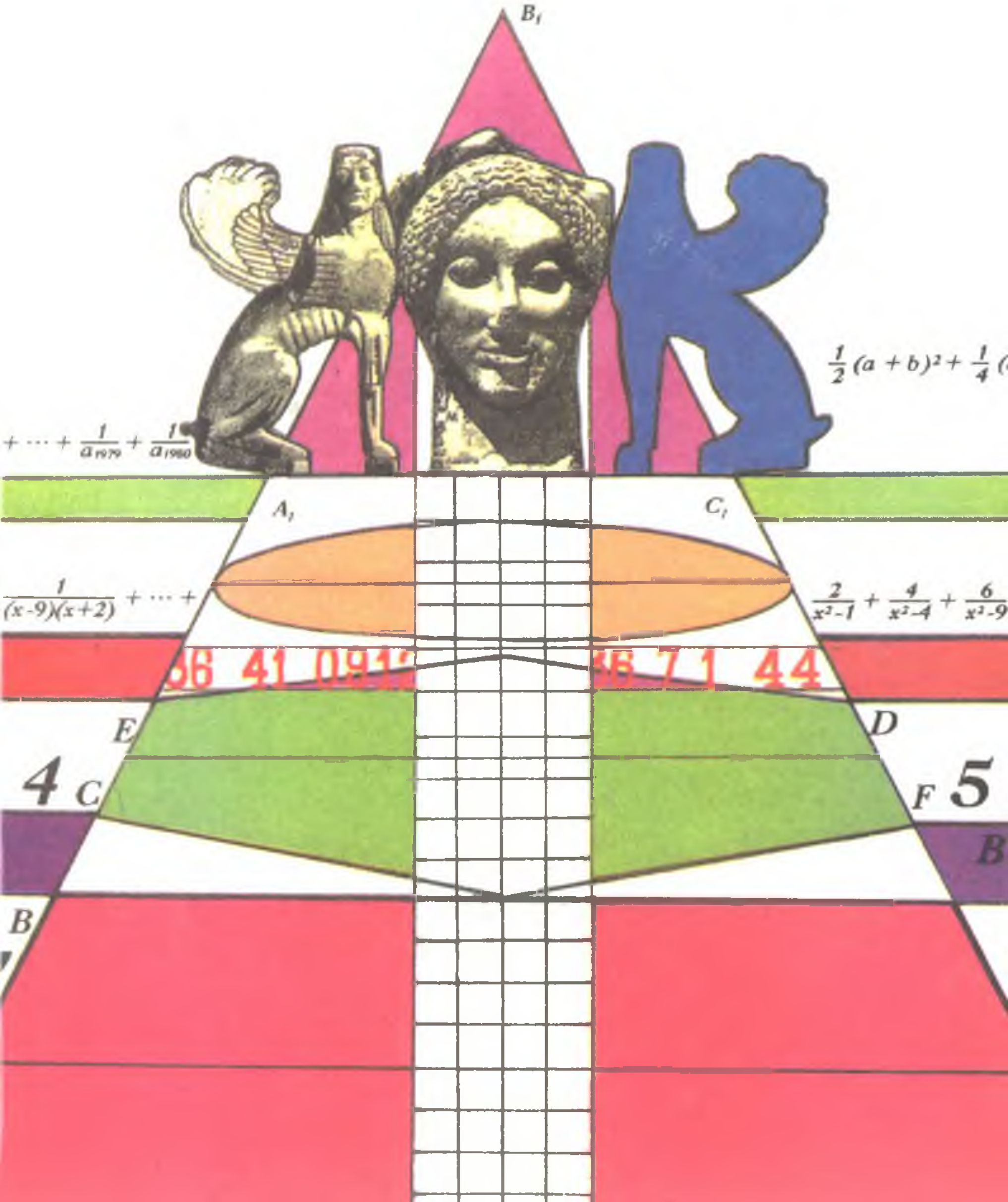
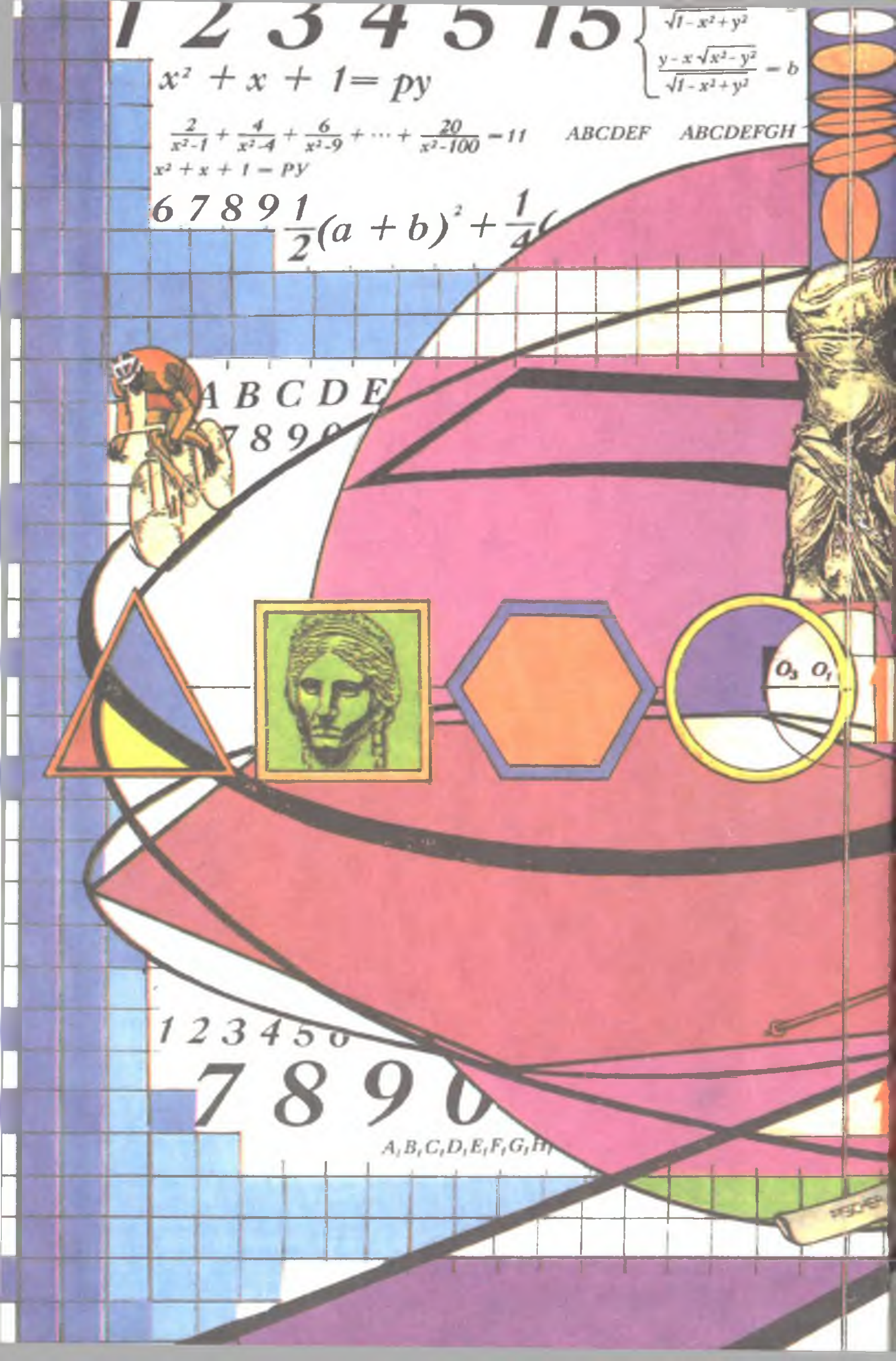
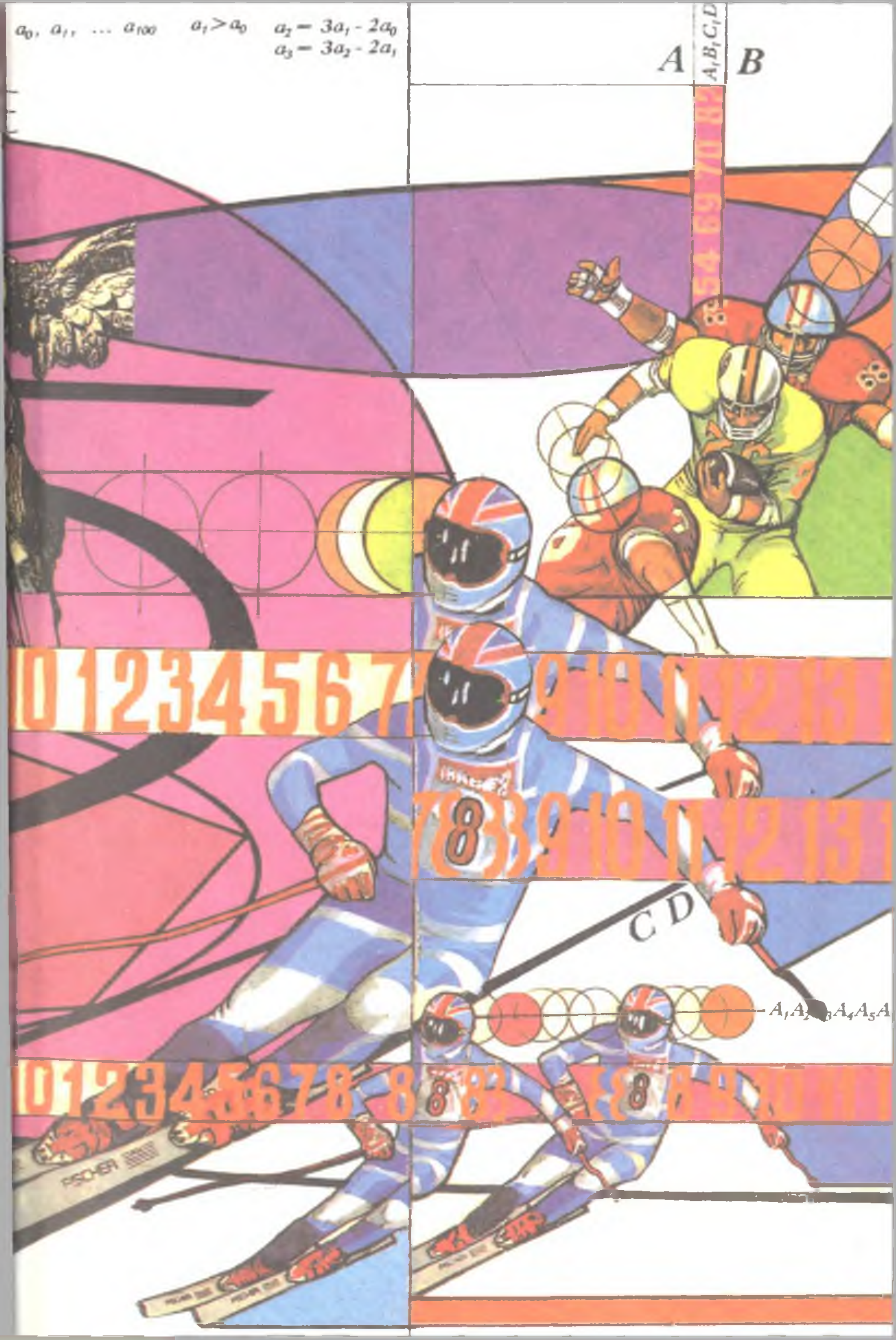
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

9




1 2 3 4 5 15
$x^2 + x + 1 = py$
ABCDEF ABCDEFGH
$x^2 + x + 1 = py$
6 7 8 9
ABCDE
7 8 9
O_3 O_1
1 2 3 4 5
7 8 9



$a_0, a_1, \ldots a_{100}$
$a_1 > a_0$
$a_2 = 3a_1 - 2a_0$
$a_3 = 3a_2 - 2a_1$
A
$A_1B_1C_1D_1$
B
C D
$A_1A_2A_3A_4A_5A$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Книга для учащихся
общеобразовательных учреждений

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
«УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА»
1997

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
М34

Авторы: Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько

Рецензент: кандидат педагогических наук В. Н. Руденко

М34 **Математические** олимпиады школьников: Книга для учащихся общеобразоват. учреждений / Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко и др.— М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997.— 208 с.: ил.— ISBN 5-09-007093-8.

Книга содержит задачи для девятиклассников, предлагавшиеся на заключительных этапах Всесоюзных математических олимпиад 1961—1992 гг., и является продолжением книги «Всероссийские математические олимпиады школьников» (авт. Г. Н. Яковлев и др.), вышедшей в издательстве «Просвещение» в 1992 г. Ко всем задачам даны ответы, указания к решению или задачи решены полностью. В книге много чертежей и рисунков.

$М\frac{4306020000-683}{103(03)-97}$ Без объявления ББК 22.1я72

ISBN 5-09-007093-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математические соревнования и конкурсы имеют давнюю историю. Так, сохранились сведения о том, что уже в Древней Индии (около 2000 г. до н.э.) для решения математических задач устраивались состязания в присутствии многочисленных зрителей. Широкое распространение получили математические турниры в средние века и позднее в эпоху Возрождения в Италии и в других странах. Причем эти турниры пользовались большой популярностью не только у математиков-любителей, но и у математиков-профессионалов. Достаточно назвать победу итальянского математика Никколо Тартальи над Фиором на математическом турнире по решению уравнений третьей степени, состоявшемся в Болонье в 1535 г., а также победу французского математика Франсуа Виета в 1594 г., решившего одно специальное уравнение 45-й степени, предложенное в качестве вызова всему ученому миру голландским математиком Андрианом ван Роуменом. Имеется целый ряд и других интересных исторических примеров математических соревнований и конкурсов по решению задач как очного, так и заочного характера. Но, несмотря на свой солидный возраст, эти соревнования отнюдь не исчерпали себя. Ведь если спортсмены-физкультурники уже вплотную подошли к пределам физических возможностей человека, то возможности человеческого разума еще далеко не исчерпаны. Будущее — за соревнованиями эрудитов!

Школьные математические олимпиады берут свое начало с так называемого «этвёшского соревнования», проведенного в 1894 г. в Венгрии по инициативе Лорана Этвёша — президента Венгерского физико-математического общества. В СССР первые математические соревнования школьников состоялись в Грузии. В 1933 г. в Тбилиси были проведены первые школьные и районные олимпиады. Инициаторами этих олимпиад были С. Е. Вашакидзе и Т. Д. Петраковская, впоследствии заслуженные учителя Грузинской ССР. Первые городские олимпиады по математике состоялись в Тбилиси и Ленинграде в 1934 г. В Ленинграде организаторами олимпиады были член-корреспондент АН СССР,

профессор Б. Н. Делоне и профессор В. А. Тартаковский. В следующем, 1935 г. были проведены городские математические олимпиады также в Москве и Киеве: в Москве — по инициативе члена-корреспондента АН СССР, профессора Л. Г. Шнирельмана и профессора Л. А. Люстерника (впоследствии члена-корреспондента АН СССР), а в Киеве — по инициативе академика АН УССР, профессора М. Ф. Кравчука. В дальнейшем олимпиадное движение распространяется по всей стране. Идея объединить олимпиадное движение в масштабе всей страны впервые была реализована в 1960 г., когда по инициативе оргкомитета XXIII Московской городской олимпиады для участия в ней были приглашены команды 13 областей РСФСР и 9 союзных республик. Опыт такого расширения рамок городской олимпиады оказался успешным, и начиная с 1961 г. регулярно стали проводиться так называемые *Всероссийские математические олимпиады.* Эти олимпиады проходили в четыре тура: школьные, районные и городские, областные олимпиады и заключительный (Всероссийский) тур. По такому регламенту в 1961—1966 гг. было проведено шесть Всероссийских олимпиад; следует отметить, что в заключительном этапе каждой из этих олимпиад принимали участие и команды многих союзных республик.

Именно опыт проведения этих шести Всероссийских олимпиад и послужил в дальнейшем основой для организации и проведения в 1967—1992 гг. в бывшем СССР *Всесоюзных математических олимпиад* (ВМО), которые включали в себя пять этапов (уровней) соревнования: школьные, районные и городские олимпиады (I, II этапы), олимпиады автономных республик, краев и областей (III этап), республиканские олимпиады (IV этап) и последний, V этап — заключительный этап Всесоюзной олимпиады.

В 1962 г. по инициативе академика АН СССР М. А. Лаврентьева Сибирским отделением Академии наук СССР и Новосибирским государственным университетом впервые была проведена Всесибирская олимпиада школьников. Эта олимпиада, ставшая затем традиционной, включала три этапа, второй из которых совпадал с областным (третьим) этапом ВМО.

Традиционно заключительный этап Всесоюзной олимпиады проводился в различных городах страны в апреле в два тура (в разные дни), на каждом из которых предлагалось, как правило, четыре задачи и на их решение в каждом туре отводилось 5 часов.

Настоящим символом Всесоюзной олимпиады стал значок в форме правильного пятиугольника с условно изображенным думающим человечком, который впервые появился в 1968 г. на второй ВМО. Такие значки (разных цветов) вручались участникам олимпиады, членам жюри и работникам оргкомитета. Вообще же специальный значок для участников олимпиады стали выпускать начиная с IV Всероссийской олимпиады 1963 г. (Кроме того,

свои отличительные олимпиадные значки имели многие республиканские и городские олимпиады.)

Научная программа заключительного этапа олимпиады всегда была достаточно насыщенной. Прежде всего, конечно, она включала сами соревнования по решению задач, но, кроме того, члены жюри часто выступали перед участниками олимпиады с научно-популярными лекциями по математике, проходили встречи с представителями научной и педагогической общественности города, где проводился заключительный этап. Одна из традиций заключительного этапа олимпиады — математический бой между командой жюри и командой школьников — участников олимпиады, и нужно сказать, что в этом, по существу театрализованном, соревновании нередко победителем оказывалась команда школьников.

Организаторы математических олимпиад никогда не стремились превратить их в чисто спортивное мероприятие. Олимпиады должны были способствовать укреплению взаимопонимания между школьниками различных союзных республик и городов, сыграть роль своего рода научных конференций для школьников, помочь ребятам расширить свои знания по истории и культуре республики, где проходил заключительный этап, дать возможность пообщаться друг с другом школьникам, которых объединяли общий интерес и любовь к математике.

Общее руководство организацией и проведением Всесоюзных олимпиад на всех этапах осуществлял Центральный оргкомитет олимпиады, а за научную, содержательную сторону дела на ВМО отвечала созданная при Министерстве просвещения СССР методическая комиссия по математике, на базе которой формировался состав жюри заключительного этапа олимпиады. В обязанности Центрального оргкомитета входило также непосредственное руководство подготовкой и проведением заключительного этапа ВМО, в частности формирование состава жюри этого этапа и утверждение наборов задач, подготовленных методической комиссией для республиканского и заключительного этапов олимпиады. По сложившейся традиции Центральный оргкомитет и методическую комиссию возглавляли крупные ученые: председателем Центрального оргкомитета был академик И. К. Кикоин, председателем методической комисии и одновременно заместителем председателя Центрального оргкомитета — академик А. Н. Колмогоров; в 1984 г. Центральный оргкомитет возглавил академик Ю. А. Осипьян, а методическую комиссию за год до этого — академик АН УССР, профессор Московского университета Б. В. Гнеденко.

Отбор задач и составление олимпиадных заданий, несомненно, представляли самую трудную и важную часть работы по организации олимпиад. Как правило, авторами задач ВМО являлись студенты, аспиранты и преподаватели различных вузов, причем практически на каждой олимпиаде были задачи, придуманные бывшими участниками и призерами ВМО. Следует, однако, иметь в виду, что часто бывает очень нелегко назвать автора той или иной задачи, поскольку в процессе обсуждения задача обычно уточняется, а иногда и обобщается, получает другую формулировку и новое решение.

К олимпиадным задачам предъявлялись очень высокие требования. Они должны были быть красивыми и интересными с математической точки зрения, их формулировки — яркими и запоминающимися, а решение по возможности основываться на оригинальных и новых идеях. При составлении заданий заключительного этапа методическая комиссия руководствовалась двумя основными принципами. Во-первых, в каждый из дней задания должны были затрагивать разные разделы школьной программы так, чтобы задания в целом отвечали различным вкусам, т. е. содержали и «чисто олимпиадные» задачи, основанные на одной-двух красивых идеях, и задачи, требующие аналитической культуры. Во-вторых, задания в целом должны были быть разумной сложности, чтобы каждый участник заключительного этапа ВМО решил хотя бы одну задачу и не менее половины участников справились с половиной всего задания. Интересно, что, несмотря на то, что все олимпиадные задачи тщательно отбирались, а авторские решения отобранных задач в процессе работы методической комиссии неоднократно улучшались, очень часто участникам олимпиады удавалось найти более изящные и короткие решения.

Иногда Центральный оргкомитет ВМО и методическая комиссия проводили небольшие эксперименты или включали в сам ход заключительного этапа некоторые новые элементы. Так, на заключительном этапе второй ВМО один из туров был устным. Появление на заключительном этапе олимпиады столь необычного по форме соревнования объясняется тем, что в том году заключительный этап проводился в Ленинграде, а устный тур — это традиция ленинградских олимпиад. Учитывая высокую квалификацию ленинградского жюри и большой опыт в проведении устного тура, Центральный оргкомитет решил в порядке экспе-

римента провести заключительный этап по схеме ленинградских олимпиад. На устном туре каждую задачу (а их также было пять) нужно было не только решить, но затем с полным обоснованием рассказать ее решение члену жюри или по крайней мере указать общий ход рассуждений и основные моменты проводимого доказательства. Не следует думать, что предложенные здесь задачи носили «устный» характер; их трудность вполне соответствовала трудности задач письменного тура.

На нескольких заключительных этапах ВМО, например в 1971, 1976, 1977 гг., один из туров целиком был посвящен задачам научно-исследовательского характера (отдельные такие задачи встречались на многих олимпиадах). По замыслу оргкомитета и жюри такие туры должны были имитировать реальную научно-исследовательскую работу математика, основное содержание которой состоит из длительных размышлений в рамках одной темы. Впервые научно-исследовательский тур проводился на V олимпиаде в 1971 г. только в X классе, на нем было предложено три трудные задачи (каждая состояла из нескольких пунктов). Перед формулировкой самих задач участники прочитали следующий текст-обращение: «Вам предлагаются три задачи. Верное решение любой из них представляет серьезные трудности и требует много времени. Выберите одну из этих задач и постарайтесь продвинуться в ней как можно дальше...»

Начиная с 1987 г. в некоторые годы в содержательной части программы заключительного тура ВМО отводилось время на компьютерные состязания, куда приглашались все желающие участники олимпиады.

Распад СССР и возникновение 15 независимых государств подвели естественным образом черту в работе по проведению ВМО. Последняя, 26-я Всесоюзная олимпиада, которую по взаимной договоренности стран-участниц решено было назвать Межреспубликанской, состоялась в 1992 г.

О некоторых итогах заключительного этапа ВМО и его «географии» можно судить по данным, приведенным в таблице.

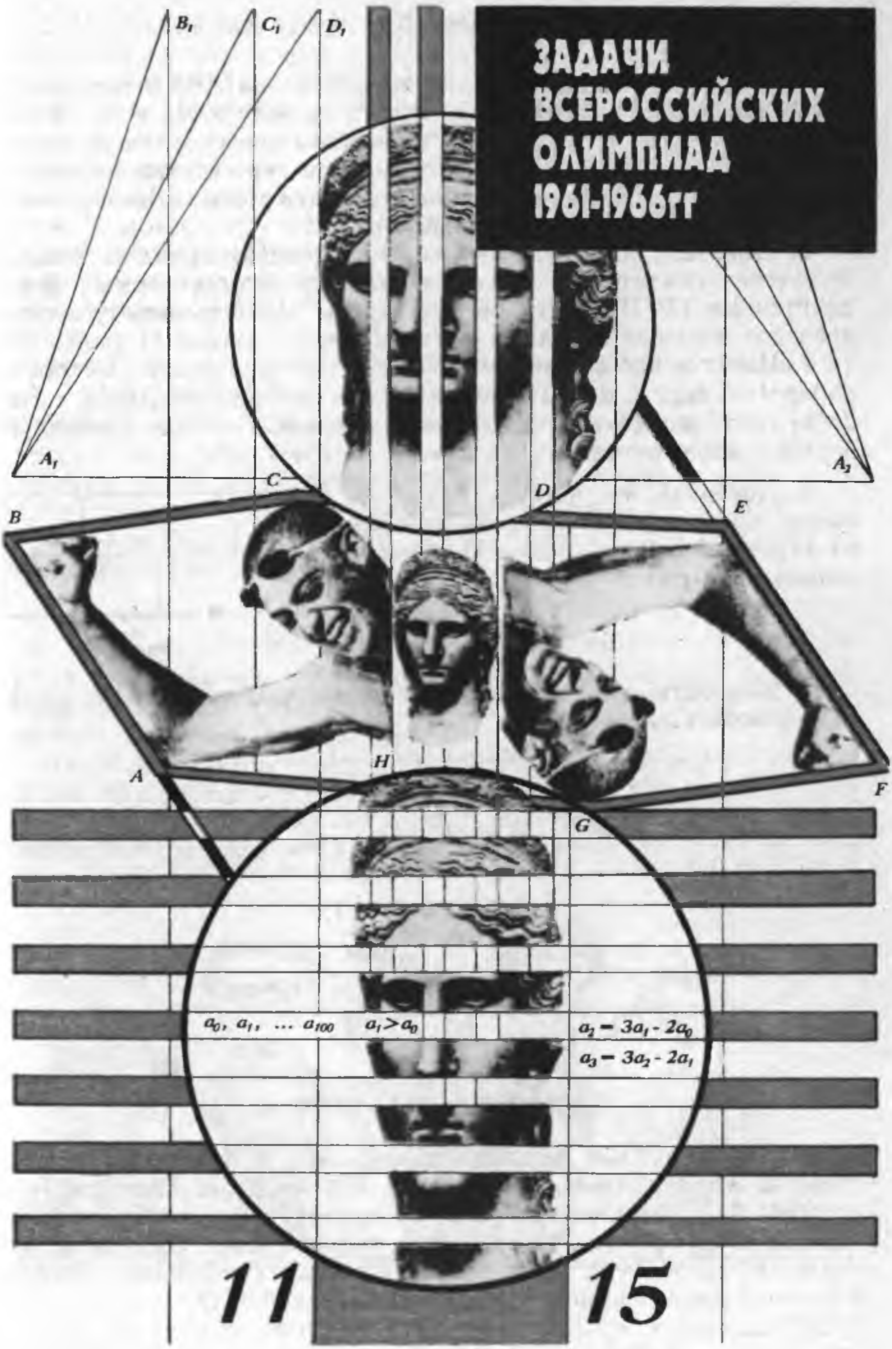
Номер олимпиады	Год	Город	Число участников	Число премий		
				I	II	III
I	1967	Тбилиси	Более 450	2	3	11
II	1968	Ленинград	572	2	13	28
III	1969	Киев	660	8	21	45
IV	1970	Симферополь	645	7	28	36
V	1971	Рига	550	8	19	28
VI	1972	Челябинск	564	13	27	39
VII	1973	Кишинев	588	11	29	55
VIII	1974	Ереван	599	11	37	47
IX	1975	Саратов	144	14	28	35
X	1976	Душанбе	160	12	24	32
XI	1977	Таллин	152	14	24	24
XII	1978	Ташкент	153	11	32	24
XIII	1979	Тбилиси	152	14	31	36
XIV	1980	Саратов	158	7	35	41
XV	1981	Алма-Ата	148	12	37	35
XVI	1982	Одесса	156	10	20	36
XVII	1983	Кишинев	146	14	27	38
XVIII	1984	Ашхабад	159	16	34	32
XIX	1985	Могилев	162	14	24	42
XX	1986	Ульяновск	163	13	22	19
XXI	1987	Фрунзе	166	11	30	32
XXII	1988	Донецк	172	11	25	33
XXIII	1989	Рига	164	9	30	27
XXIV	1990	Ашхабад	165	12	24	30
XXV	1991	Смоленск	175	19	30	44
XXVI	1992	Алма-Ата	173	8	39	38

Математические олимпиады школьников в бывшем СССР пользовались заслуженной популярностью и справедливо завоевали международный авторитет, оказав влияние на формирование системы Международных математических олимпиад. Они способствовали развитию устойчивого интереса учащихся к изучению математики и совершенствованию всего школьного математического образования.

Предлагаемая вниманию читателей книга содержит все задачи, которые давались в девятом классе на заключительных этапах Всероссийских 1961—1966 гг. и Всесоюзных математических олимпиад с момента их возникновения до 1992 г. включительно. Тексты задач приводятся в основном в том виде, в каком они предлагались на соответствующей олимпиаде; внесены лишь несущественные изменения, которые, в частности, вызваны тем, что в школьном курсе математики произошли некоторые изменения в терминологии и обозначениях. Чтобы сохранить полное представление о каждой олимпиаде в отдельности, задачи в книге тематически не разделены и даны по годам в том порядке, в каком они давались на соответствующей олимпиаде. Кроме того, для удобства все задачи снабжены единой нумерацией. Ко всем задачам приведены полные решения.

Книга адресована в первую очередь тем, кто любит решать интересные и нестандартные математические задачи или хочет этому научиться. Несомненную помощь, на наш взгляд, она может принести учителям при проведении внеклассных занятий с учащимися. Первые две задачи в каждом туре можно использовать для работы кружков или факультативов, что же касается последних задач, то самостоятельный разбор учениками их решений можно рассматривать как своеобразную форму научной работы школьников. Помещенный в конце книги тематический указатель послужит учителю своеобразным путеводителем при поиске задач на вполне определенную тему или на конкретный метод решения.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить всех членов методической комиссии по математике Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников, с которыми им посчастливилось вместе работать.


ЗАДАЧИ
ВСЕРОССИЙСКИХ
ОЛИМПИАД
1961-1966гг
B_1
C_1
D_1
A_1
A_2
C
D
B
E
A
H
F
G
$a_0,\ a_1,\ \dots\ a_{100}$
$a_1 > a_0$
$a_2 = 3a_1 - 2a_0$
$a_3 = 3a_2 - 2a_1$
11
15

ОЛИМПИАДА* 1961 г.

1. С центрами в вершинах прямоугольника $ABCD$ построены непересекающиеся окружности, причем $R_A+R_C=R_B+R_D$. К парам окружностей A и C, B и D проведены внешние общие касательные. Доказать, что в полученный при пересечении касательных четырехугольник можно вписать окружность. (Договоримся окружность обозначать ее центром.)

2. Доказать, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11. Привести пример, когда разность между двумя последовательными числами с суммой цифр, кратной 11, равна 39.

3. Имеется набор положительных чисел (a, b, c, d). Построим набор (ab, bc, cd, da). Из него образуем набор $(ab^2c, bc^2d, cd^2a, da^2b)$ и т. д. Доказать, что если мы когда-нибудь придем к первоначальному набору, то $a=b=c=d=1$.

4. Доказать, что не существует ломаной, которая пересекала бы каждый из отрезков фигуры (рис. 1) один и только один раз.

Рис. 1

5. Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d, удовлетворяющих равенствам:

$$abcd-a=\underbrace{11\ldots1}_{1961},$$

$$abcd-b=\underbrace{11\ldots1}_{1960},$$

$$abcd-c=\underbrace{11\ldots1}_{1959},$$

$$abcd-d=\underbrace{11\ldots1}_{1958}.$$

ОЛИМПИАДА 1962 г.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении стороны AB откладывается отрезок $BM=AB$, на продолжении стороны BC — отрезок $CN=BC$, на продолжении стороны CD — отрезок $DP=CD$ и на продолжении стороны DA — отрезок $AQ=AD$. Доказать, что площадь четырехугольника $MNPQ$ в 5 раз больше площади четырехугольника $ABCD$.

* На этой олимпиаде участвовали и школьники седьмых классов.

7. Даны окружность с центром в точке O_1 и прямая l, проходящая через эту точку. Строятся всевозможные окружности, проходящие через точку O_1, центры O_2 которых лежат на прямой l. Пусть M_1M_2 — общая касательная к окружностям O_1 и O_2. Найти геометрическое место точек касания прямой M_1M_2 со второй окружностью.

8. Даны целые положительные числа a_0, a_1, ..., a_{100}, такие, что $a_1 > a_0$ и $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1$, ..., $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Доказать, что $a_{100} > 2^{99}$.

9. Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d, таких, что выражение $ax^3 + bx^2 + cx + d$ равно 1 при $x = 19$ и равно 2 при $x = 62$.

10. В квадратную таблицу 25×25 вписаны числа, равные $+1$ или -1. Произведение всех чисел, стоящих в первой строке, обозначим через a_1. Произведение всех чисел, стоящих во второй строке, обозначим через a_2 и т. д. Произведение всех чисел, стоящих в первом столбце, обозначим b_1, произведение всех чисел, стоящих во втором столбце, обозначим b_2 и т. д. Получаем 50 чисел a_1, a_2, ..., a_{25}, b_1, b_2, ..., b_{25}. Доказать, что их сумма не может быть равна нулю.

ОЛИМПИАДА 1963 г.

11. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Доказать, что найдется точка, через которую проходят все пять окружностей.

12. В шахматном турнире участвовало 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

13. Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

14. Натуральные числа a и b взаимно просты. Доказать, что наибольший общий делитель чисел $a+b$ и a^2+b^2 равен 1 или 2.

15. На дуге AmB окружности берется произвольная точка M. Из середины K отрезка MB опускается перпендикуляр KP на прямую MA. Доказать, что прямые KP проходят через одну точку, не зависящую от положения точки M.

ОЛИМПИАДА 1964 г.

16. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найти углы треугольника.

17. Доказать, что ни при каком натуральном m число $m(m+1)$ не является степенью никакого другого целого числа.

18. У каждого из натуральных чисел от единицы до миллиарда подсчитывается сумма его цифр. Затем у каждого числа из получившегося при сложении миллиарда чисел снова подсчитывается сумма цифр и т. д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена последовательность, состоящая из миллиарда однозначных чисел. Каких чисел в этой последовательности будет больше: единиц или двоек?

19. Дан произвольный набор из $2k+1$ целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$. Из него получается новый набор $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2k+1}+a_1}{2}$. Из этого набора по тому же правилу следующий и т. д. Доказать, что числа всех получающихся таким образом наборов являются целыми только в том случае, когда $a_1=a_2=\ldots=a_{2k+1}$.

20. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Доказать, что

$$AB-DE=FE-BC=DC-FA.$$

ОЛИМПИАДА 1965 г.

21. Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может независимо от остальных принимать значение 0, 1 и -1. Какое наименьшее значение может принимать при этом сумма всевозможных попарных произведений этих чисел?

22. Имеется доска 3×3 клетки и 9 карточек размером в одну клетку, на каждой из которых записано некоторое число. Каждый из двоих играющих по очереди выбирает одну из карточек и кладет ее на пустую клетку доски. После того как все карточки разложены, первый игрок (начинающий) подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму чисел, стоящих в левом и правом столбцах. Выигрывает

тот, у кого сумма больше. Доказать, что при правильной игре первого второй не сможет выиграть независимо от того, какие числа написаны на карточках.

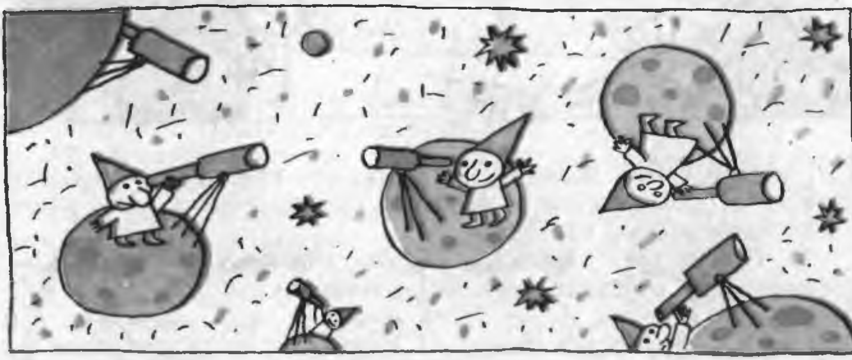
23. Около треугольника ABC описана окружность. Хорды, соединяющие середину дуги AC с серединами дуг AB и BC, пересекают стороны AB и BC в точках K и H. Доказать, что отрезок KH параллелен стороне AC и проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

24. Автобусный билет будем называть *счастливым*, если сумма первых трех цифр его шестизначного номера равна сумме последних трех цифр. Доказать, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

25. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает некоторый отрезок поверхности моря, начинающийся у острова. Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси так, что конец его луча перемещается со скоростью v. Доказать, что катер, имеющий максимальную скорость $\frac{v}{8}$, не сможет незаметно подойти к острову.

ОЛИМПИАДА 1966 г.

26. На каждой из планет некоторой Солнечной системы находится астроном, наблюдающий ближайшую к нему планету. Расстояния между планетами попарно различны. Доказать, что если число планет нечетно, то существует планета, которую никто не наблюдает.

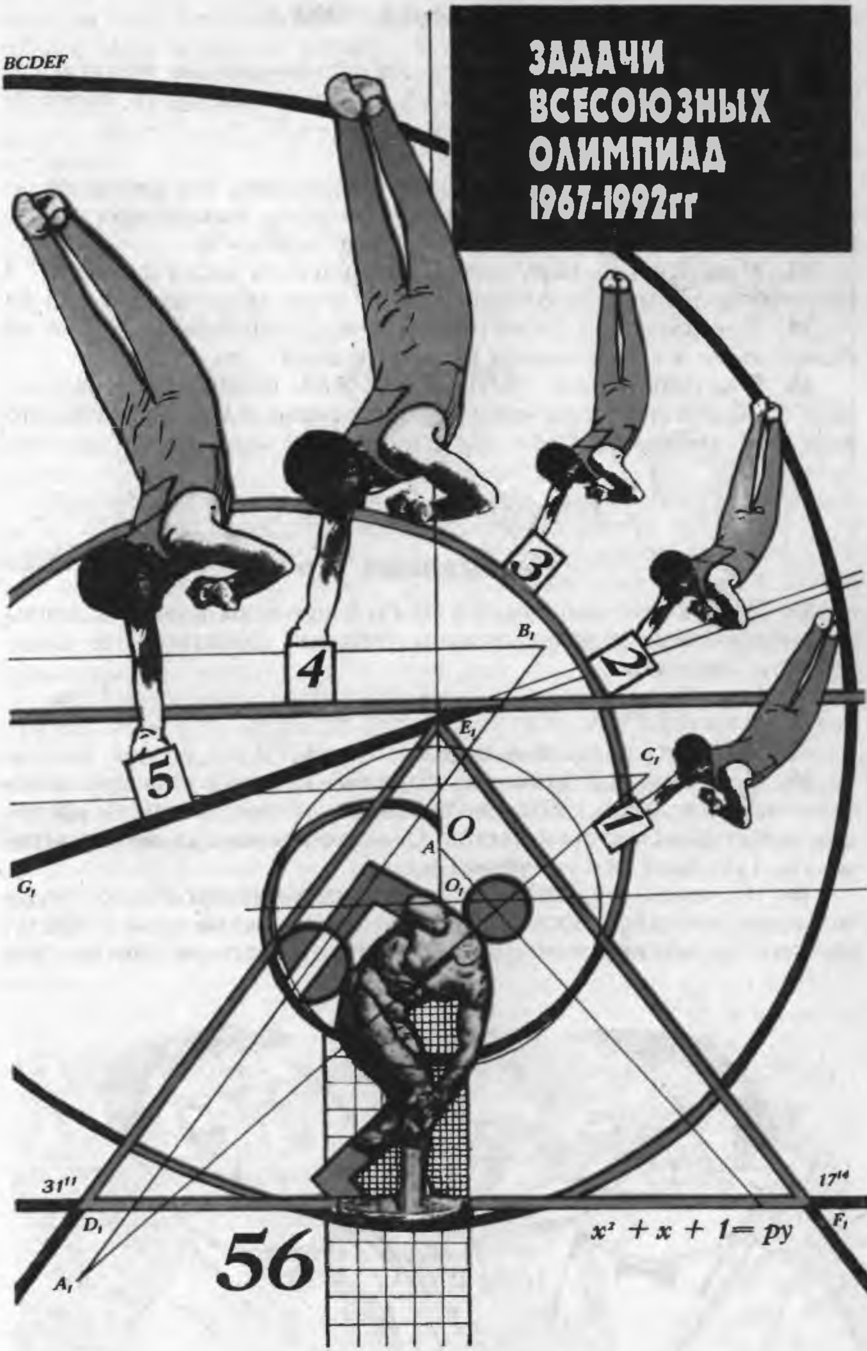


27. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что x^2+y и $x+y^2$ являются квадратами целых чисел?

28. Точки B и C лежат внутри отрезка AD. Доказать, что если $AB=CD$, то для любой точки P выполняется неравенство $PA+PD \geqslant PB+PC$.

29. Восьмиклассники выстроены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его ростом. Доказать, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту и шеренгу семиклассников выстроить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

30. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $ABCD$, стороны которого лежат на линиях сетки, причем длина отрезка AD в k раз больше длины отрезка AB (k — натуральное число). Рассматриваются всевозможные пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C. Доказать, что среди этих путей в k раз больше тех, у которых первое звено лежит на AD, чем тех, у которых первое звено лежит на AB.



ЗАДАЧИ
ВСЕСОЮЗНЫХ
ОЛИМПИАД
1967-1992гг
BCDEF
3
4
2
5
1
B_1
E_1
C_1
O
A
O_1
G_1
31^{11}
17^{14}
D_1
F_1
A_1
56
$x^2 + x + 1 = py$

ОЛИМПИАДА 1967 г.

31. В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Доказать, что сумма полученного и исходного чисел не равна $\underbrace{999...9}_{1967 \text{ цифр}}$.

32. Прожектор освещает угол 90°. Доказать, что расположенные в четырех произвольных точках плоскости прожектора можно направить так, чтобы они осветили всю плоскость.

33. Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

34. Доказать, что существует число, делящееся на 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

35. В остроугольном треугольнике ABC высота AH, наибольшая из высот треугольника, равна медиане BM. Доказать, что угол ABC меньше 60°.

ОЛИМПИАДА 1968 г.

Письменный тур

36. В восьмиугольнике $ABCDEFGH$ все углы равны, а длины всех сторон выражаются целыми числами. Доказать, что справедливы равенства:

$$AB=EF,\ BC=FG,\ CD=GH,\ HA=DE.$$

37. Какое из чисел больше: 31^{11} или 17^{14}?

38. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток она может пересекать (укажите все значения)?

39. Из числа студентов, поступивших в университет, 50 человек знают английский язык, 50 знают французский язык и 50 студентов — испанский язык. Доказать, что студентов можно раз-

бить на пять (необязательно равных) групп так, чтобы в каждой группе было ровно 10 человек, знающих английский язык, ровно 10 человек, знающих французский язык, и ровно 10 человек, знающих испанский язык, если известно, что некоторые из студентов могут знать по нескольку из этих языков, тогда как другие ни одного.

40. Доказать тождество

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=$$
$$=11\cdot\left(\frac{1}{(x-10)(x+1)}+\frac{1}{(x-9)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x-1)(x+10)}\right).$$

Устный тур

41. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «плюс» и «минус» так, как показано ниже.

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Разрешается одновременно менять знаки во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак в любой угловой клетке). Доказать, что, сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу, составленную из одних «плюсов».

42. Треугольник ABC своими медианами разбит на шесть треугольников, в каждый из которых вписана окружность. Известно, что радиусы четырех из этих шести окружностей равны. Доказать, что треугольник ABC правильный.

43. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел p, таких, что уравнение

$$x^2+x+1=py$$

разрешимо в целых числах x, y.

44. После окончания выступлений 20 фигуристов каждый из 9 судей распределяет по своему усмотрению места с первого по

двадцатое. Известно, что у каждого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитаем для каждого фигуриста сумму полученных им мест и обозначим через S наименьшую из двадцати сумм. Найти наибольшее значение, которое может принимать S.

45. В каждой из двух групп чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ по одному разу встречаются все числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. Известно, что справедливы неравенства

$$a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n+b_n.$$

Доказать, что для каждого $m=1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство $a_m+b_m \leqslant \frac{4}{m}$.

ОЛИМПИАДА 1969 г.

Первый день

46. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась такая точка E, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Доказать, что $BC=\frac{1}{2}AD$.

47. В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — 4 собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по сторонам квадрата. Известно, что волк задирает собаку, а 2 собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости волка. Доказать, что собаки имеют возможность не выпустить волка из квадрата.

48. Дана конечная последовательность нулей и единиц, обладающая следующими двумя свойствами:

а) если в некотором произвольном месте выделить 5 цифр подряд и в любом другом месте также выделить 5 цифр подряд (эти пятерки могут перекрываться, например 01101110), то эти пятерки будут различны;

б) если к последовательности добавить справа любую из цифр 0 или 1, то свойство а) для новой последовательности уже не выполняется.

Доказать, что первая четверка цифр данной последовательности совпадает с последней четверкой.

Второй день

49. Четыре различных трехзначных числа, начинающихся с одной и той же цифры, обладают тем свойством, что их сумма делится на некоторые три из них без остатка. Найти эти числа.

50. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно долететь, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

51. Рассматривается выпуклый пятиугольник, у которого все стороны равны. Доказать, что внутри его найдется такая точка, лежащая на наибольшей диагонали, из которой все стороны видны под углами, не превышающими прямого.

ОЛИМПИАДА 1970 г.

52. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Найти на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.

53. Доказать, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

54. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

55. Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Доказать, что хотя бы одна цифра их суммы будет четной.

56. Каждая сторона правильного треугольника разбита на 10 равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на 100 маленьких треугольников. Назовем *цепочкой* последовательность треугольников, в которой ни один треугольник не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Доказать, что в каждой цепочке не более, чем 91 треугольник.

ОЛИМПИАДА 1971 г.

Первый день

57. Доказать, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

58. Дан треугольник $A_1A_2A_3$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке. Доказать, что если $A_1B_1=A_2D_2$ и $A_2B_2=A_3D_3$, то $A_3B_3=A_1D_1$.

59. Два школьника играют в следующую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось правило: если число b записано под числом a, а число d — под числом c, то $a+d=b+c$. Второй игрок, зная это правило, хочет определить все написанные числа. Ему разрешается задавать первому игроку вопросы типа «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т. п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа?

60. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Доказать, что площадь этой фигуры не превышает 0,34. (Можно считать, что граница фигуры, о которой говорится в условии, состоит из отрезков и дуг окружностей.) Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Второй день

61. а) Доказать, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Доказать аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

62. Доказать, что из 25 различных положительных чисел можно выбрать два таких числа, что ни одно из оставшихся не равно ни сумме, ни разности (между большим и меньшим) выбранных чисел.

63. а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2...A_{12}$ стоит знак «минус», а в остальных вершинах — знак «плюс». Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Доказать, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак «минус», а в остальных вершинах — «плюсы».

б) Доказать то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

в) Доказать то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трех последовательных вершинах многоугольника.

ОЛИМПИАДА 1972 г.

Первый день

64. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка CD за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Доказать, что $\angle QNM = \angle MNP$.

65. На прямой дано 50 отрезков. Доказать, что верно хотя бы одно из следующих утверждений: а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку; б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

66. Найти наибольшее целое число x, такое, чтобы число

$$4^{27}+4^{1000}+4^{x}$$

являлось полным квадратом.

Второй день

67. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Доказать, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

68. Семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ вписан в окружность. Доказать, что если центр этой окружности лежит внутри семиугольника, то сумма углов при вершинах A_1, A_3 и A_5 меньше 450°.

69. Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее по своему усмотрению вместо одной из звездочек в следующей разности:

$$
\begin{array}{r} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \end{array}
$$

Затем первый называет еще одну цифру (необязательно отличную от предыдущей) и т. д. 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Доказать, что: а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся разность стала не больше 4000 независимо от того, какие цифры называл первый; б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000 независимо от того, куда расставляет цифры второй.

Примечание. В данной задаче одно из чисел может начинаться с нуля. Например, 0453 — это число 453.

ОЛИМПИАДА 1973 г.

Первый день

70. На суде в качестве вещественного доказательства были предъявлены 14 монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания?

б) Показать, что с помощью трех взвешиваний он может доказать даже больше: может доказать, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю настоящие.

71. Доказать, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть квадратом целого числа.

72. Даны n точек, $n>4$. Доказать, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум. (Каждые две точки соединяются стрелкой только в одном направлении, идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении.)

Второй день

73. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены три подобных между собой остроугольных треугольника AC_1B, BA_1C, CB_1A (при этом $\angle AB_1C=\angle ABC_1=\angle A_1BC$, $\angle BCA_1=\angle B_1CA$, $\angle CAB_1=\angle C_1AB$).

а) Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A, пересекаются в одной точке.

б) Доказать, что в той же точке пересекаются прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

74. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Доказать, что это можно сделать при любом N.

75. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернулся последним ходом на исходное поле (король ходит по обычным правилам). Когда нарисовали его путь, соединив отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, то получилась замкнутая ломаная без самопересечений.

а) Привести пример, показывающий, что король мог сделать ровно 28 ходов по горизонталям и вертикалям.

б) Доказать, что он не мог сделать меньше чем 28 таких ходов.

ОЛИМПИАДА 1974 г.

Первый день

76. На каждой из карточек написано одно из двух чисел: $+1$ или -1. Разрешается, указав на три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел, записанных на этих карточках?» (сами числа нам не сообщают). Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел, записанных на всех карточках, если число карточек равно: а) 30; б) 31; в) 32? В каждом случае доказать, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

77. Среди чисел вида 36^k-5^l, где k и l — натуральные числа, найти наименьшее по абсолютной величине. Доказать, что найденное число является наименьшим из всех положительных чисел рассматриваемого множества.

78. а) Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника больше 1. Всегда ли в таком шестиугольнике найдется диагональ длиной больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли в шестиугольнике $ABCDEF$ найдется сторона длиной больше 1?

Второй день

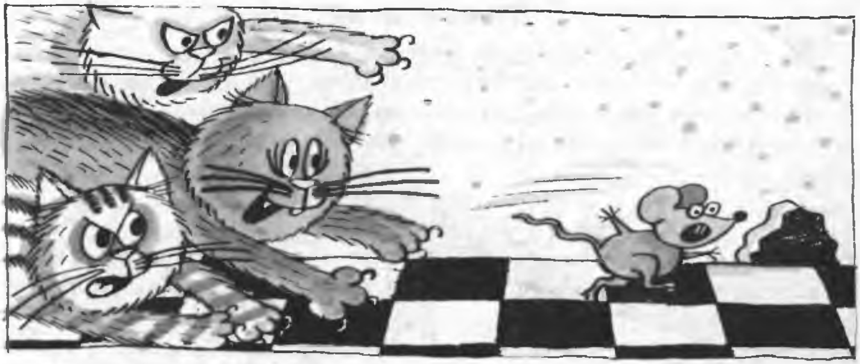
79. Найти все натуральные числа n и k, такие, что n^n имеет k цифр, а k^k имеет n цифр.

80. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD=CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и L. Доказать, что $KL=LB$.

81. На шахматной доске 8×8 двое играют в игру «кошки-мышки». У первого одна фишка — мышка, у второго несколько фишек — кошек. Все фишки ходят одинаково: вправо, влево, вверх или вниз на одну клетку. Если мышка оказалась на краю доски, то при очередном ходе она спрыгивает с доски; если кошка и мышка попадают на одну клетку, то кошка съедает мышку.

Играющие ходят по очереди, причем, делая ход, второй игрок передвигает сразу всех своих кошек (при этом разных кошек он может сдвигать в разных направлениях). Начинает мышка. Она старается спрыгнуть с доски, а кошки стараются до этого ее съесть.

а) Пусть кошек всего две. Мышка уже поставлена на какую-то клетку (не на краю доски). Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?



б) Пусть кошек три, но зато мышка имеет лишний ход: в первый раз она делает два хода подряд. Доказать, что мышка сможет убежать от кошек, каково бы ни было начальное расположение фишек.

82. Доказать, что числа 1, 2, 3, ..., 32 можно расставить так, чтобы полусумма любых двух из этих чисел не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними.

ОЛИМПИАДА 1975 г.

Первый день

83. Из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180°, получен треугольник $A_1B_1C_1$ (точка A_1 — образ точки A и т. д.). Отрезки AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2, BC и B_1C_1 — в точке A_2, CA и C_1A_1 — в точке B_2. Доказать, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны.

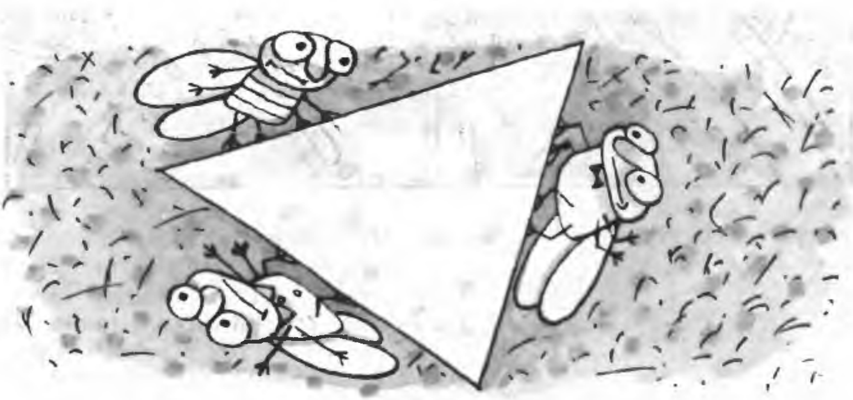
84. Дан треугольник ABC площадью 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — точку Y на стороне BC, после чего первый — точку Z на стороне AC. При этом первый игрок стремится получить треугольник XYZ наибольшей площади, а второй — наименьшей. Какое наибольшее значение площади треугольника XYZ может обеспечить первый игрок?

85. Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32-угольник, все вершины которого расположены в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

86. В квадрате 13×13 клеток отметили центры 53 клеток. Доказать, что среди отмеченных точек всегда найдутся четыре, являющиеся вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата.

Второй день

87. Три мухи ползают по сторонам $\triangle ABC$ так, что центр тяжести образуемого ими треугольника остается на одном месте. Доказать, что он совпадает с центром тяжести $\triangle ABC$, если известно, что одна из мух проползла по всей границе $\triangle ABC$.



88. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две различные цифры и записать вместо них цифру, отличную от стертых (вместо 0 и 1 — цифру 2, вместо 1 и 2 — цифру 0, вместо 0 и 2 — цифру 1). Доказать, что если в результате таких операций на доске останется одно число, то оно не зависит от порядка, в котором производились стирания.

89. На плоскости даны горизонтальная полоса, края которой — параллельные прямые, и 20 прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих прямых пересекаются внутри полосы, и никакие три из них не имеют общей точки. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижнем крае полосы, идущие по данным прямым, заканчивающиеся на верхнем крае полосы и обладающие следующим свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх, достигнув точки пересечения прямых, переходим на другую прямую. Доказать, что среди таких путей:

а) есть не менее 10 путей без общих точек;

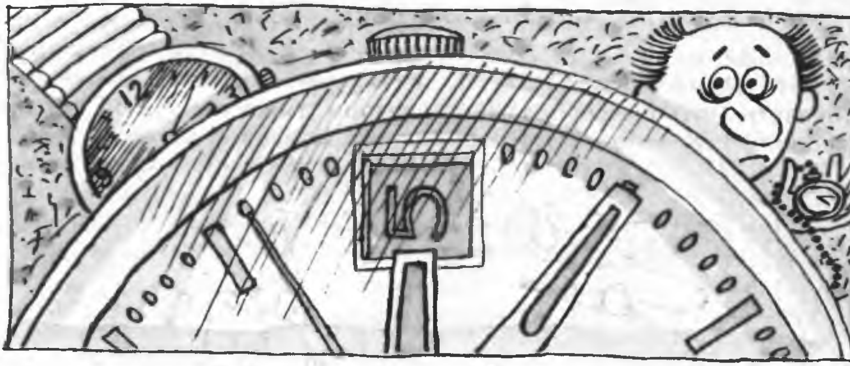
б) есть путь, состоящий не менее чем из 20 отрезков;

в) есть путь, проходящий по всем 20 прямым.

ОЛИМПИАДА 1976 г.

Первый день

90. На круглом столе лежат 50 правильно идущих часов. Доказать, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.



91. В строке подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется 2-я строка чисел по следующему правилу: под каждым числом a 1-й строки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз a встречается в 1-й строке. Из 2-й строки таким же образом получается 3-я: под каждым числом b 2-й строки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз b встречается во 2-й строке. Затем из 3-й строки так же строится 4-я, из 4-й строки — 5-я и т. д.

а) Доказать, что некоторая строка совпадает со следующей.

б) Более того, доказать, что 11-я строка совпадает с 12-й.

в) Привести пример такой первоначальной строки, для которой 10-я строка не совпадает с 11-й.

92. На плоскости даны три окружности одинакового радиуса.

а) Доказать, что если все они пересекаются в одной точке, как показано на рисунке 2, то сумма величин отмеченных дуг AK, CK, EK равна 180°.

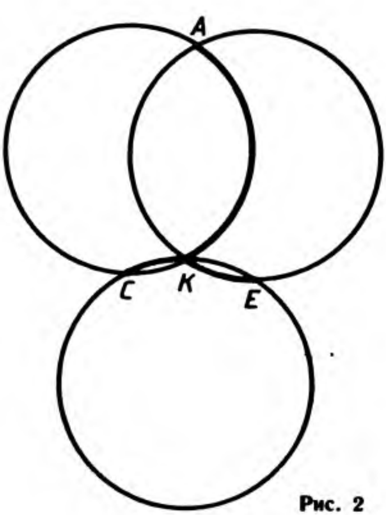


Рис. 2

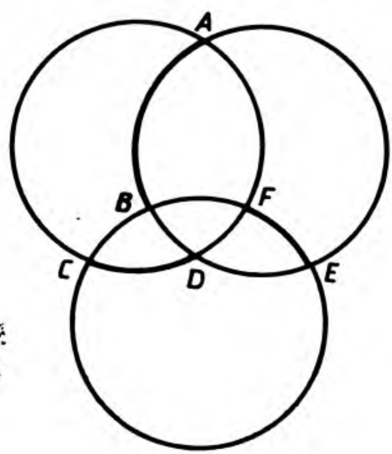


Рис. 3

б) Доказать, что если они расположены так, как показано на рисунке 3, то сумма величин дуг AB, CD, EF равна 180°.

93. Натуральные числа x_1, x_2 меньше 10 000. Исходя из них строится последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{21}, \ldots$, где число x_3 равно $|x_1-x_2|$, число x_4 равно наименьшему из чисел $|x_1-x_2|$, $|x_2-x_3|$, $|x_1-x_3|$, число x_5 равно наименьшему из чисел $|x_1-x_2|$, $|x_1-x_3|$, $|x_1-x_4|$, $|x_2-x_3|$, $|x_2-x_4|$, $|x_3-x_4|$ и т. д. (каждое следующее число равно наименьшей из абсолютных величин разностей между парами предыдущих чисел). Доказать, что $x_{21}=0$.

Второй день

94. На шахматной доске размером 99×99 отмечена фигура Ф (эта фигура будет разной в пунктах а), б), в)). В каждой клетке фигуры Ф сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Ф, при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

а) Пусть фигура Ф — «центральный крест», т. е. объединение средней вертикали и средней горизонтали (на рисунке 4 подобная фигура для экономии места изображена на доске размером 13×13 клеток). Доказать, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку.

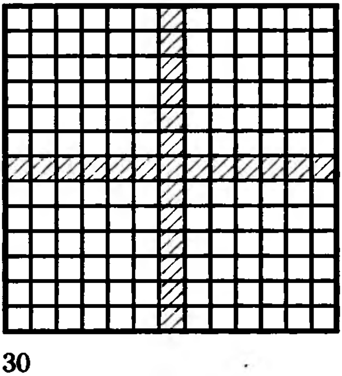
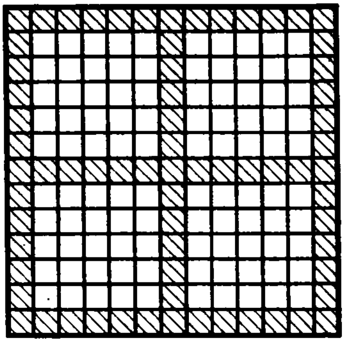


Рис. 4

Рис. 5



б) Верно ли это утверждение, если фигура Ф — «оконная рама», т. е. объединение «центрального креста» и всех граничных клеток доски (рис. 5)?

в) Верно ли это утверждение, если фигура Ф — вся доска?

95. Треугольник, длины всех сторон которого больше 1 см, назовем «большим». Дан правильный треугольник ABC, длина стороны которого 5 см. Доказать, что:

а) из треугольника ABC можно вырезать 1000 «больших» треугольников;

б) треугольник ABC можно разрезать не менее чем на 1000 «больших» треугольников;

в) треугольник ABC можно разрезать не менее чем на 1000 «больших» треугольников, соблюдая следующее условие: любые два «больших» треугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо сторона одного из них является стороной другого (такое разрезание называется *триангуляцией*);

г) утверждения а) — в) справедливы для правильного треугольника со стороной 3 см.

96. n-значное число будем называть *универсальным*, если вычеркиванием части его цифр можно получить любое наперед заданное девятизначное число, ~~все~~ цифры которого различны и не равны нулю.

а) Привести пример универсального числа из $9^2=81$ цифры.

б) Привести пример универсального числа из $9^2-9+1=73$ цифр.

в) Доказать, что в любом универсальном числе какая-то цифра встречается не менее девяти раз.

г) Попробуйте построить универсальное число, в котором было бы как можно меньше цифр.

ОЛИМПИАДА 1977 г.

Первый день

97. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев *особенной*, если продолжение одного из них пересекает другое звено. Доказать, что число особенных пар четно.

98. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что для любой прямой, проходящей через две или более отмеченных точек, сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Доказать, что все числа равны нулю.

99. Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках K и L. Доказать, что точки A, K, L и центр O вписанной окружности треугольника ABC являются вершинами ромба.

100. По окружности расположено несколько черных и белых фишек. Двое по очереди проделывают такую операцию: первый убирает все черные фишки, имеющие белого соседа (хотя бы с одной стороны), а второй после этого убирает все белые фишки, имеющие черного соседа. Так они делают до тех пор, пока не останутся фишки только одного цвета.

а) Пусть вначале было 40 фишек. Может ли случиться, что после того, как каждый сделает два хода, на окружности останется одна фишка?

б) На окружности сначала было 1000 фишек. Через какое наименьшее число ходов на окружности может остаться одна фишка?

Второй день

101. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и т. д. После того как последний, седьмой гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 л. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

102. Будем называть $2n$-значное число *особым*, если оно является точным квадратом и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найти все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Возможны ли шестизначные особые числа? (Доказать, что их нет, или привести пример такого числа.)

103. Дано множество положительных чисел $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел. Доказать, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

104. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Доказать, что:

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

ОЛИМПИАДА 1978 г.

Первый день

105. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найти сумму

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{1979}}+\frac{1}{a_{1980}}.$$

106. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M, такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Доказать, что если

$$\angle CBM=\angle CDM, \text{ то } \angle ACD=\angle BCM.$$

107. Доказать, что ни при каком натуральном m число 1978^m-1 не делится на число 1000^m-1.

108. Задано конечное множество K_0. К этому множеству добавляются все точки, которые получаются симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначим через K_1. Аналогично по множеству K_1 строится множество K_2, по K_2 — множество K_3 и т. д.

а) Пусть K_0 состоит из двух точек A и B, находящихся друг от друга на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 1000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площадью 1. Найти площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n, $n=1, 2, \ldots$.

Второй день

109. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a+1; b+1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ (он работает только при четных a и b); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки.

а) Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку: 1) $(1; 50)$; 2) $(1;100)$?

б) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких значениях n это можно сделать?

110. В окружность радиуса R вписан n-угольник площадью S. На каждой стороне n-угольника выбрано по точке. Доказать, что периметр n-угольника с вершинами в выбранных точках не меньше $\frac{2S}{R}$.

111. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз делать ход на то поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Доказать, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

112. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

ОЛИМПИАДА 1979 г.

Первый день

113. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины первого из которых лежат на трех разных сторонах второго?

114. Кенгуру прыгает по углу $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ координатной плоскости xOy следующим образом: из точки $(x;\ y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1;\ y-1)$ или в точку $(x-5;\ y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x;\ y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии, большем 1000 от начала координат? Нарисовать множество всех таких точек $(x;\ y)$ и найти его площадь.

115. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Доказать, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A — враг B, то B — враг A.)

116. Доказать, что для каждого натурального $n \geqslant 2$ существует составное число, взаимно простое с 10, сумма цифр в десятичной записи которого равна n.

Второй день

117. На плоскости даны несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы $\overline{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Доказать, что сумма всех выбранных векторов равна $\overline{0}$.

118. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размером:

а) 8×8 клеток;

б) $n \times n$ клеток

для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-нибудь стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.)

119. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b \end{cases}$$

(a, b — данные числа).

120. Имеется несколько квадратов, сумма площадей которых равна 4. Доказать, что такими квадратами всегда можно покрыть квадрат площадью 1.

ОЛИМПИАДА 1980 г.

Первый день

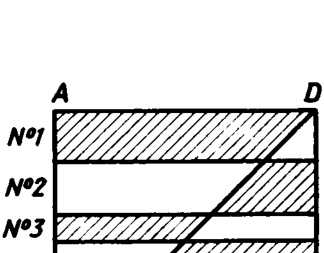


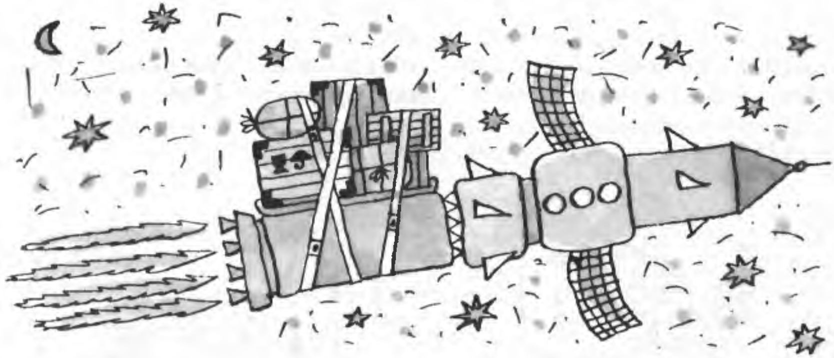
Рис. 6

121. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получившееся число 192021...7980 на 1980?

122. Сторона AB квадрата $ABCD$ (рис. 6) разделена на n отрезков так, что сумма длин отрезков с четными номерами равна сумме длин отрезков с нечетными номерами (на рисунке $n=5$). Через точки деления проведены отрезки, параллельные стороне AD, а затем каждая из получившихся n полосок диагональю BD

разбита на две части — левую и правую. Доказать, что сумма площадей левых частей полосок с нечетными номерами равна сумме площадей правых частей полосок с четными номерами (на рисунке эти части заштрихованы).

123. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 т. Имеются семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 т груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Доказать, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.



124. Точки M и P — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $AM+AP=a$. Доказать, что площадь четырехугольника $ABCD$ меньше чем $\frac{a^2}{2}$.

Второй день

125. На плоскости даны 1980 векторов, причем среди них имеются неколлинеарные. Известно, что сумма любых 1979 из этих векторов коллинеарна вектору, не включенному в сумму. Доказать, что сумма всех данных 1980 векторов равна нулевому вектору.

126. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое натуральное число n, что

$$n+S(n)=1980?$$

б) Доказать, что из двух последовательных натуральных чисел хотя бы одно представимо в виде суммы $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n.

127. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные — в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 клетки содержит ровно 2 красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11 клеток?

128. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один и тот же день несколько коротышек простудились и заболели, и, хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки, навещая своих больных друзей, заболевали на следующий день после посещения. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно один день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет, т. е. он здоров и заболеть в такой день не может (число дней иммунитета у каждого коротышки может быть свое). Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делали их. Доказать, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно закончится.

ОЛИМПИАДА 1981 г.

Первый день

129. Две одинаковые шахматные доски (8×8 клеток) имеют общий центр, причем одна из них повернута относительно другой на 45° около центра. Найти суммарную площадь всех пересечений черных клеток этих досок, если площадь одной клетки равна 1.

130. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Доказать, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

131. Будем говорить, что число обладает свойством (k), если оно разлагается в произведение k последовательных натуральных чисел, больших 1.

а) Найти число k, такое, для которого некоторое натуральное число N обладает одновременно свойствами (k) и ($k+2$).

б) Доказать, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует.

132. В таблице 4 строки. В первой из них записаны произвольные натуральные числа, среди которых могут быть и одинаковые. Вторая строка заполняется так: слева направо просматриваются числа первой строки и под числом a записывается число k, если a встретилось в первой строке в k-й раз. Аналогично по второй строке записывается третья, а по третьей — четвертая. Доказать, что вторая и четвертая строки при таком заполнении таблицы всегда будут одинаковыми.

Второй день

133. Доказать, что если четырехугольники

$$ACPH,\ AMBE,\ AHBT,\ BKXM,\ CKXP$$

суть параллелограммы, то и четырехугольник $ABTE$ — параллелограмм (вершины всех четырехугольников перечислены против часовой стрелки).

134. Решить уравнение $x^3-y^3=xy+61$ в натуральных числах x и y.

135. В футбольном турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров — каждая команда сыграла с восемью разными командами. Доказать, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

136. Точки C_1, A_1, B_1 взяты соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC так, что

$$AC_1:C_1B=BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=1:3.$$

Доказать, что периметр P треугольника ABC и периметр p треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами $\frac{1}{2}P<p<\frac{3}{4}P$.

ОЛИМПИАДА 1982 г.

Первый день

137. На окружности с центром O_1 радиуса r_1 взяты точки M и K. В центральный угол MO_1K вписана окружность с центром O_2 радиуса r_2. Найти площадь четырехугольника MO_1KO_2.

138. В числовых последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1=1$, $a_2=2$ и $b_1=2$, $b_2=1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательности?

139. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать, что если для некоторых неотрицательных целых чисел k_1, k_2, ..., k_n число $2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_n}$ делится на 2^m-1, то $n\geqslant m$.

140. Каждой вершине куба поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань, и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Доказать, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило $\frac{1}{6}$.

Второй день

141. Натуральные числа от 1 до 1982 расположены одно за другим в некотором порядке. ЭВМ просматривает слева направо пары стоящих рядом чисел (первое и второе, второе и третье и т. д.) вплоть до последней и меняет местами числа в просматриваемой паре, если большее из них стоит левее. Затем она просматривает все пары, двигаясь справа налево от последней пары до первой, меняя местами числа в парах по тому же закону. По окончании этого просмотра работающий с ЭВМ оператор получил информацию, что число, стоящее на сотом месте, оба раза не сдвинулось со своего места. Найти это число.

142. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 м. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 м. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 м. Прав ли Знайка?

143. На координатной плоскости Oxy изобразили график функции $y=x^2$. Потом оси координат стерли — на рисунке осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

144. Квадратная таблица $n \times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше чем на 1. Доказать, что хотя бы одно число встречается в таблице:

а) не менее $\left[\frac{n}{2}\right]$ раз ($[a]$ — целая часть числа a);

б) не менее n раз.

ОЛИМПИАДА 1983 г.

Первый день

145. В сетке, изображенной на рисунке 7, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения следующих множеств: а) восьми ломаных, каждая из которых имеет длину 5; б) пяти ломаных, каждая из которых имеет длину 8?

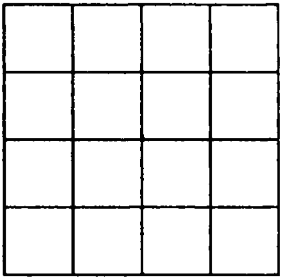


Рис. 7

146. На доске написали три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа: а) 2,2,2; б) 3,3,3?

147. Три круга попарно касались друг друга внешним образом в точках X, Y, Z. Затем радиусы этих кругов увеличили более чем в $\frac{2}{\sqrt{3}}$ раз, сохранив центры. Доказать, что каждая точка треугольника XYZ оказалась накрытой хотя бы одним из увеличенных кругов.

148. Даны несколько различных натуральных чисел, заключенных между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Доказать, что все их попарные произведения также различны.

Второй день

149. Натуральные числа m, n, k таковы, что число m^n делится на n^m, а число n^k делится на k^n. Доказать, что число m^k делится на k^m.

150. В языке племени АББА две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли полный словарь языка племени содержать 3 четырехбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

151. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа бумаги расставить целые числа так, чтобы в каждом прямоугольнике размером 4×6 клеток, стороны которого идут по линии бумаги, сумма чисел была: а) 10; б) 1?

152. Все четыре треугольника, заштрихованные на рисунке 8, равновелики. Доказать, что три четырехугольника, не заштрихованные на нем, также равновелики. Чему равна площадь одного четырехугольника, если площадь одного заштрихованного треугольника равна 1 см^2?

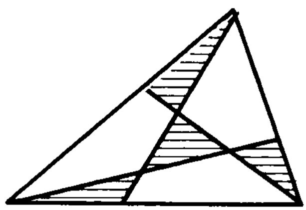


Рис. 8

ОЛИМПИАДА 1984 г.

Первый день

153. а) Произведение некоторых n целых чисел равно n, а сумма их равна нулю. Доказать, что число n делится на 4.

б) Пусть n — натуральное число, делящееся на 4. Доказать, что найдутся n целых чисел, произведение которых равно n, а сумма равна нулю.

154. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}.$$

155. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, вершины которых занумерованы при обходе их контуров по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overline{OC_1}$, $\overline{OC_2}$, $\overline{OC_3}$, равные соответственно векторам $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$. Доказать, что точки C_1, C_2, C_3 также являются вершинами равностороннего треугольника.

156. Имеется четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы у каждой из плиточек цвета всех сторон были разные, и приклеивать их друг к другу сторонами одного цвета. Для каких чисел m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размером $m \times n$, у которого каждая сторона была бы покрашена одним цветом и цвета всех сторон были разные?

Второй день

157. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2+10x+20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору либо коэффициент при x, либо свободный член, но не оба сразу. В результате получился трехчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

158. Монету радиуса r перемещают на плоскости так, что ее центр обходит контур выпуклого многоугольника, описанного около круга радиуса $R>r$ и имеющего периметр p. Найти площадь фигуры, образованной следом монеты.

159. Имеется $n+1$ гирь, общий вес которых равен $2n$. Вес каждой из них — натуральное число. Имеются также весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Гири по очереди кладут на чашки весов: сначала самую тяжелую (или одну из самых тяжелых), затем самую тяжелую из оставшихся и т. д. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы в равновесии, то на любую. Доказать, что, после того как на весах окажутся все гири, весы будут в равновесии.

160. Натуральное число назовем *абсолютно простым*, если оно простое и при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Доказать, что абсолютно простое число не может содержать в своей записи более трех различных цифр.

ОЛИМПИАДА 1985 г.

Первый день

161. В остроугольном треугольнике из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на две другие стороны. Доказать, что площадь шестиугольника, ограничиваемого этими перпендикулярами, равна половине площади треугольника.

162. Существует ли натуральное число n, обладающее следующим свойством: сумма цифр числа n (в десятичной записи) равна 1000, а сумма цифр числа n^2 равна 1000^2?

163. Какое наибольшее число дамок можно расставить на шашечной доске 8×8 клеток так, чтобы каждая дамка билась хотя бы одной другой дамкой?

164. В правильном n-угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были окрашены различно. Найти наименьшее количество цветов, которое для этого необходимо.

Второй день

165. Имеется куб, кубическая коробка с крышкой тех же размеров и шесть красок. Каждой краской окрашивается одна грань куба и одна из граней коробки. Доказать, что куб можно таким образом положить в коробку, чтобы каждая грань куба прилегала к грани коробки, окрашенной другим цветом.

166. Диаметр A_0A_5 делит окружность с центром в точке O на две полуокружности. Одна из них разделена на пять равных дуг A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. Прямая A_1A_4 пересекает OA_2 и OA_3 в точках M и N. Доказать, что сумма длин отрезков A_2A_3 и MN равна радиусу окружности.

167. Ученики школьного математического кружка смастерили вычислительную машину, которая четверку чисел (a; b; c; d) нажатием кнопки превращает в четверку ($a-b$; $b-c$; $c-d$;

$d-a$). Доказать, что если в исходной четверке не все числа равны, то после некоторого числа нажатий кнопки получится четверка, хотя бы одно из чисел которой больше 1985.

168. Числа 1, 2, 3, ..., $2n-1$, $2n$ разбиты на две группы, по n чисел в каждой. Пусть $a_1<a_2<...<a_n$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1>b_2>...>b_n$ — числа второй в убывающем порядке. Доказать, что

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n|=n^2.$$

ОЛИМПИАДА 1986 г.

Первый день

169. Корни уравнения $x^2+ax+1=b$ являются натуральными числами. Доказать, что a^2+b^2 — составное число.

170. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, а другого — красные. Доказать, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

171. Точка M лежит на стороне AC остроугольного треугольника ABC. Вокруг треугольников ABM и CBM описываются окружности. При каком положении точки M площадь общей части ограничиваемых ими кругов будет наименьшей?

172. В одном государстве король хочет построить n городов и $n-1$ дорог между ними так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. (Каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются и не проходят через другие города.) Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния по сети дорог между парами городов равнялись: 1 км, 2 км, 3 км, ..., $\frac{1}{2}n(n-1)$ км. Возможно ли это, если:

а) $n=6$; б) $n=1986$?

Второй день

173. Десятичная запись натурального числа a состоит из n одинаковых цифр x, числа b — из n одинаковых цифр y, а числа c — из $2n$ одинаковых цифр z. Для любого $n \geqslant 2$ найти все такие цифры x, y, z, для которых $a^2+b=c$.

174. Внутри выпуклого 12-угольника даны две точки, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга. Для каждой из этих точек нашли сумму расстояний от нее до вершин 12-угольника. Доказать, что полученные суммы различаются менее чем на 1 м.

175. Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет любые 2 стакана и отливает молоко из одного стакана в другой до тех пор, пока количества молока в них не уравняются. Можно ли налить молоко в стаканы так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

176. Некоторый прямоугольник прямыми, параллельными сторонам, разделен на квадраты со стороной 1, которые раскрашены в шахматном порядке в белый и черный цвета. Диагональ прямоугольника разбилась на белые и черные отрезки. Найти отношение суммы длин белых отрезков к сумме длин черных отрезков, если размер прямоугольника: а) 100×99; б) 101×99.

ОЛИМПИАДА 1987 г.

Первый день

177. Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждые два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал в ходе турнира x_1 побед и потерпел y_1 поражений, второй одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и т. д. Доказать, что

$$x_1^2+\ldots+x_{10}^2=y_1^2+\ldots+y_{10}^2.$$

178. Известно, что с помощью набора из 6 гирь можно уравновесить 63 груза, массы которых являются последовательными натуральными числами. Найти все такие наборы.

179. Дан правильный семиугольник $A_1A_2\ldots A_7$. Доказать, что

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}.$$

180. Игра «Морской бой» происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль, если он:

а) имеет вид ;

б) состоит из четырех клеток, примыкающих друг к другу сторонами?

Второй день

181. Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a+A=b+B=c+C=k$. Доказать, что
$$aB+bC+cA<k^2.$$

182. В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Доказать, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

183. Вершина B угла ABC лежит вне окружности, а лучи BA и BC ее пересекают. Из точки K пересечения луча BA и окружности перпендикулярно биссектрисе угла проведена прямая, пересекающая окружность в точках K и P, а луч BC — в точке M. Доказать, что отрезок PM вдвое длиннее перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC.

184. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выяснить, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и указать ее.

б) Выяснить, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

ОЛИМПИАДА 1988 г.

Первый день

185. Книга состоит из 30 рассказов объемом 1, 2, ..., 30 страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

186. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим два новых выпуклых четырехугольника F_1 и F_2, у каждого из которых две противоположные вершины — середины диагоналей $ABCD$, а две другие вершины — середины противоположных сторон $ABCD$. Известно, что площади четырехугольников F_1 и F_2 равны. Доказать, что одна из диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам.

187. Доказать, что уравнение
$$x-y+z=1$$
имеет бесконечно много решений среди таких попарно различных натуральных чисел x, y, z, что произведение любых двух из них делится на третье.

188. В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем *отрезком* одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Доказать, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел, входящих в эти отрезки, будут равны.

Второй день

189. Доказать, что у всех трапеций с боковой стороной a, вписанных в данную окружность, отношение высоты к средней линии одно и то же.

190. На доске написаны числа 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то можно дописать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить:

а) число 13 121; б) число 12 131?

191. Пусть рациональные числа x, y удовлетворяют уравнению

$$x^5+y^5=2x^2y^2.$$

Доказать, что $1-xy$ — квадрат рационального числа.

192. В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых попарно связывает беспосадочными авиалиниями 5 городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких авиакомпаний). Каждые 2 города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

ОЛИМПИАДА 1989 г.

Первый день

193. Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Доказать, что в некоторый момент около киоска одновременно встретились по крайней мере трое мальчиков.

194. Имеется 77 прямоугольных брусков размером $3\times3\times1$. Можно ли все эти бруски уложить в прямоугольную коробку размером $7\times9\times11$ (коробка с крышкой)?

195. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC со стороной AB, T — произвольная точка стороны BC, отличная от вершины. Доказать, что три окружности, вписанные в треугольники BMT, MTA и ATC, касаются одной прямой.

196. Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания: $d_1<d_2<\ldots<d_{12}$. Известно, что делитель с номером d_4-1 равен произведению $(d_1+d_2+d_4)d_8$. Найти число N.

Второй день

197. На шахматной доске расставлены 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном рядах клеток стоит по одной фигуре. Доказать, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

198. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметили цветом соответственно точки C_1, A_1 и B_1, отличные от вершин треугольника. Оказалось, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A},$$

а $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Доказать, что треугольник с цветными вершинами подобен треугольнику ABC.

199. В некоторой роще имеется $n\geqslant3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из скворечников живет по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие так, что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой скворцов (один скворец

может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов стало больше расстояния между второй парой. При каких n это возможно?

200. Доказать, что все пятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 встречается по одному разу, можно разбить на две группы с одинаковыми суммами квадратов.

ОЛИМПИАДА 1990 г.

Первый день

201. Доказать, что для любого числа t выполняется неравенство

$$t^4-t+\frac{1}{2}>0.$$

202. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Доказать, что диагонали равны.

203. В сенате 30 сенаторов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют. Каждый сенатор враждует ровно с шестью другими. Каждые три сенатора образуют комиссию. Найти общее число таких комиссий, в которых все три члена попарно дружат либо все три попарно враждуют.

204. а) Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 15 равных многоугольников, не являющихся прямоугольниками?

б) Можно ли указанным образом разрезать квадрат?

Второй день

205. Через произвольную точку внутри треугольника проведены три прямые параллельно его сторонам. Они делят стороны на отрезки длиной

$a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$, как указано на рисунке 9. Доказать, что

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3.$$

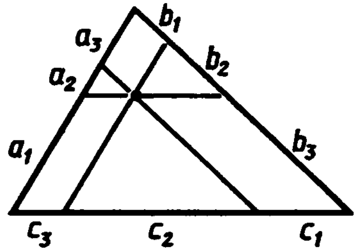


Рис. 9

206. Двое играют в следующую игру. Первый называет три любых отличных от нуля числа, а второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек в выражении $*x^2 + *x + *$. Первый игрок считается выигравшим, если полученный квадратный трехчлен имеет два различных рациональных корня. Доказать, что этот игрок может добиться победы.

207. Найти максимум выражения

$$\underbrace{|\ldots|}_{1989\text{ раз}}|x_1 - x_2| - x_3| - \ldots - x_{1990}|,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{1990}$ — различные натуральные числа от 1 до 1990.

208. Правильный треугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными сторонам треугольника, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. По сторонам полученных треугольников проведена незамкнутая ломаная, проходящая через все вершины треугольников разбиения ровно по одному разу. Доказать, что имеется не менее n пар соседних звеньев ломаной, образующих между собой острый угол.

ОЛИМПИАДА 1991 г.

Первый день

209. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xz - 2yt = 8, \\ xt + yz = 1. \end{cases}$$

210. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем, a и b, и вместо них записать одно число $\frac{a+b}{4}$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Доказать, что если на доске первоначально были выписаны n единниц, то в результате всех операций на доске останется число, не меньшее чем $\frac{1}{n}$.

211. На плоскости проведены 4 прямые так, что любые 2 из них пересекаются, а никакие 3 не проходят через одну точку. На каждой из этих прямых 3 точки пересечения с остальными выделяют 2 отрезка. Всего образуется 8 отрезков. Могут ли длины этих отрезков равняться:

а) числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

б) различным натуральным числам?

212. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых расположенных подряд клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

Второй день

213. а) Найти два натуральных числа x и y, такие, чтобы $xy+x$ и $xy+y$ были квадратами разных натуральных чисел.

б) Можно ли найти такие x и y в пределах от 988 до 1991?

214. На сторонах AB, BC, CD, DA прямоугольника $ABCD$ соответственно взяты точки K, L, M, N, отличные от вершин. Известно, что $KL \parallel MN$ и $KM \perp NL$. Доказать, что точка пересечения отрезков KM и LN лежит на диагонали BD прямоугольника.

215. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что при любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса. Показать, что следователь может составить план не более чем со 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос может быть дан неверный ответ (но может быть, что все ответы верные).

216. Дан квадрат 5×5 клеток. В одной клетке записан знак «—», в остальных — знак «+». За один ход разрешается менять знаки на противоположные одновременно во всех клетках любого квадрата с границами по линиям сетки, состоящего более чем из одной клетки. В каких клетках может быть расположен «минус», чтобы за несколько ходов можно было все знаки одновременно сделать «плюсами»?

ОЛИМПИАДА 1992 г.

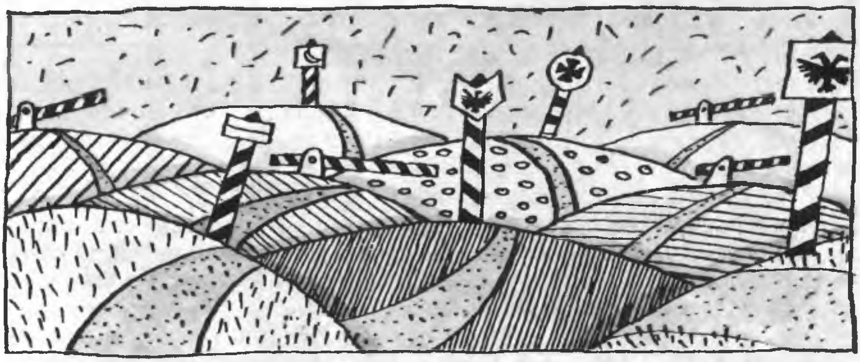
Первый день

217. Доказать, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^4+b^4+c^2\geqslant 2\sqrt{2}abc.$$

218. На диагонали BD квадрата $ABCD$ выбрана точка E. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE и ADE соответственно. Доказать, что четырехугольник AO_1EO_2 — квадрат.

219. Города одной империи с k столицами соединены дорогами так, что из любого города в любой другой можно проехать по этим дорогам. Доказать, что империю можно разделить на k республик так, чтобы каждая республика имела столицу и вместе с любым городом в ней содержался бы кратчайший путь из этого города до столицы. (Договоримся считать кратчайшим тот путь, который состоит из минимального числа дорог.)



220. На клетчатой доске лежит несколько фишек. За один ход разрешается (если это возможно) «перепрыгнуть» какой-нибудь фишкой через фишку, стоящую на соседней клетке (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону), и встать на следующую свободную клетку. При этом фишка, через которую «перепрыгнули», снимается с доски. Какое наименьшее число фишек может остаться на доске, если вначале фишки были расставлены в виде прямоугольника $m\times n$ $(m\geqslant 2,\ n\geqslant 2)$, окруженного свободными клетками?

Второй день

221. Существует ли четырехзначное число, такое, что ни при какой замене любых его трех цифр на любые три не получится числа, делящегося на 1992?

222. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ. Доказать, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB.

223. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7,\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7.\end{cases}$$

224. Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что прямоугольник $m\times n$ клеток на клетчатой бумаге можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке 10, с выполнением следующих условий:

1) никакие два «уголка» не образуют прямоугольник 3×2 клетки;

2) ни в какой точке не смыкается более трех «уголков»?

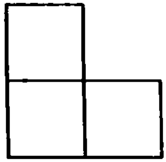


Рис. 10

ОТВЕТЫ
УКАЗАНИЯ
РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД (1961—1966 гг.)

1. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD прямоугольника $ABCD$ и A_1C_1 — общая внешняя касательная к окружностям A и C (рис. 11). Из точек A, O и C опустим перпендикуляры на A_1C_1, тогда AA_1C_1C — трапеция, OO_1 — ее средняя линия, и, следовательно,

$$OO_1=\frac{1}{2}(AA_1+CC_1)=\frac{1}{2}(R_A+R_C).$$

Таким образом, расстояние от точки O до прямой A_1C_1 равно $\frac{1}{2}(R_A+R_C)$. Аналогично доказывается, что расстояние до другой внешней касательной окружностей A и C также равно $\frac{1}{2}(R_A+R_C)$. Проведя точно такие же рассуждения для окружностей B и D, устанавливаем, что расстояние от точки O до обеих внешних касательных к этим окружностям равно $\frac{1}{2}(R_B+R_D)$.

Так как $R_A+R_C=R_B+R_D$ по условию задачи, то тем самым точка O равноудалена от всех четырех рассматриваемых внешних касательных. Таким образом, в рассматриваемый в задаче четырехугольник можно вписать окружность и ее центром является точка O.

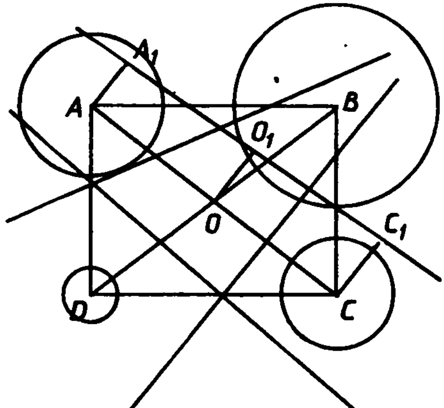


Рис. 11

2. Рассмотрим любые 39 последовательных натуральных чисел. Среди наименьших двадцати из этих чисел существуют два числа, которые оканчиваются нулем. Из этих двух чисел по крайней мере у одного перед нулем не стоит цифра 9. Обозначим это число через n, а сумму его цифр через m. Так как рассматриваемые 39 чисел являются последовательными, то числа n, $n+1$,

..., $n+19$ принадлежат этой группе чисел и имеют суммы цифр, равные соответственно m, $m+1$, ..., $m+10$. Среди одиннадцати последовательных чисел m, $m+1$, ..., $m+10$ хотя бы одно делится на 11, поэтому и среди рассматриваемых 39 чисел существует по крайней мере одно число, которое делится на 11.

Числа 999 980 и 1 000 019 имеют суммы цифр, равные 44 и 11, т. е. кратные 11, и являются, как легко проверить, последовательными натуральными числами, сумма цифр которых делится на 11. Кроме того, $1\,000\,019-999\,980=39$.

3. Заметим, что произведения всех четырех чисел в первой, второй, третьей и т. д. четверках равны соответственно $abcd$, $(abcd)^2$, $(abcd)^4$ и т. д. Поэтому если на каком-то шаге мы получили ту же самую четверку чисел, то должно быть выполнено соотношение $(abcd)^k=abcd$, где k — некоторое число. Так как числа a, b, c, d все положительны, то отсюда следует, что $abcd=1$.

Во второй четверке (ab, bc, cd, da) произведение первого и третьего ее чисел равно произведению второго и четвертого чисел и равно единице: $(ab)(cd)=(bc)(da)=abcd=1$. Это свойство сохраняется и во всех последующих четверках. Поэтому если четверка (a, b, c, d) встречается еще раз, то $ac=bd=1$.

Таким образом, исходная в задаче четверка чисел имеет вид $\left(a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$. Предположим теперь, что одно из чисел, например a, не равно 1. Выберем тогда из четырех чисел a, b, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ наибольшее — пусть им оказалось число $\frac{1}{a}$ (остальные возможности исследуются аналогично). Отметим, что тогда $a<1$. Исходя из четверки $\left(a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ мы получаем последовательно четверки вида $\left(ab, \frac{b}{a}, \frac{1}{ab}, \frac{a}{b}\right)$, $\left(b^2, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, a^2\right)$. Заметим, что $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}$, и поэтому наибольшее из чисел четверки через два шага строго возрастает. Такая последовательность не может быть периодической, и, следовательно, мы никогда не получим исходную четверку. Полученное противоречие доказывает утверждение.

4. Рассмотрим любой из трех прямоугольников $ABCD$, $KLMN$, $DCEF$ (рис. 12). Например, $ABCD$. Если существует ломаная, пересекающая все нужные отрезки, то она должна иметь внутри четырехугольника $ABCD$ один из своих концов. Действительно, если она вошла внутрь этого четырехугольника, то выйти из него она не может, так как ей нужно пересечь нечетное число отрезков AB, BK, KC, CD, AD. Таким образом, в каждом из трех прямоугольников $ABCD$, $KLMN$, $DCEF$ ломаная

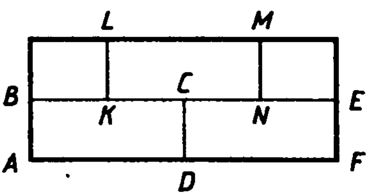
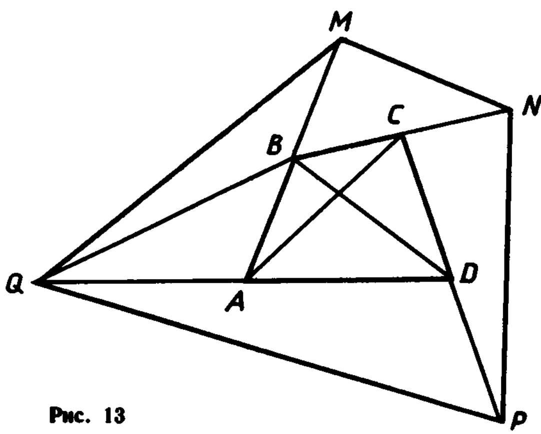


Рис. 12

(если она существует) должна иметь конец. Но это невозможно, так как прямоугольников три, а ломаная имеет только два конца. Таким образом, такой ломаной не существует.

5. Предположим, что такие целые числа a, b, c и d существуют. Тогда так как число $\underbrace{111...1}_{1961}$ является нечетным числом, то число a также является нечетным, так как из первого соотношения следует, что $a(bcd-1)=\underbrace{111...1}_{1961}$. Аналогично из второго, третьего и четвертого соотношений доказываем, что числа b, c и d также являются нечетными. Так как все четыре числа a, b, c, d являются нечетными, то число $abcd$ является также нечетным числом, а числа $abcd-a$, $abcd-b$, $abcd-c$, $abcd-d$ — четными, что противоречит условию задачи. Полученное противоречие доказывает, что чисел a, b, c, d, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

6. Соединим отрезками точку B с точками Q и D (рис. 13). Треугольники ABQ и BMQ имеют равные основания AB и BM и одинаковые высоты. Значит, $S_{ABQ}=S_{BMQ}$. Аналогично доказывается, что $S_{ABQ}=S_{ADB}$. Следовательно, $S_{AMQ}=2S_{ABQ}=2S_{ADB}$. Точно так же доказываются равенства $S_{CPN}=2S_{BDC}$, $S_{BNM}=$ $=2S_{ACB}$, $S_{DQP}=2S_{ADC}$. Поэтому $S_{QPNM}=S_{ABCD}+S_{AMQ}+S_{CPN}+$ $+S_{BNM}+S_{DQP}=S_{ABCD}+2(S_{ADB}+S_{BDC}+S_{ACB}+S_{ADC})=5S_{ABCD}$.



кон.
46.

Рис. 13

7. Пусть M_2 принадлежит искомому геометрическому месту точек. Опустим из точки M_2 перпендикуляр M_2P на прямую l, а из точки O_1 перпендикуляр O_1Q на радиус O_2M_2 (рис. 14). Прямоугольные треугольники O_2M_2P и O_1O_2Q имеют равные гипотенузы и общий острый угол $O_1O_2M_2$. Поэтому они равны, и,

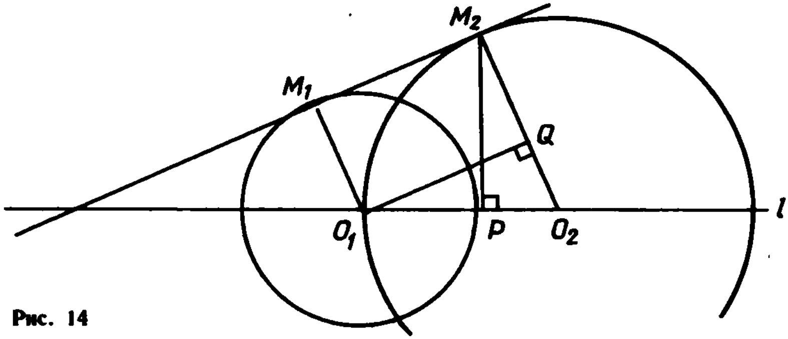


Рис. 14

значит, $O_2P=O_2Q$. Но тогда $O_1P=QM_2$. Так как радиусы O_1M_1 и O_2M_2 перпендикулярны касательной M_1M_2 и $O_1Q\perp O_2M_2$, то $O_1QM_2M_1$ — прямоугольник. Отсюда следует, что $O_1M_1=$ $=QM_2=O_1P$, т. е. точка P лежит на данной окружности с центром O_1, а, значит, точка M_2 лежит на прямой, перпендикулярной l и проходящей через точку пересечения l с данной окружностью.

Аналогично рассматривается и случай, когда точка O_2 лежит внутри данной окружности. Легко проверить, что и обратно: каждая точка перпендикуляра к l, проведенного через точку P, принадлежит искомому геометрическому месту точек. Итак, требуемое геометрическое место точек состоит из двух прямых, перпендикулярных l, проведенных в точках пересечения l с данной окружностью.

8. Так как при всех $n=2, 3, ..., 100$ справедливо равенство $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, или $a_n-a_{n-1}=2(a_{n-1}-a_{n-2})$, то $a_{100}-a_{99}=$ $=2(a_{99}-a_{98})=2^2(a_{98}-a_{97})=...=2^{99}\cdot(a_1-a_0)\geqslant 2^{99}$.

Поскольку a_{99} — целое положительное число, то

$$a_{100}\geqslant 2^{99}+a_{99}>2^{99}.$$

9. Согласно условию задачи справедливы равенства

$$a\cdot 19^3+b\cdot 19^2+c\cdot 19+d=1,$$
$$a\cdot 62^3+b\cdot 62^2+c\cdot 62+d=2.$$

Вычитая первое равенство из второго, найдем

$$a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19)=1.$$

Каждая из разностей 62^3-19^3, 62^2-19^2 делится на $62-19=43$. Значит, в левой части полученного равенства стоит целое число, делящееся на 43, а в правой части стоит 1. Но это невозможно. Следовательно, целых чисел a, b, c, d с указанными свойствами не существует.

10. Докажем утверждение задачи для произвольной квадратной таблицы размером $n\times n$, где n — нечетное число, т. е. нужно доказать, что

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n+b_1+b_2+...+b_n\neq 0,$$

где a_k — произведение чисел, стоящих в k-й строке, b_k — произведение чисел, стоящих в k-м столбце, $k=1, 2, ..., n$.

Если мы поменяем знак числа, стоящего на пересечении строки с номером p и столбца с номером q, то числа a_p и b_q также поменяют знак, а остальные числа останутся без изменения. Обозначив новое значение суммы всех нужных чисел через T_n, получим равенство

$$T_n=S_n-(a_p+b_q)+(-a_p-b_q)=S_n-2(a_p+b_q).$$

Так как a_p и b_q равны либо $+1$, либо -1, то их сумма a_p+b_q принимает одно из трех значений -2, 0, 2. Отсюда следует, что разность T_n-S_n делится на 4.

Заменим теперь последовательно все -1, которые есть в таблице, на $+1$. При каждом таком изменении сумма S_n будет меняться на число, кратное 4. Поэтому если исходная сумма равна нулю, то для таблицы, в которой стоят одни $+1$, соответствующая сумма должна делиться на 4. Но для такой таблицы сумма равна $2n$. Так как по условию n — нечетное число, то число $2n$ на 4 не делится. Следовательно, исходная сумма S_n отлична от нуля.

11. Обозначим какие-либо две из пяти данных окружностей цифрами 1 и 2, а две точки их пересечения буквами A и B. Если оставшиеся три окружности проходят через точку A, утверждение задачи справедливо. В противном случае обозначим цифрой 3 окружность, не проходящую через точку A; две оставшиеся окружности обозначим цифрами 4 и 5. Окружности 1, 2 и 3 имеют единственную общую точку B, которая согласно условию задачи должна быть общей точкой окружностей 1, 2, 3, 4, а также общей точкой окружностей 1, 2, 3, 5. Итак, все окружности проходят через точку B.

12. Ответ. Шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.

Обозначим буквами $x_1, x_2, ..., x_8$ количества очков, набранных шахматистами, занявшими 1-е, 2-е, ..., 8-е места соответственно. Согласно условию справедливы неравенства

$$7\geqslant x_1>x_2>...>x_8,$$

и, кроме того,

$$x_2=x_5+x_6+x_7+x_8.$$

Шахматисты, занявшие последние 4 места, сыграли между собой $3+2+1=6$ партий и, значит, разделили между собой положенные за эти партии 6 очков. Таким образом,

$$x_5+x_6+x_7+x_8\geqslant 6.$$

Из неравенств $7\geqslant x_1>x_2\geqslant 6$ следует, что $x_2=6$. Действительно, если второй игрок проиграл первому, он не мог набрать более 6 очков и, значит, $x_2=6$. Если же партия между ними закончилась иначе, то первый игрок набрал не более 6,5 очков, и из неравенств $6{,}5\geqslant x_1>x_2\geqslant 6$ опять следует, что $x_2=6$. Итак, $x_5+x_6+x_7+x_8=$

$=6$. Полученное равенство означает, что каждый из последних четырех участников турнира проиграл каждому из четырех лучших. В частности, *шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.*

13. Обозначим буквой O точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ и буквами E и F основания перпендикуляров, опущенных на диагональ BD из вершин A и C соответственно (рис. 15). Треугольники BCD и ABD имеют согласно условию равные площади и общее основание BD. Это означает, что точки A и C равноудалены от прямой BD, т. е. $AE=CF$. Прямоугольные треугольники AEO и CFO имеют равные острые углы ($\angle EOA=\angle FOC$) и равные катеты ($AE=CF$). Значит, эти треугольники равны и, в частности, равны их гипотенузы $AO=CO$. Точно так же доказывается, что $BO=DO$. Четырехугольник, у которого диагонали делятся точкой пересечения пополам, есть, как известно, *параллелограмм.*

14. Из тождеств

$$2a^2=(a^2+b^2)+(a+b)(a-b),$$
$$2b^2=(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)$$

следует, что каждый общий делитель чисел a^2+b^2 и $a+b$ должен быть делителем чисел $2a^2$ и $2b^2$. По условию числа a и b взаимно просты, следовательно, взаимно простыми будут и числа a^2, b^2. Но тогда каждый общий делитель чисел $2a^2$ и $2b^2$ должен быть делителем числа 2. Таким образом, каждый общий делитель чисел a^2+b^2 и $a+b$ должен быть делителем числа 2 и их наибольший общий делитель равен или 1, или 2.

15. Обозначим буквой C точку, диаметрально противоположную точке A, и буквой D середину отрезка BC (рис. 16). Докажем, что при любом выборе точки M прямая PK проходит через точку D. Угол AMC опирается на диаметр. Поэтому $CM\perp AM$. По условию $PK\perp AM$. Следовательно, $PK\parallel MC$, и ввиду того, что $MK=KB$, заключаем, что прямая PK пересекает сторону BC треугольника MBC в ее середине, т. е. в точке D.

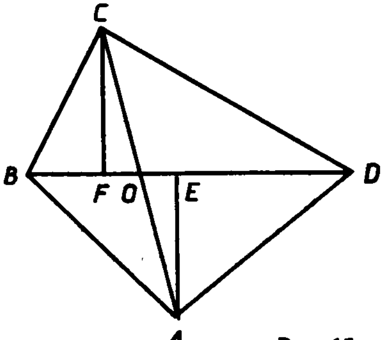


Рис. 15

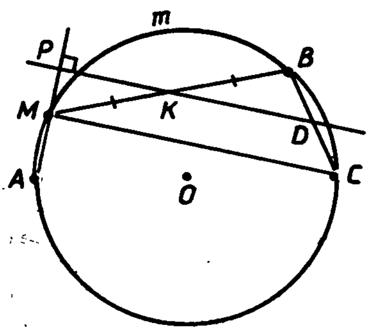


Рис. 16

16. Ответ. 90°, 45°, 45°.

По условию $h_a \geqslant a$ и $h_b \geqslant b$. Однако перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, всегда меньше наклонной, проведенной из той же точки. Поэтому $h_a \leqslant b$ и $h_b \leqslant a$. Отсюда

$$a \leqslant h_a \leqslant b \leqslant h_b \leqslant a.$$

Это возможно только в том случае, если стороны a и b равны и перпендикулярны.

17. Числа m и $m+1$ взаимно просты, поэтому если число $m(m+1)$ является k-й степенью некоторого натурального числа, то и число m, и число $m+1$ должны быть k-ми степенями натуральных чисел. Этого, однако, не может быть, так как если $a^k = m$, то

$$(a+1)^k > (a+1)a^{k-1} = a^k + a^{k-1} \geqslant m+1.$$

18. Ответ. Единиц получится на одну больше, чем двоек.

Известно, что число при делении на 9 дает тот же остаток, что и сумма его цифр. Поэтому единица в конце процесса получится из чисел вида $9k+1$, где $k=0, 1, 2, ..., 111\,111\,111$, а двойка — из чисел вида $9k+2$, где $k=0, 1, 2, ..., 111\,111\,110$. Чисел первого вида на одно больше.

19. Пусть не все числа среди $x_1, x_2, ..., x_n$ равны между собой. Докажем, что через несколько операций максимальное число этого набора уменьшится, а минимальное увеличится. Действительно, среднее арифметическое двух чисел всегда не больше наибольшего из этих чисел и равно ему, когда числа равны. Расположим наши числа по кругу так, чтобы x_n соседствовало с x_1. Максимальное число x в наборе $\frac{x_1+x_2}{2}, ..., \frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \frac{x_n+x_1}{2}$ не больше максимального числа в исходном наборе и равно ему, если в наборе $x_1, x_2, ..., x_n$ несколько чисел x стоят рядом. При этом если в наборе $x_1, x_2, ..., x_n$ наибольшая длина цепочки из чисел x, стоящих подряд, равна $k<n$, то в следующем наборе она будет равна $k-1$, затем $k-2$ и т. д. Через k шагов максимальное число в наборе станет меньше x.

Аналогично доказывается, что минимальное число должно возрастать.

Предположим, что из некоторого набора целых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ все время получаются наборы целых чисел. Тогда по доказанному выше через несколько шагов из набора $a_1, a_2, ..., a_n$ должен получиться набор, в котором все числа равны. Нам осталось доказать, что из набора попарно различных целых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ не может на каком-то шаге получиться набор равных чисел.

Если из набора $z_1, z_2, ..., z_n$ получается набор равных чисел, то $z_1+z_2=z_2+z_3=...=z_n+z_1$, откуда $z_1=z_3=z_5=...$ и $z_2=z_4=$ $=z_6=...$, т. е. числа равны через одно. Отсюда при нечетном n следует, что они все равны между собой.

Если $n=2k$, то числа на четных местах могут быть отличны от чисел на нечетных местах. В этом случае набор $z_1, z_2, \ldots, z_n$ получен из набора $y_1, y_2, \ldots, y_n$, такого, что $y_1+y_2=y_3+y_4=\ldots=$ $=y_{2k-1}+y_{2k}=b$ и $y_2+y_3=y_4+y_5=\ldots=y_{2k}+y_1=c$, где $b\neq c$. Складывая все равенства первого вида и отдельно второго, получаем $y_1+y_2+\ldots+y_n=nb$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n=nc$, откуда $b=c$. Полученное противоречие доказывает, что из набора попарно различных целых чисел набор равных чисел не может получиться, что доказывает утверждение.

20. Легко видеть, что каждый угол шестиугольника равен $120°$ и противоположные стороны попарно параллельны. Без ограничения общности можно предположить, что $AB>ED$, так как, если противоположные стороны попарно равны, результат тривиален. Построим параллелограммы $ABCK$, $CDEL$, $EFAM$ (рис. 17). Так как $AB>ED$, то точка L лежит на CK и, следовательно, точка K лежит на AM, а M лежит на EL. Это значит, что $CD>AF$ и $EF>BC$. Так как $\angle AME=\angle ELC=$ $=\angle CKA=120°$, то в треугольнике KLM имеем $\angle K=\angle L=\angle M=60°$, т. е. этот треугольник равносторонний. Остается заметить, что $KL=$ $=AB-ED$, $LM=CD-FA$, $MK=$ $=FE-BC$.

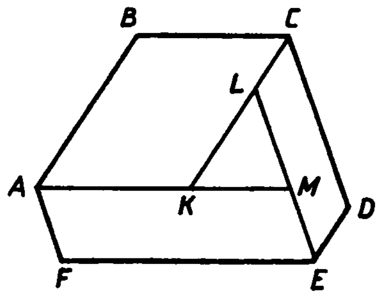


Рис. 17

21. Ответ. $-\frac{n}{2}$ при n четном и $-\frac{n-1}{2}$ при n нечетном.

Сумму s всевозможных попарных произведений чисел x_1, x_2, ..., x_n представим в виде

$$s=\frac{1}{2}\left((x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right),$$

после чего нетрудно заметить, что $s\geqslant-\frac{n}{2}$. Если n четно и $n=2k$, то, полагая $x_1=\ldots=x_k=1$ и $x_{k+1}=\ldots=x_n=-1$, мы замечаем, что $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=0$ и $-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2=-n$, откуда $s=-\frac{n}{2}$ и указанная нижняя граница достигается.

Если $n=2k+1$, т. е. нечетно, то $-\frac{n}{2}$ есть число нецелое, поэтому в этом случае $s\geqslant-\frac{n-1}{2}$. Полагая $x_1=\ldots=x_k=1$, $x_{k+1}=\ldots=x_n=-1$, мы видим, что $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=1$ и $-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2=-n$, откуда $s=-\frac{n-1}{2}$, т. е. эта граница также достигается.

22. Рассмотрим четыре клетки доски, занумерованные на рисунке 18 числами 1, 2, 3, 4. Первый игрок проигрывает, если сумма чисел в первой и третьей клетках меньше суммы чисел, стоящих во второй и четвертой клетках, и выигрывает, если она больше. Расположим написанные на карточках числа в порядке возрастания:

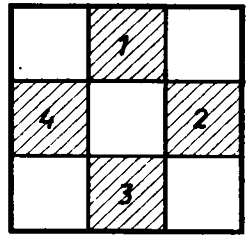


Рис. 18

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_8 \leqslant a_9.$$

Стратегия первого игрока зависит от того, какое из двух чисел больше: a_1+a_9 или a_2+a_8.

Первый случай: $a_1+a_9>a_2+a_8$. В этом случае правильная стратегия первого игрока такова. Он должен своим первым ходом поставить число a_9 в клетку 1, а вторым — в одну из клеток с четными номерами числа a_1 или a_2 (хотя бы одно из них еще не будет поставлено). Остальные ходы он может делать как угодно. По окончании игры сумма чисел в нечетных клетках будет заведомо не меньше чем a_1+a_9, а в четных — не больше чем a_2+a_8. Таким образом, первый выиграет.

Второй случай: $a_1+a_9 \leqslant a_2+a_8$. В этом случае первый игрок своим первым ходом ставит число a_1 в клетку 2, а вторым — в одну из клеток с нечетными номерами число a_8 или a_9. Тогда сумма чисел в четных клетках будет по окончании игры не больше чем a_1+a_9, а сумма чисел в нечетных клетках — не меньше чем a_2+a_8. Таким образом, и в этом случае первый игрок не проиграет.

23. Обозначим точками L, M и N середины дуг AB, BC и AC (рис. 19). Точкой O обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC. Нам достаточно доказать, что отрезок KO параллелен стороне AC. Тогда $OH \| AC$ из аналогичных соображений и $KH \| AC$, что и требуется доказать.

Проведем биссектрисы AM и BN, а также хорду AN. Бис-

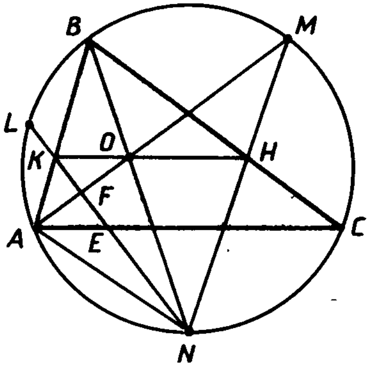


Рис. 19

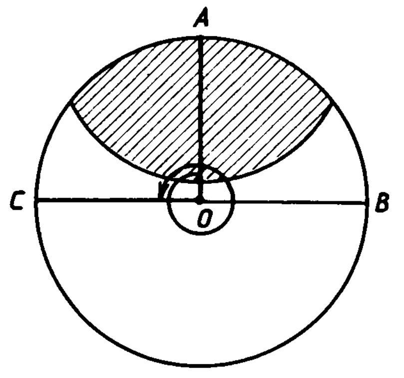


Рис. 20

сектрисы, конечно, пройдут через точку O. Пусть F и E — точки пересечения хорды LN с AM и AC соответственно. Заметим, что $\smile{LM}+\smile{NA}=180^\circ$, и, следовательно, $LN \perp AM$. Так как $\angle ANL = \angle LNB$, то $AF=FO$. Кроме того, $KF=FE$, так как AM — биссектриса угла BAC. Поэтому $\triangle AFE = \triangle OFK$, откуда $\angle FAE = \angle FOK$, что влечет параллельность KO и AE.

24. Покажем, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на $1001=13\cdot 77$. Если первые три цифры билета в точности совпадают с последними его тремя цифрами, т. е. номер билета имеет вид $\overline{abcabc}$, то он, очевидно, делится на 1001. Сумма номеров таких билетов также делится на 1001. Остальные счастливые билеты разобьем на пары: $\overline{abcdef}$ и $\overline{defabc}$. Сумма номеров в каждой паре делится на 1001, поэтому и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 1001.

25. Пусть a — длина отрезка, который освещает прожектор. Рассмотрим круг радиуса a с центром в точке O, где находится прожектор. Предположим, что катер входит в этот круг в точке A (рис. 20). Естественно, что катеру выгоднее всего войти в круг сразу вслед за тем, как луч прожектора побывал в точке A. За время $\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}$ катер не успеет еще дойти до острова и будет находиться в круге радиуса $\frac{5\pi}{16}a$ с центром в точке A (на рисунке часть этого круга заштрихована). За это же время луч повернется на $\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}$ радиан и заведомо просмотрит весь полукруг $OBAC$, где катер в этот момент будет находиться.

26. Обозначим число планет через n. Поскольку расстояния между планетами попарно различны, существуют ровно две планеты, расстояние между которыми является наименьшим среди всех попарных расстояний. Ясно, что астрономы, находящиеся на этих планетах, смотрят друг на друга. Рассмотрим остальные $n-2$ планеты и находящихся на них $n-2$ астрономов. Если хотя бы один из этих астрономов смотрит на одну из двух выбранных планет, то для всех $n-2$ планет не хватает наблюдателей, т. е. среди этих планет заведомо существует планета, которую никто не наблюдает. Если же ни на одну из двух выбранных планет никто из указанных $n-2$ астрономов не смотрит, то эти две планеты можно просто не рассматривать и повторить все рассуждения для оставшихся $n-2$ планет: сначала выбрать среди них две планеты, находящиеся на наименьшем расстоянии, затем рассмотреть оставшиеся $n-4$ планеты и находящихся на них $n-4$ астрономов и т. д. Рассуждая таким образом, мы придем к случаю, когда имеется всего три планеты A, B, C, расстояния AB, AC, BC между которыми различны. Очевидно, что если AB — наименьшее из этих расстояний, то планету C никто не наблюдает.

Заметим, что требование, чтобы все расстояния между планетами были попарно различны, существенно: если планеты A, B, C расположены в вершинах правильного треугольника, то в случае, когда с планеты A наблюдается планета B, с планеты B — планета C и, наконец, с планеты C — планета A, получаем, что не существует планеты, которую бы никто не наблюдал.

27. Ответ. Не существует.

Предположим, что натуральные числа x и y, удовлетворяющие условию задачи, существуют. Тогда без ограничения общности можно предположить, что $x \geqslant y$, и поэтому

$$x^2 < x^2 + y \leqslant x^2 + x < (x+1)^2.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $x^2 + y$ не может быть квадратом целого числа. Получили противоречие. Следовательно, натуральные числа x и y, для которых числа $x^2 + y$ и $x + y^2$ являются квадратами целых чисел, *не существуют*.

28. Возможны два случая расположения точек B и C на отрезке AD (рис. 21 и рис. 22). Рассмотрим случай, изображенный на рисунке 21. Второй случай рассматривается аналогично.

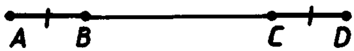


Рис. 21

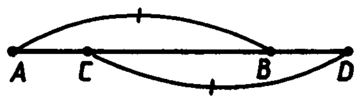


Рис. 22

Пусть точка P лежит на прямой AD. Легко видеть, что если точка P лежит внутри отрезка AD, то $PA + PD = AD$, а $PB + PC < AD$, и поэтому $PA + PD > PB + PC$. Если же точка P лежит вне отрезка AD или совпадает с A или D, то имеет место равенство $PA + PD = PB + PC$. Действительно, в этом случае $PA + PD$ равно удвоенному расстоянию от точки P до середины отрезка AD, $PB + PC$ — удвоенному расстоянию от точки P до середины отрезка BC, а середины отрезков AD и BC, очевидно, совпадают.

Пусть точка P не лежит на прямой AD. Обозначим через O общую середину отрезков AD и BC, через Q точку, симметричную точке P относительно точки O. Тогда четырехугольники $APDQ$ и $BPCQ$ — параллелограммы (рис. 23). Следовательно, $PD = AQ$, $PC = BQ$, и поэтому $PA + PD = PA + AQ$, $PB + PC = PB + BQ$. Таким образом, достаточно доказать, что $PA + AQ \geqslant PB + BQ$.

Обозначим через K точку пересечения прямой BP со стороной QA треугольника APQ (рис. 24). В силу неравенства треугольника из $\triangle QKB$ получаем, что $BK + KQ > BQ$. Аналогично, применяя неравенство треугольника к $\triangle KAP$, находим, что $AK + PA > PB + BK$. Складывая почленно эти неравенства, приходим к неравенству

$$BK + KQ + AK + PA > BQ + PB + BK,$$

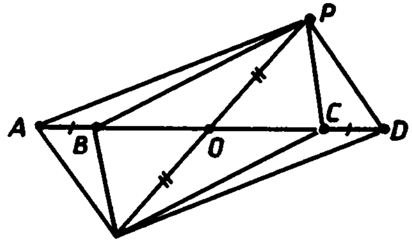


Рис. 23

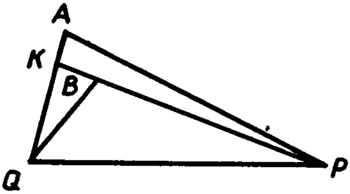


Рис. 24

или

$$AK+KQ+PA>BQ+PB.$$

Поскольку $AK+KQ=AQ$, отсюда следует, что

$$PA+AQ>PB+BQ,$$

что и требовалось доказать.

29. Пусть шеренга семиклассников перестроена по росту (первым в перестроенной шеренге стоит самый высокий из семиклассников). Рассмотрим семиклассника A, стоящего k-м в перестроенной шеренге. Докажем, что найдутся по крайней мере k восьмиклассников, которые выше его. Действительно, имеются $k-1$ семиклассников, которые не ниже A, и те восьмиклассники, которые стояли за ними при первоначальном построении, заведомо выше A. По условию восьмиклассник, стоявший при первоначальном построении за семиклассником A, также выше его. Следовательно, по меньшей мере k восьмиклассников выше семиклассника A, и поэтому восьмиклассник, который окажется стоящим за семиклассником A после перестроения по росту шеренги восьмиклассников, будет выше A.

30. Примем за единицу длины длину стороны клетки. Пусть для определенности сторона AB вертикальна и ее длина равна m. Тогда сторона AD горизонтальна, а ее длина равна km. Условимся пути, первые звенья которых лежат на $AB(AD)$, называть путями типа AB (соответственно типа AD).

Рассмотрим произвольный путь типа AD. Отметим на нем один из вертикальных отрезков длиной 1 (на рисунке 25 это отрезок MN) и перенесем кусок $D_1...M$ этого пути на одну клетку вверх и влево (получившийся при этом кусок $B_1...M_1$ на рисунке отмечен пунктиром). Поставим в соответствие пути (типа AD) $AD_1...MN...C$ с отмеченным вертикальным отрезком MN путь (типа AB) $AB_1...M_1N...$ $...C$ с отмеченным горизонтальным отрезком M_1N. Тогда каждому пути типа AD с отмеченным вертикальным отрезком будет поставлен в соответ-

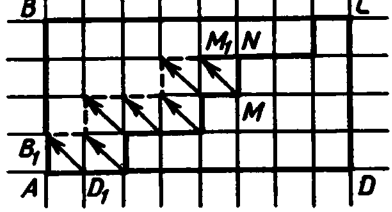


Рис. 25

ствие путь типа AB с отмеченным горизонтальным отрезком. Каждый путь типа AD порождает m различных путей типа AD с отмеченными вертикальными отрезками, которым соответствуют различные пути типа AB с отмеченными горизонтальными отрезками. Ясно, также, что пути типа AB с отмеченными горизонтальными отрезками, построенные по различным путям типа AD, будут различны и что каждый путь типа AB с отмеченным горизонтальным отрезком может быть получен при указанном соответствии из некоторого (единственного!) пути типа AD с отмеченным вертикальным отрезком. Следовательно, соответствие между путями обоих типов с отмеченными отрезками является взаимно однозначным, поэтому число путей типа AD с отмеченными вертикальными отрезками равно числу путей типа AB с отмеченными горизонтальными отрезками.

Пусть всего существует b путей типа AB и d путей типа AD. По условию задачи все рассматриваемые пути кратчайшим образом ведут из A в C. Следовательно, каждый такой путь содержит ровно m вертикальных отрезков длиной 1 и ровно km горизонтальных отрезков длиной 1. Поэтому существует bkm путей типа AB с отмеченными горизонтальными отрезками и dm путей типа AD с отмеченными вертикальными отрезками. В таком случае, как доказано, справедливо равенство $bkm=dm$, т. е. $bk=d$, а это и означает, что путей, у которых первое звено лежит на AD, в k раз больше, чем путей, у которых первое звено лежит на AB.

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ ОЛИМПИАД (1967—1992 гг.)

31. Пусть $\overline{a_1a_2...a_n}$ — данное число и $\overline{b_1b_2...b_n}$ — число с переставленными цифрами. Тогда

$$a_1+...+a_n=b_1+...+b_n.$$

Если сумма этих двух чисел равна $\underbrace{99...9}_{1967}$, то, как легко видеть, $n=1967$ и выполняются равенства

$$a_1+b_1=a_2+b_2=...=a_n+b_n=9.$$

Но тогда

$$2(a_1+...+a_n)=(a_1+...+a_n)+(b_1+...+b_n)=1967\cdot 9.$$

Получившееся равенство противоречиво, так как в левой его части стоит четное число, а в правой — нечетное число. Нужное *утверждение доказано.*

32. Если два прожектора A и B расположены по одну сторону от некоторой прямой l, то их всегда можно направить так, что они осветят всю противоположную полуплоскость (рис. 26). Для решения задачи достаточно провести прямую l так, чтобы два прожектора $П_1$ и $П_2$ находились по одну сторону от нее, а прожекторы $П_3$ и $П_4$ — по другую сторону. Как указано выше, прожекторами $П_1$ и $П_2$ *можно осветить* всю полуплоскость, содержащую точки $П_3$ и $П_4$, а прожекторами $П_3$ и $П_4$ *можно осветить* всю полуплоскость, содержащую точки $П_1$ и $П_2$.

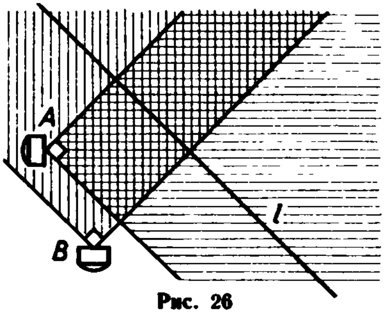


Рис. 26

33. Ответ. Нельзя.

Допустим, что указанная расстановка чисел 0, 1, 2, ..., 9 возможна. Никакие два из пяти чисел 0, 1, 2, 8, 9 не могут стоять рядом, иначе нарушается условие задачи. Значит, они стоят через одно, а остальные пять чисел заполняют промежутки между ними. В какой-то из промежутков попадает и число 7. Следовательно, среди чисел 0, 1, 2, 8, 9 есть два числа, отличающиеся от 7 на 3, 4 или 5. Но это неверно. Итак, числа 0, 1, 2, ..., 9 с соблюдением указанного условия расставить невозможно.

34. К числу 5 можно слева приписать ненулевую цифру так, что получившееся двузначное число, например 75, будет делиться на $25=5^2$. К числу 75 опять можно слева приписать ненулевую цифру, например 3, так, что новое число 375 будет делиться на $125=5^3$. Докажем, что эти действия можно продолжать сколь угодно долго, т. е. для каждого n найдется целое число A, записываемое n ненулевыми цифрами и делящееся на 5^n. Если такое число $A=5^n\cdot a$ найдено и слева к нему приписана цифра b, то получившееся число имеет вид:

$$b\cdot 10^n+A=5^n(b\cdot 2^n+a). \qquad (1)$$

Цифру b с требуемым свойством можно найти даже среди цифр 1, 2, 3, 4, 5. Действительно, допустим, что среди чисел

$$b\cdot 2^n+a, \text{ где } b=1, 2, 3, 4, 5, \qquad (2)$$

найдутся два числа $b_1\cdot 2^n+a$ и $b_2\cdot 2^n+a$, имеющие при делении на 5 одинаковые остатки. Тогда их разность $(b_1-b_2)\cdot 2^n$ делится на 5, что неверно. Значит, все числа (2) при делении на 5 имеют разные остатки и среди них есть число, делящееся на 5. Соответствующее число (1) делится на 5^{n+1}. Итак, указанный процесс построения чисел можно продолжать сколь угодно долго. При $n=1000$ получаем утверждение задачи.

35. Опустим из точек M и C перпендикуляры ML и CD на сторону AB (рис. 27). Так как M — середина отрезка AC, то ML — средняя линия треугольника ADC и, значит, $ML=\frac{1}{2}CD$. Согласно условию задачи имеем:

$$ML=\frac{1}{2}CD<\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM.$$

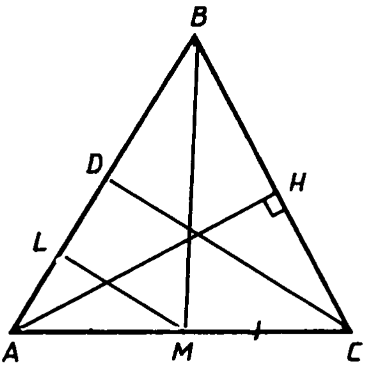


Рис. 27

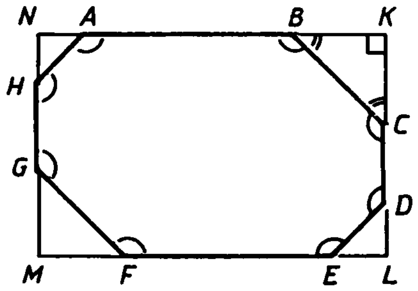


Рис. 28

Из прямоугольного треугольника BML находим, что $\sin \angle LBM < \frac{1}{2}$, и, значит, $\angle ABM < 30°$. Аналогично расстояние от точки M до прямой BC равно половине AH, т. е. половине BM. Следовательно, $\angle MBC = 30°$, $\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC < 60°$.

36. Пусть $ABCDEFGH$ — восьмиугольник, удовлетворяющий условию задачи (рис. 28). Докажем, что $AB = EF$. Остальные равенства доказываются аналогично. Обозначим через K точку пересечения прямых AB и CD, через L точку пересечения прямых CD и FE, через M точку пересечения прямых FE и GH и, наконец, через N точку пересечения прямых GH и AB. Тогда $KLMN$ — прямоугольник. Действительно, сумма внутренних углов восьмиугольника $ABCDEFGH$ равна $180° \cdot 6 = 1080°$, по условию все они равны, поэтому величина каждого угла данного восьмиугольника равна $135°$. Отсюда следует, что $\angle KBC = \angle KCB = 45°$ и, значит, $\angle BKC = 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle DLE = \angle FMG = \angle HNA = 90°$.

Так как длины противоположных сторон прямоугольника равны, то справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}} HA + AB + \frac{1}{\sqrt{2}} BC = \frac{1}{\sqrt{2}} FG + EF + \frac{1}{\sqrt{2}} DE,$$

или

$$(AB - EF)\sqrt{2} = FG + DE - HA - BC.$$

Поскольку AB, EF, FG, DE, HA и BC — целые числа, а число $\sqrt{2}$ иррациональное, полученное равенство может выполняться только в том случае, когда обе его части равны нулю. Отсюда, в частности, следует, что $AB - EF = 0$, т. е. $AB = EF$.

37. Так как $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$, то *второе число больше*.

38. Ответ. 799 или 800.

Рассмотрим множество вертикальных и горизонтальных пря-

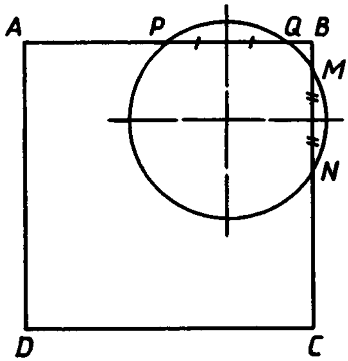


Рис. 29

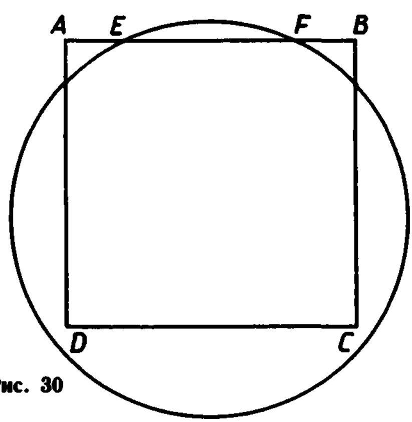


Рис. 30

мых, разбивающих плоскость на клетки. По условию длина стороны клетки равна 1 см. Так как диаметр окружности равен 200 см и окружность не касается указанных прямых, то она пересекает 200 горизонтальных и 200 вертикальных прямых, причем каждую в двух точках. Следовательно, всего имеется 800 точек пересечения окружности с указанными прямыми. Поскольку по условию окружность не проходит через вершины клеток, все эти 800 точек различны. Они разбивают данную окружность на 800 дуг. Ясно, что каждая дуга лежит в некоторой клетке. Если разные дуги лежат в разных клетках, то окружность пересекает 800 клеток. Остается выяснить, могут ли разные дуги лежать в одной и той же клетке, а в случае положительного ответа на этот вопрос необходимо еще установить, сколько дуг может попасть в одну и ту же клетку.

Рассмотрим произвольную клетку $ABCD$. Каждая попавшая в нее дуга определяется двумя точками пересечения данной окружности со сторонами клетки. Поскольку никакая окруж-

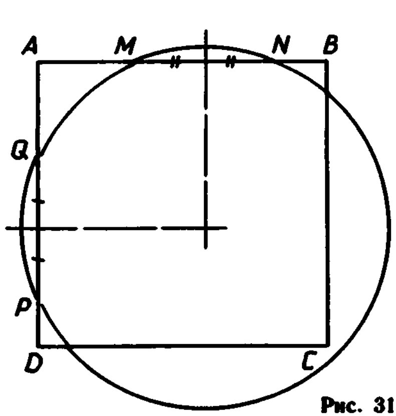


Рис. 31

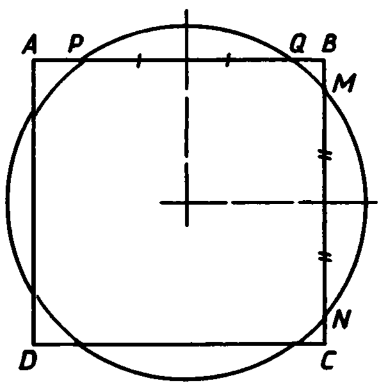


Рис. 32

ность не может иметь с прямой более двух общих точек, число дуг, попавших в рассматриваемую клетку, не превосходит 4. На рисунках 29—32 приведены примеры, показывающие, что в общем случае окружность может так пересекать стороны клетки $ABCD$, что клетке будут принадлежать две, три и даже четыре дуги. Ясно, однако, что случаи, изображенные на рисунках 29, 31, 32, невозможны по условию задачи, поскольку в этих случаях радиус окружности, очевидно, меньше 100 см. Действительно, во всех указанных случаях центр O окружности лежит, как легко видеть, на пересечении серединных перпендикуляров к хордам PQ и MN (рис. 29, 31, 32), т. е. лежит внутри клетки, и поэтому радиус окружности заведомо меньше длины диагонали клетки, т. е. меньше $\sqrt{2}$ см. Таким образом, любой клетке $ABCD$ могут принадлежать, самое большее, две дуги окружности, причем в этом случае окружность пересекает стороны клетки так, как показано на рисунке 30.

Докажем теперь, что существует не более одной клетки, содержащей две дуги. Для этого выясним, где должен быть расположен центр O окружности радиуса r см, чтобы она пересекала сторону AB клетки $ABCD$ так, как показано на рисунке 30

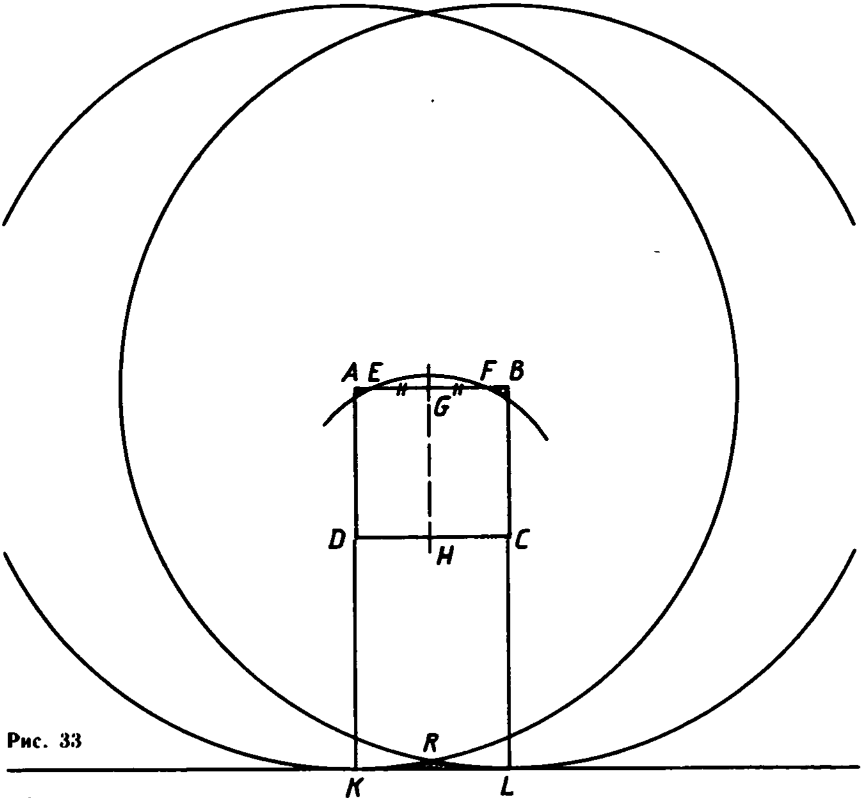


Рис. 33

(случаи, когда окружность пересекает указанным образом другие стороны клетки $ABCD$, рассматриваются аналогично). Легко видеть, что точка O должна быть расположена так, чтобы расстояния от нее до вершин A и B были больше r см, а расстояние до стороны AB — меньше r см. Кроме того, точка O должна лежать на серединном перпендикуляре GH к отрезку EF. Построим с центрами в точках A и B окружности радиуса r см и проведем прямую KL параллельно прямой AB на расстоянии r см от нее (рис. 33). Тогда прямая KL будет общей касательной к построенным окружностям (K и L — точки касания), а искомая точка O должна принадлежать внутренности «криволинейного треугольника» KRL, ограниченного дугами построенных окружностей и прямой KL (на рисунке 33 он закрашен), причем ясно, что любая точка, лежащая внутри указанного «криволинейного треугольника», может служить центром искомой окружности. Так как по условию $r=100$, т. е. является целым кратным длины стороны клетки, то прямая KL совпадает с одной из горизонтальных прямых, делящих плоскость на клетки. Тогда, очевидно, никакие два из указанных выше «криволинейных треугольников», построенных для различных сторон всевозможных клеток, не

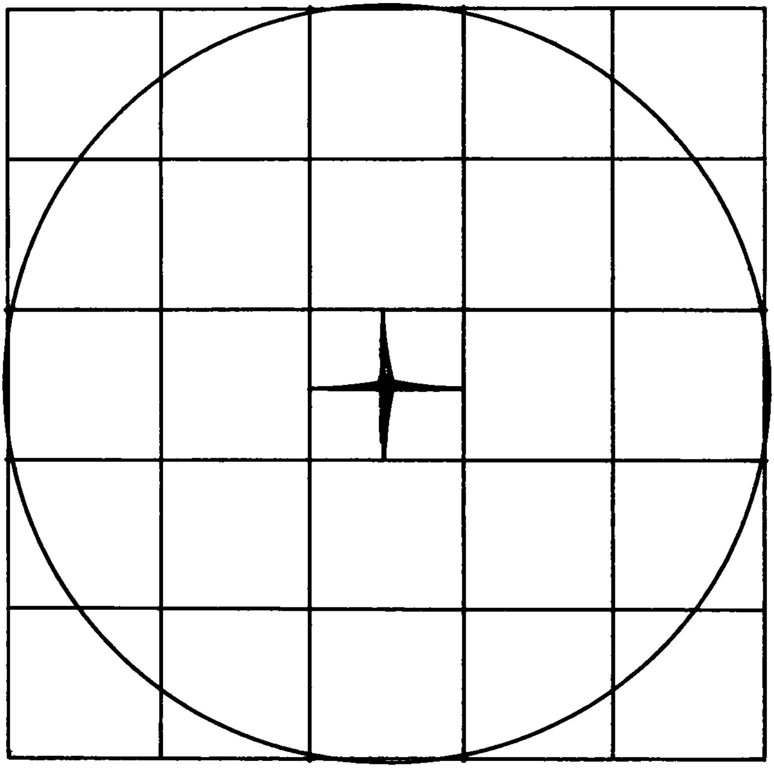


Рис. 34

могут иметь общих внутренних точек, и поэтому при выполнении условий задачи существует не более одной клетки, содержащей две дуги окружности. Кроме того, при этом, как доказано выше, не существует клеток, содержащих три или четыре дуги. Значит, число клеток, которые может пересекать данная окружность, равно либо 800, либо 799. Подчеркнем, что требование, чтобы радиус окружности был целым кратным длины стороны клетки, является существенным: на рисунке 34 приведен пример окружности радиуса 2,51 см, которая пересекает 4 клетки так, что в каждую из них попадают по две дуги окружности. Разумеется, в этом случае указанные выше «криволинейные треугольники» пересекаются.

39. Поскольку согласно условию задачи число студентов в каждой из пяти искомых групп может быть различным, достаточно разбить требуемым образом на пять групп только тех студентов, которые знают хотя бы один из трех языков. Действительно, после того как такое разбиение будет осуществлено, можно включить в любую из пяти получившихся групп всех тех студентов, которые не знают ни одного из трех языков. При этом получатся пять групп, удовлетворяющих условию задачи. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только тех студентов, которые знают хотя бы один из трех указанных языков. Докажем, что группу, составленную из таких студентов, можно так разбить на подгруппы (вообще говоря, разной численности), что каждый студент будет принадлежать одной и только одной подгруппе и в каждой подгруппе каждый язык будут знать ровно двое студентов. Отсюда, очевидно, легко следует утверждение задачи. Действительно, предположим, что группа студентов разбита на подгруппы указанным образом. Так как по условию каждый язык знают ровно 50 студентов, а в каждой подгруппе — ровно двое, то всего имеется 25 подгрупп, число студентов в подгруппе может колебаться от двух человек (когда подгруппа состоит из двух полиглотов, знающих все три языка) до шести человек (когда каждый входящий в подгруппу студент знает только один из трех языков, причем каждый язык знают ровно двое). Объединим любые пять из получившихся 25 подгрупп. Получим группу, в которой ровно 10 человек знают английский язык, ровно 10 — французский и ровно 10 — испанский. Остальные четыре искомые группы, в которых каждый из трех языков знают ровно 10 человек, строятся аналогично. Итак, задача будет решена, если мы докажем, что указанное разбиение на подгруппы существует.

Обозначим через *а* студента, знающего только английский язык (т. е. знающего английский язык и при этом не знающего французский и испанский языки), через *ф* и *и* — студентов, знающих соответственно только французский и только испанский, через *аф* (*аи*, *фи*) — студента, знающего английский и французский языки и не знающего испанский (соответственно знающего английский и испанский и не знающего французский и знающего французский и испанский и не знающего английский). Наконец, через *афи* обозначим студента, знающего все три языка. Пусть $N_а$ — число студентов, знающих только английский язык, $N_{аф}$ — число студентов, знающих английский и французский и не знающих испанского, $N_{афи}$ — число студентов, знающих все три языка (числа $N_ф$, $N_и$, $N_{аи}$, $N_{фи}$ определяются аналогично; на рисунке 35 студенты, знающие английский, французский и испанский языки, изображены в виде кругов *А, Ф, И* соответственно).

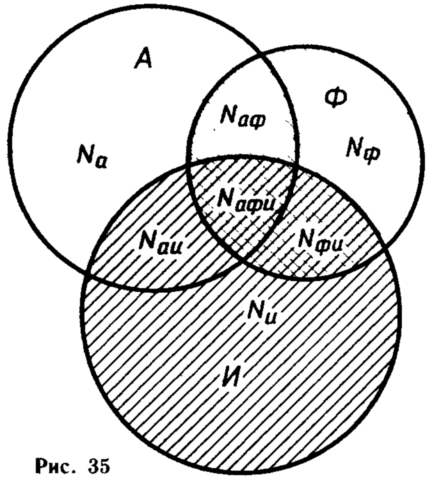


Рис. 35

Докажем, что из группы, содержащей $2k$, $k \geqslant 1$, студентов, знающих английский язык, $2k$ студентов, знающих французский язык, и $2k$ студентов, знающих испанский язык, можно выделить подгруппу, в которой каждый язык знают ровно двое студентов.

Если $N_{афи} \geqslant 2$, то утверждение очевидно: подгруппа {*афи, афи*} — искомая.

Пусть $N_{афи} = 1$. Докажем, что тогда хотя бы одно из чисел $N_а$, $N_ф$, $N_и$ отлично от нуля. Действительно, если бы $N_а = N_ф = N_и = 0$, то имели бы (рис. 35):

$$N_{аф} + N_{фи} = 2k-1, \quad N_{фи} + N_{аи} = 2k-1, \quad N_{аи} + N_{аф} = 2k-1.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем $2(N_{аф} + N_{фи} + N_{аи}) = 3 \cdot (2k-1)$, что невозможно, поскольку число в правой части не делится на 2. Предположим для определенности, что $N_а \neq 0$. Тогда если $N_{фи} \neq 0$, то в качестве искомой подгруппы можно взять {*афи, а, фи*}. Если же $N_{фи} = 0$, то, очевидно, $N_ф \neq 0$ и $N_и \neq 0$ (в противном случае получаем, что либо $N_{аи} = 2k-1$, либо $N_{аф} = 2k-1$, и так как $N_{афи} = 1$, $N_а \geqslant 1$, то число студентов в рассматриваемой группе, знающих английский язык, больше $2k$, что невозможно), и поэтому в качестве искомой подгруппы можно взять {*афи, а, ф, и*}.

Предположим, наконец, что $N_{афи} = 0$. Рассмотрим числа $N_{аф}$, $N_{фи}$, $N_{аи}$. Если $N_{аф} = N_{фи} = N_{аи} = 0$, то $N_а = N_ф = N_и = 2k$ и утверждение очевидно: подгруппа {*а, а, ф, ф, и, и*} искомая. Пусть одно из этих чисел, для определенности $N_{фи}$, отлично от нуля, а два других равны нулю: $N_{аф} = N_{аи} = 0$. Тогда $N_а = 2k$. Если $N_{фи} \geqslant 2$, то искомой будет подгруппа {*а, а, фи, фи*}. Если же $N_{фи} = 1$, то $N_ф = N_и = 2k-1$ и в качестве искомой можно взять, например, подгруппу {*а, а, фи, ф, и*}.

Пусть только одно из чисел $N_{аф}$, $N_{фи}$, $N_{аи}$ равно нулю: для определенности $N_{аи} = 0$, $N_{аф} \neq 0$, $N_{фи} \neq 0$. Тогда, очевидно, $N_а \neq 0$ и $N_и \neq 0$ (в противном случае получаем, что либо $N_{аф} = 2k$,

$N_{фи} \geqslant 1$, либо $N_{фи}=2k$, $N_{аф} \geqslant 1$, т. е. число студентов в рассматриваемой группе, знающих французский язык, больше $2k$, что невозможно), и поэтому в качестве искомой можно взять подгруппу $\{аф,\ фи,\ а,\ и\}$.

Если, наконец, $N_{аф} \neq 0$, $N_{фи} \neq 0$, $N_{аи} \neq 0$, то искомой подгруппой будет $\{аф,\ фи,\ аи\}$.

Таким образом, доказано, что из любой группы студентов, в которой $2k$, $k \geqslant 1$, человек знают английский язык, $2k$ человек — французский и $2k$ человек — испанский, всегда можно выделить подгруппу, в которой каждый язык знают ровно двое студентов. Отсюда, очевидно, следует, что группу студентов, в которой 50 человек знают английский язык, 50 — французский и 50 — испанский, можно разбить на непересекающиеся подгруппы так, что в каждой подгруппе каждый язык будут знать ровно двое студентов. Действительно, выберем из данной группы подгруппу, в которой каждый язык знают ровно двое студентов. Из оставшейся группы, в которой 48 человек знают английский язык, 48 — французский и 48 — испанский, снова выберем подгруппу с требуемыми свойствами и т. д.

40. При каждом натуральном k справедливы тождества

$$\frac{2k}{x^2-k^2}=\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x+k},$$

$$\frac{11}{(x+k-11)(x+k)}=\frac{1}{x+k-11}-\frac{1}{x+k}.$$

Полагая в первом из них $k=1, 2, \ldots, 10$, преобразуем левую часть данного в условии задачи тождества к виду

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\ldots+\frac{1}{x-10}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\ldots+\frac{1}{x+10}\right).$$

Используя теперь второе тождество, преобразуем правую часть данного в условии тождества следующим образом:

$$11\left(\frac{1}{(x-10)(x+1)}+\frac{1}{(x-9)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x-1)(x+10)}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{x-10}+\frac{1}{x-9}+\ldots+\frac{1}{x-1}\right)-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+10}\right).$$

Мы видим, что она равна левой части. *Тождество доказано.*

41. Рассмотрим восемь клеток, заштрихованных на рисунке 36. В любой строке, в любом столбце и на любой диагонали таблицы либо нет ни одной из этих клеток, либо имеются ровно две клетки.

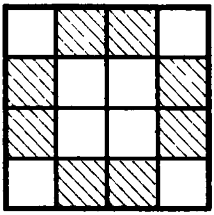


Рис. 36

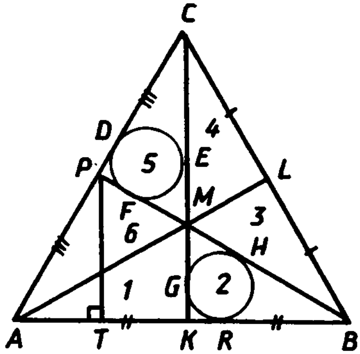


Рис. 37

Поэтому при указанных операциях четность числа «минусов», записанных в отмеченных восьми клетках, не может измениться. В частности, поскольку первоначально в этих клетках был записан ровно один «минус», число «минусов» в этих клетках не может стать равным нулю. Следовательно, в любой таблице, полученной из таблицы, данной в условии задачи, с помощью некоторого числа указанных операций, обязательно имеется хотя бы один «минус».

42. Так как радиус окружности, вписанной в треугольник, равен отношению площади треугольника к его полупериметру, то радиусы окружностей, вписанных в равновеликие треугольники, равны тогда и только тогда, когда равны периметры этих треугольников. Треугольник ABC своими медианами разбивается на шесть равновеликих треугольников (на рисунке 37 эти треугольники обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6). Действительно, треугольники 1 и 2, примыкающие к стороне AB, равновелики, поскольку у них равные основания $AK=KB$ и общая высота, проведенная из вершины M. Совершенно аналогично устанавливается, что равновелики треугольники 3 и 4, а также 5 и 6, примыкающие к другим сторонам треугольника ABC. Так как $ML=$ $=\frac{1}{2}AM$, то $S_{BML}=\frac{1}{2}S_{BAM}=S_{AMK}$, т. е. треугольники 3 и 1 равновелики. Также равновелики треугольники 3 и 5, и, следовательно, все шесть треугольников 1, 2, 3, 4, 5, 6 равновелики.

По условию радиусы четырех из шести окружностей, вписанных в эти треугольники, равны. Следовательно, у четырех из шести треугольников периметры равны. Из этих четырех треугольников два обязательно примыкают к одной стороне треугольника ABC. Пусть для определенности это треугольники 1 и 2. Тогда $AM+MK+AK=BM+MK+BK$, т. е. $AM=BM$. Значит, треугольник AMB равнобедренный, а MK — его высота. Отсюда следует, что CK — медиана и высота в треугольнике ACB, т. е. он равнобедренный: $AC=BC$.

Из четырех остальных треугольников 3, 4, 5, 6 какие-то два имеют такой же периметр, как и треугольники 1 и 2. Возможны два случая: либо этими треугольниками являются треугольники 5 и 6, либо одним из них является один из треугольников 3 или 4.

В первом случае равны периметры треугольников 2 и 5, следовательно,

$$PC+CM+MP=KB+BM+MK. \quad (1)$$

Так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, то справедливы равенства (рис. 37) $CD=CE$, $PD=PF$, $MF=ME$ и поэтому

$$PC+CM+MP=PC+(CE+ME)+(MF+PF)=$$
$$=PC+(CD+ME)+(ME+PD)=2PC+2ME. \quad (2)$$

Аналогично

$$KB+BM+MK=2KB+2MG. \quad (3)$$

Прямые CK и BP являются общими внутренними касательными к равным окружностям (вписанным в треугольники 2 и 5), поэтому отрезки EG и FH этих прямых, заключенные между точками касания, делятся точкой пересечения M прямых CK и BP пополам. В частности, $ME=MG$. В таком случае из равенств (1)—(3) следует, что $KB=PC$, т. е. $AB=AC=BC$.

Рассмотрим второй случай. Пусть для определенности равны периметры треугольников 1 и 3. Так как у этих треугольников равны также площади, а сторона AM общая, то они равны. В самом деле, если a, b, c — длины сторон треугольника, p — полупериметр, а S — площадь, то $(p-b)+(p-c)=a$, а из формулы Герона получаем, что $(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p(p-a)}$. Отсюда следует, что числа $p-b$ и $p-c$ являются корнями квадратного уравнения $x^2-ax+\frac{S^2}{p(p-a)}=0$. Поэтому если в двух треугольниках равны соответственно одна из сторон, периметр и площадь, то равны и две другие стороны, т. е. эти треугольники равны. Таким образом, треугольники APM и AKM равны. Остается только выяснить, какие именно из сторон AP, MP, MK и AK равны. Опустим перпендикуляр PT на прямую AB (рис. 37). Тогда треугольники PTB и MKB подобны, причем $\frac{PT}{MK}=\frac{PB}{MB}=\frac{3}{2}$, и поэтому $AP\geqslant PT=\frac{3}{2}MK>MK$, т. е. $AP\neq MK$ и, значит, $AP=AK$. Следовательно, и в этом случае $AB=AC=BC$, т. е. $\triangle ABC$ правильный.

43. Предположим противное: существует лишь конечное число простых чисел p, для которых уравнение $x^2+x+1=py$ имеет целочисленные решения $(x; y)$. Обозначим через p_0 наибольшее из этих чисел p и рассмотрим число x_0, равное произведению всех простых чисел от 2 до p_0 включительно. Число $x_0^2+x_0+1$ не делится, очевидно, ни на одно из простых чисел $p\leqslant p_0$. Поэтому оно делится на некоторое простое число p^*, большее p_0, т. е. существует такое целое число y_0, что $x_0^2+x_0+1=p^*y_0$. Следовательно, p^* — это такое простое число, что уравнение $x^2+x+1=$ $=p^*y$ имеет целочисленные решения. Получим противоречие: $p^*>p_0$, а p_0 — это по предположению наибольшее простое число, обладающее указанным свойством.

44. Ответ. $S_{max}=24$.

Обозначим через n число фигуристов, которым присуждались первые места. Если $n=1$, т. е. все девять судей присудили первые места одному и тому же фигуристу, то его сумма мест равна 9 и является, очевидно, наименьшей. Следовательно, в этом случае $S=9$.

Если $n=2$, т. е. первые места присуждались только двум фигуристам, то один из них получил не менее 5 первых мест. По условию остальные четыре полученных им места не ниже четвертого, поэтому его сумма мест не превосходит $5\cdot1+4\cdot4=21$. Следовательно, в этом случае $S\leqslant21$.

Пусть $n=3$, т. е. первые места получили трое фигуристов. Оценим сумму мест, полученных вместе этими тремя фигуристами. Так как остальные присужденные им места по условию не ниже четвертого, то эта сумма не превосходит числа $9\cdot1+9\cdot3+9\cdot4=$ $=72$ (которое получается, если, кроме всех первых мест, будут использованы все третьи и все четвертые места). Отсюда следует, что хотя бы у одного из этих фигуристов сумма мест не превосходит 24. Следовательно, в этом случае $S\leqslant24$.

Пусть $n=4$, т. е. первые места присуждались четверым фигуристам. Найдем сумму мест, которые они все вместе получили. Всего для оценки выступлений этих четырех фигуристов судьям пришлось использовать $9\cdot4=36$ мест, каждое из которых не ниже четвертого. Поскольку первых, вторых, третьих и четвертых мест всего имеется 36, отсюда следует, что, оценивая выступления этих четверых фигуристов, судьи использовали все первые, все вторые, все третьи и все четвертые места. Поэтому сумма мест, присужденных всем этим фигуристам вместе, равна $9\cdot1+9\cdot2+$ $+9\cdot3+9\cdot4=90$, и, следовательно, у некоторого из этих фигуристов сумма мест не превосходит 22. Таким образом, в этом случае $S\leqslant22$.

Случай $n\geqslant5$ невозможен, поскольку по условию задачи для оценки выступлений этих n фигуристов судьи могут использовать только места с первого по четвертое, т. е. всего 36 мест, тогда как им требуется $9n\geqslant45$ мест.

Итак, во всех случаях наименьшая сумма мест S не превосходит 24. Ниже (с. 80) приведена таблица распределения мест у всех 20 фигуристов, показывающая, что сумма S может принимать значение 24. Следовательно, 24 — это *наибольшее значение*, которое может принимать S.

45. Предположим сначала, что m — нечетное число, т. е. $m=2k+1$, где k — некоторое неотрицательное целое число. Рассмотрим пары $(a_j;\ b_j)$ для $j=1,\ 2,\ ...,\ m$. Очевидно, что не

Номер фигуриста	Номер судьи									Сумма мест, полученных фигуристом
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	1	1	3	3	3	4	4	4	24
2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	24
3	4	4	4	1	1	1	3	3	3	24
4	2	2	2	5	5	5	6	6	6	39
5	6	6	6	2	2	2	5	5	5	39
6	5	5	5	6	6	6	2	2	2	39
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	63
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	72
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	81
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	90
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	99
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	108
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	117
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	126
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	135
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	144
17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	153
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	162
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	171
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	180

менее чем для $k+1$ из этих пар выполняется одно из неравенств $a_j \leqslant b_j$ или $a_j \geqslant b_j$. Пусть для определенности не менее чем для $k+1$ пар выполняется неравенство $a_j \leqslant b_j$. Каждое из чисел b_j, входящих в эти пары, имеет вид $\frac{1}{q_j}$, где q_j — некоторое натуральное число. По условию числа b_j, входящие в разные пары, различны, поэтому в рассматриваемые пары в качестве b_j входит не менее чем $k+1$ различных чисел вида $\frac{1}{q}$, $q \in N$. Отсюда следует, что наибольший из знаменателей q не меньше $k+1$, т. е. наименьшее из рассматриваемых чисел b_j (пусть это будет число b_{j_0}) не превосходит $\frac{1}{k+1}$. В силу выбора пары $(a_{j_0}; b_{j_0})$ выполняется неравенство $a_{j_0} \leqslant b_{j_0}$, и поэтому

$$a_{j_0} + b_{j_0} \leqslant 2b_{j_0} \leqslant \frac{2}{k+1} = \frac{4}{m+1}.$$

Так как $j_0 \leqslant m$, то отсюда следует, что

$$a_m + b_m \leqslant a_{j_0} + b_{j_0} \leqslant \frac{4}{m+1} < \frac{4}{m}.$$

Таким образом, в случае нечетного m справедливо даже строгое неравенство $a_m + b_m < \frac{4}{m}$.

Пусть теперь m — четное число. Тогда $m-1$ — нечетное число, и поэтому, как доказано, выполняется неравенство $a_{m-1} + b_{m-1} \leqslant \frac{4}{m}$. В таком случае получаем, что

$$a_m + b_m \leqslant a_{m-1} + b_{m-1} \leqslant \frac{4}{m}.$$

Следовательно, неравенство доказано и в случае четного m.

46. Обозначим буквой C_1 точку на луче BC, для которой $BC_1 = AE$. Четырехугольник ABC_1E — параллелограмм, поэтому

$$AB + AE = EC_1 + BC_1.$$

Отсюда и из условия задачи следует, что

$$EC + BC = EC_1 + BC_1. \qquad (1)$$

Если $AE < BC$ (рис. 38), то из (1) находим, что $EC_1 = C_1C + EC$, а это противоречит неравенству треугольника. Если же $AE > BC$ (рис. 39), то приходим к равенству $EC = CC_1 + EC_1$, опять про-

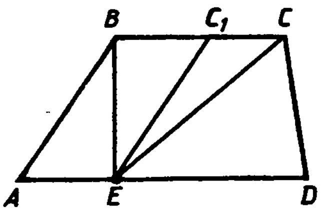


Рис. 38

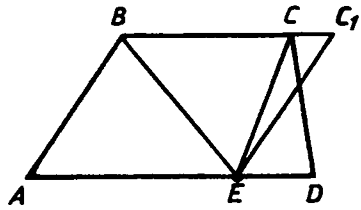


Рис. 39

тиворечащему неравенству треугольника. Остается единственная возможность: $AE=BC$. Аналогично доказывается, что $DE=BC$. Следовательно, $BC=\frac{1}{2}AD$.

47. Проведем через точку B, обозначающую волка, две прямые, параллельные диагоналям квадрата, и обозначим буквами C_1, C_2, C_3, C_4 точки их пересечения со сторонами квадрата (рис. 40). При перемещении точки B внутри квадрата точки C_1, C_2, C_3, C_4 будут перемещаться по его сторонам. В начальный момент точка B расположена в центре квадрата, а точки C_i — в вершинах. Если собаки в каждый момент времени будут находиться в точках C_1, C_2, C_3, C_4, то в момент выхода волка на сторону квадрата в той же точке окажутся по крайней мере две собаки и волк будет разорван. Покажем теперь, что скоростные возможности собак позволяют им находиться все время в точках C_i. Если за единицу времени волк из точки B переместился в точку B' (рис. 40), то собака C_4 должна за это же время попасть в точку C_4'. Легко видеть, что $C_4C_4'\leqslant\sqrt{2}\cdot BB'<1{,}5\cdot BB'$, и, так как максимальная скорость собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости волка, собака успевает прибежать в точку C_4'.

48. Обозначим через $abcde$ последние 5 цифр последовательности. Так как последовательность далее продолжена быть не может, то она содержит комбинации цифр $bcde0$ и $bcde1$. Допустим, что каждой из этих комбинаций предшествует в последовательности какая-то цифра. Ввиду условия задачи предшествующие цифры должны быть отличны друг от друга и от цифры a. Но это невозможно. Значит, одна из комбинаций $bcde0$ или $bcde1$ не имеет предшествующей цифры, т. е. стоит в начале последовательности.

49. Ответ. 180, 135, 108, 117.

Обозначим буквами A_1, A_2, A_3, A_4 искомые целые числа, буквой S их сумму, а буквой a первую цифру. Тогда справедливы неравенства

$$100a\leqslant A_i<100(a+1),\quad 400a\leqslant S<400(a+1),$$

и, значит, для каждого индекса i

$$\frac{S}{A_i}<1+\frac{300(a+1)}{100a}=4+\frac{3}{a},\quad \frac{S}{A_i}>1+\frac{300a}{100(a+1)}=4-\frac{3}{a+1}.$$

Из условия задачи следует, что между числами $4-\frac{3}{a+1}$ и $4+\frac{3}{a}$ должны лежать три различных целых числа. Это возможно только при $a=1$.

Итак, для каждого индекса i справедливы неравенства

$$100\leqslant A_i<200 \text{ и } 2{,}5<\frac{S}{A_i}<7. \qquad (1)$$

Среди отношений $\frac{S}{A_i}$ одновременно не могут содержаться 3

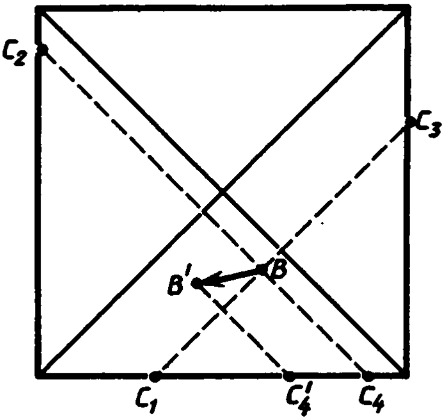


Рис. 40

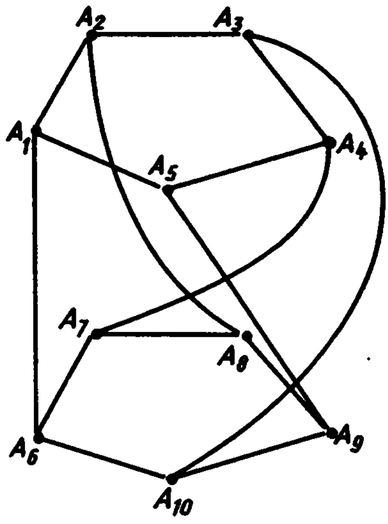


Рис. 41

и 6, поскольку в этом случае вопреки (1) отношение двух искомых чисел равно 2.

Если среди отношений $\frac{S}{A_i}$ содержатся 4, 5, 6, то искомые числа равны $\frac{S}{4}$, $\frac{S}{5}$, $\frac{S}{6}$ и $S-\frac{S}{4}-\frac{S}{5}-\frac{S}{6}=\frac{23}{60}S$. И этот случай невозможен, так как в противоречии с (1)

$$\frac{23}{60}S:\left(\frac{1}{6}S\right)=2{,}3>2.$$

Итак, среди отношений $\frac{S}{A_i}$ содержатся 3, 4, 5, а искомые числа равны $\frac{S}{3}$, $\frac{S}{4}$, $\frac{S}{5}$ и $S-\frac{S}{3}-\frac{S}{4}-\frac{S}{5}=\frac{13}{60}S$. Из (1) следует, что $\frac{S}{5}>100$, $\frac{S}{3}<200$, т. е. $500\leqslant S<600$. Целое число S должно делиться на 60. Значит, $S=540$, а *искомые числа равны* 180, 135, 108, 117.

50. Ответ. 10.

Из фиксированного города A можно проехать без пересадки не более чем в три города, а из каждого из этих трех городов — еще не более чем в два отличных от A города. Поскольку в каждый город можно долететь из A не более чем с одной пересадкой, то всего в государстве не более $1+3+3\cdot2=10$ городов. Между 10 городами A_1, A_2, ..., A_{10} сообщение с соблюдением условий задачи можно установить, например, так, как показано на рисунке 41.

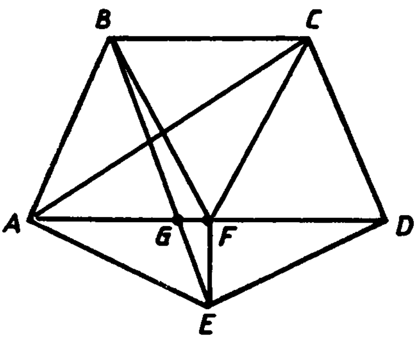


Рис. 42

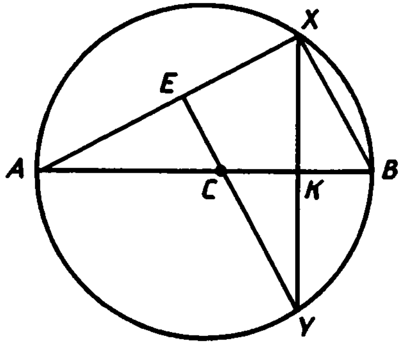


Рис. 43

51. Пусть AD — наибольшая диагональ и F — ее середина (рис. 42). Докажем, что все стороны пятиугольника видны из точки F под углами, не превышающими прямого. Так как EF — высота в равнобедренном треугольнике ADE, то $\angle AFE = \angle EFD = \frac{\pi}{2}$. В равнобедренных треугольниках ADE и ABC боковые стороны равны, а, кроме того, $AC \leqslant AD$. Значит, $\angle FAE \leqslant \angle BAC < \angle BAD$. Если G — точка пересечения отрезков AF и BE (рис. 42), то из доказанного выводим, что $\angle AGB < \angle AGE$ и $\angle AGB < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\angle BFA < \angle AGB < \frac{\pi}{2}$. Аналогично доказывается, что $\angle CFD < \frac{\pi}{2}$.

Если $\angle BFC \geqslant \frac{\pi}{2}$, то $BF < a$, $CF < a$, где a — длина стороны пятиугольника. В прямоугольных треугольниках EFD и EFA гипотенузы равны a, значит, $FD < a$, $AF < a$. Таким образом, в треугольниках ABF и CDF отрезки AB и CD являются наибольшими сторонами. Поэтому $\angle AFB \geqslant \frac{\pi}{3}$, $\angle CFD \geqslant \frac{\pi}{3}$ и, следовательно, $\angle BFC \leqslant \frac{\pi}{3}$. Приходим к противоречию.

Итак, *все стороны пятиугольника видны из точки F под углами, не превышающими прямого.*

52. Прямая XB параллельна прямой YE тогда и только тогда (рис. 43), когда $\angle BXY = \angle EYX$. Поэтому прямая EY перпендикулярна прямой AX только в том случае (заметим, что $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$), когда $\angle BXY = \angle EYX$, т. е. если $\angle EYX = \angle XYB$ (так как точки X и Y симметричны относительно прямой AB). Последнее равенство углов выполняется только тогда, когда $CK = KB$. Таким образом, точки X и Y обладают нужным свойством только в том случае, когда прямая XY пересекает отрезок BC в его середине и перпендикулярна ему.

53. Пусть x, y, z — заданные числа. Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} xyz=1, \\ x+y+z>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-(xy+xz+yz)+$$
$$+(x+y+z)-1=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)+(x+y+z)-1>0.$$

Таким образом, $(x-1)(y-1)(z-1)>0$. Отсюда видно, что два числа не могут быть больше 1, три числа больше 1 быть не могут по условию задачи.

54. О т в е т. Не более двух. На рисунке 44 приведены примеры, когда таких сторон вообще нет (рис. 44, *а*), имеется одна (рис. 44, *б*) или две (рис. 44, *в*).

Докажем, что более двух таких сторон быть не может. Предположим противное, т. е. что число таких сторон больше двух. Тогда выберем из них две стороны AB и CD так, чтобы они не имели общих вершин. Это всегда возможно, так как данный многоугольник не является треугольником, у которого нет диагоналей. Из треугольников ABO и DOC (рис. 45) имеем систему неравенств

$$\begin{cases} AO+BO>AB, \\ DO+OC>DC, \end{cases}$$

сложив которые, получаем неравенство

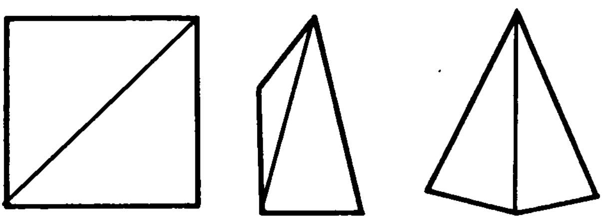
$$AC+BD>AB+DC,$$

что противоречит тому, что AB и DC равны наибольшей диагонали многоугольника.

55. Пусть $a_1a_2...a_{15}a_{16}a_{17}$ — данное число. Рассмотрим сумму

$$+\begin{array}{c} a_1a_2...a_{15}a_{16}a_{17} \\ \underline{a_{17}a_{16}...a_3a_2a_1} \end{array}$$

и будем производить сложение столбиком. Предположим, что в результате сложения мы получим число, все цифры которого явля-



а)   б)   в)

Рис. 44

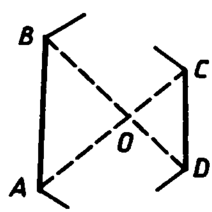


Рис. 45

ются нечетными числами. Тогда в первом и последнем столбцах стоят равные и нечетные числа. Поэтому из второго столбца в первый единица не переходит, т. е. $a_2+a_{16}\leqslant 9$. Заметим также, что и из предпоследнего столбца при сложении единица не может переходить в старший разряд (это было бы возможно лишь при $a_2+a_{16}=9$ и $a_1+a_{17}>10$; отсюда следовало бы тогда, что предпоследняя цифра суммы равна нулю, а это невозможно в виду сделанного предположения).

Рассмотрим теперь следующую сумму двух чисел:

$$+\frac{\begin{array}{r}a_3a_4\ldots a_{13}a_{14}a_{15}\\ a_{15}a_{14}\ldots a_5a_4a_3\end{array}}{}$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше уже для суммы этих двух чисел, а затем последовательно для сумм чисел

$$+\frac{\begin{array}{r}a_5a_6\ldots a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{13}a_{12}\ldots a_7a_6a_5\end{array}}{} \quad \text{и} \quad +\frac{\begin{array}{r}a_7a_8a_9a_{10}a_{11}\\ a_{11}a_{10}a_9a_8a_7\end{array}}{}\ .$$

мы докажем, что в средний разряд первоначальной суммы при сложении данных чисел единица не переходит и что $2a_9\leqslant 9$. Поэтому средняя цифра у суммы чисел равна $2a_9$, т. е. является четным числом. Доказанное противоречит сделанному предположению.

Замечание. Утверждение задачи остается справедливым для чисел с $n=4k+1$ разрядами, где $k\in N$, и перестает быть верным для всех остальных натуральных чисел n. Например:

$$+\frac{\begin{array}{r}819\\918\end{array}}{1737} \qquad +\frac{\begin{array}{r}2345\\5432\end{array}}{7777} \qquad +\frac{\begin{array}{r}112344\\443211\end{array}}{555555}.$$

56. Раскрасим данный треугольник в шахматном порядке так, как это показано на рисунке 46. Общее число маленьких треугольников равно $1+3+\ldots+19=100$. Из этих 100 маленьких треугольников цветных треугольников на 10 больше, чем белых (так как число цветных равно $1+2+3+\ldots+10=55$, а число белых равно $1+2+3+\ldots+9=45$). В каждой цепочке при передвижений по ней цвета чередуются, поэтому в ней цветных треугольников не более чем $45+1=46$, а всего маленьких треугольников в цепочке не более чем $46+45=91$. Пример цепочки, в которой число маленьких треугольников равно 91, показан на рисунке 47.

Замечание. Аналогичным рассуждением можно доказать, что если сторона исходного треугольника разбита на n равных частей, то наибольшее число маленьких треугольников в цепочке не превосходит n^2-n+1 и цепочка с таким числом маленьких треугольников существует.

57. Покажем, что для любого $n\geqslant 1$ существует n-значное число, имеющее только цифры 1 и 2 и делящееся на 2^n. Для $n=1$ таким числом является число $A_1=2$. Пусть A_n — n-значное число, имеющее только цифры 1 и 2 и делящееся на 2^n. Это значит,

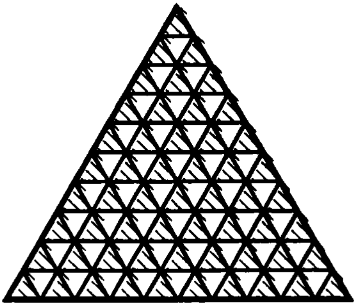


Рис. 46

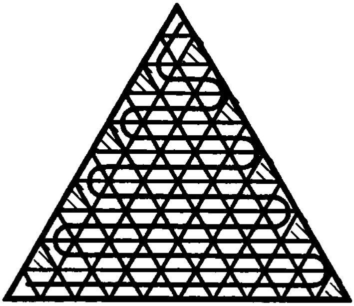


Рис. 47

что $A_n=2^n \cdot B_n$, где B_n — натуральное число. Если B_n — нечетное число, то число $1A_n=10^n+A_n=2^n \cdot 5^n+2^n \cdot B_n=2^n(5^n+B_n)$ делится, очевидно, уже на 2^{n+1}. Если же B_n — четное число, то число $2A_n=2 \cdot 10^n+A_n=2 \cdot 10^n+2^n \cdot B_n=2^n(2 \cdot 5^n+B_n)$ делится на 2^{n+1}. Таким образом, по n-значному числу A_n, удовлетворяющему условию задачи, легко строится и $(n+1)$-значное число A_{n+1}, также удовлетворяющее условию задачи. В частности, существует число A_{100}.

58. Пусть M — общая точка прямых A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3. Так как $A_3B_3C_3D_3$ — параллелограмм, то треугольники $A_3B_3C_3$ и $B_3D_3C_3$ равновелики ($S_{A_3B_3C_3}=S_{B_3D_3C_3}$). Поэтому вершины B_3 и D_3 равноудалены от прямой A_3C_3. Но тогда равновеликими будут и треугольники MB_3C_3 и MD_3C_3 (рис. 48—49) с общим основанием MC_3, от которого равноудалены вершины B_3 и D_3.

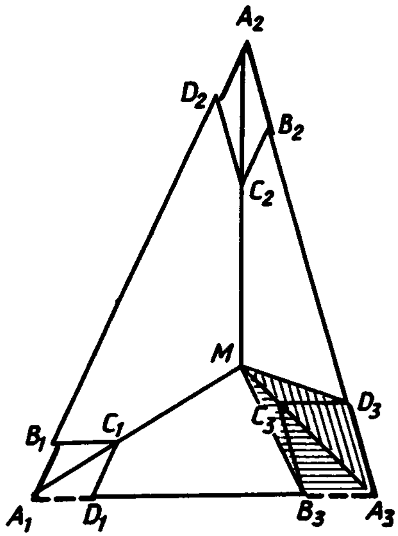


Рис. 48

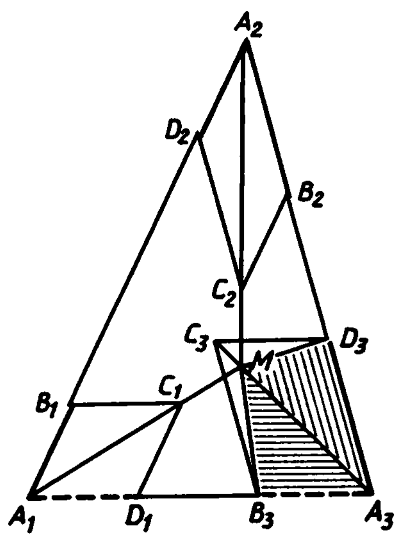


Рис. 49

Следовательно, и $S_{MB_3A_3} = S_{MA_3D_1}$. Точно так же доказывается, что $S_{MB_2A_2} = S_{MA_2D_2}$ и $S_{MB_1D_1} = S_{MA_1D_1}$. Аналогично из равенства $A_3D_3 = A_2B_2$ следует, что $S_{MA_3D_3} = S_{MA_2B_2}$, а из равенства $A_2D_2 = A_1B_1$ следует, что $S_{MA_2D_2} = S_{MA_1B_1}$. Таким образом, имеем:

$$S_{MB_3A_3} = S_{MA_3D_3} = S_{MA_2B_2} = S_{MA_2D_2} = S_{MA_1B_1} = S_{MA_1D_1}.$$

Отсюда следует, что $S_{MB_3A_3} = S_{MA_1D_1}$, и поэтому $B_3A_3 = A_1D_1$.

59. Запишем два ряда чисел, удовлетворяющих условию задачи (в каждом ряду по 10 чисел):

$$\begin{array}{l} x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_9\ x_{10} \\ y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_9\ y_{10} \end{array}$$

Согласно условию задачи для любых k, m, $k \neq m$, выполняется равенство $x_k + y_m = y_k + x_m$. Отсюда следует, что $y_k - x_k = y_m - x_m$ для любых k, m. Следовательно, $y_k - x_k = T$ для $k = 1, 2, \ldots, 10$, т. е. $y_k = x_k + t$. Итак, записанные два ряда чисел имеют вид:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & & x_9 & x_{10} \\ x_1+t & x_2+t & x_3+t & \ldots & x_9+t & x_{10}+t\,. \end{array}$$

Задав десять вопросов вида: «Какое число стоит в первой строке на k-м месте?» — для $k = 1, 2, \ldots, 10$, второй игрок узнает числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Задав далее вопрос «Какое число стоит во второй строке на первом месте?», второй игрок узнает число $x_1 + t$. Зная число $x_1 + t$, он может вычислить число $t = (x_1 + t) - x_1$, а вместе с ним и все числа второй строки. Итак, за одиннадцать вопросов второй игрок может узнать все записанные числа.

Меньшим чем 11 числом вопросов обойтись нельзя, ибо в распоряжении первого игрока имеются одиннадцать параметров $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}, t$, каждым из которых этот игрок может распорядиться произвольным образом.

60. Пусть $ABCD$ — данный квадрат со стороной 1. Возьмем в квадрате две точки A_1 и A_2 так, чтобы треугольник AA_1A_2 был правильным и имел стороны длиной 0,001 (рис. 50). Пусть F — данная фигура, S — ее площадь.

При сдвиге на вектор $\overline{AA_1}$ квадрат $ABCD$ перейдет в квадрат $A_1B_1C_1D_1$, а фигура F — в фигуру F_1. При сдвиге на вектор $\overline{AA_2}$ квадрат $ABCD$ перейдет в квадрат $A_2B_2C_2D_2$, а фигура F — в фигуру F_2. Ясно, что фигура F_2 получается из F_1 сдвигом на вектор $\overline{A_1A_2}$. Согласно условию задачи фигура F при сдвиге на вектор длиной 0,001 переходит в фигуру, не имеющую с F общих точек. Поэтому F не пересекается с F_1 и с F_2. Аналогично F_1 не пересекается с F_2, ибо в противном случае фигура F пересекалась бы с фигурой, получаемой из F сдвигом на вектор $\overline{A_1A_2}$ длиной 0,001. Следовательно, объединение трех фигур F, F_1 и F_2 имеет площадь $3S$. Так как оно расположено в квадрате со стороной $1 + 0{,}001 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}000866\ldots < 1{,}0009$, то $3S < (1{,}0009)^3$.

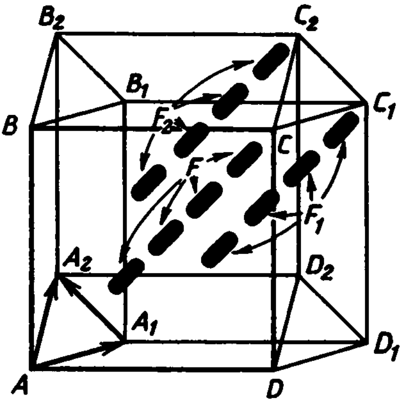


Рис. 50

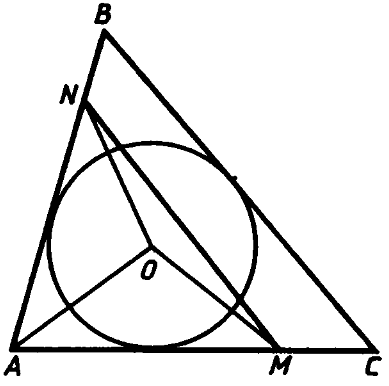


Рис. 51

Отсюда следует, что $S < \frac{1}{3}(1{,}0009)^3 = 0{,}334... < 0{,}34$, что и требовалось доказать.

Можно доказать более сильную оценку: $S < 0{,}287$ (см. [9], задача 6.6).

Сформулируем *аналогичную задачу для пространства*: в единичном кубе расположено тело, расстояние между любыми двумя точками которого не равно 0,001. Доказать, что объем этого тела меньше 0,251.

Для получения этой оценки достаточно рассмотреть правильный тетраэдр $AA_1A_2A_3$ с ребрами длиной 0,001, вершина A которого совпадает с какой-либо вершиной куба, а вершины A_1, A_2, A_3 лежат внутри куба, и осуществить сдвиги тела F объемом V на векторы $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}$. Полученные при этом тела F_1, F_2, F_3 и само тело F не будут иметь общих точек. Поэтому их суммарный объем равен $4V$ и, очевидно, меньше объема куба с ребром длиной 1,001: $4V < (1{,}001)^3$, т. е. $V < \frac{1}{4}(1{,}001)^3 < 0{,}251$.

61. а) Пусть ABC — данный треугольник, p — его полупериметр, а MN — прямая, делящая треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра. Пусть O — центр вписанной окружности, r — ее радиус. Ясно, что по некоторую сторону от MN находится не более одной вершины треугольника. Пусть это будет вершина A (рис. 51). Тогда

$$S_{MONA} = S_{MOA} + S_{AON} = \frac{1}{2} r \cdot AM + \frac{1}{2} r \cdot AN = \\ = \frac{1}{2} r (AM + AN) = \frac{1}{2} rp = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $AMON$ равна половине площади треугольника ABC, так же как и площадь треугольника AMN, поэтому $S_{AMON} = S_{AMN}$. Следовательно, $S_{MNO} = 0$, из чего следует, что точка O лежит на MN.

б) Для произвольного многоугольника утверждение доказывается аналогично: если точки M, N делят периметр многоугольника пополам, то ломаная, составленная из отрезков OM и ON, делит площадь многоугольника пополам, из чего следует, что $S_{MNO}=0$, т. е. точка O лежит на MN.

62. Докажем вначале следующее утверждение: если $a_1<a_2<$ $<\ldots<a_n$, где $n\geqslant 4$,— различные положительные числа, то среди них найдутся три числа, наибольшее из которых не равно сумме двух других. Действительно, если бы это было не так, то для любых трех номеров i, j, k (будем считать, что $i<j<k$) выполнялось бы равенство $a_i+a_j=a_k$. В частности, взяв $i=1$, $j=2$ и $k=n$, получим равенство $a_1+a_2=a_n$, а взяв $i=1$, $j=3$ и $k=n$ (это делать можно, ибо $n\geqslant 4$), получим равенство $a_1+a_3=a_n$. Из этих равенств следует, что $a_2=a_3$, а это противоречит неравенству $a_2<a_3$.

Предположим теперь, что утверждение задачи неверно, т. е. существуют 25 различных положительных чисел, таких, что сумма или модуль разности любых двух из них совпадает с каким-либо числом из остальных 23 чисел. Это значит, что какова бы ни была тройка чисел a, b, c (считаем, что $a<b<c$) из этих 25 чисел, то либо одно из них (наибольшее) равно сумме двух других: $c=a+b$, либо одно из них (таким числом может быть или число a, или число b) равно модулю разности двух других:

$$\text{или } a=|c-b|=c-b, \text{ или } b=|c-a|=c-a.$$

Но тогда вновь $c=a+b$, т. е. вновь наибольшее число равно сумме двух других. Мы приходим к противоречию с утверждением, доказанным ранее.

63. а) Рассмотрим четыре вершины A_1, A_4, A_7 и A_{10}. При замене знаков, осуществляемой согласно условию задачи в шести последовательных вершинах данного 12-угольника, ровно у двух из этих четырех вершин знак изменится на противоположный. Следовательно, в этих четырех вершинах может появиться лишь нечетное число знаков «минус», а четыре знака «плюс» появиться не могут.

б) Доказывается аналогично, если рассмотреть шесть вершин A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}.

в) Доказывается аналогично, если рассмотреть восемь вершин A_1, A_3, A_4, A_6, A_7, A_9, A_{10}, A_{12}.

64. Проведем отрезок MN, он пересечет диагональ AC в центре прямоугольника — точке O. Продолжим также отрезок QN до пересечения с продолжением стороны CD в точке R (рис. 52). Ввиду того что $MO=ON$, мы имеем $PC=CR$ и заключаем, что $\triangle PNR$ равнобедренный. Поэтому $\angle QNM=\angle NRP=\angle RPN=\angle MNP$.

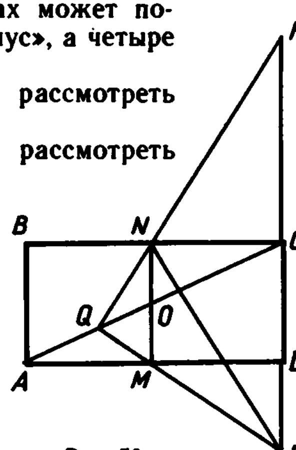


Рис. 52

65. Выберем из данных 50 отрезков $[a_i;\ b_i]$ на числовой оси отрезок с наименьшим b_i. Пусть это $[a_1;\ b_1]$. Если существует не меньше 8 чисел a_i (включая a_1), таких, что $a_i \leqslant b_1$, то точка b_1 принадлежит по крайней мере 8 отрезкам и утверждение а) верно. В противном случае, удалив из системы все отрезки с $a_i \leqslant b_1$, получим систему не менее чем из $50-7=43$ отрезков $[a_i;\ b_i]$, у которых $a_i > b_1$.

Из полученной системы аналогичным образом выберем отрезок $[a_2;\ b_2]$ с наименьшим правым концом. Тогда либо b_2 принадлежит 8 отрезкам, либо существует не менее $50-2\cdot 7=36$ отрезков $[a_i;\ b_i]$, у которых $a_i > b_2$. Повторив это рассуждение 7 раз, мы либо в какой-то раз придем к случаю, когда 8 отрезков имеют общую точку, т. е. верно утверждение а), либо выберем 8 отрезков: $[a_1;\ b_1]$, $[a_2;\ b_2]$, ..., $[a_7;\ b_7]$ — и еще по крайней мере $50-7\cdot 7=1$ не пересекающийся с ними отрезок $[a_8;\ b_8]$, удовлетворяющие утверждению б).

66. Ответ. $x=1972$.

Предположим, что $x \geqslant 27$. Имеем

$$4^{27}+4^{1000}+4^{x}=4^{27}\cdot(1+4^{973}+4^{y}) = (2^{27})^{2}\cdot(1+2\cdot 2^{1945}+(2^{y})^{2}),$$

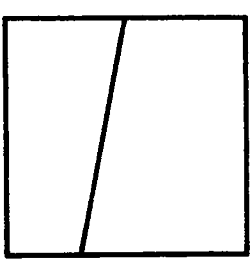
где $y=x-27$. Очевидно, что при $y=1945$, т. е. $x=1972$, наше выражение есть полный квадрат. Если же $x>1972$, то $y>1945$ и

$$(2^{y})^{2}<1+2\cdot 2^{1945}+(2^{y})^{2}<(1+2^{y})^{2}.$$

В этом случае выражение $1+2\cdot 2^{1945}+(2^{y})^{2}$ строго заключено между двумя последовательными квадратами и само полным квадратом не является, а с ним и все выражение $4^{27}+4^{1000}+4^{x}$.

67. Если прямая пересекает две смежные стороны квадрата, то, очевидно, она разрезает квадрат на треугольник и пятиугольник. Но по условию каждая из 9 прямых разрезает квадрат на четырехугольники. Следовательно, такая прямая пересекает две противоположные стороны квадрата, т. е. разбивает квадрат на две трапеции (или два прямоугольника), основания которых лежат на сторонах квадрата и высоты которых равны стороне квадрата (рис. 53). Поэтому каждая из указанных в условии задачи прямых делит среднюю линию квадрата, параллельную основаниям трапеции, в отношении 2:3 или же 3:2, т. е. в одной из четырех точек, указанных на рисунке 54. Через одну из этих точек про-

Рис. 53



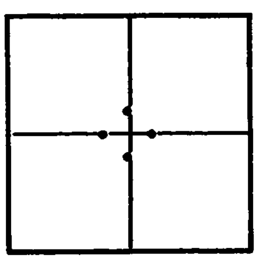


Рис. 54

ходит не менее трех прямых, так как в противном случае их было бы не больше чем $2\cdot 4=8$, что противоречит условию.

68. Будем производить отсчет дуг против часовой стрелки. Нам нужно доказать, что $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5<450^\circ$ (рис. 55). Для вписанных углов A_1, A_3 и A_5 верны следующие равенства:

$$\angle A_1=180^\circ-\frac{\overset{\smile}{A_2A_7}}{2},$$

$$\angle A_3=180^\circ-\frac{\overset{\smile}{A_4A_2}}{2},$$

$$\angle A_5=180^\circ-\frac{\overset{\smile}{A_6A_4}}{2}.$$

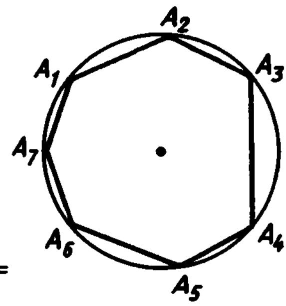


Рис. 55

Поэтому

$$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=3\cdot 180^\circ-\frac{\overset{\smile}{A_6A_7}}{2}=$$

$$=2\cdot 180^\circ+\frac{\overset{\smile}{A_7A_6}}{2}.$$

Но дуга $\overset{\smile}{A_7A_6}$ не может быть больше полуокружности, поскольку в противном случае центр окружности O не лежал бы внутри нашего семиугольника. Следовательно,

$$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=360^\circ+\frac{\overset{\smile}{A_7A_6}}{2}<360^\circ+90^\circ=450^\circ.$$

69. а) Второму достаточно придерживаться следующей стратегии. Если первая названная цифра от 0 до 3, ставить ее на первое место в первом числе, а если первая цифра от 6 до 9, то на первое место во втором числе. (При этом независимо от дальнейшей игры разность будет меньше 4000.) Если первая цифра 4, то поставить ее на первое место в первом числе, затем все цифры 0 ставить на места со второго по четвертое, а первую же отличную от нуля цифру, если она появится, поставить на первое место во втором числе. (Наибольшая разность равна 4000, когда все цифры после четверки — нули.) Если первая цифра 5, то поставить ее на первое место во втором числе, затем все девятки ставить на места со второго по четвертое, а первую же цифру не 9, если она появится,— на первое место в первом числе. (Аналогично предыдущему наибольшая разность равна 4000.)

б) Одна из возможных стратегий первого игрока такова. Она разбивается на два этапа: до появления числа в старшем разряде одного из чисел и после такого появления. На первом этапе первый игрок называет только числа 4 и 5 как первым ходом, так и в последующие в зависимости от ситуации, сложившейся в самом левом из уже частично заполненных разрядов.

В ситуации

$$\begin{matrix} * & & * \\ 5 & \text{или} & 4 \end{matrix}$$

он называет 5; в ситуации

$$\begin{matrix}5\\ *\end{matrix},\ \text{или}\ \begin{matrix}4\\ *\end{matrix},\ \text{или}\ \begin{matrix}5\\ 4\end{matrix}$$

он называет 4. Ситуация же

$$\begin{matrix}4\\ 5\end{matrix}$$

при этом встретиться не может.

Рассмотрим теперь момент появления числа в старшем разряде одного из чисел. Дальнейшая стратегия первого игрока такова: если заполнен старший разряд уменьшаемого, называем дальше одни нули, а если заполнен старший разряд вычитаемого, то девятки. Докажем, что разность при этом будет не меньше числа 4000. Действительно, в первом случае возможны варианты:

$$\begin{matrix}4\,.\,.\,.\,5\,.\,.\,.\\ *\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\end{matrix},\quad \begin{matrix}4\,.\,.\,.\,4\,.\,.\,.\\ *\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\end{matrix},\quad \begin{matrix}4\,.\,.\,.\,5\,.\,.\,.\\ *\,.\,.\,.\,4\,.\,.\,.\end{matrix},$$

$$\begin{matrix}5\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\\ *\,.\,.\,.\,5\,.\,.\,.\end{matrix},\quad \begin{matrix}5\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\\ *\,.\,.\,.\,4\,.\,.\,.\end{matrix},$$

где, кроме старшего разряда, указан и ближайший от него из частично заполненных разрядов, а вместо остальных разрядов стоят многоточия. Если теперь вместо звездочек поставить нули, то разность будет не меньше 4000.

Во втором случае имеются следующие возможности:

$$\begin{matrix}*\,.\,.\,.\,5\,.\,.\,.\\ 4\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\end{matrix},\quad \begin{matrix}*\,.\,.\,.\,4\,.\,.\,.\\ 4\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\end{matrix},\quad \begin{matrix}*\,.\,.\,.\,5\,.\,.\,.\\ 4\,.\,.\,.\,4\,.\,.\,.\end{matrix},$$

$$\begin{matrix}*\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\\ 5\,.\,.\,.\,5\,.\,.\,.\end{matrix},\quad \begin{matrix}*\,.\,.\,.\,*\,.\,.\,.\\ 5\,.\,.\,.\,4\,.\,.\,.\end{matrix}$$

Подставляя вместо звездочек девятки, также убеждаемся в том, что разность будет не меньше 4000.

70. Своими действиями эксперт должен доказать суду, что каждая монета с номерами 1—7 легче каждой монеты с номерами 8—14. Это легко, очевидно, сделать за семь взвешиваний. Покажем, что это же можно сделать и за три взвешивания. Тем самым мы сразу решим пункт б) задачи.

Первое взвешивание. Эксперт кладет на левую чашку фальшивую монету № 1, на правую — настоящую монету № 8. Правая чашка перевешивает. Суд видит, что монета № 8 настоящая, а монета № 1 фальшивая.

Второе взвешивание. Эксперт добавляет на левую чашку монеты № 9 и № 10, на правую — монеты № 2 и № 3. Левая чашка перевешивает. Суд видит, что на левой чашке настоящих монет больше, чем на правой. В то же время на правой чашке их не менее одной (№ 8). Следовательно, на левой чашке настоящих монет должно быть не менее двух. Это означает, что монеты № 9 и № 10 настоящие. Суд также видит, что на правой чашке фальшивых монет больше, чем на левой, а на левой их не менее одной (№ 1). Следовательно, обе монеты № 2 и № 3 фальшивые.

Третье взвешивание. Эксперт кладет на левую чашку монеты № 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, на правую — монеты № 1, 2, 3, 11, 12, 13, 14. Первая чашка перевешивает. Суд убеждается, что на левой чашке фальшивых монет больше, чем на правой, а на правой их не менее трех (уже известные монеты № 1, 2, 3). Поэтому монеты № 4—7 фальшивые. Аналогично на правой чашке настоящих монет больше, чем на левой, а на левой их не менее трех (№ 8—10). Следовательно, монеты № 11—14 настоящие.

71. Доказательство проведем *методом от противного*. Пусть A — данное девятизначное число, записанное с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, оканчивающееся на 5 и являющееся полным квадратом. Так как A оканчивается на 5 и является полным квадратом, то A делится на 25 и является квадратом числа, также оканчивающегося на 5, т. е. $A=B^2$, где $B=10x+5$. Но тогда $A=(10x+5)^2=100x(x+1)+25$. Мы видим, что две последние цифры числа A суть 25, а третья (справа) цифра есть последняя цифра произведения $x(x+1)$, где x — некоторое натуральное число. Несложно с помощью небольшого перебора убедиться, что произведение $x(x+1)$ может оканчиваться только цифрами 0, 2 и 6. Так как цифры 0 в записи числа A нет, а цифра 2 уже имеется, то остается единственная возможность: третья (справа) цифра числа A есть 6. Итак, число A оканчивается на 625. Следовательно, число A равно $1000y+625$, и мы видим, что оно делится на $125=5^3$, причем последняя цифра числа y является четвертой (справа) цифрой числа A. Будучи квадратом, число A делится и на $625=5^4$. А это может быть только в случае, когда число y делится на 5. Следовательно, число y оканчивается либо на 0, либо на 5, но ни то ни другое уже невозможно: цифра 0 отсутствует в записи числа A по условию задачи, а цифра 5 стоит в конце числа A. Получили противоречие.

72. Доказательство проведем *методом математической индукции*. Пусть задача имеет решение для n точек $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Добавим к ним две новые точки A и B и соединим их с точками $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и между собой так, как изображено на рисунке 56. Легко проверить, что построенные соединения удовлетворяют условию задачи. Действительно,

из C_i в C_j можно попасть требуемым путем в силу предположения индукции;

из C_i в B попадаем вдоль вектора $\overline{C_iB}$;

из C_i в A — вдоль векторов $\overline{C_iB}$ и $\overline{BA}$;

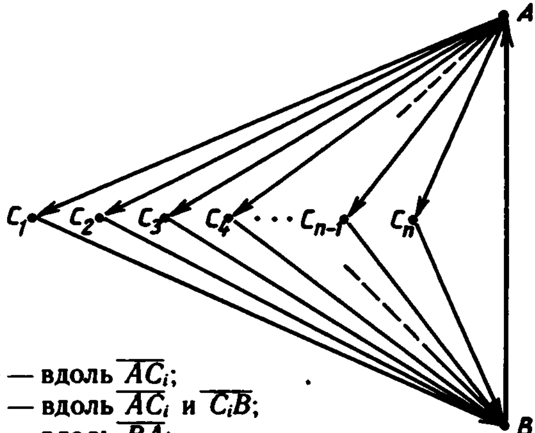


Рис. 56

из A в C_i — вдоль $\overline{AC_i}$;
из A в B — вдоль $\overline{AC_i}$ и $\overline{C_iB}$;
из B в A — вдоль $\overline{BA}$;
из B в C_i — вдоль $\overline{BA}$ и $\overline{AC_i}$.

Таким образом, для $(n+2)$-х точек C_1, C_2, ..., C_n, A, B задача также имеет решение.

Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что имеются решения для $n=3$ и $n=6$ точек. Тогда в силу доказанного решение задачи будет иметь место для $n=5, 7, 9, \dots$ точек и для $n=8, 10, 12, \dots$ точек. Решения для $n=3$ и $n=6$ даны на рисунках 57 и 58.

Отметим, что при $n=4$ задача не имеет решения.

Рис. 57

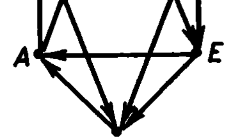


Рис. 58

73. Обозначим через α, β, γ углы построенных треугольников (рис. 59). Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы окружностей I, II, III, описанных около треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 соответственно. По теореме синусов из треугольников ABC_1 и AB_1C имеем:

$$AB=2r_1\sin\gamma, \qquad AB_1=2r_3\sin\gamma,$$
$$BC_1=2r_1\sin\alpha, \qquad B_1C=2r_3\sin\alpha,$$
$$C_1A=2r_1\sin\beta, \qquad CA=2r_3\sin\beta.$$

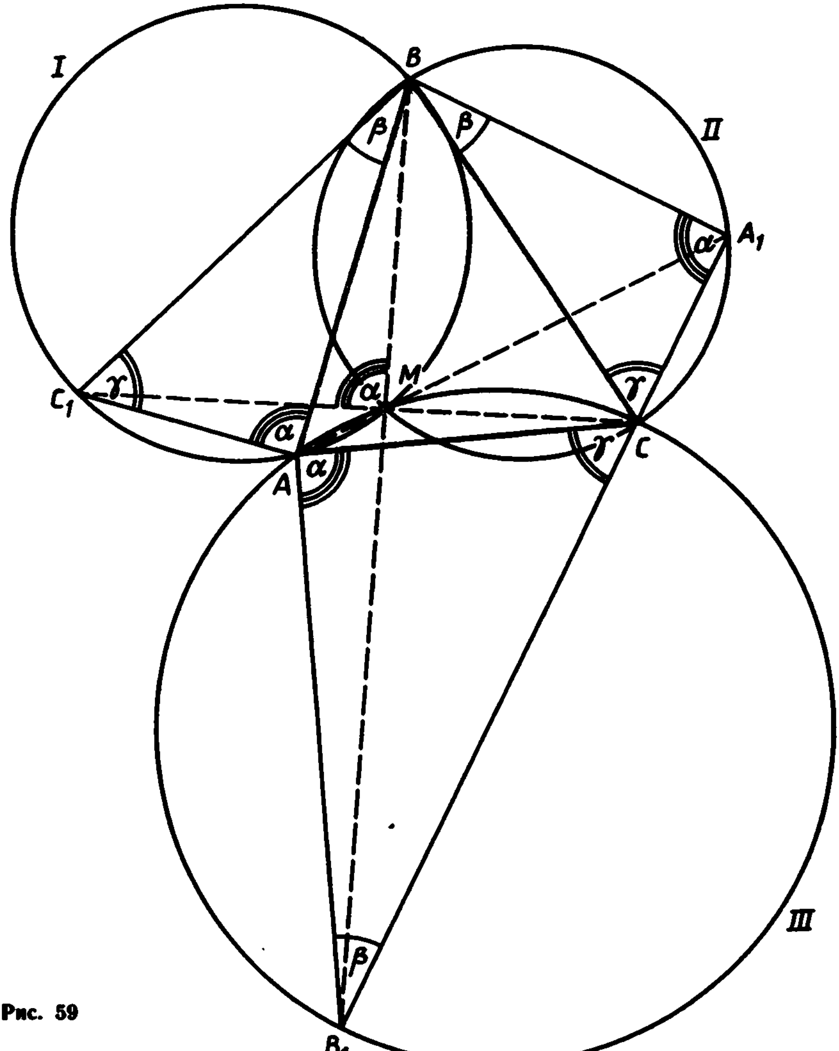


Рис. 59

Покажем, что треугольники BAB_1 и C_1AC подобны. Действительно,

$$\frac{BA}{C_1A}=\frac{2r_1\sin\gamma}{2r_1\sin\beta}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

$$\frac{AB_1}{AC}=\frac{2r_3\sin\gamma}{2r_3\sin\beta}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

т. е. $\frac{BA}{C_1A}=\frac{AB_1}{AC}$, откуда $\frac{BA}{AB_1}=\frac{C_1A}{AC}$. Кроме того, $\angle BAB_1=$

$= \angle BAC + \alpha$ и $\angle C_1AC = \alpha + \angle BAC$, т. е. $\angle BAB_1 = \angle C_1AC$. Следовательно, треугольники BAB_1 и C_1AC подобны по двум сторонам и углу между ними.

Если мы осуществим поворотную гомотетию, которая три точки B, A, B_1 переводит в точки C_1, A, C соответственно, то она преобразует треугольник BAB_1 в подобный ему треугольник C_1AC. При этом отрезок BB_1 перейдет в отрезок C_1C и угол между ними (на рисунке 59 угол C_1MB) будет равен α. Пусть M — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Так как $\angle C_1AB = \alpha = \angle C_1MB$, то точка M лежит на окружности I (описанной около треугольника C_1AB).

Так как $\angle BMC = 180° - \alpha$, а $\angle BA_1C = \alpha$ и, следовательно, справедливо равенство $\angle BMC + \angle BA_1C = 180°$, то около четырехугольника $BMCA_1$ можно описать окружность. Следовательно, точка M лежит на окружности II.

Так как $\angle AB_1B = \angle AB_1M = \angle ACC_1 = \angle ACM$, то точка M лежит на окружности III.

Итак, точка M, в которой пересекаются отрезки C_1C и B_1B, является общей точкой трех окружностей I, II и III.

Аналогично доказывается, что треугольник ACA_1 подобен треугольнику B_1CB и что точкой пересечения отрезков A_1A и B_1B является общая точка M трех окружностей I, II и III.

Следовательно, три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке M, которая является общей точкой и трех окружностей I, II и III.

74. Разделим квадрат размером $N \times N$ на N^2 клеток размером 1×1. Занумеруем строки из клеток номерами 1, 2, ..., N сверху вниз, а столбцы из клеток номерами 1, 2, ..., N слева направо. Клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца, будем называть $(i; j)$-й клеткой. Заштрихуем диагональные клетки (1; 1), (2; 2), ..., $(N; N)$, в клетках с номерами $(i; j)$,

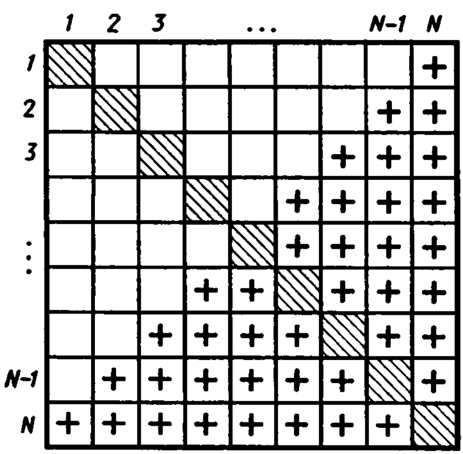


Рис. 60

где $i+j=N+1$, $N+2$, ..., $2N$, поставим знаки «$+$», а остальные клетки оставим пустыми (рис. 60). Познакомим i-го человека с j-м человеком, если в клетке $(i;\ j)$ стоит знак «$+$». Если клетка $(\alpha;\ \beta)$ пустая, то будем считать, что α-й человек не знаком с β-м человеком.

Покажем, что знакомства, осуществленные по этому правилу, удовлетворяют условию задачи. Действительно, если обозначить через a_k число знакомых у k-го человека, то легко увидеть (рис. 60), что выполняются следующие соотношения

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n = a_{n+1} < a_{n+2} < \ldots < a_N$$

в случаях четного $N=2n$ и нечетного $N=2n+1$. Следовательно, самое большее у двух человек — у n-го и $(n+1)$-го — имеется одинаковое число знакомых.

75. Обычные ходы короля могут быть по горизонтали, по вертикали и косые (под углом 45°). Будем считать, что шахматная доска имеет обычную раскраску. При горизонтальном или вертикальном ходе короля изменяется цвет поля, а при косом ходе цвет сохраняется.

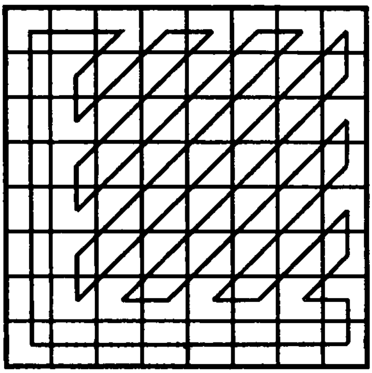


Рис. 61

а) На рисунке 61 изображен требуемый замкнутый путь короля, содержащий ровно 28 ходов по горизонтали и вертикали и 36 косых ходов.

б) Весь маршрут короля может, очевидно, состоять только из вертикальных и горизонтальных ходов. Покажем, что любой маршрут короля, удовлетворяющий условиям задачи, содержит не менее 28 горизонтальных и вертикальных ходов.

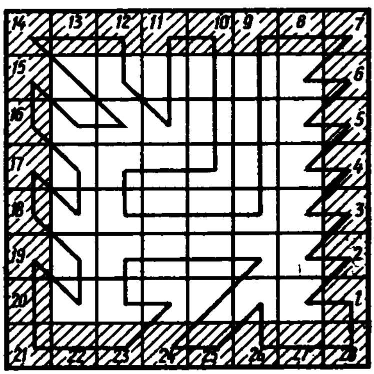


Рис. 62

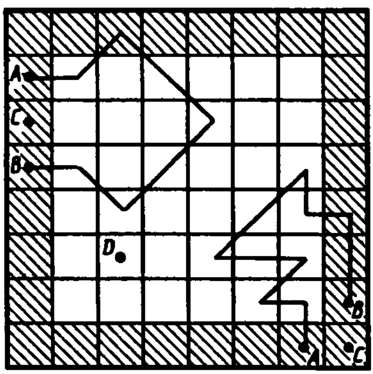


Рис. 63

Выделим 28 граничных полей шахматной доски (на рисунках 62 и 63 они образуют заштрихованную каемку). При обходе доски король по одному разу побывает на каждом из полей этой каемки. Двигаясь вдоль маршрута короля, мы занумеруем поля каемки числами 1, 2, ..., 28 в том порядке, в каком король появляется на них (рис. 62). Весь маршрут короля разобьется на 28 участков: от 1 до 2, от 2 до 3, ..., от 27 до 28, от 28 до 1. Легко увидеть, что концы каждого такого участка являются соседними на каемке. Докажем это утверждение *методом от противного*. Предположим, что A, B — концы некоторого участка, не являющиеся соседями на каемке. Это значит, что на каемке существует поле C (рис. 63), не совпадающее ни с A, ни с B. На этом поле король обязан также побывать, а затем он должен побывать и на поле D, лежащем по другую сторону, нежели точка C, от участка, соединяющего A и B. Но для этого король должен пересечь участок, соединяющий поле A с полем B, что противоречит условию задачи.

Итак, концы любого из 28 участков являются соседями на каемке. Эти концы имеют разный цвет. Следовательно, для того чтобы попасть из одного конца участка в другой конец, надо хотя бы один раз изменить цвет поля. А это возможно только тогда, когда делается или горизонтальный или вертикальный ход. Итак, на каждом участке имеется по крайней мере один горизонтальный или вертикальный ход. Число всех участков равно 28. Следовательно, король должен сделать не менее 28 горизонтальных и вертикальных ходов.

76. Покажем, что в случае а) можно обойтись десятью вопросами, в случае б) — одиннадцатью, а в случае в) — двенадцатью.

а) Разложим данные 30 карточек на 10 стопок, по 3 карточки в каждой. Задав 10 вопросов, узнаем произведения чисел для каждой из стопок. Перемножив эти произведения, получим произведение чисел, записанных на всех 30 карточках.

б) Разложим данные карточки на 8 стопок по 3 карточки и составим еще одну стопку из оставшихся 7 карточек. Задав 8 вопросов, узнаем произведение чисел, записанных на всех карточках из первых восьми стопок. Произведение чисел, записанных на оставшихся 7 карточках, можно узнать, задав 3 вопроса. Действительно, выберем какую-нибудь одну из этих 7 карточек и разобьем остальные 6 карточек на 3 пары. Добавляя поочередно к выбранной карточке одну из этих пар, получим три тройки. Произведение чисел, записанных на всех семи карточках, получим, перемножив эти три произведения. Задав три вопроса, найдем произведения, соответствующие каждой из троек.

в) Разделим данные карточки на 10 стопок: 9 стопок по 3 карточки и одну стопку из 5 карточек. За девять вопросов узнаем произведение чисел, записанных на всех карточках, входящих в первые 9 стопок. Покажем, как за три вопроса узнать произведение пяти чисел, записанных на карточках, входящих в последнюю стопку. Выделим какие-нибудь две из пяти карточек, входящих в эту стопку. Добавляя поочередно к этим двум карточкам одну из трех оставшихся, получим три тройки. Для того чтобы узнать произведение, соответствующее любой из этих троек, достаточно задать один вопрос. Остается заметить, что произведение всех пяти чисел получается перемножением произведений, соответствующих указанным трем тройкам.

Докажем, что в случае а) нельзя обойтись менее чем десятью вопросами, в случае б) — менее чем одиннадцатью, а в случае в) — менее чем двенадцатью.

а) Если будет задано менее десяти вопросов, то найдется карточка, которая не будет включена ни в одну из троек. Ясно, что, изменив знак написанного на ней числа, мы не изменим полученных ответов. С другой стороны, знак искомого произведения при этом изменится. Следовательно, по полученным ответам произведение восстановить нельзя.

Случай б) рассматривается аналогично.

в) Если число заданных вопросов не превосходит 10, то имеются по крайней мере две карточки, которые не вошли ни в одну из троек. Рассуждая, как в пункте а), получим, что в этом случае произведение по полученным ответам восстановить нельзя. Пусть задано 11 вопросов. Тогда приведенных выше соображений уже недостаточно для доказательства того, что этим числом вопросов обойтись нельзя. В самом деле, из 32 карточек можно составить 11 троек так, чтобы каждая карточка вошла хотя бы в одну тройку. Однако сделать это можно единственным способом: одну из карточек включить в две тройки, а каждую из остальных — в какую-то одну из троек. Изменим знак у числа, записанного на карточке, общей для двух троек. Если одновременно в каждой из троек выбрать еще по одной карточке и изменить знаки записанных на них чисел, то полученные на 11 вопросов ответы не изменятся. Однако знак искомого произведения при этом изменится. Следовательно, по полученным ответам произведение восстановить нельзя.

77. Если $36^k > 5^l$, то число $|36^k - 5^l| = 36^k - 5^l$ оканчивается цифрой 1; если же $36^k < 5^l$, то число $|36^k - 5^l| = 5^l - 36^k$ оканчивается цифрой 9. При $k=1$, $l=2$ получаем число $36^k - 5^l = 11$. Докажем, что 11 — это наименьшее по абсолютной величине число указанного вида. Так как никакое число вида $36^k - 5^l$, k, $l \in N$, не может, очевидно, равняться нулю, то для этого достаточно доказать, что при любых k, $l \in N$ число $|36^k - 5^l|$ отлично от 1 и 9. Если при некоторых k и l выполняется равенство $36^k - 5^l = 1$, то $(6^k+1)(6^k-1) = 5^l$, что невозможно, поскольку число 6^k+1 оканчивается цифрой 7 и, следовательно, не делится на 5. Если же $5^l - 36^k = 9$, то $5^l = 36^k + 9$, что также невозможно, поскольку правая часть делится на 9 и, следовательно, не может быть степенью 5.

78. а) Ответ. Не всегда.

Приведем пример выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, у которого длины всех сторон больше 1, а длина каждой из диагоналей не превосходит 2. Рассмотрим равносторонний треугольник ACE со стороной 2. Построим на его сторонах AC, CE, AE вне его равные равнобедренные треугольники ABC, CDE, AFE с высотой h (рис. 64). Ясно, что при любом h стороны шестиугольника $ABCDEF$ равны и больше 1. Легко видеть также, что при $h<\sqrt{3}$ шестиугольник $ABCDEF$ является выпуклым, при $h=\sqrt{3}$ вырождается в треугольник, а при $h>\sqrt{3}$ является невыпуклым (рис. 65). Покажем, что при достаточно малом h длины диагоналей шестиугольника $ABCDEF$ не превосходят 2. Имеем (рис. 66) $AD=AK+KD=\sqrt{3}+h$, и, значит, $AD\leqslant 2$, если $h\leqslant 2-\sqrt{3}$. Следовательно, при указанных значениях h длины диагоналей AD, BE и CF не превосходят 2. Как видно из рисунка 66, при $h\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$ справедливо неравенство $BD\leqslant AE$, т. е. при указанных h длины диагоналей BD, DF и BF не превосходят 2 (длины этих диагоналей равны 2 в правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной $\frac{2}{\sqrt{3}}$). Так как $2-\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}$, то окончательно полу-

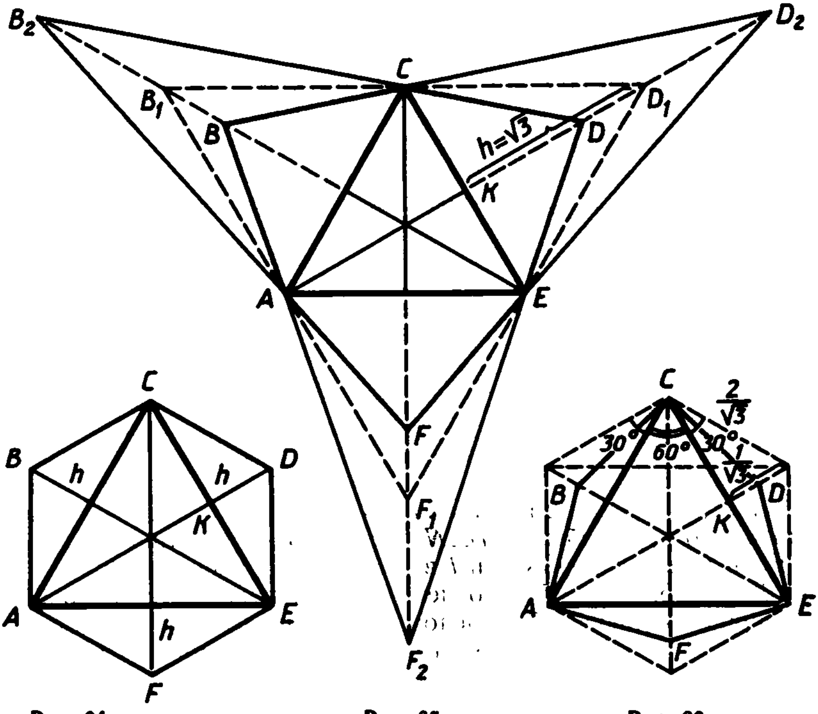


Рис. 64 Рис. 65 Рис. 66

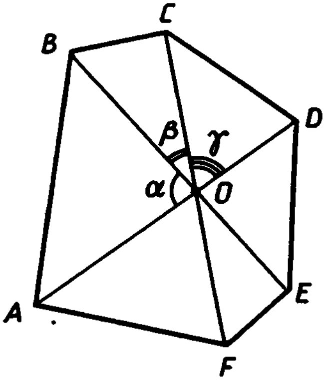


Рис. 67

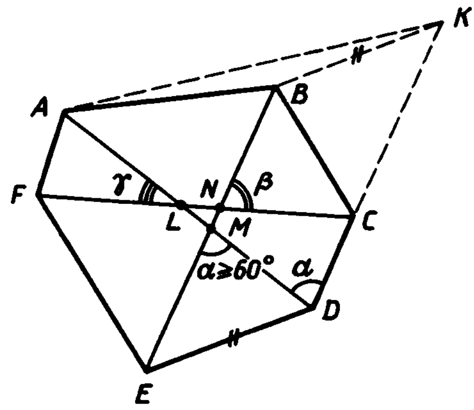


Рис. 68

чаем, что при любом $h \leqslant 2-\sqrt{3}$ построенный шестиугольник $ABCDEF$ является выпуклым, длины его сторон больше 1, а длины диагоналей не превосходят 2.

б) Обозначим через α величину угла между прямыми AD и BE, через β величину угла между прямыми BE и CF, через γ величину угла между прямыми AD и CF. Если прямые AD, BE, CF пересекаются в точке O (рис. 67), то сумма $\alpha+\beta+\gamma$ равна величине развернутого угла AOD. Если же три точки M, N, L попарных пересечений этих прямых различны (рис. 68), то $\alpha+\beta+\gamma$ — это сумма углов треугольника MNL. Следовательно, в любом случае $\alpha+\beta+\gamma=180°$, и поэтому без ограничения общности можно считать, что $\alpha \geqslant 60°$. Достроим треугольник BED до параллелограмма $BEDK$ (рис. 68). Рассмотрим треугольник ADK. Так как $\angle ADK=\alpha \geqslant 60°$, то величина одного из двух других углов треугольника ADK не превосходит 60°, т. е. величина одного из углов AKD или KAD не превосходит величины угла ADK. Следовательно, либо $AD \leqslant AK$, либо $KD \leqslant AK$, а так как и AD, и $KD=BE$ больше 2, то $AK>2$. Поскольку $AK \leqslant AB+BK=$ $=AB+ED$, отсюда следует, что $AB+ED>2$, т. е. одна из сторон данного шестиугольника, AB или ED, больше 1.

79. Ответ. $k=n=1$; 8; 9.

Докажем, что если искомые n и k существуют, то $n=k$. Предположим, что $n>k$. Тогда $n^n>k^n>k^k$. С другой стороны, поскольку по условию число n^n имеет k цифр, оно меньше числа k^k, имеющего n цифр. Получили противоречие. Аналогично доказывается, что случай $n<k$ также невозможен. Таким образом, если n и k, удовлетворяющие условию задачи, существуют, то $n=k$. Остается, следовательно, выяснить, при каких n число n^n имеет n цифр.

Число M имеет m цифр, если выполняются неравенства $10^{m-1} \leqslant M < 10^m$. Отсюда следует, что если число n^n имеет

n цифр, то $n<10$. Действительно, если $n \geqslant 10$, то $n^n \geqslant 10^n$, т. е. число n^n имеет не менее чем $n+1$ цифру. Далее имеем:

$$1^1=1,\ 2^2=4,\ 3^3=27,\ 4^4=256,\ 5^5=3125,$$
$$6^6=36^3<40^3=4^3\cdot 10^3=64\cdot 10^3<10^5,$$
$$7^7=7\cdot 49^3<7\cdot 50^3=7\cdot 5^3\cdot 10^3=875\cdot 10^3<10^6,$$
$$10^8>8^8=64^4>60^4=6^4\cdot 10^4=36^2\cdot 10^4>10^7,$$
$$10^9>9^9=9\cdot 81^4>9\cdot 8^4\cdot 10^4=9\cdot 64^2\cdot 10^4>9\cdot 6^2\cdot 10^6>10^8.$$

Из этих соотношений следует, что условию задачи удовлетворяют только $n=1$, 8 и 9.

80. Проведем через точку B прямую, параллельную прямой CL, и обозначим через M точку пересечения этой прямой с продолжением катета AC (рис. 69). Тогда $AE \perp BM$. Прямоугольные треугольники ACE и BCM равны, поскольку $AC=CB$ по условию и $\angle CAE=\angle CBM$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами: $AC \perp BC$, $AE \perp BM$. Следовательно, $DC=CE=$ $=CM$. Из равенства $DC=CM$ и параллельности прямых DK, CL и MB по теореме Фалеса получаем, что $KL=LB$.

Приведем в т о р о е решение задачи. Рассмотрим поворот плоскости вокруг точки C на угол $90°$, при котором образом точки A является точка B. Для произвольной точки M будем обозначать через M' ее образ при указанном повороте. Тогда, очевидно, $DC=CE=C'E'=CE'$ (рис. 70). Образом прямой AE при указанном повороте является прямая $A'E'=BE'$, перпендикулярная прямой AE и, следовательно, параллельная прямым DK и CL. Итак, $DC=CE'$ и $DK \| CL \| E'B$. По теореме Фалеса получаем, что $KL=LB$.

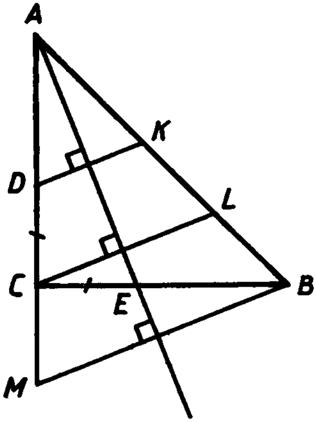


Рис. 69

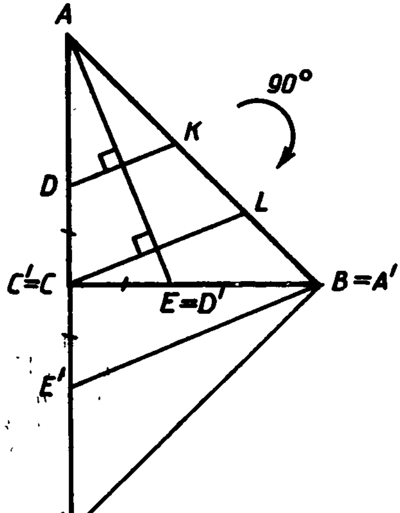


Рис. 70

81. а) Докажем, что можно так поставить кошек на краю доски, что они сумеют съесть мышку. Выберем одну из двух проходящих через клетку, на которой стоит мышка, диагоналей (назовем ее исходной) и поставим кошек на концы этой диагонали (рис. 71). После хода мышки нужно сдвинуть кошек так, чтобы все три фишки снова оказались на одной диагонали, параллельной исходной, и при этом расстояние между кошками (т. е. число клеток между кошками по диагонали) уменьшилось на единицу (на рисунке стрелками указано, куда сдвигаются кошки в ответ на ход мышки). Легко видеть, что такой ход у играющего за кошек всегда найдется и что описанная стратегия выигрышная для кошек: если мышка после некоторого хода попадает на край доски, то она съедается одной из кошек на следующем ходу; если же мышка перемещается так, что она не попадает на край доски, то все равно она будет съедена кошками не позднее чем через n ходов, где n — число клеток (т. е. расстояние) между кошками в начальный момент.

б) Проведем через клетку, на которой стоит мышка, обе диагонали. Эти диагонали разобьют доску на четыре части (верхнюю, правую, нижнюю и левую), границами которых служат отрезки указанных диагоналей. Поскольку кошек три, внутри по крайней мере одной из этих четырех частей нет ни одной кошки (на рисунке 72 таких частей две: верхняя и нижняя). Проведем внутри этой части (горизонтальный или вертикальный) отрезок, соединяющий мышку с краем доски (на рисунке это вертикальный отрезок, лежащий в нижней части). Докажем, что если мышка будет двигаться к краю доски по этому отрезку, то она не будет съедена кошками. Рассмотрим для определенности случай, когда проведенный отрезок лежит в нижней части доски. Тогда после каждого хода мышки ни в нижней (относительно нового положения мышки) части доски, ни на ее границе, ни в клетках,

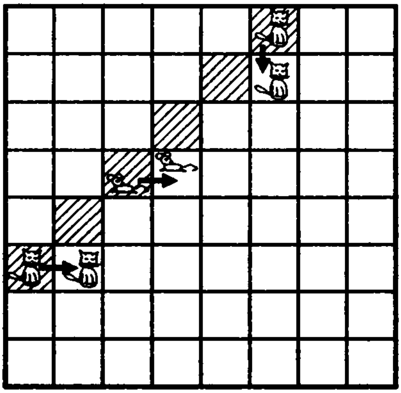


Рис. 71

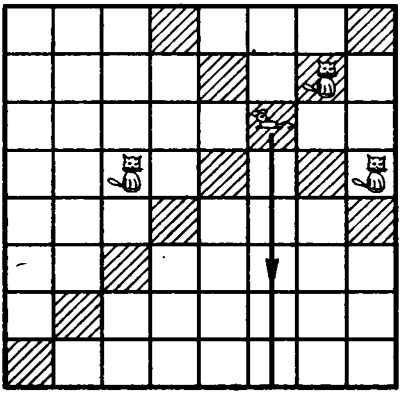


Рис. 72

примыкающих (по сторонам) к границе, не будет ни одной кошки, и поэтому мышка, двигаясь вдоль указанного отрезка, сможет беспрепятственно достичь края и спрыгнуть с доски.

82. Докажем, что для всех натуральных $n \geqslant 2$ справедливо утверждение: числа 1, 2, 3, ..., 2^n можно расставить так, чтобы полусумма любых двух из этих чисел не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними. Воспользуемся методом математической индукции. При $n=2$ утверждение очевидно: расстановка 1, 3, 2, 4 искомая. Предположим, что утверждение доказано для $n=k$. Пусть $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^k}$ — расстановка чисел 1, 2, 3, ..., 2^k, удовлетворяющая условию задачи. Докажем, что 2^{k+1} чисел 1, 2, 3, ..., 2^{k+1} можно расставить так, чтобы выполнялось условие задачи. Рассмотрим следующее множество, состоящее из 2^{k+1} натуральных чисел: $2a_1-1$, $2a_1$, $2a_2-1$, $2a_2$, $2a_3-1$, $2a_3$, ..., $2a_{2^k}-1$, $2a_{2^k}$. Легко видеть, что все входящие в это множество числа различны и каждое из этих чисел не превосходит 2^{k+1}, отсюда следует, что указанное множество с точностью до порядка записи входящих в него чисел совпадает с множеством 1, 2, 3, ..., 2^{k+1}. Докажем, что

$$2a_1, 2a_2, 2a_3, ..., 2a_{2^k}, 2a_1-1, 2a_2-1, 2a_3-1, ..., 2a_{2^k}-1 \text{ —}$$

искомая расстановка чисел 1, 2, 3, ..., 2^{k+1}. В самом деле, так как первые 2^k чисел четные, а последние 2^k чисел нечетные, то полусумма любых двух чисел, одно из которых выбрано из первых 2^k чисел, а второе — из последних 2^k чисел, не является целым числом, т. е. заведомо не совпадает ни с одним из чисел, стоящих между двумя выбранными числами. В силу предположения индукции полусумма любых двух из первых (последних) 2^k чисел не равняется ни одному из чисел, которые стоят между ними. Следовательно, приведенная расстановка чисел действительно удовлетворяет условию задачи.

Утверждение задачи является частным случаем доказанного утверждения при $n=5$.

83. Пусть хорда Q_1Q_2 некоторой окружности получена из хорды P_1P_2 этой окружности поворотом на угол 2α (на рис. 73 по часовой стрелке) относительно центра O окружности. Тогда середина R хорды P_1P_2 переходит в точку S пересечения прямых Q_1Q_2 и P_1P_2 в результате последовательного выполнения двух преобразований: поворота (в том же направлении) на угол α относительно центра O и гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{1}{\cos\alpha}$. При этих преобразованиях образом каждого треугольника является подобный ему треугольник.

Пусть 2α — это угол, поворотом на который из треугольника ABC получен треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда треугольник $A_2B_2C_2$ получается из треугольника с вершинами в серединах K, L, M сторон треугольника ABC последовательным выполнением двух указанных выше преобразований и потому подобен треугольнику

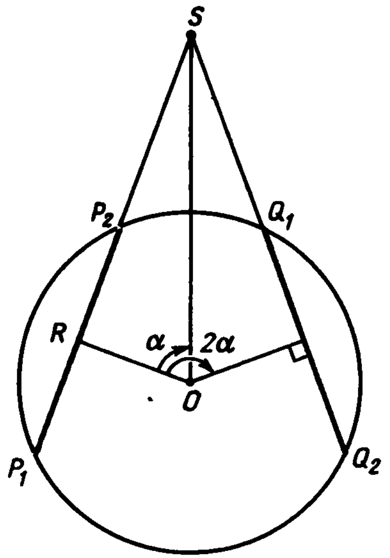


Рис. 73

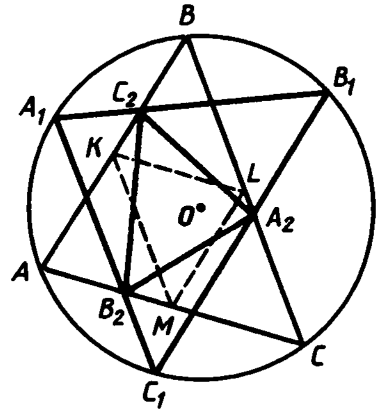


Рис. 74

KLM (рис. 74). Утверждение задачи теперь следует из очевидного замечания, что у каждого треугольника ABC середины K, L, M сторон являются вершинами подобного ему треугольника.

84. Ответ. $\frac{1}{4}$.

Прежде всего заметим, что первый игрок может обеспечить выполнение равенства $S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{4}$ независимо от того, как будет играть его соперник. Действительно, для этого ему достаточно в качестве точек X и Z взять середины сторон AB и AC соответственно. Тогда отрезок XZ будет средней линией в треугольнике ABC, параллельной стороне BC, и поэтому независимо от положения точки Y на стороне BC будем иметь:

$$S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}.$$

Итак, первый игрок всегда может добиться того, что искомая площадь будет не меньше $\frac{1}{4}$.

Покажем теперь, что второй игрок может надлежащей игрой обеспечить выполнение неравенства $S_{\triangle XYZ} \leqslant \frac{1}{4}$, как бы ни играл первый, и, следовательно, *искомое наибольшее значение площади треугольника XYZ равно* $\frac{1}{4}$. Укажем стратегию второго игрока, позволяющую ему добиться, чтобы искомая площадь была не больше $\frac{1}{4}$: после того как первый игрок выбрал точку X на стороне AB, выбрать точку $Y \in BC$ так, чтобы отрезок XY был параллелен стороне AC. Действительно, в этом случае, обозначив через h и H высоты соответственно треугольников XBY и ABC, независимо от положения точки Z на стороне AC будем иметь (рис. 75):

$$S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{2}(H-h)\cdot XY,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} H\cdot AC,$$

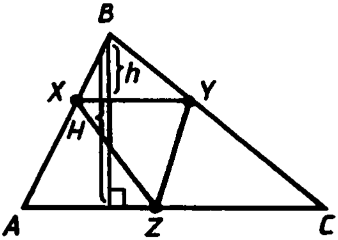


Рис. 75

и так как

$$\frac{XY}{AC} = \frac{h}{H},$$

то

$$\frac{S_{\triangle XYZ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(H-h)\cdot XY}{\frac{1}{2}H\cdot AC} = \frac{(H-h)h}{H^2} \leqslant \frac{1}{4},$$

поскольку наибольшее значение квадратного трехчлена

$$(H-h)h = \frac{H^2}{4} - \left(h - \frac{H}{2}\right)^2$$

на множестве $\{h \mid 0 \leqslant h \leqslant H\}$ равно $\frac{1}{4}H^2$.

85. Ответ. $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$.

Пусть $A_1A_2...A_{32}$ — произвольный 32-угольник. Тогда справедливо векторное равенство

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+...+\overline{A_{31}A_{32}}+\overline{A_{32}A_1}=\overline{0}.$$

Если многоугольник $A_1A_2...A_{32}$ выпуклый, то среди векторов, входящих в левую часть этого равенства, нет сонаправленных. Если все вершины многоугольника $A_1A_2...A_{32}$ лежат в узлах клетчатой бумаги, то начало и конец каждого из векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{31}A_{32}}$, $\overline{A_{32}A_1}$ лежат в узлах клетчатой бумаги. Итак, каждому выпуклому 32-угольнику с вершинами в узлах клетчатой бумаги соответствуют 32 вектора так, что:

1) сумма всех 32 векторов равна $\overline{0}$;

2) среди этих векторов нет сонаправленных;

3) начало и конец каждого из 32 векторов расположены в узлах клетчатой бумаги.

Обратно: из любых 32 различных по направлению векторов, сумма которых равна $\overline{0}$, можно составить *выпуклый* 32-угольник. Если при этом эти 32 вектора таковы, что начало и конец каждого из них лежат в узлах клетчатой бумаги, то выпуклый 32-угольник можно составить так, что все его вершины будут расположены в узлах клетчатой бумаги.

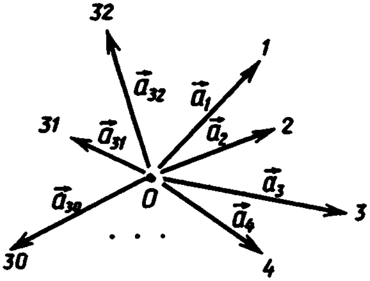


Рис. 76

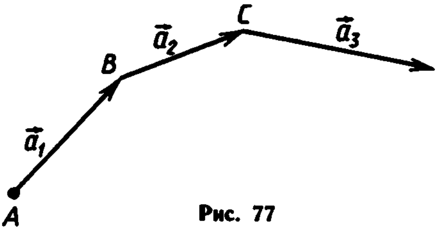


Рис. 77

Отложим все 32 вектора от произвольной точки O плоскости, после чего занумеруем их подряд, например, по часовой стрелке числами от 1 до 32 (рис. 76). Зафиксируем теперь какую-нибудь точку A плоскости и отложим от точки A первый вектор: $\overline{AB}=\bar{a}_1$ (рис. 77). От полученной точки B отложим второй вектор: $\overline{BC}=\bar{a}_2$, от полученной точки C — третий и т. д. В итоге, отложив в порядке нумерации последовательно все 32 вектора, получим искомый выпуклый 32-угольник. Чтобы из данных 32 векторов, начала и концы которых расположены в узлах клетчатой бумаги, составить 32-угольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги, надо в качестве точки A взять один из таких узлов и выполнить затем указанные построения.

Резюмируя, приходим к выводу, что наша задача эквивалентна следующей задаче:

«Найти набор из 32 векторов, удовлетворяющий условиям:

1) начало и конец каждого вектора, входящего в набор, лежат в узлах клетчатой бумаги;

2) никакие два из этих 32 векторов не совпадают по направлению;

3) сумма всех векторов равна $\bar{0}$;

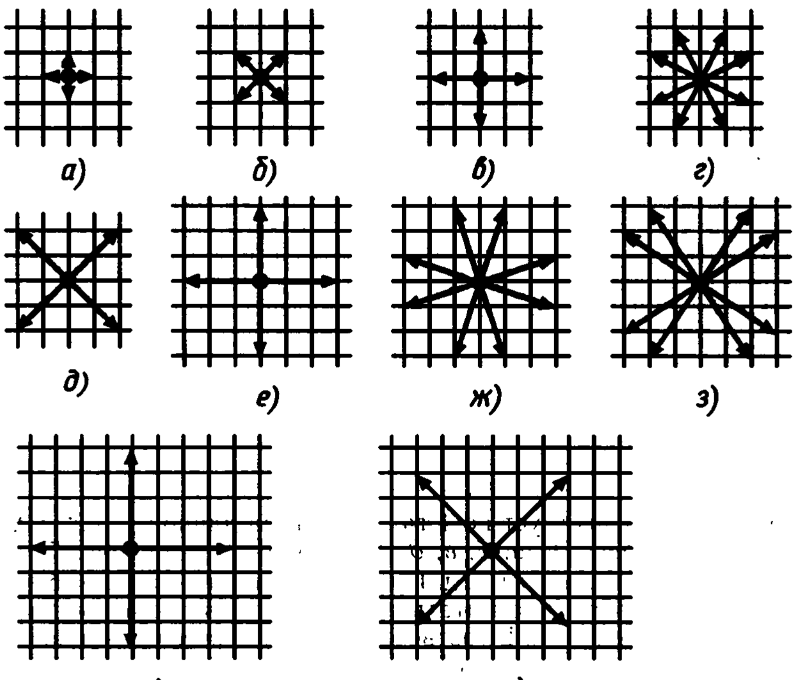
4) сумма длин S^* всех векторов, входящих в этот набор, минимальна, т. е. для любого другого набора, содержащего 32 вектора и удовлетворяющего условиям 1—3, сумма длин S всех векторов из набора удовлетворяет неравенству $S \geqslant S^*$».

Если начало и конец вектора расположены в узлах клетчатой бумаги, то его длина может принимать одно из следующих значений (рис. 78, *а*—*к*):

$$1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{5},\ 2\sqrt{2},\ 3,\ \sqrt{10},\ \sqrt{13},\ 4,\ 3\sqrt{2},\ \dots .$$

При этом существует по 4 таких вектора длиной 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 3, 4, $3\sqrt{2}$, ... (рис. 78, *а*, *б*, *в*, *д*, *е*, *и*, *к*), по 8 — длиной $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, ... (рис. 78, *г*, *ж*, *з*) и т. д. При построении искомого набора из 32 векторов естественно пытаться использовать векторы наименьшей возможной длины. В соответствии с этим замечанием возьмем сначала 4 вектора единичной длины. Их сумма равна $\bar{0}$, и среди них нет ни одной пары сонаправленных векторов. Добавим к этим векторам 4 вектора длиной $\sqrt{2}$. Мы получим набор из 8 векторов, среди которых нет сонаправленных и сумма которых равна $\vec{0}$. Векторы длиной 2 мы не можем использовать, поскольку каждый из них сонаправлен с некоторым вектором длиной 1. Точно так же мы не можем использовать векторы длиной $2\sqrt{2}$ и 3, а вот векторы длиной $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$ использовать можно. Включив в построенный набор из 8 векторов по 8 векторов длиной $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$, получим набор из 32 векторов, удовлетворяющий условиям 1—3. Докажем, что этот набор является искомым.

При построении этого набора мы использовали векторы 32 различных направлений, причем для *каждого* из этих направлений среди коллинеарных векторов, имеющих это направление, мы всякий раз выбирали вектор с *наименьшей* длиной. При этом мы *сумели* построить набор из 32 векторов, удовлетворяющий условиям 1—3. Назовем направление допустимым, если существует хотя бы один вектор, имеющий это направление, начало и конец которого расположены в узлах клетчатой бумаги. Таким образом, при построении искомого набора мы использовали векторы 32 различных допустимых направлений. Из способа построения нашего набора ясно, что для любого другого допустимого направления, отличного от уже использованных, наименьшая возможная длина,



а) б) в) г) д) е) ж) з) и) к)

Рис. 78

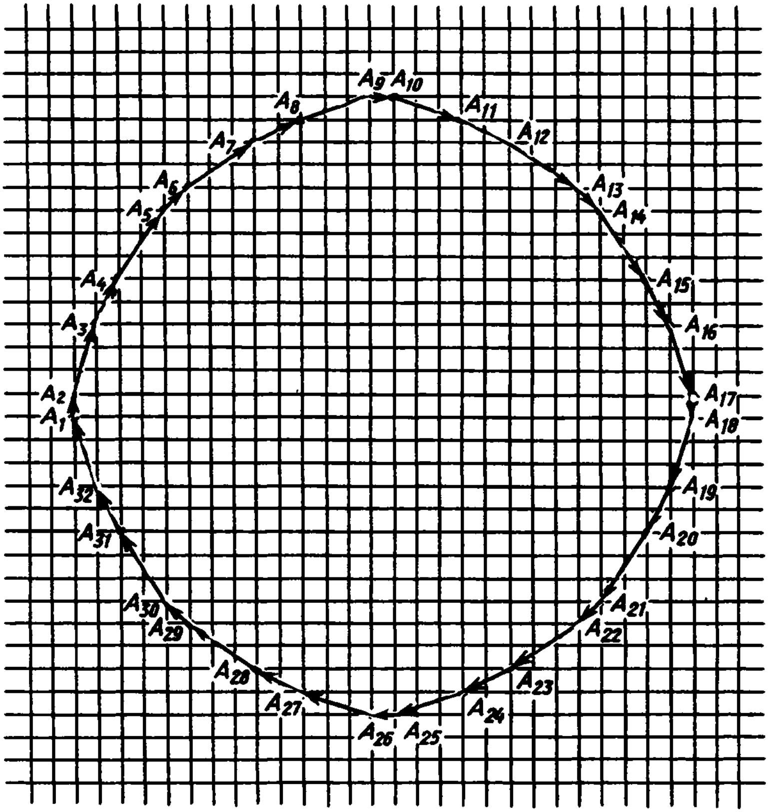


Рис. 79

которую могут иметь векторы с данным направлением и с началом и концом в узлах клетчатой бумаги, больше $\sqrt{13}$, т. е. превосходит наибольшую из длин векторов, входящих в построенный набор. Отсюда следует, что построенный набор из 32 векторов, удовлетворяющий условиям 1—3, удовлетворяет и условию 4, т. е. является искомым.

Таким образом, наименьшее возможное значение периметра выпуклого 32-угольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1 равно $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$. Выпуклый 32-угольник наименьшего периметра изображен на рисунке 79.

86. Занумеруем как-то строки данной квадратной таблицы 13×13. Обозначим через x_i число отмеченных точек в i-й строке. Тогда $x_1+x_2+\ldots+x_{13}=53$. Будем говорить, что пара $(p;\ q)$, $p,\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ 13$, $p\neq q$, содержится в i-й строке, если в i-й строке отмечены центры p-й и q-й (считая слева) клеток. Утверждение, которое мы должны доказать, можно теперь переформулировать следующим образом: при выполнении условия задачи найдется пара $(p_0;\ q_0)$, которая содержится в двух или более строках. Предположим противное: каждая пара $(p;\ q)$ содержится не более чем в одной строке. Всего в i-й строке содержится $C_{x_i}^2 = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$ пар, причем в силу сделанного предположения пары, содержащиеся в разных строках, различны. Отсюда следует, что общее число пар, содержащихся во всех тринадцати строках, не превосходит $C_{13}^2=78$, т. е.

$$\frac{x_1(x_1-1)}{2}+\frac{x_2(x_2-1)}{2}+\ldots+\frac{x_{13}(x_{13}-1)}{2}\leqslant 78,$$

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2)-(x_1+x_2+\ldots+x_{13})\leqslant 156.$$

Следовательно, поскольку $x_1+x_2+\ldots+x_{13}=53$, справедливо неравенство

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2\leqslant 209.$$

С другой стороны,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{13})^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2+(2x_1x_2+$$
$$+2x_1x_3+\ldots+2x_1x_{13})+(2x_2x_3+2x_2x_4+\ldots+2x_2x_{13})+\ldots+2x_{12}x_{13},$$

и так как в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом $2x_ix_j\leqslant x_i^2+x_j^2$, то

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{13})^2\leqslant x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2+(12x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2)+$$
$$+(11x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{13}^2)+\ldots+(x_{12}^2+x_{13}^2)=13(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2),$$

т. е.

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{13}^2\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_{13})^2}{13}=\frac{53^2}{13}>209.$$

Получили противоречие.

87. Обозначим точки, в которых в данный момент времени находятся мухи, через M_1, M_2, M_3. Докажем, что если одна из мух в данный момент находится в вершине A, то центр тяжести треугольника, образованного мухами, является либо внутренней точкой отрезка DE, где $DE\|BC$ и $AD:DB=AE:EC=2:1$ (рис. 80, *а, б, в*), либо внутренней точкой треугольника ADE. Пусть для определенности $M_1=A$. Предположим, что точки M_2 и M_3 лежат на стороне BC (рис. 80, *а*). Центр тяжести треугольника $M_1M_2M_3$ — точка Q — лежит на медиане M_1F, причем $M_1Q:QF=2:1$. В силу выбора точек D и E отсюда следует, что Q — внутренняя точка отрезка DE. Если же одна из точек M_2 или M_3 не лежит на стороне BC (на рисунке 80, *б* это точка M_2) либо обе эти точки не лежат на стороне BC (рис. 80, *в*), то центр тяжести Q треугольника $M_1M_2M_3$ лежит внутри треугольника ADE. Действительно, продолжим медиану M_1F треугольника $M_1M_2M_3$ за точку F до пересечения со стороной BC в точке F'. Возьмем на стороне BC точки M_2' и M_3' так, чтобы точка F' была серединой отрезка $M_2'M_3'$. Как доказано, центр тяжести Q' треугольника $AM_2'M_3'$ является внутренней точкой отрезка DE. Так как $AQ=$

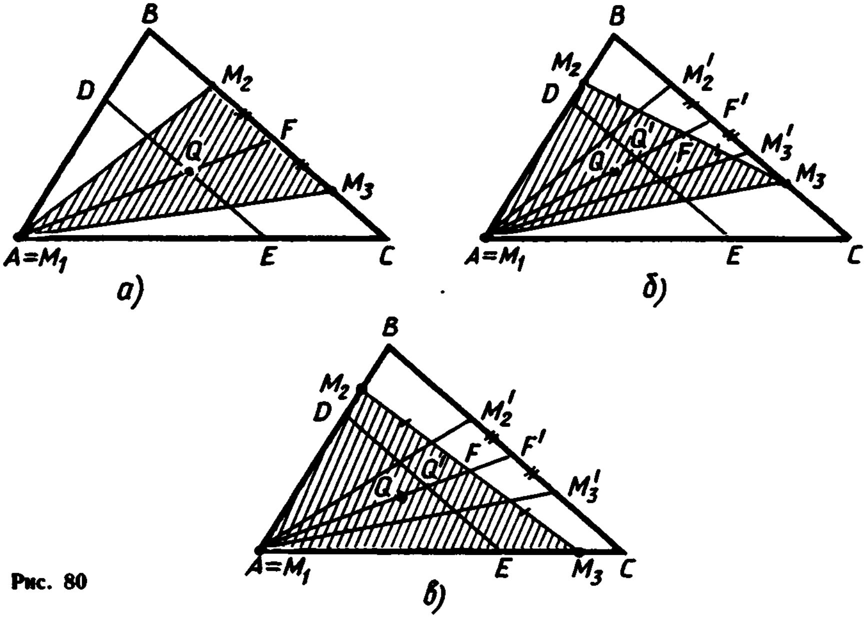


Рис. 80

$=\frac{2}{3}AF<\frac{2}{3}AF'=AQ'$, то точка Q является внутренней точкой отрезка AQ' и, следовательно, лежит внутри треугольника ADE.

Итак, если в какой-то момент времени одна из мух находится в вершине A, то в этот момент времени центр тяжести треугольника, образованного мухами, принадлежит фигуре Φ_A, состоящей из внутренних точек указанного выше треугольника ADE и внутренних точек его стороны DE. По условию мухи ползают по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образованного ими треугольника остается неподвижным. Следовательно, в любой момент времени центр тяжести треугольника, образованного мухами, принадлежит фигуре Φ_A. Поскольку по условию одна из мух побывала во всех вершинах треугольника ABC, заключаем, что центр тяжести треугольника, образованного мухами, принадлежит также фигурам Φ_B и Φ_C (эти фигуры определяются аналогично фигуре Φ_A; все три фигуры изображены на рисунке 81). Остается заметить, что центр тяжести O треугольника ABC — это единственная общая точка фигур Φ_A, Φ_B и Φ_C.

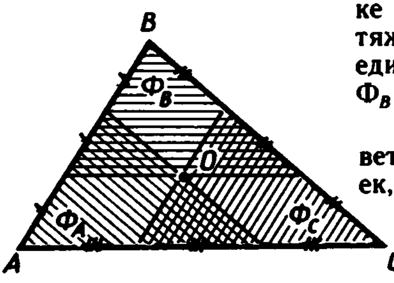


Рис. 81

88. Обозначим через x, y, z соответственно число нулей, единиц и двоек, написанных на доске. После выпол-

нения каждой разрешенной условием задачи операции четность каждого из чисел x, y, z изменяется. Пусть в результате выполнения нескольких операций на доске осталось только одно число. Тогда одно из чисел x, y, z равно 1, т. е. нечетно, а два других равны 0, т. е. четны. Следовательно, и в начале четность одного из чисел x, y, z отличалась от четности двух других (это, таким образом, *необходимое* условие того, что в результате выполнения нескольких разрешенных условием задачи операций на доске могло остаться одно число). Предположим для определенности, что первоначально четности чисел y и z совпадали и отличались от четности числа x. Докажем, что если при этом в результате выполнения нескольких разрешенных условием задачи операций на доске останется одно число, то этим числом будет 0 независимо от порядка выполнения операций. Доказательство проведем индукцией по количеству $n=x+y+z$ чисел 0, 1, 2, первоначально записанных на доске.

Пусть первоначально на доске записаны два числа, т. е. $x+y+z=2$. Так как четности чисел y и z одинаковы и отличаются от четности числа x, то отсюда следует, что $x=0$, $y=z=1$, т. е. записанные числа — это 1 и 2. Выполнив единственную возможную в этом случае операцию — стерев с доски числа 1 и 2 и записав вместо них 0, получим, что на доске записано единственное число — 0. При $n=2$ утверждение доказано.

Предположим, что утверждение справедливо при $n=k$, и докажем, что в таком случае оно справедливо и при $n=k+1$. После выполнения каждой операции четность каждого из чисел x, y, z изменяется. Следовательно, после того как будет выполнена первая из операций над $k+1$ записанными на доске числами, четности чисел y и z снова будут одинаковы и будут отличаться от четности числа x. Так как при этом количество записанных на доске чисел уменьшится на 1, т. е. станет равно k, то в силу предположения индукции заключаем, что если после выполнения нескольких операций над этими k числами на доске останется только одно число, то этим числом будет 0 независимо от порядка выполнения операций. Следовательно, если после выполнения нескольких операций над исходным набором, содержащим $x+y+z=k+1$ чисел 0, 1, 2 и таким, что четности чисел y и z совпадают и отличаются от четности числа x, на доске окажется записанным единственное число, то этим числом также будет 0. Утверждение доказано.

89. а) Из условия задачи следует, что путей всего 20 и каждый путь однозначно определяется своим начальным отрезком. Занумеруем все пути по порядку слева направо числами 1, 2, ..., 20 так, как показано на рисунке 82. Из определения пути следует, что никакие два пути не могут пересекаться, т. е. один путь не может переходить через другой (но общую точку два пути, конечно, могут иметь). Отсюда и из условия, что никакие три из данных прямых не имеют общей точки, следует, что при любом k, удовлетворяющем неравенствам $2\leqslant k\leqslant 19$, $(k-1)$-й и $(k+1)$-й пути

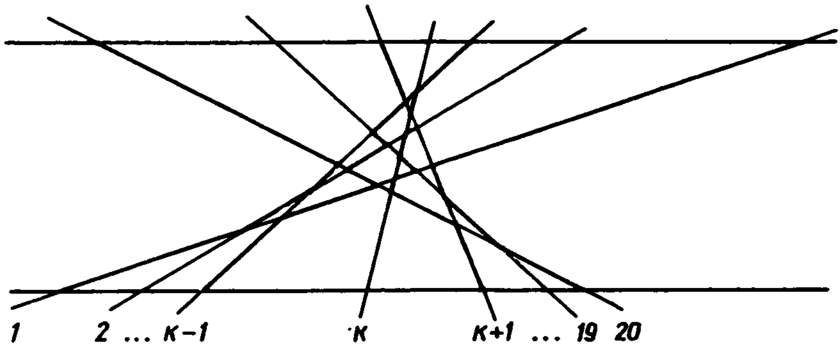


Рис. 82

не имеют общих точек (они лежат по разные стороны от k-го пути); $(k-1)$-й путь может иметь с k-м путем общие точки, не совпадающие с общими точками $(k+1)$-го и k-го путей (рис. 82). Значит, пути с нечетными номерами не имеют общих точек, т. е. имеется не менее 10 путей без общих точек.

б) Для каждой из 20 прямых отрезок этой прямой, заключенный между краями полосы, делится другими 19 прямыми на 20 отрезков. Следовательно, всего внутри полосы имеется $20\cdot20=$ $=400$ таких отрезков. Поэтому хотя бы один из 20 путей должен содержать не менее 20 из этих отрезков, поскольку в противном случае общее число отрезков внутри полосы было бы меньше чем $20\cdot20=400$ (каждый отрезок принадлежит некоторому пути).

Легко видеть также, что утверждение этого пункта следует из утверждения пункта в).

в) Рассмотрим путь с номером 10. Для каждой из 20 прямых точка пересечения этой прямой с нижним краем полосы лежит по одну, а точка пересечения с верхним краем полосы — по другую сторону от этого пути либо на самом пути. Таким образом, каждая из 20 прямых имеет с рассматриваемым путем общую точку, а стало быть, и общий отрезок. Следовательно, путь с номером 10 проходит по всем 20 прямым. Аналогично можно доказать, что и второй «средний по номеру» путь — путь с номером 11 — также проходит по всем 20 прямым.

90. Обозначим буквой O центр стола, буквами C_k, $1\leqslant k\leqslant50$, центры часов. Пусть A_k, B_k — диаметрально противоположные точки окружности с центром C_k. Выберем их так, чтобы все векторы $\overline{C_kA_k}$ были одинаково направлены, причем это направление не было параллельно ни одной из прямых OC_k. Не уменьшая общности, можно считать, что сумма расстояний от центра стола до точек A_k не превосходит такой же суммы расстояний до точек B_k. В противном случае можно поменять местами точки A_k и B_k. Поскольку $\overline{OC_k}=\frac{1}{2}(\overline{OA_k}+\overline{OB_k})$ и точки O, A_k, B_k

не лежат на одной прямой, то $OC_k < \frac{1}{2}(OA_k + OB_k)$. Складывая все 50 таких неравенств и пользуясь тем, что сумма длин отрезков OA_k не превосходит суммы длин отрезков OB_k, найдем, что сумма расстояний от центра стола до центров часов меньше, чем сумма расстояний от центра стола до точек B_k. Момент времени, когда концы минутных стрелок совпадают с точками B_k, отвечает условию задачи.

91. Выпишем такие 1000 чисел:

$$1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \underbrace{5, \ldots, 5}_{8}, \underbrace{6, \ldots, 6}_{16}, \ldots, \underbrace{10, \ldots, 10}_{256}, \underbrace{11, \ldots, 11}_{488} -$$

и будем последовательно составлять строки из чисел так, как это указано в условии задачи. Легко проверить, что при этом строки с номерами 10 и 11 имеют вид:

$$\underbrace{256, \ldots, 256}_{512}, \underbrace{488, \ldots, 488}_{488},$$

$$\underbrace{512, \ldots, 512}_{512}, \underbrace{488, \ldots, 488}_{488},$$

а двенадцатая строка совпадает с одиннадцатой. Таким образом, выписанные 1000 чисел дают пример, требующийся в пункте в) задачи.

Докажем теперь утверждение а). Легко видеть, что каждая строка, начиная со второй, с точностью до перестановки элементов будет иметь вид:

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{x_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{x_2}, \ldots, \underbrace{x_s, \ldots, x_s}_{x_s}. \qquad (1)$$

При этом среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_s$ могут быть одинаковые и обязательно выполняется равенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = 1000. \qquad (2)$$

Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_s$ попарно различны, то все последующие строки будут совпадать со строкой (1). Если же среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_s$ есть равные, то представление (2) для строки, следующей за (1), будет иметь менее чем s слагаемых. Таким образом, число s будет уменьшаться с ростом номера строки до тех пор, пока все числа x_i не станут различными, и, значит, количество различных строк будет не больше, чем количество различных чисел среди первоначально выписанного набора. Это доказывает утверждение а).

Для доказательства утверждения б) рассмотрим следующую задачу. Предположим, что имеется n спичек, разбитых на несколько групп. Будем проделывать с ними следующие операции.

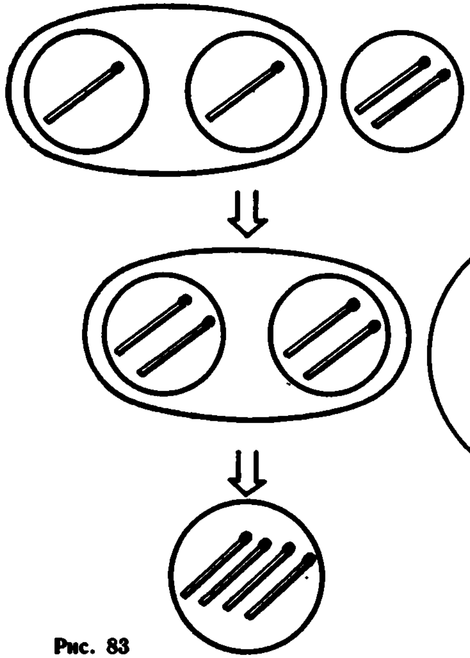


Рис. 83

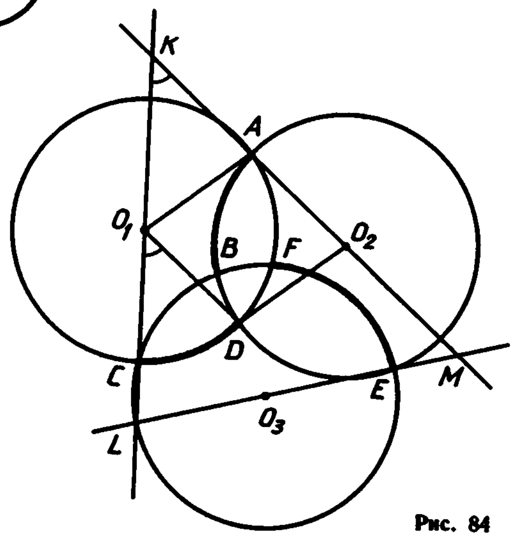


Рис. 84

Объединим вместе все группы, состоящие из одинакового числа спичек. На следующем шаге с новым набором групп опять проделаем ту же операцию и будем поступать так до тех пор, пока не получим группы, состоящие из различного количества спичек. Число шагов объединений групп обозначим буквой k. Справедливо неравенство $2^k \leqslant n$.

Например, если 4 спички разложить на 3 группы по 1, 1 и 2 спички, то процесс объединения групп завершится через 2 шага (рис. 83):

$$\begin{array}{c} 1,\ 1,\ 2 \\ 2\ ,\ 2 \\ 4 \end{array}$$

Легко проверить, что и при иных распределениях 4 спичек на группы процесс объединения завершится не далее как через 2 шага. Утверждение будет справедливо для 3, 2 и для 1 спички.

Ясно, что представление (2) для второй строки чисел из условия задачи можно рассматривать как разбиение 1000 спичек на группы по x_1, x_2, ..., x_s спичек, а представление (2) для всех последующих строк образуется в точности так же, как наборы групп спичек из предыдущих наборов. Наибольшее целое число k с условием $2^k \leqslant 1000$ есть 9. Если считать задачу о спичках решенной, то можно заключить, что за второй строкой чисел последует не более 9 строк до начала повторения и, значит, общее количество различных строк будет не больше чем $2+9=11$. Итак, для завершения доказательства утверждения б) достаточно решить задачу о спичках. Пусть $n>4$ и для всех наборов спичек в количестве, меньшем n, утверждение задачи верно. Рассмотрим исходное распределение n спичек на группы и обозначим буквой k номер последнего шага, на котором завершится процесс объединения групп. По крайней мере одна из групп спичек, обозначим ее A, получившихся по окончании объединений, образовалась в результате соединения на последнем шаге нескольких равночисленных групп спичек. Среди этих групп должна быть группа, обозначим ее B, образовавшаяся на шаге с номером $k-1$, иначе группа A образовалась бы раньше, чем на последнем шаге. Поместим как-нибудь все спички, входящие в группу B, а число их обозначим буквой m. Ясно, что $m\leqslant\frac{n}{2}$. Если теперь из исходного набора групп спичек убрать все спички, кроме помеченных, то получим некоторое распределение m спичек на группы, процесс объединения которых за $k-1$ шаг приводит к единственной группе спичек B. Поскольку $m\leqslant\frac{n}{2}<n$ и для m спичек утверждение задачи верно, то $2^{k-1}\leqslant m$ и $2^k\leqslant 2m\leqslant n$. Утверждение доказано для n спичек. Тем самым завершено и решение исходной задачи.

92. Следующее доказательство утверждения б) годится и для утверждения а), если считать, что точки B, F и D совпадают. Обозначим буквами O_1, O_2, O_3 центры окружностей и проведем прямые O_1C, O_2A и O_3E. Точки пересечения этих прямых обозначим буквами K, L, M (рис. 84). Четырехугольник O_1DO_2A — ромб. Поэтому $O_1D\parallel O_2A$, и, значит, $\angle CO_1D=\angle CKO_2$. Аналогично доказывается, что и остальные центральные углы, опирающиеся на отмеченные дуги, равны соответствующим углам треугольника KLM. Так как сумма углов треугольника KLM равна $180°$, то получаем требуемое утверждение.

93. Так как $x_3=|x_1-x_2|$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $x_1\geqslant x_2$. Тогда $x_3=x_1-x_2$, т. е. $x_3+x_2=x_1$, и, опять не уменьшая общности, можно полагать, что $x_3\leqslant x_2$. Перенумерация, если это необходимо, первого и второго, а затем второго и третьего членов последовательности не приведет к изменению ее последующих членов. Из условия следует, что последовательность (x_k) при $k\geqslant 3$ не возрастающая и, кроме того,

$$x_{k+1}\leqslant x_{k-1}-x_k,\ k\geqslant 2,$$

т. е.

$$x_{k-1}\geqslant x_k+x_{k+1},\ k\geqslant 2. \qquad (1)$$

Если $x_{21}\geqslant 1$, то $x_{20}\geqslant x_{21}\geqslant 1$ и, пользуясь неравенствами (1), последовательно находим:

$$x_{19}\geqslant x_{20}+x_{21}\geqslant 2,\ x_{18}\geqslant x_{19}+x_{20}\geqslant 3,\ x_{17}\geqslant x_{18}+x_{19}\geqslant 5$$

и т. д. В конце вычислений получаем $x_3 \geqslant 4181$, $x_2 \geqslant 6765$, $x_1 \geqslant 10946$, что противоречит условию задачи.

94. Перенумеруем строки квадратной таблицы, изображенной на рисунке 4, снизу вверх числами

$$-6,\ -5,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 5,\ 6.$$

Аналогично перенумеруем столбцы слева направо числами

$$-6,\ -5,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 5,\ 6.$$

Тогда каждой клетке таблицы будут сопоставлены «координаты» — два числа i, j, равные номерам строки и столбца соответственно, в которых лежит эта клетка. Клеткам «креста» отвечают пары $(i;\ j)$, в которых одна из координат равна 0.

а) Предположим, что утверждение а) задачи неверно. Тогда жук, сидевший в центральной клетке $(0;\ 0)$, должен улететь из этой клетки. Не уменьшая общности, можно считать, что он перелетел на вертикальный отрезок «креста», клетки которого имеют положительную вторую координату.

Обозначим буквой i наибольшее целое число, такое, что жук из клетки $(0;\ i)$ перелетел в клетку $(0;\ j)$, причем $j \geqslant i+2$. Согласно предположению должны быть выполнены неравенства $0 \leqslant i \leqslant 4$. Рассмотрим клетку, в которую перелетел жук, сидевший в клетке $(0;\ i+1)$. По условию она должна быть соседней с клеткой $(0;\ j)$ и, значит, имеет вид $(0;\ k)$, где k удовлетворяет неравенству $|k-j| \leqslant 1$. Поскольку i — максимальный номер с указанным выше свойством, то $k \leqslant i+2$. Согласно предположению $k \neq i+2$, $i+1$, i, так что $k \leqslant i-1$. Теперь имеем $j-k \geqslant$ $\geqslant (i+2)-(i-1)=3$ вопреки неравенству $|j-k| \leqslant 1$. Противоречие означает справедливость утверждения а) задачи.

б) Утверждение неверно. Чтобы показать это, воспользуемся системой «координат», введя ее для таблицы на рисунке 5 так же, как это было сделано в а). Клеткам «рамы» будут соответствовать пары чисел $(i;\ j)$, одно из которых равно -6, 0 или 6, а другое не превосходит по модулю числа 6.

Допустим теперь, что жук, сидевший в клетке $(i;\ j)$, перелетел в клетку с координатами $(6-|i|;\ 6-|j|)$. Легко проверить, что жуки, сидевшие в соседних клетках «рамы», окажутся соседями и после перелета, а кроме того, ни один жук не останется на месте и ни один не перелетит в соседнюю клетку.

в) Утверждение верно. Докажем это. Как и ранее, присвоим каждой клетке доски два целых числа: i — абсциссу и j — ординату, $-49 \leqslant i \leqslant 49$, $-49 \leqslant j \leqslant 49$. Назовем горизонтальной цепочкой клеток любую последовательность из 99 клеток, имеющих абсциссы -49, -48, ..., 48, 49, в которой каждая клетка будет соседней с предыдущей (рис. 85). Аналогично, заменив слово «абсцисса» на слово «ордината», определим вертикальную цепочку клеток.

Докажем, что на любой горизонтальной цепочке найдется жук, такой, что абсцисса клетки, с которой он взлетел, отличается от абсциссы клетки, на которую он опустился, не более чем на 1.

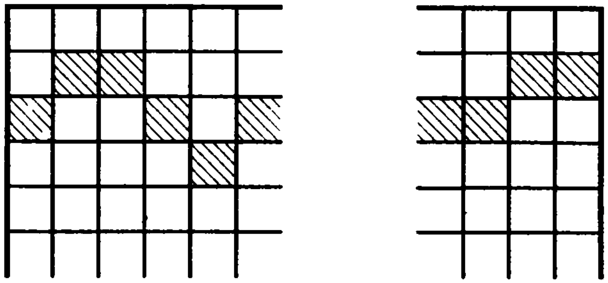


Рис. 85

Обозначим через x_i абсциссу той клетки, на которую опустился жук, сидевший на клетке цепочки с абсциссой i, $-49 \leqslant i \leqslant 49$. Если $x_{49} \geqslant 48$, то утверждение справедливо. В случае $x_{49} \leqslant 47$ обозначим буквой k наименьшее число, такое, что $x_k \leqslant k-2$. Ясно, что $k \geqslant -47$. Тогда $x_{k-1} > (k-1)-2$, т. е. $x_{k-1} \geqslant k-2$. Клетки с абсциссами x_{k-1} и x_k, на которые сели жуки, взлетевшие с клеток цепочки с абсциссами $k-1$ и k, согласно условию должны совпадать или быть соседними. Поэтому $|x_{k-1}-x_k| \leqslant \leqslant 1$ и $x_{k-1} \leqslant x_k+1 \leqslant k-2+1 = k-1$. Итак, $-1 \leqslant x_{k-1} - -(k-1) \leqslant 0$, т. е. утверждение выполняется для жука, сидевшего на клетке цепочки с абсциссой $k-1$.

Аналогичное утверждение выполняется и для вертикальных цепочек клеток, если в нем слово «абсцисса» заменить словом «ордината». Для доказательства достаточно повернуть доску на 90° по часовой стрелке вокруг центра доски, заметить, что при этом вертикальные цепочки переходят в горизонтальные, и воспользоваться уже доказанным утверждением.

Назовем теперь клетку доски *хорошей*, если взлетевший с нее жук опустился на клетку, ордината которой отличается от ординаты клетки взлета не более чем на 1.

Поскольку каждый вертикальный столбец доски является вертикальной цепочкой, то по доказанному ранее в каждом таком столбце должна быть хотя бы одна хорошая клетка. Докажем более сильное утверждение, что можно найти горизонтальную цепочку, состоящую только из хороших клеток. Возьмем какую-нибудь хорошую клетку, лежащую в вертикальном столбце с абсциссой -49. Будем подстраивать к ней хорошие клетки из последующих столбцов так, что в результате получится нужная горизонтальная цепочка. Пусть A — уже построенная клетка цепочки, абсцисса ее равна $l < 49$. Покажем, как построить следующую хорошую клетку.

Обозначим буквой B клетку, абсцисса которой равна $l+1$, а ордината равна ординате клетки, на которую перелетел жук, взлетевший с клетки A. Поскольку A — хорошая клетка, то A и B — соседние клетки доски. Докажем, что B также хорошая клетка. Обозначим через y_A и y_B ординаты клеток, на которые опустились жуки, взлетевшие с клеток A и B. Так как A и B — соседние клетки, то $|y_A - y_B| \leqslant 1$. Но y_A есть ордината клетки B (так эта клетка строилась). Следовательно, B — хорошая клетка.

Итак, существование горизонтальной цепочки, состоящей только из хороших клеток, доказано. Согласно установленному ранее факту в этой цепочке должна быть клетка C с абсциссой, отличающейся от абсциссы клетки D, на которую опустился взлетевший с C жук, не более чем на 1. Поскольку C — хорошая клетка, то ординаты клеток C и D также отличаются не более чем на 1. Но тогда C и D — соседние клетки. Следовательно, C есть клетка, существование которой и требовалось доказать.

95. Дадим сразу решение задачи из пункта г). Триангуляцию правильного треугольника со стороной 5 см можно будет получить гомотетией из центра правильного треугольника со стороной 3 см, выбрав коэффициент гомотетии равным $\frac{5}{3}$. Это дает решения задач из пунктов а), б) и в).

Пусть точки D_1 и D_2 делят основание AB равностороннего треугольника ABC ($AB = BC = AC = 3$ см) на три равные части (рис. 86). Восставим из точек D_1 и D_2 перпендикуляры к отрезку AB. Определим теперь последовательность точек C_0, C_1, C_2, ... следующим образом. Положим $C_0 = C$ и выберем в качестве C_1 любую точку, лежащую внутри треугольника ABC на перпендикуляре, восставленном из точки D_1. Предположим теперь, что $i \geqslant 2$ и точка C_{i-1} уже определена. Выберем точку C_i (рис. 87) так, чтобы она лежала внутри треугольника ABC_{i-1} на том из двух проведенных перпендикуляров, который не проходит через точку C_{i-1}. Так как $AD_1 = D_1D_2 = D_2B = 1$ см, то стороны всех треугольников $AC_{i-1}C_i$, $BC_{i-1}C_i$ будут больше 1 см. Ясно, что процесс построения точек C_i может продолжаться неограниченно долго. Как только будет построена точка C_{500}, треугольник ABC будет разбит на $2 \cdot 500 + 1 = 1001$ «большой» треугольник.

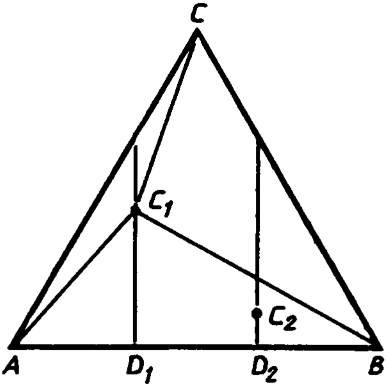


Рис. 86

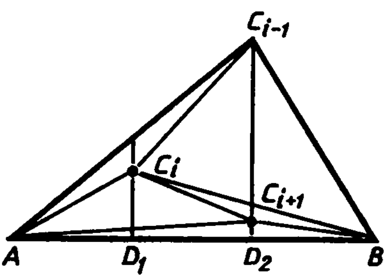


Рис. 87

96. а) Повторим подряд 9 раз группу цифр 123...89. В результате получится число

$$123...8912...9...12...89,$$

записанное с помощью 81 цифры. В первой группе оставим незачеркнутой первую цифру заданного числа, во второй группе — вторую цифру и т. д. Таким образом, ясно, что выписанное 81-значное число универсально.

б) Если в выписанном в пункте а) числе переставить каким-либо способом цифры в пределах каждой из групп, то получившееся число также будет универсальным. Расположим цифры во второй, в четвертой, в шестой и в восьмой группах в порядке убывания. В результате получим универсальное число

$$12...8998...2112...8998...2112...89.$$

Если в универсальном числе вычеркнуть одну из двух рядом стоящих одинаковых цифр, то получившееся число сохранит свойство универсальности. Теперь ясно, что из выписанного 81-значного универсального числа можно вычеркнуть четыре цифры 9 и четыре цифры 1 так, что оставшееся 73-значное число

$$12...898...212...898...212...89$$

останется универсальным.

в) Назовем натуральное число k-универсальным, если в его записи присутствует только k различных цифр $a_1, \dots, a_k$ и если вычеркиванием части его цифр можно получить любое наперед заданное k-значное число, в записи которого присутствуют все цифры $a_1, \dots, a_k$. Например, 232 есть 2-универсальное число, 1231231 есть 3-универсальное число, числа, названные в условии задачи универсальными, будут теперь называться 9-универсальными.

Докажем, что в каждом k-универсальном числе некоторая цифра встречается не менее k раз. Предположим, что это утверждение неверно и k — наименьшее число, для которого найдется k-универсальное число

$$A = \overline{a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_N}},$$

каждая цифра которого встречается в записи A менее чем k раз. Ясно, что $k \geqslant 3$. Пусть r — наименьшее число, такое, что набор индексов $j_1, j_2, \dots, j_r$ содержит все цифры из множества $a_1, \dots, a_k$. Тогда, очевидно, $r \geqslant k$ и индекс j_r отличен от всех предшествующих индексов $j_1, \dots, j_{r-1}$. Вычеркнем из числа $\overline{a_{j_{r+1}} a_{j_{r+2}} \dots a_{j_N}}$ все цифры, совпадающие с a_{j_r}, и получившееся число обозначим буквой B. Так как из k-универсального числа A вычеркиванием можно получить число $\overline{a_{j_r} a_{i_1} \dots a_{i_{k-1}}}$ при любых попарно различных индексах $i_1, \dots, i_{k-1}$, отличных от j_r, то B есть $(k-1)$-универсальное число. В силу того что k — наименьшее число, для которого высказанное утверждение предполагается неверным, для числа B это утверждение справедливо и, значит, некоторая цифра a_i числа B участвует в его записи не менее $k-1$ раз. Так как отрезок $a_{j_1} a_{j_2} \dots a_j$ числа A содержит все k цифр $a_1, \dots, a_k$ и, в частности, a_i, то цифра a_i встречается в записи A не менее k раз. Полученное противоречие означает справедливость утверждения для k-универсальных чисел при любом k. Взяв $k=9$, получаем утверждение в) условия задачи.

г) Будем для краткости использовать обозначение $(b_1 \dots b_r)_k$ для повторяющейся последовательно k раз группы цифр $b_1 \dots b_r$. Так, $(123)_2 12$ будет обозначать 8-значное число 12312312.

Укажем теперь, как построить универсальное число, записываемое 67 цифрами. Рассмотрим 58-значное число

$$C=(123\dots8)_7 12.$$

Допишем к нему девять цифр 9. Первую из девяток припишем сначала, а вторую — в конце числа C. Оставшиеся семь девяток распределим по одной в каждой из повторяющихся 7 раз групп цифр 123...8. В первой группе поставим 9 после 8, во второй — после 7, в третьей — после 6 и т. д. В последней группе поставим цифру 9 после 2. Докажем, что получившееся 67-значное число

$$D=912\dots8912\dots79812\dots6978\dots81293\dots89$$

будет универсальным.

Для этого установим предварительно следующее утверждение. Пусть $b_1, \dots, b_r$ — попарно различные цифры, k — целое число, $0 \leqslant k < r$. Тогда из числа

$$E=\overline{(b_1 \dots b_r)_k b_1 \dots b_{r-k}},$$

зачеркнув некоторое количество цифр, можно получить любое число вида $\overline{b_{i_1} \dots b_{i_{k+1}}}$ с попарно различными индексами $i_1, \dots, i_{k+1}$. Докажем это утверждение индукцией по k. При $k=0$ оно очевидно. Пусть теперь $k \geqslant 1$. Если $i_{k+1} \leqslant r-k$, то утверждение выполняется, так как $b_{i_{k+1}}$ можно выбрать среди последних $r-k$ цифр числа E, а $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$ — по одной из каждого набора $b_1 \dots b_r$. В случае $i_{k+1} > r-k$ перепишем число E в виде

$$E=\overline{(b_1 \dots b_r)_{k-1} b_1 \dots b_r b_1 \dots b_{r-k}}.$$

Среди последних r цифр числа E зачеркнем все цифры, кроме $b_{i_{k+1}}$, а в оставшемся числе

$$\overline{(b_1 \dots b_r)_{k-1} b_1 \dots b_{r-k} b_{i_{k+1}}}$$

вычеркнем все цифры $b_{i_{k+1}}$, кроме последней. Так как $(r-1)-(k-1)=r-k$, то согласно индуктивному предположению в числе

$$\overline{(b_1 \dots \cancel{b}_{i_{k+1}} \dots b_r)_{k-1} b_1 \dots b_{r-k}}$$

можно вычеркнуть ряд цифр так, что останется число $\overline{b_{i_1} \dots b_{i_k}}$. Утверждение доказано.

Перейдем теперь к доказательству универсальности числа D. В соответствии с доказанным, вычеркнув из числа C некоторое количество цифр, можно получить любое 8-значное число $\overline{a_1...a_8}$, записываемое различными цифрами 1, 2, ..., 8. Поэтому из D вычеркиванием можно получить любое 9-значное число с попарно различными ненулевыми цифрами, начинающееся с цифры 9 или заканчивающееся на 9. Пусть теперь $\overline{a_1...a_9}$ — число, записываемое попарно различными ненулевыми цифрами, $a_{s+1}=9$, $1 \leqslant s \leqslant 7$. В записи числа D девять раз присутствует цифра 9. Вычеркнем из D все девятки, кроме той, которая имеет среди них номер $s+1$. Получится число

$$\overline{(12...8)_{s-1}12...(9-s)9((10-s)...81...(9-s))_{7-s}(10-s)...812}.$$

Так как $8-(s-1)=9-s$, то по доказанному выше из числа $\overline{(12...8)_{s-1}12...(9-s)}$ можно вычеркнуть ряд цифр так, что останется число $\overline{a_1a_2...a_s}$. Аналогично в силу равенства

$$8-(7-s)=s+1 \text{ из } \overline{((10-s)...81...(9-s))_{7-s}(10-s)...812}$$

вычеркиванием цифр можно получить число $\overline{a_{s+2}...a_9}$. Отсюда следует, что D — универсальное число.

97. Рассмотрим два соседних звена ломаной AB и BC. Продолжим эти звенья за вершину B и получим лучи BN и BM, которые образуют угол MBN, закрашенный на рисунке 88. Так как точки A и C лежат вне этого угла, то его стороны имеют со звеньями ломаной четное число пересечений: сколько раз ломаная «зайдет» в него, столько же раз она из него «выйдет». Образуем подобно углу MBN углы при всех вершинах. Суммарное число пересечений сторон этих углов со звеньями ломаной будет четным, а оно, очевидно, равно числу особенных пар звеньев.

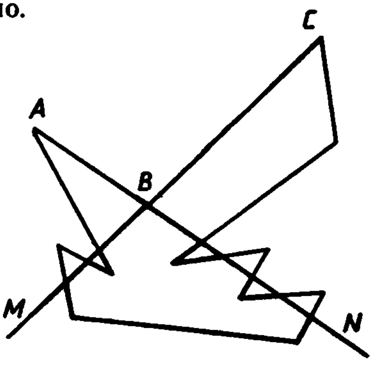


Рис. 88

98. Обозначим сумму всех написанных чисел через S. Рассмотрим произвольную отмеченную точку, и пусть около нее написано число a. Через эту точку проходит $n \geqslant 2$ прямых, соединяющих ее со всеми другими отмеченными точками. Так как сумма чисел вдоль каждой из этих прямых равна нулю, то $0=S+(n-1)a$. Если $S \neq 0$, то все написанные числа имеют один и тот же знак, который противоположен знаку их суммы. Этого не может быть. Следовательно, $S=0$ и все числа также равны нулю.

99. См. решение задачи 23.

100. Задачу будем решать с конца и потому, вместо того чтобы убирать фишки, будем ставить их с соблюдением следующих условий. В самом начале имеем одну черную фишку (нулевой ход).

На нечетном ходу будем ставить белые фишки так, чтобы после хода

(1) у каждой из них была черная соседка;

(2) у каждой из белых фишек, поставленных предыдущими ходами, черных соседок не было.

На четном ходу ставим черные фишки с соблюдением аналогичных условий. Пусть f_n — максимальное число черных фишек, которое может быть поставлено за n ходов, включая начальную фишку, а g_n — аналогичное число для белых фишек. Тогда $f_0=f_1=1$ и $g_1=g_2=2$. На каждом ходу может быть поставлено только такое количество фишек, которое не более чем вдвое превосходит количество фишек противоположного цвета, имевшееся после предыдущего хода. В самом деле, на четном ходу, например, мы можем каждую черную фишку окружить двумя белыми, но большее количество белых фишек мы поставить не можем. Следовательно,

$$f_{2k+1}=f_{2k}=2g_{2k-1}+f_{2k-2},$$
$$g_{2k+2}=g_{2k+1}=2f_{2k}+g_{2k-1},$$

откуда, вычисляя, получаем таблицу:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	1	5	5	29	29	169	169	985
g_i	2	2	12	12	70	70	408	408

Таким образом, $f_4+g_4=41$. Поэтому после четырех ходов 40 фишек остаться может. Для этого надо 3 хода класть максимально возможное количество фишек, а на четвертом ходу на одну фишку меньше максимального количества. Действительно, для выполнения условия (2) нам на четвертом ходу надо поставить не более $2\times5=10$ черных фишек для отделения «старых» черных фишек от белых. Из остальных 14 черных фишек, которые мы можем поставить четвертым ходом, можно поставить любое количество, в том числе и 13. Пункт а) разобран полностью.

Аналогично следует действовать и при решении пункта б) задачи. Так как $f_7+g_7<1000$, то семи ходов недостаточно. Надо привести алгоритм расстановки 1000 фишек за 8 ходов. Как и в пункте а), первые 7 ходов делаем, ставя каждый раз максимальное количество фишек. Восьмым ходом для выполнения условия (2) необходимо поставить не более $169\times2=338$ фишек, а сверх того мы можем поставить любое количество фишек от 0 до 478. Поэтому на восьмом ходу мы можем поставить 423 фишки и довести общее их число до 1000.

101. Предположим, что гномы решили и дальше продолжить свой процесс переливания молока и продолжают его переливать до сих пор. Все гномы, таким образом, оказываются равноправными. Рассмотрим любых двух рядом сидящих гномов A и B. Пусть x — количество молока, которое разливает гном A, и y —

количество молока, которое разливает при следующем разливании сидящий за A гном B. В момент разливания молока гномом A у гнома B в кружке было $y-\frac{1}{6}x$ молока. Разность этих количеств $x-\left(y-\frac{1}{6}x\right)=\frac{7}{6}x-y$. После разливания молока гномом B разность количеств молока у них в кружках становится равна $\frac{1}{6}y$. Так как эта разность до следующего хода гнома A не меняется, то $\frac{7}{6}x-y=\frac{1}{6}y$, откуда $x=y$. Следовательно, все гномы, когда приходит их очередь разливать молоко, разливают одно и то же количество молока x. В тот момент, когда первый гном разливает молоко, у других гномов, сидящих вслед за ним, количества молока в кружках равны соответственно $\frac{5}{6}x$, $\frac{4}{6}x$, $\frac{3}{6}x$, $\frac{2}{6}x$, $\frac{1}{6}x$, 0. Из уравнения

$$x+\frac{5}{6}x+\frac{4}{6}x+\frac{3}{6}x+\frac{2}{6}x+\frac{1}{6}x=3$$

найдем, что $x=\frac{6}{7}$ л. Следовательно, у гномов в кружках, если начать перечисление с первого гнома, было $\frac{6}{7}$ л, $\frac{5}{7}$ л, $\frac{4}{7}$ л, $\frac{3}{7}$ л, $\frac{2}{7}$ л, $\frac{1}{7}$ л, 0 л молока.

102. Ответ. а) 49 и 1681; б) такие числа существуют.

а) Легко проверить непосредственным перебором, что число 49 — единственное двузначное особое число.

Пусть z^2 — особое четырехзначное число, т. е.

$$z^2=100x^2+y^2, \text{ где } 10\leqslant x^2<100 \text{ и } 0<y^2<100.$$

Тогда $x\geqslant 4$. Так как $z>10x$, то положим $s=z-10x$. Тогда

$$z^2=(10x+s)^2=100x^2+20sx+s^2.$$

Получаем $y^2=20sx+s^2<100$, откуда $s=1$ и $x=4$. При этом $1681=100\cdot 4^2+9^2$, и поэтому число 1681 является единственным особым четырехзначным числом.

б) Если особое шестизначное число z^2 существует, то имеет место равенство $z^2=10^3x^2+y^2$, где $100\leqslant x^2<1000$ и $0<y^2<1000$. Таким образом, $z^2-y^2=(z-y)(z+y)=1000x^2$. Отсюда следует, что числа $z-y$ и $z+y$ являются четными числами. Пусть $z-y=2v$. Тогда $z+y=2(v+y)$ и, следовательно, $v(v+y)=250x^2$.

Для решения задачи требуется установить, имеет или нет полученное уравнение решение в натуральных числах. Найдем решение этого уравнения прямым подбором. Для этого положим $v=250$, а в качестве x возьмем наименьшее натуральное число, для которого $x^2>250$, т. е. выберем $x=16$; кроме того, пусть $y=16^2-250=6$. Тогда тройка чисел $v=250$, $x=16$, $y=6$, как легко проверить, является решением данного уравнения и, кроме того, число $z^2=1000\cdot 16^2+6^2=256\,036$ является особым шестизначным числом.

Замечание. Аналогичным рассуждением можно доказать, что для любого числа $k>0$ существует особое число z^2, имеющее $4k+2$ знаков в своей записи.

103. Достаточно указать n отрезков $[b_1;\ 2b_1]$, $[b_2;\ 2b_2]$, ..., $[b_n;\ 2b_n]$, объединение которых содержит всевозможные суммы чисел из $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Все эти суммы тогда разобьются требуемым образом на n групп: к i-й группе надо отнести суммы, попадающие в i-й отрезок.

Мы будем считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$. Положим $b_i = \frac{a_1+a_2+...+a_i}{2}$ и покажем, что числа $b_1, b_2, ..., b_n$ дают требуемую систему отрезков. В самом деле, наименьшая и наибольшая суммы принадлежат этим отрезкам: a_1 принадлежит $[b_1;\ 2b_1]$, а $a_1+a_2+...+a_n$ принадлежит $[b_n;\ 2b_n]$. Остается показать, что ни одна сумма s не попадает в «зазор» между двумя отрезками $[b_i;\ 2b_i]$ и $[b_{i+1};\ 2b_{i+1}]$, т. е. $s \notin (2b_i;\ b_{i+1})$. Предположим, что $s>2b_i$. Тогда

$$s>a_1+a_2+...+a_i$$

и, следовательно, в сумму s входит слагаемое a_j, где $j \geqslant i+1$. Но тогда $s \geqslant a_{i+1}$ и $2s>a_1+a_2+...+a_i+a_{i+1}$, откуда $s>b_{i+1}$, что и требовалось доказать.

104. а) Рассмотрим 25 ящиков, номера которых состоят из цифр 0, 1, 2, 3, 4, и 25 ящиков с номерами из цифр 5, 6, 7, 8, 9. В совокупности они образуют 50 ящиков, в которые можно разложить все билеты, так как каждый номер билета содержит или две цифры первой группы цифр, или же две цифры второй группы.

б, в) Пусть S — некоторый список номеров ящиков, в которые можно разложить все билеты. Пусть a_1 — цифра, с которой начинается наименьшее число номеров из S. Заметим, что номер a_1a_1 принадлежит S, так как билет с номером $a_1a_1a_1$ не опустить ни в какой другой ящик. Пусть номера a_1a_1, a_1a_2, ... принадлежат S. Тогда имеется еще по крайней мере l номеров в S, начинающихся с цифры a_2, по крайней мере l номеров, начинающихся с a_3, и т. д. Всего в S имеется по крайней мере l^2 номеров, начинающихся с цифр a_1, a_2, ..., a_l. Рассмотрим теперь билет с номером $a_1a_ka_m$, где $k>l$ и $m>l$. Он может быть положен только в ящик с номером a_ka_m, так как ящиков с номерами a_1a_k и a_1a_m в S нет. Это значит, что в S имеется еще по крайней мере $(10-l)^2$ ящиков, а всего не менее $l^2+(10-l)^2$. Этот квадратный трехчлен принимает наименьшее значение, равное 50, при $l=5$.

105. Ответ. 88.

Тот факт, что число a_n является ближайшим целым числом к $\sqrt{n}$, означает, что

$$|\sqrt{n}-a_n|<\frac{1}{2},\ n=1,\ 2,\ ...\ .$$

Докажем теперь, что в данной последовательности a_n каждое натуральное число m $(m=1, 2, ...)$ встречается ровно $2m$ раз. Действительно, пусть $a_n=m$, тогда из неравенства $|\sqrt{n}-m|<\frac{1}{2}$ находим, что

$$m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\frac{1}{2}, \text{ или } m^2-m<n\leqslant m^2+m.$$

Но в полуинтервале $(m^2-m; m^2+m]$ содержится $2m$ натуральных чисел n, что и утверждалось.

Разобьем теперь искомую сумму на 44 группы слагаемых так, чтобы в каждой группе участвовали только равные элементы последовательности a_n; имеем:

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_{1893}}+\frac{1}{a_{1894}}+\ldots+\frac{1}{a_{1985}}\right).$$

Сумма чисел в каждой группе равна 2, поэтому искомая сумма равна

$$\underbrace{2+2+\ldots+2}_{44 \text{ числа}}=88.$$

106. Проведем через точки A и D прямые, параллельные соответственно прямым BC и MC. Тогда треугольники BMC и ADE равны (рис. 89). Четырехугольник $DMCE$ является параллелограммом, поэтому $\angle MDC=\angle DCE$. Кроме того, по условию $\angle DAE=\angle MDC$; следовательно, $\angle DAE=\angle DCE$. Так как эти два последних угла опираются на один и тот же отрезок DE, то точки A, D, E и C лежат на одной окружности. Углы ACD и AED опираются на одну и ту же дугу AD этой окружности, поэтому величины их равны. Отсюда и из равенства треугольников BCA и AED получаем нужное утверждение.

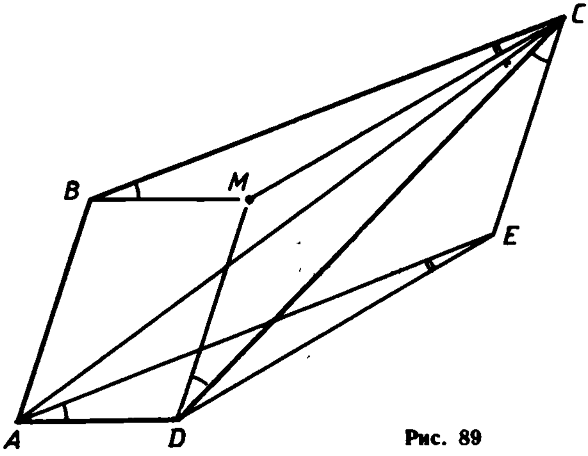


Рис. 89

107. Предположим, что при некотором натуральном m число 1978^m-1 делится на число 1000^m-1. Тогда число $(1978^m-1)-(1000^m-1)=1978^m-1000^m=2^m(989^m-500^m)$ также делится на 1000^m-1. Так как число 1000^m-1 является нечетным, то заключаем, что на 1000^m-1 делится число 989^m-500^m. Но этого быть не может, так как при любом натуральном m имеем:

$$989^m-500^m<1000^m-500^m<1000^m-1.$$

Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

108. Ответ. а) $n=7$; б) $\frac{3^{2n+1}-1}{2}$.

а) Пусть P_nQ_n — отрезок длины 3^n, $n\in N$, с центром в середине отрезка AB. Нетрудно показать (например, по индукции), что множество K_n состоит из всех точек отрезка P_nQ_n, находящихся на целочисленном расстоянии от точки A, и включает точки P_n и Q_n (рис. 90). Так как точка Q_n наиболее удалена от точки A и длина отрезка AQ_n равна $\frac{3^n+1}{2}$, то в множестве K_n впервые появится точка, находящаяся на расстоянии не менее 1000, только тогда, когда число n является минимальным числом, для которого выполнено неравенство $\frac{3^n+1}{2}\geqslant 1000$. При $n=7$ получаем нужное неравенство $2188\geqslant 2000$, а при $n=6$ имеем неравенство $730<2000$. Итак, искомым значением числа n является число 7.

б) Пусть $K_0=\{A, B, C\}$, где ABC — равносторонний треугольник с длиной стороны, равной a. Построим на прямой AB точки P_n и Q_n, на прямой CB точки R_n и S_n, на прямой AC точки T_n и U_n, которые находятся на расстоянии $3^n\cdot\frac{a}{2}$ от соответствующих середин отрезков AB, CB и AC (рис. 91). Все эти шесть точек принадлежат множеству K_n (см. п. а)).

Заметим теперь, что все точки множества K_n содержатся внутри полосы, ограниченной прямыми P_nU_n и T_nQ_n (рис. 91), или на самих этих прямых (это легко можно доказать по индукции). Аналогично все точки множества K_n содержатся внутри еще двух полос (и на их границах), которые ограничены парами прямых U_nR_n, S_nT_n и P_nS_n, Q_nR_n. Пересечением трех этих полос является выпуклый шестиугольник $P_nU_nR_nQ_nT_nS_n$, который является, очевидно, наименьшим выпуклым многоугольником, содержащим все точки множества K_n.

Треугольники P_nBS_n, R_nCU_n и T_nAQ_n подобны треугольнику

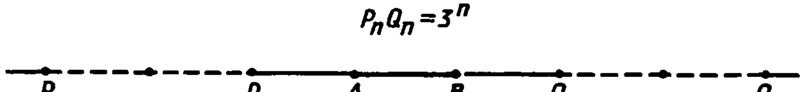


Рис. 90

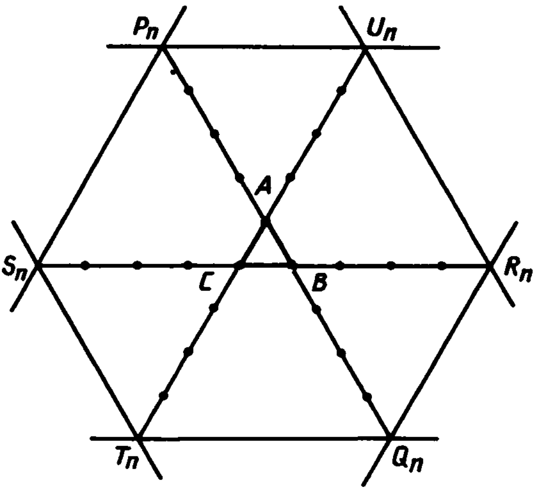


Рис. 91

ABC с коэффициентом подобия $\frac{3^n+1}{2}$ (см. п. а)), а треугольники P_nAU_n, R_nBQ_n и T_nCS_n также подобны треугольнику ABC, но уже с коэффициентом подобия $\frac{3^n-1}{2}$. Таким образом, искомая площадь шестиугольника равна

$$3S_{AP_nU_n}+3S_{AT_nQ_n}-2S_{ABC}=3\cdot\frac{(3^n+1)^2}{4}+3\cdot\frac{(3^n-1)^2}{4}-2=\frac{3^{2n+1}-1}{2}.$$

109. Ответ. а) 1) Можно; 2) нельзя. б) из карточки $(a;\ b)$ можно получить карточку $(1;\ n)$ в том и только в том случае, если число $n-1$ делится на число d, где d — максимальный нечетный делитель разности $b-a$.

Действие автоматов I, II, III будем обозначать стрелками с указанием номера автомата, например:

$$(a;\ b)\xrightarrow{\mathrm{I}}(a+1;\ b+1),\ (2a;\ 2b)\xrightarrow{\mathrm{II}}(a;\ b),$$
$$(a;\ b),\ (b;\ c)\xrightarrow{\mathrm{III}}(a;\ c).$$

а) 1) Из карточки (5; 19) можно получить карточку (1; 50), например, следующим образом:

1) $(5;\ 19)\xrightarrow{\mathrm{I}}(6;\ 20)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}(19;\ 33)$,

$(5;\ 19),\ (19;\ 33)\xrightarrow{\mathrm{III}}(5;\ 33)\xrightarrow{\mathrm{I}}(6;\ 34)\xrightarrow{\mathrm{II}}(3;\ 17)\xrightarrow{\mathrm{I}}$
$\xrightarrow{\mathrm{I}}(4;\ 18)\xrightarrow{\mathrm{II}}(2;9)$;

2) $(2;\ 9)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}(9;\ 16)$,

$(2;\ 9),\ (9;\ 16)\xrightarrow{\mathrm{III}}(2;\ 16)\xrightarrow{\mathrm{II}}(1;\ 8)$;

3) $(1;8)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}(8;\ 15)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}\cdot(15;\ 22)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots$
$\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}(22;\ 29)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{II}}(29;\ 36)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}(36;\ 43)\xrightarrow{\mathrm{I}}\ldots\xrightarrow{\mathrm{I}}(43;\ 50)$;

4) (1; 8), (8; 15) $\xrightarrow{\text{III}}$ (1; 15), (1; 15), (15; 22) $\xrightarrow{\text{III}}$ (1; 22), (1; 22), (22; 29) $\xrightarrow{\text{III}}$ (1; 29), (1; 29), (29; 36) $\xrightarrow{\text{III}}$ (1; 36), (1; 36), (36; 43) $\xrightarrow{\text{III}}$ (1; 43), (1; 43), (43; 50) $\xrightarrow{\text{III}}$ (1; 50).

а) 2) В результате работы автоматов будут получаться карточки $(x;\ y)$, у которых разность $y-x$ делится на число 7, так как $19-5=14=2\cdot 7$. Но число $100-1=99$ на 7 не делится, и поэтому (1; 100) из карточки (9; 15) получить нельзя.

б) Докажем, что из карточки $(a;\ b)$, $b>a\geqslant 1$, можно получить карточку $(1;\ n)$ тогда и только тогда, когда число $n-1$ делится на число d, где d — максимальный нечетный делитель числа $b-a$.

Все карточки $(x;\ y)$, получающиеся из карточки $(a;\ b)$ в результате работы любого из автоматов (или их последовательной работы), обладают тем свойством, что число $y-x$ делится на число d. Отсюда следует, что для доказательства нужного утверждения достаточно доказать, что из карточки $(a;\ b)$ можно получить карточку $(1;\ d+1)$. Действительно, если карточка $(1;\ d+1)$ уже получена в результате работы автоматов, то дальше можно действовать в два этапа:

1) $(1;\ d+1) \xrightarrow{\text{I}} (2;\ d+2) \xrightarrow{\text{I}} \ldots \xrightarrow{\text{I}} (d+1;\ 2d+1) \xrightarrow{\text{I}} \ldots$
$\ldots \xrightarrow{\text{I}} (2d+1;\ 3d+1) \xrightarrow{\text{I}} \ldots;$

2) $(1;\ d+1)$, $(d+1;\ 2d+1) \xrightarrow{\text{III}} (1;\ 2d+1)$,
$(1;\ 2d+1)$, $(2d+1;\ 3d+1) \xrightarrow{\text{III}} (1;\ 3d+1)$ и т. д.

Таким образом, из карточки $(1;\ d+1)$ можно получить карточку вида $(1;\ dk+1)$, где k — любое натуральное число.

Нам теперь нужно доказать, что из карточки $(a;\ b)$, $b>a>1$ или $a=1$, b — нечетное число, можно получить карточку $(1;\ d+1)$.

Для этого докажем, что из карточки $(a;\ b)$ при условии $b>a>1$ можно получить карточку с меньшими элементами. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть a и b — нечетные числа ($a=2l+1$, $b-a=dt$, т. е. $b=2l+dt+1$). В этом случае поступаем так:

а) $(a;\ b) \xrightarrow{\text{I}} \ldots \rightarrow (b;\ 2b-a)$;

б) $(a;\ b)$, $(b;\ 2b-a) \xrightarrow{\text{III}} (a;\ 2b-a) \xrightarrow{\text{I}} (a+1;\ 2b-a+1) \xrightarrow{\text{II}}$

$$\xrightarrow{\text{II}} \left(\frac{a+1}{2};\ \frac{2b-a+1}{2}\right) = (l+1;\ l+dt+1).$$

Таким образом, из карточки $(a;\ b)$ мы получили карточку $(a-l;\ b-l)$, уменьшив в ней оба числа.

2) Пусть a и b — четные числа ($a=2l$, $b=a+dt$). Тогда, используя первый автомат, из пары $(a;\ b)$ получим пару $(2l+1;\ 2l+dt+1)$, у которой оба числа нечетные. Повторив процедуру,

описанную в случае 1, получим пару $(l+1;\ l+dt+1)$, уменьшив тем самым оба числа исходной пары на $l-1$.

3) Пусть a — четное число, b — нечетное число ($a=2l$, $b=2l+dt$). В этом случае используем следующий алгоритм:

$$(2l;\ 2l+dt) \xrightarrow{\mathrm{I}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{I}} (2l+dt;\ 2l+2dt),$$

$$(2l;\ 2l+dt),\ (2l+dt;\ 2l+2dt) \xrightarrow{\mathrm{III}} (2l;\ 2l+2dt) \xrightarrow{\mathrm{II}} (l;\ l+dt),$$

уменьшив каждую из составляющих исходной пары $(a;\ b)$ на число l.

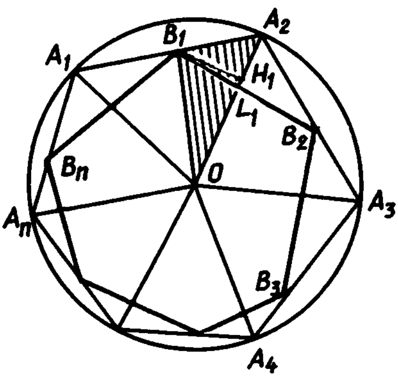
4) Пусть a — нечетное число, b — четное число. Рассмотрение этого случая после применения первого автомата сводится к алгоритму предыдущего пункта, который даст уменьшение обоих составляющих пары $(a;\ b)$.

5) Пусть $a=1$, $b=2l+1$ — нечетное число. Тогда

$$(1;\ 2l+1) \xrightarrow{\mathrm{I}} (2;\ 2l+2) \xrightarrow{\mathrm{II}} (1;\ l+1),$$

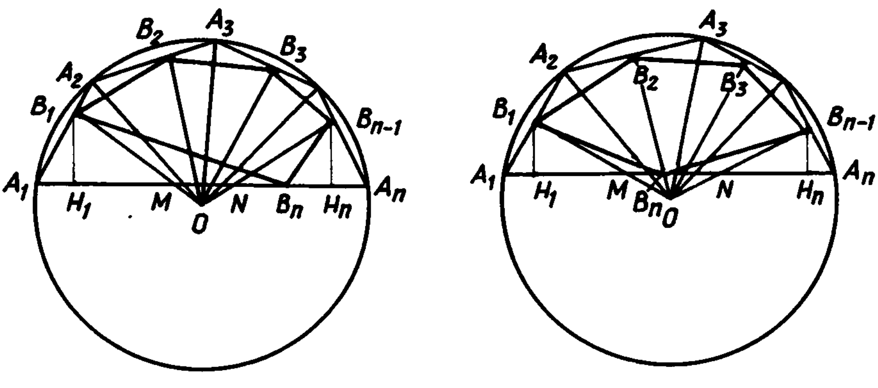
т. е. также получаем нужное уменьшение числа b из пары $(1;\ b)$.

Рассмотренные выше случаи 1—5 позволяют сделать вывод о том, что, повторив несколько раз операции и алгоритмы, описанные в них, мы от пары $(a;\ b)$ придем к паре вида $(1;\ d+1)$.



а)

110. Рассмотрим два случая:
а) центр O окружности лежит внутри (рис. 92, *а*) вписанного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$;
б) центр O окружности лежит вне (рис. 92, *б*, *в*) вписанного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$.



б) в)

Рис. 92

а) Пусть B_1 — точка, выбранная на стороне A_1A_2, и B_1L_1 — часть стороны B_1B_2 n-угольника $B_1B_2...B_n$, заключенная в треугольнике OB_1A_2. Пусть B_1H_1 — высота треугольника OB_1A_2. Тогда $B_1L_1 \geqslant B_1H_1$. С другой стороны, так как $OA_2=R$ и $S_{OB_1A_2}=$ $=\frac{1}{2}B_1H_1\cdot OA_2$, то $B_1L_1 \geqslant \frac{2S_{OB_1A_2}}{R}$. Складывая теперь аналогичные неравенства, полученные для всех треугольников вида OB_iA_{i+1}, OA_iB_i $(i=1, 2, ..., n;\ A_{n+1}\equiv A_1)$, получим искомое неравенство.

б) Как и в пункте а), в обоих случаях возможного расположения точки B_n на отрезке A_1A_n (показанных на рисунке 92, *в*) доказывается, что

$$B_1B_2 \geqslant \frac{2S_{OB_1A_2}}{R}+\frac{2S_{OA_2B_2}}{R},\quad B_2B_3 \geqslant \frac{2S_{OB_2A_3}}{R}+\frac{2S_{OA_3B_3}}{R},\ \ldots,$$
$$B_{n-2}B_{n-1} \geqslant \frac{2S_{OB_{n-2}A_{n-1}}}{R}+\frac{2S_{OA_{n-1}B_{n-1}}}{R}.$$

Докажем теперь, что

$$B_1B_n \geqslant \frac{2S_{A_1B_1M}}{R},\quad B_{n-1}B_n \geqslant \frac{2S_{NB_{n-1}A_n}}{R}.$$

Пусть B_1H_1 и $B_{n-1}H_n$ — высоты соответственно треугольников A_1B_1M и $NB_{n-1}A_n$. Тогда имеем:

$$B_1B_n \geqslant B_1H_1=\frac{2S_{A_1B_1M}}{A_1M},\quad B_{n-1}B_n \geqslant B_{n-1}H_n=\frac{2S_{NB_{n-1}A_n}}{NA_n}.$$

Так как $A_1M \leqslant R$ и $NA_n \leqslant R$, то отсюда получаем, что

$$B_1B_n \geqslant \frac{2S_{A_1B_1M}}{R},\quad B_{n-1}B_n \geqslant \frac{2S_{NB_{n-1}A_n}}{R}.$$

Таким образом,

$$B_1B_2+B_2B_3+\ldots+B_{n-1}B_n+B_1B_n \geqslant \frac{2}{R}(S_{OB_1A_2}+S_{OA_2B_2}+S_{OB_2A_3}+$$
$$+S_{OA_3B_3}+\ldots+S_{NB_{n-1}A_n}+S_{A_1B_1M}) \geqslant \frac{2S}{R},$$

что и требовалось доказать.

111. Ответ. б) Выигрывает начинающий.

а) Если n — четное число, то разобьем всю доску на прямоугольники размером 1×2 клетки (на домино). Начинающий в этом случае может выиграть, так как может придерживаться следующей стратегии. Первым ходом он ставит фишку на вторую свободную клетку домино, которая содержит угловую клетку доски с первоначальным положением фишки. А дальше действует так: если фишка стоит на одной из клеток какого-то домино, то он ставит ее на вторую клетку того же домино. Когда все домино будут исчерпаны, второму игроку некуда будет поставить фишку.

Если n — нечетное число, то разобьем на домино все клетки доски, кроме той, где первоначально стоит фишка. Ясно, что стратегия, описанная выше, теперь становится выигрышной для второго игрока.

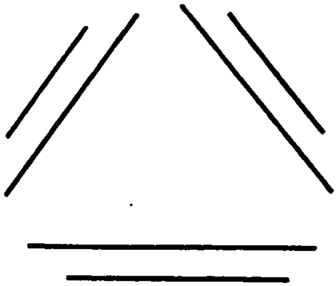


Рис. 93

б) Докажем, что в этом случае всегда выигрывает начинающий. Если n — четное число, то выигрышной стратегией снова является стратегия, описанная в пункте а).

Если n — нечетное число, то разобьем на домино все клетки доски, кроме угловой. Придерживаясь стратегии, описанной в пункте а), начинающий игрок всегда может добиться того, что второй игрок никогда не сможет передвинуть фишку в угловую клетку, соседнюю с клеткой первоначального положения фишки. Поэтому начинающий выигрывает, придерживаясь стратегии из пункта а).

112. Ответ. Нет, не всегда (рис. 93).

113. Ответ. $\frac{1}{5}$.

Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, а PQR — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой PR, вписанный в треугольник ABC согласно условию задачи. Возможны два случая:

а) вершина Q лежит на катете треугольника ABC;

б) вершина Q лежит на гипотенузе треугольника ABC.

Пусть вершина Q лежит на катете BC. Вершину, лежащую на гипотенузе AC, обозначим через P (рис. 94). Опустим из точки P перпендикуляр на катет BC. Треугольники QBR и PDQ равны: у них равны гипотенузы RQ и QP и углы RQB и QPD.

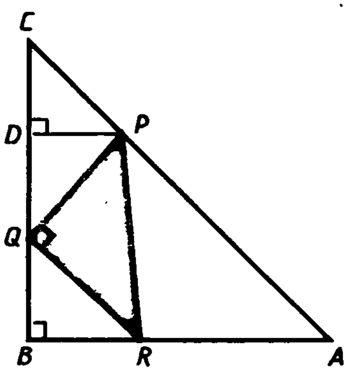


Рис. 94

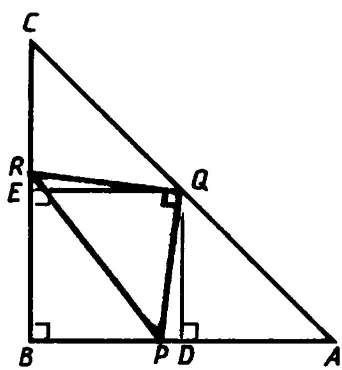


Рис. 95

Если $BQ=x$, $BC=a$, то $PD=DC=x$, $QC=a-x$ и $QD=BR=$ $=CQ-CD=(a-x)-x=a-2x$. Следовательно,

$$RQ^2=RB^2+BQ^2=(a-2x)^2+x^2=a^2-4ax+5x^2.$$

Площади подобных треугольников ABC и PQR относятся как квадраты их катетов. Поэтому

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=\frac{RQ^2}{BC^2}=\frac{5x^2-4ax+a^2}{a^2}=5\left(\frac{x}{a}-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}.$$

Мы видим, что отношение $S_{PQR}:S_{ABC}$ не меньше $\frac{1}{5}$ и равно $\frac{1}{5}$ при $x=\frac{2}{5}a$. Итак, в рассматриваемом случае минимум отношения площадей равен $\frac{1}{5}$ и достигается для треугольника PQR, такого, что $BQ:QC=2:3$.

Пусть теперь вершина Q лежит на гипотенузе AC. Пусть на AB лежит (рис. 95) вершина P. Спроектируем точку Q на катеты BC и AB, получим точки E и D соответственно. Треугольники QPD и QRE равны, ибо равны их гипотенузы и острые углы EQR и DQP. Поэтому равны и отрезки EQ и QD. Следовательно, точка Q является серединой гипотенузы AC. Очевидно, что в этом случае площадь треугольника PQR будет минимальной для случая, когда $D=P$ и $R=E$, так что

$$S_{PQR}:S_{ABC}\geqslant\frac{1}{4}>\frac{1}{5}.$$

114. Рассмотрим на плоскости xOy многоугольник M площади 15, составленный из 15 квадратов размером 1×1 (на рисунке 96 этот многоугольник закрашен).

Покажем, что если в начальный момент кенгуру находилась в точке $(\alpha;\ \beta)\in M$, то она не сможет выбраться из M. Действительно, согласно условию задачи кенгуру может делать прыжки на вектор $\bar{a}=(1;\ -1)$ и на вектор $\bar{b}=(-5;\ 7)$, оставаясь при этом в пределах прямого угла $x\geqslant0$, $y\geqslant0$. В силу этого условия прыжок из точки $(\alpha;\ \beta)\in M$ на вектор $\bar{b}$ невозможен: конец вектора $(-5;\ 7)$, отложенного от точки $(\alpha;\ \beta)\in M$, находится вне прямого угла. Следовательно, из начальной точки $(\alpha;\ \beta)$ возможны только прыжки на вектор $\bar{a}$, но при этом

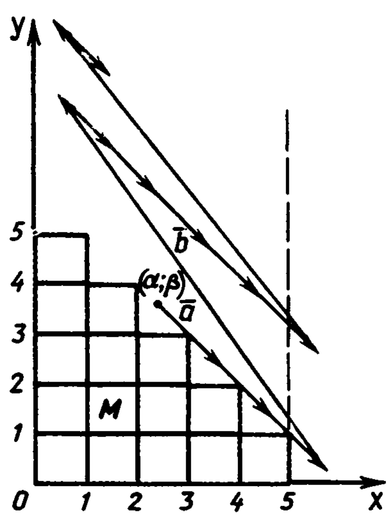


Рис. 96

кенгуру должна оставаться в M и сможет сделать не более 5 прыжков.

Если же начальная точка $(\alpha;\ \beta)$ находится вне M, то не более чем за 5 прыжков на вектор $\bar{a}$ кенгуру сможет попасть в область $x \geqslant 5$, $y \geqslant 0$, затем она сможет сделать прыжок на вектор $\bar{b}$ и вновь несколько прыжков на вектор $\bar{a}$, чтобы попасть в область $x \geqslant 5$, $y \geqslant 0$, и т. д. Легко видеть, что таким образом кенгуру может удалиться от начала координат на любое расстояние, в частности и на расстояние, большее 1000.

115. Разобьем парламент на две палаты произвольным образом. Пусть s — число всех пар врагов в обеих палатах. Если в какой-нибудь из палат у парламентария A будет не меньше двух врагов, то в другой палате число его врагов будет не больше одного. Поэтому после перемещения парламентария A в другую палату число s уменьшается. Будем делать такие перемещения до тех пор, пока они возможны. Число всех таких перемещений будет конечно, ибо при каждом перемещении уменьшается натуральное число s, а это возможно сделать только конечное число раз. В конце концов мы придем к разбиению, для которого $s=0$, т. е. к требуемому разбиению парламента на две палаты.

116. Для $n=2$ числом, удовлетворяющим условию задачи, является, например, число $1001 = 11 \cdot 91$.

Для $n \geqslant 3$ таким числом является число

$$A_n = \underbrace{10101\ \ldots\ 10101}_{n+1 \text{ единиц, } n \text{ нулей}}.$$

Действительно,

$$A_n = 1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2n} = \frac{10^{2n+2}-1}{10^2-1} =$$

$$= \frac{(10^{n+1}-1)\ (10^{n+1}+1)}{99} =$$

$$= \frac{(10-1)\ (1+10+10^2+\ldots+10^n)\ (10^{n+1}+1)}{9 \cdot 11} =$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \underbrace{111\ \ldots\ 11}_{n+1 \text{ единиц}} \cdot (10^{n+1}+1).$$

Так как 11 — простое число, а A_n — натуральное число, то на 11 обязательно делится какой-либо из сомножителей: или число $\underbrace{111 \ldots 11}_{n+1 \text{ единиц}}$, или число $10^{n+1}+1$. Число $\underbrace{111 \ldots 1}_{n+1 \text{ единиц}}$ делится на 11 при нечетном n, а число $10^{n+1}+1$ делится на 11 при четном n. Мы видим, что число A_n является составным при любом $n \geqslant 3$.

Можно привести и другие примеры чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Например, число $B_n = \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ единиц}}$ делится на 11 при четном n и является составным при $n \geqslant 2$; число

$$C_n = 7\underbrace{10011001\ldots1001}_{\frac{n-7}{2} \text{ четверок вида } 1001}$$

делится на 7 при нечетном $n \geqslant 7$ и является составным при $n \geqslant 9$.

117. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — данные точки.

Возьмем на плоскости некоторую (произвольную) точку O и представим каждый из выбранных (по условию задачи) векторов $\overline{A_iA_j}$ в виде $\overline{OA_j} - \overline{OA_i}$. Сумма выбранных векторов вида $\overline{A_iA_j}$ будет равна сумме разностей $\overline{OA_j} - \overline{OA_i}$, в которой согласно условию задачи каждый вектор $\overline{OA_k}$ встретится четное число раз: несколько раз со знаком «плюс» и такое же число раз со знаком «минус». Поэтому сумма выбранных векторов будет равна $\overline{0}$, что и требовалось доказать.

118. Ответ. а) 16; б) $2n$ для четного n и $2n+1$ для нечетного n.

а) Проведем 16 прямых, параллельных диагоналям квадрата (на рисунке 97 эти прямые изображены пунктиром). Эти прямые проходят через центры различных квадратов размером 1×1. Поэтому согласно условию задачи на каждой из этих прямых должна находиться фишка. Следовательно, общее число фишек не меньше 16. На этом же рисунке указано, как можно разместить ровно 16 фишек, удовлетворив всем условиям задачи. Таким образом, минимальное число фишек равно 16.

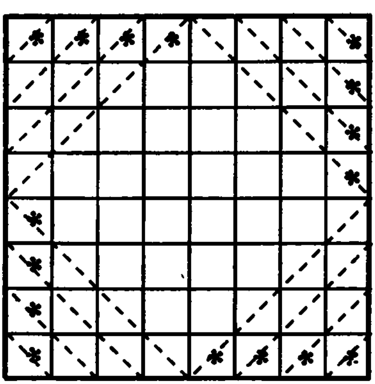


Рис. 97

б) Для квадрата размером $n \times n$ проведем аналогичные рассуждения. При этом следует различать случаи четного и нечетного n.

При четном n ситуация аналогична рассмотренной выше в пункте а) (рис. 98): на каждой из прямых, изображенных на рисунке пунктиром, должна находиться фишка. Следовательно, число фишек не меньше $4 \cdot \frac{n}{2} = 2n$, причем, разместив $2n$ фишек, по аналогии с рисунком 97 можно удовлетворить условиям задачи.

В случае нечетного n предыдущие рассуждения следует изме-

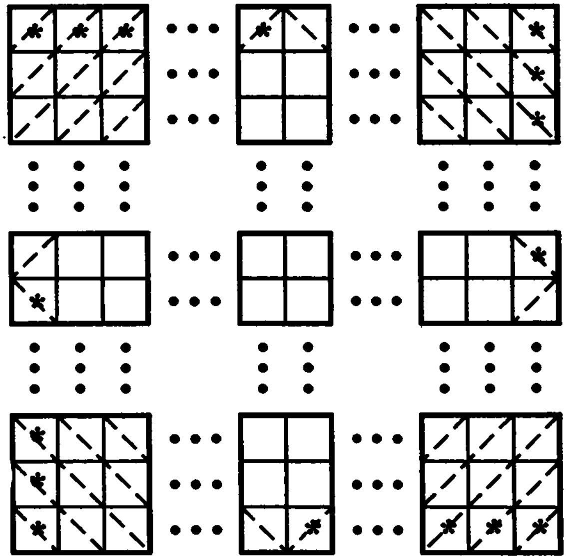


Рис. 98

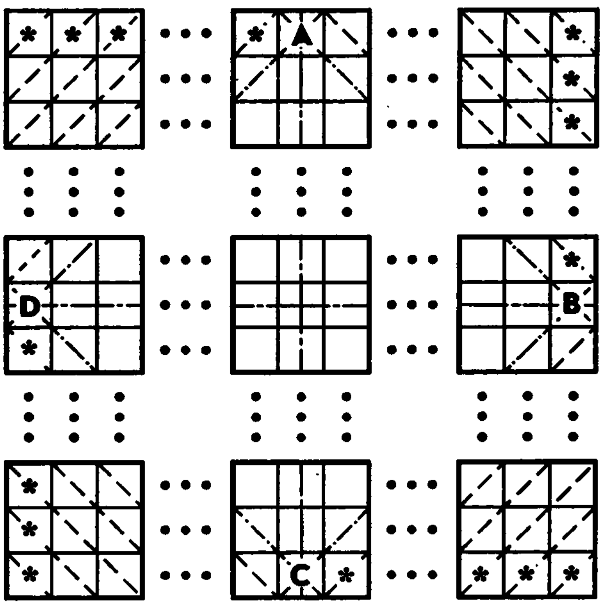


Рис. 99

нить: появляются центральные квадраты *A*, *B*, *C*, *D* (рис. 99), через которые можно провести по две «равноправные» пунктирные прямые, параллельные диагоналям квадрата. На каждой из прямых, изображенных на рисунке пунктиром (мы не проводим такие прямые через центры квадратов *A*, *B*, *C*, *D*), должна находиться фишка. Следовательно, на этих прямых должно находиться не менее $4\cdot\frac{n-1}{2}=2n-2$ фишек.

На шести прямых, проходящих через центры квадратов A, B, C, D (на рисунке 99 они изображены штрих-пунктиром), должно находиться, как легко проверить, не менее трех фишек. Поэтому общее число фишек не меньше $(2n-2)+3=2n+1$. Разместив соответствующим образом фишки в количестве $2n+1$, можно удовлетворить условиям задачи. Соответствующее размещение фишек осуществляется так же, как и выше (рис. 99), на пунктирных прямых, а на штрихпунктирных прямых помещаются еще три фишки в каких-либо трех квадратах из A, B, C, D.

Итак, наименьшее число фишек равно $2n$ для четного n и равно $2n+1$ для нечетного n.

119. Из системы следует, что $x^2-y^2\geqslant 0$ и что $1-x^2+y^2>0$, т. е. $0\leqslant x^2-y^2<1$.

Складывая и вычитая уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases}(x+y)\left(1-\sqrt{x^2-y^2}\right)=(a+b)\sqrt{1-x^2+y^2},\\(x-y)\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)=(a-b)\sqrt{1-x^2+y^2}.\end{cases}$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$(x^2-y^2)(1-x^2+y^2)=(a^2-b^2)(1-x^2+y^2).$$

Отсюда следует, что $x^2-y^2=a^2-b^2$. Так как $0\leqslant x^2-y^2<1$, то для разрешимости исходной системы необходимо, чтобы выполнялись неравенства $0\leqslant a^2-b^2<1$.

Если эти неравенства выполнены, то $\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{a^2-b^2}$ и исходная система принимает вид:

$$\begin{cases}x-y\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-a^2+b^2},\\y+x\sqrt{a^2-b^2}=b\sqrt{1-a^2+b^2}.\end{cases}$$

Решая эту линейную систему относительно x, y, находим, что

$$x=\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}},\quad y=\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}. \qquad (1)$$

Подстановкой в уравнения исходной системы убеждаемся, что найденные значения (1) являются решениями системы.

Итак, система имеет единственное решение (см. формулы (1)) тогда и только тогда, когда $0\leqslant a^2-b^2<1$.

120. Пусть длины сторон данных квадратов равны a_i, где $i=1, 2, \ldots, N$ (N — число всех квадратов).

Если какое-нибудь a_k будет больше 1, то, очевидно, k-й квадрат со стороной a_k покрывает единичный квадрат. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $a_i<1$ для всех $i=1, 2, \ldots, N$.

Каждое число a_i принадлежит некоторому полуинтервалу $(2^{-k_i}, 2^{-k_i+1})$, т. е. $2^{-k_i}\leqslant a_i<2^{-k_i+1}$, где k_i — натуральные числа, $i=1, 2, \ldots, N$. Уменьшим i-й квадрат, $i=1, 2, \ldots, N$, до квадрата со стороной $b_i = \frac{1}{2^{k_i}}$. При этом его площадь уменьшится менее чем в 4 раза, ибо $1 \leqslant \frac{a_i}{b_i} < 2$. Следовательно, сумма площадей всех новых квадратов будет больше 1.

Покажем теперь, что единичный квадрат можно полностью покрыть новыми квадратами.

Покрытие осуществляем следующим образом. Разобьем единичный квадрат на 4 квадрата со стороной $\frac{1}{2}$ (рис. 100). Сначала укладываем квадраты со стороной $\frac{1}{2}$ (если они есть). Затем на непокрытые квадраты со стороной $\frac{1}{2}$ (если они есть) укладываем квадраты со стороной $\frac{1}{4}$ (если они есть), разбив для этого каждый непокрытый квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ на 4 равных квадрата (рис. 100) со стороной длины $\frac{1}{4}$. Продолжим эту процедуру далее для $k=3, 4, \ldots$, укладывая квадраты со стороной $\frac{1}{2^k}$ (если таковые имеются) на непокрытые квадраты со стороной $\frac{1}{2^{k-1}}$, разбивая их на 4 равных квадрата.

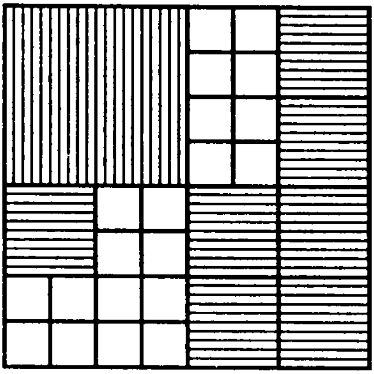


Рис. 100

Так как сумма площадей новой коллекции квадратов (со сторонами b_i, $i=1, 2, \ldots, N$) больше 1, то на некотором шаге мы полностью покроем исходный квадрат. Затем, увеличив i-й квадрат со стороной b_i, $i=1, 2, \ldots, N$, до квадрата со стороной a_i, мы получим покрытие квадрата площади 1 исходными квадратами.

121. Так как $1980 = 99 \cdot 20$, причем числа 99 и 20 не имеют общих делителей, то достаточно выяснить, делится ли данное число $A = 192021\ldots7980$ на 20 и 99. Делимость A на 20 очевидна. Докажем, что A делится и на 99. Так как 100 в любой степени при делении на 99 дает остаток 1, то число

$$A = 19 \cdot 100^{61} + 20 \cdot 100^{60} + \ldots + 79 \cdot 100 + 80$$

при делении на 99 дает такой же остаток, что и число

$$B = 19 + 20 + \ldots + 79 + 80 = \frac{19+80}{2} \cdot 62 = 99 \cdot 31.$$

Число B делится на 99, следовательно, и число A делится на 99, а вместе с тем и на 1980.

Замечание. Делимость числа A на $99 = 11 \cdot 9$ можно установить также с помощью признаков делимости на 11 и 9. Число A делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой его цифр, стоящих на четных местах. Нетрудно подсчитать, что для данного числа A каждая из этих сумм равна 279, а их разность равна нулю, и, значит, число A делится на 11. Так как сумма цифр числа A равна $279+279=558=9\cdot 62$, т. е. делится на 9, то и само число A делится на 9.

122. Обозначим через S площадь квадрата $ABCD$, через a — сумму площадей левых частей полосок с нечетными номерами, через b — сумму площадей правых частей полосок с четными номерами (на рисунке 6 для $n=5$ соответствующие части полосок заштрихованы). Мы должны доказать, что $a=b$. Пусть c — сумма площадей правых частей полосок с нечетными номерами. Тогда $b+c=\frac{1}{2}S$, $b=\frac{1}{2}S-c$. Из условия следует, что сумма длин всех отрезков, лежащих на стороне AB квадрата и имеющих нечетные номера, равна половине длины этой стороны. Следовательно, сумма площадей полосок с нечетными номерами равна половине площади квадрата $ABCD$, т. е. $a+c=\frac{1}{2}S$. Отсюда $a=\frac{1}{2}S-c=b$.

123. Будем называть контейнер *тяжелым*, если его масса больше 0,5 т. В противном случае, если масса контейнера не превосходит 0,5 т, будем говорить, что контейнер *легкий*. Сначала покажем, что все тяжелые контейнеры можно одновременно доставить на орбитальную станцию.

Число тяжелых контейнеров меньше чем $18:0{,}5=36$, т. е. не превосходит 35. По условию задачи любые 35 из имеющихся контейнеров можно одновременно доставить на станцию. Следовательно, добавив в случае необходимости к тяжелым контейнерам несколько легких контейнеров с тем, чтобы общее число контейнеров в образовавшейся группе стало равно 35, мы получим группу контейнеров, в которую входят все тяжелые контейнеры и которую можно одновременно погрузить в транспортные корабли и доставить на орбитальную станцию.

Рассмотрим теперь оставшиеся легкие контейнеры. Покажем, что все эти контейнеры можно по очереди догрузить в транспортные корабли. Предположим противное, т. е. что в процессе погрузки встретился контейнер массой $x\leqslant 0{,}5$ т, который не удается погрузить ни на один из семи транспортных кораблей. Это означает, что на каждом транспортном корабле уже находится больше $(3-x)$ т груза. В таком случае всего уже погружено более $7(3-x)$ т, а осталось погрузить, следовательно, менее $18-7(3-x)=7x-3$ тонн груза. Оставшийся груз включает в себя, в частности, указанный контейнер массой x т. Значит, $x<7x-3$, откуда $x>0{,}5$. Получили противоречие. Следовательно, все оставшиеся легкие контейнеры можно поочередно догрузить в транспортные корабли, и, значит, весь имеющийся груз можно одновременно доставить на станцию.

124. Так как $S_{ABM}=S_{AMC}$ и $S_{ADP}=S_{APC}$ (рис. 101), то $S_{ABCD}=2S_{AMCP}$. Достаточно, следовательно, доказать, что $S_{AMCP}<\frac{a^2}{4}$. Обозначим через K точку пересечения отрезков AM и BD (рис. 102). Так как MP — средняя линия треугольника BCD, то высоты треугольников CMP и KMP, проведенные к их общему основанию MP, равны. Значит, равны площади этих треугольников:

$$S_{CMP}=S_{KMP}.$$

Площадь треугольника KMP меньше площади треугольника AMP, следовательно,

$$S_{AMCP}=S_{AMP}+S_{CMP}=S_{AMP}+S_{KMP}<2S_{AMP}.$$

Пусть $AM=x$. Тогда $AP=a-x$,

$$2S_{AMP}=x(a-x)\sin\angle MAP\leqslant x(a-x)=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2}{4}$$

и, следовательно, $S_{AMCP}<\frac{a^2}{4}$. Отсюда, как отмечалось, следует утверждение задачи.

Замечание 1. Полученная оценка для площади выпуклого четырехугольника $ABCD$ является *точной*. Это означает, что в неравенстве

$$\frac{S_{ABCD}}{\frac{a^2}{2}}<1$$

константу 1 в правой части нельзя заменить на меньшую: для каждого $\alpha<1$ найдется выпуклый четырехугольник $ABCD$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{S_{ABCD}}{\frac{a^2}{2}}>\alpha$$

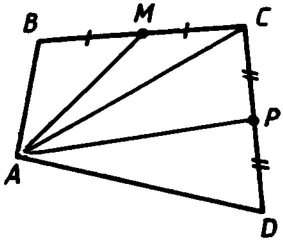


Рис. 101

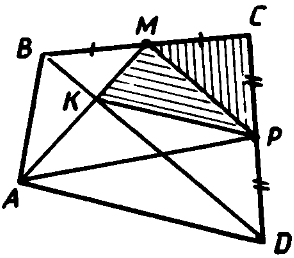


Рис. 102

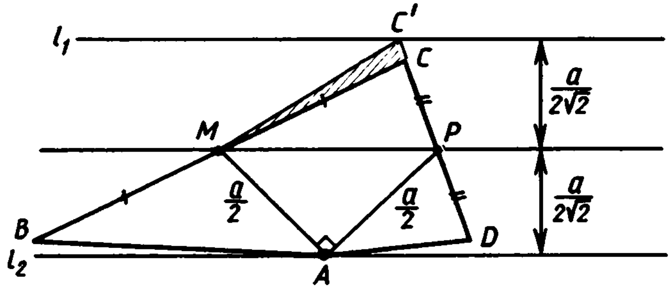


Рис. 103

Из рисунка 103 ясно, как можно построить такой четырехугольник. Очевидно, что в этом четырехугольнике отрезки AM и AP должны быть взаимно перпендикулярны и равны, поскольку только в этом случае неравенство $2S_{AMP} \leqslant \frac{a^2}{4}$ обращается в равенство. Зафиксируем произвольное $a > 0$ и построим равнобедренный прямоугольный треугольник MAP, в котором $\angle MAP = 90°$ и $MA = AP = \frac{a}{2}$ (рис. 103). Выберем точку C так, чтобы точки C и A лежали по разные стороны от прямой MP и при этом точка C лежала бы ближе к прямой MP, нежели точка A. После того как точки A, M, P и C выбраны, положение точек B и D определяется однозначно. Для так построенного выпуклого четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство $2S_{AMP} = \frac{a^2}{4}$, поэтому $S_{ABCD} = 2S_{AMCP} = 2(2S_{AMP} - S_{MCC'}) = 2\left(\frac{a^2}{4} - S_{MCC'}\right) = \frac{a^2}{2} - 2S_{MCC'}$. Таким образом, построенный четырехугольник будет искомым, если будет выполнено неравенство $\frac{a^2}{2} - 2S_{MCC'} > \alpha \cdot \frac{a^2}{2}$, т. е. если $S_{MCC'} < (1-\alpha) \cdot \frac{a^2}{4}$, а это неравенство будет выполнено, если точку C взять достаточно близко к прямой $l_1 \| MP$ (рис. 103).

Замечание 2. Мы доказали, что если *произвольную* вершину *выпуклого* четырехугольника соединить отрезками с серединами не примыкающих к этой вершине сторон четырехугольника, то будет справедливо неравенство $S < \frac{a^2}{2}$, где S — площадь этого четырехугольника, a — сумма проведенных отрезков. Возникает вопрос: останется ли справедливым это неравенство, если мы откажемся от условия выпуклости четырехугольника? Оказывается, что в невыпуклом четырехугольнике указанное неравенство выполняется не всегда, точнее, в случае невыпуклого четырехугольника неравенство $S < \frac{a^2}{2}$ будет выполняться или не

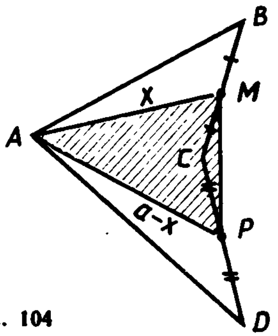


Рис. 104

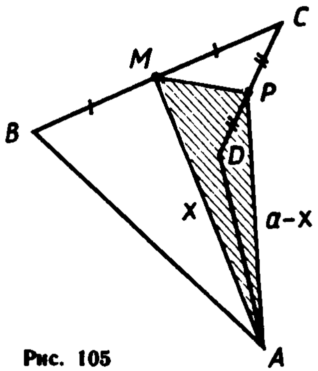


Рис. 105

выполняться в зависимости от того, из *какой вершины* четырехугольника проведены отрезки. Так, в случае на рисунке 104 (в этом случае, очевидно, $S_{AMCP} < S_{AMP}$) справедливо даже более сильное неравенство:

$$S_{ABCD} = 2S_{AMCP} < 2S_{AMP} = 2 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot AP \cdot \sin \widehat{MAP} \leqslant x\ (a-x) \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

В случае, изображенном на рисунке 105, $S_{AMCP} < 2S_{AMP}$, поэтому

$$S_{ABCD} = 2S_{AMCP} < 4S_{AMP} \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

Наконец, в случае, изображенном на рисунке 106, неравенство $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$, как легко видеть, может не выполняться (см. также рис. 107, из которого видно, что при фиксированном a площадь такого четырехугольника $ABCD$ может быть сделана сколь угодно большой надлежащим выбором точки C).

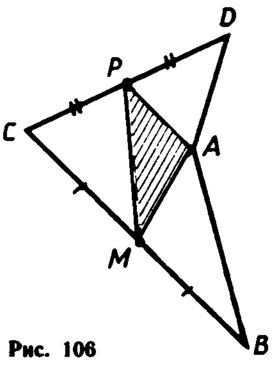


Рис. 106

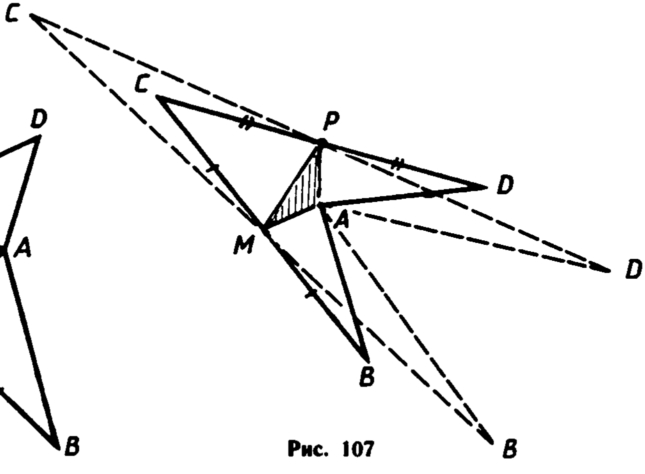


Рис. 107

125. Обозначим через $\overline{S}$ сумму всех 1980 данных векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_{1980}$. Предположим, что $\overline{S}\neq\overline{0}$. Сумма всех векторов кроме $\overline{a}_i$, равна $\overline{S}-\overline{a}_i$. По условию векторы $\overline{S}-\overline{a}_i$ и $\overline{a}_i$ коллинеарны. Если $\overline{a}_i\neq\overline{0}$, то по признаку коллинеарности векторов отсюда следует, что $\overline{S}-\overline{a}_i=\lambda_i\overline{a}_i$ для некоторого действительного числа λ_i, так что $\overline{S}=(1+\lambda_i)\overline{a}_i$. По предположению $\overline{S}\neq\overline{0}$, поэтому $1+\lambda_i\neq 0$, и, следовательно,

$$\overline{a}_i=\frac{1}{1+\lambda_i}\overline{S}.$$

Таким образом, если $\overline{S}\neq\overline{0}$, то любой ненулевой вектор $\overline{a}_i$ коллинеарен вектору $\overline{S}$. Поскольку нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору, заключаем, что если $\overline{S}\neq\overline{0}$, то все векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_{1980}$ коллинеарны, что противоречит условию задачи.

Следовательно, сумма всех данных 1980 векторов равна нулевому вектору.

126. а) Такое натуральное число существует — это число 1962:

$$S\,(1962)=1+9+6+2=18,\ 1962+S\,(1962)=1980.$$

Указанное число — это единственное натуральное число, удовлетворяющее уравнению $n+S(n)=1980$. В этом нетрудно убедиться непосредственным перебором, рассматривая поочередно числа 1979, 1978, ... Перебор можно закончить на числе 1955. Действительно, сумма цифр любого не более чем трехзначного числа n не превосходит 27, поэтому для любого такого числа n имеем:

$$n+S\,(n)\leqslant 999+27=1026<1980.$$

Значит, искомое число должно быть четырехзначным. Среди всех четырехзначных чисел n, меньших 1980, наибольшую сумму цифр, равную 26, имеет число 1979. Следовательно, для любого четырехзначного числа n, меньшего 1955, имеем:

$$n+S\,(n)\leqslant 1954+25=1979.$$

б) Обозначим $S_n=n+S\,(n)$. Легко видеть, что если число n оканчивается на 9, то $S_{n+1}<S_n$; в противном случае $S_{n+1}=$ $=S_n+2$.

Пусть m и $m+1$ — произвольные, но фиксированные последовательные натуральные числа. Требуемое утверждение будет доказано, если мы докажем, что для некоторого S_n выполняется одно из равенств $m=S_n$ или $m+1=S_n$. Так как $S_1=2$, то для $m=1$ и $m=2$ утверждение задачи верно. Пусть $m>2$. Так как при $n\geqslant m$ $S_n>n\geqslant m$, т. е. при указанных n каждое из чисел S_n больше m, то может существовать лишь конечное число n, таких, что $S_n<m$. Так как $m>2$, то S_n, меньшие m, существуют (например, S_1). В непустом множестве натуральных чисел n, меньших m и таких, что $S_n<m$, существует наибольшее

число. Обозначим это число через n^*. Согласно выбору числа n^* имеем:

$$S_{n^*+1} \geqslant m > S_{n^*},$$

т. е. $S_{n^*+1} > S_{n^*}$. Следовательно, число n^* не может оканчиваться на 9, и, значит,

$$S_{n^*+1} = S_{n^*} + 2.$$

Поскольку $S_{n^*} < m$, отсюда следует, что $S_{n^*+1} < m + 2$. Таким образом,

$$m \leqslant S_{n^*+1} < m + 2.$$

Следовательно, число S_{n^*+1} равно либо m, либо $m+1$. Утверждение доказано.

Замечание. Как показано, при любом m среди чисел n, бóльших или равных m, нет таких, которые реализуют требуемое представление числа m. Точно так же среди чисел $n \geqslant m+1$ нет таких, которые реализовывали бы требуемое представление чисел m и $m+1$. Найдем все такие числа m, что число $n=m$ реализует требуемое представление числа $m+1$. Так как равенство $m+1=S_m$ выполняется лишь в том случае, если $S(m)=1$, то все искомые числа m имеют вид $m=10^k$, где k — неотрицательное целое число. Заметим, что числа вида 10^k+1, $k \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 0$, кроме указанного очевидного представления ($cn = 10^k$), могут иметь и другие представления в виде суммы $n + S(n)$. Например:

$$101 = 100 + S(100) = 91 + S(91),$$
$$1001 = 1000 + S(1000) = 982 + S(982).$$

Напротив, для числа 11 представление в виде суммы $10 + S(10)$ является единственным возможным представлением требуемого вида. Заметим также, что в паре, образованной двумя последовательными натуральными числами, указанное в условии задачи представление могут иметь как оба числа, входящие в пару, так и только одно из чисел. Например, в паре (100; 101) оба числа допускают указанное представление: для числа 101 такое представление, как показано, даже не единственно, а для числа 100 имеем $100 = 86 + S(86)$. В паре (998; 999) также оба числа допускают указанное представление:

$$998 = 976 + S(976), \quad 999 = 981 + S(981).$$

С другой стороны, в паре (9; 10) указанное представление имеет только число 10:

$$10 = 5 + S(5).$$

127. Ответ. 33 клетки.

Рассмотрим произвольный прямоугольник размером 9×11 клеток и разобьем его, как показано на рисунке 108, на 16 прямоугольников размером 2×3 клетки и один прямоугольник размером 1×3 клетки (на рисунке он закрашен). По условию каждый из прямоугольников размером 2×3 клетки содержит ровно две красные клетки, поэтому во всех 16 таких прямо-

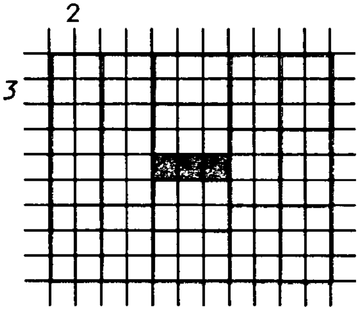


Рис. 108

угольниках содержится $2\times16=32$ красные клетки. Докажем, что если раскраска удовлетворяет условию задачи, то в каждом прямоугольнике размером 1×3 клетки содержится ровно одна красная клетка (и, следовательно, в каждом прямоугольнике размером 9×11 клеток содержится ровно 33 красные клетки).

Всякий прямоугольник размером 1×3 клетки может содержать не более трех красных клеток. Так как каждый прямоугольник размером 1×3 содержится в некотором прямоугольнике размером 2×3, содержащем по условию ровно две красные клетки, то никакой прямоугольник размером 1×3 клетки не может содержать три красные клетки.

Предположим, что прямоугольник размером 1×3 клетки содержит ровно две красные клетки. Тогда либо эти клетки располагаются подряд (рис. 109, *а, б*), либо разделены синей (заштрихованной) клеткой (рис. 109, *в*). Дополнив рассматриваемый прямоугольник размером 1×3 двумя способами до прямоугольника размером 2×3, получим, что в квадрате 3×3, указанном на рисунке 109 пунктиром, содержится ровно две красные клетки, что невозможно, поскольку при этом в правом или левом прямоугольнике 2×3, образованном средним и крайним справа или соответственно слева столбцами этого квадрата, содержится ровно одна красная клетка, а не две, как требуется по условию.

Если, наконец, в прямоугольнике размером 1×3 клетки вообще нет красных клеток, то ровно по две красные клетки содержатся в верхней и нижней строках квадрата 3×3, до которого можно достроить этот прямоугольник (на рисунке 110 этот квадрат изображен пунктиром, что, как показано, невозможно).

Итак, если раскраска удовлетворяет условию задачи, то в любом прямоугольнике размером 1×3 клетки содержится ровно одна красная клетка. Отсюда, как указывалось, следует, что в любом прямоугольнике размером 9×11 клеток содержится ровно 33 красные клетки.

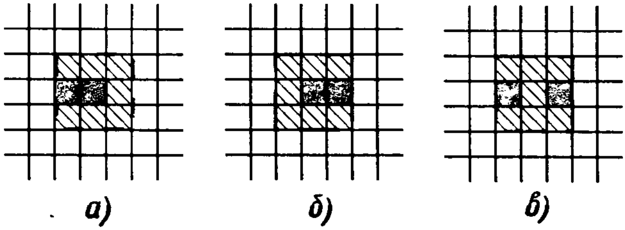


Рис. 109

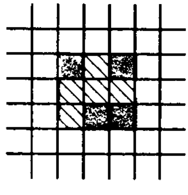
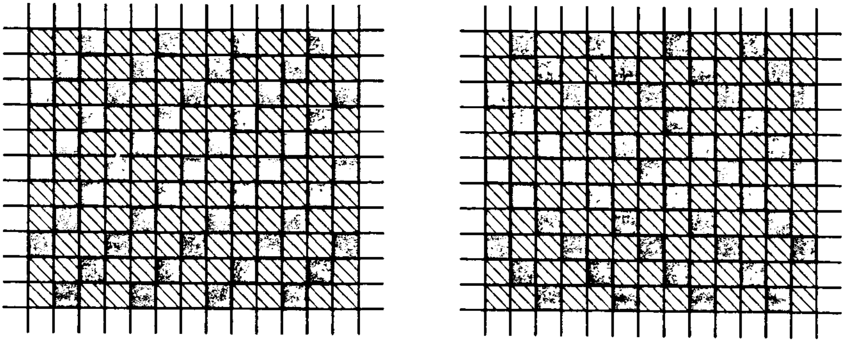


Рис. 110



а) Рис. 111 б)

На рисунке 111 приведен пример раскраски, удовлетворяющей условию задачи. При указанной «диагональной» раскраске диагональные ряды красных клеток перемежаются парами диагональных рядов синих клеток.

Замечание 1. Указанная «диагональная» раскраска плоскости — это *единственная* раскраска плоскости, удовлетворяющая условию задачи (отсюда легко следует, что в любом прямоугольнике размером 9×11 клеток содержится ровно 33 красные клетки: такой прямоугольник можно разбить на 9 квадратов 3×3, каждый из которых при указанной раскраске содержит ровно три красные клетки, и 3 прямоугольника 2×3, содержащих каждый по две красные клетки (рис. 112), поэтому всего в прямоугольнике размером 9×11 клеток содержится $3\times 9+2\times 3=33$ красные клетки).

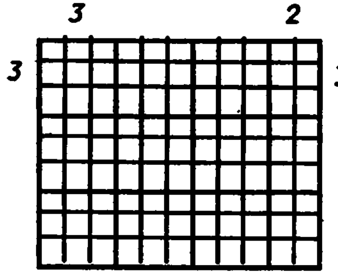
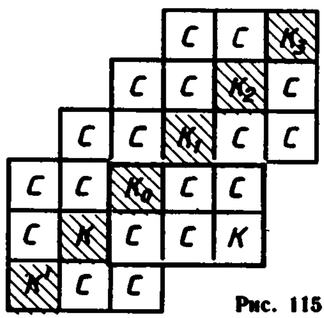


Рис. 112

Выделим любую красную клетку K_0 и рассмотрим квадрат 3×3 с центром в этой клетке. Соседние с K_0 по горизонтали или вертикали клетки не могут быть красными: если, например, как на рисунке 113, красной оказалась клетка K, то в правом и левом прямоугольниках 2×3 больше красных клеток нет,



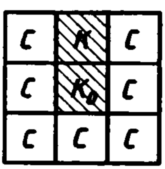


Рис. 113

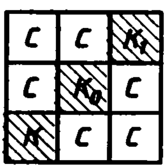


Рис. 114

Рис. 115

поэтому в нижнем прямоугольнике 2×3 содержится всего одна красная клетка — K_0, что противоречит условию. Итак, соседние с K_0 клетки синие.

Далее, в правом прямоугольнике должна быть еще одна красная клетка. Пусть, например, это клетка K_1 (рис. 114). Тогда, рассматривая верхний и левый прямоугольники 2×3, заключаем, что угловая клетка K рассматриваемого квадрата 3×3, противоположная клетке K_1, также является красной и, значит, красные клетки в этом квадрате расположены по диагонали. Рассматривая квадраты 3×3 с центрами в клетках K_1 и K и сдвигая эти квадраты по красной диагонали, получаем, что весь диагональный ряд ...KK_0K_1... состоит из красных клеток, а по два диагональных ряда выше и ниже красного — из синих клеток, как на рисунке 115. Рассматривая теперь прямоугольники 2×3 с углами на красной диагонали (на рисунке один из таких прямоугольников выделен), получаем, что следующие сверху и снизу диагональные ряды снова состоят из красных клеток. Из доказанного выше следует, что по два следующих ряда синие, затем опять идут красные ряды и т. д.

Замечание 2. При подсчете числа красных клеток в прямоугольнике размером 9×11 клеток мы рассматривали фактически не раскраску всей плоскости, а раскраску этого прямоугольника. Отсюда следует, что справедливо также утверждение (доказательство дословно повторяет приведенное выше):

«На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размером 9×11 клеток. Некоторые его клетки окрашены в красный цвет, остальные — в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 клетки содержит ровно две красные клетки. Доказать, что данный прямоугольник содержит ровно 33 красные клетки».

128. а) Пусть A, B и C — три друга, причем A в начале эпидемии имел иммунитет, B заболел в первый день, а C был здоров, но иммунитета не имел. Предположим, что иммунитет у каждого из этих трех коротышек длится ровно один день. Тогда в силу правила поведения коротышек и в соответствии с законом распространения заболевания получаем, что «график заболеваемости» коротышек A, B, C такой, как показано в таблице:

День по порядку от начала эпидемии	1	2	3	4	5	...
A	И	З	Б	И	З	...
B	Б	И	З	Б	И	...
C	З	Б	И	З	Б	...

(Буквы И, З, Б, записанные в клетках таблицы, означают, что коротышка, к которому они относятся, в указанный день:

И — имеет иммунитет;

З — здоров, но не имеет иммунитета;

Б — болен.)

Очевидно, что в описанной ситуации эпидемия будет продолжаться сколь угодно долго.

б) Покажем, что в сделанных предположениях никакой коротышка не может заболеть повторно. Отсюда, очевидно, следует, что эпидемия рано или поздно закончится (общее число коротышек конечно).

Изобразим всех коротышек точками и соединим линиями тех из них, которые знакомы друг с другом. Если от какого-то коротышки A можно перейти к другому коротышке B, пройдя по k линиям, причем нельзя перейти по меньшему числу линий, то будем говорить, что «B удален от A на расстояние k». Разобьем множество всех коротышек на подмножества M_0, M_1, M_2, ... и M', руководствуясь следующими правилами: в M_0 входят все коротышки, заболевшие в первый день эпидемии (и только эти коротышки); в M_1 — все коротышки, удаленные от коротышек из M_0 на расстояние 1 (и только такие коротышки); в M_2 — все те и только те коротышки, которые удалены от коротышек из M_0 на расстояние 2, и т. д. Коротышек, которые вообще не связаны с коротышками из M_0 никакой цепочкой знакомств, включим в множество M' — эти коротышки никогда не заболеют (каждый коротышка из M' имеет друзей только из M'). По построению множества M', M_0, M_1, M_2, ... попарно не пересекаются, общее число коротышек конечно, поэтому число множеств M_k конечно. Из определения расстояния между коротышками следует, что коротышка из множества M_k заболеет ровно на $(k+1)$-й день эпидемии, причем может передать заболевание только коротышкам из множества M_{k+1} (остальные его знакомые принадлежат множеству M_{k-1} и в $(k+1)$-й день имеют иммунитет). Следовательно, в первый день болеют только коротышки из множества M_0, во второй — только коротышки из M_1, в третий — только коротышки из M_2 и т. д.— каждый коротышка болеет, следовательно, не более одного раза. Число множеств M_k конечно, поэтому эпидемия рано или поздно закончится.

129. Ответ. Искомая площадь равна $32(\sqrt{2}-1)$.

Обозначим через $S_{ЧЧ}$ площадь пересечений черных клеток верхней доски с черными клетками нижней, через $S_{ЧБ}$ площадь пересечений черных клеток верхней доски с белыми клетками нижней. Аналогично определяются площади $S_{БЧ}$ и $S_{ББ}$. Тогда

$$S_{ЧЧ}+S_{ЧБ}+S_{БЧ}+S_{ББ}=S,$$

где S — площадь восьмиугольника $ABCDEFGH$. Если мы повернем верхнюю доску вокруг центра на 90°, то ее черные клетки

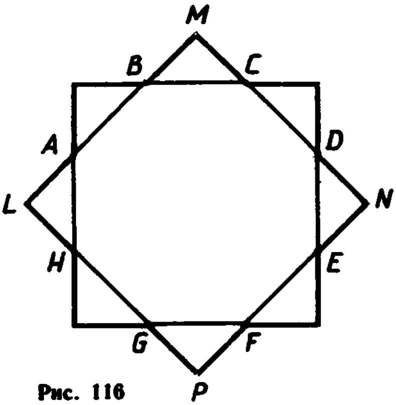


Рис. 116

сменятся белыми и наоборот. Это даст нам равенства (рис. 116)

$$S_{ЧЧ} = S_{БЧ},\ S_{ЧБ} = S_{ББ}.$$

Если мы повернем на 90° обе доски, то черные клетки сменятся белыми на обеих досках и мы будем иметь равенства $S_{ЧБ} = S_{БЧ}$ и $S_{ЧЧ} = S_{ББ}$, откуда получаем $S_{ББ} = S_{БЧ} = S_{ЧБ} = S_{ЧЧ}$ и $S_{ЧЧ} = \frac{1}{4} S$. Остается найти площадь 8-угольника $ABCDEFGH$. Она легко считается и равна $128(\sqrt{2}-1)$. Действительно, если $BM = x$, то

$$8 = LM = LA + AB + BM = 2x + \sqrt{2}\,x,$$

откуда $x = \frac{8}{2+\sqrt{2}} = 4\,(2-\sqrt{2})$. Далее,

$$S = S_{LMNP} - S_{BMC} - S_{DNE} - S_{FPG} - S_{HLA} =$$

$$= 64 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 128\,(\sqrt{2}-1).$$

130. Возможны два случая: M и N лежат на разных дугах, на которые окружность делится точками A и B, и M и N лежат на одной дуге AB.

Рассмотрим сначала первый случай (рис. 117). Для доказательства параллельности AA_1 и BB_1 достаточно показать равенство углов 1 и 2 или же соответственно равных им углов 1′ и 2′ (они опираются на те же дуги). Но углы 1′ и 2′ дополняют угол AMA_1 до равных углов A_1MB_1 и AMB (оба эти угла

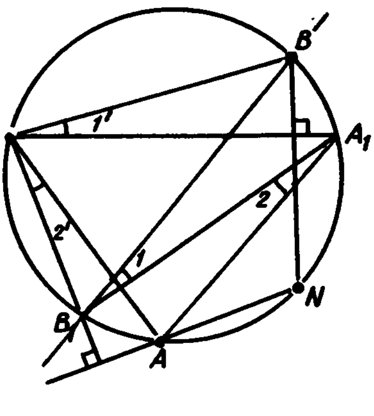


Рис. 117

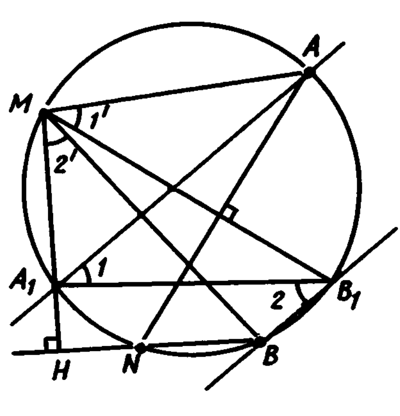


Рис. 118

равны $180° - \angle ANB$), поэтому и сами равны. Требуемое доказано.

Во втором случае (рис. 118) тоже достаточно доказать равенство углов 1 и 2 или же 1′ и 2′, которое также следует из того, что углы 1′ и 2′ дополняют угол BMB_1 до равных углов AMB и A_1MB_1 ($\angle AMB = \angle ANB = 180° - \angle ANH = \angle A_1MB_1$).

131. а) Рассмотрим число

$$N = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 22\cdot 23 = 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 22\cdot 23\cdot 24.$$

Оно обладает свойствами (20) и (22), так что для $k=20$ искомое число N существует. Другой пример:

$$N = 720 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 8\cdot 9\cdot 10.$$

б) Предположим противное:

$$m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Заметим тогда, что $m(m+1) = m^2 + m$ и

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n(n+3))\cdot((n+1)(n+2)) =$$
$$= (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n+1)^2 - 1,$$

откуда получим следующее равенство:

$$m^2 + m + 1 = (n^2+3n+1)^2.$$

Таким образом, m^2+m+1 есть полный квадрат. Однако этого не может быть, так как m^2+m+1 всегда заключено между двумя последовательными квадратами:

$$m^2 < m^2+m+1 < (m+1)^2.$$

132. Рассмотрим числа некоторого столбца нашей таблицы и все числа, лежащие левее его:

$$\begin{array}{cccccc|}
\ldots & a_1 & \ldots & a_{n-1} & \ldots & a \\
\ldots & \underbrace{m \quad \ldots \quad m \quad \ldots \quad m}_{n \text{ раз}} \\
\ldots & . & \ldots & . & \ldots & k \\
\ldots & . & \ldots & . & \ldots & ? \\
\hline
\end{array}$$

Пусть в выбранном столбце стоят числа: в первой строке a, во второй m, в третьей n. Нужно доказать, что тогда в четвертой строке стоит опять m, т. е. что в третьей строке число n встречается ровно m раз, если, как мы условились, не считать чисел, стоящих правее выбранного столбца. Переходя от третьей строки ко второй, мы видим, что число m во второй строке встречается ровно n раз. Это означает, что в первой строке какие-то различные числа $a_1, \ldots, a_{n-1}$, a встречаются не менее чем по m раз каждое, причем число a — ровно m раз, а остальные — меньше чем по m раз. Теперь, наоборот, начнем спускаться по строкам вниз. Каждое из чисел a_i и число a встречаются когда-то в первый, во второй, ..., в m-й раз, поэтому числа 1, 2, ..., $m-1$ появляются во второй строке по крайней мере n раз (m — ровно n раз). Число $m+1$ во второй строке появляется менее чем n раз, ибо в первой строке в $(m+1)$-й раз могут появляться лишь числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Числа $m+2$, $m+3$ и т. д. тем более не могут встречаться во второй строке n и более раз.

Перейдем к третьей строке. Число n может стоять там лишь в связи с n-м появлением какого-то числа, а, как мы видели, в n-й раз появляются числа $1, 2, \ldots, m$, и только они. Итак, число n появляется в третьей строке ровно m раз и требуемое доказано.

133. Докажем, что $\overline{AE}=\overline{BT}$. В силу того что четырехугольники $AMBE$, $BKXM$, $CKXP$, $ACPH$ и $AHBT$ являются параллелограммами, имеем следующие равенства векторов:

$$\overline{AE}=\overline{MB},\ \overline{MB}=\overline{XK},\ \overline{XK}=\overline{PC},\ \overline{PC}=\overline{HA}\ \text{и}\ \overline{HA}=\overline{BT}.$$

Объединив их, получим:

$$\overline{AE}=\overline{MB}=\overline{XK}=\overline{PC}=\overline{HA}=\overline{BT}.$$

134. Ответ. $\{(6, 5)\}$.

Первое решение. Очевидно, что $x>y$. Пусть $x=y+d$, где $d\geqslant 1$. Подставив это выражение для x в исходное уравнение, получим соотношение

$$(3d-1)\,y^2+(3d^2-d)\,y+d^3=61,$$

откуда $d^3\leqslant 61$, или $d\leqslant 3$. Итак, для d мы имеем три возможных значения: $d=1, 2, 3$. Соответственно имеем три квадратных уравнения:

$$\begin{aligned}
&1)\ 2y^2+2y-60=0 &&(d=1),\\
&2)\ 5y^2+10y-53=0 &&(d=2),\\
&3)\ 8y^2+24y-34=0 &&(d=3).
\end{aligned}$$

Целочисленные решения есть только у первого уравнения: $y_1=5$, $y_2=-6$. Только первое из них положительно. Соответствующее ему значение $x=6$.

Второе решение. Ясно, что

$$x^3-y^3=(x-y)\,(x^2+xy+y^2)\geqslant 3xy\,(x-y),$$

откуда $xy\,(3\,(x-y)-1)\leqslant 61$.

Пусть $x-y=1$. Тогда уравнение имеет вид $2y^2+2y+1=61$, или $y^2+y=30$, откуда $y=5$, $x=6$. Если $x-y=2$, то имеем уравнение $5y^2+10y+8=61$, которое в целых числах неразрешимо. Следовательно, $x-y\geqslant 3$ и $3\,(x-y)-1\geqslant 8$, откуда $xy\leqslant 8$. Имеем $x>y\geqslant 1$. Пусть $y=1$. Тогда уравнение примет вид $x^3-x=$ $=62$. Оно не имеет решений, так как $x^3-x=(x-1)\,x\,(x+1)$ делится на 3, а число 62 на 3 не делится. Теперь условию $xy\leqslant 8$ удовлетворяют еще только две пары чисел (3, 2) и (4, 2), однако они не удовлетворяют условию $x-y\geqslant 3$.

135. Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с 8 командами и с 9 не сыграла. Если среди этих девяти последних есть две не сыгравшие между собой, то все доказано. Предположим, что это неверно. Тогда все эти девять команд сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть 36 матчей. Однако в каждом туре они могут сыграть между собой только 4 матча и всего за 8 туров 32 матча. Мы видим, таким образом, что все эти девять команд не могли сыграть между собой, а потому три искомые команды найдутся.

136. а) Рассмотрим точки C_2, B_2, A_2, лежащие соответственно на AB, AC, BC, такие, что (рис. 119)

$$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{CB_2}{B_2A}.$$

Тогда в силу неравенства треугольника $p<P_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2}$. Периметр же последнего шестиугольника, ввиду того что

$$A_1C_2\parallel AC,\ B_1A_2\parallel AB,\ C_1B_2\parallel BC,$$

равен $\frac{3}{4}P$, так как сумма противоположных сторон этого шестиугольника равна $\frac{3}{4}$ параллельной им стороны треугольника.

б) Проведем теперь дополнительно A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 (рис. 120). Из соотношений пропорциональности имеем:

$$A_1B_2\parallel AB,\ C_1A_2\parallel AC,\ B_1C_2\parallel BC,$$

$$\frac{A_1B_2}{AB}=\frac{C_1A_2}{AC}=\frac{B_1C_2}{BC}=\frac{3}{4}.$$

В силу неравенств треугольника

$$A_1C_1+C_1B_2>A_1B_2,$$
$$C_1B_1+B_1A_2>C_1A_2,$$
$$A_1B_1+A_1C_2>B_1C_2.$$

Сложив эти неравенства, мы получим $p+\frac{1}{4}P>\frac{3}{4}P$, или, что эквивалентно, $p>\frac{1}{2}P$, что и требовалось доказать.

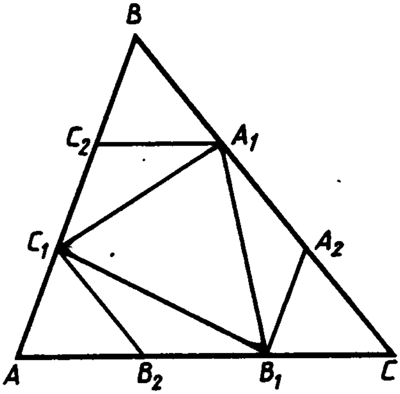


Рис. 119

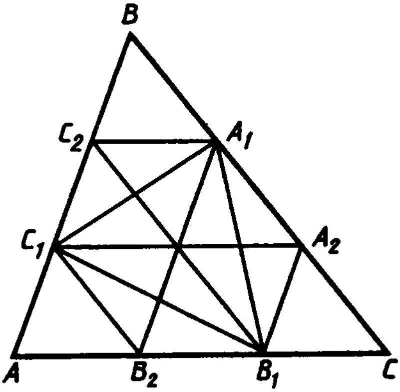


Рис. 120

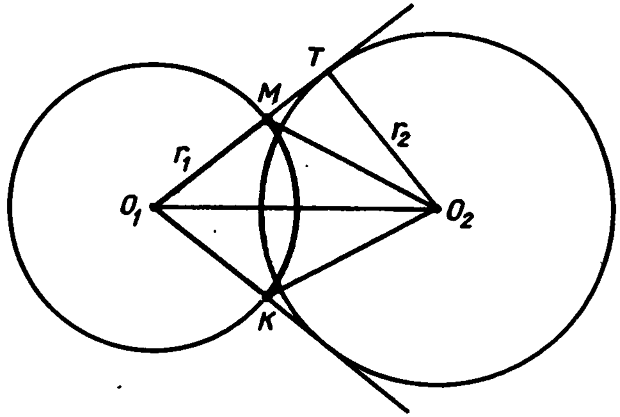


Рис. 121

137. Прямая O_1O_2 является осью симметрии угла MO_1K и обеих окружностей (рис. 121), поэтому четырехугольник MO_1KO_2 этой прямой разбивается на два равных треугольника и $S_{MO_1KO_2}=$ $=2S_{O_1MO_2}$. В треугольнике O_1MO_2 длина основания O_1M равна r_1, а высота O_2T (T — точка касания прямой O_1M и окружности с центром в точке O_2) равна r_2. Поэтому $S_{O_1MO_2}=\frac{1}{2}r_1r_2$ и $S_{MO_1KO_2}=$ $=r_1r_2$.

138. Ответ. 3 числа.

Выпишем несколько первых членов последовательностей (a_n) и (b_n):

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots;$$
$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ \ldots.$$

Мы видим, что числа 1, 2, 3 встречаются в обеих последовательностях. Докажем теперь, что все члены второй последовательности, начиная с b_4, в первой последовательности не встречаются и, более того, заключены строго между соседними членами (a_n):

при $n \geqslant 4$

$$a_{n-1}<b_n<a_n. \qquad (1)$$

Для этого заметим, что при $n=4$ и $n=5$ неравенства (1) выполнятся и если (1) справедливо для значений n, равных k и $k+1$, то (1) будет выполняться и для $n=k+2$: складывая неравенства

$$a_{k-1}<b_k<a_k \text{ и } a_k<b_{k+1}<a_{k+1},$$

получим нужное неравенство

$$a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}.$$

Проведенные рассуждения показывают, что неравенство (1) выполняется при всех $n \geqslant 4$, что и нужно было доказать.

139. Доказательство проведем рассуждением от противного. Именно допустим, что существуют наборы показателей (k_1, ...,

k_n), удовлетворяющие условию задачи, но такие, что $n<m$. Среди этих наборов выберем все наборы наименьшей длины, т. е. с наименьшим значением n, а среди выбранных рассмотрим набор $(k_1, ..., k_n)$ с наименьшим значением суммы $k_1+...+k_n$.

Среди чисел k_i в этом наборе нет одинаковых: если бы, например, $k_1=k_2$, то из равенства $2^{k_1}+2^{k_2}=2^{k_1+1}$ следовало бы, что набор $(k_1+1, k_3, ..., k_n)$ меньшей длины удовлетворяет условию задачи в противоречие с выбором набора $(k_1, ..., k_n)$.

Далее, все числа k_i не превосходят $m-1$: если бы, например, $k_1 \geqslant m$, то из равенства

$$2^{k_1}-2^{k_1-m}=2^{k_1-m}\cdot(2^m-1)$$

следовало бы, что набор $(k_1-m, k_2, ..., k_n)$ с меньшей суммой k_i удовлетворяет условию задачи опять-таки в противоречие с выбором набора $(k_1, ..., k_n)$.

Итак, все k_i различны и не превосходят $m-1$, поэтому

$$2^{k_1}+...+2^{k_n}<1+2+...+2^{m-1}=2^m-1,$$

что противоречит допущению того, что $2^{k_1}+...+2^{k_n}$ делится на 2^m-1. Тем самым утверждение задачи доказано.

140. Ради краткости назовем числа, не превосходящие $\frac{1}{6}$, *хорошими*. Среди восьми неотрицательных чисел с суммой 1 найдутся по крайней мере три хороших, в противном случае сумма всех чисел будет больше 1. Далее, среди хороших чисел найдутся два, соответствующие вершинам куба — концам одной из диагоналей граней куба. В самом деле, диагонали граней куба вместе с вершинами куба определяют два тетраэдра — вершины этих тетраэдров выделены на рисунке 122. Из трех хороших вершин хотя бы две являются вершинами одного тетраэдра.

Теперь ясна стратегия первого игрока: первым ходом он выбирает грань, одна из диагоналей которой соединяет хорошие вершины. Тогда при любом выборе второго игрока выбранные грани будут пересекаться по ребру, которому принадлежит одна из хороших вершин. Первому остается из двух возможных граней выбрать грань, содержащую хорошую точку. Требуемое доказано.

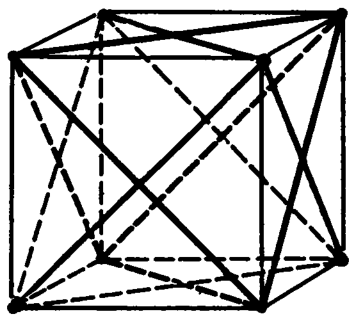


Рис. 122

141. Пусть $a_1, a_2, ..., a_{1982}$ — числа от 1 до 1982, расположенные в каком-то порядке. Обозначим через a_i наибольшее среди первых 99 чисел. Если $a_i>a_{100}$, то при просмотре пар слева направо на некотором шаге a_i будет меняться местами с a_{100}. Значит, все числа, стоящие левее a_{100}, меньше a_{100}. Аналогичное рассуждение показывает, что наименьшее среди чисел

a_{101}, a_{102}, ..., a_{1982} больше a_{100}. Итак, мы доказали, что среди чисел от 1 до 1982 есть ровно 99 чисел, меньших a_{100}. Следовательно, $a_{100}=100$.

142. Спроектируем все острова на берег пристани. Так как общий периметр островов равен 8 м, общая длина проекций будет меньше 4 м. Следовательно, от пристани до ближайшего просвета между островами нужно плыть меньше 2 м. Доплыв до просвета, далее плывем перпендикулярно берегам, не встречая препятствий, и достигаем противоположного берега, проплыв в общей сложности менее 3 м. Итак, Знайка прав.

143. Проведем две параллельные прямые. Пусть AB и CD — отрезки, высекаемые из этих прямых графиком данной функции (рис. 123). Через середину отрезков проведем прямую l. Она будет параллельна оси Oy. Действительно, если уравнение прямой AB есть $y=kx+b$, то абсциссы x_1 и x_2 точек ее пересечения с графиком являются корнями уравнения $x^2=kx+b$. Поэтому по теореме Виета $x_1+x_2=k$, полусумма абсцисс точек пересечения (абсцисса середины отрезка AB) равна $\frac{k}{2}$. Аналогично абсцисса середины отрезка CD равна $\frac{k}{2}$. Следовательно, l параллельна оси Oy.

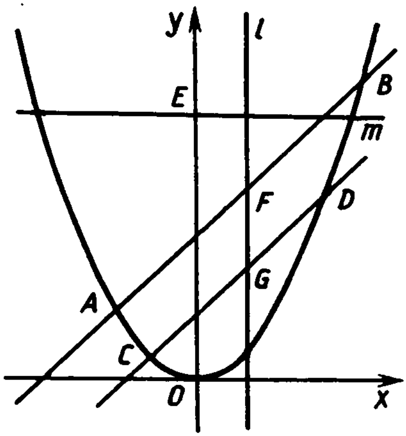


Рис. 123

Для того чтобы построить ось Oy, проведем прямую m перпендикулярно l и через середину E отрезка, высеченного на ней графиком, проведем прямую параллельно прямой l. Эта прямая и будет осью Oy. Точка, в которой она пересечет график, будет началом координат O. Перпендикуляр к прямой OE, проведенный в точке O, будет лежать на оси Ox. Чтобы найти единицу длины, построим биссектрису угла xOy — она пересечет график в точке с координатами $(1;\ 1)$.

144. Докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Если клетки с записанными на них числами a и b соединены таким образом, что каждая клетка пути граничит с предыдущей по общей их стороне, то каждое заключенное между a и b целое число x встретится в одной из клеток этого пути. Действительно, в противном случае получается противоречие с тем, что числа в соседних клетках отличаются не больше чем на 1. Кроме того, если p — число клеток пути, включая начальную и конечную, то выполнено неравенство $|a-b|\leqslant p-1$.

а) Пусть M и m — наибольшее и наименьшее числа в таблице. Поскольку любые две клетки таблицы можно соединить путем не более чем из $2n-1$ клеток, то из предыдущего неравенства следует, что $|M-m| \leqslant 2n-2$. Это значит, что в таблице встречается не более $2n-1$ различных чисел. Следовательно, хотя бы одно число записано в таблице не менее $\left[\frac{n^2}{2n-1}\right]$ раз. Но $\frac{n^2}{2n-1} > \frac{n}{2}$, откуда и следует утверждение а).

б) Пусть M_k и m_k — наибольшее и наименьшее числа в k-м столбце. Если найдется такое число x, что $m_k \leqslant x \leqslant M_k$ сразу при всех k от 1 до n, то по доказанному утверждению число x встретится в каждом столбце, т. е. записано не менее n раз. Если такого числа x нет, то для некоторых номеров k и p мы имеем:

$$M_k \geqslant m_k > M_p \geqslant m_p,$$

т. е. все числа k-го столбца больше всех чисел p-го столбца. Применяя то же утверждение к числу y, такому, что $m_k \geqslant y \geqslant M_p$; рассматривая горизонтальные пути между k-м и p-м столбцами, получаем, что y встретится в каждой строке, т. е. записано, не менее n раз. Утверждение б) доказано.

Замечание. Существуют таблицы, удовлетворяющие условию задачи, в которых только одно число записано n раз. Как их составить, видно из указанного ниже примера для $n=4$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

145. Обозначим некоторые узлы сетки так, как показано на рисунке 124. Тогда сетка распадается в объединение 8 «клюшек»

$$AR_1S_1,\ R_1R_2S_2,\ R_2R_3S_3,\ R_3BC,\ AP_1Q_1,\ P_1P_2Q_2,\ P_2P_3Q_3,\ P_3DC,$$

поэтому ответ в пункте а) утвердительный. Указанный способ разбиения далеко не единственный.

В пункте б) ответ отрицательный. Заметим сначала, что суммарная длина наших ломаных равна суммарной длине всех линий сетки, поэтому ломаные не могут давать в объединении всю сетку и в то же время пересекаться по отрезку прямой. Значит, в каждой из точек

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,$$
$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3$$

обязательно должен располагаться конец хотя бы одной ломаной. Так как концов всего 12, то ломаных должно быть не меньше шести.

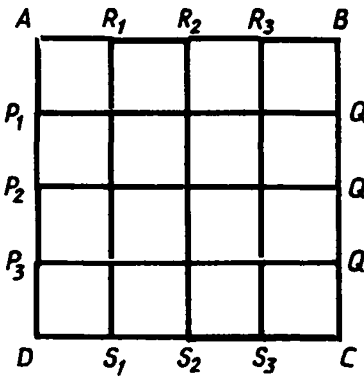


Рис. 124

146. Если на доске первоначально были записаны числа (2; 2; 2) или (3; 3; 3), то в результате наших преобразований отрицательные числа появиться не могут. Пусть мы получили из одной из исходных троек в процессе преобразований тройку чисел (a; b; c), где $0<a<b<c$. Тогда очевидно, что $c=a+b-1$ и что эта тройка получилась из тройки чисел (a; b; x), где верно одно из соотношений

$$x=a+b-1,$$
$$b=a+x-1,$$
$$a=b+x-1.$$

В первом случае $x=c$, т. е. совершено тождественное преобразование. Во втором случае $x=b-(a-1)=c-2(a-1)$ и в третьем $x=a-b+1$. Третий случай отпадает, так как x должен быть положительным числом, и мы заключаем, что наша тройка (a; b; c) получилась из тройки (a; b; $c-2(a-1)$). Таким образом, мы можем восстановить в обратном порядке весь ход преобразований:

$$(17;\ 1967;\ 1983)\leftarrow(17;\ 1967;\ 1951)\leftarrow(17;\ 1935;\ 1951)\leftarrow$$
$$\leftarrow\ldots\leftarrow(17;\ 15;\ 31)\leftarrow(17;\ 15;\ 3)\leftarrow(13;\ 15;\ 3)\leftarrow\ldots\leftarrow$$
$$\leftarrow(5;\ 7;\ 3)\leftarrow(5;\ 3;\ 3).$$

Тройка (5; 3; 3) может быть получена из тройки (3; 3; 3), но, как легко проверить, никак не получается из (2; 2; 2). Поэтому в пункте а) ответ отрицательный, а в пункте б) положительный.

Пункт а) допускает также следующее простое решение с помощью инвариантов. Очевидно, что любая тройка, полученная из тройки (2; 2; 2), содержит два четных числа, а в тройке (17; 1967; 1983) все числа нечетные.

147. Пусть O — точка внутри криволинейного треугольника XYZ (рис. 125). Каждый из углов XOA, AOZ, ZOC, COY, YOB, BOX не превосходит 90°, при этом хотя бы один из них, например угол XOA, не меньше 60°. В частности, $\sin\angle XOA\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме синусов

$$AO=AX\cdot\frac{\sin\angle AXO}{\sin\angle XOA}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}R,$$

откуда и следует утверждение задачи.

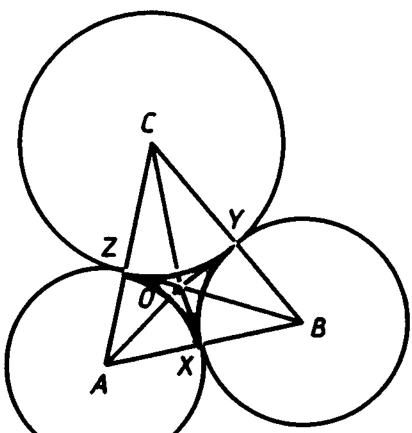


Рис. 125

148. Предположим, что различные натуральные числа a, b, c, d заключены между n^2 и $(n+1)^2$ и $ab=cd$. Пусть a — наименьшее из чисел a, b, c, d.

Первое решение. Обозначим через u наибольший общий делитель чисел a и c. Положим $v=\frac{a}{u}$, $p=\frac{c}{u}$. Поскольку $pd=vb$ делится на v и p с v взаимно просты, то d делится на v и, следовательно, ud делится на a. Положим $q=\frac{ud}{a}$. Тогда $a=$ $=uv$, $b=pq$, $c=up$, $d=vq$. Из $a<c$ и $a<d$ следует $v<p$ и $u<q$. Тогда $p\geqslant v+1$ и $q\geqslant u+1$. Из $uv=a\geqslant n^2$ следует, что $u+v\geqslant 2\sqrt{uv}\geqslant 2n$. Имеем, таким образом,

$$b=pq\geqslant (v+1)(u+1)=$$
$$=uv+(u+v)+1\geqslant n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

откуда $uv=n^2$ и $u+v=2n$, и, следовательно, $u=v=n$, $p=q=$ $=n+1$. Мы получили, что $c=d$, а это есть противоречие.

Второе решение. Имеем $\frac{b}{d}=\frac{c}{a}>1$. Пусть $\frac{r}{s}=\frac{b}{d}=\frac{c}{a}$, где $\frac{r}{s}$ — несократимая дробь. Значит, d и a делятся на s, поэтому $d-a$ также делится на s, и, в частности, имеем $d\geqslant a+s$. Следовательно, $d\geqslant n^2+s$. С другой стороны, $\frac{r}{s}>1$. Поэтому $r\geqslant s+1$ и $\frac{r}{s}\geqslant 1+\frac{1}{s}$. Значит,

$$1+\frac{1}{s}\leqslant\frac{r}{s}=\frac{b}{d}\leqslant\frac{(n+1)^2}{n^2+s}.$$

Умножив обе части этого неравенства на $s(n^2+1)$, получаем неравенство $n^2-2ns+s^2\leqslant 0$, что возможно только при $s=n$ и $\frac{b}{d}=\frac{c}{a}=\frac{n+1}{n}$.

Если $a>n^2$, то $a\geqslant n^2+n$ и $d\geqslant n^2+2n$, откуда

$$b=\frac{n+1}{n}d\geqslant (n+1)(n+2)>(n+1)^2.$$

Значит, $a=n^2$ и $d=n^2+n$. Поэтому

$$c=\frac{n+1}{n}a=(n+1)\,n=n^2+n.$$

Мы получили $c=d$, а это — противоречие.

149. Воспользуемся следующим соображением: если для некоторых целых чисел a и b число a^n делится на b^n, то a делится на b. Имеем $(m^k)^n=(m^n)^k$, и это число делится на $(n^m)^k$. В свою очередь $(n^m)^k=(n^k)^m$, и это число делится на $(k^n)^m=(k^m)^n$. Получили, что $(m^k)^n$ делится на $(k^m)^n$, откуда заключаем, что m^k делится на k^m.

1						1				
	1						1			
		1						1		
			1						1	
				1						1

Рис. 126

1				1				1		
	1				1				1	
		1				1				1
			1				1			
1				1				1		

Рис. 127

1						1				
	0						0			
		1						1		
			0						0	
				1						1

Рис. 128

1				1				1		
	0				0				0	
		1				1				1
			0				0			
1				1				1		

Рис. 129

150. Ответ. Нет.

Всего k-буквенных слов может быть не более 2^k. Поэтому если бы не было дополнительного условия о том, что никакое слово не является началом другого слова, то такой словарь мог бы иметь место. Посмотрим теперь, можно ли составить какой-нибудь словарь с соблюдением этого дополнительного условия.

Оказывается, что это невозможно. Действительно, всего имеется $2^7=128$ семибуквенных комбинаций. Из них $3\cdot 2^3=24$ начинаются с 3 четырехбуквенных слов нашего словаря, $10\cdot 2^2=$ $=40$ начинаются с 10 пятибуквенных слов и $30\cdot 2^1=60$ с 30 шестибуквенных слов. При этом в силу условия задачи все эти семибуквенные комбинации различны. Поэтому семибуквенных слов в словаре может быть не более $128-24-60=4$, а у нас их по условию 5.

151. Ответ в обоих случаях положительный.

а) Рассмотрим две расстановки чисел, приведенные на рисунках 126 и 127. Здесь по диагоналям, отстоящим друг от друга на расстоянии 5 (рис. 126) и 3 (рис. 127) клетки, расположены единицы, а в остальных местах — нули. В каждом прямоугольнике 4×6 клеток сумма чисел равна соответственно 4 (рис. 126) и 6 (рис. 127). Если мы теперь наложим эти расстановки одна на другую и сложим числа, попавшие в одну и ту же клетку, то сумма чисел во всех прямоугольниках 4×6 клеток получившейся расстановки будет равна 10.

б) Возьмем теперь расстановки чисел, приведенные на рисунках 128 и 129. Здесь на тех же диагоналях, что и на рисунках 126 и 127, расположены единицы, чередующиеся с нулями. Сумма чисел в прямоугольниках 4×6 клеток равна 2 (рис. 128) и 3 (рис. 129).

Если теперь эти расстановки положить друг на друга и из чисел второй расстановки вычесть попавшие в ту же клетку числа первой расстановки, то в итоговой расстановке сумма чисел в любом прямоугольнике 4×6 клеток будет равна 1.

152. Введем обозначения, как показано на рисунке 130. Так как площади треугольников $A_1B_1C_1$ и AA_1D равны, то и площади треугольников AB_1C_1 и ADC_1 также равны. Высоты этих треугольников вследствие этого равны, и, следовательно, $B_1D \parallel C_1A$. Аналогично $C_1E \parallel A_1B$ и $A_1F \parallel B_1C$.

Первое решение. Треугольники AA_1C_1 и DA_1B_1 подобны. То же можно утверждать и о треугольниках ABC_1 и DBB_1. Из подобия получаем:

$$\frac{AA_1}{A_1B_1}=\frac{AC_1}{DB_1}=\frac{BC_1}{BB_1}=1+\frac{B_1C_1}{BB_1}.$$

Обозначим $\frac{AA_1}{A_1B_1}=a$, $\frac{BB_1}{B_1C_1}=b$, $\frac{CC_1}{C_1A_1}=c$. Тогда полученное нами

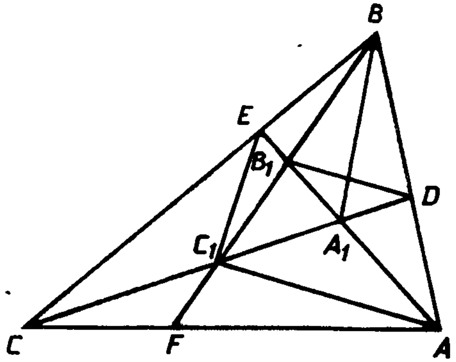


Рис. 130

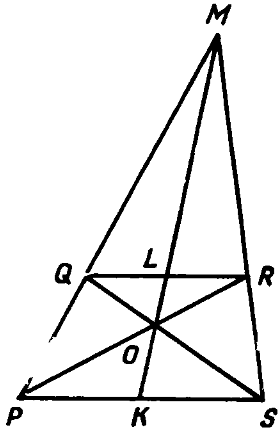


Рис. 131

соотношение можно записать так:

$$a=1+\frac{1}{b}.$$

Аналогично получим соотношения

$$b=1+\frac{1}{c},\ c=1+\frac{1}{a},$$

откуда $a^2-a-1=0$ и $a=b=c=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Из соображений подобия имеем:

$$\frac{C_1A}{A_1D}=\frac{AA_1}{A_1B_1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

откуда в свою очередь

$$\frac{A_1D+A_1C_1}{CC_1}=\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}A_1C_1}{CC_1}=1,$$

т. е. $DC_1=C_1C$ и BC_1 — медиана треугольника BCD. Теперь ввиду того, что $S_{B_1BE}=S_{A_1B_1C_1}$, имеем $S_{A_1DBB_1}=S_{B_1ECC_1}$. Это доказывает равновеликость всех трех четырехугольников.

Второе решение основано на следующей лемме:

Лемма. В трапеции линия, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Доказательство. В самом деле (рис. 131), из подобия треугольников PKO и RLO, SKO и QLO имеем:

$$\frac{PK}{RL}=\frac{OK}{OL}=\frac{KS}{QL}.$$

С другой стороны, пары треугольников PMK и QML, SMK и RML также подобны, откуда

$$\frac{PK}{QL}=\frac{KM}{LM}=\frac{KS}{RL}.$$

Сравнивая два полученных равенства, находим $PK=KS$ и $QL=LR$. Лемма доказана.

Эта лемма вбирает в себя значительную часть решения, которое можно продолжить следующим образом. Так как $EC_1 \| BA_1$ (рис. 130) и продолжение отрезка BA_1 в силу леммы делит C_1A пополам, то $EA_1=A_1A$. Отсюда следует, что площади треугольников CEA_1 и CA_1A равны, а следовательно, равны и площади четырехугольников CEB_1C_1 и AA_1C_1F. Первая часть задачи решена.

Проведем теперь подсчет площадей четырехугольников. Заметим, что $\frac{BD}{DA}=\frac{BB_1}{B_1C_1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, и поэтому площадь треугольника BDC в $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ раз больше площади ADC. Обозначим площадь одного четырехугольника через x, получим уравнение

$$(x+2)\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=2x+2,$$

откуда $x=\sqrt{5}+1$.

153. а) Если

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=0 \text{ и } a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=n,$$

то при n нечетном все множители a_i нечетны и первое равенство неверно; при n четном одно из a_i четно и из первого равенства следует, что еще одно из a_i четно, так что n делится на 4.

б) Пусть $n=4k$ и k — число нечетное. Тогда имеем:

$$n=2\cdot(-2k)\cdot 1^{3k-2}\cdot(-1)^k.$$

Нетрудно проверить, что это разложение числа n в произведение n множителей удовлетворяет условию задачи. При четном k искомое разложение будет следующим:

$$n=(-2)\cdot(-2k)\cdot 1^{3k}\cdot(-1)^{k-2}.$$

154. Преобразовав неравенство к виду

$$\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)\cdot\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\geqslant\sqrt{ab}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}),$$

заметим, что первый сомножитель левой части неравенства не меньше, чем первый сомножитель правой (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим). Второй сомножитель левой части также не меньше второго сомножителя правой, так как

$$\left(a+b+\frac{1}{2}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

Это доказывает нужное неравенство.

155. В силу очевидных равенств

$$\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B_2}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2B_2},$$
$$\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B_3}=\overline{A_1A_3}+\overline{A_3B_3}$$

устанавливаем справедливость соотношений

$$-\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}=-\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2},$$
$$-\overline{A_1B_1}+\overline{A_3B_3}=-\overline{A_1A_3}+\overline{B_1B_3}.$$

Поэтому

$$\overline{C_1C_2}=-\overline{OC_1}+\overline{OC_2}=-\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}=-\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2},$$
$$\overline{C_1C_3}=-\overline{OC_1}+\overline{OC_3}=-\overline{A_1B_1}+\overline{A_3B_3}=-\overline{A_1A_3}+\overline{B_1B_3}.$$

По условию векторы $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{B_1B_3}$ получаются из $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ поворотом на 60°, но тогда и вектор $\overline{C_1C_3}$ получается тем же поворотом из $\overline{C_1C_2}$. Это и значит, что треугольник $C_1C_2C_3$ равносторонний.

156. Докажем, что прямоугольник размером $m\times n$, удовлетворяющий условию задачи, можно склеить, если числа m и n имеют одинаковую четность, и нельзя склеить в противном случае. На рисунках цвета обозначим цифрами 1, 2, 3, 4.

Если m и n нечетны, то мы можем склеить прямоугольник — строчку размером $1\times n$ (рис. 132), а из таких строчек тем же способом склеить искомый прямоугольник размером $m\times n$.

Если же m и n четны, то из прямоугольников размерами

$$(m-1)\times(n-1),\ 1\times(n-1),\ (m-1)\times 1,\ 1\times 1,$$

изображенных на рисунке 133, склеиваем искомый прямоугольник размером $m\times n$, как показано на рисунке 134.

Пусть теперь m и n разной четности. Предположим, что нам удалось склеить прямоугольник размером $m\times n$, стороны

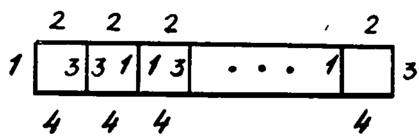


Рис. 132

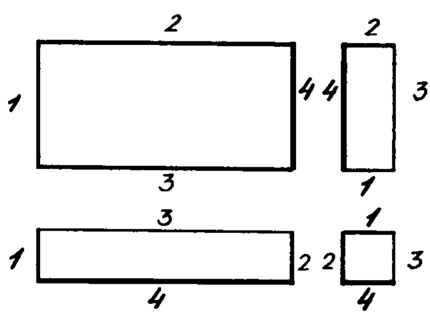


Рис. 133

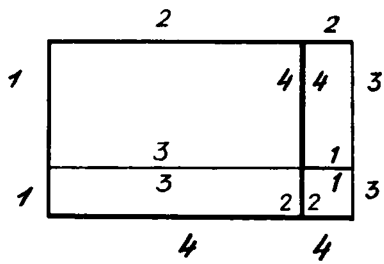


Рис. 134

которого окрашены в различные цвета. Рассмотрим одну из нечетных сторон прямоугольника, пусть она, например, имеет цвет 1. Подсчитаем общее число сторон цвета 1 у использованных плиточек. На границе прямоугольника их число нечетно, а внутри четно, так как к каждой стороне цвета 1 одной плиточки примыкает сторона цвета 1 другой плиточки. Следовательно, общее число сторон цвета 1 нечетно. Однако это число равно количеству использованных плиточек, всего их mn штук — четное число. Получили противоречие.

157. Ответ. Да, верно.

В начальный момент трехчлен $f(x)=x^2+10x+20$ в точке $x=-1$ имел значение $f(-1)=11$. С каждым изменением многочлена его значение в точке $x=-1$ изменялось на единицу в ту или другую сторону. В конечный момент для многочлена $g(x)=x^2+20x+10$ оно оказалось равным -9. Следовательно, в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен $h(x)=x^2+ax+b$, где a и b — целые, для которого $h(-1)=0$. Этот многочлен имеет целые корни.

158. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — многоугольник, по контуру которого движется центр монеты, и O — центр окружности, вписанной в этот многоугольник. Часть следа, находящаяся вне многоугольника (рис. 135), состоит из прямоугольников, общая площадь которых равна pr, и секторов круга радиуса r при каждой из вершин. Обозначив через α_i величину угла сектора при вершине A_i, получим $\angle A_i+\alpha_i=\pi$, где $\angle A_i$ — величина угла многоугольника при вершине A_i. Поэтому

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n\pi-(\angle A_1+\angle A_2+\dots+\angle A_n)=$$
$$=n\pi-(n-2)\pi=2\pi,$$

и, следовательно, сумма площадей всех секторов равна площади круга радиуса r, т. е. πr^2. Границей внутренней части следа монеты, т. е. той части следа, которая находится внутри многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, являются многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ (внешняя граница) и многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$, гомотетичный исходному с центром O и коэффициентом $\frac{R-r}{R}$ (внутренняя граница). По-

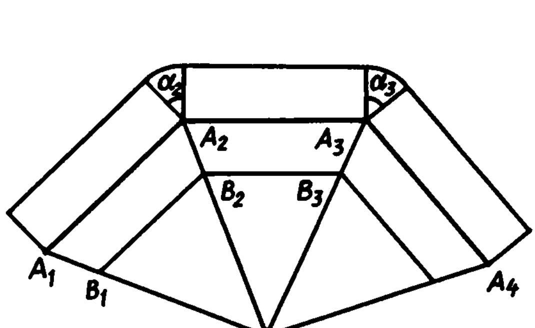


Рис. 135

этому площадь внутренней части следа равна

$$S_{A_1A_2\ldots A_n}-S_{B_1B_2\ldots B_n}=\frac{pR}{2}-\frac{pR}{2}\left(\frac{R-r}{R}\right)^2=pr-\frac{pr^2}{2R}.$$

Следовательно, площадь всего следа равна

$$\pi r^2+2pr-\frac{pr^2}{2R}.$$

159. Пусть самая тяжелая из гирь имеет вес k. Покажем, что гирь единичного веса не меньше чем k. Действительно, пусть гирь единичного веса ровно s штук. Тогда их общий вес равен s. У нас есть еще одна гиря веса k и $n-s$ гирь, общий вес которых не меньше чем $2(n-s)$. Поэтому $2n\geqslant k+2(n-s)+s$, откуда $s\geqslant k$.

После того как на весы положили первую гирю веса k, разность между весами грузов на чашках стала равна k. Покажем, что и в дальнейшем вес более тяжелой чашки отличается от веса более легкой чашки не более чем на k. Действительно, на каждом следующем шаге мы ставим гирю на более легкую чашку. Если она при этом остается снова более легкой, то разность весов только уменьшится. Если же легкая чашка становится более тяжелой, то новая разность между весами не превосходит веса вновь положенной гири, а он не превосходит k.

Допустим теперь, что мы положили на весы все гири веса, большего чем 1, и у нас остались только гири единичного веса. Так как их количество, т. е. s, больше или равно разности весов на чашках, то, положив некоторое количество гирь единичного веса, мы получим на весах равновесие. В этот момент общий вес гирь на весах есть четное число, поэтому число оставшихся единичных гирь также четно. В дальнейшем мы должны класть их по очереди то на одну, то на другую чашку и ввиду четности их числа получим в конце концов равновесие.

160. Пусть N — абсолютно простое число, имеющее в своей записи более трех знаков. Тогда, как легко видеть, в его записи не может встретиться ни одна четная цифра, а также цифра 5. Если бы такая цифра была, то, переставив ее на последнее место, мы получили бы составное число. Следовательно, в записи числа N могут встретиться только цифры 1, 3, 7, 9. Предположим, что все они в записи числа N присутствуют. Переместив их на последние позиции, мы получим абсолютно простое число

$$M_1=\overline{a_1a_2\ldots a_m1379}=M+1379,$$

где $M=\overline{a_1a_2\ldots a_m0000}$. Но тогда и числа

$$M_2=M+3179,\quad M_3=M+9137,$$
$$M_4=M+7913,\quad M_5=M+1397,$$
$$M_6=M+3197,\quad M_7=M+7139$$

также абсолютно просты и, в частности, просты. Но этого не может быть, так как числа 1379, 3179, 9137, 7913, 1397, 3197, 7139 имеют различные остатки при делении на 7, и поэтому среди чисел M_1, M_2, ..., M_7 одно обязательно делится на 7.

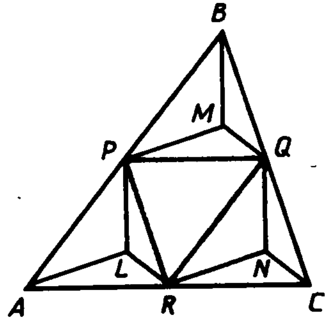


Рис. 136

161. Пусть ABC — исходный треугольник и P, Q, R — середины сторон AB, BC, AC соответственно. Треугольники APR, PBQ, RQC подобны треугольнику ABC, являются остроугольными, и поэтому точки L, M, N пересечения высот этих треугольников лежат внутри их (рис. 136). Площадь s шестиугольника $LPMQNR$ равна:

$$s = S_{PQR} + S_{PMQ} + S_{QNR} + S_{RLP} =$$
$$= \frac{1}{4} S + S_{PMQ} + S_{QNR} + S_{RLP},$$

где S — площадь треугольника ABC. Так как $\triangle APR = \triangle PBQ = \triangle RQC$, то $\triangle PMQ = \triangle ALR$ и $\triangle QNR = \triangle PLA$. Поэтому

$$S_{PMQ} + S_{QNR} + S_{RLP} = S_{ALR} + S_{PLA} + S_{RLP} = S_{APR} = \frac{1}{4} S,$$

откуда $s = \frac{1}{4} S + \frac{1}{4} S = \frac{1}{2} S$.

162. Покажем, что для любого натурального числа m существует такое натуральное число n, записываемое единицами и нулями, что сумма его цифр, обозначаемая далее через $S(n)$, равна m, а сумма цифр числа n^2, т. е. $S(n^2)$, равна m^2.

Доказательство проведем индукцией по m. Для $m = 1$ искомое число равно 1. Пусть для некоторого натурального числа m имеется натуральное число n из единиц и нулей, такое, что $S(n) = m$ и $S(n^2) = m^2$. Если n имеет k знаков, то положим $n_1 = 10^{k+2} n + 1$. Тогда

$$n_1^2 = 10^{2(k+2)} n^2 + 2n \cdot 10^{k+2} + 1.$$

Число $10^{2(k+2)} n^2$ оканчивается не менее чем $2k + 4$ нулями, а число $2n \cdot 10^{k+2}$ не более чем $(2k+3)$-значно, так как $2n$ не более чем $(k+1)$-значно. Поэтому

$$S(n_1^2) = S(n^2) + 2S(n) + 1 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

что и требовалось доказать для обоснования индуктивного перехода.

163. Ясно, что ни одна дамка не может располагаться на краю доски. Кроме того, в двух квадратах доски, обведенных на рисунке 137, все пять черных клеток не могут быть заняты (центральная дамка не бьется). Таким образом, занятыми могут оказаться не более 16 клеток. В то же время 16 дамок с соблюдением условий задачи расставить можно (рис. 137).

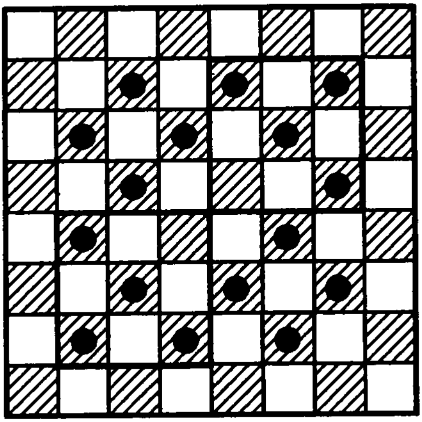


Рис. 137

164. Ответ. n красок.

Для доказательства *необходимости* n красок рассмотрим вершину A. Пусть из нее выходят стороны AB и AC. Рассмотрим эти стороны, все диагонали, выходящие из A, и отрезок BC. Этих отрезков n, и каждые два из них имеют общую точку. Следовательно, они должны быть окрашены разными красками. Для доказательства *достаточности* n красок докажем прежде всего, что каждый из рассматриваемых в задаче отрезков параллелен одному из n отрезков, рассмотренных при доказательстве необходимости.

Опишем около n-угольника окружность ω. Возьмем один из рассматриваемых в задаче отрезков MN. Если $MN \parallel BC$, то все в порядке. Если $MN \nparallel BC$, то проведем через точку A прямую $t \parallel MN$; она пересечет ω в другой точке K (рис. 138); t не может быть касательной, так как в таком случае было бы $t \parallel MN \parallel BC$.

Так как A и M — вершины n-угольника, то дуга AmM содержит целое число равных дуг, на которые ω разбивается вершинами n-угольника. Так как $MN \parallel t$, то и дуга NpK содержит такое же число этих маленьких дуг. Но это означает, что K — вершина n-угольника; следовательно, отрезок MN параллелен одному из $n-1$ рассматриваемых отрезков, выходящих из точки A.

Итак, имеется n семейств параллельных отрезков. Покрасим отрезки каждого семейства одной и той же краской, всего будет использовано n красок.

165. Назовем *первым* цветом цвет основания коробки и *вторым* — цвет крышки коробки. Шесть граней куба разбиваются на три пары противоположных граней, которые не окрашены ни первым, ни вторым цветом. Цвета этих граней назовем *третьим* и *четвертым* и расположим куб так, чтобы грани третьего и четвертого цветов стали нижними и верхними гранями куба. Дальше будем поворачивать куб, не изменяя плоскости основания. Несовпадение цветов на нижних и верхних основаниях

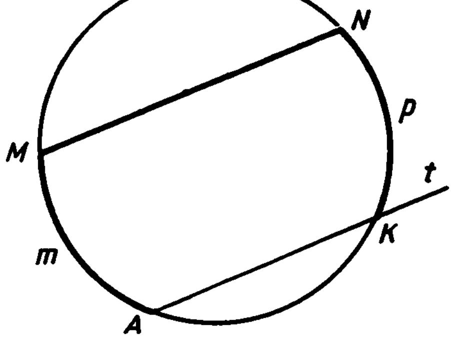


Рис. 138

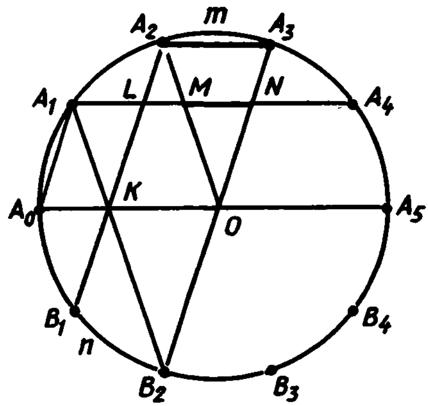


Рис. 139

куба и коробки обеспечено. Боковые грани куба окрашены в цвета 1, 2, 5, 6; боковые грани коробки — в цвета 3, 4, 5, 6. Совпадающими могут оказаться только цвета 5 и 6. Имеется четыре расположения куба, оставляющие нижнее основание куба нижним основанием. Совпадение граней *пятого* цвета куба и коробки возможно только в одном из этих случаев и *шестого* цвета тоже только в одном случае. Следовательно, остается расположение (точнее, по крайней мере два расположения), при котором пятые и шестые цвета не совпадают. Несовпадение граней других цветов было обеспечено раньше.

166. Отметим на окружности также точки B_1, B_2, B_3, B_4, симметричные точкам A_1, A_2, A_3, A_4 относительно диаметра A_0A_5. Получится правильный десятиугольник $A_0A_1A_2A_3A_4A_5B_4B_3B_2B_1$, вписанный в окружность (рис. 139). Так как дуги A_2mA_3 и B_1nB_2 равны, то $A_2B_1 \| A_3B_2$. Аналогично доказывается, что $A_2B_1 \| A_1A_0$, $OA_2 \| B_2A_1$, $A_0A_5 \| A_1A_4 \| A_2A_3$. Так как пары точек A_1, B_1; A_2, B_2 симметричны относительно диаметра A_0A_5, то отрезки A_2B_1 и A_1B_2 пересекаются в точке K на этом диаметре.

Из доказанного следует, что KA_2A_3O и A_0A_1LK — параллелограммы. Поэтому длины OK и A_3A_2, LA_1 и KA_0 равны. Остается доказать, что длины LA_1 и NM равны. Так как A_1MOK и $LNOK$ — параллелограммы, то длины A_1M и KO, KO и LN равны. Следовательно, длины A_1M и LN равны. Вычитая из них длину LM, получаем требуемое.

167. Пусть (x, y, z, t) — произвольная четверка чисел и (x_n, y_n, z_n, t_n) — четверка, получающаяся из исходной за n нажатий кнопки.

Заметим, что во всех четверках чисел, кроме исходной, сумма всех чисел четверки равна нулю. Пусть (a, b, c, d) — произвольная четверка с нулевой суммой. Тогда

$$0=(a+b+c+d)^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Рассмотрим теперь четверку (a_1, b_1, c_1, d_1), получающуюся из нее нажатием кнопки. Для нее

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=$$
$$=2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2ab-2bc-2cd-2ad=$$
$$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)+2ac+2bd,$$

и так как $a^2+c^2+2ac\geqslant 0$ и $b^2+d^2+2bd\geqslant 0$, то

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

В нашей исходной четверке (x, y, z, t) не все числа равны, поэтому $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2>0$. В силу доказанного выше

$$x_n^2+y_n^2+z_n^2+t_n^2\geqslant 2^{n-1}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2).$$

Отсюда следует наличие такой четверки с достаточно большим номером n, в которой одно из чисел по модулю больше чем $3\cdot 1985$. Если это число отрицательно, то в этой же четверке найдется и положительное число, большее 1985, так как сумма всех чисел в ней равна нулю.

168. Рассмотрим какую-либо пару a_k, b_k. Заметим, что оба числа a_k и b_k не могут быть одновременно больше n, иначе было бы $n<a_k<\ldots<a_n$, $b_1>b_2>\ldots>b_k>n$, и мы получаем $n+1$ различных чисел b_1, b_2, ..., b_k, a_k, a_{k+1}, ..., a_n, больших n и не превосходящих $2n$, а таких чисел суть только n. Точно так же замечаем, что a_k и b_k не могут быть одновременно меньше или равными n. Итак, одно из двух чисел a_k, b_k (обозначим его через M_k) больше n, другое (обозначим его через m_k) не превосходит n. Числа M_1, ..., M_n все различны, причем каждое из них больше n и не превосходит $2n$. Поэтому M_1, ..., M_n — это все числа $n+1$, $n+2$, ..., $n+n=2n$, только расположенные, быть может, в другом порядке. Точно так же m_1, ..., m_n — это все числа 1, 2, ..., n, расположенные, быть может, в другом порядке. Ясно, что $M_k-m_k=|a_k-b_k|$. Теперь имеем:

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=$$
$$=(M_1-m_1)+(M_2-m_2)+\ldots+(M_n-m_n)=$$
$$=M_1+M_2+\ldots+M_n-(m_1+m_2+\ldots+m_n)=$$
$$=(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)-(1+2+\ldots+n)=n^2.$$

169. Пусть x_1, x_2 — натуральные числа, являющиеся корнями данного уравнения

$$x^2+ax+(1-b)=0.$$

По теореме Виета имеют место равенства

$$x_1x_2=1-b,$$
$$x_1+x_2=-a.$$

Отсюда находим, что числа a, b являются целыми:

$$a=-x_1-x_2,\ b=1-x_1x_2-$$

и что число

$$a^2+b^2=(-x_1-x_2)^2+(1-x_1x_2)^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+$$
$$+(1-2x_1x_2+x_1^2x_2^2)=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$$

является составным.

Заметим, что в условии задачи достаточно было бы потребовать, чтобы корни уравнения являлись целыми числами.

170. Пусть стороны квадрата $ABCD$ окрашены в красный цвет, а стороны квадрата $A_1B_1C_1D_1$ — в синий. Рассмотрим восемь прямоугольных треугольников Δ_1, Δ_2, Δ_3, ..., Δ_8, изображенных на рисунке 140, с гипотенузами c_1, c_2, c_3, ..., c_8 и с катетами a_1, a_2, a_3, ..., a_8 и b_1, b_2, b_3, ..., b_8 соответственно. Ясно, что эти треугольники подобны друг другу: все они прямоугольные и имеют равные острые углы. Один из этих углов обозначим через α (рис. 140). Ясно, что $a_i=c_i \sin\alpha$ для $i=1, 2, 3, ..., 8$.

Квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны. Поэтому

$$AB+BC+CD+DA=A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1A_1,$$

т. е.

$$(b_3+c_2+a_1)+(b_1+c_8+a_7)+(b_7+c_6+a_5)+(b_5+c_4+a_3)=$$
$$=(a_2+c_1+b_8)+(a_8+c_7+b_6)+(a_6+c_5+b_4)+(a_4+c_3+b_2).$$

Выразим здесь a_i, b_i через c_i, $i=1, 2, ..., 8$. Получим равенство

$$(c_3\cos\alpha+c_2+c_1\sin\alpha)+(c_1\cos\alpha+c_8+c_7\sin\alpha)+$$
$$+(c_7\cos\alpha+c_6+c_5\sin\alpha)+(c_5\cos\alpha+c_4+c_3\sin\alpha)=$$

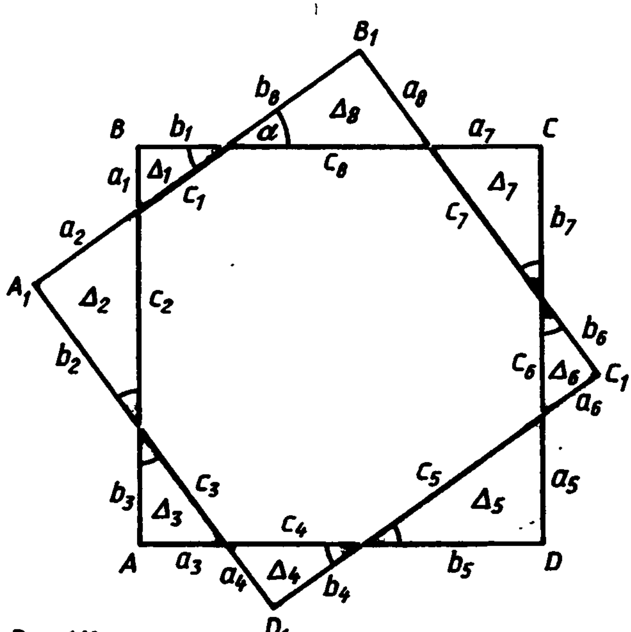


Рис. 140

$$= (c_2 \sin\alpha + c_1 + c_8\cos\alpha) + (c_8\sin\alpha + c_7 + c_6\cos\alpha) +$$
$$+ (c_6\sin\alpha + c_5 + c_4\cos\alpha) + (c_4\sin\alpha + c_3 + c_2\cos\alpha).$$

Это равенство можно, очевидно, переписать в виде

$$(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)(c_1 + c_3 + c_5 + c_7) =$$
$$= (\cos\alpha + \sin\alpha - 1)(c_2 + c_4 + c_6 + c_8).$$

Так как α — острый угол, то $\cos\alpha + \sin\alpha > 1$ и, следовательно, в полученном равенстве на множитель $\cos\alpha + \sin\alpha - 1$ можно сократить. Мы получим требуемое равенство

$$c_1 + c_3 + c_5 + c_7 = c_2 + c_4 + c_6 + c_8.$$

Из проведенного доказательства видно, что в условии задачи квадраты можно заменить равными прямоугольниками: утверждение остается в силе.

171. Первое решение. Покажем сначала, что площадь кругового сегмента, стягиваемого хордой BM, которая видна из центра круга O под углом 2α (рис. 141), равна произведению BM^2 на (безразмерную) величину, определяемую углом α. Действительно, площадь этого сегмента равна, очевидно, разности площадей кругового сектора и треугольника OBM:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{OBM}.$$

Имеем:

$$S_{\text{сект}} = \alpha \cdot OB^2 = \frac{\alpha}{4\sin^2\alpha} BM^2,$$

$$S_{OBM} = \frac{1}{2} OK \cdot BM = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}\alpha \cdot BM^2.$$

Отсюда следует утверждение:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right) \cdot BM^2.$$

Из полученной формулы видно, что при заданном угле α площадь сектора будет тем меньше, чем меньше длина BM.

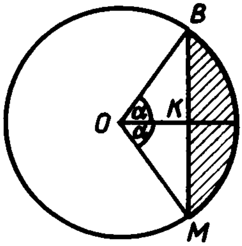


Рис. 141

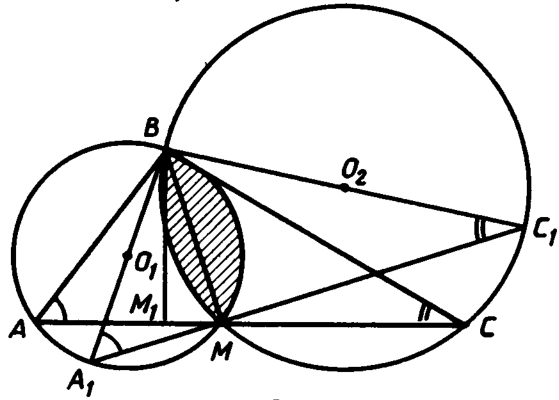


Рис. 142

Обратимся теперь к задаче. Пусть O_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABM, O_2 — центр окружности, описанной около треугольника BCM. Интересующая нас площадь, заштрихованная на рисунке 142, равна сумме площадей двух сегментов, ограничиваемых окружностями и общей хордой BM. Площадь каждого такого сегмента равна произведению BM^2 на величину, зависящую только от соответствующего центрального угла. Покажем, что сумма площадей этих сегментов (площадь «луночки», заштрихованной на рисунке) будет тем меньше, чем меньше длина BM. Действительно, по теореме о соотношении между центральными и вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу, справедливы равенства $\angle BO_1M=2\angle BAM$, $\angle BO_2M=2\angle BCM$ (так как треугольник ABC остроугольный, то точки A, O_1 лежат по одну сторону от BM, а точки C, O_2 — по другую). Углы $\angle BAM$ и $\angle BCM$ заданы. Следовательно, коэффициент при BM^2 в выражении площади «луночки» определяется только углами треугольника ABC, значит, искомая площадь минимальна в случае, когда длина хорды BM минимальна, т. е. когда BM — высота.

Второе решение. Проведем диаметры BA_1 и BC_1 (рис. 142). Углы $\angle BMA_1$ и $\angle BMC_1$ прямые, так как опираются на диаметры. Следовательно, отрезок BM перпендикулярен отрезкам A_1M и MC_1, т. е. точки A_1, M, C_1 лежат на одной прямой, а отрезок BM есть высота треугольника A_1BC_1.

Ясно, что треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC, ибо справедливы равенства $\angle BAM=\angle BA_1M$ и $\angle BC_1M=$ $=\angle BCM$, поскольку равны углы, вписанные в окружность, опирающиеся на одну и ту же дугу, если их вершины лежат по одну сторону от хорды, стягивающей эту дугу (последнее выполнено в рассматриваемом случае). Коэффициент подобия треугольников A_1BC_1 и ABC обозначим через $k=\frac{A_1B}{AB}$. Если $A_1\neq A$, то $k>1$, так как диаметр A_1B больше хорды AB. При $k>1$ отрезок BM не является высотой треугольника.

Покажем, что при $k>1$, т. е. при $A\neq A_1$, площадь «луночки» с хордой BM, заштрихованной на рисунке 142, больше площади «луночки» с хордой BM_1, где BM_1 — высота треугольника ABC. Для этого осуществим преобразование подобия с коэффициентом $\frac{1}{k}<1$, при котором точки A_1, B, C_1 переходят соответственно в точки A, B, C. Точка M при этом преобразовании перейдет в основание M_1 высоты BM_1 треугольника ABC, окружности, описанные около треугольников A_1BM и MBC_1, перейдут в окружности, описанные около треугольников ABM_1 и M_1BC, а «луночка» с хордой BM (заштрихованная на рисунке) перейдет в «луночку» с хордой BM_1, являющейся высотой треугольника ABC. Радиусы окружностей уменьшатся в k раз, а площадь «луночки» уменьшится в k^2 раз. Это значит, что если $A\neq A_1$, то площадь «луночки» с хордой BM_1 меньше площади «луночки» с хордой BM. Мы вновь видим, что площадь «луночки» минимальна, когда $M = M_1$, т. е. когда BM — высота треугольника ABM.

172. Ответ. а) Можно. Пример см. на рисунке 143; б) нельзя.

Покажем, что если построение возможно, то либо число n, либо число $n-2$ является квадратом целого числа. Допустим, что требованиям короля удалось удовлетворить. Осуществим окраску городов на карте следующим образом. Какой-то из городов назовем столицей и покрасим его в белый цвет. Затем рассмотрим все города, из которых можно проехать в столицу по одной дороге. Города, удаленные от столицы на четное расстояние, покрасим в белый цвет, а удаленные на нечетное расстояние — в черный цвет. Далее будем повторять эту процедуру. На каждом следующем шаге будем рассматривать новые города. Для каждого нового города рассмотрим лишь один из уже окрашенных городов, соединенных с ним дорогой. Если из нового города дорога четной длины приводит в белый город, то новый город красим белой краской, а если длина этой дороги нечетна, то черной краской. Если же дорога четной длины приводит в черный город, то новый город красим черной краской, а если длина этой дороги нечетна, то белой.

На каждом шаге добавляется столько же дорог, сколько городов, поэтому число дорог всегда на 1 меньше числа городов.

Выполняем описанные шаги до тех пор, пока не будут окрашены все города. Когда исчерпаются все города, будут нарисованы и все дороги, т. е. будет нарисована и карта, причем кратчайший путь между двумя городами будет иметь четную длину тогда и только тогда, когда города будут окрашены одинаково.

Обозначим число черных городов через x, а число белых городов через y. Тогда $x+y=n$, а число пар разноцветных городов равно xy. Следовательно, среди чисел 1, 2, 3, ..., $\frac{n(n-1)}{2}$ есть ровно xy нечетных чисел.

Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — четное число, то $xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, т. е. $4xy = n(n-1)$, или

$$n = n^2 - 4xy = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2.$$

Следовательно, число n является полным квадратом.

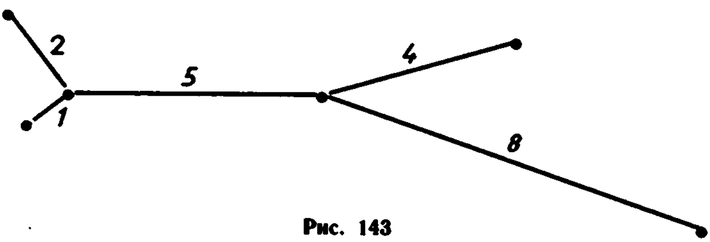


Рис. 143

Если же $\frac{n(n-1)}{2}$ — нечетное число, то $xy=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$, откуда $n^2-n+2=4xy$, или

$$n-2=(x+y)^2-4xy=(x-y)^2,$$

т. е. число $n-2$ является полным квадратом.

Итак, либо число n, либо число $n-2$ должно быть полным квадратом, что и требовалось доказать.

Ни число $n=1986$, ни число $n-2=1984$ не являются квадратами. Поэтому при $n=1986$ требованиям короля удовлетворить нельзя.

173. Ответ. При любом $n \geqslant 1$ решениями являются тройки $x=3$, $y=2$, $z=1$ и $x=6$, $y=8$, $z=4$. При $n=2$ имеется еще одно решение: $x=8$, $y=3$, $z=7$.

Требуется найти цифры x, y, z, удовлетворяющие равенству

$$(\underbrace{\overline{xxx...x}}_{n})^2+\underbrace{\overline{yyy...y}}_{n}=\underbrace{\overline{zzz...z}}_{2n}.$$

Введем число $d=\underbrace{111...1}_{n}$. Ясно, что $d=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n}=\frac{1}{9}(10^n-1)$ и $10^n+1=9d+2$. Имеем:

$$\underbrace{\overline{xxx...x}}_{n}=x\cdot d,\quad \underbrace{\overline{yyy...y}}_{n}=y\cdot d,$$

$$\underbrace{\overline{zzz...z}}_{2n}=z\cdot\underbrace{111...1}_{2n}=\frac{z}{9}(10^{2n}-1)=z\cdot\frac{10^n-1}{9}\cdot(10^n+1)=zd(d+1).$$

Данное уравнение можно записать в виде

$$(xd)^2+yd=zd(9d+2),$$

откуда

$$(x^2-9z)\,d=2z-y.$$

Мы видим, что число $2z-y$ обязано делиться на d.

Если $n \geqslant 3$, то $d \geqslant 111$, а число $|2z-y| \leqslant 17$. Поэтому число $2z-y$ будет делиться на d только тогда, когда $2z-y=0$. Но в этом случае $x^2=9z$, т. е. число z является квадратом и может принимать только значения 1, 4, 9.

При $z=1$ находим $x=3$, $y=2$.

При $z=4$ находим $x=6$, $y=8$.

При $z=9$ получаем $y=18$, т. е. y не будет цифрой. Нетрудно проверить, что равенства

$$(\underbrace{333...3}_{n})^2+\underbrace{222...2}_{n}=\underbrace{111...1}_{2n},$$

$$(\underbrace{666...6}_{n})^2+\underbrace{888...8}_{n}=\underbrace{444...4}_{2n}$$

выполняются при любом $n \geqslant 1$. (Заметим, что второе из этих равенств получается из первого умножением на 4.)

Если $n=2$, то $d=11$ и число $2z-y$ будет делиться на $d=11$ в следующих трех случаях:

$$2z-y=0,\ 2z-y=11 \text{ и } 2z-y=-11.$$

В первом случае ($2z-y=0$) мы получаем те же результаты, что и выше.

Во втором случае ($2z-y=11$) число y нечетное. Перебирая нечетные $y=1$, 3, 5, 7, 9, мы найдем единственное решение $x=8$, $y=3$, $z=7$.

В третьем случае ($2z-y=-11$) легко проверить, что решений нет.

Итак, в случае $n=2$ появляется еще одно решение:

$$88^2+33=7777.$$

174. Пусть $A_1A_2...A_{12}$ — данный 12-угольник, B и C — данные точки. Обозначим

$$S_B=BA_1+BA_2+...+BA_{12},$$
$$S_C=CA_1+CA_2+...+CA_{12}.$$

Нам нужно доказать неравенство $|S_B-S_C|\leqslant 1$ м.

В силу неравенства треугольника для каждого $i=1, 2, ..., 12$ справедлива оценка

$$|BA_i-CA_i|\leqslant|BC|=0{,}1 \text{ м}.$$

Используя эти оценки, мы можем получить неравенство

$$|S_B-S_C|=|BA_1-CA_1+BA_2-CA_2+...+BA_{12}-CA_{12}|\leqslant$$
$$\leqslant|BA_1-CA_1|+|BA_2-CA_2|+...+|BA_{12}-CA_{12}|\leqslant$$
$$\leqslant|BC|+|BC|+...+|BC|=12\cdot 0{,}1 \text{ м}=1{,}2 \text{ м},$$

более грубое, чем требуется. Для доказательства требуемого неравенства нужны более тонкие рассуждения.

Предположим, что нумерация вершин 12-угольника осуществлена так, что точка C лежит внутри или на границе треугольника

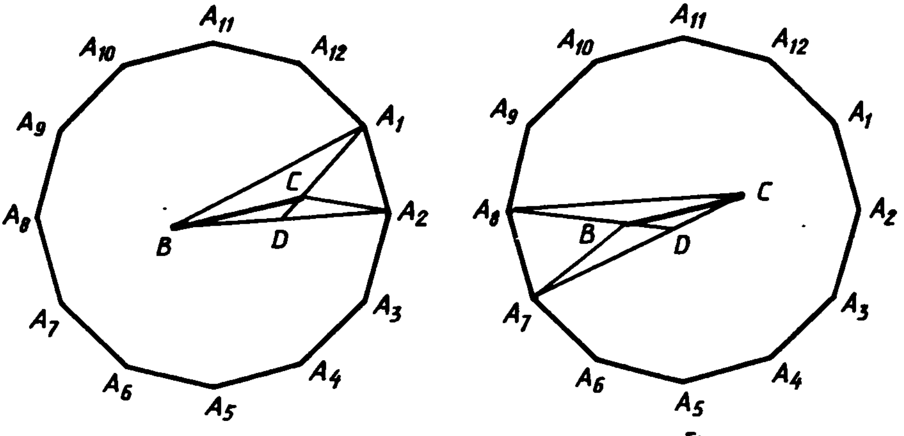


Рис. 144

BA_1A_2 (рис. 144, *а*). Дважды использовав неравенство треугольника в треугольниках CDA_2 и A_1BD, мы можем оценить

$$CA_1+CA_2 \leqslant CA_1+(CD+DA_2)=(CA_1+CD)+DA_2=$$
$$=A_1D+DA_2 \leqslant (A_1B+BD)+DA_2=A_1B+(BD+DA_2)=$$
$$=BA_1+BA_2.$$

Таким образом, $CA_1+CA_2-BA_1-BA_2 \leqslant 0$. Используя это неравенство и неравенства

$$|CA_i-BA_i| \leqslant |BC|=0{,}1 \text{ м}$$

для $i=3, 4, \ldots, 12$, оцениваем

$$S_C-S_B=(CA_1+CA_2-BA_1-BA_2)+(CA_3-BA_3)+\ldots+$$
$$+(CA_{12}-BA_{12}) \leqslant (CA_3-BA_3)+\ldots+(CA_{12}-BA_{12}) \leqslant$$
$$\leqslant |CA_3-BA_3|+\ldots+|CA_{12}-BA_{12}| \leqslant 10 \cdot 0{,}1 \text{ м}=1 \text{ м}.$$

Меняя ролями точки B и C (рис. 144, *б*), мы аналогично получаем неравенство $S_B-S_C \leqslant 1$ м.

Из неравенств $S_C-S_B \leqslant 1$ м и $S_B-S_C \leqslant 1$ м и следует требуемое неравенство

$$|S_B-S_C| \leqslant 1 \text{ м}.$$

175. Ответ. Можно. Достаточно, например, налить во все стаканы, кроме одного, по 100 г молока, а в оставшийся — 200 г.

Докажем, что в этом случае мальчик не сможет за конечное число переливаний уравнять количества молока в стаканах. Общее количество молока в стаканах равно $100 \cdot 29+200=$ $=3100$ г. При разделе поровну в каждом стакане должно получиться по $\frac{3100}{30}=\frac{310}{3}$ г молока. Легко увидеть, что после переливания с номером n количество молока в каждом стакане, умноженное на 2^n, будет выражаться целым числом граммов (достаточно заметить, что после однократного переливания из стакана, содержащего a граммов молока, в стакан, содержащий b граммов, в каждом стакане получится по $\frac{a+b}{2}$ граммов молока).

Если мальчик сможет разлить молоко поровну с помощью n переливаний, то число $2^n \cdot \frac{310}{3}$ должно быть целым. Но это невозможно ни при каком n.

176. а) Повернем прямоугольник $ABCD$ относительно его центра на 180°. Диагональ перейдет в себя, а раскраска, очевидно, изменится на противоположную. Следовательно, сумма длин белых отрезков равна сумме длин черных отрезков и искомое отношение равно единице.

б) Первое решение. Расположим данный прямоугольник $ABCD$ на координатной плоскости так, чтобы точка A совпала с началом координат, точка B имела координаты (0; 101), точка C координаты (99; 101), точка D координаты (99; 0). Так как числа 99 и 101 взаимно просты, то диагональ AC не проходит через узлы решетки, отличные от A и C. Следовательно, двигаясь по диагонали от точки A к точке C, мы будем последовательно пересекать вертикальные и горизонтальные линии сетки, причем после каждого пересечения такой линии происходит перемена цвета. Спроектируем диагональ AC на ось Ox. Проекцией диагонали AC будет отрезок AD, проекциями пересечений AC с горизонтальными линиями сетки являются точки вида $(\delta m;\ 0)$, $m=0, 1, 2, \ldots, 101$, где $\delta=\frac{99}{101}$, а с вертикальными линиями — точки вида $(n;\ 0)$, $n=0, 1, 2, \ldots, 99$.

Из неравенств

$$m-1<\delta m<m \text{ при } 1\leqslant m\leqslant 50$$

и

$$m-2<\delta m<m-1 \text{ при } 51\leqslant m\leqslant 100$$

следует, что точки $(\delta m;\ 0)$ и $(m;\ 0)$ для $m=1, 2, \ldots, 49$ будут чередоваться, затем встретится точка $(\delta\cdot 50;\ 0)$, и снова поочередно пойдут точки вида $(\delta m;\ 0)$ и $(m-1;\ 0)$ для $m=51, 52, \ldots, 100$.

Таким образом, мы имеем расположение проекций белых и черных отрезков, изображенное на рисунке 145. Сумма длин проекций белых отрезков равна

$$\delta+(2\delta-1)+\ldots+(50\delta-49)+(50-51\delta)+(51-52\delta)+\ldots+$$
$$+(99-100\delta)=\delta(1+2+\ldots+50-51-52-\ldots-100)+$$
$$+(-1-2-\ldots-49+50+\ldots+99)=-2500\delta+2500=\frac{5000}{101}.$$

Сумма длин проекций черных отрезков равна

$$99-\frac{5000}{101}=\frac{4999}{101}.$$

Искомое отношение суммы длин белых и черных отрезков равно, очевидно, отношению суммы длин проекций этих отрезков на ось Ox. Следовательно, оно равно

$$\frac{5000}{101}:\frac{4999}{101}=\frac{5000}{4999}.$$

Второе решение. Рассмотрим единичный квадрат $A_1B_1C_1D_1$, стороны которого параллельны сторонам прямоугольника $ABCD$, и перенесем на него параллельным переносом все единичные квадраты из $ABCD$, через которые проходит диагональ AC. Диагональ AC превратится при этом в разрывную линию, начинающуюся в A_1 и оканчивающуюся в C_1. Если мы

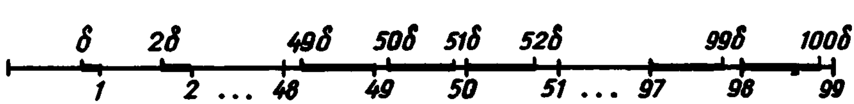


Рис. 145

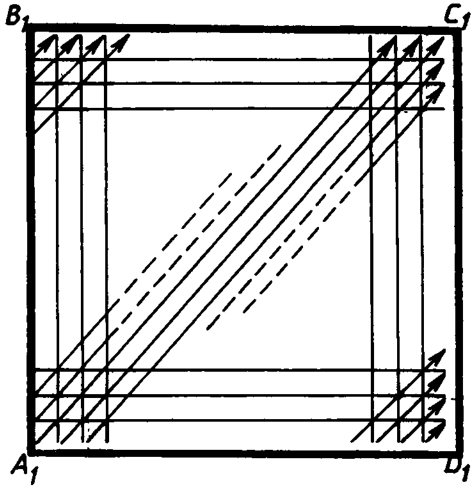


Рис. 146

разобьем $A_1B_1C_1D_1$ на прямоугольники размером $\frac{1}{101}\times\frac{1}{99}$, то эта линия будет проходить по диагоналям прямоугольников. Используя взаимную простоту чисел 99 и 101, легко понять, что разрывная линия A_1C_1 не может пройти дважды по одному пути. Общая длина разрывной линии A_1C_1 равна длине AC, поэтому она пройдет через все прямоугольники в $A_1B_1C_1D_1$. Раскрасим прямоугольники квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 146) в шахматном порядке и в те же цвета, что и квадраты $ABCD$. Ввиду нечетности чисел 99 и 101 разрывная линия A_1C_1 в местах разрыва меняет цвет, и поэтому ее раскраска будет полностью соответствовать раскраске диагонали AC. Подсчитаем число белых и черных прямоугольников в квадрате $ABCD$. Всего прямоугольников 99×101, причем белых на один больше, чем черных. Поэтому белых $\frac{1}{2}(99\cdot101+1)=5000$ и черных $\frac{1}{2}(99\cdot101-1)=4999$. Отношение длин равно $\frac{5000}{4999}$.

177. Каждый спортсмен сыграл ровно 9 партий, т. е.

$$x_1+y_1=\ldots=x_{10}+y_{10}=9.$$

При этом число выигрышей, конечно же, равняется числу проигрышей, и, следовательно,

$$x_1+\ldots+x_{10}=y_1+\ldots+y_{10}.$$

Вследствие этих равенств получаем:

$$(x_1^2+\ldots+x_{10}^2)-(y_1^2+\ldots+y_{10}^2)=(x_1^2-y_1^2)+\ldots+(x_{10}^2-y_{10}^2)=$$
$$=9((x_1-y_1)+\ldots+(x_{10}-y_{10}))=$$
$$=9((x_1+\ldots+x_{10})-(y_1+\ldots+y_{10}))=0.$$

178. Ответ. Массы гирь — 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Расположим массы гирь в неубывающем порядке:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_6.$$

Каждую массу, которую можно уравновесить с помощью гирь набора, представим в виде

$$\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_6 x_6 \quad (\varepsilon_i = 0{,}1),$$

где хотя бы одно из ε_i отлично от нуля. Таких сумм ровно $2^6 - 1 = 63$, и по условию среди них содержатся 63 различных натуральных числа. Следовательно, все эти суммы различны. В частности, массы гирь также различны.

Рассмотрим две самые большие суммы:

$$s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_6, \quad s_2 = x_2 + \ldots + x_6.$$

Так как они являются последовательными натуральными числами, то $x_1 = s_1 - s_2 = 1$. Тогда очевидно, что $x_2 = 2$. Допустим, что числа $x_1, \ldots, x_k$ уже найдены и равны $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$. Тогда суммы

$$\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k,$$

где $\varepsilon_i = 0{,}1$ и не все ε_i равны нулю, представляют натуральные числа $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$. Число x_{k+1} не может находиться среди этих чисел и потому равно 2^k. Поэтому $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$, $x_6 = 32$.

179. Проведем в данном семиугольнике диагонали A_1A_3, A_1A_4 и продолжим стороны A_1A_2, A_3A_4 до их пересечения в точке B (рис. 147). Пусть $\alpha = 180° : 7$. Тогда $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_3A_1A_4 = \alpha$ и $\angle A_1A_4A_3 = 2\alpha$. Поэтому $\angle B = 180° - \angle A_2A_1A_4 - \angle A_3A_4A_1 = 7\alpha - 2\alpha - 2\alpha = 3\alpha$ и $\angle A_1A_3B = 180° - \angle A_2A_1A_3 - \angle B = 7\alpha - \alpha - 3\alpha = 3\alpha$. Следовательно, треугольник BA_1A_3 равнобедренный и $A_1B = A_1A_3$. Пусть $x = A_1A_2$, $y = A_1A_3$ и $z = A_1A_4$. Тогда $A_2B = y - x$. Далее, дуги A_1A_2 и A_3A_4 равны. Поэтому $A_2A_3 \parallel A_1A_4$ и треугольник A_2BA_3 подобен треугольнику A_1BA_4. В силу подобия

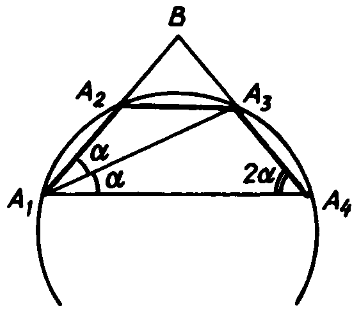


Рис. 147

$$\frac{A_2B}{A_1B} = \frac{A_2A_3}{A_1A_4}, \text{ или } \frac{y-x}{y} = \frac{x}{z},$$

откуда $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, что и требовалось доказать.

180. а) Ответ. 12 выстрелов.

Поскольку в квадрате 7×7 корабль может стоять в одной из 12 позиций, указанных на рисунке 148, то менее чем 12 выстрелами обойтись нельзя. С другой стороны, указанные на рисунке 149 12 выстрелов гарантируют попадание в любой линейный четырехклеточный корабль, где бы он ни стоял.

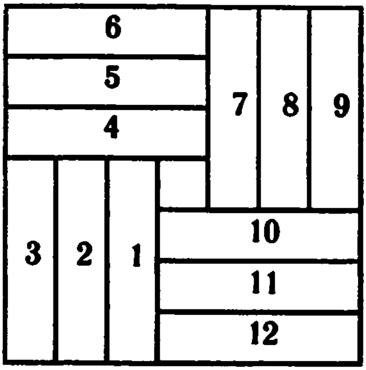


Рис. 148

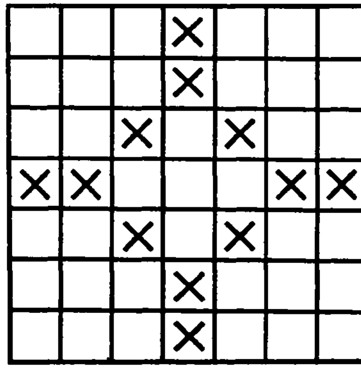


Рис. 149

б) Ответ. 20 выстрелов.

Схема стрельбы с использованием 20 выстрелов показана на рисунке 150. Покажем, что 20 — наименьшее возможное число выстрелов. Так как в квадрате 7×7 можно без наложений расположить четыре прямоугольника размером 3×4 (рис. 151), достаточно доказать, что в каждый прямоугольник 3×4 необходимо сделать по крайней мере 5 выстрелов.

Если мы сделаем 3 выстрела в один из столбцов такого прямоугольника (рис. 151), то в оставшийся прямоугольник $EFGH$ размером 3×2 придется сделать еще не менее двух выстрелов и всего их будет не меньше пяти. В дальнейшем будем предполагать отсутствие подобного столбца. Заметим, что в этом случае в каждый столбец необходимо сделать хотя бы один выстрел. Рассмотрим на рисунке 152 прямоугольник $ABCD$ размером 3×2. Так как в двух крайних столбцах должно содержаться по выстрелу, то при наличии в $ABCD$ трех выстрелов наше утверждение доказано. Если в $ABCD$ сделано только 2 выстрела, то с точностью до симметричных расположений они таковы, как показано на рисунке. Но тогда в

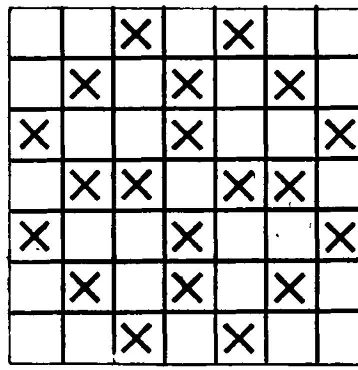


Рис. 150

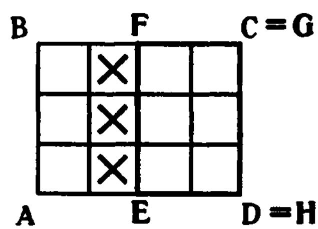


Рис. 151

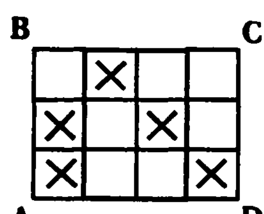


Рис. 152

крайние столбцы необходимо сделать еще 3 выстрела (они отмечены цветными крестиками). Наше утверждение полностью доказано.

181. Имеем:

$$k^3=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC+aB(c+C)+$$
$$+bC(a+A)+cA(b+B)=abc+ABC+k(aB+bC+cA).$$

Поскольку $abc+ABC>0$, то

$$k(aB+bC+cA)<k^3$$

и, сокращая на k, получим требуемое неравенство.

182. Рассмотрим множество A клеток в таблице, заштрихованных на рисунке 153. Пусть B — множество клеток, симметричное A относительно диагонали таблицы, $C=A\cap B$, D — множество клеток, не входящих ни в A, ни в B.

Сумма всех чисел в таблице=
= (сумма чисел в клетках из A) + (сумма чисел в клетках из B) —
— (сумма чисел в клетках из C) + (сумма чисел в клетках из D).

Поскольку первые две суммы по условию равны нулю, а общее число клеток в множествах C и D равно 1987 (это в точности клетки, стоящие по диагонали), то сумма чисел в таблице не превосходит 1987.

183. Пусть L — точка пересечения отрезка KP с биссектрисой угла ABC (рис. 154). Очевидно, что $KL=LM$. Обозначим длину перпендикуляра, опущенного из центра окружности O на биссектрису угла ABC, через d. Параллельно этой биссектрисе и на таком же расстоянии d от центра, но по другую сторону от него проведем прямую l, и пусть N — точка ее пересечения с KP. Тогда $NP=KL=LM$ и $PM=NL=2d$. Если лучи BA и BC поменять местами, получится немного отличная от рисунка 154 картинка. Мы рекомендуем разобрать этот случай самостоятельно.

184. а) Начинающий имеет выигрышную стратегию. Например, первым ходом он пишет число 6, после чего другой игрок может написать только одно из чисел 4, 5, 7, 8, 9, 10. Разобьем их

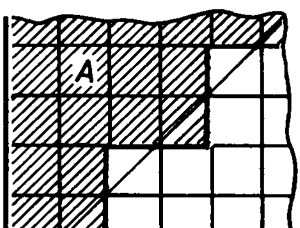


Рис. 153

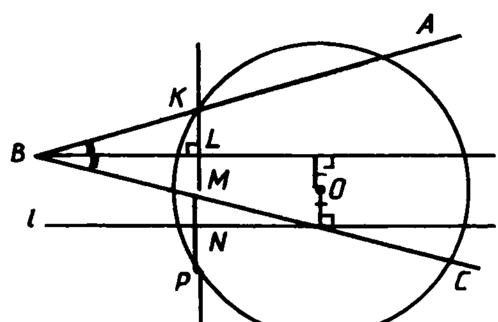


Рис. 154

на пары: (4; 5), (8; 10), (7; 9). Тогда если первый игрок в ответ на каждый очередной ход второго будет писать парное число с тем, которое записал второй, то первый не проиграет.

б) Докажем, что начинающий имеет выигрышную стратегию при любом значении $p \in \mathbf{N}$. Рассмотрим новую игру — с теми же правилами, но с одним ограничением: запрещается выписывать на доске число 1 (ясно, что только начинающий и только первым ходом может написать 1). Если в этой новой игре у начинающего есть выигрышная стратегия, то она годится и в исходной игре. Если же в новой игре у начинающего выигрышной стратегии нет, то первый игрок в исходной игре может первым ходом написать 1 и тем самым превратить исходную игру в новую с той лишь разницей, что в этой новой игре начинающим будет второй игрок, у которого не будет выигрышной стратегии.

185. После каждого рассказа с нечетным числом страниц меняется четность начальной страницы следующего рассказа. Поэтому четность начальной страницы меняется не меньше 14 раз (один из 15 рассказов с нечетным числом страниц может оказаться в книге последним). Таким образом, не менее 7 раз рассказы начинаются с четной страницы и тем самым не более 23 раз — с нечетной. Если в начале книги поместить все рассказы с четным числом страниц, а затем с нечетным, то ровно 23 рассказа будут начинаться с нечетных страниц.

186. Пусть S_Φ — площадь фигуры Φ. Обозначим точки так, как показано на рисунке 155. Средняя линия треугольника отсекает одну четвертую его площади, поэтому

$$S_{NRLT} = S_{ABCD} - \frac{3}{4} S_{ABC} - \frac{3}{4} S_{BCD} - \frac{1}{4} S_{ACD} - \frac{1}{4} S_{ABD},$$

$$S_{MRKT} = S_{ABCD} - \frac{3}{4} S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{ACD} - \frac{1}{4} S_{BCD} - \frac{3}{4} S_{ABD}.$$

Из равенства $S_{NRLT} = S_{MRKT}$ следует доказываемое утверждение $S_{BCD} = S_{ABD}$.

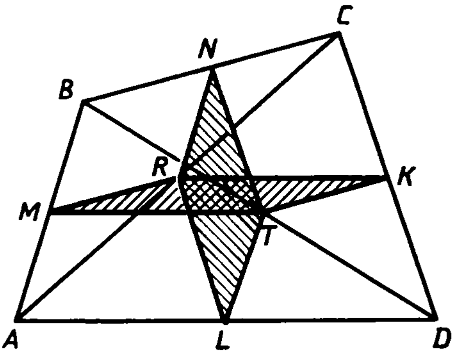


Рис. 155

187. Пусть $x=mn$, $y=nk$, $z=mk$, где m, n, k — натуральные числа. Для таких чисел x, y, z произведение любых двух делится на третье, следовательно, числа будут искомыми, если $mn-nk+$ $+mk=1$, т. е. $mk-1=n(k-m)$. Рассмотрим те решения, для которых $k-m=1$. Тогда $k=m+1$, $n=mk-1=m^2+m-1$. Таким образом, найдена бесконечная серия решений:

$$x=m(m^2+m-1),\ y=(m^2+m-1)(m+1),\ z=(m+1)m.$$

188. Обозначим числа первой строки через $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$, а числа второй строки через $b_1, b_2, \ldots, b_{88}$. Пусть для определенности выполняется неравенство

$$a_1+a_2+\ldots+a_{19}\geqslant b_1+b_2+\ldots+b_{88} \qquad (1)$$

(случай, когда выполняется противоположное неравенство, рассматривается аналогично). Для каждого $i=1, 2, \ldots, 88$ через n_i обозначим наименьшее число n, для которого

$$S(n)=a_1+\ldots+a_n-(b_1+\ldots+b_i)\geqslant 0$$

(такое число существует в силу (1)). Обозначим $S(n_i)$ через S_i. Так как $a_j\leqslant 88$ для каждого j, то $0\leqslant S_j\leqslant 87$. Если все S_i различны, то среди них есть 0. Отсюда сразу следует утверждение задачи. Если же $S_k=S_i$, где $k<i$, то, обозначив $t=n_k$, $v=n_i$, из равенства

$$a_1+\ldots+a_t-(b_1+\ldots+b_k)=a_1+\ldots+a_v-(b_1+\ldots+b_i)$$

получаем:

$$b_{k+1}+\ldots+b_i=a_{t+1}+\ldots+a_v,$$

что и требовалось доказать.

189. Пусть $ABCD$ — одна из рассматриваемых трапеций (рис. 156), CK — высота трапеции. Любая вписанная трапеция является равнобедренной, поэтому $DK=\frac{1}{2}(AD-BC)$. Отсюда $AK=AD-DK=\frac{1}{2}(AD+BC)$, следовательно, $CK:AK=$ $=\operatorname{tg}\angle CAD$ и есть рассматриваемое отношение. Утверждение задачи теперь следует из того, что из любой точки окружности хорды заданной длины a видны под одним острым углом.

190. Обозначим дописываемое число $ab+a+b$ через c. Тогда

$$c+1=ab+a+b+1=(a+1)(b+1).$$

Значит, если вместо чисел, написанных на доске, рассматривать числа, на единицу большие, то каждое новое число будет получаться как произведение двух уже имеющихся. Так как начинаем мы с чисел 2 и 3, то после нескольких умножений получим число вида $2^n\cdot 3^m$, где n и m — натуральные числа. Ясно, что могут быть получены все числа такого вида, и только они. Значит, в исходной ситуации могут быть получены только числа вида $2^n\cdot 3^m-1$. Число 13 121 таковым является: $13\,122=2\cdot 3^8$, а число 12 131 нет.

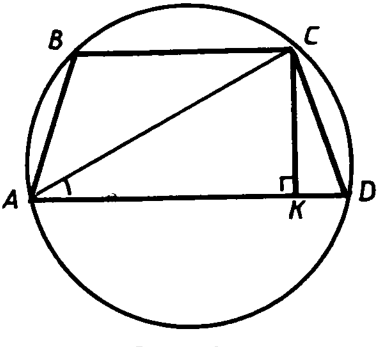


Рис. 156

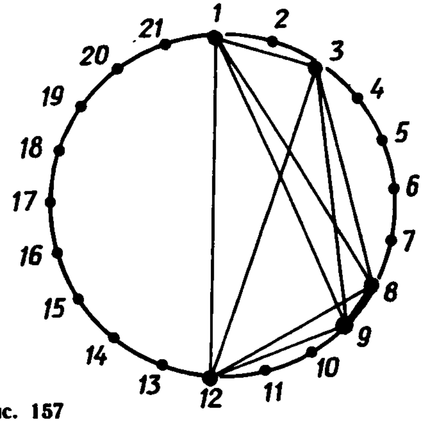


Рис. 157

191. Если $xy=0$, то $1-xy=1^2$. Если же $xy\neq 0$, то возведем обе части данного уравнения в квадрат и вычтем из них $4x^5y^5$. Получим равенство

$$(x^5-y^5)^2=4x^4y^4-4x^5y^5,$$

откуда находим, что

$$1-xy=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2.$$

192. Чтобы организовать в стране авиационное сообщение так, как требуется в условии задачи, необходимо иметь по меньшей мере 21 авиакомпанию, поскольку общее количество беспосадочных авиалиний не меньше чем $20+19+\ldots+3+2+1=210$, а каждая авиакомпания обслуживает $4+3+2+1=10$ беспосадочных авиалиний. Пример схемы обслуживания страны 21 авиакомпанией приведен на рисунке 157 (города — это вершины правильного 21-угольника, беспосадочные авиалинии — его стороны и диагонали). Первая авиакомпания обслуживает города с номерами 1, 3, 8, 9, 12, а остальные — города, которые получаются из указанного набора поворотами на углы

$$k\cdot\frac{360^\circ}{21},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 20.$$

Выполнение требований задачи следует из того, что среди отрезков, соединяющих вершины с номерами 1, 3, 8, 9, 12 встречаются по одному разу сторона 21-угольника и его диагонали всех возможных длин.

193. Пусть это не так. Отметим для каждой пары мальчиков (всего 21 пара) момент, когда они встречались:

$$t_1\leqslant\ldots\leqslant t_{21}.$$

Так как никакие трое мальчиков не встречались одновременно, то

$$t_1<t_2<\ldots<t_{21}.$$

К моменту t_1 к киоску должны явиться двое, в интервале $(t_1;\ t_2)$ еще один и т. д. Это в сумме дает 22 прихода мальчиков к киоску, а их всего $3\cdot 7=21$.

194. Ответ. Нельзя.

Допустим, что бруски уложены в коробку. Тогда они полностью ее заполняют. Рассмотрим слой коробки толщиной 1, расположенный у грани размером 7×11. Каждый брусок либо целиком располагается внутри этого слоя, либо заполняет 3 кубика $1\times 1\times 1$ из этого слоя, и, следовательно, число кубиков размером $1\times 1\times 1$ в слое должно делиться на 3. Но число $7\cdot 11$ на 3 не делится.

195. Впишем окружности в треугольники BMT и ATC и проведем общую касательную t к этим окружностям (рис. 158). Тогда условие задачи может быть переформулировано так: доказать, что в четырехугольник $AMSF$ можно вписать окружность. Для этого достаточно установить, что $AM+SF=MS+AF$.

Используя то, что отрезки касательных к окружности от точки их пересечения до точек касания равны и отрезки RZ и KV общих внешних касательных к окружностям равны, последовательно получаем:

$$MS+AF-SF=MS+SL-SR+AF+FU-FZ-SF=$$
$$=ML-SR+AU-FZ-SF=MN+AE-(SR+FZ+SF)=$$
$$=(AB-AM-BN)+(AC-CE)-RZ=$$
$$=AB-AM-BK+AC-CV-KV=AB+AC-AM-BC.$$

Последнее выражение равно AM, что вытекает из системы равенств (рис. 159)

$$\begin{cases} AM+MB=AB, \\ AY+YC=AC, \\ BX+XC=BC, \end{cases}$$

так как

$$AB+AC-BC=(AM+AY)+$$
$$+(MB-BX)+(YC-XC)=2AM.$$

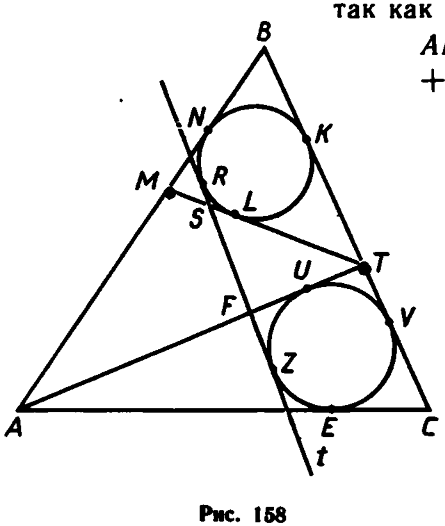


Рис. 158

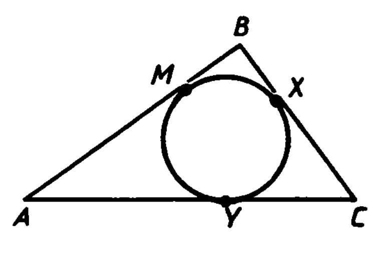


Рис. 159

196. Ответ. 1989.

Отметим, что для любого натурального числа $i \leqslant 12$ справедливо равенство $d_i \cdot d_{13-i} = N$. Действительно, числа

$$\frac{N}{d_1}, \frac{N}{d_2}, \ldots, \frac{N}{d_{12}} = d_1$$

суть делители числа N, написанные в порядке убывания, т. е.

$$\frac{N}{d_1} = d_{12}, \frac{N}{d_2} = d_{11}, \ldots, \frac{N}{d_{12}} = d_1.$$

Обозначим $d_4 - 1$ через k.

Тогда

$$d_k = (d_1 + d_2 + d_4) \cdot d_8 \geqslant d_5 \cdot d_8 = N.$$

Это неравенство вытекает из того, что $d_1 + d_2 + d_4$ — делитель d_k и потому делитель числа N с номером, не меньшим 5. Итак, $d_k \geqslant N$, но d_k — делитель N, следовательно, $d_k = N$, т. е. $k = 12$ и $d_4 = 13$.

Таким образом, мы имеем равенства

$$N = (1 + d_2 + 13) \cdot d_8, \quad d_5 = 14 + d_2, \quad d_4 = 13.$$

Число d_2 — наименьший делитель N, который больше 1, поэтому d_2 — простое число, меньшее 13 $(d_2 < d_4)$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) $d_2 = 2$, тогда $d_5 = 16$ и N имеет делители 1, 2, 4, 8. Отсюда следует, что $d_4 \leqslant 8$. Но это не так.

2) $d_2 = 7$, тогда $d_5 = 21$ и $N = 3$, откуда следует неравенство $d_2 \leqslant 3$.

3) $d_2 = 11$, тогда $d_5 = 25$ и $N = 5$, откуда следует неравенство $d_2 \leqslant 5$.

4) $d_2 = 5$, тогда $d_5 = 19$. Значит, N имеет уже три простых делителя: 5, 13 и 19. Больше простых делителей у числа N не может быть, иначе общее число делителей превышало бы 13 $(\geqslant 16)$. Но тогда d_3 — это произведение каких-то из указанных простых делителей, что противоречит неравенству $d_3 < 13$.

Оставшееся возможное значение для d_2 — это число 3. Тогда $d_5 = 17$, а N имеет простые делители $d_2 = 3$, $d_4 = 13$, $d_5 = 17$. Так как других простых делителей быть не может, то $d_3 = 9$.

Итак, N делится на число $9 \cdot 13 \cdot 17 = 1989$, а так как число 1989 уже имеет 12 делителей, то $N = 1989$. Проверка показывает, что $N = 1989$ удовлетворяет требуемым условиям.

197. Занумеруем часть клеток доски так, как показано на рисунке 160. Пусть n — число фигур, стоящих на полях с номером 1, m — на полях с номером 2, k — на полях с номером 3. Из условия задачи следует, что в 1, 3, 5 и 7 горизонталях стоят 4 фигуры, поэтому $n + k = 4$. Так же во 2, 4, 6 и 8 горизонталях стоят 4 фигуры, поэтому $m + k = 4$. Отсюда $m = n$, и, значит, число фигур на черных полях равно $2n$.

	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3

Рис. 160

198. Проведем прямую $C_1M \parallel AC$ (рис. 161). Из условия и по теореме Фалеса

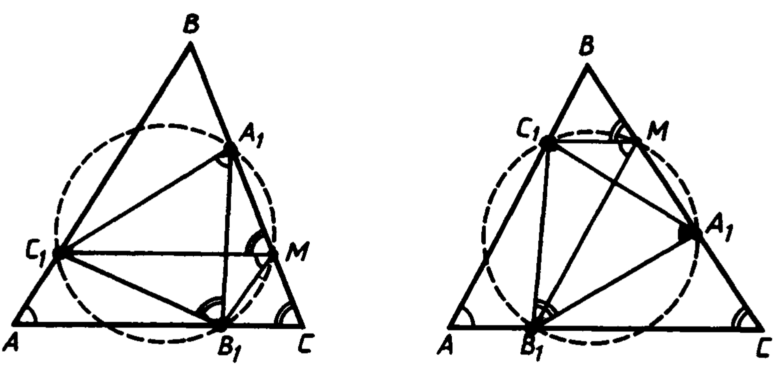
$$\frac{CM}{MB}=\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{CB_1}{B_1A},$$

откуда следует, что $B_1M \parallel AB$, и, таким образом, AC_1MB_1 — параллелограмм. Далее, точки A_1, B_1, C_1 и M лежат на одной окружности. Если M лежит на отрезке A_1C (рис. 161, *а*), то $\angle C_1B_1A_1=\angle C_1MA_1=\angle ACB$. Если M лежит на отрезке A_1B (рис. 161, *б*), то $\angle C_1B_1A_1=180°-\angle C_1MA_1=\angle ACB$.

В обоих случаях треугольники ABC и $A_1C_1B_1$ имеют соответственно равные углы и потому подобны.

199. Обозначим через

$$d_1<d_2<\ldots<d_m \quad \left(m=\frac{n(n-1)}{2}\right)$$



а) б)

Рис. 161

расстояния между скворечниками и через Π_1, Π_2, ..., Π_m пары скворечников, расстояния между которыми соответственно равны d_1, d_2, ..., d_m. Покажем, что если в начальный момент времени (t_0) скворцы A и B образовывали пару Π_m, то после перелета (t_1) они должны образовать пару Π_1.

Допустим, что это не так, т. е. скворцы A и B в момент t_1 образуют пару Π_k, $1<k\leqslant m$. Выберем скворцов C и D, образующих пару Π_l, $1\leqslant l<m$, в момент t_0 и пару Π_1 в момент t_1. Получим противоречие с условием, так как $d_l<d_m$ и $d_1<d_k$. Итак, скворцы A и B в момент t_1 образуют пару Π_1. Аналогично скворцы E и F, из которых в момент t_0 состоит пара Π_1, дают в момент t_1 пару Π_m. Это означает, что либо Π_1 и Π_m поменялись местами, либо скворцы A и E остались в своих скворечниках, а скворцы B и F поменялись местами.

Рассуждая аналогично, получаем, что пара Π_{m-1} станет парой Π_2 и, наоборот, $\Pi_{m-2}\leftrightarrow\Pi_3$ и т. д.

Допустим теперь, что $n\geqslant4$. Тогда, как мы показали выше, найдутся две пары (K, L) и (M, N) скворцов, в которых либо скворцы остаются на своих местах, либо меняются местами. В любом случае если d_k — расстояние между скворцами K и L, а d_p — между M и N, то $d_k(t_0)=d_k(t_1)$ и $d_p(t_0)=d_p(t_1)$. Получили противоречие, так как если $d_k(t_0)>d_p(t_0)$, то по условию $d_k(t_1)<d_p(t_1)$.

Нам осталось показать, что число n может быть равным 3. Действительно, если скворец, находящийся в вершине A треугольника ABC со сторонами $AB=5$, $BC=4$, $CA=3$, останется на месте, а два других поменяются местами, то условие задачи будет выполнено.

200. Разобьем на две группы:

$$M_{AB}=\{ABabc;\ ABbac;\ ABcab\},$$
$$N_{AB}=\{ABacb;\ ABbac;\ ABcba\}\ —$$

все пятизначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, 4, 5 и начинающиеся с цифр A и B.

Легко проверить, что суммы $S(M_{AB})$ и $S(N_{AB})$ квадратов чисел в группах M_{AB} и N_{AB} одинаковы. Действительно, пусть $P=A\cdot10^4+B\cdot10^3$, тогда

$$S(M_{AB})=(P+100a+10b+c)^2+(P+100b+10c+a)^2+$$
$$+(P+100c+10a+b)^2=3P^2+2P\cdot111\cdot(a+b+c)+$$
$$+10101(a^2+b^2+c^2)+2220(ab+bc+ca).$$

Этому же числу равна $S(N_{AB})$.

Таким образом, разбиение данных пятизначных чисел на группы

$$M=M_{12}\cup M_{13}\cup\ldots\cup M_{21}\cup\ldots\cup M_{54}\ \text{и}\ N=N_{12}\cup\ldots\cup N_{54}$$

является искомым.

201. Имеем:

$$t^4-t+\frac{1}{2}=\left(t^4-t^2+\frac{1}{4}\right)+\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

Равенство здесь не достигается, поскольку оба слагаемых не могут быть одновременно равными нулю. Поэтому

$$t^4-t+\frac{1}{2}>0.$$

202. Пусть E, F и S — середины сторон AB, CD и AD, M и N — точки, в которых прямая EF пересекает диагонали AC и BD (рис. 162). Так как SF — средняя линия треугольника ACD, то $SF \parallel AC$ и поэтому $\angle CMF=\angle EFS$. Аналогично $\angle BNE=\angle FES$. По условию $\angle CMF=\angle BNE$, значит, $\angle EFS=$ $=\angle FES$ и $SF=SE$. Следовательно, $AC=DB$.

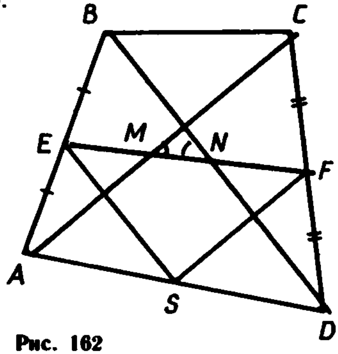


Рис. 162

203. Ответ. 1990.

Отметим вначале, что из n сенаторов двух можно выбрать $\frac{n(n-1)}{2}$ способами: сначала выбираем первого (n способами), потом второго ($n-1$ способами). Получается $n(n-1)$ способов, но каждая пара учтена дважды. Аналогично доказывается, что из n сенаторов выбрать трех можно $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}$ способами.

Обозначим число искомых комиссий через x, а число комиссий, в которых присутствуют как друзья, так и враги, через y. Тогда

$$x+y=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{2\cdot 3}=4060. \qquad (1)$$

Если сенатор напишет список комиссий, в каждой из которых оба других члена одновременно или его друзья, или враги, то получится список из $\frac{23\cdot 22}{2}+\frac{6\cdot 5}{2}=268$ комиссий (у каждого сенатора 23 друга и 6 врагов). Всего во всех списках будет указано $30\cdot 268=8040$ комиссий. Но при этом комиссии, в которых все трое сенаторов либо дружат, либо враждуют между собой, будут указаны в трех списках, а каждая из остальных комиссий — в одном списке (например, комиссия, в которой A и B дружат и оба враждуют с C, будет указана только в списке, написанном сенатором C). Таким образом,

$$3x+y=8040. \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1), (2) получаем $x=1990$.

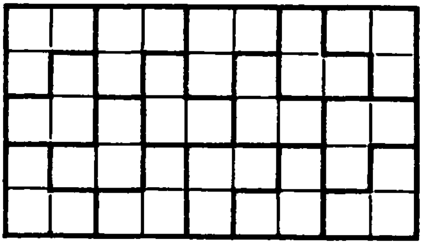


Рис. 163

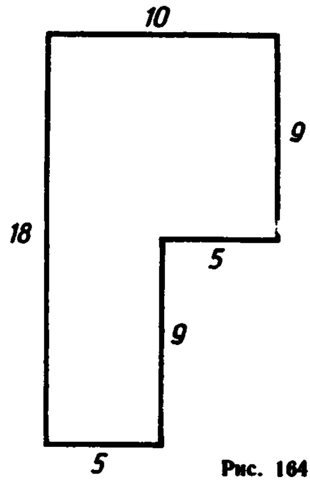


Рис. 164

204. Ответ. а), б) Существует.

а) См. рис. 163.

б) «Растянем» рисунок 163, увеличив все горизонтальные размеры в 5 раз, а все вертикальные — в 9 раз. Тогда прямоугольник преобразуется в квадрат, а «уголки» — в равные многоугольники: «несимметричные уголки» (рис. 164).

205. Очевидно, что треугольники, закрашенные на рисунке 165, попарно подобны. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_3}{b_2} \text{ и } \frac{b_3}{b_2}=\frac{c_2}{c_1}.$$

Следовательно,

$$a_1b_1c_1=\frac{a_2b_3}{b_1}b_1c_1=a_2b_3c_1=$$
$$=a_2\frac{b_2c_2}{c_1}c_1=a_2b_2c_2,$$

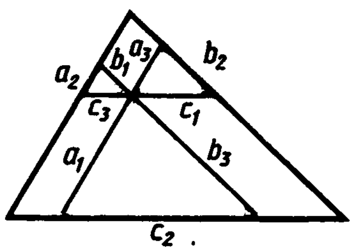


Рис. 165

и первое из требуемых равенств доказано. Второе равенство доказывается аналогично.

206. Первому игроку достаточно назвать числа 1; 2; —3. То, что он выигрывает, доказывается непосредственно проверкой. Вообще первый игрок может назвать любые отличные от нуля попарно различные рациональные числа, сумма которых равна нулю. Непосредственно убеждаемся, что полученный трехчлен ax^2+bx+c имеет корень $x_1=1$; по теореме Виета второй его корень есть $x_2=\frac{c}{a}\neq 1$.

207. Ответ. 1989.

Замечая, что при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ справедливы соотношения

$$|x-y| \leqslant max\{x, y\}$$

и

$$max\{max\{x, y\}, z\} = max\{x, y, z\},$$

последовательно убедимся в том, что

$$|\ldots| |x_1-x_2|-x_3|-\ldots-x_n| \leqslant max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ при } n=1, 2, \ldots, 1990.$$

Поэтому данное в условии задачи выражение не превосходит $max\{x_1, \ldots, x_{1990}\} = 1990$. Но оно не может равняться 1990, так как его четность всегда совпадает с четностью суммы

$$x_1+x_2+\ldots+x_{1990} = 1+2+\ldots+1990 = \frac{1990 \cdot 1991}{2} = 995 \cdot 1991.$$

Конкретный пример:

$$|\ldots| ||2-4|-5|-3|-\ldots-(4k+2)|-(4k+4)|-(4k+5)|-$$
$$-(4k+3)|-\ldots-1986|-1988|-1989|-1987|-1990|-1| =$$
$$= 1989$$

теперь показывает, что искомый максимум равен 1989.

208. Всего имеется $1+2+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ вершин треугольников разбиения, и, значит, ломаная состоит из $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n}{2}$ звеньев. Раскрасим те треугольники разбиения, которые гомотетичны исходному с положительным коэффициентом гомотетии, т. е. расположены «вершиной вверх» (рис. 166). Таких треугольников всего $1+2+\ldots+n = \frac{n^2+n}{2}$. Каждое звено ломаной проходит по некоторой стороне одного из этих треугольников. Разность между количеством звеньев ломаной и количеством раскрашенных треугольников равна $\frac{n^2+3n}{2} - \frac{n^2+n}{2} = n$. Следовательно, не менее n цветных треугольников содержат по паре звеньев ломаной (треугольник, содержащий три звена ломаной, считается дважды). Звенья в каждой такой паре будут соседними звеньями ломаной, угол между ними равен 60°, всего таких пар не менее n, что и требовалось доказать.

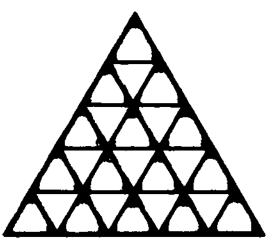


Рис. 166

209. Ответ. $(1; 0; 3; 1)$, $(-1; 0; -3; -1)$, $(3; 1; 1; 0)$, $(-3; -1; -1; 0)$.

Из системы получаем:

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11.$$

Отсюда следует, что либо $x^2+2y^2=1$, либо $z^2+2t^2=1$. В первом случае $x=\pm 1$, $y=0$, и тогда из системы находим $t=\pm 1$, $z=\pm 3$. Во втором случае $z=\pm 1$, $t=0$, и тогда $x=\pm 3$, $y=\pm 1$.

210. Из неравенства $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$ $(a, b>0)$ вытекает, что после каждой операции сумма S обратных величин чисел, написанных на доске, не увеличивается. Вначале $S=n$, поэтому в конце $S\leqslant n$. Из этого вытекает требуемое утверждение.

211. Ответ. а) Не могут; б) могут.

а) Допустим противное. Из неравенства треугольника следует, что отрезок a длиной 1 не может быть стороной треугольника, остальные стороны которого различные целые числа, поэтому a — это один из отрезков CB или CD (рис. 167). Можно считать, что $BC=1$. Длины отрезков BF и CF — целые числа, поэтому $BF=CF$. Тогда по теореме косинусов из треугольника BFC имеем $\cos\angle F=1-\frac{1}{2BF^2}$. Применяя теперь теорему косинусов к треугольнику EFD, получаем:

$$ED^2=EF^2+FD^2-2EF\cdot FD+\frac{EF\cdot FD}{BF^2}.$$

Но $EF<BD$ и $FD<CF=BF$, следовательно, ED^2, а вместе с ним и ED — не целое число. Получили противоречие.

б) Такой пример можно построить, например, так, как показано на рисунке 168. Треугольники ABD, FED, FBC и AEC подобны пифагорову треугольнику со сторонами 3, 4, 5.

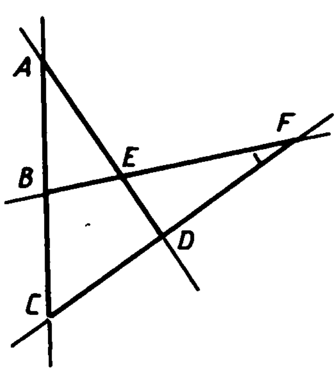


Рис. 167

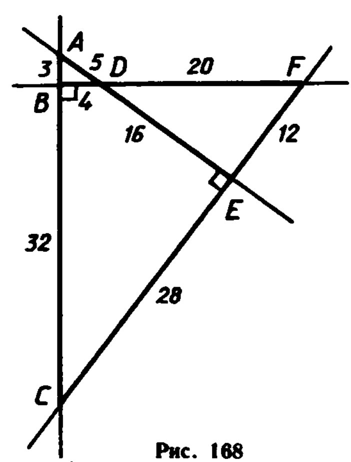


Рис. 168

212. Ответ. 26 билетов.

Чтобы наверняка выиграть, 26 билетов можно заполнить, например, так:

$$\begin{array}{l}
1,\ \ 2,\ 3,\ \ldots,\ 25,\ 26,\ 27,\ \ldots,\ 50\\
2,\ \ 3,\ 4,\ \ldots,\ 26,\ \ 1,\ 27,\ \ldots,\ 50\\
3,\ \ 4,\ 5,\ \ldots,\ \ 1,\ \ 2,\ 27,\ \ldots,\ 50\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
25,\ 26,\ 1,\ \ldots,\ 23,\ 24,\ 27,\ \ldots,\ 50\\
26,\ \ 1,\ 2,\ \ldots,\ 24,\ 25,\ 27,\ \ldots,\ 50
\end{array}$$

В карточке-эталоне хотя бы одно из чисел 1, 2, ..., 26 должно находиться в одном из первых 26 мест (поскольку других мест только 24). Это число и сделает одну из заполненных карточек выигрышной. Чтобы показать, что 25 заполненных карточек не гарантируют выигрыша, расположим эти заполненные карточки и пустую карточку-эталон друг под другом, как показано ниже:

$$25\left\{\begin{matrix} a_1a_2a_3\ldots a_{50}\\ b_1b_2b_3\ldots b_{50}\\ \ldots\ldots\ldots\\ c_1c_2c_3\ldots c_{50}\end{matrix}\right.$$

Опишем, как заполнить эталон, чтобы выполнялось условие: ни одно из чисел, записанных в эталоне, не совпадает с числами, записанными над ним.

Ясно, что число 1 можно записать в эталон с соблюдением условия. Пусть уже записаны числа 1, 2, ..., $a-1$. Рассмотрим число a. Если его можно записать, не нарушая условия, сделаем это. Если это сделать нельзя, то все клетки эталона, допустимые для a, уже заняты. Таких клеток не меньше 25, так как каждый билет «запрещает» появление a только в одной клетке. Пусть в эталоне в клетках, допустимых для a, уже записаны числа x_1, x_2, ..., x_{25}. Выберем любую свободную клетку z. В нее с соблюдением условия можно записать не меньше 25 чисел, следовательно, по крайней мере одно из чисел $x_1, \ldots, x_{25}, a$. Так как a записать в z нельзя, то в z можно записать некоторое x_i. Сделаем это, а число a запишем вместо x_i. По завершении этого процесса получится заполнение эталона, при котором не выигрывает ни один из 25 билетов, изображенных выше.

213. Ответ. а) Например, $x=1$, $y=8$; б) нет.

б) Допустим, что такие x и y существуют, т. е. $xy+x=m^2$, $xy+y=n^2$, где $m\neq n$.

Пусть для определенности $x<y$. Тогда $x^2<xy+x<xy+y$. Поэтому $n\geqslant m+1$, $m>x$ и $n>x+1$.

Отсюда $y-x=(xy+y)-(xy+x)=n^2-m^2=(n-m)(n+$

$+m)>2x+1$. Следовательно, $y>3x+1$, что противоречит условию $x\geqslant 988$, $y\leqslant 1991$. Значит, таких чисел нет.

214. Обозначим точку пересечения отрезков KM и LN через O и соединим ее с B и D (рис. 169). Так как $\angle NDM+\angle NOM=180°$, то вокруг четырехугольника $NDMO$ можно описать окружность. Поэтому $\angle NOD=\angle NMD$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу углы. Аналогично $\angle LOB=\angle LKB$. Так как $LK\parallel NM$ и $KB\parallel MD$, то $\angle NMD=\angle LKB$. Поэтому $\angle NOD=\angle LOB$. Следовательно, точки D, O и B лежат на одной прямой.

215. Обозначим первоначальный план следователя через S. Сначала задается серия из 13 вопросов по плану S, а потом контрольный вопрос «Солгали ли вы в предыдущей серии?». Если ответ «нет», то лжи действительно не было, и дальше по плану S задаются серии по 12, 11, ..., 4, 3, 2, 1 вопросу, после каждой серии задается контрольный вопрос. Если свидетель не лжет, то всего будет задано $91+13=104$ вопроса. Если же свидетель на контрольный вопрос отвечает «да», то он солгал или в соответствующей серии, или при ответе на контрольный вопрос; тогда эта серия вопросов повторяется и дальше реализуется план S без контрольных вопросов. Если ложь в i-серии, то дополнительно задано i контрольных вопросов и $14-i$ повторных вопросов плана S, т. е. всего 14 дополнительных вопросов.

216. На рисунке 170 любой квадрат, состоящий более чем из одной клетки, содержит четное количество отмеченных клеток. Поэтому если начальный «минус» находится в отмеченной клетке, то после каждого хода в отмеченных клетках находится нечетное количество «минусов». Следовательно, по крайней мере один «минус» всегда останется. Используя конфигурации, получаемые из показанной на рисунке 170 фигуры поворотами вокруг центра на 90°, 180°, 270°, убеждаемся, что от «минусов» нельзя избавиться, если первоначально «минус» записан в какой-либо клетке, кроме центральной. Если же первоначально «минус» в центральной клет-

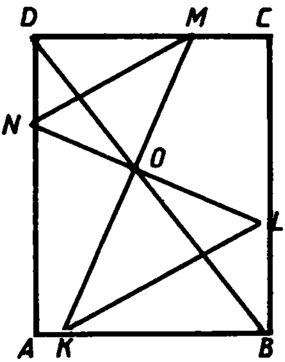


Рис. 169

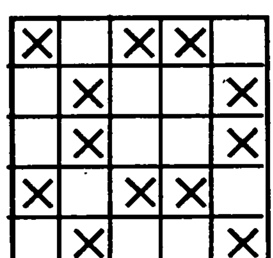


Рис. 170

ке, то за 5 ходов можно сделать все знаки «плюсами». Для этого выберем такую последовательность квадратов: 3×3 в левом нижнем и 3×3 в правом верхнем углах, 2×2 в двух остальных углах, и, наконец, весь квадрат 5×5.

217. Дважды применяя неравенство $x^2+y^2\geqslant 2xy$, получаем требуемое:

$$(a^4+b^4)+c^2\geqslant 2a^2b^2+c^2=(\sqrt{2}ab)^2+c^2\geqslant 2\sqrt{2}abc.$$

218. Первое решение. По теореме синусов из $\triangle ABE$ находим:

$$AE=2O_1A\sin\angle ABE=\sqrt{2}O_1A \quad (\text{рис. } 171).$$

Аналогично из треугольника ADE имеем $AE=\sqrt{2}O_2A$. Отсюда $O_1A=O_1E=O_2A=O_2E$, следовательно, AO_1EO_2 — ромб. Осталось заметить, что

$$\angle AO_1E=2\angle ABE=90°.$$

Второе решение. Так как $O_1A=O_1E$, $O_2A=O_2E$, то треугольники AO_1O_2 и EO_1O_2 равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle O_1AO_2=\angle O_1EO_2$. Из равенств $\angle AO_1E=2\angle ABE=90°$ и $\angle AO_2E=2\angle ADE=90°$ получаем, что $\angle O_1AO_2=\angle O_1EO_2=90°$.

Таким образом, AO_1EO_2 — прямоугольник, симметричный относительно диагонали O_1O_2, т. е. квадрат.

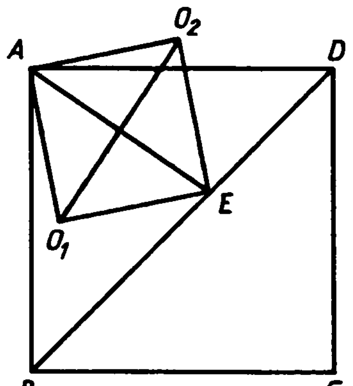


Рис. 171

219. Объявим каждую из k столиц столицей республики. Затем рассмотрим все города, соединенные со столицей одной дорогой, и присоединим их к тем республикам, со столицами которых они соединены (если таких столиц несколько, выберем любую из них). Далее, берем города, еще не вошедшие ни в одну из республик и соединенные одной дорогой с каким-либо городом какой-нибудь республики, и распределяем их между республиками, с которыми они соединены (все равно как).

Так как из любого города в любой можно проехать, то за конечное число шагов все города будут распределены по республикам. Заметим, что если город был приписан к республике на n-м шаге, то путь от него до любой из столиц составляет не менее n дорог, причем один из путей в n дорог содержится в той республике, к которой присоединен город. Таким образом, построенное разбиение городов удовлетворяет требуемым условиям.

220. Ответ. 2, если mn делится на 3, и 1 — в противном случае.

Покажем сначала, как можно добиться того, чтобы на доске осталось указанное число фишек. Если на доске имеется фрагмент, приведенный на рисунке 172 (или полученный из него поворотом, симметрией), то можно удалить из него горизонтальный ряд из трех фишек (убедитесь в этом).

С помощью описанного приема прямоугольник из фишек $m \times n$, где $m \geqslant 4$, $n \geqslant 2$, можно свести к прямоугольнику $(m-3) \times n$. Действительно, если $n \geqslant 3$, то можно удалить фишки в отмеченных прямоугольниках 3×1 в порядке, указанном стрелкой на рисунке 173. Если же $n=2$, то требуемое удаление фишек достигается с помощью ходов (рис. 174)

$$a1:b1,\ a2:b2,\ c1:c2,\ a4:a3,\ c3:b3,\ a2:a3.$$

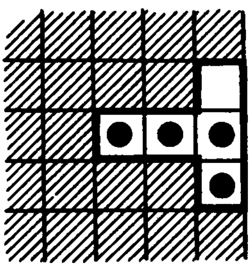


Рис. 172

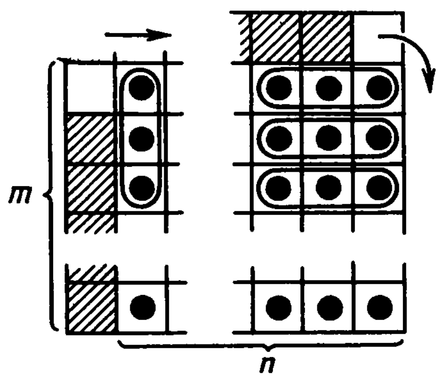


Рис. 173

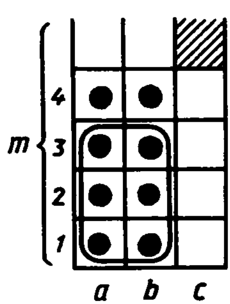


Рис. 174

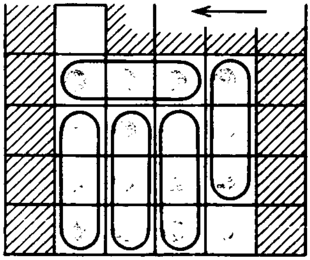


Рис. 175

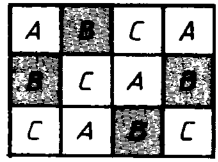


Рис. 176

Таким образом, любой прямоугольник $m\times n$ ($m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$) можно свести к одному из шести прямоугольников:

$$1\times 2,\ 2\times 2,\ 4\times 4,\ 1\times 3,\ 2\times 3,\ 3\times 3.$$

Нетрудно указать способ, приводящий к одной фишке для первых трех прямоугольников и к двум для последних трех. Например, для прямоугольника 4×4 это достигается путем последовательного удаления фишек в отмеченных на рисунке 175 прямоугольниках 3×1. Покажем теперь, что меньшее число фишек оставить нельзя. Действительно, в любом случае на доске останется не менее одной фишки. Пусть mn делится на 3. Докажем, что в этом случае останется по крайней мере две фишки. Допустим, что клетки доски раскрашены в три цвета: A, B, C (рис. 176). Любой прямоугольник 3×1 содержит по одной клетке каждого цвета, и в начальный момент на клетках каждого цвета стоит поровну фишек. За один ход на клетках какого-то одного цвета добавляется одна фишка, а с клеток двух других цветов снимается по фишке. Поэтому после любого хода количества фишек на клетках каждого цвета имеют одинаковую четность. Если же на доске останется одна фишка, то это условие нарушится.

221. Ответ. Существует.

Имеется всего 6 четырехзначных чисел (включая 0), делящихся на 1992

$$0000,\ 1992,\ 3984,\ 5976,\ 7968,\ 9960.$$

Достаточно поэтому взять число, у которого ни одна из цифр не совпадает ни с одной из цифр выписанных чисел, стоящих на соответствующих местах (например, 2111).

222. Из условия следует, что точки R и Q лежат на окружности и дуги PB и RB, PA и QA соответственно равны (рис. 177). Отсюда следует, что

$$\angle PAB=\angle RAB,\ \angle PBA=\angle QBA,$$

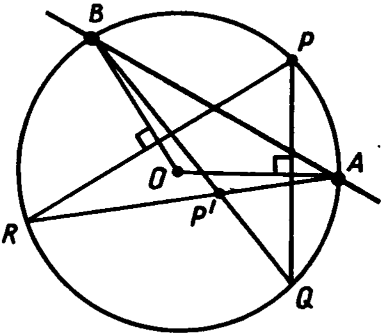


Рис. 177

значит, треугольники PAB и $P'AB$ равны. А так как точки P и P' лежат по разные стороны от AB, то они симметричны относительно AB.

223. Ответ. $x=y=0$ и $x=y=-1$.

Если $x=0$, то из уравнения

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \qquad (1)$$

получаем $1+y^7=1$, откуда $y=0$; если же $x=-1$, то $1+y^7=0$, откуда $y=-1$. Найденные значения удовлетворяют и второму уравнению

$$(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \qquad (2)$$

системы. Покажем, что при других значениях x система решений не имеет.

а) $x>0$, тогда

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+x+x^2+...+x^7>1+x^7,$$

следовательно, из (1) $1+y^7>1+x^7$, откуда $y>x$.

Таким образом, $y>0$ и из (2) аналогично получаем $x>y$. Противоречие.

б) $x<-1$, тогда из (1) $1+y^7<0$, следовательно, $y<-1$. Кроме того, из (1) получаем:

$$1+y^7=1+(x+x^2)+(x^3+x^4)+(x^5+x^6)+x^7>1+x^7, \qquad (3)$$

так как каждая скобка положительна. Отсюда $y>x$.

Аналогично из уравнения (2) получаем $x>y$. Противоречие.

в) $-1<x<0$, тогда $-1<y<0$ (если $y\geqslant 0$ или $y\leqslant -1$, то аналогично приведенным выше рассуждениям получаем $x\geqslant 0$ или $x\leqslant -1$). Кроме того, $1+y^7<1+x^7$ (каждая скобка в (3) отрицательна). Отсюда $y<x$.

Аналогично из (2) получаем $x<y$. Противоречие.

224. Ответ. Не существует.

Предположим противное. Если в замощении прямоугольника какой-либо «уголок» примыкает к краю прямоугольника стороной из одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком» до прямоугольника 3×2. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника по сторонам из двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры $2n\times2k$. Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет $\frac{2n\cdot2k}{3}\cdot6=8nk$ вершин. Подсчитаем теперь количество вершин всех «уголков» другим способом. В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длиной $2n$ — не более $2(n-1)$ вершин, в углах прямоугольника — по 1 вершине. Всего не более

$$2(2n-1)(2k-1)+2\cdot2(n-1)+2\cdot2(k-1)+4=8nk-2<8nk$$

вершин. Противоречие. Значит, натуральные числа n и k, удовлетворяющие условию задачи, не существуют.

ПРИЛОЖЕНИЯ


A
A_2
O
C
D
A_1
A_3
22
11
$\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b \end{cases}$
A_4
b
O
A_7
A_5
12

ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗАДАЧ

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика.— М.: Просвещение, 1968.
2. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Часть I. Арифметика и алгебра.— М.: Наука, 1976.
3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Часть II. Геометрия (планиметрия).— М.: Наука, 1967.
4. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Часть III. Геометрия (стереометрия).— М.: ГИТТЛ, 1954.
5. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.— М.: Наука, 1970.
6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. И., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.— М.: Наука, 1974.
7. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры.— М.: Наука, 1966.
8. Штейнгауз. Сто задач.— М.: Наука, 1986.
9. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Часть I.— М.: Наука, 1986; Часть II.— М.: Наука, 1986.
10. Пойа Д. Как решать задачу.— М.: Учпедгиз, 1961.
11. Избранные задачи / Под ред. В. М. Алексеева.— М.: Мир, 1977.
12. Сборник задач московских математических олимпиад / Под ред. В. Г. Болтянского.— М.: Просвещение, 1965.
13. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад.— М.: Просвещение, 1971.
14. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады.— М.: Просвещение, 1986.
15. Физико-математические олимпиады.— М.: Знание, 1977.
16. Олимпиады: Алгебра. Комбинаторика / Ред. Л. Я. Савельев.— Новосибирск: Наука, Сиб. отдел., 1979.
17. Вышенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. Сборник задач киевских математических олимпиад.— Киев: Изд-во КГУ, 1984.
18. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю. Сборник олимпиадных задач по математике.— Минск, 1962.
19. Шустеф Ф. М. Сборник олимпиадных задач по математике.— Минск: Вышэйшая школа, 1977.
20. Белоусов В. Д., Изман М. С., Солтан В. П., Чиник Б. И. Республиканские математические олимпиады.— Кишинев: Штиинца, 1986.
21. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады.— М.: Просвещение, 1976.
22. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады.— М.: Мир, 1978.

23. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады.— М.: Мир, 1976.
24. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. П., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады.— М.: Наука, 1981.
25. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии: Планиметрия.— М.: Наука, 1986.
26. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии: Стереометрия.— М.: Наука, 1984.
27. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией.— М.: Наука, 1978.
28. Берник В. И., Жук И. К., Мельников О. В. Сборник олимпиадных задач по математике.— Минск: Народная асвета, 1980.

Статьи в журнале «Математика в школе»

1. Петраков И. С. Всесоюзная математическая олимпиада 1967 года // Матем. в школе.— 1967.— № 5.— С. 79—80.
2. Башмаков М. И., Васильев Н. Б., Ионин Ю. И. Решения задач Всесоюзной математической олимпиады 1967 года // Матем. в школе.— 1967.— № 5.— С. 80—84.
3. Ермолаева Н. А. Вторая Всесоюзная математическая олимпиада 1968 года // Матем. в школе.— 1968.— № 5.— С. 72—74.
4. Васильев Н. Б. Решения задач Всесоюзной математической олимпиады школьников 1968 года // Матем. в школе.— 1968.— № 5.— С. 74—79.
5. Седаков В. И. Третья Всесоюзная математическая олимпиада 1969 года // Матем. в школе.— 1969.— № 4.— С. 63—66.
6. Васильев Н. Б. Решения задач Всесоюзной математической олимпиады 1969 г. // Матем. в школе.— 1969.— № 4.— С. 66—70.
7. Пашкова Л. М. Четвертая Всесоюзная математическая олимпиада 1970 г. // Матем. в школе.— 1970.— № 5.— С. 65—67.
8. Васильев Н. Б. Решения задач, предлагавшихся на заключительном туре Всесоюзной математической олимпиады 1970 г. // Матем. в школе.— 1970.— № 5.— С. 67—71.
9. Пашкова Л. М. V Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1971.— № 5.— С. 70—72.
10. Васильев Н. Б. О задачах, предлагавшихся на Всесоюзной олимпиаде 1971 года // Матем. в школе.— 1971.— № 5.— С. 72—77.
11. Пашкова Л. М. VI Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1972.— № 5.— С. 68—70.
12. Васильев Н. Б., Ивлев Б. М., Лысов Ю. П. Решения задач, предлагавшихся на Всесоюзной олимпиаде 1972 года // Матем. в школе.— 1972.— № 5.— С. 70—74.
13. Пашкова Л. М. VII Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1973.— № 5.— С. 72—74.
14. Васильев Н. Б., Гальперин Г. А., Гервер И. Л., Скворцов В. А. Задачи, предлагавшиеся на VII Всесоюзной математической олимпиаде // Матем. в школе.— 1973.— № 5.— С. 73—79.
15. Васильев Н. Б. VIII Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1974.— № 6.— С. 59—65.

16. Агаханов Н. Х., Васильев Н. Б., Клумова И. Н., Ионин Ю. И. IX Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1975.— № 6.— С. 62—69.
17. Бернштейн Д. Н., Васильев Н. Б., Ионин Ю. И., Плоткин А. И. X Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1976.— № 6.— С. 59—63.
18. Башмаков М. И., Ионин Ю. И., Бернштейн И. Н., Васильев Н. Б., Мекулиманов Л. Г., Сарычева Т. А. XI Всесоюзная олимпиада школьников по математике // Матем. в школе.— 1977.— № 6.— С. 70—74.
19. Бернштейн И. Н., Васильев Н. Б., Розов Н. Х., Сарычева Т. А., Плоткин А. И. XII Всесоюзная олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1978.— № 6.— С. 50—65.
20. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Земляков Л. И., Розов Н. Х., Сарычева Т. А. XIII Всесоюзная олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1979.— № 6.— С. 52—56.
21. Сарычева Т. А., Вавилов В. В., Нестеренко Ю. В., Савин А. П., Слинько А. М. XV Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1981.— № 6.— С. 54—61.
22. Сарычева Т. А., Нестеренко Ю. В. XVI Всесоюзная математическая олимпиада // Матем. в школе.— 1982.— № 6.— С. 46—51.
23. Пономаренко А. С., Слинько А. М. XVIII Всесоюзная олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1984.— № 5.— С. 50—57.
24. Гришин А. В., Пономаренко А. С., Слинько А. М. XIX Всесоюзная олимпиада школьников по математике // Матем. в школе.— 1985.— № 6.— С. 48—54.
25. Кузнецова Г. М., Купцов Л. П., Пчелинцев С. В., Сергеев И. Н. XXI Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1986.— № 6.— С. 54—61.
26. Вавилов В. В., Кузнецова Г. М., Резниченко С. В. XXII Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1988.—№ 5.— С. 55—60.
27. Кузнецова Г. М., Сергеев И. Н. XXIII Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1989.— № 6.— С. 95—108.
28. Кузнецова Г. М., Сергеев И. Н. XXIV Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1990.— № 6.— С. 49—55.
29. Кузнецова Г. М., Сергеев И. Н. XXV Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Матем. в школе.— 1991.— № 6.— С. 37—45.
30. Кузнецова Г. М., Сергеев И. Н., Митькин Д. А. XXVI Межреспубликанская математическая олимпиада школьников.— 1993.— № 1.— С. 55—61.

Статьи в журнале «Квант»

31. Гутенмахер В. Л. V Всесоюзная математическая олимпиада // Квант.— 1971.— № 11.— С. 35—42.
32. Лиманов Л. Г. VI Всесоюзная математическая олимпиада школьников // Квант.— 1972.— № 10.— С. 64—68.

33. Пашкова Л. М. Олимпиада у математиков // Квант.— 1973.— № 9.— С. 41—46.
34. Лиманов Л. Г. Задачи по математике // Квант.— 1973.— № 9.— С. 47—49.
35. Лиманов Л. Г., Смолянский М. Л. Олимпиада по математике // Квант.— 1974.—№ 40.— С. 40—44.
36. Гутенмахер В. Л. Олимпиада по математике // Квант.— 1975.— № 11.— С. 60—63.
37. Смолянский М. Л., Стеценко В., Турецкий Е. Н. X Всесоюзная олимпиада школьников // Квант.— 1976.— № 11.— С. 56—59.
38. Клумова И. М., Смолянский М. Л. XI Всесоюзная олимпиада школьников // Квант.— 1977.— № 11.— С. 58—63.
39. Лиманов Л. Г. Решение задач олимпиады // Квант.— 1977.— № 11.— С. 63—64.
40. Розов Н. Х., Смолянский М. Л. Олимпиада по математике // Квант.— 1978.—№ 10.— С. 65—70.
41. Лиманов Л. Г. Задачи олимпиады по математике // Квант.— 1978.— № 10.— С. 70.
42. Розов Н. Х., Смолянский М. Л. Олимпиады по математике // Квант.— 1979.— № 11.— С. 48—53.
43. Вавилов В. В., Земляков А. Н., Клумова И. М. XVI Всесоюзная олимпиада школьников // Квант.— 1981.— № 10.— С. 46—51.
44. Вавилов В. В., Земляков А. Н. Олимпиада по математике // Квант.— 1981.— № 11.— С. 44—50.
45. Земляков А. Н. Олимпиада по математике // Квант.— 1982.— № 11.— С. 51—53.
46. Резниченко С. В., Слинько А. М. XVII Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1983.— № 11.— С. 46—48.
47. Купцов Л. П., Резниченко С. В., Сосинский А. Б. XVIII Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1984.— № 11.— С. 45—48.
48. Вавилов В. В., Резниченко С. В. XIX Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1985.— № 11.— С. 51—53.
49. Вавилов В. В., Резниченко С. В., Сергеев И. Н. XX Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1986.— № 11.— С. 49—51.
50. Вавилов В. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. XXI Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1987.— № 11.
51. Вавилов В. В., Резниченко С. В. XXII Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1988.— № 11—12.— С. 74—77, 85, 90—92.
52. Вавилов В. В., Резниченко С. В. XXIII Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1989.— № 11.— С. 65—67, 74, 76—78.
53. Вавилов В. В., Резниченко С. В. XXIV Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1990.— № 11.— С. 58—60, 68; № 12.— С. 72—75.
54. Митькин Д. А., Резниченко С. В. XXV Всесоюзная олимпиада по математике // Квант.— 1991.— № 11.— С. 55—58, 63—64, 73—77.
55. Вавилов В. В., Резниченко С. В. XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике // Квант.— 1992.— № 11.— С. 58—61, 65—66, 72—76.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Агаханов Назар Хангельдыевич
Купцов Леонид Петрович
Нестеренко Юрий Валентинович
Резниченко Сергей Васильевич
Слинько Аркадий Михайлович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Н. В. Сидельковская*
Художники *А. С. Побезинский, А. Е. Чижиков, В. В. Костин*
Художественный редактор *Е. Р. Дащук*
Технические редакторы *Н. Т. Рудникова, О. А. Куликова*
Корректоры *О. В. Ивашкина, И. В. Чернова*

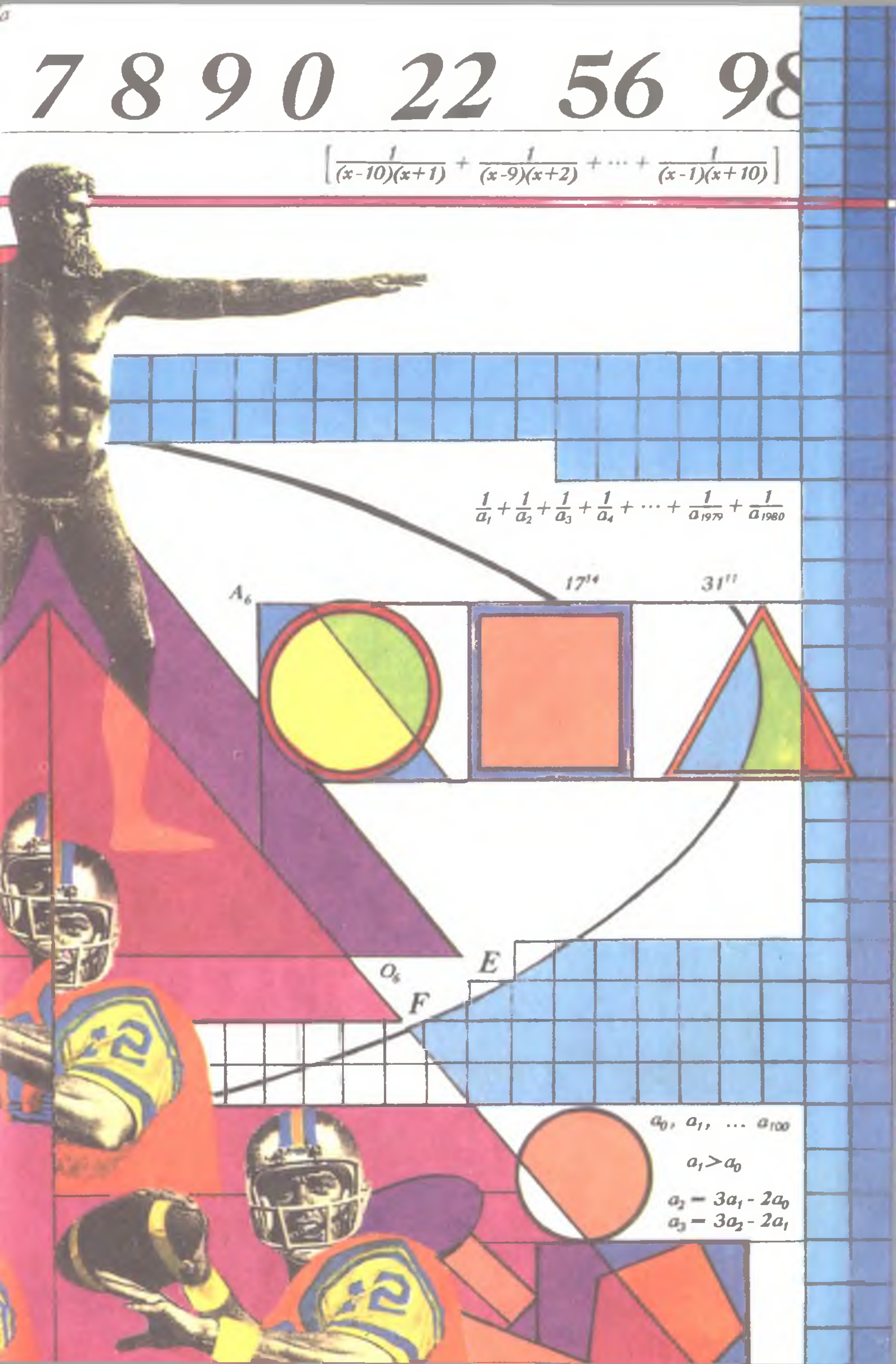
ИБ № 16560

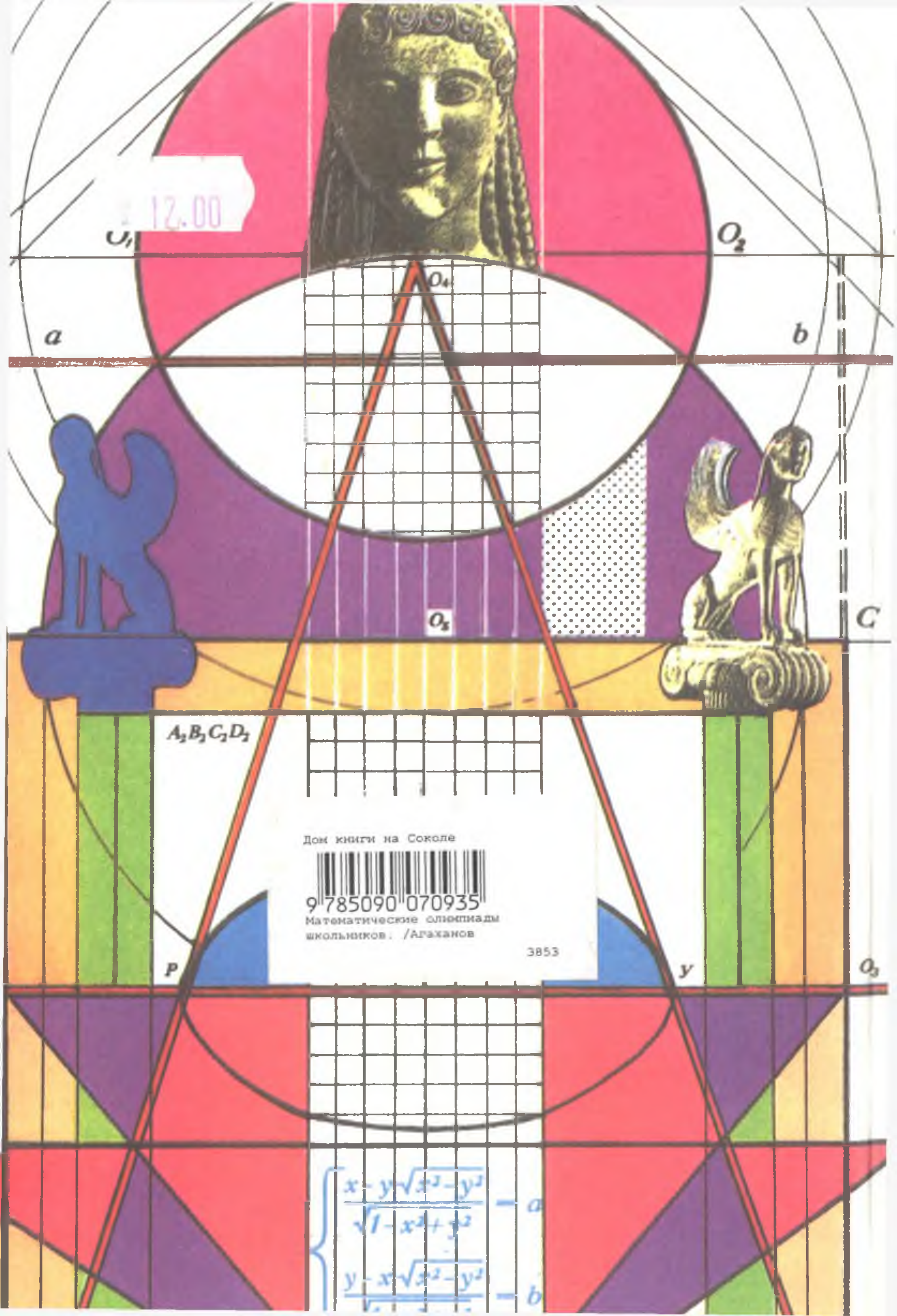
Сдано в набор 16.04.96. Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Подписано к печати 11.12.96. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага кн.-журн. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13+форз. 0,31. Усл. кр.-отт. 27,56. Уч.-изд. л. 12,24+ +форз. 0,47. Тираж 20 000 экз. Заказ № 5553.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

a + b
b
a
a
b
1/2 (a + b)² + 1/4 (a + b) > a√b + b
3 4 5 6
ABCD
15 44 33
O₂
O₃
C
D
A
(a + b)² + 1/4(a


7 8 9 0 22 56 98
$\left[\frac{1}{(x-10)(x+1)} + \frac{1}{(x-9)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x-1)(x+10)}\right]$
$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{1979}} + \frac{1}{a_{1980}}$
A_6
17^{14}
31^{11}
E
O_6
F
$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{100}$
$a_1 > a_0$
$a_2 = 3a_1 - 2a_0$
$a_3 = 3a_2 - 2a_1$


O₁
O₂
O₄
a
b
O₅
C
A₂B₂C₂D₂
P
y
O₃