{2}} \sin 2u + C.$$

Очевидно, что $u = \arcsin\left(\sqrt{2}\, t\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x-1}\right)$, $\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2t\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-2t^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{x-1}\sqrt{1 - \dfrac{2}{(x-1)^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^2}$. Окончательно получим

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x-1}\right) + \frac{1}{4}\, \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^2} + C. \ \blacksquare$$

Отметим, что интеграл в правой части равенства (19.5) можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов.

19.4. Задачи для самостоятельного решения.

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\left(1+\sqrt{x-2}\right)}$;

4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{(1-x)}$;

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$;

7. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;

8. $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$;

9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2-4x+10}}$;

10. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$;

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$;

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$;

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

16. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$;

18. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$;

19. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$;

20. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}$;

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$;

22. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$;

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$;

24. $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$;

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$;

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}}$;

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$;

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

Как было отмечено в гл. I, производные всех элементарных функций также являются элементарными функциями. Иначе, операция дифференцирования не выводит функции из класса элементарных функций. В отличие от дифференцирования интегрирование элементарных функций не всегда приводит к функциям того же класса.

Доказано, что существуют интегралы от элементарных функций, не выражаемые через элементарные функции (так называемые «неберущиеся» интегралы). К таким интегралам относятся, например, следующие:

1) $\int e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона;

2) $\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм;

3) $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ — интегральный синус;

4) $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ — интегральный косинус;

5) $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$ — интегралы Френеля;

6) $\int R\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right)dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 3$.

При $n = 3, 4$ интеграл (6) называется эллиптическим, при $n > 4$ — гиперэллиптическим. Если интеграл (6) в частном случае удается выразить через элементарные функции, то его называют псевдоэллиптическим.

Важно отметить, что все эти интегралы реально существуют как интегралы от непрерывных функций и представляют собой неэлементарные «специальные» функции. Эти функции находят широкое применение в теоретических и прикладных задачах. Так, интеграл Пуассона используется в теории вероятностей, статистической физике, в теориях теплопроводности и диффузии, интегралы Френеля — в оптике. Приведенные интегралы хорошо изучены, для них составлены таблицы и графики.

В гл. III рассмотрены лишь некоторые классы функций, интегрируемых в элементарных функциях. Изложенные методы интегрирования позволяют путем различных преобразований свести исходный интеграл к табличным интегралам (см. табл. 16.1). Однако эта таблица содержит небольшое число интегралов. При решении прикладных задач, связанных с интегрированием сложных функций, используют более полные таблицы, включенные в специальные справочники.

Г Л А В А IV

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 20. Основные определения и свойства числовых рядов

20.1. Основные определения.

Определение 20.1. Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\} = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{20.1}$$

называют *числовым рядом* (или просто *рядом*), числа $u_1, u_2, \ldots$ — *членами ряда,* u_n — *общим членом ряда.*

Ряд (20.1) обозначают символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и пишут

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Например, рядами будут следующие выражения:

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n;$

2) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^{n-1}} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}\,.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ считается заданным, если задан общий член ряда u_n как функция его номера n, т. е. $u_n = f(n)$.

Пример 20.1. Записать ряд, используя формулу общего члена u_n, если 1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; 2) $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; 3) $u_n = (-1)^n$.

Решение. 1) В случае $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ имеем

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

2) При $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ получим

$$3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + 3\cdot 2^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 2^{n-1}.$$

3) Если $u_n = (-1)^n$, то ряд имеет вид

$$-1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \ \blacksquare$$

Пример 20.2. По заданному общему члену ряда $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ найти u_2, u_5 и отношение последующего члена u_{n+1} к предыдущему u_n при любом n, т. е. найти дробь $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Решение. Полагая в общем члене ряда u_n последовательно $n = 2$, $n = 5$, получим

$$u_2 = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}, \qquad u_5 = \frac{5}{5^2+1} = \frac{5}{26}.$$

Заменяя n на $n+1$ в общем члене ряда u_n, найдем $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1}$. Тогда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n}. \ \blacksquare$$

Пример 20.3. Зная общий член ряда $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}$, найти отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Решение. Запишем

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2^{n+1}}.$$

Для отношения $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ будем иметь

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{2n+1}{2}. \ \blacksquare$$

Пример 20.4. Записать хотя бы одну формулу общего члена ряда, если известны первые пять членов ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$$

Решение. Из вида знаменателей дробей заключаем, что $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$. Действительно,

$$u_1 = \frac{1}{1\cdot(1+2)} = \frac{1}{1\cdot 3}, \quad u_2 = \frac{1}{2\cdot(2+2)} = \frac{1}{2\cdot 4} \quad \text{и т. д.} \ \blacksquare$$

Пример 20.5. Записать первые три члена для каждого из рядов:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^3};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Решение. 1) В случае $u_n = \dfrac{n^2}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$ имеем

$$u_1 = \frac{1}{2},\quad u_2 = \frac{2^2}{2\cdot 4} = \frac{1}{2},\quad u_3 = \frac{3^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}.$$

2) При $u_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^3}$ получим

$$u_1 = \frac{\cos\pi}{1^3} = -1,\quad u_2 = \frac{\cos 2\pi}{2^3} = \frac{1}{8},\quad u_3 = \frac{\cos 3\pi}{3^3} = -\frac{1}{27}.$$

3) При $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ будем иметь

$$u_1 = \frac{2^1}{1!} = 2,\quad u_2 = \frac{2^2}{2!} = 2,\quad u_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.\ ■$$

Определение 20.2. *Частной* (или *частичной*) *суммой* S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сумма первых n членов ряда, т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ имеем

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2};\quad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Каждому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ соответствует последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм. Обратно, всякую последовательность чисел $\{S_n\}$ можно рассматривать как последовательность частных сумм некоторого ряда, а именно ряда

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) + \ldots,$$

где $u_1 = S_1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$.

Пример 20.6. Дана последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$. Составить ряд, для которого эта последовательность служит последовательностью его частных сумм.

Решение. По условию $S_n = \dfrac{n}{n+2}$. Находим $u_1 = S_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = S_2 - S_1 = \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$; $u_3 = S_3 - S_2 = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n-1+2} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n^2+n-n^2-2n+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

Следовательно, искомый ряд имеет вид

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{2}{(n+2)(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+1)}. \ \blacksquare$$

Определение 20.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся,* если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм, т. е. если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. При этом пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Определение 20.4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *расходящимся,* если расходится последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм, т. е. если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела при $n \to \infty$ (предел не существует или он бесконечен).

Таким образом, сходящийся ряд имеет конечную сумму $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, расходящийся ряд либо не имеет суммы, либо имеет бесконечную сумму.

Подчеркнем, что вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ по определению 20.1 равносилен вопросу о существовании конечного предела последовательности $\{S_n\}$ его частных сумм.

Отметим, что понятие суммы ряда, т. е. суммы бесконечного числа слагаемых, введено с помощью предельного перехода.

Пример 20.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Составим частную сумму S_n:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Так как $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ при любом k, то

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. Следовательно, данный ряд сходится, и его сумма $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \ \blacksquare$$

П р и м е р 20.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Р е ш е н и е. Запишем частную сумму $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Очевидно, что $1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n > 1)$. Учитывая эти неравенства, будем иметь

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \\ > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

или $S_n > \sqrt{n}$. Отсюда следует, что частные суммы S_n с ростом n возрастают, т. е. $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд расходится. $\blacksquare$

П р и м е р 20.9. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Р е ш е н и е. Найдем частные суммы данного ряда: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, $\ldots$, $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$. Так как частные суммы с нечетным номером равны единице, а с четным номером равны нулю, то предела S_n при $n \to \infty$ не существует. Следовательно, данный ряд расходится. $\blacksquare$

П р и м е р 20.10. Исследовать на сходимость ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Р е ш е н и е. Данный ряд есть геометрическая прогрессия, где a — первый член прогрессии, q — знаменатель прогрессии. Запишем формулу для суммы S_n первых n членов такой прогрессии:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Будем считать для определенности, что $a > 0$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $|q| < 1$. Тогда $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right) = \frac{a}{1-q} = S.$$

2) Пусть $|q| > 1$. Если $q > 1$, то при $n \to \infty$ дробь $\dfrac{aq^n}{1-q} \to -\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Если $q < -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

3) Если $q = 1$, то $S_n = a + a + \ldots + a = na$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty.$$

4) Если $q = -1$, то $S_n = a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1}a$. Тогда

$$S_1 = a, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = a, \quad S_4 = 0, \ \ldots, \ S_{2n-1} = a, \quad S_{2n} = 0,$$

т. е. предела S_n при $n \to \infty$ не существует.

Таким образом, геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$, при этом ее сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$, и расходится при $|q| \geqslant 1$. Например, прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ сходится, так как $q = \dfrac{1}{3} < 1$; прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ расходится, так как $q = \dfrac{3}{2} > 1$. ■

20.2. Основные свойства рядов.

Теорема 20.1. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не может иметь двух различных сумм.

Доказательство следует из определения 20.3 и теоремы 2.1 о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема 20.2 (*необходимый признак сходимости ряда*). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Так как $u_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Подчеркнем, что данный признак не является достаточным, т. е. из условия $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ не следует сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Общий член ряда может стремиться к нулю, а ряд будет расходиться. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 20.8), а $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Из теоремы 20.2 следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1000n+1}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1000n+1} = \dfrac{1}{1000} \neq 0$.

Теорема 20.3. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него группировкой членов ряда без изменения порядка их следования, также сходится и имеет ту же сумму S.

Доказательство. Последовательность $\{S'_n\}$ частных сумм нового ряда есть подпоследовательность последовательности $\{S_n\}$ частных сумм исходного ряда. Так как исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Согласно теореме 2.6, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S$, т. е. новый ряд сходится и имеет ту же сумму S. ■

Обратное утверждение неверно. Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{0+\ldots+0}_{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, а ряд

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots,$$

в котором члены не сгруппированы, расходится (см. пример 20.9).

Теорема 20.4. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и имеет сумму S, то для любого числа c ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ сходится и имеет сумму cS.

Доказательство. Пусть S_n — частная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Тогда $\sigma_n = cS_n$ — частная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$. По условию

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = cS$, что и требовалось доказать. ■

Из теоремы 20.4 следует, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ при $c \neq 0$ также расходится.

Теорема 20.5. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ также сходятся и имеют соответственно суммы $S_1 + S_2$ и $S_1 - S_2$.

Доказательство. Пусть S_{n1}, S_{n2}, S_{n3}, S_{n4} — частные суммы соответственно рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$. Тогда $S_{n3} = S_{n1} + S_{n2}$, $S_{n4} = S_{n1} - S_{n2}$. Используя теорему 2.7 о пределе суммы и разности сходящихся последовательностей, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{n3} = \lim_{n\to\infty} (S_{n1} + S_{n2}) = \lim_{n\to\infty} S_{n1} + \lim_{n\to\infty} S_{n2} = S_1 + S_2;$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n4} = \lim_{n\to\infty} (S_{n1} - S_{n2}) = \lim_{n\to\infty} S_{n1} - \lim_{n\to\infty} S_{n2} = S_1 - S_2.$$

Теорема доказана. ■

Из теорем 20.4 и 20.5 следует, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$.

Теорема 20.6. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ расходятся.

Доказательство. Допустим, например, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ сходится. Тогда по теореме 20.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big((u_n + v_n) - u_n\big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ должен сходиться, что противоречит условию. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ расходится. Аналогично доказывается расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$.

Определение 20.5. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ называются соответственно *рядом-суммой* и *рядом-разностью* рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Отметим, что если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся, то о рядах $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ ничего определенного сказать нельзя, т. е. эти ряды могут как сходиться, так и расходиться.

Рассмотрим, например, два расходящихся ряда

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n;$$

$$-1 - 1 - 1 - \ldots - 1 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Запишем ряд-сумму данных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots =$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

Для этого ряда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0 = S$ (см. с. 266), т. е. ряд-сумма двух расходящихся рядов сходится.

Рассмотрим теперь два таких расходящихся ряда:

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n;$$

$$2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Тогда для ряда-суммы этих рядов получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = (1+2) + (1+2) + \ldots + (1+2) + \ldots =$$
$$= 3 + 3 + \ldots + 3 + \ldots$$

Так как $S_n = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{n} = 3n \to \infty$ при $n \to \infty$, то в данном случае ряд-сумма двух расходящихся рядов расходится.

Теорема 20.7. *Если в каком-либо ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ отбросить, добавить или изменить конечное число членов, то сходимость или расходимость ряда не нарушится.*

Доказательство. Пусть, например, изменено конечное число членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Тогда частные суммы S_n начиная с некоторого номера n изменятся на одну и ту же постоянную величину, что не изменит факта сходимости или расходимости этого ряда (однако сумма ряда может измениться, см. замечание 2.2). ■

Определение 20.6. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ряд, полученный из него отбрасыванием первых N членов, т. е. ряд $u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$, называется N-*м остатком* исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Теорема 20.8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и любой из его N-х остатков сходятся или расходятся одновременно, т. е. из сходимости (расходимости) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$, и обратно, из сходимости (расходимости) ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ следует сходимость (расходимость) самого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство следует из теоремы 20.7.

Пусть сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет сумму S. Тогда ряд $u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots$, как N-й остаток данного ряда, сходится. Обозначим N-ю частную сумму исходного ряда через S_N, сумму ряда-остатка — через R_N. Тогда $R_N = S - S_N$. Легко видеть, что

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}(S - S_N) = S - \lim_{N\to\infty} S_N = S - S = 0,$$

т. е. сумма R_N остатка сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для практических целей часто достаточно знать лишь приближенное значение суммы S ряда с заданной степенью точности. Частная сумма S_n, очевидно, дает приближенное значение суммы S. Так как $S - S_N = R_N$, то $|R_N|$ представляет собой абсолютную погрешность замены S на S_N. Если удается получить оценку $|R_N| < \varepsilon$, то абсолютная погрешность такой замены $(S \approx S_N)$ не будет превосходить величины ε. За счет выбора номера N можно сделать остаток R_N как угодно малым для получения требуемой точности.

При изучении и применении рядов обычно требуется решить две задачи: 1) исследовать ряд на сходимость; 2) для сходящегося ряда найти его сумму. Для этого достаточно исследовать на сходимость последовательность $\{S_n\}$ частных сумм ряда, где S_n есть функция номера n, и в случае сходимости последовательности $\{S_n\}$ найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. На практике не всегда удается найти S_n в виде

$S_n = f(n)$. Поэтому используют различные признаки сходимости и расходимости рядов. В дальнейшем мы остановимся в основном на исследовании рядов на сходимость.

20.3. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 20.9 (*необходимый и достаточный признак сходимости ряда*). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists$ номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall\, n > N$ и $\forall\, p \in \mathbf{N}$ выполнялось бы неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{20.2}$$

Для доказательства следует использовать определение 20.3 сходящегося ряда, критерий Коши сходимости последовательности $\{S_n\}$ (см. теорему 2.8) и учесть, что $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = |S_{n+p} - S_n|$.

Сумму нескольких последовательных членов ряда $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$ называют иногда *отрезком ряда «длины p»*. Как следует из критерия Коши, для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы все достаточно далекие отрезки ряда были как угодно малы по модулю.

Пример 20.11. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Напомним, что число c есть *среднее гармоническое* чисел a и b, если имеет место равенство

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Легко проверить, что общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{n}$ есть среднее гармоническое членов $u_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$ и $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, т. е. $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$, или $n = \dfrac{1}{2}\big((n-1) + (n+1)\big)$. Докажем расходимость гармонического ряда, используя критерий Коши. Рассмотрим отрезок ряда длины $p = n$:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(p-1)} + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}.$$

Очевидно, что $\dfrac{1}{n+k} > \dfrac{1}{n+n}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, т. е.

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n}, \quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n+(n-1)} > \frac{1}{n+n}.$$

Учитывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n} >$$
$$> \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n}}_{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

или

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+n} > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ отрезок ряда длины $p = n$ оказался больше ε. В силу критерия Коши гармонический ряд расходится. ■

20.4. Типовые примеры.

Пример 1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{10^n + 1}$. Написать первые четыре члена ряда и член u_{n+1}.

Решение. Полагая в формуле для общего члена $u_n = \dfrac{n}{10^n + 1}$ последовательно $n = 1, 2, 3, 4$, найдем $u_1 = \dfrac{1}{10^1 + 1} = \dfrac{1}{11}$, $u_2 = \dfrac{2}{10^2 + 1} = \dfrac{2}{101}$, $u_3 = \dfrac{3}{10^3 + 1} = \dfrac{3}{1001}$, $u_4 = \dfrac{4}{10^4 + 1} = \dfrac{4}{10001}$. Заменяя n на $n+1$ в формуле для u_n, будем иметь $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{10^{n+1} + 1}$. Ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots + \frac{n}{10^n + 1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + 1}. \ ■$$

Пример 2. Общий член u_n ряда записан формулой $u_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3^n \cdot 5^{n+1}}$. Найти отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Решение. Заменив n на $n+1$ в формуле для u_n, получим $u_{n+1} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)}{3^{n+1} \cdot 5^{n+2}}$. Поэтому

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)) \cdot 3^n \cdot 5^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 5^{n+2} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n))} = \frac{2n+2}{3 \cdot 5} = \frac{2n+2}{15}. \ ■$$

Пример 3. Подобрать формулу общего члена ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+$ $+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$

Решение. Числители $1, 3, 5, 7, \ldots$ членов ряда образуют арифметическую прогрессию, n-й член a_n которой находится по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$, где d — разность прогрессии. Так как $a_1=1$, $d=2$, то $a_n=2n-1$. Знаменатели $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ тех же членов составляют геометрическую прогрессию с первым членом $b_1=2$ и знаменателем прогрессии $q=2$. Поэтому n-й член b_n этой прогрессии равен $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$. Следовательно, $u_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2n}$. ■

Пример 4. Найти частные суммы S_1, S_2, S_3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}}$.

Решение. Запишем три первых члена ряда:

$$u_1=\frac{2}{9}, \quad u_2=\frac{2}{27}, \quad u_3=\frac{2}{81}.$$

Тогда

$$S_1=u_1=\frac{2}{9}; \quad S_2=u_1+u_2=S_1+u_2=\frac{2}{9}+\frac{2}{27}=\frac{8}{27};$$
$$S_3=u_1+u_2+u_3=S_2+u_3=\frac{8}{27}+\frac{2}{81}=\frac{26}{81}. \ ■$$

Пример 5. Составить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, для которого последовательность частных сумм есть заданная последовательность $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$.

Решение. По условию $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{2n}{n+1}$. Заменяя n на $n-1$ в формуле для S_n, получим $S_{n-1}=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}=$ $=\frac{2(n-1)}{(n-1)+1}=\frac{2(n-1)}{n}$. Найдем $u_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2n-2}{n}=$ $=\frac{2n^2-2n^2-2n+2n+2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$. Следовательно, искомый ряд имеет вид $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$. ■

Пример 6. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ и найти его сумму S, используя определение сходящегося ряда.

Решение. Преобразуем общий член u_n ряда. Для этого разложим $u_n=\frac{1}{n(n+2)}$ на сумму элементарных дробей с неопределенными коэффициентами, т. е. $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$, где A и B

подлежат определению. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и приравняем числители. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему уравнений относительно коэффициентов A и B :

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ \quad 2A = 1. \end{cases}$$

Отсюда $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$. Тогда $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$. Используя полученное разложение, запишем члены ряда в виде $u_1 = \dfrac{1}{1\cdot 3} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)$, $u_2 = \dfrac{1}{2\cdot 4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right)$, $u_3 = \dfrac{1}{3\cdot 5} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$, $\ldots$, $u_{n-2} = \dfrac{1}{(n-2)n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n}\right)$, $u_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Составим частную сумму S_n данного ряда:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

В скобках после преобразований остались только четыре слагаемых. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - 0 - 0\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ конечен, то ряд сходится, причем его сумма $S = \dfrac{3}{4}$. ■

П р и м е р 7. Доказать, что следующие ряды расходятся, используя определение расходящегося ряда: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{2}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+1}{n}$.

Р е ш е н и е. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{2}$ составим частную сумму $S_n = 1 + 0 - 1 + 0 + \ldots$ Так как S_n равна либо 1, либо 0, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует. Поэтому ряд расходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$ частная сумма

$$S_n = \ln\frac{1+1}{1} + \ln\frac{2+1}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln\frac{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} = \ln(n+1).$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Следовательно, ряд расходится. ■

Пример 8. Доказать расходимость следующих рядов, используя необходимый признак сходимости: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4\sqrt{n}}{n^3+1}$.

Решение. Найдем для каждого ряда предел общего члена u_n при $n\to\infty$.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Ряд расходится, так как нарушен необходимый признак сходимости.

2) Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4\sqrt{n}}{n^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\sqrt{n}}{n^3+1} = \infty \neq 0,$$

то ряд расходится. ■

20.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Записать ряд, сохранив первые четыре члена, если его общий член задан формулой $u_n = \dfrac{n}{10^n+n}$.

2. Записать u_1, u_3, u_{n+1} для каждого из следующих рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{2n^2-1}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{3n^2}; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}.$$

3. Составить отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ для рядов из задачи 5.

4. Для ряда $\dfrac{10}{7} + \dfrac{100}{9} + \dfrac{1000}{11} + \dfrac{10000}{13} + \ldots$ составить формулу его общего члена.

5. Записать u_2, u_3, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, где u_n — общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

$$1)\ u_n = \frac{n}{3^{n/2}}; \quad 2)\ u_n = \frac{2^n}{n^{10}}; \quad 3)\ u_n = \frac{n}{n^2+1}.$$

6. Найти частные суммы S_1, S_3, S_5 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

$$1)\ u_n = \frac{1}{3n-1}; \quad 2)\ u_n = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi n}{3}; \quad 3)\ u_n = \frac{n}{2n-1}.$$

7. Найти частные суммы S_1, S_2, S_3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+2}$.

8. Составить ряд, для которого последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм задана в виде $\{S_n\} = \left\{\dfrac{n+1}{2n^2+3}\right\}$.

9. Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, используя определение сходящегося ряда, и найти его сумму.

10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

$$1)\ u_n = 2n; \quad 2)\ u_n = \frac{1}{n(n+3)}.$$

11. Установить расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, исследуя $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, если

$$1)\ u_n = \frac{\sqrt{2n^3+5}}{n+1}; \quad 2)\ u_n = n\sin n; \quad 3)\ u_n = \frac{3n^2+1}{2n(n+1)}.$$

§ 21. Знакопостоянные ряды

21.1. Критерий сходимости знакопостоянных рядов.

Определение 21.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, у которого $u_n \geqslant 0$ $(u_n \leqslant 0)$ $\forall\, n$, называется *рядом с неотрицательными* (*неположительными*) *членами* или *знакопостоянным рядом*.

Признаки сходимости и расходимости знакопостоянных рядов будем изучать в основном на примере рядов с неотрицательными членами $(u_n \geqslant 0)$. Очевидно, что ряды с неположительными членами $(u_n \leqslant 0)$ отличаются от рядов с неотрицательными членами только множителем (-1). Потому все признаки сходимости и расходимости, рассмотренные для рядов с неотрицательными членами, остаются в силе и для рядов с неположительными членами.

Теорема 21.1 (*критерий сходимости ряда с неотрицательными членами*). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм была ограничена сверху, т. е. чтобы $\exists\, M > 0: \ S_n \leqslant M \ \ \forall\, n$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$ сходится, т. е. сходится последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм. По теореме 2.2 об ограниченности сходящейся последовательности последовательность $\{S_n\}$ ограничена (т. е. ограничена и сверху, и снизу) для любого сходящегося ряда. В частности, последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху и для сходящегося ряда с неотрицательными членами, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть последовательность $\{S_n\}$ частных сумм ряда с неотрицательными членами ограничена сверху, т. е. $\exists\, M > 0:$ $S_n \leqslant M \ \ \forall\, n$. Так как $u_n \geqslant 0$, то частные суммы образуют неубывающую последовательность

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_{n-1} \leqslant S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant \ldots,$$

причем эта последовательность по условию ограничена сверху. По теореме 2.5 о пределе неубывающей ограниченной сверху последовательности последовательность $\{S_n\}$ сходится. Следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$.

Теорема полностью доказана. ■

Замечание 21.1. Отметим, что у неубывающей сходящейся последовательности, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, каждый член последовательности не превосходит своего предела, т. е. $S_n \leqslant S \ \ \forall\, n$.

Из теоремы 21.1 следует, что расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$ возможна лишь в случае, когда последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм неограничена сверху, т. е. $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$ либо сходится и имеет конечную сумму S $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S\Big)$, либо расходится и имеет бесконечную сумму $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty\Big)$.

Пример 21.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + n^2}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n + n^2} = 0,$$

то необходимый признак сходимости выполнен. Очевидно, что

$$\frac{1}{2^n + n^2} < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Учитывая эти неравенства и формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии (см. пример 20.10), получим

$$S_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+2^2} + \frac{1}{2^3+3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n+n^2} <$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1,$$

или $S_n < 1$ при любом n.

Таким образом, частные суммы S_n ограничены сверху. Следовательно, по теореме 21.1 данный ряд сходится. ■

21.2. Достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с неотрицательными членами.

Теорема 21.2 (*признак сравнения*). Пусть даны два ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \geqslant 0), \tag{21.1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (v_n \geqslant 0), \tag{21.2}$$

причем

$$u_n \leqslant v_n \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21.3}$$

Тогда

1) если ряд (21.2) сходится и имеет сумму σ, то сходится и ряд (21.1), причем его сумма $S \leqslant \sigma$;

2) если ряд (21.1) расходится, то расходится и ряд (21.2).

Доказательство. Обозначим частные суммы рядов (21.1) и (21.2) соответственно через $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$. В силу условия (21.3) имеем

$$S_n \leqslant \sigma_n \quad \forall\, n. \tag{21.4}$$

1. Пусть ряд (21.2) сходится, т. е. сходится неубывающая последовательность $\{\sigma_n\}$. Тогда $\sigma_n \leqslant \sigma$, где σ — сумма ряда (21.2) (см. замечание 21.1). Из условия (21.4) следует, что $S_n \leqslant \sigma$, т. е. частные суммы ряда (21.1) ограничены сверху. Следовательно, по теореме 21.1 ряд (21.1) сходится. Из соотношения (21.4) имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sigma_n, \quad \text{или} \quad S \leqslant \sigma.$$

2. Пусть ряд (21.1) расходится. Предположим, что ряд (21.2) сходится. Но тогда, согласно п. 1, должен сходиться и ряд (21.1), что противоречит условию. Следовательно, ряд (21.2) расходится.

Теорема полностью доказана. ■

Замечание 21.2. Признак сравнения остается в силе, если неравенство $u_n \leqslant v_n$ выполняется с некоторого номера N, т. е. $\forall\, n \geqslant N$, что непосредственно следует из теоремы 20.8.

Пример 21.2. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\,; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$. В примере 20.7 была доказана сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

2) Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ и ряд справа сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (см. теорему 20.7). ■

Замечание 21.3. Отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 2)$ сходится, так как $\dfrac{1}{n^{\alpha}} < \dfrac{1}{n^2}$ при $\alpha > 2$. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3\sqrt{n}}$ сходится, поскольку $\dfrac{1}{n^3\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{7/2}} < \dfrac{1}{n^2}$.

Пример 21.3. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 5^n}\,; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}\,; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}\,.$$

Р е ш е н и е. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 5^n}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{n \cdot 5^n} \leqslant \leqslant \dfrac{1}{5^n}$ $\forall n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{1}{5} < 1$ (см. пример 20.10). Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 5^n}$.

2) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Так как $\ln(n+1) < n+1$ $\forall n$, то $\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1}$ $\forall n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ (гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ без первого члена) расходится (см. пример 20.11). Следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ также расходится.

3) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ $\forall n$, так как $\sqrt{n} \geqslant 1$ $\forall n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 20.8 и теорему 20.4), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ также расходится. ■

Расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (см. пример 20.8) можно установить также по признаку сравнения, учитывая, что $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{n}$ $\forall n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

Рассмотрим два сходящихся ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Обозначим через R_n^u и R_n^v (см. теорему 20.8) суммы n-х остатков данных рядов, т. е.

$$R_n^u = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \qquad R_n^v = v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$$

Если $u_n \leqslant v_n$ $\forall n$ (в частности, $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$, $u_{n+2} \leqslant v_{n+2}$ и т. д.), то из признака сравнения следует, что $R_n^u \leqslant R_n^v$ (см. замечание 21.2).

П р и м е р 21.4. Установить сходимость ряда

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \frac{1}{4 \cdot 4^3} + \ldots + \frac{1}{(n+1) \cdot 4^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 4^n}$$

и оценить величину суммы R_3 третьего остатка ряда.

Решение. Каждый член этого ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ со знаменателем $q = \frac{1}{4} < 1$, т. е. $\frac{1}{(n+1)\cdot 4^n} < \frac{1}{4^n}$ при любом n. Следовательно, данный ряд сходится. Тогда сумма R_3 третьего остатка ряда меньше суммы R_3' третьего остатка этой прогрессии. Учитывая формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, будем иметь

$$R_3 < R_3' = \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^6} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{4^4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1\cdot 4}{4^4\cdot 3} = \frac{1}{192}.$$

Таким образом, $R_3 = S - S_3 < \frac{1}{192}$, т. е. сумма S данного ряда отличается от суммы S_3 его первых трех членов меньше, чем на $\frac{1}{192}$.

Теорема 21.3 (*предельный признак сравнения*). Пусть даны два ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0), \tag{21.5}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (v_n > 0). \tag{21.6}$$

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (A \neq 0,\ A \neq \infty), \tag{21.7}$$

то оба ряда (21.5) и (21.6) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела последовательности равенство (21.7) означает, что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\, N:\ \forall\, n > N \ \Rightarrow\ \left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$(A-\varepsilon)v_n < u_n < (A+\varepsilon)v_n \quad \forall\, n > N. \tag{21.8}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$ (см. теорему 20.4). В силу правого неравенства (21.8) по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также расходится (см. теорему 20.4). В силу левого неравенства (21.8) по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Теорема полностью доказана. ■

Пример 21.5. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^3+n+1}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^3+n+1}$ его общий член $u_n = \frac{5n+2}{2n^3+n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим $v_n = \frac{1}{n^2}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{2n^3+n+1} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n^2}{2n^3+n+1} = \frac{5}{2}$ $(\neq 0, \neq \infty)$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 21.2), то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^3+n+1}$ также сходится.

2) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Пусть $u_n = \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}$ $(u_n \to 0$ при $n \to \infty)$, $v_n = \frac{1}{n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{4n^2+2n+3} : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{4n^2+2n+3} = \frac{3}{4}$ $(\neq 0, \neq \infty)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}$ расходится, так как расходится гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ■

Замечание 21.4. Из теоремы 21.3 следует, в частности, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно. Поэтому при исследовании на сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0, \ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0)$ достаточно сравнить его с таким рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ $(v_n > 0, \ \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0)$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, т. е. $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$ (см. определение 5.6 эквивалентных бесконечно малых). Например, при исследовании на сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n} \quad \left(\sin\frac{\pi}{2n} > 0,\ \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2n} = 0\right)$$

достаточно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как $u_n = \sin\frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n} = v_n$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2}}$, где $u_n \to 0$ при $n\to\infty$. Общий член $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2}} \sim v_n = \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+2}\cdot 1} = 1$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 20.8), то исходный ряд также расходится.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n^5+n^2}}$ его общий член $u_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $u_n \sim v_n$ при $n\to\infty$, где $v_n = \frac{n^{1/3}}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{5/2-1/3}} = \frac{1}{n^{13/6}}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13/6}}$ (см. замечание 21.3) следует сходимость данного ряда.

Теорема 21.4 (*признак Даламбера*[1]). Пусть дан ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$. Если существует предел отношения последующего члена u_{n+1} к предыдущему u_n при неограниченном возрастании номера n, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \tag{21.9}$$

то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится;

2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, т. е. ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Доказательство. По определению предела последовательности равенство (21.9) означает, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N:\ \forall n > N \ \Rightarrow\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon,$$

[1] Ж. Л. Даламбе́р (1717–1783) — французский математик, механик и философ.

или $\rho - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon \ \ \forall\, n > N$. Отсюда, учитывая, что $u_n > 0$, при любом $n \geqslant N+1$ имеем

$$(\rho - \varepsilon)u_n < u_{n+1} < (\rho + \varepsilon)u_n. \tag{21.10}$$

1) Пусть $\rho < 1$. Выберем ε настолько малым, чтобы сумма $\rho + \varepsilon$ оставалась меньше единицы, т. е. $\rho + \varepsilon = q < 1$. Согласно правому неравенству (21.10) будем иметь

$$u_{n+1} < q u_n \quad \forall\, n \geqslant N+1,$$

или

$$\begin{aligned}
&u_{N+2} < q u_{N+1};\\
&u_{N+3} < q u_{N+2} < q^2 u_{N+1};\\
&\ldots\\
&u_{N+k+1} < q u_{N+k} < \ldots < q^k u_{N+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots);\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{21.11}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k u_{N+1} = u_{N+1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. По признаку сравнения из неравенств (21.11) следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{N+k+1} = \sum\limits_{n=N+2}^{\infty} u_n$, а вместе с ним и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (см. теорему 20.8).

2) Пусть $\rho > 1$. Выберем ε настолько малым, чтобы разность $\rho - \varepsilon$ оставалась больше единицы, т. е. $\rho - \varepsilon = q > 1$. Из левого неравенства (21.10) имеем $q u_n < u_{n+1}$, или $u_{n+1} > q u_n \ \ \forall\, n > N$. Отсюда $u_{n+1} > u_n$ при $q > 1 \ \ \forall\, n > N$. Таким образом, члены ряда возрастают с ростом номера n, т. е. общий член ряда u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, то при достаточно большом n отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$. Следовательно, общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, и ряд расходится. ■

Пример 21.6. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}.$$

Решение. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ для каждого ряда.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1.$$

По признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2}$ расходится. ■

Пример 21.7. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} + \ldots$$

Решение. Используем признак Даламбера. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n(n+1)\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится. ■

Подчеркнем еще раз, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, хотя также $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Отметим, что в обоих случаях $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Теорема 21.5 (*признак Коши*). Пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$. Если существует предел корня n-й степени из общего члена u_n при $n\to\infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho, \tag{21.12}$$

то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится;

2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, т. е. ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Доказательство. По определению предела последовательности, равенство (21.12) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \ \forall n > N \ \Rightarrow \ |\sqrt[n]{u_n} - \rho| < \varepsilon.$$

Отсюда $\forall n \geqslant N + 1$ имеем

$$\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon. \tag{21.13}$$

1) Пусть $\rho < 1$. Выберем ε настолько малым, чтобы сумма $\rho + \varepsilon$ оставалась меньше единицы, т. е. $\rho + \varepsilon = q < 1$. Из правого неравенства (21.13) следует, что

$$\sqrt[n]{u_n} < q, \quad u_n < q^n \quad \forall n \geqslant N + 1,$$

или

$$\begin{aligned} &u_{N+1} < q^{N+1};\\ &u_{N+2} < q^{N+2};\\ &\ldots\\ &u_{N+k} < q^{N+k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots);\\ &\ldots \end{aligned} \tag{21.14}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{N+k} = q^N \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. По признаку сравнения из неравенств (21.14) следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{N+k} = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$, а вместе с ним и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (см. теорему 20.8).

2) Пусть $\rho > 1$. Обозначая $q = \rho - \varepsilon$, выберем ε настолько малым, чтобы разность $\rho - \varepsilon$ оставалась больше единицы, т. е. $\rho - \varepsilon = q > 1$. Из левого неравенства (21.13) имеем $q < \sqrt[n]{u_n}$, или $u_n > q^n$ $\forall n > N$. Так как $q > 1$, то $u_n > 1$ $\forall n > N$, т. е. общий член ряда u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. ■

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$, то $\sqrt[n]{u_n} > 1$, $u_n > 1$ при достаточно большом n. Следовательно, общий член ряда u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, и ряд расходится.

Пример 21.8. Исследовать на сходимость ряды:

$$1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}; \quad 2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n.$$

Р е ш е н и е. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ для каждого ряда.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^n$ находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3>1.$$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^n$ расходится. ■

Напомним, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Рассмотрим два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{\ln n}{n}\right\}=\exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\right\}.$$

Из теории пределов известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\right\}=e^0=1,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ для расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n^2}\right\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{2\ln n}{n}\right\}=\exp\left\{-2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\right\}=e^0=1,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Отметим, что для обоих рядов $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Подчеркнем, что признаки Даламбера и Коши эффективны только для рядов, члены которых убывают быстрее членов геометрической прогрессии. Для рядов с членами, убывающими медленнее членов геометрической прогрессии, нужны более «тонкие» (более «чувствительные») признаки.

В приводимой далее теореме используются понятие и свойства несобственного интеграла с бесконечными пределами. Краткие сведения о таких интегралах даны в приложении.

Теорема 21.6 (*интегральный признак сходимости и расходимости рядов с положительными членами*). Пусть $f(x)$ — непрерывная, положительная и убывающая функция на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = f(n)$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Доказательство. Построим на отрезке $[1, n+1]$, где n — произвольное натуральное число, график функции $y = f(x)$ и прямоугольники с основаниями, равными единице, и высотами, равными $u_k = f(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ (рис. 21.1).

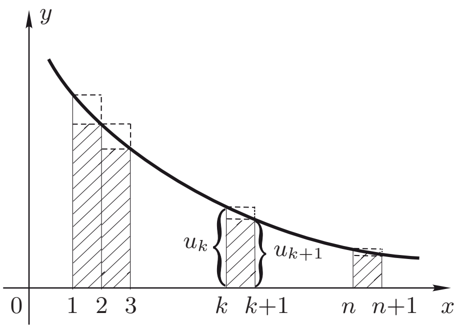


Рис. 21.1

Для площади σ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком $[1, n+1]$ оси OX и прямыми $x = 1$, $x = n+1$, имеем $\sigma = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Площадь σ_1 ступенчатой фигуры, вписанной в эту трапецию и состоящей из прямоугольников, равна

$$\sigma_1 = u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1}.$$

Площадь σ_2 ступенчатой фигуры, описанной около трапеции и также состоящей из прямоугольников, равна

$$\sigma_2 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Очевидно, что указанные выше три площади σ, σ_1 и σ_2 связаны соотношением $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, или

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1} < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{21.15}$$

Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = f(n)$, его частная сумма $S_n = u_1 + {} + u_2 + \ldots + u_n$, то из (21.15) имеем

$$S_{n+1} - u_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n. \tag{21.16}$$

1. Пусть интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Тогда его частные интегралы $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ ограничены (см. теорему 24.1). Из левого неравенства (21.16) следует ограниченность сверху частных сумм S_{n+1} ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = f(n)$, что достаточно для сходимости самого ряда (см. теорему 21.1).

2. Пусть интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Так как $f(x) > 0$, то частные интегралы $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Из правого неравенства (21.16) следует неограниченность частных сумм S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = f(n)$, т.е. $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд расходится. ■

П р и м е р 21.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ (ряд Дирихле).

Р е ш е н и е. В данном случае $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} = f(n)$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6. Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. пример 24.5), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant \leqslant 1$. ■

Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{4} < 1\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1,\right.$ см. пример 20.8$\left.\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ($\alpha = 1$, гармонический ряд) расходятся.

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($\alpha = 2 > 1$, см. пример 21.2), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ($\alpha = 4 > 1$, см. замечание 21.3) сходятся.

Интегральный признак остается в силе, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6 на промежутке $[a; +\infty)$, где $a > 1$. ■

Пример 21.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение. Так как $u_n = \frac{1}{n \ln n} = f(n)$, то $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6 на промежутке $[2, +\infty)$. Найдем несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln \ln x \Big|_2^b \right) =$$
$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится. Поэтому исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ также расходится. ■

21.3. Типовые примеры.

Пример 1. Используя критерий сходимости рядов с неотрицательными членами, исследовать на сходимость ряд $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots \ldots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \ldots$

Решение. Все члены данного ряда положительны. Убедимся, что необходимый признак сходимости выполнен:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = 0.$$

Запишем частную сумму ряда в виде

$$S_n = \frac{3^1+2^1}{6} + \frac{3^2+2^2}{6^2} + \ldots + \frac{3^n+2^n}{6^n} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n =$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}.$$

Следовательно, сумма S_n представлена в виде суммы двух выражений в фигурных скобках. В первом выражении стоит сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Во втором выражении записана сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{3}$ и знаменателем $q = \frac{1}{3}$. Обозначая указанные суммы соответственно через S_{n1} и S_{n2}, получим

$$S_{n1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$$S_{n2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

Тогда частная сумма исходного ряда

$$S_n = S_{n1} + S_{n2} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^n} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) < \frac{3}{2}.$$

Так как сумма $\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) = \alpha_n > 0$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{S_n\}$ возрастает и ограничена сверху $\left(S_n < \frac{3}{2}\right)$. По критерию сходимости знакоположительного ряда исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ сходится (см. теорему 21.1). ■

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n-1}$, используя критерий сходимости.

Решение. Общий член ряда $u_n = \ln\frac{n+1}{n-1} > 0 \quad \forall n \geqslant 2$. Необходимый признак сходимости выполнен, так как

$$\lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n-1} = \ln\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1} = \ln 1 = 0.$$

Найдем частную сумму S_n данного ряда, используя свойство логарифма частного:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k+1}{k-1} = \sum_{k=2}^{n}\bigl(\ln(k+1) - \ln(k-1)\bigr) =$$
$$= \ln 3 - \ln 1 + \ln 4 - \ln 2 + \ln 5 - \ln 3 + \ln 6 - \ln 4 +$$
$$+ \ln 7 - \ln 5 + \ldots + \ln n - \ln(n-2) + \ln(n+1) - \ln(n-1) =$$
$$= -\ln 1 - \ln 2 + \ln n + \ln(n+1) = \ln n + \ln(n+1) - \ln 2.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т. е. последовательность $\{S_n\}$ неограничена сверху. Поэтому ряд расходится. ■

Пример 3. Исследовать на сходимость ряды, используя признак сравнения:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\bigr); \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$ имеем $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2^n} \leqslant \leqslant \dfrac{1}{2^n} = q^n$ $\bigl(q = \dfrac{1}{2}\bigr)$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q<1$, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$ также сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$ общий член $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+4)} < < \dfrac{1}{n^2}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 21.2), то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$.

3) Перепишем общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\bigr)$ в виде $u_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$. Очевидно, что $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, $\sqrt{n}+\sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$. Следовательно, $u_n = = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 20.8), то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}$ его общий член $u_n = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}} > \dfrac{1}{n+1}$, так как $\ln(n+1) < n+1 \ \ \forall n \in \mathbf{N}$. Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ (гармонического ряда без первого члена) следует расходимость данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}$. ■

Пример 4. Используя предельный признак сравнения, установить сходимость или расходимость рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1});$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}; \quad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)}$ его общий член $u_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)} \to 0$ при $n \to \infty$. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n(n+2)} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2n} = 1,$$

т. е. $\dfrac{n+1}{n(n+2)} \sim \dfrac{1}{n}$ при $n \to \infty$. Так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+2n}$ тоже расходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$ его общий член $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^n} \to 0$ при $n \to 0$. Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n}$. Поскольку $\sin\dfrac{\pi}{2^n} \sim \\ \sim \dfrac{\pi}{2^n}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то сходится и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

3) Преобразуем общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^2}$, переведя

иррациональность из числителя в знаменатель:

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \\ = \frac{n+1-n+1}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \frac{2}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\sqrt{n}}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1,$$

т. е. $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ сходится (см. замечание 21.3), то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^2}$.

4) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{(n+1)\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2-1/3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{n}+1)n^{13/6}}{(n+1)\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{15/6}}{n^{5/2}} = 1,$$

т. е. $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}}$ (см. замечание 21.3) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{(n+1)\sqrt{n^3}}$.

5) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как $\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 20.8), то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$. ■

П р и м е р 5. Найти ряд-сумму и ряд-разность рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_{1n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_{2n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Исследовать полученные ряды на сходимость.

Решение. Найдем общий член b_n ряда-суммы и общий член c_n ряда-разности данных рядов:

$$b_n = u_{1n} + u_{2n} = \frac{1}{n^2 - n} + \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + 1 + n^2 - n}{(n^2 - n)(n^2 + 1)} = \frac{2n^2 - n + 1}{(n^2 - n)(n^2 + 1)};$$

$$c_n = u_{1n} - u_{2n} = \frac{1}{n^2 - n} - \frac{1}{1 + n^2} = \frac{n + 1}{(n^2 - n)(n^2 + 1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_{1n} + \sum_{n=2}^{\infty} u_{2n} = \sum_{n=2}^{\infty}(u_{1n} + u_{2n}) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{(n^2 - n)(n^2 + 1)};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_{1n} - \sum_{n=2}^{\infty} u_{2n} = \sum_{n=2}^{\infty}(u_{1n} - u_{2n}) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 1}{(n^2 - n)(n^2 + 1)}.$$

Ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$ сходятся, так как $b_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$ и $c_n \sim$ $\sim \dfrac{1}{n^3}$ при $n \to \infty$, а ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходятся.

Сходимость полученных рядов следует также из теоремы 20.5, так как оба исходных ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_{1n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - n}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_{2n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 1}$ сходятся ($u_{1n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$, $u_{2n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится). ■

Пример 6. Составить ряд-разность расходящихся рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1} \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}; \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1}.$$

Исследовать полученные ряды на сходимость.

Решение. Запишем ряд-разность рядов для случая 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2n - 1} - \dfrac{1}{2n} \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n(2n - 1)}$. Этот ряд сходится, так как его общий член $u_n = \dfrac{1}{2n(2n - 1)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2}$ сходится.

Для ряда-разности рядов в случае 2 имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n - 1} \right) =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n - 1}{n(2n - 1)}$. Поскольку общий член этого ряда $u_n = \dfrac{n - 1}{n(2n - 1)} \sim$ $\sim \dfrac{1}{2n}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ расходится, то ряд-разность

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n(2n-1)}$ двух данных рядов также расходится. ■

Пример 7. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где: 1) $u_n = \dfrac{n^3+3}{3^n}$; 2) $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)!}$; 3) $u_n = n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$; 4) $u_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Решение. 1) Запишем для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+3}{3^n}$ член $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3+3}{3^{n+1}}$. Найдем отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left((n+1)^3+3\right)3^n}{3^{n+1}(n^3+3)} = \frac{(n+1)^3+3}{3(n^3+3)}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+3}{3(n^3+3)} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

2) Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1,$$

то ряд сходится.

3) Учитывая, что $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n} \sim \dfrac{\pi}{2^n}$ при $n \to \infty$, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{n \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{n \cdot \dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ запишем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)(3n+1)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)} \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1.$$

Ряд расходится. ■

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, используя признак Коши, если 1) $u_n = \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; 2) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$; 3) $u_n = \ln^n(2n+1)$; 4) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$ запишем $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}} = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$ сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$ вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

3) Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n(2n+1)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^n(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(2n+1) = \infty > 1$, то ряд расходится.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ найдем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Следовательно, ряд расходится. ■

Пример 9. Используя интегральный признак, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, если: 1) $u_n = \dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$; 2) $u_n = \dfrac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$.

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n} = f(n)$. Поэтому $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot\ln^2 x}$. Функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[2,+\infty)$, т. е. удовлетворяет условиям теоремы 21.6. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 n} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}} = f(n)$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6 на промежутке $[2, +\infty)$. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(2\sqrt{\ln x}\,\Big|_2^b \right) = 2 \lim_{b\to+\infty} \left(\sqrt{\ln b} - \sqrt{\ln 2} \right) = \infty.$$

Поскольку несобственный интеграл расходится, то расходится и данный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$. ■

21.4. Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, используя критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. В случае сходимости ряда найти его сумму S.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n^5+1}}$ с помощью признака сравнения.

3. Используя предельный признак сравнения, установить сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$.

4. Найти и исследовать на сходимость ряд-сумму и ряд-разность рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2-n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2+3}$.

5. Составить и исследовать на сходимость разность рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}.$$

6. Составить и исследовать на сходимость разность рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}.$$

7. Установить сходимость или расходимость ряда по признаку Даламбера, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}$.

8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ с помощью признака Коши.

9. Применяя интегральный признак, установить сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

Исследовать на сходимость данные ряды, используя различные признаки сходимости:

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4}{(n+1)!}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{1+n^4}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{2^n}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^{n/2}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sin(n+1)}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^3}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(n+1)!}{(2n+1)!}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\ln n+1)^2}{n}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2+1}$;

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{n^5+2}}$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n^5+3}$;

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+3)!}{5^n(n+3)!}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n+5}}$;

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^{n+2}} \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}$.

§ 22. Знакопеременные ряды

22.1. Знакочередующиеся ряды.

Определение 22.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным.*

Например, знакопеременным будет ряд

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\sin\frac{3}{4}\pi}{3^2} + \frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{3^3} + \frac{\sin\frac{7}{4}\pi}{3^4} + \ldots + \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n} + \ldots =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{18} - \frac{\sqrt{2}}{54} - \frac{\sqrt{2}}{162} + \ldots + \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n},$$

так как за двумя положительными членами следуют два отрицательных члена.

Определение 22.2. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, называется *знакочередующимся*, если его члены поочередно меняют знаки.

Например, знакочередующимся является ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Обозначая модули членов такого ряда через a_i и считая $a_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, запишем знакочередующийся ряд в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad (22.1)$$

где a_n есть модуль общего члена ряда.

Теорема 22.1 (*теорема Лейбница*[1]). Если у знакочередующегося ряда (22.1) модули всех членов убывают с ростом n, т. е.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{n-1} > a_n > \ \ldots, \qquad (22.2)$$

и модуль a_n общего члена ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (22.3)$$

то ряд (22.1) сходится.

Доказательство. Рассмотрим частные суммы ряда с четным числом членов:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \qquad (22.4)$$

Так как в выражении (22.4) каждая скобка по условию (22.2) положительна, то

$$S_{2n} > 0. \qquad (22.5)$$

Очевидно, что

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}). \qquad (22.6)$$

Поскольку $a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$, то, учитывая соотношения (22.5) и (22.6), будем иметь

$$0 < S_{2n} < S_{2n+2}. \qquad (22.7)$$

Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастающая.

[1] Г.В. Ле́йбниц (1646–1716) — немецкий математик и физик.

Запишем сумму S_{2n} в виде

$$S_{2n} = a_1 - \big((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\big).$$

Отсюда с учетом условия (22.2) следует, что

$$S_{2n} < a_1, \tag{22.8}$$

т. е. последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху. По теореме 2.5 о сходимости неубывающей ограниченной сверху последовательности существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, т. е. последовательность $\{S_{2n}\}$ сходится к числу S.

Запишем частные суммы с нечетным числом членов $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Так как по условию (22.3) $a_{2n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

т. е. последовательность $\{S_{2n+1}\}$ также сходится к тому же числу S. Итак, последовательность $\{S_n\}$ всех частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Следовательно, сам ряд сходится и имеет сумму S. Теорема доказана. ■

Так как согласно соотношению (22.7) $S_{2n} < S_{2n+2}$, то частные суммы S_{2n} стремятся к S, возрастая. Запишем частные суммы S_{2n+1} в виде

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}).$$

Поскольку $a_{2n} - a_{2n+1} > 0$, то $S_{2n+1} < S_{2n-1}$, т. е. частные суммы S_{2n+1} стремятся к S, убывая. Следовательно, $S_{2n} < S < S_{2n+1}$.

Из неравенства (22.8) в пределе при $n \to \infty$ имеем $S \leqslant a_1$. Учитывая, что $S > S_{2n}$ и $S_{2n} > 0$, заключаем, что $0 < S \leqslant a_1$.

Таким образом, в условиях теоремы Лейбница сумма S знакочередующегося ряда положительна и не превосходит модуля a_1 первого члена ряда (рис. 22.1).

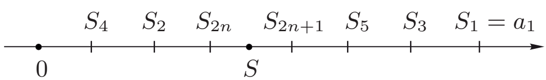


Рис. 22.1

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится по теореме Лейбница и имеет сумму S, т. е. $a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = S$. Тогда $S = S_n + R_n$, где n-й остаток ряда

$$R_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+3} + \ldots)$$

(знак «$+$» или «$-$» в зависимости от четности или нечетности n).

Так как остаток ряда R_n сам является знакочередующимся рядом и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то он сходится и для модуля его суммы справедлива найденная выше оценка $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Таким образом, полагая $S \approx S_n$, мы получаем погрешность, абсолютная величина которой δ_n не превосходит модуля первого отброшенного члена ряда, т. е.

$$\delta_n = |S - S_n| = |R_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{22.9}$$

Подчеркнем, что эта оценка имеет место только для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих условиям теоремы Лейбница.

Пример 22.1. Рассмотрим ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,.$$

Ряд сходится, так как выполнены условия (22.2) и (22.3) теоремы Лейбница. Действительно, $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(a_n > a_{n+1})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$. Пусть S есть сумма данного ряда:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Если положить $S \approx S_6$, то $S - S_6 > 0$ и погрешность $\delta_6 = S - S_6 \leqslant \dfrac{1}{7}$. Если $S \approx S_7$, то $S - S_7 < 0$ и $\delta_7 = |S - S_7| \leqslant \dfrac{1}{8}$. Если $S \approx S_{999}$, то $S - S_{999} < 0$ и $\delta_{999} = |S - S_{999}| \leqslant \dfrac{1}{1000}$. ■

Пример 22.2. Найти с точностью до 0.01 сумму ряда

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,.$$

Решение. Данный ряд сходится по теореме Лейбница. Следовательно, $\delta_n = |S - S_n| \leqslant a_{n+1}$.

Так как сумма ряда должна быть вычислена с точностью до 0.01, то достаточно, чтобы выполнилось неравенство

$$\delta_n \leqslant a_{n+1} < 0.01, \quad \text{или} \quad \frac{1}{(2n+1)!} < 0.01 = \frac{1}{10^2}\,.$$

Это неравенство выполняется начиная с $n = 2$, так как $\dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120} < \dfrac{1}{100}$. Таким образом,

$$S \approx S_2 = 1 - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0.833 \approx 0.83. \ \blacksquare$$

22.2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Определение 22.3. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин членов этого ряда.

Определение 22.4. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно* (*неабсолютно*) *сходящимся,* если он сам сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин его членов расходится.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^5}$ — абсолютно сходящийся, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^5}$, общий член которого $\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^5} \leqslant \dfrac{1}{n^5}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^5}$ сходится (см. пример 21.9). Ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ — условно сходящийся, так как он сам сходится (см. пример 22.1), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

Теорема 22.2 (*достаточное условие сходимости знакопеременного ряда*). Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (т. е. абсолютно сходящийся ряд сходится).

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Согласно критерию Коши для любого ряда (см. теорему 20.9) это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \forall n > N$ и любого целого $p > 0$ выполняется неравенство

$$\big||u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|\big| = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Так как $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$, то по тому же критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Теорема доказана. ■

Пример 22.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^3}$, поскольку $\frac{|\cos n\alpha|}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится (см. пример 21.9). ■

22.3. Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Теорема 22.3 (*признак Даламбера*). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$, то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится абсолютно;

2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Доказательство. 1) Если $\rho < 1$, то по признаку Даламбера для рядов с положительными членами (см. теорему 21.4) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Следовательно, по теореме 22.2 исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно.

2) Если $\rho > 1$, то при достаточно большом n отношение $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$, или $|u_{n+1}| > |u_n|$. Следовательно, модуль общего члена $|u_n|$, а вместе с ним и общий член u_n ряда, не стремятся к нулю при $n \to \infty$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \infty$, то ряд расходится. Доказательство аналогично доказательству для случая $\rho > 1$. Теорема доказана. ■

Пример 22.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$.

Решение. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}(n+1)|3^n}{3^{n+1}|(-1)^n n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1} n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{3^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ сходится, а поэтому исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 22.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^2}$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+1}2^{n+1}|n^2}{(n+1)^2|(-1)^n2^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=2>1.$$

По теореме 22.3 данный ряд расходится. ■

Теорема 22.4 (*признак Коши*). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то

1) при $\rho<1$ ряд сходится абсолютно;

2) при $\rho>1$ ряд расходится.

(При $\rho=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Доказательство. 1) Если $\rho<1$, то по признаку Коши для рядов с неотрицательными членами ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится (см. теорему 21.5). Следовательно, по теореме 22.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно.

2) Если $\rho>1$, то $\sqrt[n]{|u_n|}>1$, $|u_n|>1$ при достаточно большом n. Следовательно, модуль общего члена $|u_n|$, а вместе с ним и общий член u_n ряда, не стремятся к нулю при $n\to\infty$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=+\infty$, то ряд расходится. Доказательство аналогично доказательству для случая $\rho>1$. Теорема доказана. ■

Пример 22.6. Исследовать на сходимость ряды

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n(2n-1)\,\frac{\pi}{4}}{2^n},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4n-1}{n+100}\right)^n.$$

Решение. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$ для каждого ряда.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^n(2n-1)\,\frac{\pi}{4}}{2^n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|\sin^n(2n-1)\frac{\pi}{4}\right|}{2^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{4n-1}{n+100}\right)^n$ находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\left(\frac{4n-1}{n+100}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+100}=4>1.$$

По теореме 22.4 ряд расходится. ■

Отметим еще раз, что если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=1 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=1,$$

то ряд может как сходиться (абсолютно или условно), так и расходиться. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ сходится абсолютно, ряд $\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится условно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ расходится. Вместе с тем можно доказать, что для каждого из этих рядов $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=1$.

При исследовании рядов на абсолютную сходимость используют все признаки сходимости рядов с неотрицательными (положительными) членами.

22.4. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 22.5 (*о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда*). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Пример 22.7. Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots \tag{22.10}$$

Запишем ряд, полученный из него перестановкой двух соседних членов начиная с первого:

$$-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}-\ldots \tag{22.11}$$

Ряд (22.10) абсолютно сходится, так как сходится ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots,$$

как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$. Сумма S ряда (22.10) есть сумма геометрической прогресии с первым членом $b_1 = 1$ и со знаменателем $q = -\frac{1}{2}$, равная $S = \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$.

Следовательно, сумма ряда (22.11) также равна $\dfrac{2}{3}$. ■

Теорема 22.6 (*теорема Римана*[2]). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то можно так переставить его члены, что сумма полученного ряда будет равна любому наперед заданному числу. Можно при перестановке получить и расходящийся ряд.

Пример 22.8. Рассмотрим условно сходящийся ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{22.12}$$

Обозначим через S его сумму. Переставим его члены так, чтобы за каждым положительным членом следовали два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \tag{22.13}$$

Можно доказать, что этот ряд сходится. Тогда по теореме 20.3 можно сгруппировать его члены, например, так:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots, \tag{22.14}$$

причем ряд (22.14) согласно теореме 20.3 будет иметь ту же сумму, что и ряд (22.13). Перепишем ряд (22.14) в виде

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Таким образом, при перестановке членов в условно сходящемся ряде (22.12) сумма его уменьшилась в два раза.

Теорема 22.7 (*о структуре абсолютно сходящегося ряда*). Если ряд сходится абсолютно и имеет сумму S, то ряд, составленный из его положительных членов, и ряд, составленный из его отрицательных членов, сходятся и имеют соответственно суммы S_+ и S_-, причем $S = S_+ + S_-$.

Теорема 22.8 (*о структуре условно сходящегося ряда*). Если ряд сходится условно, то ряд, составленный из его положительных членов, и ряд, составленный из его отрицательных членов, расходятся.

[2] Б. Ри́ман (1826–1866) — немецкий математик.

Теорема 22.9 (*о сложении абсолютно сходящихся рядов*). Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ также абсолютно сходятся.

Доказательство. По условию ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n|$ сходятся. Известно, что $|u_n \pm v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ сходится, как сумма двух сходящихся рядов (см. теорему 20.5). По признаку сравнения сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n+v_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n-v_n|$. Следовательно, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ сходятся абсолютно. Теорема доказана. ■

Теорема 22.10 (*об умножении абсолютно сходящихся рядов*). Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и имеют суммы S^u и S^v. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, составленный из всевозможных попарных произведений $u_k v_l$, также абсолютно сходится и его сумма $S = S^u S^v$, т.е. абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно.

Так как у абсолютно сходящегося ряда можно любым образом группировать и переставлять члены, то ряд-произведение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = u_1v_1 + (u_1v_2+u_2v_1) + (u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1) + \ldots$$
$$\ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots = S = S^uS^v.$$

Как следует из приведенных теорем, только абсолютно сходящиеся ряды обладают свойствами конечных сумм.

22.5. Типовые примеры.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В случае сходимости установить характер сходимости ряда.

Решение. Отметим, что данный ряд знакочередующийся, модули членов убывают при $n \to \infty$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т. е. выполнены все условия теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится. Чтобы установить характер сходимости, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ из модулей членов данного ряда.

Этот ряд расходится (см. пример 20.8). Поскольку ряд из модулей сходящегося ряда расходится, то исходный знакопеременный ряд сходится условно. ■

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^3+1}$. В случае сходимости установить ее характер.

Решение. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: ряд знакочередующийся, модули его членов убывают с ростом n. $\left(\dfrac{1}{(n+1)^3+1} < \dfrac{1}{n^3+1} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3+1} = 0$. Отсюда следует, что ряд сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+1}$ из модулей членов данного ряда. Так как $\dfrac{1}{n^3+1} < \dfrac{1}{n^3} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходится (см. пример 21.9), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+1}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$. В случае сходимости установить ее характер.

Решение. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: ряд знакочередующийся, модули его членов убывают при $n \to \infty$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ \forall\, n \in \mathbf{N}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$. Следовательно, ряд сходится. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, составленный из модулей членов данного ряда. Так как $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится (см. пример 21.9), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится. Поскольку сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то исходный ряд сходится условно. ■

Пример 4. Исследовать каждый из следующих рядов на сходимость и в случае сходимости ряда установить ее характер:

1) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10^2} - \dfrac{13}{10^3} + \dfrac{19}{10^4} + \dfrac{25}{10^5} - \dfrac{31}{10^6} + \ldots;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}$.

Решение. 1) Так как ряд 1 не является знакочередующимся, то теорема Лейбница к нему не применима. Используем признак Даламбера или признак Коши для знакопеременных рядов. Запишем формулу для модуля $|u_n|$ общего члена ряда. Заметим, что числители членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 6$, а знаменатели — геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 10$ и знаменателем $q = 10$. Тогда

$$|u_n| = \frac{a_1 + d(n-1)}{b_1 q^{n-1}} = \frac{1 + 6(n-1)}{10 \cdot 10^{n-1}} = \frac{6n-5}{10^n}.$$

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n-5}{10^n}$ с помощью признака Даламбера. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6n+1)10^n}{10^{n+1}(6n-5)} = \dfrac{1}{10} < 1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно (см. теорему 22.3).

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ имеем $|u_n| = \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ (так как $|\sin n\alpha| \leqslant 1$). Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ по признаку сравнения для знакопостоянных рядов. Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ сходится абсолютно.

3) К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}$ применим признак Коши для знакопеременного ряда. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1} \frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^{-1}} = e > 1.$$

Отсюда следует, что по теореме 22.4 исходный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}$$
расходится. ■

Пример 5. Найти произведение рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$. Сходится ли полученный ряд?

Решение. Чтобы ответить на вопрос о сходимости ряда-произведения, нужно исследовать на сходимость ряды-сомножители. Первый сомножитель — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$ есть сходящийся знакоположительный ряд, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{1}{3} < 1$. Этот же ряд совпадает с рядом из модулей членов знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$ — второго сомножителя. Из сходимости ряда из модулей следует абсолютная сходимость данного знакочередующегося ряда. Так как оба ряда-сомножителя сходятся абсолютно, то ряд-произведение также будет сходиться абсолютно. Для ряда-произведения запишем
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (u_1v_1) + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$
$$\ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1) + \ldots$$

В данном случае
$$u_1 = 1,\ \ u_2 = \frac{1}{3}\,,\ \ u_3 = \frac{1}{3^2}\,,\ \ u_4 = \frac{1}{3^3}\,,\ \ \ldots,\ \ u_{n-1} = \frac{1}{3^{n-2}}$$
— члены первого ряда-сомножителя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$;
$$v_1 = 1,\ \ v_2 = -\frac{1}{3}\,,\ \ v_3 = \frac{1}{3^2}\,,\ \ v_4 = -\frac{1}{3^3}\,,\ \ \ldots,\ \ v_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{3^{n-2}}$$
— члены второго ряда-сомножителя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$. Найдем

$u_1v_1 = 1 \cdot 1 = 1,$

$u_1v_2 + u_2v_1 = 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}\ \cdot 1 = 0,$

$u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 = 1 \cdot\ \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3}\ \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3^2}\ \cdot 1 = \dfrac{1}{3^2}\,,$

$u_1v_4 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_1 = 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{3^3}\right) + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3^3}\ \cdot 1 = 0.$

Далее вычислим

$$u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1 =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3}\cdot(-1)^{n-2}\frac{1}{3^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n-2}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3^{n-1}}\cdot 1 = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}}{3^{n-1}} + \ldots - \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{3^{n-1}}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, ряд-произведение будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + 0 + \frac{1}{3^2} + 0 + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + 0 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots + \frac{1}{3^{2m-2}} + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2m-2}}. \ ■$$

П р и м е р 6. Дан ряд $1 - \dfrac{1}{2\cdot 2!} + \dfrac{1}{3\cdot 3!} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot n!} + \ldots$ Показать, что он сходится, и оценить погрешность δ замены суммы S этого ряда

а) суммой S_4 первых его четырех членов;

б) суммой S_5 пяти его первых членов.

Р е ш е н и е. Данный ряд знакочередующийся, модули его членов убывают при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\cdot n!} = 0$, т. е. выполнены все условия теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится.

Для разности $|S - S_n|$ в этом случае справедлива оценка $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$, где $a_{n+1} = |u_{n+1}|$, т. е. модулю первого отброшенного члена в приближенном равенстве $S \approx S_n$. Составим частные суммы:

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \frac{1}{4\cdot 4!}, \qquad a_5 = \frac{1}{5\cdot 5!};$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 5!}, \qquad a_6 = \left|-\frac{1}{6\cdot 6!}\right| = \frac{1}{6\cdot 6!}.$$

а) При замене S на S_4, т. е. в приближенном равенстве $S \approx\approx S_4$, разность $= S - S_4 > 0$ $(S_{2n} < S)$, и поэтому погрешность $\delta_4 = S - S_4 \leqslant a_5 = \dfrac{1}{5\cdot 5!} = \dfrac{1}{600} < 10^{-2}$.

б) При замене S на S_5, т. е. в приближенном равенстве $S \approx S_5$, разность $S - S_5 < 0$ $(S_{2n-1} > S)$, и погрешность $\delta_5 = |S - S_5| \leqslant a_6 = = \dfrac{1}{6\cdot 6!} = \dfrac{1}{4320} < 10^{-3}$. ■

Пример 7. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму S с точностью: 1) до 0.01, 2) до 0.0001?

Решение. Данный ряд сходится по теореме Лейбница. Следовательно, погрешность δ_n приближенного равенства $S \approx S_n$ не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов, т. е.

$$\delta_n = |S - S_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

Определим число n членов ряда, удовлетворяющее неравенствам:

$$1)\ \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0.01; \qquad 2)\ \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0.0001.$$

В первом случае

$$(n+1)^2 \geqslant (0.01)^{-1} = 100, \ \ n+1 \geqslant 10, \ \ n \geqslant 9.$$

Во втором случае

$$(n+1)^2 \geqslant (0.0001)^{-1} = 10000, \ \ n+1 \geqslant 100, \ \ n \geqslant 99.$$

Следовательно, для вычисления суммы ряда с точностью до 0.01 достаточно взять 9 членов ряда, а с точностью до 0.0001 — 99 членов ряда.

22.6. Задачи для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость рядов и в случае сходимости установить ее характер:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5n+4}$; **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{n+3}$;

4. $1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \ldots$;

5. $\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \ldots$;

6. $-\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n + \ldots$;

7. $\frac{1}{2} - \frac{2}{7} + \frac{3}{12} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-3} + \ldots$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{3^n}$; **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{2n+7}$; **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

13. Исследовать на сходимость ряд-произведение рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$.

14. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Показать, что ряд сходится, и оценить погрешность δ_{10} замены его суммы суммой первых 10 членов.

15. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ нужно взять, чтобы его сумма была вычислена с точностью до 10^{-2}?

§ 23. Последовательности и ряды с комплексными членами

23.1. Краткие сведения о комплексных числах.

Определение 23.1. *Комплексным числом* z называется выражение $z = x + iy$, где x, y — действительные числа, i — специальный символ, такой что $i^2 = -1$. Этот символ называют *мнимой единицей*. Числа x и y называют *действительной* и *мнимой частями* числа z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ введены понятия равенства и арифметических операций по следующим правилам:

1) $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$;
2) $x + 0\,i = x,\ 0 + iy = iy,\ 1 \cdot i = i, \quad z = 0 \iff x = 0,\ y = 0$;
3) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;
4) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$;
5) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $(x_2^2 + y_2^2 \neq 0)$;
6) $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}$.

С комплексными числами можно оперировать так же, как с буквенными двучленами в алгебре, учитывая, что $i^2 = -1$.

Пример 23.1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 4i$.

Решение. Согласно указанным выше правилам имеем:

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-1 + 4i) = (3 - 1) + i(2 + 4) = 2 + 6i;$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (-1 + 4i) = \big(3 - (-1)\big) + i(2 - 4) = 4 - 2i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(-1 + 4i) = \\ = \big(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4\big) + i\big(2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4\big) = -11 + 10i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{-1+4i} = \frac{3\cdot(-1)+2\cdot 4}{(-1)^2+4^2} + \frac{2\cdot(-1)-3\cdot 4}{(-1)^2+4^2} = \frac{5}{17} - i\,\frac{14}{17}\,. \ \blacksquare$$

Из свойства $x + i\cdot 0 = x$ следует, что множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел. Если $y = 0$, то $z = x$ — действительное число, если $x = 0$, то $z = i\cdot y$ — чисто мнимое число.

Определение 23.2. Число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к числу $z = x + iy$.

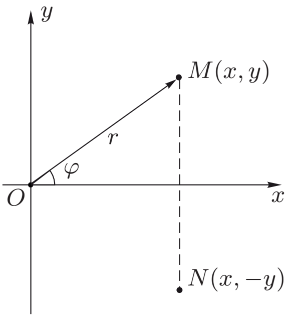


Рис. 23.1

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x, y)$ плоскости Oxy или вектором $\overline{OM}\{x, y\}$ (см. рис. 23.1). Между комплексными числами и точками плоскости Oxy существует взаимно-однозначное соответствие. Действительные числа изображают точками оси Ox, чисто мнимые числа — точками оси Oy. Ось Ox называют *действительной осью,* ось Oy — *мнимой осью.* Числу $\overline{z} = x - iy$ соответствует точка $N(x, -y)$, симметричная точке $M(x, y)$ относительно оси Ox.

Если на плоскости Oxy введены полярные координаты — радиус r и угол φ, то $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой записи* комплексного числа z в отличие от алгебраической формы записи $z = x + iy$. При этом радиус r называют *модулем комплексного числа* и обозначают $|z| = r$, угол φ — *аргументом комплексного числа* и обозначают $\arg z = \varphi$, если берется главное значение угла $(0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi \leqslant \varphi < \pi)$, и $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$ $(k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, если берется общее значение угла.

Модуль комплексного числа всегда неотрицательный и определяется однозначно, аргумент определяется с точностью до $2\pi k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, за исключением числа $z = 0$, для которого аргумент может быть взят любым. Если $z = x + iy$, то $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Если z — действительное число, т. е. $z = x + 0\cdot i = x$, то $\arg z = 0$ при $x > 0$ и $\arg z = \pi$ при $x < 0$. Если z — чисто мнимое число, т. е. $z = 0 + iy = iy$, то $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$ при $y > 0$ и $\arg z = \dfrac{3\pi}{2}$ (или $-\dfrac{\pi}{2}$) при $y < 0$. Равенство $z = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $|z| = 0$.

Замечание 23.1. Пусть числу $z_1 = x_1 + iy_1$ соответствует точка $M_1(x_1, y_1)$ или вектор $\overline{OM}_1\{x_1, y_1\}$, числу $z_2 = x_2 + iy_2$ соответствует точка $M_2(x_2, y_2)$ или вектор $\overline{OM}_2\{x_2, y_2\}$.

Тогда $|z_2 - z_1| = |(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)| = |x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |\overline{M_1 M_2}|$. Следовательно, модуль разности $|z_2 - z_1|$ есть расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ или точками z_1 и z_2 (рис. 23.2).

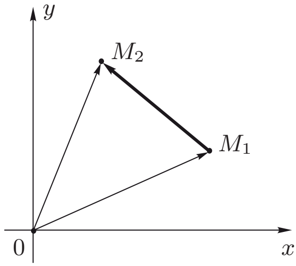


Рис. 23.2

1°. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда, используя формулы тригонометрии, можно получить следующие равенства:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

2°. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то, как следует из п. 1°,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $n \in \mathbf{N}$.

Полагая $r = 1$, получим *формулу Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

3°. По определению комплексное число w есть корень n-й степени из комплексного числа z, т. е. $w = \sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$. Полагая $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, докажем формулу

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пусть $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда равенство $w^n = z$ эквивиалентно равенству $\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Так как у двух равных комплексных чисел модули равны, а аргументы отличаются на число, кратное $2\pi k$, то из последнего равенства имеем

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k.$$

Отсюда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Следовательно,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Полагая $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений корня.

Для других значений k аргументы будут отличаться от найденных на число, кратное 2π, и поэтому соответствующие значения корня будут совпадать с полученными выше. Таким образом, корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 23.2. Пусть $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Найти $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. Используя указанные выше формулы, получим

$$z_1 \cdot z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = $$
$$= 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right). \blacksquare$$

Пример 23.3. Найти $(1+i)^{10}$.

Решение. Запишем комплексное число $z = 1 + i = x + iy$ в тригонометрической форме. Так как модуль $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, то $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Следовательно,

$$z^{10} = (1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10} =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10}{4}\pi + i\sin\frac{10}{4}\pi\right) = 2^5\left(\cos\frac{5}{2}\pi + i\sin\frac{5}{2}\pi\right) =$$
$$= 32\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 32i\sin\frac{\pi}{2} = 32i. \blacksquare$$

Пример 23.4. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Запишем единицу в тригонометрической форме, учитывая, что $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$. Имеем $1 = \cos 0 + i\sin 0$. Тогда

$$w = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2$, найдем три значения корня:

$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$$
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$w_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \blacksquare$$

Пример 23.5. Найти корни уравнения $z^4 = -1$.

Решение. Представим число -1 в тригонометрической форме, принимая во внимание, что $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. Тогда $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$. Следовательно, $w = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\dfrac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$, найдем все четыре значения корня:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Полученные значения корней данного уравнения геометрически изображаются вершинами квадрата, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[4]{r} = \sqrt[4]{1} = 1$ (рис. 23.3). ■

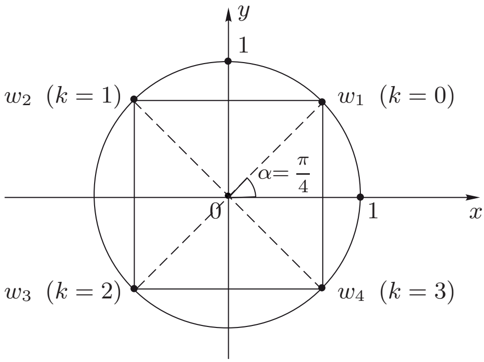


Рис. 23.3

Пусть φ — какое-либо действительное число. Полагают по определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Заменяя φ на $-\varphi$, получим

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Пусть $z = x + iy$ — произвольное комплексное число. Полагают по определению $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, или, с учетом формулы

Эйлера, $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Например, $e^{2+3i} = e^2(\cos 3 + i\sin 3)$, $e^{-4-2i} = e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)$.

Комплексное число $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ с помощью формулы Эйлера может быть записано в форме $z = re^{i\varphi}$, называемой *показательной формой записи* комплексного числа z.

Пример 23.6. Дано комплексное число $z = \sqrt{3} + 3i$ в алгебраической форме $(z = x + iy)$. Записать тригонометрическую и показательную формы данного числа.

Решение. Найдем модуль r и аргумент φ числа z. Имеем $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, $z = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ или $z = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$. ■

23.2. Последовательности с комплексными членами.

Определение 23.3. Пусть дана бесконечная последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ $(z_n = x_n + iy_n)$. Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$ при $n \to \infty$, если $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists$ номер N такой, что $\forall\,n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z_0| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{или} \quad z_n \to z_0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Определение 23.4. Множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, называется ε-*окрестностью* точки z_0 и обозначается $O_\varepsilon(z_0)$. Геометрически ε-окрестность $O_\varepsilon(z_0)$ есть круг радиуса ε с центром в точке z_0, причем точки окружности радиуса ε не принадлежат этой окрестности.

Замечание 23.2. Учитывая, что $|z_n - z_0|$ есть расстояние между точками z_0 и z_n (см. замечание 23.1), можно дать геометрическую интерпретацию предела последовательности $\{z_n\}$ с комплексными членами, а именно $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, если $\forall\,O_\varepsilon(z_0)$ $\exists$ номер N такой, что все точки z_n с номерами $n > N$ принадлежат окрестности $O_\varepsilon(z_0)$, вне этой окрестности лежит лишь конечное число точек последовательности $\{z_n\}$ (рис. 23.4).

Отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, т. е. если расстояние от начала координат до точек z_n неограниченно возрастает с ростом n.

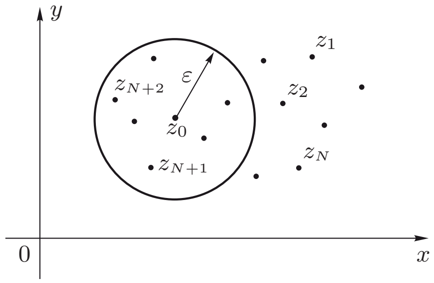


Рис. 23.4

О п р е д е л е н и е 23.5. Последовательность $\{z_n\}$, для которой существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, называется *сходящейся* к z_0. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ не существует или равен ∞, то последовательность $\{z_n\}$ называется *расходящейся.*

Т е о р е м а 23.1. Для сходимости к числу $z_0 = x_0 + iy_0$ последовательности $\{z_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к x_0, а последовательность $\{y_n\}$ — к y_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = z_0 = x_0 + iy_0.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Для любого комплексного числа $z = x + iy$ можно записать

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|; \\ |y| &\leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z|. \end{aligned} \tag{23.1}$$

Учитывая, что $z_n - z_0 = (x_n - x_0) + i(y_n - y_0)$, из неравенств (23.1) будем иметь

$$|x_n - x_0| \leqslant |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leqslant |z_n - z_0|. \tag{23.2}$$

Так как $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : \forall\, n > N \;\Rightarrow\; |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Отсюда с учетом неравенств (23.2) получим

$$|x_n - x_0| < \varepsilon, \quad |y_n - y_0| < \varepsilon \quad \forall\, n > N,$$

что и означает сходимость последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно к x_0 и y_0, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = z_0 = x_0 + iy_0$. Для любого комплексного числа $z = x + iy$ можно записать

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y|. \tag{23.3}$$

Тогда в силу неравенства (23.3) имеем

$$|z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|. \tag{23.4}$$

Так как $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, то $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, N_1 :\ |x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$ и $\exists\, N_2 :\ \ |y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$. Тогда $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ одновременно при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$. Следовательно, из неравенства (23.4) получим

$$|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, n > N,$$

т. е. последовательность $\{z_n\}$ сходится к z_0, или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Теорема полностью доказана. ■

Из теоремы 23.1 следует, что сходимость последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ к $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна сходимости двух последовательностей с действительными членами $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, соответственно к x_0 и y_0, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Например,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1} + i\,\frac{n}{3n+4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right) + i \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+4}\right) = 2 + \frac{1}{3}\,i.$$

Если одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ расходится, то расходится и последовательность $\{z_n\}$. Например, последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{n+1} + i\,\dfrac{n}{4n+1}\right\}$ расходится, так как расходится последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right) = \infty$.

Теорема 23.2 (*критерий Коши сходимости последовательности* $\{z_n\}$). Для сходимости последовательности $\{z_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, N :\ \forall\, n > N$

и $\forall p \in \mathbf{N}$ выполнялось бы неравенство

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

Для доказательства следует использовать теорему 23.1, критерий Коши для последовательностей с действительными членами (см. теорему 2.8) и учесть неравенства

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n|,$$
$$|y_{n+p} - y_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n|,$$
$$|z_{n+p} - z_n| \leqslant |x_{n+p} - x_n| + |y_{n+p} - y_n|.$$

23.3. Ряды с комплексными членами.

Определение 23.6. Выражение

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{23.5}$$

где $z_n = x_n + iy_n$, называется *рядом с комплексными членами,* а $z_n = x_n + iy_n$ — *общим членом ряда.*

Например, выражение $\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} + i\,\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{10} + i\,\frac{1}{5}\right) + \ldots$ $\ldots + \left(\frac{n}{n^2+1} + i\,\frac{1}{n+2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + i\,\frac{1}{n+2}\right)$ есть ряд с комплексными членами, общий член которого $z_n = \left(\frac{n}{n^2+1} + i\,\frac{1}{n+2}\right)$.

Определение 23.7. Сумма S_n первых n членов ряда называется *n-й частной суммой ряда*, т. е. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$.

Определение 23.8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм, т. е. если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

При этом число S называют *суммой ряда* и записывают

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *расходящимся*, если последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм расходится.

Теорема 23.3 (*критерий Коши сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$). Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\, N: \forall\, n > N$ и $\forall\, p \in \mathbf{N}$ выполнялось неравенство

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство следует из определения 23.8, критерия Коши для последовательностей (см. теорему 23.2) с учетом равенства

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|.$$

Теорема 23.4. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ сходился и имел сумму $S = \sigma + i\tau$, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ и имели соответственно суммы σ и τ.

Доказательство. Обозначим частные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно через S_n, σ_n и τ_n, т. е. $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, где $z_k = x_k + iy_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Очевидно, что $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k = \sigma_n + i\tau_n$, или $S_n = \sigma_n + i\tau_n$.

Необходимость. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится к $S = \sigma + i\tau$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ или $\lim\limits_{n\to\infty} (\sigma_n + i\tau_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = S = \sigma + i\tau$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$, а это означает сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sigma$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \tau$.

Достаточность. Пусть сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ и имеют соответственно суммы σ и τ, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sigma_n + i\tau_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \sigma + i\tau = S$. Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$. ■

Теорема 23.5 (*необходимый признак сходимости*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то его общий член $z_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ $(z_n = x_n + iy_n)$ сходится, то по теореме 23.4 сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Тогда согласно необходимому признаку сходимости рядов с действительными членами имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание 23.3. На ряды с комплексными членами переносятся теорема об умножении сходящегося ряда на число, в общем случае комплексное, теоремы о сложении и вычитании сходящихся рядов. В частности, геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

где a и q — комплексные числа, представляет собой сходящийся ряд с суммой $S = \dfrac{a}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходящийся — при $|q| \geqslant 1$.

Определение 23.9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, и *условно* (*неабсолютно*) *сходящимся,* если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, а сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится.

Теорема 23.6. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, т. е. абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сходится. Так как

$$|x_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|, \qquad |y_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|, \tag{23.6}$$

то по признаку сравнения для рядов с действительными неотрицательными членами сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$. Тогда по теореме 22.2 сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Отсюда, согласно теореме 23.4, следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Теорема доказана. ■

Теорема 23.7. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ $(z_n = x_n + iy_n)$

сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходились ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Доказательство следует из признака сравнения для рядов с действительными неотрицательными членами на основе неравенств

$$|x_n| \leqslant |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|, \quad |y_n| \leqslant |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|.$$

К рядам с комплексными членами применимы признаки Даламбера и Коши. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \rho$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \rho$, то

1) при $\rho < 1$ ряд абсолютно сходится;

2) при $\rho > 1$ (в частности, $\rho = +\infty$) ряд расходится.

В случае $\rho = 1$ ряд может как сходиться (абсолютно или условно), так и расходиться.

Пример 23.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$.

Решение. Используем признак Коши. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(1+i)^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1+i}{n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно. ■

В общей теории рядов доказано, что у сходящихся рядов с комплексными членами можно группировать члены, не меняя их порядка, причем сумма ряда остается той же. В абсолютно сходящихся рядах можно переставлять члены, причем сумма ряда не изменится. Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, при этом их суммы перемножаются. О сложении, вычитании рядов и умножении ряда на число см. замечание 23.3.

Более подробно ряды с комплексными членами изучают в теории функций комплексной переменной.

23.4. Типовые примеры.

Пример 1. Даны числа $z_1 = 2$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -2i$, $z_5 = 3 + 2i$, $z_6 = -5 + i$. Записать числа, сопряженные данным.

Решение. По определению сопряженного числа получим соответственно: $\overline{z}_1 = 2$, $\overline{z}_2 = -1$, $\overline{z}_3 = -i$, $\overline{z}_4 = +2i$, $\overline{z}_5 = 3 - 2i$, $\overline{z}_6 = -5 - i$. ■

Пример 2. Найти сумму, разность, произведение и частное чисел $z_1 = x_1 + iy_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = x_2 + iy_2 = -1 + 2i$.

Решение. Используя определения суммы, разности, произведения и частного двух комплексных чисел, найдем

$$z_1 + z_2 = (2-3i) + (-1+2i) = (2-1) + i(-3+2) = 1 - i;$$
$$z_1 - z_2 = (2-3i) - (-1+2i) = (2+1) + i(-3-2) = 3 - 5i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)(-1+2i) = -2 + 3i + 4i - 6i^2 = -2 + 6 + 7i = 4 + 7i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-2-6+3i-4i}{(-1)^2-(2i)^2} = \\ = \frac{-8-i}{1+4} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}\,i. \ \blacksquare$$

Пример 3. Даны числа $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$, $z_5 = 2 + 2i$, $z_6 = 2\sqrt{3} - 2i$. Записать эти числа в тригонометрической форме и найти число $\dfrac{z_2}{z_5 \cdot z_6}$.

Решение. Учитывая, что $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, где

$$r_n = |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_n = \operatorname{tg}\arg z_n = \frac{y_n}{x_n},$$

найдем

$$\begin{aligned}
&r_1 = |1| = 1, && \varphi_1 = \arg 1 = 0, && z_1 = 1 = \cos 0 + i\sin 0;\\
&r_2 = |i| = 1, && \varphi_2 = \arg i = \frac{\pi}{2}, && z_2 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right);\\
&r_3 = |-1| = 1, && \varphi_3 = \arg(-1) = \pi, && z_3 = -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi);\\
&r_4 = |-i| = 1, && \varphi_4 = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}, && z_4 = -i = \cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Вычислим $r_5 = |z_5| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$; $\operatorname{tg}\varphi_5 = \dfrac{2}{2} = 1$. Так как точка $(2, 2)$ лежит в первой координатной четверти $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\varphi_5 = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда

$$z_5 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Для числа $z_6 = 2\sqrt{3} - 2i$ имеем: $r_6 = |z_6| = \sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4$; $\operatorname{tg}\varphi_6 = -\dfrac{2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку точка $(2\sqrt{3}, -2)$ лежит в четвертой координатной четверти $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$, то $\varphi_6 = -\dfrac{\pi}{6}$. Следовательно,

$$z_6 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Найдем число $\dfrac{z_2}{z_5 \cdot z_6}$:

$$\frac{z_2}{z_5 \cdot z_6} = \frac{\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}}{8\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\right)} =$$

$$= \frac{\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}}{8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right). \blacksquare$$

П р и м е р 4. Даны числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = \sqrt{3} + i$. Вычислить $(z_1 z_2)^{50}$ и $\sqrt[3]{z_3}$, записав z_1, z_2, z_3 в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. Так как точки z_1, z_2, z_3 лежат в первой четверти, то $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдем

$$r_1 = |z_1| = |1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\arg z_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Для числа z_2 имеем

$$r_2 = |z_2| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\arg z_2 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{3},$$

$$z_2 = (1 + i\sqrt{3}) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Вычислим

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Следовательно,

$$(z_1 z_2)^{50} = \left(2\sqrt{2}\right)^{50}\left(\cos 50\frac{7\pi}{12} + i\sin 50\frac{7\pi}{12}\right) =$$

$$= 2^{75}\left(\cos\left(28\pi + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(28\pi + \frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{75}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -2^{75}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2^{74}\left(\sqrt{3} + i\right).$$

Найдем

$$r_3 = |z_3| = \left|\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}\arg z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{6},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Для $w = \sqrt[3]{z_3}$ получим

$$w = \sqrt[3]{z_3} = \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Вычислим w_1 $(k=0)$, w_2 $(k=1)$, w_3 $(k=2)$:

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right). \blacksquare$$

Пример 5. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Так как $|-16| = 16$, $\arg(-16) = \pi$, то

$$-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Запишем

$$w = \sqrt[4]{-16} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Вычислим w_1 $(k=0)$, w_2 $(k=1)$, w_3 $(k=2)$, w_4 $(k=3)$:

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i);$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \\ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1+i);$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \\ = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1-i);$$

$$w_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1-i). \blacksquare$$

Пример 6. Представить в показательной форме комплексное число $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Решение. Точка z лежит в четвертой координатной четверти. Находим

$$r = |z| = \sqrt{2+2} = 2; \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\arg z = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

В показательной форме число z имеет вид $z = re^{i\varphi} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. ■

Пример 7. Найти значение $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Решение. Используя формулу Эйлера, получим

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i. \ ■$$

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + i\,\frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

В случае сходимости ряда найти его сумму.

Решение. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$. Оба ряда сходятся, так как их члены образуют бесконечно убывающие геометрические прогрессии. Следовательно, сходится и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ (см. теорему 23.4). Найдем сумму S этого ряда, предварительно вычислив сумму S_1 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ и сумму S_2 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$. Имеем: $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-1/2} = 2$, $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, то

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + i\,\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = S_1 + iS_2 = 2 + i\,\frac{3}{2}. \ ■$$

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + i(0,1)^n\right).$$

Решение. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(0,1)^n$. Первый ряд расходится, второй — сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 0.1 < 1$. Из расходимости первого ряда следует расходимость данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i(0,1)^n\right)$ (см. теорему 23.4). ■

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^{n+1}$.

Решение. Применим признак Коши для знакопеременного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1+i}{3}\right|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{3}\right|^{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{n+1}{n}}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{\sqrt{2}}{3}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n.$$

Решение. Вычислим

$$|z_n|=\left|\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right|^n==\left(\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right)^n=1^n\not\to 0$$

при $n\to\infty$. Из условия $|z_n|\not\to 0$ при $n\to\infty$ следует, что и $z_n\not\to 0$ при $n\to\infty$. Так как не выполнен необходимый признак сходимости, то ряд расходится. ■

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(3i-1)^n}{5^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера для знакопеременного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|3i-1|^{n+1}5^n}{5^{n+1}n|3i-1|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|3i-1|}{n\cdot 5}=$$
$$=\frac{|-1+3i|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{|-1+3i|}{5}=\frac{\sqrt{1+9}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно. ■

23.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти $\operatorname{Re}z$, $\operatorname{Im}z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$, если $z=2-2i$.

2. Вычислить выражение $(2+3i)^3$.

3. Представить число $z=-1-i$ в тригонометрической форме.

4. Записать число $z=-3+3i$ в тригонометрической форме.

5. Вычислить выражение $\dfrac{(\cos 77^\circ + i\sin 77^\circ)(\cos 23^\circ + i\sin 23^\circ)}{\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ} + \dfrac{i^3}{\sqrt{2}}$.

6. Вычислить по формуле Муавра $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

7. Найти все значения $w = \sqrt[4]{i}$.

8. Найти $w = \sqrt{-1+i}$.

9. Представить в показательной форме число $z = \sqrt{3} + i$.

10. Чему равно $e^{\pi i}$?

11. Вычислить выражение $2e^{-\frac{\pi}{6}i} - ie^{\pi i}$.

Исследовать на сходимость заданные ряды. В случае сходимости найти сумму S ряда:

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + i\,\dfrac{1}{5^n}\right)$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4^n} + i\left(\dfrac{2}{7}\right)^n\right)$.

Исследовать на сходимость заданные ряды. В случае сходимости определить ее характер:

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + i\,\dfrac{1}{n^2}\right)$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{5}\right)^{n-1}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4+3i)^n}{(n+1)6^n}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} + i\,\dfrac{1}{n^3}\right)$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}} + i\,\dfrac{2}{n+1}\right)$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7}{1+\sqrt{3}i}\right)^{n+1}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+3i)^n}{n^2\cdot 4^n}$;

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + i\,\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 24. Краткие сведения об интегралах с бесконечными пределами

Излагаемый ниже материал предполагает знакомство с теорией определенного интеграла с конечными пределами интегрирования.

Определение 24.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. *Несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ называется предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (24.1)$$

Определение 24.2. Если предел справа в равенстве (24.1) конечен, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся* (сходится). Если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся* (расходится).

Определение 24.3. Пусть функция непрерывна на бесконечном промежутке $(-\infty, b]$. *Несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty, b]$ называется предел $\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ и обозначается

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (24.2)$$

Определение 24.4. Если предел справа в равенстве (24.2) конечен, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ называется *сходящимся* (сходится). Если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ называется *расходящимся* (расходится).

Определение 24.5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ определяется равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{24.3}$$

где c — любое число на оси Ox. При этом интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся* (сходится), если сходится каждый из интегралов в правой части равенства (24.3). Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ или $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся* (расходится).

Из определений 24.1–24.5 следует, что сходящиеся несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования являются конечными пределами определенных интегралов с переменными верхним или нижним пределами при стремлении этих пределов к бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Известно, что интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox, сверху — кривой $y = f(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$. При возрастании b прямая $x = b$ перемещается вправо вдоль оси Ox. Если при этом интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то его величину принимают за площадь бесконечной трапеции, ограниченной снизу осью Ox, сверху — графиком функции $y = f(x)$, слева — прямой $x = a$ (рис. 24.1). Аналогичные рассуждения имеют место для интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример 24.1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

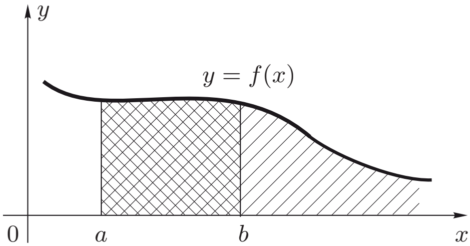


Рис. 24.1

Решение. Согласно определению 24.2 имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^b \right) = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится. ■

Пример 24.2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$.

Решение. По определению 24.2 запишем

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\sin x \Big|_0^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$ не существует, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$ расходится. ■

Пример 24.3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{1} e^x dx$.

Решение. Согласно определению 24.4 запишем

$$\int_{-\infty}^{1} e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \left(e^x \Big|_a^1 \right) = \lim_{a\to-\infty} (e - e^a) = e.$$

Данный интеграл сходится. ■

Пример 24.4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\, dx$.

Решение. По определению 24.5 будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} e^x\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} e^x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^c\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^x\Big|_c^b\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^c - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - e^c\right).$$

Поскольку $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^b - e^c\right) = +\infty$, т.е. интеграл $\int\limits_{c}^{+\infty} e^x\,dx$ расходится, то расходится и исходный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$. ■

Пример 24.5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. 1) Пусть $\alpha \neq 1$. При любом $b > 0$ имеем

$$\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right).$$

Тогда

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1,\\ \infty, & \alpha < 1.\end{cases}$$

2) Пусть $\alpha = 1$. При любом $b > 0$ получим

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится и равен $\dfrac{1}{\alpha-1}$ при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. ■

Определение 24.6. Пусть дан несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$. Интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ $(a < b < +\infty)$ называется *частным интегралом* интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 24.1 (*необходимое условие сходимости несобственных интегралов*). Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то его частные интегралы ограничены, т. е. существует число $M > 0$ такое, что $\forall\ b > a$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M$.

Из теоремы 24.1 следует, что если частные интегралы не ограничены, то несобственный интеграл расходится. Если же частные интегралы ограничены, то о сходимости несобственного интеграла ничего определённого сказать нельзя, так как он может как сходиться, так и расходиться. Например, для несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ его частные интегралы $\int\limits_0^b \cos x\,dx = \sin b$ ограничены при любом b, но они не имеют предела при $b \to +\infty$. Поэтому интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ расходится.

Теорема 24.2. Если функция $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ непрерывна и неотрицательна, то для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы его частные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ были ограничены сверху, т. е. чтобы

$$\exists\, M:\ \forall\, b \in [a, +\infty)\ \Rightarrow\ \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Из теоремы 24.2 следует, что в случае расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a, +\infty)$, его частные интегралы не будут ограничены, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \to +\infty$ при $b \to +\infty$.

Подробные сведения о свойствах несобственных интегралов с бесконечными пределами содержатся во многих курсах математического анализа в разделах, специально посвященных таким интегралам.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$. **2.** $A = \{x : x \in (-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)\}$. **3.** $A \cup B = \{x : x \in (-\infty, 1] \cup (8, +\infty)\}$. **4.** $A \cap B = \{1, 2\}$. **5.** $A \setminus B = \{x : x \geqslant 1\}$. **6.** $A_2, A_4, A_6, A_7, A_8, A_{10}$. **7.** $B_1, B_2, B_4, B_5, B_6, B_8$. **8.** C_3, C_5, C_6, C_7.

§ 4

1. 0. **2.** $-\frac{3}{8}$. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** 0. **5.** ∞. **6.** $\frac{27}{64}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** -1. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $-\frac{1}{2}$. **12.** ∞. **13.** $\frac{3}{4}$. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** ∞. **16.** 4. **17.** 2. **18.** $-\frac{1}{4}$. **19.** $-\frac{2}{5}$. **20.** $\frac{3}{4}$.

§ 5

1. $\frac{5}{2}$. **2.** $\frac{3}{4}$. **3.** 0. **4.** x. **5.** 1. **6.** $-\frac{1}{4}$. **7.** 0. **8.** $\cos a$. **9.** 2π. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** e. **12.** $e^{-\frac{4}{3}}$. **13.** e^{-3}. **14.** e^{-2}. **15.** e^{-3}. **16.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **17.** e^3. **18.** e^{-4}. **19.** e^2. **20.** $\sqrt{e}$. **21.** $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка при $x \to 1$. **22.** $k = \frac{1}{3}$. **23.** $k = 3$. **24.** $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to 0$. **25.** $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to 0$. **26.** $k = \frac{2}{3}$. **27.** $\alpha = o(\beta)$ при $x \to 0$. **28.** y_1, y_2. **29.** $\frac{5}{4}$. **30.** 0. **31.** e. **32.** π. **33.** $\frac{2}{3}$. **34.** 0. **35.** $\frac{1}{2}$. **36.** $\frac{3}{2}$. **37.** -1. **38.** $\frac{1}{8}$.

§ 6

1. $f(+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$. **2.** $f(-3+0) = f(-3-0) = -\frac{1}{36}$. **3.** $f(-0) = 0$, $f(+0)$ не существует. **4.** $x_0 = 1$ — точка непрерывности функции. **5.** $x_0 = 0$ — точка устранимого разрыва, $f(+0) = f(-0) = 2$. **6.** $x_0 = 2$, $x_1 = -2$ — точки разрыва второго рода. **7.** $x_0 = 0$ — точка разрыва первого рода. **8.** $x_0 = 0$ — точка разрыва первого рода, $x_1 = 1$ — точка разрыва второго рода. **9.** $x_0 = 0$ — точка разрыва первого рода. **10.** $x_0 = 6$ — точка устранимого разрыва. **11.** $x_0 = 0$ — точка разрыва второго рода. **12.** $x_0 = -2$ — точка разрыва первого рода. **13.** $x_0 = 0$ — точка непрерывности функции. **14.** $x_0 = 1$ — точка разрыва второго рода.

ГЛАВА II

§ 7

1. 3. **2.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. **3.** $5\cos x - 3\sin x$. **4.** $\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **5.** $\dfrac{3\pi+2}{4}$. **6.** 0. **7.** $5x^4 - 12x^2 + 2$. **8.** 0. **9.** 0. **10.** $\dfrac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$. **11.** $\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$. **12.** $\dfrac{25-6x-2x^2}{(x^2-5x+5)^2}$. **13.** $\dfrac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x}$. **14.** $4x\cos x - (x^2-4)\sin x$. **15.** x^2e^x. **16.** $\dfrac{x(2\ln|x|-1)}{\ln^2|x|}$. **17.** $\alpha = 0$. **18.** $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$. **19.** $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$. **20.** $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{6}{73}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 2$, $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 3$. **21.** $\omega = 3(1+e^{-6})$ с$^{-1}$. **22.** $y_{\text{кас}} = x + 7$, $y_{\text{н}} = -x + 3$. **23.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. **24.** $M(1, -3)$.

§ 8

1. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. **2.** $2xe^{x^2}$. **3.** $\dfrac{\sin(\ln x)}{x\cos^2(\ln x)}$. **4.** $\dfrac{4x^3e^{\operatorname{tg}(x^4)}}{\sqrt{1-e^{2\operatorname{tg}(x^4)}}\cdot\cos^2(x^4)}$. **5.** $\operatorname{ctg} x$. **6.** $\dfrac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$. **7.** $-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}\cdot\arcsin^2(x^2)}$. **8.** $-\dfrac{3}{2x^4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{x^3}}\cos^2\left(\frac{1}{x^3}\right)}$. **9.** $\dfrac{e^x}{1+2e^x+2e^{2x}}$. **10.** $(x+5)^2(2x-7)^3\times$ $\times(2-x)\left(\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{6}{2x-7}-\dfrac{1}{2-x}\right)$. **11.** $x^x(\ln x + 1)$. **12.** $\dfrac{9}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times(5-2x)^{-\frac{3}{2}}$. **13.** $\dfrac{5x\cos^4 x}{x^2+1}\left(\dfrac{1}{x} - 4\operatorname{tg} x - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)$. **14.** $x^{x^2+1}\times$ $\times(2\ln x + 1)$. **15.** $-\dfrac{2\cos 4x}{e^{2x}\ln^2 x}\left(2\operatorname{tg} 4x + 1 + \dfrac{1}{x\ln x}\right)$. **16.** $\sin x^{\ln x}\times$ $\times\left(\dfrac{1}{x}\ln\sin x + \operatorname{ctg} x\cdot\ln x\right)$. **17.** $y'_x = e^{2t}$, $x = e^{-t}\sin t$. **18.** -1. **19.** $\dfrac{1}{2}$. **20.** -1. **21.** $y_{\text{кас}} = 2x - 3$, $y_{\text{н}} = -\dfrac{1}{2}x + 7$. **22.** $y_{\text{кас}} = 3x - 4$, $y_{\text{н}} = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{28}{3}$. **23.** $y_{\text{кас}} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$, $y_{\text{н}} = -2x + 8$.

§ 9

1. -0.04. **2.** -0.01. **3.** $-\dfrac{1}{4}\,dx$. **4.** $\left(2x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$. **5.** dx. **6.** 0.778. **7.** 1.143. **8.** 0.965. **9.** 0.03. **10.** 1.004. **11.** 0.9995. **12.** 1.001.

§ 10

1. $\sqrt{2} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$. **2.** $6\sin x\cdot\cos^2 x - 3\sin^3 x$. **3.** $9e^{-3x}$. **4.** $-\dfrac{1}{x^2}$. **5.** $-4\cos 2x$. **6.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **7.** $y^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}(x+1) + (-1)^{n-1}ne^{-x}$, $y^{(100)}(0) = -99$. **8.** $y^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-2}} + \dfrac{(-1)^{n-2}\cdot 2n(n-2)!}{x^{n-2}} +$

$+\ \dfrac{(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!}{x^{n-2}}$, $y^{(4)}(1) = -2$. **9.** $2^n \cdot x\cos\left(2x+\dfrac{\pi n}{2}\right) + 2^{n-1}\cdot n\cos\left(2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)$. **10.** $(x^2+x-1)\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)+n(2x+1)\sin\left(x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\dfrac{\pi(n-2)}{2}\right)$. **11.** $\dfrac{1}{2}$. **12.** $\dfrac{32}{27}$. **13.** -3. **14.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(2-\dfrac{\pi^2}{16}+\pi\right)dx^2$. **15.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{16}\cdot 10^{-4}$. **16.** $-\dfrac{dx^3}{x^2}$. **17.** $\dfrac{3}{e}\cdot 10^{-3}$. **18.** а) $-2e^x\sin x\,dx^2$, б) $-2e^x\sin x\,dx^2+e^x(\cos x-\sin x)\,d^2x$. **19.** а) $-\dfrac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}\,dx^2$, б) $-\dfrac{4}{1-x^4}\left(\dfrac{1+3x^4}{1-x^4}\,dx^2+x\,d^2x\right)$.

§ 11

1. 1. **2.** 1. **3.** 0. **4.** $\dfrac{1}{6}$. **5.** $\dfrac{3}{2}$. **6.** 0. **7.** ∞. **8.** $\dfrac{1}{12}$. **9.** 0. **10.** 1. **11.** e^{-2/π^2}. **12.** 1. **13.** 1. **14.** e. **15.** e^{-1}. **16.** 1.

§ 12

1. $5-8(x+1)+9(x+1)^2+o((x+1)^2)$. **2.** $-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+r_4(x)$. **3.** $x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$. **4.** $1+x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{5x^4}{8\sqrt{(1+2\theta x)^7}}$, $0<\theta<1$. **5.** $\dfrac{3}{4}+\dfrac{x-3}{16}-\dfrac{(x-3)^2}{64}+\dfrac{(x-3)^3}{(4+\theta(x-3))^4}$, $0<\theta<1$. **6.** $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+o(x^5)$. **7.** $1-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4+o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^5\right)$. **8.** $3+2(x+2)+2(x+2)^2+2(x+2)^3-\dfrac{2(x+2)^4}{(-1+\theta(x+2))^5}$, $0<\theta<1$. **9.** $x^2-\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^6}{8}+o(x^7)$. **10.** $x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$. **11.** $2+(x+1)-\dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{5(x+1)^3}{12}+o((x+1)^3)$. **12.** $-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{15}{8}x^4-\dfrac{33}{10}x^5+o(x^5)$.

§ 13

1. $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},+\infty)$ — интервалы убывания, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ — интервал возрастания функции. **2.** $(-\infty,+\infty)$ — интервал возрастания функции. **3.** $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ — интервалы убывания, $(-1,1)$ — интервал возрастания функции. **4.** $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$ — интервалы убывания, $(0,2)$ — интервал возрастания функции, $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=\dfrac{4}{e^2}$. **5.** $y_{\max}=y(1)=0$, $y_{\min}=y(3)=4$. **6.** $y_{\max}=y\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$. **7.** $y_{\min}=y\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=-\dfrac{3}{4}$. **8.** $m=1$, $M=2.125$. **9.** $V_{\max}=\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **10.** $H=r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **11.** $H=4R$.

§ 14

1. $(-\infty, 2)$ — интервал выпуклости, $(2, +\infty)$ — интервал вогнутости кривой, точек перегиба нет. **2.** $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ — интервал выпуклости, $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$ — интервал вогнутости, $x = e^{-\frac{3}{2}}$ — точка перегиба кривой. **3.** $(-\infty, 1)$ — интервал выпуклости, $(1, +\infty)$ — интервал вогнутости, $x = 1$ — точка перегиба кривой. **4.** $(-\infty, -3)$ — интервал выпуклости, $(-3, 0)$, $(0, +\infty)$ — интервалы вогнутости, $x = -3$ — точка перегиба кривой. **5.** $y = x - \pi$ — правая асимптота, $y = x + \pi$ — левая асимптота. **6.** $y = x$, $x = -1$, $x = 1$. **7.** $y = 2x$. **8.** $y = x$, $x = 1$.

ГЛАВА III

§ 16

1. $2x^3\sqrt{x} - 3\ln x - 12x^{-\frac{1}{6}}$. **2.** $e^x\left(\dfrac{2^x}{1+\ln 2} + \dfrac{3^x}{1+\ln 3}\right)$. **3.** $3\ln\left|x + \sqrt{25+x^2}\right| + 4\arcsin\dfrac{x}{5}$. **4.** $\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$. **5.** $-6x^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{x^{1/3}}{6} + \dfrac{x^{1/6}}{5} + \dfrac{1}{4}\right)$. **6.** $\dfrac{x-8}{\sqrt{2x-5}}$. **7.** $\dfrac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (e^x - 2)$. **8.** $-\dfrac{1}{4}\left(x^2+25\right)^{-2}$. **9.** $\sin\ln x$. **10.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x$. **11.** $1 + \dfrac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$. **12.** $2\sqrt{e^x+1} + \ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$. **13.** $\dfrac{1}{3}(1 + \operatorname{tg} x)^3$. **14.** $-e^{\cos x}$. **15.** $\dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2$. **16.** $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7x}{2} + \dfrac{19}{4}\right)\sin 2x + \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{4}\right)\cos 2x$. **17.** $(x^2 - x + 2)e^x$. **18.** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. **19.** $\sin x - (x+4)\cos x$. **20.** $-e^{-x}(4x^2+12x+13)$. **21.** $\dfrac{x^2}{4} - 2x + \left(2x - \dfrac{x^2}{2}\right)\ln x$.

§ 17

1. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{(x+1)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2-x+1} + \dfrac{Gx+H}{x^2+x+1}$. **2.** $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{1-2x}{3(x^2+x+3)}$. **3.** $3 + \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}$. **4.** $-\dfrac{1}{5}\ln|4-5x|$. **5.** $-\dfrac{1}{12(2x+3)^6}$. **6.** $-\dfrac{1}{3(3x+1)}$. **7.** $\operatorname{arctg}(x+2)$. **8.** $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}\right)$. **9.** $\dfrac{1}{6}\ln|3x^2+x+1| - \dfrac{1}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)$. **10.** $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-x+3| + \dfrac{5}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{11}}\right)$. **11.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1) + \dfrac{x-2}{2(x^2-2x+2)}$. **12.** $\dfrac{1}{18}\ln\dfrac{|x^2-3x+9|}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x-3}{3\sqrt{3}}\right)$. **13.** $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right| + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}\right)$. **14.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\left|x + \dfrac{3}{2}\right|$. **15.** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{16}\ln|2x^2 -$

$-x+1|+\dfrac{5}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)$. **16.** $x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. **17.** $x+5\ln|x|-3\ln|x^2+x+1|-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$. **18.** $x^2+\dfrac{16}{5}\ln|x^2-4|-\dfrac{1}{5}\ln(x^2+1)$.

§ 18

1. $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}-x$. **2.** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right|$. **3.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2}+1\right|$. **4.** $\dfrac{1}{3\sin^3 x}-\dfrac{1}{5\sin^5 x}$. **5.** $-\dfrac{3}{2}\cos^{2/3}x+\dfrac{3}{4}\cos^{8/3}x-\dfrac{3}{14}\cos^{14/3}x$. **6.** $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{4+\operatorname{tg}x}{4-\operatorname{tg}x}\right|$. **7.** $\dfrac{1}{2}\cos^2 x-3\cos x+2\ln(1+\cos x)$. **8.** $5\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x-24\ln(\sin x+5)$. **9.** $\ln|\operatorname{tg}x|+\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$. **10.** $\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{16}\sin 2x$. **11.** $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\sin 3x+1}{\sin 3x-1}\right|-\dfrac{1}{3\sin 3x}$. **12.** $-\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$. **13.** $-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-2\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$. **14.** $-\dfrac{1}{11}\cos\dfrac{11}{2}x-\dfrac{1}{9}\cos\dfrac{9}{2}x$. **15.** $\dfrac{1}{10}\sin 5x-\dfrac{1}{14}\sin 7x$.

§ 19

1. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{2}\right)$. **2.** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}}{2}\right)$. **3.** $4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x-2}$. **4.** $2\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. **5.** $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)$. **6.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\dfrac{1}{4}+\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}\right|$. **7.** $\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|$. **8.** $\dfrac{7}{2}\arcsin\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)-\sqrt{2-x-x^2}$. **9.** $\dfrac{\sqrt{2x^2-4x+10}}{2}+\dfrac{\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|}{\sqrt{2}}$. **10.** $\dfrac{7}{4}\arcsin\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)-\dfrac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}$. **11.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x-2}{x\sqrt{2}}\right)$. **12.** $-\arcsin\left(\dfrac{1-x}{2x}\right)$. **13.** $-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}}$. **14.** $-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. **15.** $-\ln\left|\dfrac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **16.** $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\dfrac{\ln\left|2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}\right|}{8}$. **17.** $6\arcsin\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{1}{6}(2x^2+5x+25)\sqrt{1+2x-x^2}$. **18.** $\dfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|$. **19.** $\dfrac{1}{4}(1-2x)\sqrt{1+x-x^2}+\dfrac{11}{8}\arcsin\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)$. **20.** $\dfrac{1}{6}(2x^2-5x+7)\sqrt{2+2x+x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{2+2x+x^2}\right|$.

21. $\dfrac{x}{9\sqrt{9-x^2}}$. **22.** $\dfrac{x^3}{3\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **23.** $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{4x}$. **24.** $2\arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}(2x-$ $-x^3)\sqrt{4-x^2}$. **25.** $\dfrac{x}{3\sqrt{x^2+3}}$. **26.** $\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{2x}$. **27.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}-$ $-\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}$. **28.** $\dfrac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$. **29.** $\dfrac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-$ $-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

ГЛАВА IV

§ 20

1. $\dfrac{1}{11}+\dfrac{2}{102}+\dfrac{3}{1003}+\dfrac{4}{10004}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^n+n}$. **2.** 1) $u_1=$ $=2$, $u_3=\dfrac{28}{17}$, $u_{n+1}=\dfrac{n^3-3n^2+3n+2}{2n^2+4n+1}$; 2) $u_1=\dfrac{1}{3}$, $u_3=-\dfrac{1}{27}$, $u_{n+1}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi(n+1)}{2}}{3(n+1)^2}$; 3) $u_1=\dfrac{2}{3}$, $u_3=\dfrac{8}{9}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+2)!}{3^{n+1}}$. **3.** 1) $\dfrac{(n^3+3n^2+3n+2)(2n^2-1)}{(2n^2+4n+1)(n^3+1)}$; 2) $\dfrac{(n^2\sin\dfrac{\pi(n+1)}{2}}{(n+1)^2\sin\dfrac{\pi n}{2}}$; 3) $\dfrac{n+2}{3}$. **4.** $u_n=$ $=\dfrac{10^n}{2n+5}$. **5.** 1) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{n+1}{n\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{1}{2^8}$, $\dfrac{8}{3^{10}}$, $2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{10}$; 3) $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{(n+1)(n^2+1)}{n(n^2+2n+2)}$. **6.** 1) $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{33}{40}$, $\dfrac{3041}{3080}$; 2) $\dfrac{1}{6}$, $-\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{3}$; 3) 1, $\dfrac{34}{15}$, $\dfrac{1069}{315}$. **7.** $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{31}{33}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5-2n-2n^2}{(2n^2+3)(2n^2-4n+5)}$. **9.** $\dfrac{1}{2}$. **10.** 1) Расходится, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$; 2) Сходится, $S=\dfrac{11}{18}$. **11.** 1) Расходится, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$; 2) Расходится, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ не существует; 3) Расходится, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{3}{2}$.

§ 21

1. Сходится, $S=\dfrac{1}{2}$. **2.** Сходится. **3.** Сходится. **4.** Ряд-сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2-n+3}{(2n^2-n)(2n^2+3)}$ сходится, ряд-разность $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{(2n^2-n)(2n^2+3)}$ сходится. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3n(3n-2)}$, сходится. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(2n+1)(3n+2)}$, расходится. **7.** Сходится. **8.** Сходится. **9.** Расходится. **10.** Расходится. **11.** Сходится. **12.** Сходится. **13.** Сходится. **14.** Сходится. **15.** Расходится. **16.** Расходится. **17.** Расходится. **18.** Расходится. **19.** Расходится. **20.** Сходится. **21.** Сходится. **22.** Сходится. **23.** Сходится. **24.** Расходится. **25.** Сходится.

§ 22

1. Сходится условно. **2.** Сходится абсолютно. **3.** Сходится условно. **4.** Сходится абсолютно. **5.** Сходится абсолютно. **6.** Сходится абсолютно. **7.** Расходится. **8.** Сходится абсолютно. **9.** Сходится условно. **10.** Расходится. **11.** Сходится условно. **12.** Расходится. **13.** Сходится абсолютно. **14.** $\delta_{10} < 10^{-1}$. **15.** $n \geqslant 4$.

§ 23

1. $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -2$, $\overline{z} = 2+2i$, $|z| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$. **2.** $-46+9i$. **3.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$. **4.** $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. **5.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** 1. **7.** $w_1 = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$, $w_2 = \cos\dfrac{5\pi}{8} + i\sin\dfrac{5\pi}{8}$, $w_3 = \cos\dfrac{9\pi}{8} + i\sin\dfrac{9\pi}{8}$, $w_4 = \cos\dfrac{13\pi}{8} + i\sin\dfrac{13\pi}{8}$. **8.** $w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$, $w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{8} + i\sin\dfrac{11\pi}{8}\right)$. **9.** $2e^{i\frac{\pi}{6}}$. **10.** -1. **11.** $\sqrt{3}$. **12.** Сходится абсолютно, $S = 2 + \dfrac{i}{4}$. **13.** Сходится абсолютно, $S = \dfrac{1}{3} + i\,\dfrac{2}{5}$. **14.** Расходится. **15.** Сходится абсолютно. **16.** Сходится абсолютно. **17.** Сходится условно. **18.** Расходится. **19.** Расходится. **20.** Сходится абсолютно. **21.** Сходится условно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. — Т. 1, 2. — М.: Наука, 1969.

2. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989.

3. *Тер-Крикоров Л.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.

4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сенцов Б.Х.* Математический анализ. — М.: Наука, 1979.

5. *Зорич В.А.* Математический анализ. — Ч. 1. — М.: Наука, 1981.

6. *Зорич В.А.* Математический анализ. — Ч. 2. — М.: Наука, 1984.

7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. — Т. 1. — М.: Наука, 1983.

8. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1984.

9. *Романовский П.И.* Общий курс математического анализа в сжатом изложении. — М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1962.

10. *Игнатьева А.В., Красношёкова Т.И., Смирнов В.Ф.* Курс высшей математики. — М.: Высшая школа, 1968.

11. *Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.И.* Интегральное исчисление функций одной переменной. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

12. *Толстов Г.П.* Элементы математического анализа. — Т. 1. — М.: Наука, 1979.

13. *Толстов Г.П.* Элементы математического анализа. — Т. 2. — М.: Наука, 1966.

14. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — Т. 1. — М.: Наука, 1985.

15. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — Т. 2. — М.: Наука, 1976.

16. *Шнейдер В.С., Слуцкий А.И., Шумов А.С.* Краткий курс высшей математики. — М.: Высшая школа, 1972.

17. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1970.

18. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. — Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1971.

19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.

20. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

БУКВЫ ЛАТИНСКОГО АЛФАВИТА

Прямой шрифт	Курсив	Название	Прямой шрифт	Курсив	Название
A a	$A\ a$	а	N n	$N\ n$	эн
B b	$B\ b$	бэ	O o	$O\ o$	о
C c	$C\ C$	це	P p	$P\ p$	пэ
D d	$D\ d$	дэ	Q q	$Q\ q$	ку
E e	$E\ e$	е	R r	$R\ r$	эр
F f	$F\ f$	эф	S s	$S\ s$	эс
G g	$G\ g$	же (гэ)	T t	$T\ t$	тэ
H h	$H\ h$	аш	U u	$U\ u$	у
I i	$I\ i$	и	V v	$V\ v$	вэ
J j	$J\ j$	жи (йот)	W w	$W\ w$	дубль-вэ
K k	$K\ k$	ка	X x	$X\ x$	икс
L l	$L\ l$	эль	Y y	$Y\ y$	игрек
M m	$M\ m$	эм	Z z	$Z\ z$	зэт

БУКВЫ ГРЕЧЕСКОГО АЛФАВИТА

Начертание	Название	Начертание	Название
$\mathrm{A}\ \alpha$	альфа	$\mathrm{N}\ \nu$	ню (ни)
$\mathrm{B}\ \beta$	бэта	$\Xi\ \xi$	кси
$\Gamma\ \gamma$	гамма	$\mathrm{O}\ o$	о микро́н
$\Delta\ \delta$	дельта	$\Pi\ \pi$	пи
$\mathrm{E}\ \varepsilon$	эпсилон	$\mathrm{P}\ \rho$	ро
$\mathrm{Z}\ \zeta$	дзэ́та	$\Sigma\ \sigma$	сигма
$\mathrm{H}\ \eta$	эта	$\mathrm{T}\ \tau$	та́у
$\Theta\ \theta\ (\vartheta)$	тэта	$\Upsilon\ \upsilon$	ипсилон
$\mathrm{I}\ \iota$	ио́та	$\Phi\ \varphi$	фи
$\mathrm{K}\ \kappa$	каппа	$\mathrm{X}\ \chi$	хи
$\Lambda\ \lambda$	лямбда (ламбда)	$\Psi\ \psi$	пси
$\mathrm{M}\ \mu$	мю (ми)	$\Omega\ \omega$	о ме́га

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}; \quad \operatorname{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}; \quad \operatorname{th}\alpha = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,\quad n\in\mathbf{Z};$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(-\sin 3\alpha+3\sin\alpha);$$

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha);$$

$$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3);$$

$$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3);$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\sin 4\alpha=\cos\alpha(4\sin\alpha-8\sin^3\alpha);$$

$$\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ