А. А. Гусак

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

6-е издание

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным специальностям

Минск
«ТетраСистемс»

УДК 517(076.2)(075.8)
ББК 22.161я73
Г96

Автор
кандидат физико-математических наук, профессор *А. А. Гусак*

Рецензенты:
кафедра высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета; доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного аграрного технического университета *И. В. Белько*

Гусак, А. А.
Г96 Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи : учебное пособие / А. А. Гусак. – 6-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 416 с. : ил.

ISBN 978-985-536-228-0.

Учебное пособие включает следующие разделы: введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения, численные методы. Пособие содержит определения основных понятий, соответствующие формулы, более 400 базовых, ключевых примеров с подробными решениями. В конце каждого параграфа помещены задачи для самостоятельного решения, приведены ответы, к некоторым задачам даны указания. Пособие будет полезным при подготовке к практическим занятиям, зачетам и экзаменам, поможет самостоятельно выполнить контрольные работы студентам заочных отделений.

Адресуется студентам и преподавателям вузов.

УДК 51517(076.2)(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-536-228-0

Глава 1. Функция

§ 1.1. Понятие функции. Область определения функции

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных*) чисел. Действительные числа можно изображать точками на числовой прямой.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется неотрицательное действительное число, определяемое равенствами:

$$\left|x\right| = x, \text{ если } x \geq 0; \quad \left|x\right| = -x, \text{ если } x < 0. \tag{1.1}$$

Неравенство

$$\left| x \right| \leq a \quad (a > 0) \tag{1.2}$$

равносильно неравенствам

$$-a \leq x \leq a. \tag{1.3}$$

Свойства абсолютной величины:

1. $\left| x + y \right| \leq \left| x \right| + \left| y \right|.$
2. $\left| x - y \right| \geq \left| x \right| - \left| y \right|.$
3. $\left| xy \right| = \left| x \right| \left| y \right|.$
4. $\left| \dfrac{x}{y} \right| = \dfrac{\left| x \right|}{\left| y \right|} \quad (y \neq 0).$ (1.4)

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные числовые значения.

Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной. Различают следующие простейшие области изменения переменной x:

1) *открытый промежуток* или *интервал* (a, b), т. е. совокупность всех чисел, заключенных между a и b: $a < x < b$ (точки a и b исключены);

2) *замкнутый промежуток* или *сегмент* $[a, b]$, т. е. $a \leq x \leq b$ (точки a и b включены);

3) *полуинтервалы* $[a, b)$, т. е. $a \leq x < b$, и $(a, b]$, т. е. $a < x \leq b$.

Рассмотрим два множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что задано *отображение множества X в множество Y* и пишут $f : X \to Y$.

Функцией называют отображение числового множества X в числовое множество Y и обозначают $y = f(x)$, элементы $x \in X$ называют значениями аргумента, элементы $y \in Y$ – значениями функции; $f(a)$ – значение функции $y = f(x)$ при $x = a$. Множество X называют областью определения функции $y = f(x)$ и обозначают $D(f)$, множество всех значений функции называют областью ее значений и обозначают $E(f)$.

Оператором называют отображение нечислового множества в нечисловое; например, X – множество дифференцируемых функций, Y – множество производных.

Функционалом называют отображение нечислового множества в числовое; например, X – множество дуг линий, Y – множество их длин.

Употребляются и другие (кроме $y = f(x)$) обозначения функции: $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$, $y = \Phi(x)$, $y = y(x)$ и т.д.

Функцию и аргумент можно обозначить и другими символами: $y = f(t)$, $u = \varphi(v)$, $r = r(\varphi)$, $x = x(t)$ и т.д.

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – функции своих аргументов, причем область определения функции $f(u)$ содержит область значений функции $\varphi(x)$, то каждому значению $x \in D(f)$ соответствует единственное значение y такое, что $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $y = f(\varphi(x))$, называется *сложной функцией*, или функцией от функции. Например, если $y = \cos u$, $u = 2x$, то $y = \cos 2x$ – сложная функция; если $y = u^2$, $u = \sin x$, то $y = \sin^2 x$ – сложная функция.

Корнем (или *нулем*) функции $y = f(x)$ называется значение аргумента $x = a$, при котором функция равна нулю:

$$f(a) = 0. \tag{1.5}$$

Совокупность всех значений аргумента, при которых функция имеет определенные действительные значения, называется *областью существования* или *областью определения* функции.

Функция может быть задана табличным, графическим, аналитическим или другим способом.

Явной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = f(x). \tag{1.6}$$

Неявной функцией называется функция, заданная уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{1.7}$$

не разрешенным относительно y.

Функция, определенная в области $-a < x < a$, называется *четной*, если для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(x) = f(-x). \tag{1.8}$$

Функция называется *нечетной*, если для любого x выполняется равенство

$$f(x) = -f(-x). \tag{1.9}$$

Функция называется *периодической* с периодом $2l$, если при любом x из области определения выполняется равенство

$$f(x+2l) = f(x). \tag{1.10}$$

Если

$$y = f(u),\ \ u = \varphi(x) - \tag{1.11}$$

функции своих аргументов, то функция

$$y = f\,[\varphi(x)] \tag{1 .12}$$

называется *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Если уравнение $y = f(x)$ разрешимо относительно x, т. е. существует функция $x = \varphi(y)$ такая, что $f\,[\varphi(y)] \equiv y$, то функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Пример 1. Найти область изменения x, если $|x-2| < 3$.

Решение. По определению абсолютной величины

$$|x-2| = x-2, \text{ если } (x-2) > 0 \text{ или } x > 2;$$

$$|x-2| = -(x-2), \text{ если } (x-2) < 0 \text{ или } x < 2,$$

поэтому соответственно получим неравенства

$$x-2 < 3 \text{ и } -(x-2) < 3,$$

откуда

$$x < 5 \text{ и } x > -1.$$

Следовательно, $-1 < x < 5$, т. е. x меняется в интервале $(-1, 5)$.

Этот пример можно решить и по-другому. На основании формул (1.2) и (1.3) можно записать

$$-3 < x-2 < 3.$$

Прибавляя 2 ко всем частям неравенства, получим

$$2-3<x<3+2 \text{ или } -1<x<5.$$

Пример 2. Найти область изменения *x*, если $|x-1|>2$.

Решение. По определению абсолютной величины

$$x-1>2 \text{ при } (x-1)>0, \text{ т. е. } x>1;$$

$$-(x-1)>2 \text{ при } (x-1)<0, \text{ т. е. } x<1.$$

Из неравенств $x-1>2$ и $-x+1>2$ получаем $x>3, x<-1$.

Следовательно, областью изменения переменной *x* является совокупность двух бесконечных интервалов: $(-\infty, -1), (3, +\infty)$.

Пример 3. Решить уравнение $|x-1|+|x-2|=1$.

Решение. Рассмотрим три случая: 1) $x<1$; 2) $1\le x\le 2$; 3) $x>2$.

В первом случае

$$|x-1|=-(x-1) \text{ и } |x-2|=-(x-2),$$

поэтому уравнение перепишется в виде

$$-(x-1)-(x-2)=1 \text{ или } -2x+2=0,$$

откуда $x=1$, что противоречит неравенству $x<1$. В этом случае решений нет.

Во втором случае

$$|x-1|=x-1 \text{ и } |x-2|=-(x-2),$$

поэтому уравнение принимает вид

$$(x-1)-(x-2)=1,$$

т. е. сводится к тождеству. Следовательно, уравнению удовлетворяют все *x* из отрезка [1, 2].

В третьем случае получаем

$$(x-1)+(x-2)=1 \text{ или } 2x-4=0,$$

откуда $x=2$, что противоречит условию $x>2$.

Таким образом, уравнению удовлетворяют все значения *x*, для которых $1\le x\le 2$.

Пример 4. Дана функция $f(x)=x^2-10x+16$.

Найти значения функции при значениях аргумента, равных соответственно среднему геометрическому и среднему арифметическому ее корней.

Решение. Найдем корни, или нули, функции. Приравнивая функцию нулю, получим квадратное уравнение $x^2-10x+16=0$, корни которого $x_1=2, x_2=8.$ Среднее арифметическое корней $x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}=5$ и среднее геометрическое $x''=\sqrt{x_1x_2}=4.$

Подставляя найденные значения аргумента в выражение для $f(x)$, получаем соответственно

$$f(4)=4^2-10\cdot 4+16=-8,\ \ f(5)=5^2-10\cdot 5+16=-9.$$

Пример 5. Доказать, что функция $f(x)=\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}$ является четной.

Решение. Убедимся в том, что для данной функции выполняется условие (1.8). Подставляя $-x$ вместо x в выражение для $f(x)$, получим

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x+a)^2}+\sqrt[3]{(-x-a)^2}.$$

Так как

$$(-x+a)^2=(x-a)^2,\ \ (-x-a)^2=(x+a)^2,$$

то

$$f(-x)=\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{(x+a)^2}=\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}=f(x).$$

Пример 6. Доказать, что функция $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$ является нечетной.

Решение. Убедимся в том, что выполняется условие (1.9):

$$f(-x)=(-x)-\frac{(-x)^3}{3}+\frac{(-x)^5}{5}=-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}=-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)=-f(x).$$

Пример 7. Показать, что функция $f(x)=\operatorname{tg}x\sin 3x+\operatorname{ctg}2x$ является периодической, и найти ее период.

Решение. Так как

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\,(x+\pi),$$

т. е. функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π,

$$\sin\,(3x+2\pi) = \sin\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

т. е. функция $\sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$,

$$\operatorname{ctg}\,(2x+\pi) = \operatorname{ctg}\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

т. е. функция $\operatorname{ctg} 2x$ имеет период $\frac{\pi}{2}$, то функция $f(x)$ имеет период, равный наименьшему кратному чисел $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, т. е. 2π. В самом деле,

$$f(x+2\pi) = \operatorname{tg}\,(x+2\pi)\sin\,(3x+2\pi) + \operatorname{ctg}\,(2x+2\pi) =$$

$$= \operatorname{tg} x \sin 3x + \operatorname{ctg} 2x = f(x).$$

Пример 8. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{x-8}{x^2-7x+12}.$$

Решение. Данная функция не определена для тех значений x, при которых знаменатель обращается в нуль (так как деление на нуль не имеет смысла). Приравнивая нулю знаменатель, получим $x^2-7x+12=0$, откуда $x_1=3, x_2=4$. Итак, функция определена на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, кроме точек $x_1=3, x_2=4$. Другими словами, областью определения является совокупность трех интервалов: $(-\infty, 3), (3, 4), (4, +\infty)$.

Замечание. Дробная рациональная функция $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – полиномы соответственно степени m и n, определена для всех x, кроме нулей функции $Q_n(x)$.

Пример 9. Найти область существования функции

$$f(x)=\sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}+\sqrt[3]{5x+7}.$$

Решение. Функция представляет собой сумму двух функций. Вторая из них определена при всех x, так как корень третьей степени существует при любом x. Первая функция $\sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}$ определена лишь при тех значениях x, при которых подкоренное выражение неотрицательно (корень квадратный существует только для неотрицательных чисел). Итак, должно быть

$$(9-x^2)(x^2-4)\geq 0.$$

Это возможно, когда:

$$1)\ 9-x^2\geq 0,\ x^2-4\geq 0;\ 2)\ 9-x^2\leq 0,\ x^2-4\leq 0.$$

Рассмотрим первое условие: $x^2\leq 9$, т. е. $|x|\leq 3$ или $-3\leq x\leq 3$ и $x^2\geq 4$, т. е. $|x|\geq 2$ или $x\leq -2$ и $x\geq 2$. Таким образом, это условие выполняется, когда

$$-3\leq x\leq -2 \text{ и } 2\leq x\leq 3.$$

Переходим ко второму условию, которое перепишется так: $x^2\geq 9$, т. е. $|x|\geq 3$ или $x\leq -3$ и $x\geq 3$, и $x^2\leq 4$, т. е. $|x|\leq 2$ или $-2\leq x\leq 2$. Следовательно, это условие не выполнимо (не могут одновременно выполняться неравенства $-2\leq x\leq 2$, $x<-3$, $x>3$).

Таким образом, областью определения функции $f_1(x)=\sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}$ является совокупность двух сегментов: $[-3,-2]$, $[2, 3]$.

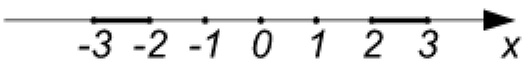


Рис. 1.1

Сумма двух функций определена там, где определено каждое слагаемое, поэтому исходная функция также определена в указанных двух сегментах (рис. 1.1).

Замечание. Если функция содержит радикалы четной степени, то она определена лишь при тех значениях x, при которых подкоренные выражения неотрицательны.

Пример 10. Найти область определения функции

$$y=\arcsin\frac{2x-1}{3}.$$

Р е ш е н и е . Функция $u = \arcsin t$ определена при $-1 \le t \le 1$. Следовательно, данная функция определена только для тех значений x, для которых

$$-1 \le \frac{2x-1}{3} \le 1, \text{ откуда } -3 \le 2x-1 \le 3.$$

Решив эти неравенства, получим $-1 \le x \le 2$. Итак, функция определена на отрезке $[-1, 2]$.

П р и м е р 1 1 . Найти область определения функции

$$f(x) = \log(4 - x^2).$$

Р е ш е н и е . Логарифмическая функция определена при положительных значениях своего аргумента, т. е. при $4 - x^2 > 0$, откуда $x^2 < 4$ или $|x| < 2$. Следовательно, данная функция определена при $-2 < x < 2$, т. е. в интервале $(-2, 2)$.

П р и м е р 1 2 . Найти $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$, если $f(x) = \sin x,\ \varphi(x) = x^2$.

По определению данных функций имеем $f(t) = \sin t$, $\varphi(u) = u^2$, поэтому

$$f\,[\varphi(x)] = \sin\varphi(x) = \sin x^2,$$

$$\varphi\,[f(x)] = (f(x))^2 = \sin^2 x.$$

П р и м е р 1 3 . Дан треугольник ABC, основание которого $AB = c$ и высота $KC = h$ (рис. 1.2).

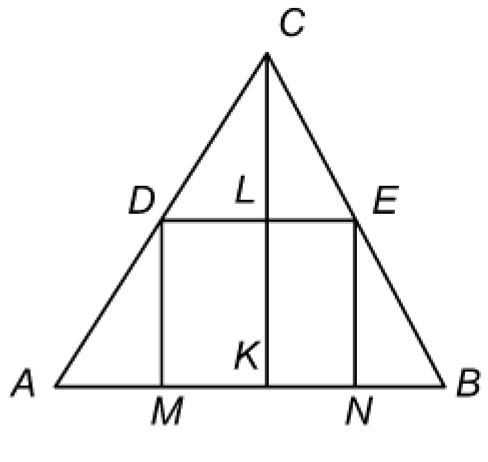


Рис. 1.2

В треугольник вписан прямоугольник $DENM$, высота которого $DM = x$. Выразить площадь прямоугольника как функцию высоты.

Р е ш е н и е . Обозначим основание MN вписанного прямоугольника через y. Площадь выразится формулой

$$S = xy. \qquad \text{(A)}$$

Переменные x и y не являются

независимыми, они связаны некоторым соотношением. Из подобия треугольников DEC и ABC получаем

$$\frac{CL}{CK}=\frac{DE}{AB}. \tag{B}$$

Так как $CL=h-x$, $DE=y$, $CK=h$, $AB=c$, то равенство (B) примет вид

$$\frac{h-x}{h}=\frac{y}{c},$$

откуда

$$y=\frac{c}{h}(h-x). \tag{C}$$

Из равенств (A) и (C) получаем искомую функциональную зависимость

$$S=\frac{c}{h}(h-x)\,x.$$

Пример 14. Найти обратные функции для данных функций:

1) $y=3x-5$; 2) $y=\sqrt{1-x^3}$;

3) $y=\arcsin 3x$; 4) $y=x^2+2$.

Решение. Разрешая каждое из данных уравнений относительно x, получим следующие обратные функции:

1) $x=\frac{1}{3}(y+5)$ (определена при всех y, т. е. для $-\infty<y<+\infty$);

2) $x=\sqrt[3]{1-y^2}$ (определена при всех y);

3) $x=\frac{1}{3}\sin y$ (определена при $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$);

4) $x=\sqrt{y-2}$ и $x=-\sqrt{y-2}$ (определены при $y\ge 2$, т. е. в бесконечном полуинтервале $[2,+\infty)$).

Задачи

1. Найти область изменения переменной x и изобразить ее на числовой прямой в каждом из следующих случаев:

1) $|x-3|<4$; 2) $|x+2|\le 5$;

3) $|x-4|>7$; 4) $x^2 \le 25$;

5) $x^2 \ge 16$.

2. Решить уравнение $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

3. Дана функция $f(x)=x^2-x+2$. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x+h)$.

4. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной:

1) $f(x)=x^4-\frac{x^2}{2}$; 2) $f(x)=\log\frac{a+x}{a-x}$;

3) $f(x)=a^x+a^{-x}$; 4) $f(x)=a^x-a^{-x}$;

5) $f(x)=3^x$; 6) $f(x)=\sin x+\cos x$.

5. Доказать, что следующие функции являются периодическими, и найти их периоды:

1) $f(x)=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $f(x)=\cos\frac{x}{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

6. Найти области определения функций и изобразить их на числовой прямой:

1) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt[3]{2x+3}$; 2) $y=\frac{4x-7}{x^2-5x+6}$;

3) $y=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$; 4) $f(x)=\sin^2 x$;

5) $u=\sqrt{\sin t}$; 6) $y=\sin\sqrt{x}$;

7) $y=\lg\sin x$; 8) $y=\sqrt{\lg\cos x}$.

7. Найти $f\,[\varphi\,(x)]$ и $\varphi\,[f(x)]$, если $f(x)=x^3$, $\varphi\,(x)=\cos x$.

8. В треугольнике ABC сторона $BC=a$, сторона $AC=b$ и переменный угол $\angle ACB=x$. Выразить площадь треугольника как функцию x.

9. Найти явные обратные функции для каждой из данных функций:

1) $y=2x-5$; 2) $y=3^x$;

3) $y=\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=\cos\frac{x}{3}$.

Ответы

1. 1) $-1 < x < 7$, 2) $-7 \le x \le 3$, 3) $x < -3$ и $x > 11$, 4) $-5 \le x \le 5$, 5) $x \le -4$ и $x \ge 4$. **2.** $-3 \le x \le -2, 2 \le x \le 3$. **3.** 4; 2; 2; 4; $x^2 + x + 2$; $(2x^2 - x + 1)$ $\frac{1}{x^2}$. **4.** 1) четная; 2) нечетная; 3) четная; 4) нечетная; 5) и 6) функции не удовлетворяют ни условию четности, ни условию нечетности. **5.** 1) $2l = 2\pi$, 2) $2l = 30\pi$. **6.** 1) $-4 \le x \le 4$, 2) $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$, 3) $-4 < x < 4$, 4) $-\infty < x < +\infty$, 5) совокупность отрезков $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, 6) $x \ge 0$, 7) совокупность интервалов $(2k\pi, \ (2k+1)\pi)$, 8) совокупность точек $x_n = 2\pi n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. **7.** $f\,[\varphi(x)] = \cos^3 x$, $\varphi\,[f(x)] = \cos x^3$. **8.** $S = \frac{ab}{2}\sin x$. **9.** 1) $x = \frac{1}{2}(y+5)$; 2) $x = \log_3 y$; 3) $x = +\sqrt{1-y^2}$, $x = -\sqrt{1-y^2}$; 4) $x = 3\arccos y$.

§ 1.2. График функции. Простейшие преобразования графика

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) составляется таблица значений аргумента и функции на основе данной формулы;

2) в выбранной системе координат строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения переменных, содержащиеся в таблице;

3) полученные точки соединяют плавной линией.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.

Графики суммы (разности), произведения и частного

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x), \qquad (1.13)$$

$$\varphi(x) = f_1(x) \cdot f_2(x), \tag{1.14}$$

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \tag{1.15}$$

получаются из графиков функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ соответственно путем сложения (вычитания), умножения и деления значений данных функций при данных значениях аргумента.

Предположим, что график функции

$$y = f(x) \tag{1.16}$$

известен (рис. 1.3).

1. График функции

$$y = f(x - a) \tag{1.17}$$

представляет собой график функции $y = f(x)$, сдвинутый вдоль оси Ox на $|a|$ масштабных единиц влево, если $a > 0$, и вправо, если $a < 0$ (рис. 1.3).

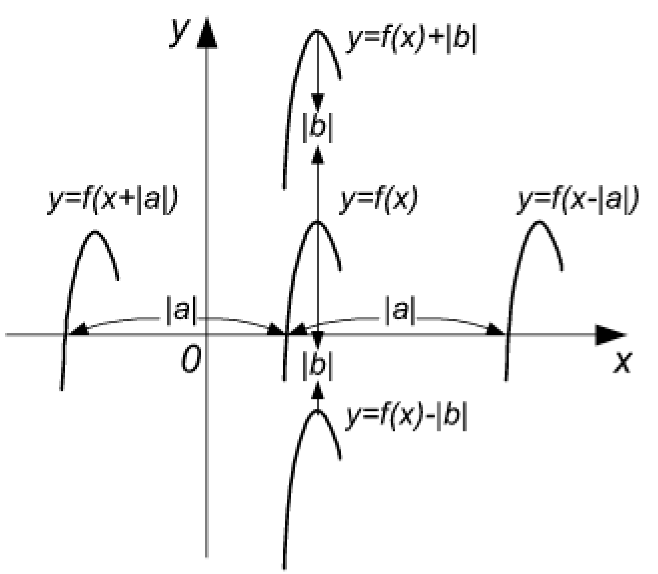


Рис. 1.3

2. График функции

$$y = f(x) + b \tag{1.18}$$

получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$ (рис. 1.3).

3. График функции

$$y = cf(x) \tag{1.19}$$

получается из исходного графика путем умножения его ординат на коэффициент c, причем ординаты увеличиваются в c раз при $c > 1$ и уменьшаются в $\frac{1}{c}$ раз при $0 < c < 1$, а соответствующие абсциссы остаются прежними (рис. 1.4). График функции $y = cf(x)$ является зеркальным отображением графика $y = -cf(x)$ относительно оси Ox (рис. 1.4).

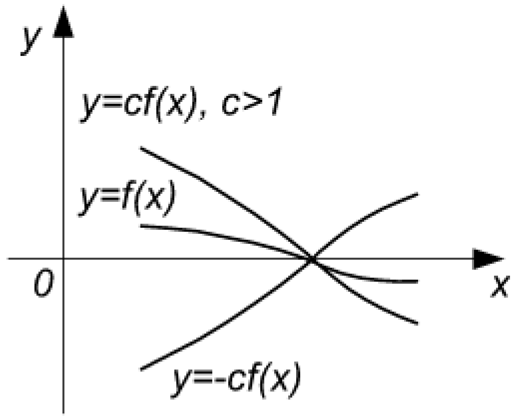


Рис. 1.4

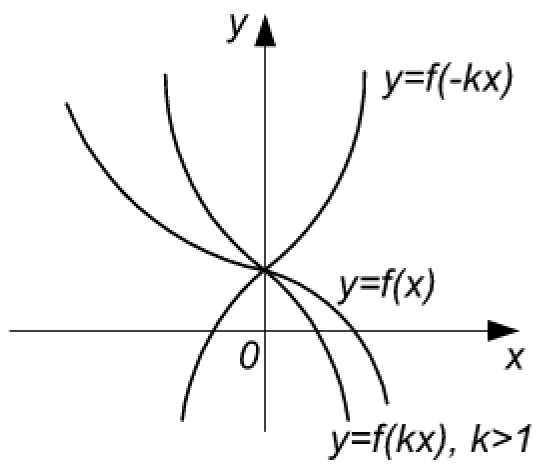


Рис. 1.5

4. График функции

$$y = f(kx) \tag{1.20}$$

получается из исходного графика увеличением в $\frac{1}{k}$ раз абсцисс его точек при $0 < k < 1$ и их уменьшением в k раз при $k > 1$ с сохранением их ординат (рис. 1.5). Если $k < 0$, то график функции $y = f(kx)$ представляет собой отображение графика $y = f(-kx)$ относительно оси Oy.

Указанные преобразования дают возможность строить графики функций более сложного вида:

$$y = cf\,[k\,(x - a)] + b\,. \tag{1.21}$$

Пример 1. Построить по точкам график функции $y = x^3$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Составим таблицу значений аргумента и функции:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-8	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

Построив точки $M_1(-2, -8)$, $M_2\left(-1\frac{1}{2}, -3\,\frac{3}{8}\right)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$, $M_5(0, 0)$, $M_6\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $M_7(1, 1)$, $M_8\left(1\frac{1}{2}, 3\,\frac{3}{8}\right)$,

$M_9(2, 8)$ и соединив их плавной кривой, получим график функции $y = x^3$ (рис. 1.6).

П р и м е р 2. Построить график функции $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Функция эта определена при всех значениях x, за исключением точки $x = 0$. Придавая аргументу указанные ниже значения и вычисляя соответствующие значения функции, составляем таблицу:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

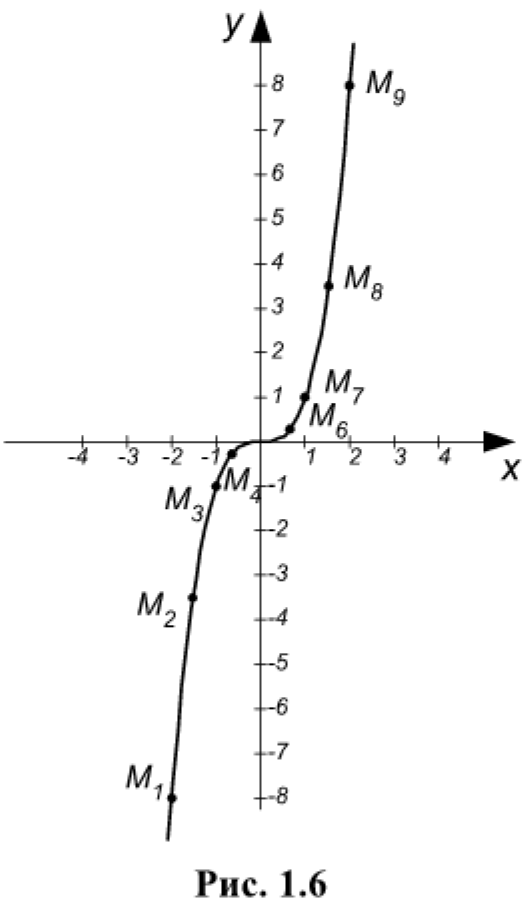


Рис. 1.6

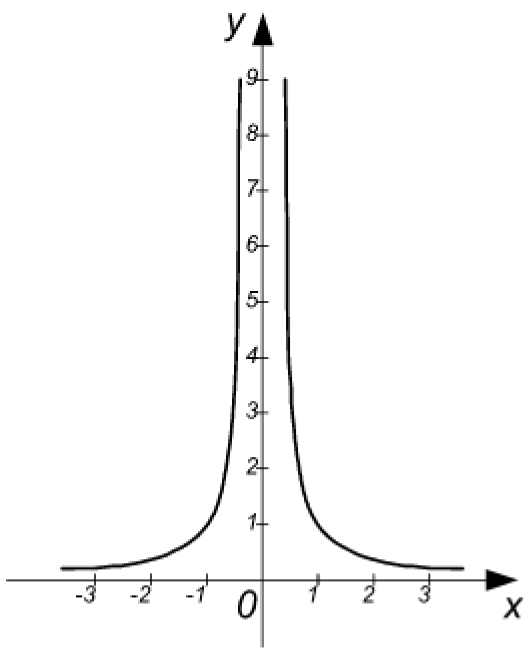


Рис. 1.7

Построив точки по данным координатам и соединив их плавной кривой, получим график данной функции (рис. 1.7). Поскольку функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является четной, график ее симметричен относительно оси Oy.

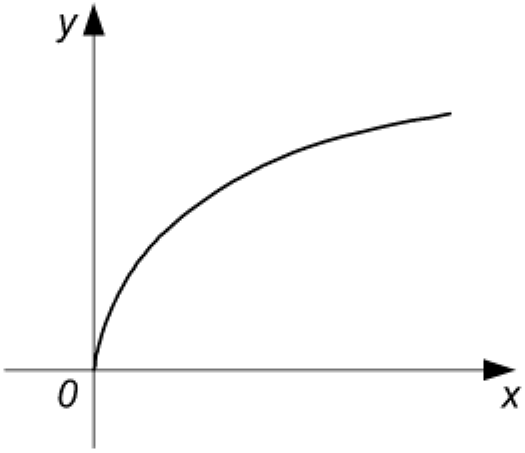


Рис. 1.8

Пример 3. Построить график функции $y=\sqrt{x}$.

Решение. Функция $y=\sqrt{x}$ определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x \geq 0$. Следовательно, областью определения функции является бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$.

Возводя в квадрат обе части данного уравнения, находим $y^2 = x$. Полученное уравнение определяет параболу, для которой ось Ox будет осью симметрии.

Извлекая квадратный корень, получим $y=\pm\sqrt{x}$. По условию нужно взять только знак плюс. Следовательно, искомым графиком является часть параболы, для которой $y \geq 0$ (рис. 1.8).

Пример 4. Построить график функции $y=-\sqrt{16-x^2}$.

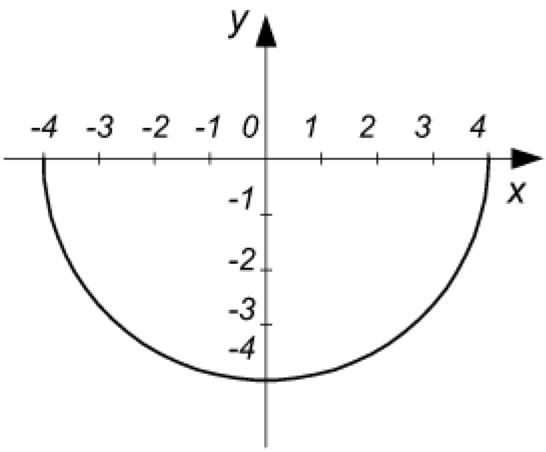


Рис. 1.9

Решение. Данная функция определена, когда $16-x^2 \geq 0$ или $x^2 \leq 16$, т. е. при $-4 \leq x \leq 4$. Таким образом, областью определения является сегмент $[-4, 4]$.

Возведя в квадрат обе части уравнения $y=-\sqrt{16-x^2}$, получим $x^2+y^2=16$. Это уравнение окружности радиуса $R=4$ с центром в начале координат.

Поскольку исходная функция принимает лишь отрицательные значения, то графиком ее будет полуокружность, расположенная ниже оси Ox (рис. 1.9).

Пример 5. Построить график функции $f(x)=x+\sin x$.

Решение. График данной функции получается путем сложения графиков двух функций: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\sin x$, изображенных на рис. 1.10 штриховыми линиями. Ряд точек графика функции $f(x)=x+\sin x$ можно построить, принимая во внимание следующее:

1) $f(x)=x$ для тех x, при которых $\sin x=0$;

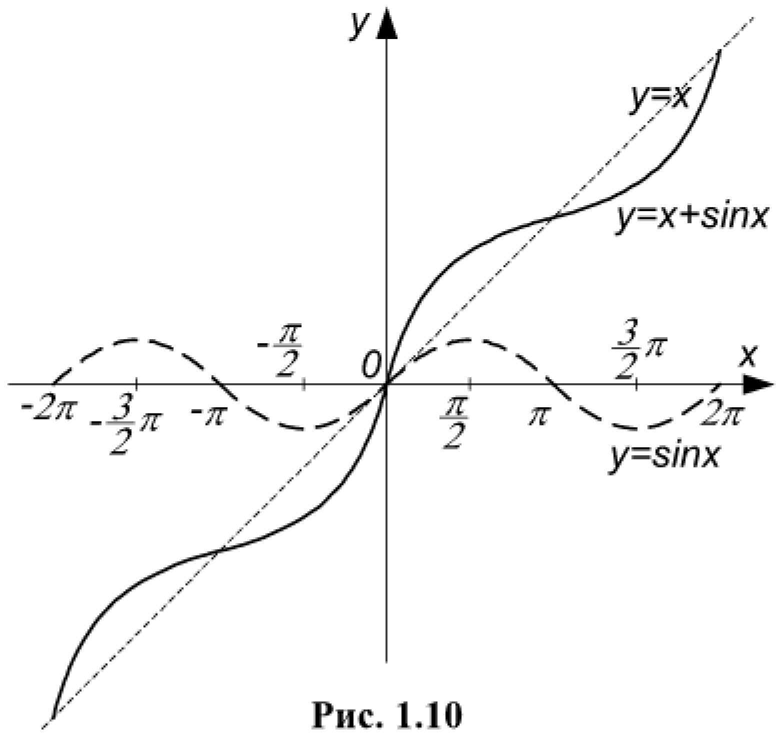


Рис. 1.10

2) $f(x) = x+1$ для тех x, при которых $\sin x = 1$;

3) $f(x) = x-1$ для тех x, при которых $\sin x = -1$.

Пример 6. Построить график функции $f(x) = x\sin x$.

Решение. График этой функции представляет собой произведение графиков двух функций: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$. График можно построить по точкам, имея в виду следующее:

1) так как $-1 \le \sin x \le 1$, то $-x \le f(x) \le x$, т. е. график функции $f(x) = x\sin x$ целиком расположен между прямыми $y = x$ и $y = -x$ (рис. 1.11);

2) $f(x) = 0$, если $\sin x = 0$;

3) $f(x) = x$, если $\sin x = 1$;

4) $f(x) = -x$, если $\sin x = -1$.

Пример 7. Построить график функции $f(x) = \operatorname{cosec} x$.

Решение. Данная функция определена на всем множестве действительных чисел, кроме точек $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, т. е. областью ее определения является совокупность интервалов $\ldots(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)\ldots$

Так как $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, то график функции можно построить с помощью графика $f_1(x) = \sin x$. Построим график функции

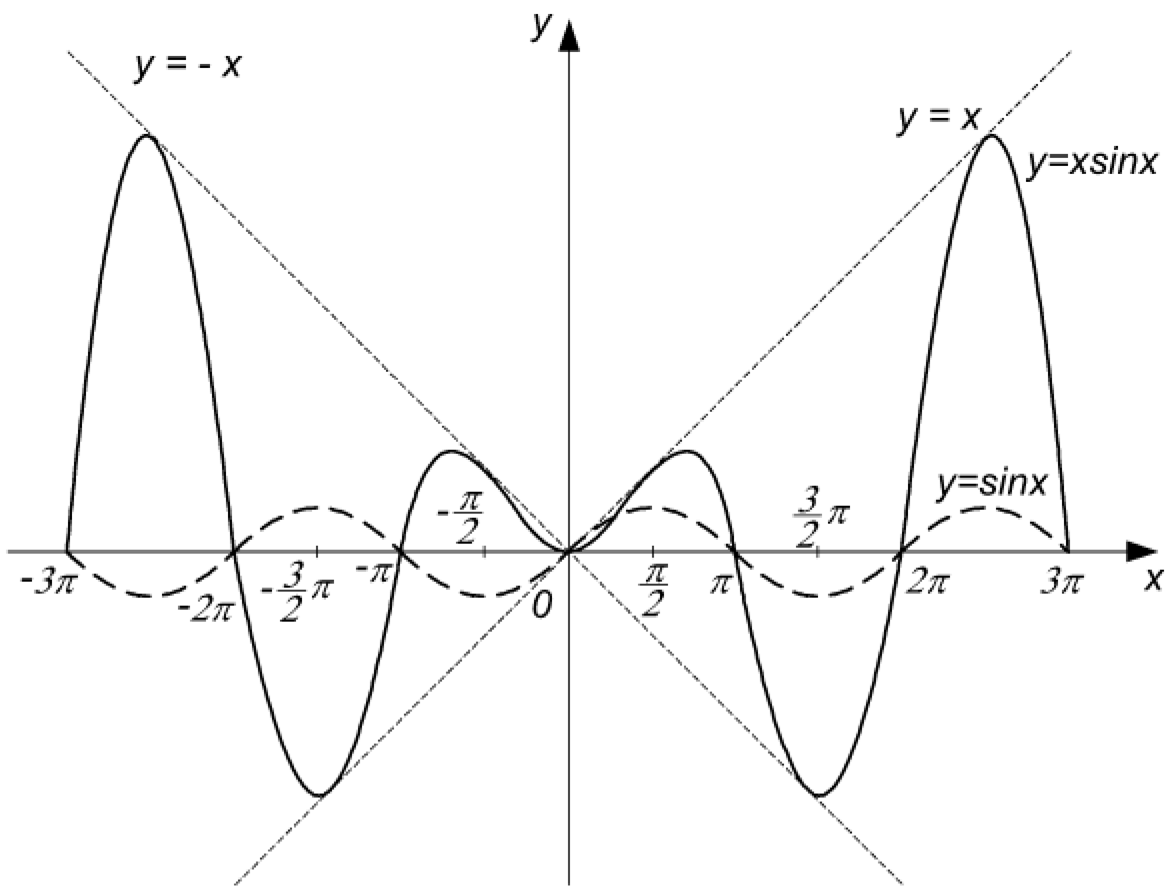


Рис. 1.11

$f(x) = \operatorname{cosec} x$ в интервале $(0, \pi)$. при $x = \dfrac{\pi}{2}$ получаем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$ При $x \to 0$ и $x \to \pi$ функция неограниченно возрастает, график ее имеет вид, изображенный на рис. 1.12. В интервале $(\pi, 2\pi)$ функция принимает отрицательные значения, причем $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = -1.$ График функции в других интервалах получается из условия периодичности.

Пример 8. Построить график функции $y = \sin x + 3.$

Решение. Графиком данной функции является синусоида, сдвинутая в направлении оси Oy вверх на три единицы (рис. 1.13) (см. формулу (1.18)).

Пример 9. Построить график функции $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

Решение. График этой функции представляет собой косинусоиду, сдвинутую вдоль оси Ox вправо на величину, равную $\dfrac{\pi}{4}$ (рис. 1.14) (см. формулу (1.17)).

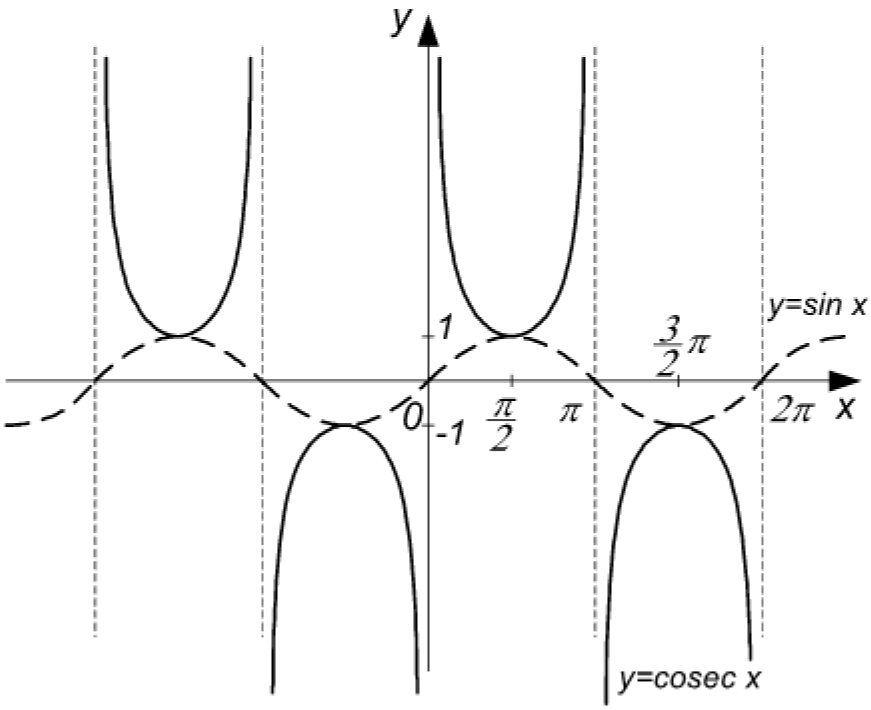


Рис. 1.12

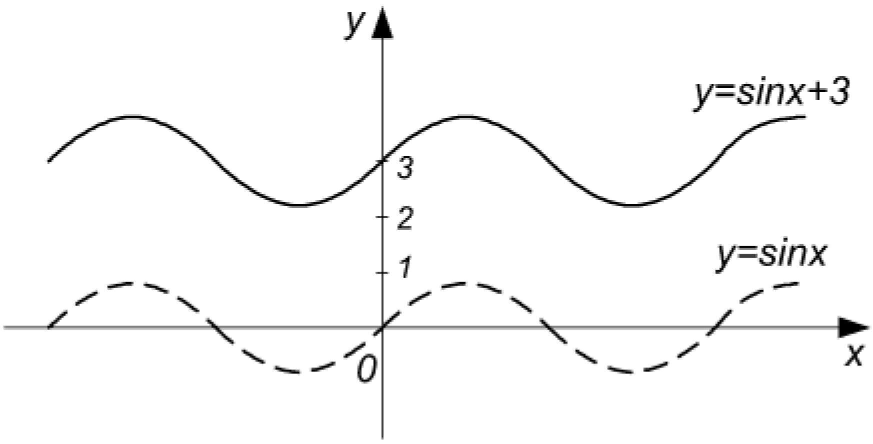


Рис. 1.13

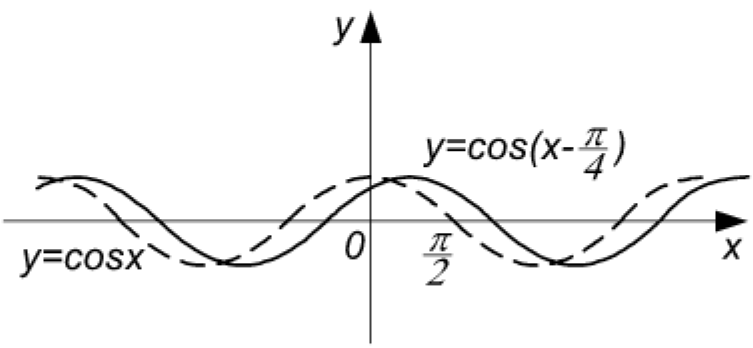


Рис. 1.14

П р и м е р 1 0 . Построить график функции $y = 3\sin 2x$.

Р е ш е н и е . На основании простейших преобразований графика (3 и

4) заключаем, что график этой функции является синусоидой, абсциссы которой уменьшены в два раза, а ординаты увеличены в три раза (рис. 1.15).

Пример 11. Построить график функции

$$y = -4\cos(2x - 6) + 1.$$

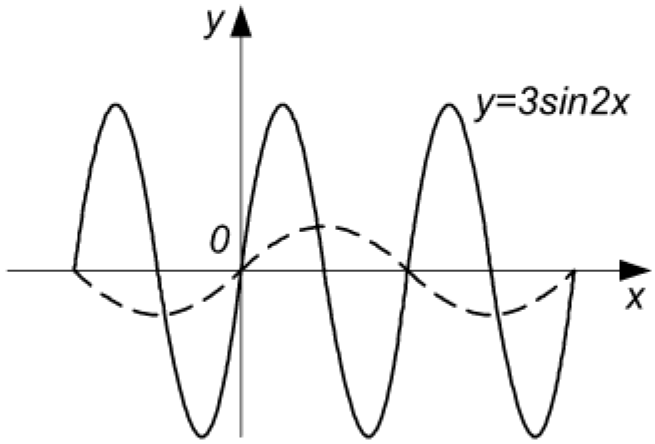


Рис. 1.15

Решение. Данную функцию можно представить в виде

$$y = -4\cos[2(x - 3)] + 1. \qquad (A)$$

Сравним эту функцию с функцией, получающейся из формулы (1.21) при замене символа f символом cos, т. е. функцией

$$f(x) = c\cos[k(x - a)] + b. \qquad (B)$$

Функция (A) получается из функции (B) при следующих значениях параметров: $c = -4,\ k = 2,\ a = 3,\ b = 1.$

Принимая во внимание простейшие преобразования графика, получаем основные этапы построения графика данной функции:

1) увеличивая в 4 раза ординаты точек графика функции $y = \cos x$, меняя их знаки и сохраняя неизменными абсциссы точек, строим график функции $y = -4\cos x$ (рис. 1.16);

2) уменьшая в 2 раза абсциссы точек графика функции $y = -4\cos x$ и сохраняя их ординаты, строим график функции $y = -4\cos 2x$;

3) перенося точки графика функции $y = -4\cos 2x$ в направлении оси Ox на 3 единицы вправо, строим график функции $y = -4\cos 2(x - 3)$;

4) перенося точки графика функции $y = -4\cos 2(x - 3)$ в направлении оси Oy на 1 единицу вверх, получим график исходной функции

$$y = -4\cos[2(x-3)]+1.$$

Пользуясь периодичностью рассматриваемой функции, полученный график можно продолжить в обе стороны.

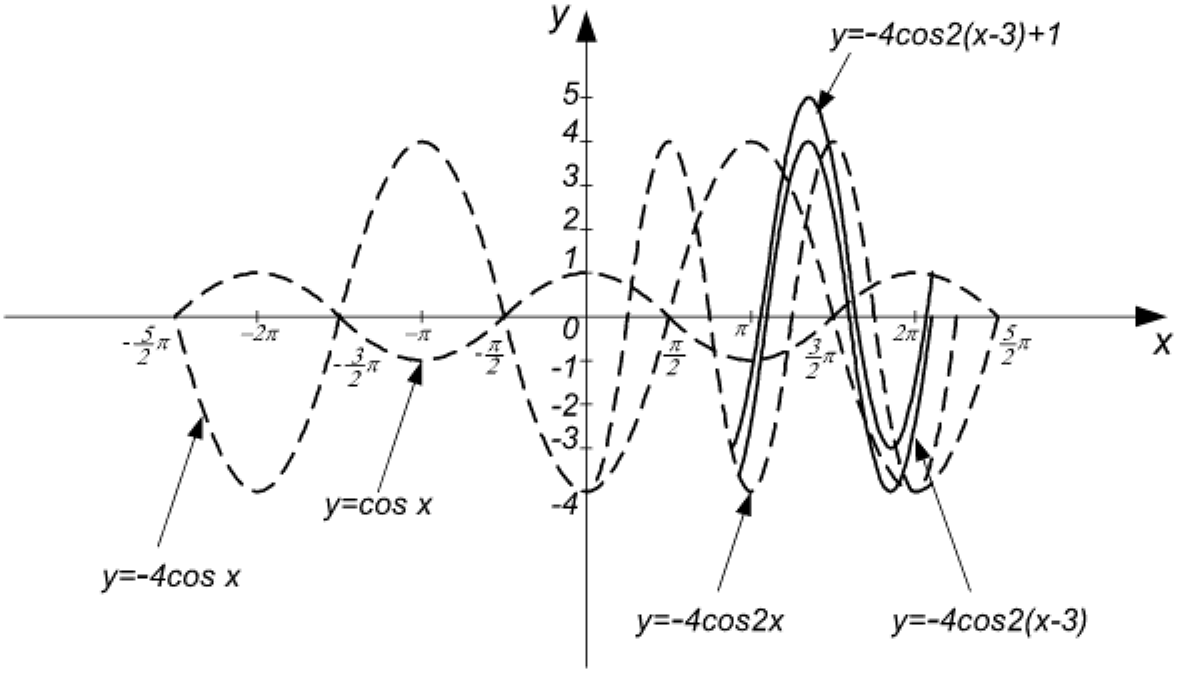


Рис. 1.16

Пример 12. Построить график функции $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Функция эта определена при всех x. Построим сначала график функции $y = \sin x$ (рис. 1.17). Так как $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f(\pi) = 0$, то точки $M_1(0, 0)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $M_3(\pi, 0)$ являются общими для обоих графиков. График функции $f(x) = \sin^2 x$ в промежутке $[0, \pi]$ расположен ниже синусоиды (поскольку квадраты чисел, меньших единицы, меньше самих чисел), в промежутке $[\pi, 2\pi]$ график также проходит выше оси Ox (1.17), так как $\sin^2 x \geq 0$ при любых x.

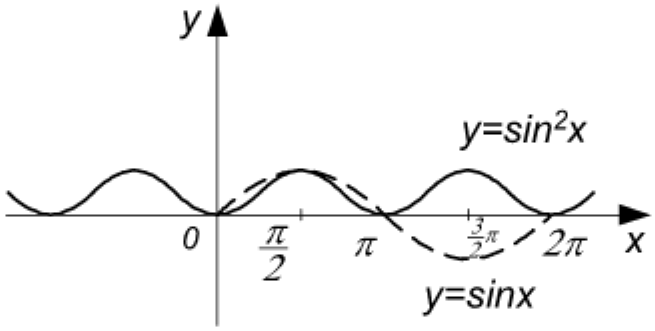


Рис. 1.17

Замечание. График функции можно построить и другим способом, принимая во внимание, что

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ или } \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Пример 13. Построить график функции $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

Решение. Данная функция определена лишь для тех x, для которых

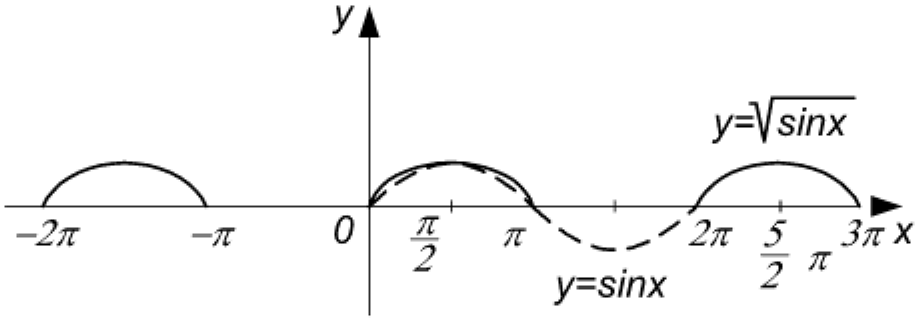


Рис. 1.18

$\sin x \geq 0$, т. е. в отрезках вида $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Строим вначале график функции $y = \sin x$ (рис. 1.18). График функции $f(x) = \sqrt{\sin x}$ расположен выше соответствующей дуги синусоиды (так как квадратный корень из числа, меньшего единицы, больше самого числа). Точки, имеющие ординаты $y = 0$, $y = 1$, являются общими для обоих графиков.

Пример 14. Построить график функции $f(x) = |\sin x|$.

Решение. По определению абсолютной величины (см. § 1.1, равенства (1.1)) имеем $f(x) = \sin x$, если $\sin x \geq 0$ и $f(x) = -\sin x$, если $\sin x < 0$.

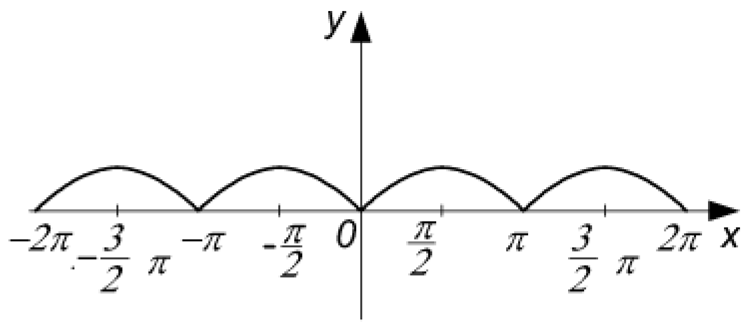


Рис. 1.19

Следовательно, график данной функции можно построить следующим образом. Если $\sin x \geq 0$, то график ее совпадает с графиком $y = \sin x$; если $\sin x < 0$, то дуга графика $f(x) = |\sin x|$ является отображением относительно оси Ox соответствующей дуги графика $y = \sin x$ (рис. 1.19).

П р и м е р 15. Построить график функции $f(x) = \sin|x|$.

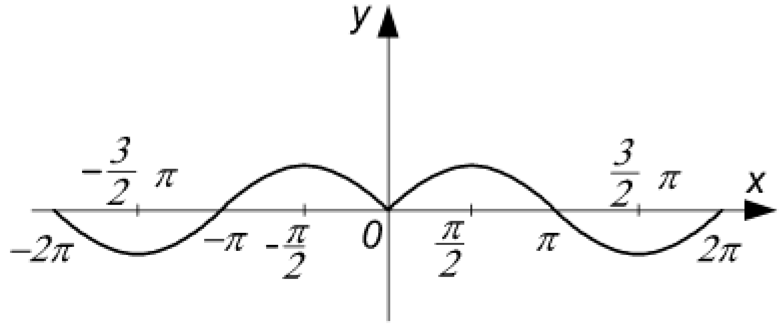


Рис. 1.20

Р е ш е н и е. Так как $f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x)$, то данная функция является четной. Ее график симметричен относительно оси Oy, при $x \geq 0$ график совпадает с графиком функции $y = \sin x$ (рис. 1.20).

П р и м е р 15. Построить график функции $f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right|$.

Р е ш е н и е. Построим сначала график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Преобразуя правую часть последнего уравнения, получим

$$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3, \quad y = (x-1)^2 - 4,$$

откуда

$$y + 4 = (x-1)^2.$$

Это уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O'(1, -4)$ и осью, параллельной оси Oy (рис. 1.21). Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (значения x получены из уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$). Уравнение $y = x^2 - 2x - 3$ можно представить в виде $y = (x+1)(x-3)$, откуда видно, что

$$(x^2 - 2x - 3) > 0 \text{ при } x < -1 \text{ и } x > 3,$$

$$(x^2 - 2x - 3) < 0 \text{ при } -1 < x < 3.$$

Переходим к функции $f(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right|$. По определению абсолютной величины имеем:

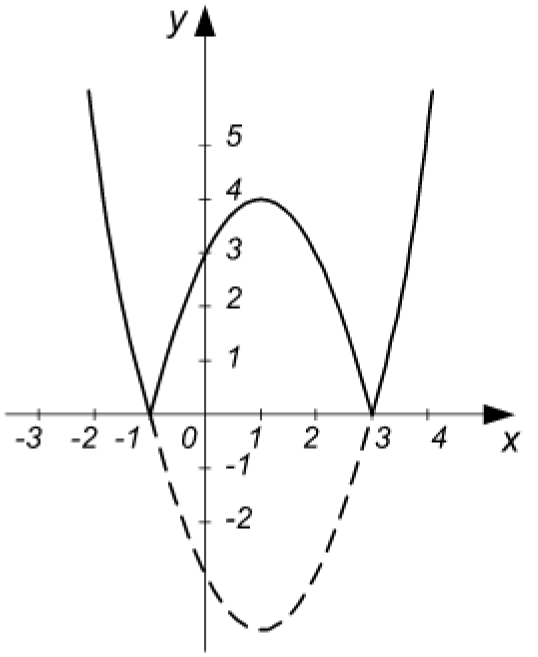


Рис. 1.21

$f(x) = x^2 - 2x - 3$, если

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$;

$f(x) = -(x^2 - 2x - 3)$, если

$(x^2 - 2x - 3) < 0$.

Следовательно график функции $f(x) = \left| x^2 - 2x - 3 \right|$ получается следующим образом: при $x < -1$ и $x > 3$ он совпадает с графиком функции $y = x^2 - 2x - 3$; при $-1 < x < 3$ совпадает с графиком $y = -(x^2 - 2x - 3)$, т. е. получается из графика $y = x^2 - 2x - 3$ при изменении знака ординат всех его точек (рис. 1.21).

Задачи

Построить по точкам графики функций:

1. $y = x^{4.}$ **2.** $y = \dfrac{1}{x^3}$.

3. $y = \sqrt{x+1} + 2$. **4.** $y = 4 - \sqrt{1 - 3x}$.

Построить графики функций (с помощью сложения, умножения, деления):

5. $y = \log_a x + x$. **6.** $y = x - \sin x$.

7. $y = x \cos x$. **8.** $y = \sec x$.

С помощью простейших преобразований построить графики функций:

9. $y = \cos x - 2$. **10.** $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. $y = 4\cos 3x$. **12.** $y = -2\sin(3x + 9)$.

Построить графики функций:

13. $y = \cos^2 x$. **14.** $y = \sqrt{\cos x}$.

15. $y = \left|\cos x\right|$. **16.** $y = \cos\left|x\right|$.

17. $y = \left|\cos\left|x\right|\right|$. **18.** $y = \left|x^2 + 5x - 6\right|$.

§ 1.3. Предел переменной величины. Бесконечно малая и бесконечно большая величина

Пусть переменная x принимает последовательно значения:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \qquad (1.22)$$

Такое перенумерованное множество чисел называется *последовательностью* $\{x_n\}$. Последовательность задана, если известна формула для n-го члена.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1.23)$$

Обозначение предела последовательности (1.22):

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a. \qquad (1.24)$$

Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (в точке a), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \qquad (1.25)$$

когда

$$0 < |x - a| < \delta. \qquad (1.26)$$

Предел функции обозначается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad (1.27)$$

(x стремится к a произвольным образом).

Обозначения *односторонних пределов* функции:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \qquad (1.28)$$

(x стремится к a слева, оставаясь меньше a),

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \qquad (1.29)$$

(x стремится к a справа, оставаясь больше a).

В частности, при $a = 0$ вместо $0 - 0$ пишут -0 и вместо $0 + 0$ пишут $+0$, поэтому формулы (1.28) и (1.29) принимают вид:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = b, \tag{1.30}$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = b. \tag{1.31}$$

Если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b, \tag{1.32}$$

то

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{1.33}$$

Если односторонние пределы различны, т. е.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x) \tag{1.34}$$

или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x \to a$.

Переменная величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое $\delta > 0$, что

$$|\alpha(x)| < \varepsilon, \text{ когда } |x - a| < \delta. \tag{1.35}$$

Предел бесконечно малой величины $\alpha(x)$ равен нулю, т. е.

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0. \tag{1.36}$$

Разность между переменной величиной x и ее пределом a есть величина бесконечно малая, т. е.

$$x - a = \alpha, \tag{1.37}$$

откуда

$$x = a + \alpha\,. \tag{1.38}$$

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин и их произведение есть величина бесконечно малая. Произведение постоянной и ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. (Величина x называется *ограниченной*, если существует число $c > 0$ такое, что для всех значений x выполняется неравенство $|x| < c$.)

Переменная величина x называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого положительного числа N можно указать такой момент в изменении этой величины, начиная с которого

$$|x| > N. \tag{1.39}$$

Бесконечно большая величина предела не имеет, но иногда условно говорят, что предел есть бесконечность (∞), причем если она, начиная с некоторого момента, принимает только положительные значения, то предел ее $(+\infty)$, если отрицательные, то $(-\infty)$.

Если x – бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ – бесконечно малая, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0. \tag{1.40}$$

Если α – бесконечно малая величина, то $\frac{1}{\alpha}$ – бесконечно большая величина, т. е.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha} = \infty. \tag{1.41}$$

Пример 1. Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ имеет пределом нуль. Начиная с какого номера ее значения становятся и остаются меньше 0,001?

Решение. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ принимает значения

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Пусть $\varepsilon = 0{,}001$. Неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n > 1000$. Следовательно, $N = 1000$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что, начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство (1.23). В данном случае $x_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$. Неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$ будет выполняться, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$; это означает, что x_n имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(сравните последнее равенство с формулой (1.40)).

Пример 2. Доказать, что предел последовательности $y_n = 4 - \frac{1}{3^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ равен 4.

Решение. Данная последовательность принимает значения

$$3\frac{2}{3}, 3\frac{8}{9}, 3\frac{26}{27}, 3\frac{80}{81}, \ldots$$

Зададим произвольно малое число $\varepsilon > 0$ и составим разность

$$y_n - a = \left(4 - \frac{1}{3^n}\right) - 4 = -\frac{1}{3^n}.$$

Потребуем, чтобы эта разность по абсолютной величине была меньше ε, т. е.

$$|y_n - a| < \varepsilon \text{ или } \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Найдем, при каких n это неравенство будет выполнено. Переписав его в виде $\frac{1}{\varepsilon} < 3^n$ и взяв логарифмы обеих частей, получим

$$\log\frac{1}{\varepsilon} < n\log 3,$$

откуда

$$n > \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}.$$

В качестве числа N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено число $\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}$.

Тогда при всех $n > N$ указанное неравенство будет выполняться, а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{3^n}\right) = 4.$$

Замечание 1. Одновременно показано, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0.$$

Замечание 2. Аналогично можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n} = 0,$$

если $a > 1$.

Замечание 3. Величина $\alpha(x) = \frac{1}{3^x}$ при $x \to +\infty$ есть бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x} = 0.$

Замечание 4. Величина $\alpha(x) = \frac{1}{a^x}$, где $a > 1$ при $x \to +\infty$ есть бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = 0.$

Пример 3. Доказать, что предел последовательности $z_n = -3+\frac{(-1)^n}{n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ равен -3.

Решение. Данная последовательность принимает значения

$$-4, -2\,\frac{3}{4}, -3\,\frac{1}{9}, -2\,\frac{15}{16}, \ldots$$

Пусть дано любое число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность

$$z_n - (-3) = \left[-3 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right] - (-3) = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Эта разность будет по абсолютной величине меньше ε

$$\left|z_n - (-3)\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

когда $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$ или $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. В качестве N можно выбрать меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда при всех $n > N$

$$\left|z_n - (-3)\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -3$.

В частности, если $\varepsilon_1 = 0{,}01$, то $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100}}} = 10$, $N_1 = 10$. Следовательно, при $n > 10$ $\left|z_n - (-3)\right| < 0{,}01$.

Если $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, то $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} = 100$, $N_2 = 100$. Следовательно, при $n > 100$ $\left|z_n - (-3)\right| < 0{,}0001$.

Замечание. Все значения последовательности могут быть меньше своего предела (пример 2), или больше своего предела (пример 1), или попеременно то меньше своего предела, то больше его (пример 3).

Пример 4. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}.$$

Решение. Для доказательства достаточно убедиться в том, что разность между переменной величиной $y = \frac{5x+6}{6x}$ и постоянной $b = \frac{5}{6}$ при $n \to \infty$ есть величина бесконечно малая. Преобразуя эту разность, получим

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{(5x+6)-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}.$$

Так как в силу формулы (1.40) величина $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой, то

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\alpha,$$

где α – бесконечно малая. Это и означает, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x}=\frac{5}{6}.$$

П р и м е р 5. Доказать, что

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7.$$

Р е ш е н и е. Поскольку $x \to 3$, то $x = 3+\alpha$, где α – бесконечно малая (см. формулу (1.38)). Подставляя это выражение для x в разность $(2x^2-5x+4)-7$ и преобразуя ее, получим

$$[2\,(3+\alpha)^2-5\,(3+\alpha)+4]-7=2\,(9+6\alpha+\alpha^2)-15-5\alpha+4-7=$$

$$=18+12\alpha+2\alpha^2-15-5\alpha+4-7=2\alpha^2+7\alpha.$$

Так как α – бесконечно малая, то величины $2\alpha^2$ и 7α и их сумма также являются бесконечно малыми, сумму эту можно обозначить через β.

Следовательно, имеем равенство

$$y-b=\beta,$$

в котором $y=2x^2-5x+4$, $b=7$, $\beta=2\alpha^2+7\alpha$.

На основании формулы (1.37) заключаем, что

$$\lim_{x\to 3}y=b,$$

т. е.

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7.$$

Пример 6. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{6}{x-3}$ при $x \to 3$ слева и справа.

Решение. Задача сводится к нахождению двух пределов

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{6}{x-3} \text{ и } \lim_{x\to 3+0}\frac{6}{x-3}.$$

Если $x \to 3-0$, т. е. x стремится к 3, оставаясь меньше 3, то величина $x-3$ является бесконечно малой, принимающей отрицательные значения. Обратная ей величина будет бесконечно большой, принимающей также отрицательные значения, тем же свойством обладает и величина $y=\dfrac{6}{x-3}$, поэтому

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{6}{x-3}=-\infty.$$

Изменение переменных x, $x-3$ и $\dfrac{6}{x-3}$ при $x \to 3-0$ можно пояснить следующей таблицей:

x	2	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999	2,999999
$x-3$	– 1	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0,0001	0,00001	– 0,000001
$\dfrac{6}{x-3}$	– 6	– 60	– 600	– 6000	– 60000	– 600000	– 6000000

Если $x \to 3+0$, т. е. x стремится к 3, оставаясь больше 3, то величина x-3 является положительной бесконечно малой. Обратная ей величина $\dfrac{1}{x-3}$ будет бесконечно большой, принимающей положительные значения. Этим свойством обладает и величина $\dfrac{6}{x-3}$, поэтому

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{6}{x-3}=+\infty.$$

График функции $y=\dfrac{6}{x-3}$ изображен на рис 1.22.

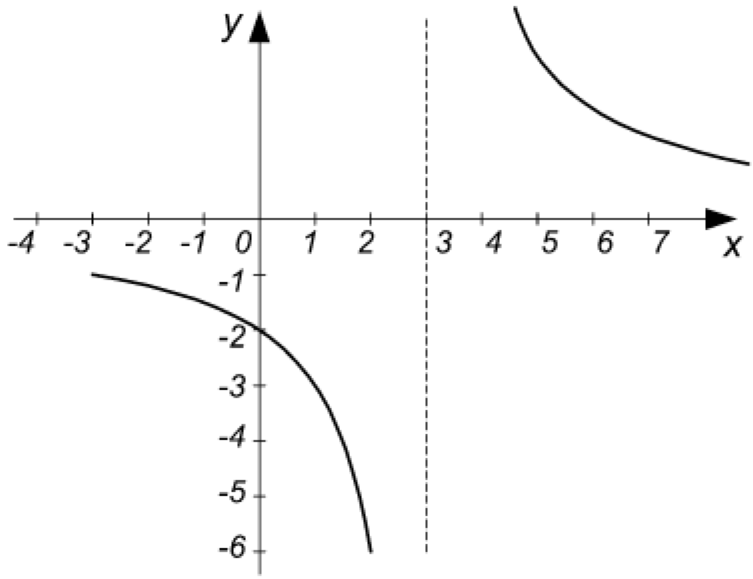


Рис. 1.22

Пример 7. Найти односторонние пределы функции $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0$ слева и справа.

Решение. Пусть x стремится к 0, оставаясь меньше его, т. е. $x\to -0$, тогда x будет бесконечно малой, принимающей отрицательные значения, а величина $\frac{1}{x}$ – отрицательной бесконечно большой величиной (см. формулу (1.41)). Данную функцию можно представить следующим образом:

$$3^{\frac{1}{x}}=3^{-\frac{1}{|x|}}=\frac{1}{3^{\left|\frac{1}{x}\right|}}.$$

Поскольку $\frac{1}{|x|}$ – бесконечно большая при $x\to 0$, то $3^{\frac{1}{|x|}}$ также бесконечно большая, а обратная ей величина, т. е. $\frac{1}{3^{\left|\frac{1}{x}\right|}}$, будет бесконечно малой (см. формулу (1.40)). Следовательно,

$$\lim_{x\to -0}3^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to -0}3^{-\frac{1}{|x|}}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{3^{\frac{1}{|x|}}}=0.$$

Пусть x стремится к 0, оставаясь больше его, т. е. $x\to +0$, тогда x будет положительной бесконечно малой величиной, а $\frac{1}{x}$ – положительной бесконечно большой, величина $3^{\frac{1}{x}}$ будет также положительной бесконечно большой, т. е.

$$\lim_{x\to +0}3^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}3^{\frac{1}{|x|}}=+\infty.$$

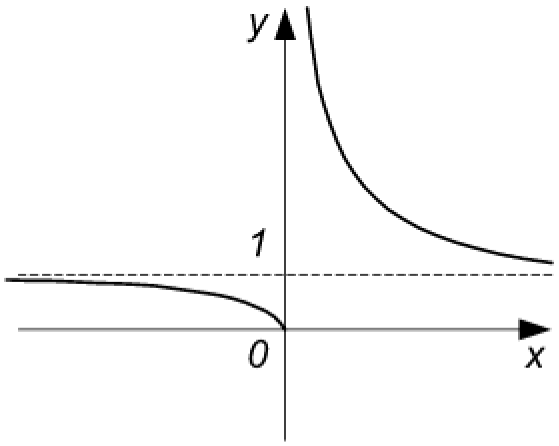


Рис. 1.23

Поскольку односторонние пределы не равны между собой, то предел функции при $x \to 0$ произвольным способом не существует.

График функции $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ изображен на рис. 1.23.

Пример 8. Найти пределы

$$\lim_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} \text{ и}$$

$$\lim_{x \to 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}.$$

Решение. Пусть $x \to 2$ слева, т. е. оставаясь меньше 2, тогда величина $(2-x)$ будет бесконечно малой, принимающей положительные значения, а величина $\frac{1}{2-x}$ – бесконечно большой, принимающей также положительные значения. Принимая во внимание определение функции $z = \operatorname{arctg} y$ и тот факт, что $\operatorname{tg} z \to \infty$, когда $z \to \frac{\pi}{2}$, заключаем, что

$$\lim_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = \frac{\pi}{2}.$$

Если же $x \to 2$ справа, т. е. оставаясь больше 2, тогда величина $(2-x)$ будет отрицательной бесконечно малой, а величина $\frac{1}{2-x}$ – отрицательной бесконечно большой величиной.

Так как $\operatorname{tg} z \to -\infty$, когда $z \to -\frac{\pi}{2}$, то

$$\lim_{x \to 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2},$$

Предел функции $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$ не существует при $x \to 2$ произвольным способом, так как односторонние пределы в этой точке не равны между собой.

График функции изображен на рис. 1.24.

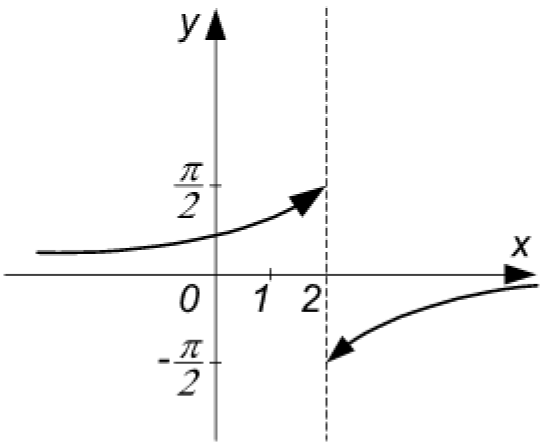


Рис. 1.24

Задачи

1. Начиная с какого номера значения каждой из последовательностей:

$$1)\ x_n = \frac{1}{n};\ \ 2)\ y_n = \frac{1}{n^2};$$

$$3)\ z_n = \frac{1}{n^4}\ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

становятся и остаются меньше $\varepsilon = 0{,}0001$? Показать, что каждая последовательность имеет пределом нуль.

2. Доказать, что каждая из последовательностей

$$x_n = \frac{1}{2^n},\ \ y_n = -\frac{1}{2^n},\ \ z_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

имеет пределом нуль. Начиная с какого номера значения каждой из них по абсолютной величине остаются меньше $\varepsilon = 0{,}001$?

3. Даны три последовательности:

$$x_n = 2 - \frac{1}{4^n};\ \ y_n = -3 + \frac{1}{5^n};\ \ z_n = 7 + \frac{(-1)^n}{6^n}.$$

Доказать, что:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 2;\ \ 2)\ \lim_{n\to\infty} y_n = -3;\ \ 3)\ \lim_{n\to\infty} z_n = 7.$$

4. Доказать, что:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{5x} = \frac{4}{5};\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}(4x-7) = 5;$$

$$3)\ \lim_{x\to -1}(5x+8) = 3;\qquad 4)\ \lim_{x\to 2}(3x^2-4x+6) = 10.$$

5. Найти односторонние пределы при $x \to 2$ слева и справа для следующих функций:

$$1)\ f(x) = \frac{8}{2-x};\qquad 2)\ f(x) = \frac{4}{(x-2)^2};$$

$$3)\ f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}};\qquad 4)\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2-x}.$$

Ответы

1. 1) $N_1 = 10\,000$; 2) $N_2 = 100$; 3) $N_3 = 10$. **2.** N=10.

5. 1) $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{8}{2-x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{8}{2-x} = -\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty$.

§ 1.4. Нахождение пределов

Если переменные величины $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) - \lim_{x\to a} f_3(x); \quad (1.42)$$

$$\lim_{x\to a} [f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)\cdot \lim_{x\to a} f_3(x); \quad (1.43)$$

$$\lim_{x\to a} [cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x) \quad (c = \text{const}); \quad (1.44)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n \quad (n \text{ – целое число, } n > 0); \quad (1.45)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \quad (\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0); \quad (1.46)$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f_1(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f_1(x)}; \quad (1.47)$$

$$\lim_{x\to a} c = c \quad (c = \text{const}). \quad (1.48)$$

Если c – постоянная величина, причем $c > 0$, то:

$$\lim_{x\to\infty} cx = \infty; \quad (1.49)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{c} = \infty; \quad (1.50)$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{c}{x} = -\infty; \quad (1.51)$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{c}{x} = +\infty; \tag{1.52}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{c}{x} = \infty; \tag{1.53}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0; \tag{1.54}$$

$$\lim_{x \to +\infty} c^x = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 < c < 1; \\ +\infty, \text{ если } c > 1; \end{cases} \tag{1.55}$$

$$\lim_{x \to -\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, \text{ если } 0 < c < 1; \\ 0, \text{ если } c > 1. \end{cases} \tag{1.56}$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2} (4x^2 - 6x + 3)$.

Решение. Так как предел алгебраической суммы переменных равен такой же алгебраической сумме пределов этих переменных (формула (1.42)), постоянный множитель можно выносить за знак предела (формула (1.44)), предел целой положительной степени равен такой же степени предела (формула (1.45)), предел постоянной равен самой постоянной (формула (1.48)), то последовательно получим

$$\lim_{x \to 2} (4x^2 - 6x + 3) = \lim_{x \to 2} 4x^2 - \lim_{x \to 2} 6x + \lim_{x \to 2} 3 =$$

$$= 4 \lim_{x \to 2} x^2 - 6 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3 = 4\,(\lim_{x \to 2} x)^2 - 6 \lim_{x \to 2} x + 3 =$$

$$= 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 16 - 12 + 3 = 7.$$

Замечание 1. Вычисление предела многочлена второй степени свелось к вычислению его значения при предельном значении аргумента.

Замечание 2. Чтобы вычислить предел многочлена n-й степени

$$P_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n \text{ при } x \to b,$$

достаточно найти $P_n(b)$, т. е. значение его при $x=b$. Например,

$$\lim_{x \to 1} (2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2) = 2 \cdot 1^5 - 4 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 2 = 5\,.$$

П р и м е р 2 . Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$.

Р е ш е н и е . Так как предел частного равен частному пределов, то на основании формулы (1.46), а также с помощью формул (1.42), (1.44), (1.45) и (1.48) последовательно получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-5x+6)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x^2-4\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7}{2\lim\limits_{x\to 1}x^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2.$$

З а м е ч а н и е 1 . Вычисление предела рациональной функции (отношения двух многочленов) свелось к вычислению значения этой функции при предельном значении аргумента.

З а м е ч а н и е 2 . Чтобы вычислить предел рациональной функции

$$R(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}{c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m}$$

при $x\to a$, достаточно найти значение ее при $x = a$.

Например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^5-2x^4+3x^2-6x+9}{3x^4-12x^2+7x-11}=\frac{2^5-2\cdot 2^4+3\cdot 2^2-6\cdot 2+9}{3\cdot 2^4-12\cdot 2^2+7\cdot 2-11}=\frac{9}{3}=3.$$

З а м е ч а н и е 3 . Предел элементарной функции $f(x)$ при $x\to a$, где a принадлежит области ее определения, равен значению функции при $x = a$, т. е.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Например,

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}+\sqrt[3]{x+60}}{2x^2-5x-8}=\frac{\sqrt{4^2-7}+\sqrt[3]{4+60}}{2\cdot 4^2-5\cdot 4-8}=$$

$$=\frac{\sqrt{9}+\sqrt[3]{64}}{32-20-8}=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4};$$

$$2)\ \lim_{t\to 1}[\lg(t+\sqrt{t^2+80})]+t\sqrt{t^2+8}=\lg(1+\sqrt{81})+1\sqrt{1+8}=1+3=4.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$.

Решение. При $x = 4$ числитель и знаменатель данной функции обращаются в нуль. Получена неопределенность $\dfrac{0}{0}$, которую нужно раскрыть. Преобразуем данную функцию, разлагая числитель с помощью формулы

$$x^2+px+q=(x-x_1)\,(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0.$

Так как уравнение $x^2-6x+8=0$ имеет корни $x_1=2,\ \ x_2=4,$ то $x^2-6x+8=(x-2)\,(x-4).$ Подставляя это выражение в данную функцию и сокращая на общий множитель $(x-4)\neq 0,$ получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)\,(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)=4-2=2.$$

Замечание 1. Сокращая на общий множитель, мы предполагали, что $x-4\neq 0.$ Это действительно так. Согласно определению предела функции, аргумент x стремится к своему предельному значению a, никогда с ним не совпадая, т. е. $x\neq a$ и $x-a\neq 0.$ (См. формулу (1.26).)

Замечание 2. Предел функции не зависит от того, определена функция в предельной точке или нет.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. При $x = 1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем данную функцию, разлагая на множители числитель и знаменатель по формуле

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0.$

Подставляя соответствующие выражения и сокращая на общий множитель $(x-1)\neq 0,$ получим

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3\,(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)}{4\,(x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3\left(x + \frac{2}{3}\right)}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)} = \frac{3\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{5}{3}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 5}{x^3 + 1}$.

Решение. При $x = -1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Разлагая их на множители, находим

$$x^3 + 1 = (x+1)\,(x^2 - x + 1),$$

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 5 = (x+1)\,(3x^3 - x^2 + 5).$$

Второе равенство получено в результате непосредственного деления $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 5$ на $(x+1)$. Сокращая числитель и знаменатель на $(x+1) \neq 0$ и переходя к пределу, получим

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 5}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^3 - x^2 + 5}{x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{3\,(-1)^3 - (-1)^2 + 5}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и в знаменателе выделить критический множитель (т. е. множитель, равный нулю при предельном значении x) и сократить на него.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$.

Решение. При $x \to +\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются (получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$). Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на x^2, т. е. на старшую степень x. Пользуясь свойствами пределов, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{6+0+0}{3+0-0}=2.$$

Здесь принято во внимание, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^2}=0\ (c=\text{const}).$$

(См. формулу (1.54).)

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^3, т. е. на старшую степень, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{9+\frac{8}{x}-\frac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(9+\frac{8}{x}-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{0+0-0}{9+0-0}=\frac{0}{9}=0.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x, а затем перейти к пределу.

Пример 8. Найти предел рациональной функции

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},$$

где $a_n\neq 0, b_m\neq 0,$ при x, стремящемся к бесконечности.

Решение. Преобразуем выражение для данной функции, вынося за скобки множитель x^n в числителе и множитель x^m в знаменателе:

$$R(x)=\frac{x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\ldots+a_n\right)}{x^m\left(\frac{b_0}{x^m}+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_2}{x^{m-2}}+\ldots+b_m\right)}=x^{n-m}Q(x), \qquad \text{(A)}$$

где

$$Q(x)=\frac{\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\ldots+a_n\right)}{\left(\frac{b_0}{x^m}+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_2}{x^{m-2}}+\ldots+b_m\right)}. \qquad \text{(B)}$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^k}=0 \quad (k=1,2,3,\ldots),$$

то

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\frac{a_n}{b_m}. \qquad \text{(C)}$$

Поскольку предел произведения равен произведению пределов (формула (1.43)), то

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\lim_{x\to\infty}Q(x). \qquad \text{(D)}$$

Предел первого множителя в правой части равенства (D) зависит от соотношения между n и m, а именно:

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\infty, \text{ если } n>m;$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=1, \text{ если } n=m; \qquad \text{(E)}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=0, \text{ если } n<m.$$

Из формулы (D) с учетом формул (C) и (E) получаем

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, \text{ если } n>m;\\ \frac{a_n}{b_m}, \text{ если } n=m;\\ 0, \text{ если } n<m.\end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Полученный результат можно сформулировать следующим образом. Предел частного двух многочленов при $x \to \infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя равны; предел этот равен 0 или ∞, если степень числителя соответственно меньше или больше степени знаменателя.

Например,

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-7x^4+3x^3-4x^2+8x-9}{3x^5+5x^4-6x^3+7x^2-11x-2}=\frac{6}{3}=2;$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^3+6x^2-7x+12}{9x^5-8x^3+12x^2-5x-14}=0;$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x^2+11x-18}{5x^2-9x+24}=\infty.$$

П р и м е р 9. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Р е ш е н и е. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+1}$. Избавимся от иррациональности в знаменателе, умножая числитель и знаменатель на $(\sqrt{x+1}+2)$. Получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x+3)\,(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)\,(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x+3)\,(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x+3)\,(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)\,(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)\,(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

З а м е ч а н и е. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, в которой числитель или знаменатель содержат иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, сокращая на множитель $1+\cos x\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)\,(1-\cos x+\cos^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{1-(-1)}{1-(-1)+(-1)^2}=\frac{2}{3}.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби являются суммой n членов соответствующих арифметических прогрессий. Находя эти суммы по известной формуле, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1+(2n-1)}{2}\cdot n}{\dfrac{1+n}{2}\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2n-1)}{1+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=2.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Решение. Используя формулу для суммы квадратов натурального ряда чисел

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6n^3}=$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

П р и м е р 1 3 . Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

Р е ш е н и е . Введем новую переменную z по формуле

$$1+x = z^6 \qquad \text{(A)}$$

(показатель выбран так, чтобы можно было извлечь корень и второй и третьей степени).

Из равенства (A) вытекает, что $z\to 1$, когда $x\to 0$. Подставляя выражение старой переменной через новую, разлагая числитель и знаменатель на множители, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^6}-1}{\sqrt{z^6}-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z^3-1} =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z^2+z+1} = \frac{2}{3}.$$

П р и м е р 1 4 . Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}}$.

Р е ш е н и е . При $n\to\infty$ числитель и знаменатель также стремятся к бесконечности, получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на n и подведем n под знак корня:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}} = \lim_{n\to\infty}\frac{12+\dfrac{5}{n}}{\sqrt[3]{27+\dfrac{6}{n}+\dfrac{8}{n^3}}} = \frac{12}{\sqrt[3]{27}} = \frac{12}{3} = 4.$$

(Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{n^3}=0$.)

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$.

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$.

6. $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t\sqrt{t^2-8}+\lg\left(3t+\sqrt{t^2-8}\right)-\dfrac{\sqrt[3]{t^2-1}+\sqrt[4]{t^3-2t^2+7}}{t^3-2t^2+t-11}\right]$.

7. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5-6x^3+4x^2-2x+11}$.

12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x+17}$.

13. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

15. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{\sqrt{4n^2-3}}{2n+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$.

17. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right)$.

Ответы

1. 3. **2.** 7. **3.** 2. **4.** 0. **5.** ∞. **6.** 4. **7.** $\dfrac{4}{5}$. **8.** $\dfrac{15}{44}$. **9.** $\dfrac{1}{2}$ **10.** – 5. **11.** 0. **12.** ∞. **13.** – 40. **14.** $\dfrac{3}{4}$. Указание. Положить $x=t^{12}$. **15.** 1. **16.** 6. **17.** $\dfrac{1}{2}$. **18.** $-\sqrt{2}$. **19.** $-\dfrac{1}{2}$. **20.** – 1.

§ 1.5. Число *e*, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$

1. *Числом e* называется предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{1.57}$$

или

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{1.58}$$

Число e бывает полезным при раскрытии неопределенностей вида 1^{∞}.

Если основание логарифмов равно числу e, то логарифмы называются *натуральными:*

$$\ln x = \log_e x.$$

2. Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \tag{1.59}$$

3. При нахождении пределов вида

$$\lim_{x \to a} [\varphi (x)]^{\psi (x)} = C \tag{1.60}$$

нужно иметь в виду следующее:

1) если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} \varphi (x) = A \text{ и } \lim_{x \to a} \psi (x) = B, \tag{1.61}$$

то

$$C = A^{B}; \tag{1.62}$$

2) если

$$\lim_{x \to a} \varphi (x) = A \neq 1 \text{ и } \lim_{x \to a} \psi (x) = \infty,$$

то предел находится с помощью формул (1.55) и (1.56);

3) если

$$\lim_{x \to a} \varphi (x) = 1, \quad \lim_{x \to a} \psi (x) = \infty,$$

то полагают $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x \to a} \left\{ \left[1 + \alpha(x) \right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x)\,\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)\,\psi(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to a} [\varphi(x) - 1]\psi(x)}. \tag{1.63}$$

П р и м е р 1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{x}$.

Р е ш е н и е. При $x \to \infty$ выражение $\left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{x} \to 1$, получаем неопределенность 1^{∞}.

Введем новую переменную α по формуле

$$\frac{k}{x} = \alpha,$$

откуда $x = \dfrac{k}{\alpha}$. Если $x \to \infty$, то $\alpha \to 0$, поэтому

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{x} = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{k}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to 0} \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{k}.$$

Пользуясь свойством (1.45), на основании формулы (1.58) находим

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{k} = \left[\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{k} = e^{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}. \tag{1.64}$$

В частности, если $k = 3$, то

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x} = e^{3},$$

при $k=-2$ получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=e^{-2}.$$

П р и м е р 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

то на основании формулы (1.58) находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (1.65)$$

П р и м е р 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}$.

Р е ш е н и е. Введем новую переменную z по формуле

$$a^{x}-1=z,$$

откуда

$$a^{x}=1+z.$$

Логарифмируя это равенство по основанию e, получим формулу

$$x\ln a=\ln(1+z),$$

из которой

$$x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a}.$$

Очевидно при $x\to 0$ и $z\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\dfrac{\ln(1+z)}{\ln a}}=\lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\dfrac{\ln(1+z)}{z}}.$$

Принимая во внимание свойства (1.44) и (1.46) и формулу (1.65), получаем

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\dfrac{\ln(1+z)}{z}} = \ln\cdot\frac{z}{\lim\limits_{z\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+z)}{z}\right]} = \ln a.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a. \qquad (1.66)$$

П р и м е р 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$.

Р е ш е н и е. Разделив числитель и знаменатель дроби на x и используя формулу (1.64) при $k=+2$ и $k=-3$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{-3}{x}}\right)^x = \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5.$$

П р и м е р 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$.

Р е ш е н и е. Положим $ax=\alpha$, откуда $x=\dfrac{\alpha}{a}$. Если $x\to 0$, то и $\alpha\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\dfrac{\alpha}{a}} = \lim_{\alpha\to 0} a\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\cdot 1 = a.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = a. \qquad (1.67)$$

В частности, при $a=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2,$$

при $a=\dfrac{1}{3}$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

П р и м е р 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Р е ш е н и е. Принимая во внимание, что $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, на основании свойств пределов (1.43) и (1.46) и формулы (1.59) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1. \qquad (1.68)$$

П р и м е р 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Принимая во внимание формулу (1.67), на основании свойств пределов получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\right)^2=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\right]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

П р и м е р 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

Р е ш е н и е. Разделив числитель и знаменатель на x, на основании формулы (1.67) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}}=\frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

П р и м е р 9. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+9} - 3}$.

Р е ш е н и е. При $x = 0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и воспользуемся формулой (1.59)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9} - 3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+9} - 3)\,(\sqrt{x+9} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(\sqrt{x+9} + 3)}{(x+9) - 9} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+9} + 3) = 1\,(3+3) = 6.$$

П р и м е р 10. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{x} \right)^{x+2}$.

Р е ш е н и е. Это предел вида (1.60), где $\varphi\,(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$, $\psi\,(x) = x + 2$.

Из (1.67)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3, \quad \lim_{x \to 0} (x+2) = 2.$$

В соответствии с формулой (1.62) получаем

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^{x+2} = 3^2 = 9.$$

П р и м е р 11. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+4} \right)^{x^2}$.

Р е ш е н и е. Это также предел вида (1.60), где $\varphi\,(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}$, $\psi\,(x) = x^2$.

Так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{4}{x}} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty,$$

то в соответствии с формулой (1.55)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}=0.$$

П р и м е р 1 2 . Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е . На основании формулы (1.63) получаем

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}\right\}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$$

П р и м е р 1 3 . Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е . Прибавляя и вычитая 1 из $\cos x$ и применяя соответствующую формулу, получаем

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=-1\cdot 0=0,$$

то

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

П р и м е р 1 4 . Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}$.

Р е ш е н и е . Так как $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}\right]^2=\left[\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}\right]^2=e^2.$$

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\,[\ln(x+1)-\ln x]$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+n}{x+m}\right)^x$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{5}}{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^{x+3}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x-3}\right)^x$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

18. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Ответы

1. e^2. **2.** e^{-3}. **3.** 4. Указание. Положить $4x = \alpha$ и воспользоваться формулой (1.65). **4.** 1. Указание. Положить $\frac{1}{x} = \alpha$. Воспользоваться формулой (1.65). **5.** e^4. **6.** e^{n-m}. **7.** $\frac{1}{5}$. **8.** 1. Указание. Положить $\frac{1}{x} = \alpha$. **9.** 1. Указание. Положить $\operatorname{arctg} x = \alpha$. **10.** $\frac{a}{b}$. **11.** $\frac{1}{8}$. **12.** 4. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** $-\frac{1}{2}$. **15.** $\frac{1}{8}$. **16.** 0. **17.** $e^{-\frac{1}{2}}$. См. пример 13. **18.** $e^{-\frac{1}{2}}$. Указание. Положить $\cos^2 x = \alpha$.

§ 1.6. Разные примеры на нахождение пределов

При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $(\infty - \infty)$ и $0 \cdot \infty$. Эти случаи путем преобразования функции приводятся к одному из двух рассмотренных случаев, т. е. к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Покажем на примерах, как находятся такие пределы.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x)$.

Решение. При $x \to +\infty$ данная функция представляет разность двух бесконечно больших величин, принимающих положительные значения (случай $\infty - \infty$). Умножив и разделив данную функцию на $(\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x)$, получим

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 6x + 5) - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x + 5}{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1} = \frac{6}{1+1} = 3.$$

П р и м е р 2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Р е ш е н и е. Здесь также имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$ при $x\to 3$. Производим вычитание дробей и сокращение на множитель $x-3\neq 0$; переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3-6}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{9}.$$

П р и м е р 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)$.

Р е ш е н и е. В данном случае также имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Применяя соответствующую тригонометрическую формулу, производя вычитание дробей и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{4}\cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

П р и м е р 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$.

Р е ш е н и е. При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Записывая в другом виде данную функцию и применяя формулу (1.59), находим

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos\dfrac{x}{3}}{\sin\dfrac{x}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\dfrac{x}{3}}\cos\frac{x}{3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}}\cdot\cos\lim_{x\to 0}\frac{x}{3} = \frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot 1 = 3.$$

П р и м е р 5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}x.$

Р е ш е н и е. При $x\to 2$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Полагая $x = 2-\alpha$ и переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}(2-\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\alpha\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\alpha\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}\alpha = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\frac{\cos\frac{\pi}{4}\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\alpha}\cos\frac{\pi}{4}\alpha =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}\alpha}{\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos\frac{\pi}{4}\alpha = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\cdot 1 = \frac{4}{\pi}.$$

П р и м е р 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{arctg}\,x-\frac{\pi}{2}\right).$

Р е ш е н и е. Положим $\mathrm{arctg}\,x = \alpha$, тогда $x = \mathrm{tg}\,\alpha$, если $x\to+\infty$, то $\alpha\to\frac{\pi}{2}.$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{arctg}\,x-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}\,\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$$

$$= -\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\cdot\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = -1\cdot 1 = -1.$$

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x})$.

2. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{16-x^2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-\operatorname{cosec} x)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}x$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{3x}$.

8. $\lim\limits_{m\to\infty} m[\ln(m+4)-\ln m]$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 6x}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-2^n}{5+2^{n+1}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}$.

Ответы

1. 2. **2.** $-\dfrac{1}{8}$. **3.** $\dfrac{1}{2}$. **4.** 0. **5.** $\dfrac{2}{\pi}$. **6.** -1. Указание. Положить $x=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$. **7.** $-\dfrac{1}{3}$. **8.** 4. **9.** $\dfrac{1}{36}$. **10.** $-\dfrac{1}{2}$. **11.** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **12.** $\dfrac{3}{2}$.

§ 1.7. Сравнение бесконечно малых величин

1. Две бесконечно малые величины α и β называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения отличен от нуля, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=a \quad (a\neq 0). \tag{1.69}$$

2. Величина α называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с β, если предел отношения α к β равен нулю, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0. \tag{1.70}$$

3. Величина α называется бесконечно малой низшего порядка по сравнению с β, если отношение α к β является бесконечно большой величиной, т. е.

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty. \qquad (1.71)$$

4. Бесконечно малые величины α и β называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице, т. е.

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1. \qquad (1.72)$$

Обозначение эквивалентных бесконечно малых величин α и β:

$$\alpha \sim \beta. \qquad (1.73)$$

Эквивалентные бесконечно малые величины обладают следующими свойствами:

1) разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них;

2) при нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, т. е. если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}. \qquad (1.74)$$

З а м е ч а н и е 1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.

З а м е ч а н и е 2. Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины, находят предел их отношения. Если это отношение предела не имеет, то величины несравнимы.

П р и м е р 1. Если $x \to 0$, то какие из бесконечно малых величин $3x$, x^2, $\sqrt{x}$, x^3, $\frac{1}{2}x$ являются величинами одного порядка с x, величинами высшего порядка и величинами низшего порядка по сравнению с x?

Р е ш е н и е. Рассмотрим пределы отношений данных величин к x.

Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3, \ \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2},$$

то величины $3x$ и $\frac{1}{2}x$ являются бесконечно малыми одного порядка с величиной x (см. формулу (1.69)).

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

то величины x^2 и x^3 являются бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с величиной x (см. формулу (1.70)).

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty,$$

то величина $\sqrt{x}$ является бесконечно малой низшего порядка по сравнению с величиной x (см. формулу (1.71)).

П р и м е р 2. Дана бесконечно малая величина x. Сравнить ее с бесконечно малыми $\ln(1+x)$ и $x\sin\frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Так как по формуле (1.65)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

то $\ln(1+x)$ и x – эквивалентные бесконечно малые величины (см. формулу (1.72)).

Величина $x\sin\frac{1}{x}$ является бесконечно малой величиной как произведение бесконечно малой x на ограниченную величину $\sin\frac{1}{x}$ ($|\sin z|\le 1$). Так как отношение $\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$ предела не имеет, то величины x и $x\sin\frac{1}{x}$ несравнимы.

П р и м е р 3. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\sin cx$ и cx являются эквивалентными.

Р е ш е н и е. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin cx}{cx}=\lim_{cx\to 0}\frac{\sin cx}{cx}=1,$$

то из определения (см. формулу (1.72)) вытекает эквивалентность данных величин.

П р и м е р 4. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\operatorname{arctg} cx$ и cx являются эквивалентными.

Р е ш е н и е . Положим

$$\operatorname{arctg} cx = z,$$

тогда

$$\operatorname{tg} z = cx$$

и $z \to 0$ при $x \to 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} cx}{cx} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = 1,$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р 5 . Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 6x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2}$.

Р е ш е н и е . Принимая во внимание, что

$$\sin cx \sim cx \text{ и } \operatorname{arctg} cx \sim cx$$

(см. примеры 3 и 4), получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin cx}{(\operatorname{arctg} 2x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} \cdot \frac{6x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

П р и м е р 6 . Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln (x^2 - 5x + 7)}{x - 3}$.

Р е ш е н и е . При $x \to 3$ получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, так как $x^2 - 5x + 7 \to 1$ и $\ln (x^2 - 5x + 7) \to 0$. Выражение $x^2 - 5x + 7$ можно представить так:

$$x^2 - 5x + 7 = 1 + (x^2 - 5x + 6) = 1 + z,$$

где $(x^2 - 5x + 6) = z \to 0$ при $x \to 3$.

Так как при $z \to 0$ $\ln (1 + z) \sim z$ (см. пример 2), то

$$\ln (x^2 - 5x + 7) \sim x^2 - 5x + 6.$$

Применяя формулу (1.74), получим

$$\lim_{x \to 3} \frac{\ln (x^2 - 5x + 7)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} (x-2) = 1.$$

П р и м е р 7 . Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x}$.

Р е ш е н и е . При $x \to 0$ величина $(1+x)^a - 1$ является бесконечно малой. Положим

$$(1+x)^a - 1 = z.$$

Поскольку

$$z \sim \ln(1+z),$$

то

$$(1+x)^a - 1 \sim \ln[1 + (1+x)^a - 1] = \ln(1+x)^a = a \ln(1+x).$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a \ln(1+x)}{x} = a.$$

Задачи

1. Сравнить бесконечно малые величины ax, cx^3, $b\sqrt[3]{x}$ с бесконечно малой x.

2. Доказать эквивалентность бесконечно малых величин:

1) $\operatorname{tg} cx$ и cx; 2) $\arcsin cx$ и cx;

3) $\dfrac{1}{3} \operatorname{tg} 3x$ и x; 4) $x + 2x^2$ и x.

3. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^3 ax}{\sin^3 bx}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}} - 1}{x}$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$; 6) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3x^2 + 5x - 21)}{x^2 - 6x + 8}$.

Ответы

1. ax и x – бесконечно малые одного порядка; cx^3 – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с x; $b\sqrt[3]{x}$ – бесконечно малая низшего порядка по сравнению с x. **2.** У к а з а н и е . Воспользоваться формулой (1.72).

3. 1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{a^3}{b^3}$; 3) $\frac{1}{5}$. Указание. См. пример 7; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) a; 6) $-\frac{17}{2}$.

§ 1.8. Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)] = 0. \qquad (1.75)$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если при $x \to x_1$, предел функции существует и равен ее значению в точке x_1, т. е.

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1). \qquad (1.76)$$

Эти два определения непрерывности функции в точке равносильны друг другу.

Функция называется *непрерывной в интервале,* если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма нескольких непрерывных функций есть функция непрерывная.
2. Произведение нескольких непрерывных функций есть функция непрерывная.
3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых делитель отличен от нуля.
4. Если $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ – непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ также непрерывна.
5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и существует обратная функция $x = \varphi(y)$, то последняя также непрерывна.

Функция $y = f(x)$ называется *разрывной в точке* x_1, если она определена в сколь угодно близких точках, но в точке x_1 не удовлетворяет условию непрерывности.

Если для функции $y = f(x)$ существуют *конечные* пределы

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_1 + 0} f(x),$$

причем не все три числа $f(x_1)$, $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x)$ равны между собой, то x_1 называется *точкой разрыва 1-го рода*. В частности, если

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_1 + 0} f(x), \tag{1.77}$$

то x_1 называется *устранимой точкой разрыва*.

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода, называются *точками разрыва 2-го рода*. В таких точках хотя бы один из односторонних пределов является бесконечным или не существует.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^3$ является непрерывной в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Решение. Функция $y = x^3$ определена при всех x, т. е. в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$.

Покажем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Фиксируем произвольную точку x, аргументу x дадим приращение Δx, приращенное значение функции определится формулой

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Приращение функции равно

$$\Delta y = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - y = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Итак,

$$\Delta y = \Delta x \, (3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2) = 0 \cdot 3x^2 = 0.$$

Таким образом, условие (1.75) выполнено при любом x из $(-\infty, \infty)$, откуда и следует, что функция непрерывна при всех x.

Пример 2. Доказать, что функция $y = x^n$ (n – целое, положительное) непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Решение. Функция определена при всех x, т. е. в интервале $(-\infty, \infty)$. Приращенное значение функции при фиксированном x равно

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-2}\Delta x^2+$$

$$+\ldots+\Delta x^n,$$

откуда

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-2}\Delta x^2+\ldots+\Delta x^n=$$

$$=\Delta x\left(nx^{n-1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}\right)$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}\right)=0.$$

Пример 3. Доказать, что функция $y=\cos x$ непрерывна при всех x.

Решение. Эта функция также определена при любом x из промежутка $(-\infty,\infty)$. Фиксируя x и давая ему приращение Δx, получим приращение функции

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Так как $|\sin\alpha|\le\alpha$ и $|\sin\alpha|\le 1$, то

$$|\Delta y|=2\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le 2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|.$$

Следовательно,

$$|\Delta y|\le|\Delta x|,$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Пример 4. Доказать, что функция $y=\cos x^2$ непрерывна при любом x.

Р е ш е н и е . Функция $y=\cos x^2$ является сложной или функцией от функции, а именно

$$y=\cos z,\ \ z=x^2.$$

Каждая из этих функций непрерывна (пример 3, пример 2 при n=2). В силу свойства 4 функция $y=\cos x^2$ будет также непрерывной.

П р и м е р 5 . Показать, что для функции $f(x)=\dfrac{x-2}{|x-2|}$ точка $x=2$ является точкой разрыва 1-го рода.

Р е ш е н и е . В точке $x=2$ функция не определена.

По определению абсолютной величины (§ 1.1) имеем

$$f(x)=\frac{x-2}{-(x-2)}=-1,\ \text{когда}\ (x-2)<0\ \text{или}\ x<2;$$

$$f(x)=\frac{x-2}{x-2}=1,\ \text{когда}\ (x-2)>0\ \text{или}\ x>2.$$

Так как

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=-1,\ \ \lim_{x\to 2+0} f(x)=1,$$

то точка $x=2$ (рис. 1.25) является точкой разрыва 1-го рода.

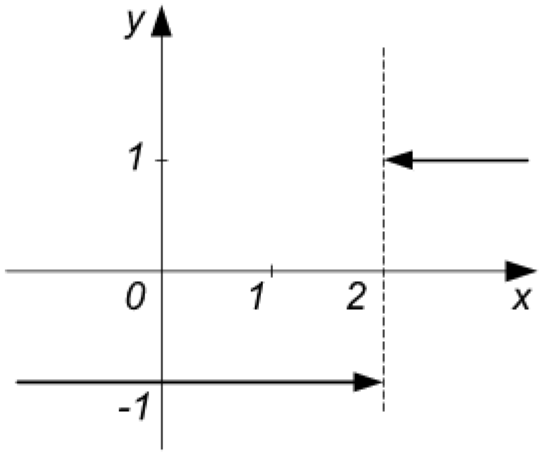


Рис. 1.25

З а м е ч а н и е . Данную функцию нельзя доопределить так, чтобы она оказалась непрерывной в точке $x=2$.

П р и м е р 6 . Показать, что точка $x=0$ является устранимой точкой разрыва для функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Р е ш е н и е . Функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$, но определена при всех $x\neq 0$. Односторонние пределы функции в точке $x=0$ равны между собой

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

В силу условия (1.77) заключаем, что точка $x=0$ является устранимой точкой разрыва (рис. 1.26).

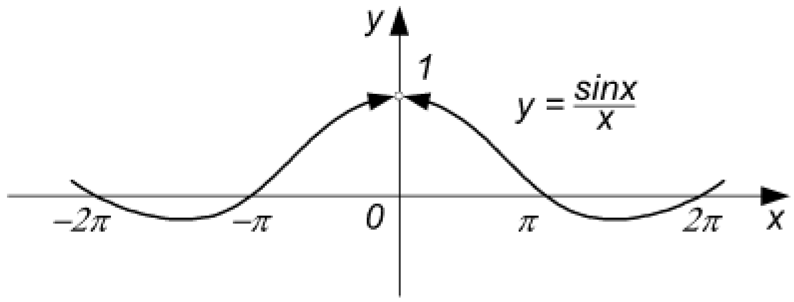


Рис. 1.26

Пример 7. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{6}{(x-3)^2}$ имеет разрыв в точке $x=3$.

Решение. Функция определена во всех точках, кроме точки $x=3$. При $x<3$ получаем $f(x)>0$, при $x>3$ $f(x)>0$.

Имеем

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=+\infty.$$

Точка $x=3$ является точкой разрыва (рис. 1.27).

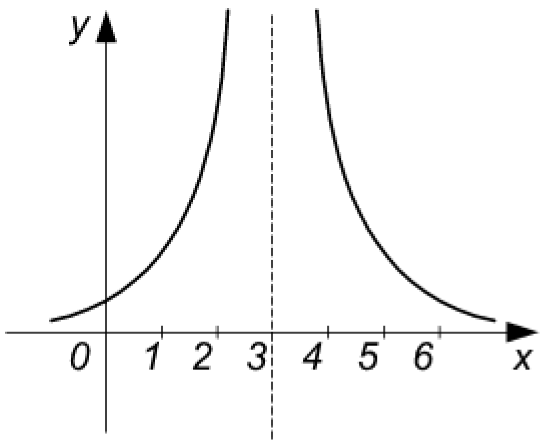


Рис. 1.27

Задачи

1. Доказать, что функция

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

непрерывна при всех x.

2. Доказать, что функция $y=\sin x$ непрерывна при всех x.

3. Доказать непрерывность функций:

1) $y=2\cos 3x$;

2) $y=3\sin 4x$;

3) $y=\sin x^2$;

4) $y=\cos^3 x$.

4. Показать, что функция имеет разрыв в точке $x=3$.

$$f(x)=\frac{\sin(x-3)}{|x-3|}$$

5. Найти точку разрыва функции

$$f(x)=\frac{8}{x+4}.$$

6. Показать, что функция имеет устранимый разрыв в точке $x=3$.

$$y=\frac{x^2-9}{x-3}$$

7. Определить точки разрыва функции

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)\,(x+2)}.$$

Ответы

1. Указание. Воспользоваться свойствами непрерывных функций и тем, что функция $y=x^n$ непрерывна. **5.** $x=-4$. **7.** $x=1, x=-2$.

Раздел II.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Глава 2. Производная и дифференциал

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.1)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.1')$$

Если x меняется, то предел (2.1) будет также меняться (для некоторых x он может и не существовать), следовательно, производная данной функции есть некоторая функция.

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Геометрическое значение производной. Производная функции $y = f(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в соответствующей точке, т. е.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол, образуемый касательной к графику с положительным направлением оси Ox прямоугольной декартовой системы координат; этот угол является функцией аргумента x.

Механическое значение производной. Для функции $s = f(t)$, меняющейся со временем t, производная s' есть скорость изменения функции в данный момент t_0, т. е.

$$f'(t_0) = v(t_0),$$

где $v(t_0)$ – скорость изменения s в момент $t = t_0$.

Быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается *с помощью производной*.

Если u, v, w – дифференцируемые функции от x, а c – постоянная величина, то имеют место следующие *основные правила дифференцирования:*

$$c' = 0 \quad (c = \text{const}); \tag{2.2}$$

$$(u - v + w)' = u' - v' + w'; \tag{2.3}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \tag{2.4}$$

$$(cv)' = cv' \quad (c = \text{const}); \tag{2.4'}$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}; \tag{2.4''}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{2.5}$$

§ 2.1. Производные степенных и тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}; \tag{2.6}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \tag{2.6'}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \tag{2.6''}$$

$$x'_x = 1; \tag{2.6'''}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{2.7}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{2.8}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{2.9}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{2.10}$$

Замечание. Формулы $(2.6')$, $(2.6'')$ и $(2.6''')$ получаются из формулы (2.6) соответственно при $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$.

Пример 1. Найти производную функции $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x$.

Решение. На основании формул (2.3), $(2.4')$, (2.6) и $(2.6''')$ получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' - \left(\frac{2}{3}x^3\right)' + (x)' = \frac{1}{5}(x^5)' - \frac{2}{3}(x^3)' + (x)' =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 5x^4 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2.$$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, имеем

$$f'(x) = \left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = x\cos x$.

Решение. Пользуясь формулами (2.4), $(2.6''')$ и (2.8), находим

$$y' = (x\cos x)' = x'\cos x + x(\cos x)' = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) =$$

$$= \cos x - x\sin x.$$

Пример 4. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Вычислить $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

Решение. Находим вначале производную данной функции

$$f'(x) = 2x - 3.$$

Подставляя значения аргумента x в выражение для производной, получаем:

$$f'(-1) = 2\,(-1) - 3 = -5;\ \ f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3;$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1;\ \ f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Пример 5. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

Решение. По формуле (2.5) находим

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}\right)' = \frac{(x^2 - 2)'(x^2 + 2) - (x^2 - 2)\,(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x\,(x^2 + 2) - (x^2 - 2)\,2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{8x}{(x^2 + 2)^2}.$$

Пример 6. Найти производную функции $r = b\cos\varphi$.

Решение. Здесь функция обозначена буквой r, аргумент – буквой φ, b – постоянная величина. Дифференцируя, находим

$$r' = (b\cos\varphi)' = b\,(\cos\varphi)' = b\,(-\sin\varphi) = -b\sin\varphi,\ \ r' = -b\sin\varphi.$$

7. Найти производную функции $s = at^2 + bt + c$.

Функция обозначена буквой s, аргумент буквой t, a, b и c – постоянные. Дифференцируя, получаем

$$s = (at^2)' + (bt)' + (c)' = a\,(t^2)' + b\,(t)' + (c)' = 2at + b.$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x - 5.$

2. $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5}.$

3. $y = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}.$ **4.** $y = \sin x - \cos x.$

5. $y = x^2\cos x.$ **6.** $y = \dfrac{ax - b}{ax + b}.$

7. $s = 5t^3 - t^2.$ **8.** $r = \varphi\sin\varphi.$

9. $f(x) = x^2 - 5x + 6.$ Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(-2)$.

10. $r(\varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi$. Найти $r'(0)$, $r'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $r'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $r'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответы

1. $y' = x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x + 4$. **2.** $y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}$. **3.** $y' = \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **4.** $y' = \cos x + \sin x$. **5.** $y' = x\,(2\cos x - x\sin x)$. **6.** $y' = \frac{2ab}{(ax+b)^2}$. **7.** $s' = 15t^2 - 2t$. **8.** $r' = \sin\varphi + \varphi\cos\varphi$. **9.** $f'(x) = 2x - 5$; $f'(0) = -5$; $f'(1) = -3$; $f'(4) = 3$.

§ 2.2. Производная сложной функции

Если $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции

$$y = f[\varphi(x)]$$

существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу z на производную промежуточного аргумента z по независимой переменной x:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{2.11}$$

В частности, формулы § 2.1 примут вид:

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \cdot z'; \; \left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot z'; \; (\sin z)' = \cos z \cdot z';$$

$$(\cos z)' = -\sin z \cdot z'; \; (\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \cdot z'; \; (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} \cdot z'.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin 5x$.

Решение. Аргументом синуса здесь является не x, а $5x$. Это сложная тригонометрическая функция, которую можно представить так:

$$y = \sin z, \; z = 5x.$$

Имеем:

$$y'_z = (\sin z)'_z = \cos z = \cos 5x; \; z'_x = (5x)'_x = 5.$$

Подставляя выражения для y'_z и z'_x в формулу (2.11), находим:

$$y'_x = \cos 5x \cdot 5, (\sin 5x)' = 5\cos 5x.$$

Тот же результат можно получить и непосредственно, не вводя явно промежуточный аргумент $z = 5x$:

$$(\sin 5x)'_x = (\sin 5x)' \cdot (5x)'_x = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x.$$

З а м е ч а н и е 1. В последних равенствах штрихом обозначено дифференцирование по промежуточному аргументу $z = 5x$. Штрих вверху и x внизу означают дифференцирование по x.

З а м е ч а н и е 2. Мы пользовались здесь тем, что производная синуса по его аргументу равна косинусу того же аргумента.

П р и м е р 2. Найти производную от функции $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$.

Р е ш е н и е. Это сложная степенная функция с промежуточным аргументом $z = \sin x$. Данную функцию можно представить в виде

$$y = z^2, \ z = \sin x.$$

Дифференцируя, получаем:

$$y'_z = 2z = 2\sin x; \ z'_x = (\sin x)' = \cos x.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.11), находим

$$y'_x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Тот же результат получается непосредственно:

$$(\sin^2 x)'_x = (\sin^2 x)' \cdot (\sin x)'_x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

П р и м е р 3. Найти производную функции $y = \cos x^3$.

Р е ш е н и е. Это сложная тригонометрическая функция с промежуточным аргументом $z = x^3$. Функция представляется в виде

$$y = \cos z, \ z = x^3.$$

Дифференцируя данные функции по своим аргументам и подставляя полученные выражения в формулу (2.11), находим:

$$y'_z = (\cos z)'_z = -\sin z = -\sin x^3, \ z'_x = (x^3)'_x = 3x^2;$$

$$y'_x = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin x^3.$$

Этот результат можно получить и не вводя явно промежуточного аргумента z:

$$(\cos x^3)'_x = (\cos x^3)' \cdot (x^3)'_x = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin x^3.$$

П р и м е р 4. Найти производную функции $y = (ax - b)^4$.

Р е ш е н и е. Данная функция является сложной степенной функцией с промежуточным аргументом $z = ax - b$:

$$y = z^4, \; z = ax - b.$$

Дифференцируя, получаем:

$$y'_z = (z^4)' = 4z^3 = 4\,(ax - b)^3, \; z'_x = (ax - b)' = a,$$

$$y'_x = 4\,(ax - b)^3 \cdot a = 4a\,(ax - b)^3.$$

П р и м е р 5. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$.

Р е ш е н и е. Представляя данную функцию в виде

$$y = \sqrt{z}, \; z = x^2 + 4x + 2$$

и дифференцируя, находим:

$$y'_z = \left(\sqrt{z}\right)'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x + 2}};$$

$$z'_x = (x^2 + 4x + 2)' = 2x + 4;$$

$$y'_x = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 2}} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}}.$$

П р и м е р 6. Найти производную функции $y = \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

Р е ш е н и е. Это сложная степенная функция, аргумент которой является сложной тригонометрической функцией. Первый промежуточный аргумент есть $\sin\dfrac{x}{2}$, второй – $\dfrac{x}{2}$.

Здесь формулу (2.11) нужно применить дважды

$$y'_x = \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\sin\frac{x}{2}\right)' = \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\sin\frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\frac{x}{2}\right)'_x =$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin x.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = x^2 \sin^2 x^2$.

Решение. Данная функция представляет собой произведение двух функций, одна из которых является сложной функцией, при дифференцировании последней формулу (2.11) нужно применить дважды (см. пример 6).

Дифференцируя данную функцию как произведение и функцию от функции, получаем

$$y' = (x^2 \sin^2 x^2)' = (x^2)' \sin^2 x^2 + x^2 (\sin^2 x^2)' = 2x \sin^2 x^2 +$$

$$+ x^2 2 \sin x^2 \cos x^2 \cdot 2x = 2x \sin^2 x^2 + 2x^3 \sin 2x^2 =$$

$$= 2x\,(\sin^2 x^2 + x^2 \sin 2x^2).$$

Пример 8. Найти производную функции $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Решение. Дифференцируя ее как частное и сложную функцию, находим

$$y' = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos^2 x)' \sin x - \cos^2 x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\cos x\,(-\sin x)\sin x - \cos^2 x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos x \sin^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\cos x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1\right) = -\cos x\,(\operatorname{cosec}^2 x + 1).$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y = \sin\dfrac{x}{2}$.

2. $y = \cos(3 - 4x)$.

3. $y = \cos^3 x$.

4. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

5. $y = \sqrt{x^4 + 2x + 3}$.

6. $y = (2x^2 - 7)^3$.

7. $y = (a^2 - cx^2)^3$.

8. $y = \dfrac{1}{(ax + b)^2}$.

9. $y = \dfrac{1}{(1+\sin 2x)^3}$. **10.** $y = -\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg} x + 3x$.

11. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. **12.** $y = \cos^2 x^2$.

Ответы

1. $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$. **2.** $4\sin(3-4x)$. **3.** $-3\cos^2 x\sin x$. **4.** $-\sin 4x$.

5. $\dfrac{2x^3+1}{\sqrt{x^4+2x+3}}$. **6.** $12x\,(2x^2-7)^2$. **7.** $-6cx\,(a^2-cx^2)^2$. **8.** $-\dfrac{2a}{(ax+b)^3}$.

9. $\dfrac{-6\cos 2x}{(1+\sin 2x)^4}$. **10.** $3\operatorname{ctg}^4 x$. **11.** $\sin x\,(\sec^2 x+1)$. **12.** $-2x\sin 2x^2$.

§ 2.3. Производные показательных и логарифмических функций

Основные формулы:

$$(a^x)' = a^x \ln a; \tag{2.12}$$

$$(e^x)' = e^x; \tag{2.13}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}; \tag{2.14}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{2.15}$$

Если $z = z(x)$ – дифференцируемая функция от x, то формулы примут вид:

$$(a^z)' = a^z \cdot \ln a \cdot z'; \tag{2.12′}$$

$$(e^z)' = e^z \cdot z'; \tag{2.13′}$$

$$(\log_a z)' = \frac{z'}{z\ln a}; \tag{2.14′}$$

$$(\ln z)' = \frac{z'}{z}. \tag{2.15′}$$

П р и м е р 1. Найти производную функции $y = 4^x$.

Р е ш е н и е. Пользуемся формулой (2.12). В данном случае $a = 4$. Получаем

$$(4^x)' = 4^x \ln 4 = 2\ln 2 \cdot 4^x.$$

П р и м е р 2. Найти производную функции $y = a^{x^2}$.

Р е ш е н и е. По формуле $(2.12')$ получаем

$$\left(a^{x^2}\right)' = a^{x^2} \cdot \ln a \cdot (x^2)' = a^{x^2} \cdot \ln a \cdot 2x = 2\ln a \cdot x \cdot a^{x^2}.$$

П р и м е р 3. Найти производную функции $y = e^{\sin^2 x}$.

Р е ш е н и е. По формуле $(2.13')$ находим

$$\left(e^{\sin^2 x}\right)' = e^{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \sin 2x.$$

П р и м е р 4. Найти производную функции $y = \ln\sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

Р е ш е н и е. По формуле $(2.15')$ получаем

$$\left(\ln\sqrt{x^2 + 2x + 3}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \cdot (x^2 + 2x + 3)' =$$

$$= \frac{2x + 2}{2\,(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

З а м е ч а н и е. Данную функцию можно было бы записать так: $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3)$ и продифференцировать следующим образом:

$$\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3)\right]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)} \cdot (x^2 + 2x + 3)' = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

П р и м е р 5. Найти производную функции $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$.

Р е ш е н и е .

$$y' = \left[\ln \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right) \right]' =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln (1+2x) - \ln (1-2x)]' = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-2x} \right) = \frac{2}{1-4x^2}.$$

З а м е ч а н и е . Если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнять логарифмирование.

П р и м е р 6 . Найти производную функции $y = \cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x}$.

Р е ш е н и е . Дифференцируя произведение и пользуясь формулой $(2.13')$, находим

$$(\cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x})' = (\cos 2x)' e^{2\cos^2 x} + \cos 2x\, (e^{2\cos^2 x})' =$$

$$= -2\sin 2x \cdot e^{2\cos^2 x} + \cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x} \cdot 4\cos x\, (-\sin x) =$$

$$= -2\sin 2x \cdot e^{2\cos^2 x} - 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x} =$$

$$= -2e^{2\cos^2 x} \sin 2x\, (1+\cos 2x) = -4e^{2\cos^2 x} \cdot \sin 2x \cos^2 x.$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y = x^2 \ln x.$

2. $y = \ln (x^2 + 5x + 6).$

3. $y = \ln \dfrac{x-a}{x+a}.$

4. $y = \ln \sqrt{\dfrac{a-bx}{a+bx}}.$

5. $y = \ln \ln x.$

6. $y = \ln^2 x.$

7. $y = 4^x + x^4.$

8. $y = a^{\sin \frac{x}{4}}.$

9. $y = e^{\sin 2x}.$

10. $y = e^{\cos^2 x}.$

11. $y = \ln \dfrac{ae^x}{bx^2 + c}.$

12. $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

Ответы

1. $x(2\ln x+1)$. **2.** $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$. **3.** $\dfrac{2a}{x^2-a^2}$. **4.** $\dfrac{ab}{b^2x^2-a^2}$. **5.** $\dfrac{1}{x\ln x}$.

6. $\dfrac{2\ln x}{x}$. **7.** $4^x 2\ln 2+4x^3$. **8.** $\dfrac{1}{4}a^{\sin\frac{x}{4}}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\ln a$. **9.** $2\cos 2x e^{\sin 2x}$.

10. $-\sin 2x e^{\cos^2 x}$. **11.** $1-\dfrac{2bx}{bx^2+c}$. **12.** $\dfrac{4}{e^{-2x}-e^{2x}}$.

§ 2.4. Производные обратных тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (2.16)$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (2.17)$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}; \qquad (2.18)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \qquad (2.19)$$

Для сложных функций:

$$(\arcsin z)'=\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}; \qquad (2.16')$$

$$(\arccos z)'=-\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}; \qquad (2.17')$$

$$(\operatorname{arctg} z)'=\frac{z'}{1+z^2}; \qquad (2.18')$$

$$(\operatorname{arcctg} z)'=-\frac{z'}{1+z^2}. \qquad (2.19')$$

Пример 1. Найти производную функции $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Дифференцируя, получаем

$$\left(\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)'=(\arcsin x)'+\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

П р и м е р 2. Найти производную функции $y=\sqrt{1-x^2}\arccos x$.
Р е ш е н и е. Дифференцируем, используя формулы (2.4) и (2.17), находим

$$\left(\sqrt{1-x^2}\arccos x\right)'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\arccos x+$$

$$+\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-$$

$$-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right).$$

П р и м е р 3. Найти производную функции

$$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2).$$

Р е ш е н и е. Дифференцируем почленно и используем формулу (2.18′):

$$\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\right]'=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)'+\frac{1}{2}[\ln(x^2+a^2)]'=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}(x^2+a^2)'=$$

$$=\frac{a}{x^2+a^2}+\frac{x}{x^2+a^2}=\frac{x+a}{x^2+a^2}.$$

П р и м е р 4. Найти производную функции $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1}$.

Р е ш е н и е. По формуле $(2.19')$ находим

$$\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{2x-1}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+2x-1}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}.$$

П р и м е р 5. Найти производную функции $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. С помощью формулы $(2.16')$ получаем

$$\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

П р и м е р 6. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

Р е ш е н и е. По формуле $(2.18')$ находим

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\left[\frac{-1\,(1+x)-1\,(1-x)}{(1+x)^2}\right] = \frac{-2}{2+2x^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}.$$

Задачи

Найти производные функций:

1. $y = \arcsin 2x$.

2. $y = -\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

3. $y = \arccos\sqrt{x}$. **4.** $y = \arccos x^3$.

5. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}$. **6.** $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

7. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$. **8.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Ответы

1. $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **2.** $\dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$. **3.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **4.** $-\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

5. $-\dfrac{a}{a^2+x^2}$. **6.** $\dfrac{1}{x^2+1}$. **7.** $\dfrac{1}{2\sqrt{4x^3-x^2}}$. **8.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$.

§ 2.5. Производные неявных функций

Функция y от аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{2.20}$$

не разрешенным относительно зависимой переменной.

Чтобы найти производную y' от неявной функции, нужно продифференцировать по x обе части уравнения (2.20), рассматривая y как функцию x. Из полученного уравнения находится искомая производная y'.

Пример 1. Найти производную неявной функции $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Решение. Считая y функцией от x и дифференцируя y как сложную функцию, получаем

$$(x^2 + y^2 - a^2)' = 0, \quad 2x + 2y \cdot y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Замечание. В этом примере тот же результат можно получить и другим способом. Разрешив исходное уравнение относительно y, найдем две явные функции $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Дифференцируя эти функции, находим:

$$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y_1}, \quad y_2' = -\frac{x}{y_2}.$$

Однако переход от неявной функции $F(x, y) = 0$ к явной $y = f(x)$ не всегда возможен.

Пример 2. Найти производную неявной функции $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

Решение. Дифференцируя, получаем:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(x'y + xy') = 0;\ \ x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = 0;$$

$$x^2 - y + y'(y^2 - x) = 0.$$

Из последнего уравнения находим y':

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

Пример 3. Вычислить значение производной неявной функции $xy^2 = 4$ в точке $M(1, 2).$

Решение. Найдем вначале производную:

$$x'y^2 + x2yy' = 0,\ \ y' = -\frac{y}{2x}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства значения $x = 1,$ $y = 2,$ получаем

$$y' = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1.$$

Пример 4. Найти x_t' при $t = 1,$ если $t\ln x - x\ln t = 1.$

Решение. Это уравнение определяет x как неявную функцию t.

Дифференцируем по t:

$$t_t' \cdot \ln x + t \cdot \frac{1}{x} x_t' - \left(x_t' \ln t + x \cdot \frac{1}{t} \right) = 0.$$

Так как $t_t' = 1,$ то

$$\ln x + \frac{t}{x} x_t' - x_t' \ln t - \frac{x}{t} = 0, \quad x_t' \left(\frac{t}{x} - \ln t \right) - \left(\frac{x}{t} - \ln x \right) = 0,$$

откуда

$$x_t' = \frac{\dfrac{x}{t} - \ln x}{\dfrac{t}{x} - \ln t}.$$

Чтобы найти x'_t при $t=1$, необходимо определить еще значение x, соответствующее данному значению t. Подставляя $t=1$ в исходное уравнение, получим $1\cdot\ln x - x\ln 1 = 1$, откуда $\ln x = 1$, следовательно, $x=e$.

Подставим сейчас значения t, x в формулу для производной. Получим

$$x'_t = \frac{\frac{e}{1}-1}{\frac{1}{e}-0} = \frac{e-1}{\frac{1}{e}} = e\,(e-1),\;\; x'_t = e\,(e-1).$$

Задачи

Найти производные неявных функций:

1. $x^2+y^2-4xy=0$. **2.** $xy^2+x^2y=2$.

3. $xy+\sin y=0$. **4.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

5. $e^y+x=y$. **6.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

7. $\ln y-2x=0$. **8.** $y^2+x^4=x^2$.

9. Найти y' в точке $M\,(1,1)$, если $\dfrac{y}{x}+xy=2$.

10. Найти y' при $y=0$, если $x\cos y-\sin y+\sin 2y=1$.

Ответы

1. $\dfrac{x-2y}{2x-y}$. **2.** $-\dfrac{y\,(y+2x)}{x\,(x+2y)}$. **3.** $-\dfrac{y}{x+\cos y}$. **4.** $\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **5.** $\dfrac{1}{1-e^y}$.

6. $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. **7.** $2y$. **8.** $\dfrac{x\,(1-2x^2)}{y}$. **9.** 0. **10.** -1.

§ 2.6. Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y'=f'(x)$. Она обозначается символами:

$$y''=(y')' \text{ или } f''(x)=[\,f'(x)\,]' \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}.$$

Механический смысл второй производной. Если $x = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то $x'' = f''(t)$ есть ускорение этого движения.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и других порядков:

$$y''' = f'''(x) = (y'')' = \frac{d^3 y}{dx^3}, \; y^{\mathrm{IV}} = f^{\mathrm{IV}}(x) = (y''')' = \frac{d^4 y}{dx^4}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (y^{(n-1)})' = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ф о р м у л а Л е й б н и ц а для производной n-го порядка от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots +$$

$$+ nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

П р и м е р 1. Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Дифференцируя, получаем первую производную

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Дифференцируя еще раз, находим искомую производную второго порядка:

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$$

П р и м е р 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x^2 + 3x + 2$.

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируя, получаем:

$$y' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3; \; y'' = (2x + 3)' = 2;$$

$$y''' = (2)' = 0.$$

П р и м е р 3. Найти производную четвертого порядка функции $y = \sin x$.

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируя, определяем:

$$y' = \cos x, \; y'' = -\sin x, \; y''' = -\cos x, \; y^{\mathrm{IV}} = \sin x.$$

П р и м е р 4. Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{\mathrm{IV}}(0)$, если $f(x) = \cos 2x$.

Решение. Находим производные первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$$f'(x) = -2\sin 2x,\ \ f''(x) = -4\cos 2x,\ \ f'''(x) = 8\sin 2x,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 16\cos 2x.$$

Придавая x значение, равное нулю, находим

$$f(0) = 1,\ \ f'(0) = 0,\ \ f''(0) = -4,\ \ f'''(0) = 0,\ \ f^{\mathrm{IV}}(0) = 16.$$

Пример 5. Найти производную десятого порядка для функции $y = e^x(x^3 - 2)$.

Решение. Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(10)} = [e^x\ (x^3 - 2)\ ]^{(10)} = (e^x)^{(10)}(x^3 - 2) + 10\,(e^x)^{(9)}(x^3 - 2)' +$$

$$+\frac{10\cdot 9}{2}(e^x)^{(8)}(x^3 - 2)'' + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3}(e^x)^{(7)}(x^3 - 2)'''.$$

Все последующие слагаемые равны нулю, так как все высшие производные от функции $x^3 - 2$, начиная с четвертой, обращаются в нуль. Поскольку производная любого порядка от e^x есть e^x, то

$$y^{(10)} = e^x(x^3 - 2) + 30e^x x^2 + 45e^x\cdot 6x + 120e^x\cdot 6,$$

$$y^{(10)} = e^x(x^3 + 30x^2 + 270x + 718).$$

Задачи

Найти производные второго порядка от функций:

1. $y = (x^2 - 1)^2$. **2.** $y = (ax^2 - b)^2$.

3. $y = a^x$. **4.** $y = \ln x$.

5. $y = \mathrm{tg}\, x$. **6.** $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Найти производные третьего порядка от функций:

7. $r = a\,(\varphi - \sin\varphi)$. **8.** $r = a\,(1 - \cos\varphi)$.

9. $s = a\sin 4t$. **10.** $s = a\cos 3t$.

Ответы

1. $4\,(3x^2 - 1)$. **2.** $4a\,(3ax^2 - b)$. **3.** $a^x\ln^2 a$. **4.** $-\dfrac{1}{x^2}$. **5.** $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **6.** $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **7.** $a\cos\varphi$. **8.** $-a\sin\varphi$. **9.** $-64a\cos 4t$. **10.** $27a\sin 3t$.

§ 2.7. Производные гиперболических функций и функций, заданных параметрически

Выражения $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и их отношения называются соответственно *гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом* и обозначаются:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Основные формулы для гиперболических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

1. Производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \qquad (2.21)$$

2. Производная y'_x функции, заданной параметрически

$$x = \varphi_1(t),\ \ y = \varphi_2(t),$$

находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi'_2}{\varphi'_1}. \qquad (2.22)$$

3. Производная функции $y = u^v$, где u и v дифференцируемые функции от x, находится с помощью предварительного логарифмирования.

Пример 1. Найти производную функции $y = \operatorname{sh}^2 x$.

Решение. Дифференцируя сложную функцию и пользуясь первой из формул (2.21), получаем

$$y' = 2\,\mathrm{sh}\,x \cdot (\mathrm{sh}\,x)' = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = \mathrm{sh}\,2x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = x - \mathrm{cth}\,x$.

Решение. Дифференцируя разность двух функций и принимая во внимание четвертую из формул (2.21), находим

$$y' = 1 + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\mathrm{sh}^2 x + 1}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{cth}^2 x.$$

Пример 3. Найти производную y'_x функции $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$.

Решение. Находим сначала производные по t: $x'_t = -a\sin t$; $y'_t = b\cos t$. Подставляя найденные выражения в формулу (2.22), получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{ctg}\,t.$$

Пример 4. Найти производную y'_x функции $x = e^t\cos t$; $y = e^t\sin t$ при $t = 0$.

Решение. Функции x и y имеют следующие производные по t:

$$x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t);$$

$$y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t),$$

поэтому

$$y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

При $t = 0$ получаем $y'_x = 1$.

Пример 5. Найти производную от функции $y = x^x$.

Решение. Логарифмируя по основанию e, получаем

$$\ln y = x\ln x.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x};\ \frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

откуда

$$y' = y(\ln x + 1).$$

Подставив в последнее равенство выражение $y = x^x$, получим

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

П р и м е р 6 . Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Р е ш е н и е . Логарифмируем по основанию e:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

откуда

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

и, наконец,

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Задачи

Найти производные гиперболических функций:

1. $y = \operatorname{ch}^2 x$. **2.** $y = x \operatorname{ch} x$.

3. $y = \ln(\operatorname{sh} x)$. **4.** $y = \operatorname{th} x - x$.

5. $y = \arcsin(\operatorname{th} x)$. **6.** $y = \arccos(\operatorname{th} x)$.

Найти производные функций, заданных параметрически:

7. $x = b\cos^3 u,\ \ y = b\sin^3 u$. **8.** $x = at\cos t,\ \ y = at\sin t$.

9. $x = t^2,\ \ y = 4t$ при $t = 1$.

10. $x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right),\ \ y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$ при $t = 2$.

11. Найти производную степенно-показательной функции $y = u^v$, где u и v – дифференцируемые функции от x.

Найти производные степенно-показательных функций:

12. $y = x^{\cos x}$. **13.** $y = (\sin x)^x$.

14. $y = \sqrt[x]{x}$. **15.** $y = x^{\sqrt{x}}$.

Ответы

1. $\operatorname{sh}2x$. **2.** $\operatorname{ch}x + x\operatorname{sh}x$. **3.** $\operatorname{cth}x$. **4.** $-\operatorname{th}^2 x$. **5.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$. **6.** $-\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$. **7.** $-\operatorname{tg}u$. **8.** $\dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$. **9.** 2. **10.** $\dfrac{5b}{3a}$. **11.** $u^v\left(v'\ln u + \dfrac{v}{u}u'\right)$.

Указание. Логарифмируя равенство $y = u^v$, получим $\ln y = v\ln u$. Продифференцировать последнее равенство и подставить в полученную формулу выражение $y = u^v$. **12.** $x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$. **13.** $(\sin x)^x(\ln\sin x + {}$ ${} + x\operatorname{ctg}x.)$ **14.** $x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$. **15.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)$.

§ 2.8. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение ее производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{2.23}$$

В частности, при $f(x) = x$, получаем

$$dx = 1\cdot\Delta x,\ \ dx = \Delta x, \tag{2.24}$$

т. е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.*

Формулу (2.23) можно, следовательно, написать так

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{2.25}$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{2.26}$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению LN ординаты касательной ML, проведенной к графику этой функции в точке M, когда аргумент получает приращение Δx (рис. 2.1).

Из определения производной и дифференциала вытекает, что

$$\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x,$$

где $\varepsilon\to 0$, когда $\Delta x\to 0$, т. е. дифференциал функции отличается от приращения на бесконечно малую высшего порядка, чем $\Delta x = dx$.

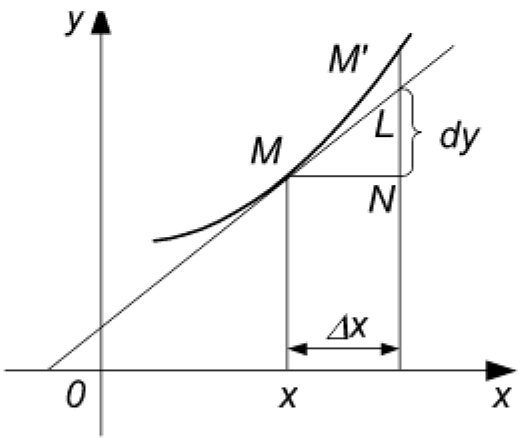


Рис. 2.1

При малых Δx справедлива приближенная формула

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x \qquad (2.27)$$

или

$$f(x+\Delta x) \approx f'(x)\,\Delta x + f(x). \qquad (2.28)$$

Если $u,\ v,\ w$ – дифференцируемые функции от x, а c – постоянная, то верны следующие свойства дифференциалов:

$$dc = 0,\ \ c = \text{const};$$

$$d\,(u + c) = du,\ \ c = \text{const};$$

$$d\,(u - v + w) = du - dv + dw;$$

$$d\,(cu) = cdu,\ \ c = \text{const};$$

$$d\,(uv) = udv + vdu;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2};$$

$$df(u) = f'(u)\,du,\ \ u = \varphi\,(x).$$

П р и м е р 1 . Найти дифференциал функции $y = \sin x$.

Р е ш е н и е . По формуле (2.25) находим

$$dy = d\,(\sin x) = (\sin x)'\,dx = \cos x dx,\ \ dy = \cos x dx.$$

П р и м е р 2 . Найти дифференциал функции $y = x^2 + 4x + 8$.

Р е ш е н и е . На основании формулы (2.25) получаем

$$dy = (x^2 + 4x + 8)'\,dx = (2x + 4)\,dx = 2\,(x + 2)\,dx.$$

П р и м е р 3 . Найти дифференциал функции $r = a\,(\varphi - \cos\varphi)$.

Р е ш е н и е . В данном случае функция обозначена буквой r, аргумент – буквой φ. Формула (2.25) перепишется так: $dr = r'd\varphi$. На основании этой формулы находим

$$dr = [a\,(\varphi - \cos\varphi)\,]'\,d\varphi = a\,(1 + \sin\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 4. Вычислить значение дифференциала функции $y = x^3 + 2x$, когда x изменяется от 1 до 1,1.

Решение. Прежде всего находим общее выражение для дифференциала этой функции:

$$dy = (3x^2 + 2)\,dx.$$

Подставляя значения $x = 1$, $dx = \Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$ в последнюю формулу, получаем искомое значение дифференциала:

$$dy = (3 \cdot 1^2 + 2)\,0{,}1 = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5.$$

Пример 5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно найти $\operatorname{arctg} 1{,}02$.

Решение. Формула (2.28) применительно к данной функции перепишется в виде

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1 + x^2}\,\Delta x.$$

В нашем случае $x + \Delta x = 1{,}02$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$. Подставляя эти значения в формулу, получим

$$\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1 + 1^2} \cdot 0{,}02 = \frac{\pi}{4} + 0{,}01 \approx 0{,}795.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}795$.

Задачи

Найти дифференциалы функций:

1. $y = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$. **2.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

3. $y = \operatorname{tg}^2 2x$. **4.** $y = \sqrt{x^3 + 6x^2}$.

5. $y = e^{\sin 4x}$. **6.** $r = \varphi \cos\varphi - \sin\varphi$.

7. $s = b \sin^3 t$. **8.** $y = x^3$, $x = t^2 - 1$.

9. Дана функция $y = x^4 + 4x$. Найти Δy и dy, сравнить их между собой, если: 1) $x = 1$, $\Delta x = 1$; 2) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

10. Вычислить приближенно приращение функции $y = x^2 + 2x + 3$, когда x меняется от 2 до 1,98.

11. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно найти:

1) $\operatorname{arctg} 1{,}05$; 2) $e^{0,2}$; 3) $\ln 1{,}01$; 4) $\sin 31°$.

Ответы

1. $4\,(x+1)^3\,dx$. **2.** $\dfrac{2}{x^3}\,dx$. **3.** $\dfrac{4\operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x}\,dx$. **4.** $\dfrac{3x^2+12x}{2\sqrt{x^3+6x^2}}\,dx$.

5. $4e^{\sin 4x}\cos 4x dx$. **6.** $dr = -\varphi \sin\varphi d\varphi$. **7.** $3b\sin^2 t\cos t dt$. **8.** $6t\,(t^2 -$ $-1)^2\,dt$. **9.** 1) $\Delta y = 19$, $dy = 8$; 2) $\Delta y = 0{,}864$, $dy = 0{,}8$. **10.** $-0{,}12$. **11.** 1) 0,81; 2) 1,2; 3) 0,01; 4) 0,515. У к а з а н и е . Выразить $x = \operatorname{arc} 30°$ и $\Delta x = \operatorname{arc} 1°$ в радианной мере.

Глава 3.
Приложения производной

Понятие производной находит многочисленные приложения. С помощью производной можно найти касательную к кривой в данной точке, определить скорость и ускорение неравномерного движения в данный момент времени. Производная широко применяется при исследовании функций, являющихся переменными величинами. С переменными же величинами постоянно встречаются при изучении закономерностей природы.

§ 3.1. Правило Лопиталя – Бернулли

Правило Лопиталя – Бернулли является эффективным средством нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции.

I. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ дифференцируемы при $0 < |x - a| < h$, причем производная одной из них не обращается в нуль.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – обе бесконечно малые или обе бесконечно большие при $x \to a$, т.е. если частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет в точке $x = a$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии, что предел отношения производных существует.

Последняя формула и выражает правило Лопиталя – Бернулли: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных, если последний существует или равен бесконечности.*

Правило это применимо и в случае, когда $a = \infty$. Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = a$ вновь дает неопределенность одного из указанных типов, $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют требованиям, ранее сформулированным для $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

З а м е ч а н и е 1. Предел отношения функций может существовать в то время, когда отношения производных не стремятся ни к какому пределу.

II. Раскрытие неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

1. Для раскрытия неопределенностей типа $0 \cdot \infty$ необходимо преобразовать соответствующее произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, в частности

$$\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} \left(\text{вид } \frac{0}{0}\right) \text{ или } \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \left(\text{вид } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

2. В случае неопределенности вида $\infty - \infty$ необходимо преобразовать соответствующую разность $f(x) - \varphi(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, в произведение $f(x)\left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]$ и раскрыть сначала неопределенность $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$; если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, то следует привести выражение к виду

$$\frac{1 - \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} \left(\text{вид } \frac{0}{0}\right).$$

3. Неопределенности видов 1^{∞}, 0^0, ∞^0 раскрываются с помощью предварительного логарифмирования и нахождения предела сте-

пени $[f(x)]^{\varphi(x)}$. Эти неопределенности сводятся к случаю неопределенности $0 \cdot \infty$, при этом используется тождество

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \ln f(x)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Выражение «раскрыть неопределенность типа 0^0» означает найти предел $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \right]^{\varphi(x)}$ при условии $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0.$

В некоторых случаях правило Лопиталя – Бернулли полезно комбинировать с нахождением пределов элементарными способами.

П р и м е р 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x e^x - 5x}{4x^2 + 7x}$.

Р е ш е н и е. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Применяя правило Лопиталя – Бернулли, находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x e^x - 5x}{4x^2 + 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x e^x - 5x)'}{(4x^2 + 7x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x e^x + \sin x e^x - 5}{8x + 7} = -\frac{4}{7}.$$

П р и м е р 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x e^{2x} - x}{5x^2 + x^3}$.

Р е ш е н и е. В данном случае правило Лопиталя – Бернулли нужно применить дважды, так как отношение первых производных снова представляет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Действительно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x e^{2x} - x}{5x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x e^{2x} - x)'}{(5x^2 + x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x e^{2x} + 2 \sin x e^{2x} - 1}{10x + 3x^2}.$$

При $x \to 0$ снова получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяя еще раз правило Лопиталя – Бернулли, находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x e^{2x} + 2 \sin x e^{2x} - 1}{10x + 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x e^{2x} + 2 \sin x e^{2x} - 1)'}{(10x + 3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x e^{2x} + 4\cos x e^{2x} + 4\sin x e^{2x}}{10+6x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

П р и м е р 3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Р е ш е н и е. С помощью правила Лопиталя – Бернулли получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}.$$

Предел отношения первых производных – неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскрываем эту неопределенность:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos 3x \sin 3x}{-6\cos x \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}.$$

Снова получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя еще раз правило Лопиталя – Бернулли, находим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = 3.$$

П р и м е р 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$ при $a > 1$, $\alpha > 0$.

Р е ш е н и е. При вычислении этого предела можно считать $x > 1$ (так как $x \to \infty$) и если n – ближайшее к α, превосходящее его целое число, то

$$\frac{a^x}{x^\alpha} > \frac{a^x}{x^n} \ \ (n > 0).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}\geq\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n},$$

где n – целое число.

Так как $n>0$, то предел правой части последнего неравенства можно найти с помощью правила Лопиталя – Бернулли.

Применяя n раз это правило, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x\,[\ln a]^n}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1}=\infty.$$

Итак, если $a>1$ и $\alpha>0$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=\infty$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0.$$

З а м е ч а н и е 1. Показательная функция a^x при $a>1$ растет быстрее любой степени x.

З а м е ч а н и е 2. Если $P\,(x)$ – любой многочлен

$$P\,(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\,(x)}{a^x}=0$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{|\,P\,(x)\,|}=\infty.$$

П р и м е р 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ при $\alpha>0$, $x>0$.

Р е ш е н и е. Применяя правило Лопиталя – Бернулли, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \text{ при } \alpha>0$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln x}=\infty.$$

З а м е ч а н и е . Логарифмическая функция $\ln x$ растет медленнее любой положительной степени x.

П р и м е р 6 . Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Р е ш е н и е . При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Раскроем эту неопределенность, приводя ее к неопределенности $\dfrac{0}{0}$ и применяя правило Лопиталя – Бернулли,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

П р и м е р 7 . Найти $\lim\limits_{x\to 0}[\,(x-\sin x)\ln x]$.

Р е ш е н и е . Здесь имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Данную функцию можно представить в виде

$$(x-\sin x)\ln x=\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x-\sin x}}.$$

Полученную неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ раскрываем с помощью правила Лопиталя – Бернулли:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x-\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)^2}{x\,(\cos x-1)}.$$

Это – неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)^2}{x(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\sin x)(1-\cos x)}{\cos x-1-x\sin x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2+(x-\sin x)\sin x}{-\sin x-\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+x\sin x-\sin^2 x}{-2\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+x\sin x+\cos 2x}{-2\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\sin x+x\cos x-2\sin 2x}{-3\cos x+x\sin x}=0.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x=0.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$.

Решение. При $x\to 1$ имеем неопределенность 0^0. Воспользуемся тождеством

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}, \qquad \text{(A)}$$

которое в данном случае примет вид

$$(x-1)^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}=\lim_{x\to 1}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\lim\limits_{x\to 1}\ln(x-1)}.$$

Найдем сейчас $\lim\limits_{x\to 1}[\ln x\cdot\ln(x-1)]$. Это неопределенность вида $0\cdot\infty$. Раскрывая эту неопределенность, получим

$$\lim_{x\to 1}[\ln x\cdot\ln(x-1)]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{1-x}}{-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x(\ln x)^2}{x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2+x2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}[(\ln x)^2+2\ln x]=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}=e^0=1.$$

П р и м е р 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, то здесь имеем неопределенность вида 1^{∞}.

Принимая во внимание тождество (А) (см. пример 8), с помощью правила Лопиталя – Бернулли находим

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}}.$$

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x}$, это неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

П р и м е р 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е. При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида ∞^0. Преобразуя данную функцию и применяя правило Лопиталя – Бернулли, получаем

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

П р и м е р 11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Р е ш е н и е. Применим правило Лопиталя – Бернулли:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

В правой части последнего равенства предел не существует, поэтому правило Лопиталя – Бернулли здесь неприменимо.

Указанный предел можно найти непосредственно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} = 1.$$

Задачи

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.

5. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$.

7. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6} \right)$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} \right)^{\mathrm{tg}\,x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{ctg}\,x)^{\sin x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Ответы

1. 3. **2.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **3.** 5. **4.** 0. **5.** $\dfrac{2}{\pi}$. **6.** $\dfrac{1}{2}$. **7.** $\dfrac{1}{5}$. **8.** 1 . Указание. Положить $x^x = y$, прологарифмировать это равенство и перейти к пределу. **9.** 1. **10.** 1. **11.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$. **12.** $\dfrac{1}{e}$.

§ 3.2. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между кривыми. Кривизна плоской кривой. Скорость и ускорение

Касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предельное положение M_0T секущей MM_0, когда точка M стремится к M_0 вдоль данной кривой (рис. 3.1).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{3.1}$$

Нормалью к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная к касательной в данной точке.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0). \tag{3.2}$$

Кривизной кривой в ее точке M называется предел абсолютной величины отношения угла $\Delta\alpha$ между касательными в точках M и N кривой к длине дуги $\overset{\smile}{MN} = \Delta s$, когда $N \to M$ (рис 3.2), т. е.

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|,$$

где угол α выражен в радианах.

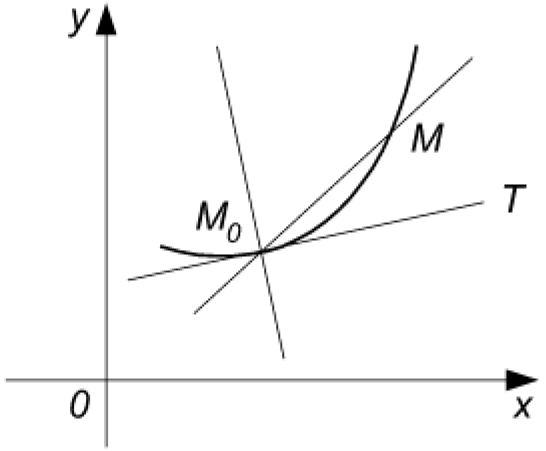


Рис. 3.1

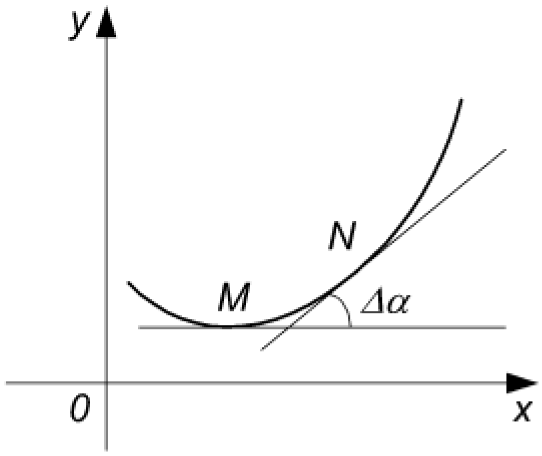


Рис. 3.2

Кривизна кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.3}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$, то ее кривизна определяется формулой

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.4}$$

Радиусом кривизны кривой в точке называется величина, обратная ее кривизне в этой точке. Если радиус кривизны обозначить через R, то

$$R = \frac{1}{k}. \tag{3.5}$$

Окружностью кривизны (соприкасающейся окружностью) кривой в ее точке M называется предельное положение окружности, проходящей через точку M и две другие точки кривой L и N, когда $L \to M$ и $N \to M$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны кривой в соответствующей точке.

Центр окружности кривизны называется *центром кривизны* кривой в данной точке M. Координаты X и Y центра кривизны кривой

$y = f(x)$ вычисляются по формулам:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}; \ Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3.6}$$

Эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.

Формулы (3.6) дают параметрические уравнения эволюты с параметром x или y.

Если кривая задана параметрически, то уравнения ее эволюты:

$$X = x - y'\,\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}; \ Y = y + x'\,\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}. \tag{3.7}$$

Эвольвентой кривой называется такая кривая, для которой данная кривая является эволютой.

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $f(x) = x^3$ в точке $M_0(2, 8)$.

Решение. Прежде всего точка M_0 лежит на кривой, так как ее координаты удовлетворяют данному уравнению.

Находим производную данной функции и ее значение при $x_0 = 2$:

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2, \ f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Подставляя значения $x_0 = 2$, $y_0 = 8$, $f'(x_0) = 12$ в уравнения (3.1) и (3.2) получим соответственно:

$y - 8 = 12\,(x-2)$ или $12x - y - 16 = 0$ – уравнение касательной;

$y - 8 = -\dfrac{1}{12}\,(x-2)$ или $x + 12y - 98 = 0$ – уравнение нормали.

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

в точке $M_0(3, 2)$.

Решение. Находим производную неявной функции $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} - 1 = 0$:

$$\frac{2x}{18} + \frac{2yy'}{8} = 0,$$

откуда

$$y'(x) = -\frac{4x}{9y}, \;\; y'(x_0) = y'(3) = -\frac{4\cdot 3}{2\cdot 9} = -\frac{2}{3}.$$

Подставляя значения $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $y'(x_0) = -\frac{2}{3}$ в формулы (3.1) и (3.2), получим

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x-3) \text{ или } 2x + 3y - 12 = 0 \text{ – уравнение касательной;}$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x-3) \text{ или } 3x - 2y - 5 = 0 \text{ – уравнение нормали.}$$

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически,

$$x = 2\,(t - \sin t); \;\; y = 2\,(1 - \cos t):$$

1) в произвольной точке; 2) при $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение касательной (3.1) можно написать в виде

$$Y - y = y'_x(x)\,(X - x), \tag{3.1$'$}$$

где (x, y) – координаты точки кривой, (X, Y) – координаты точки касательной.

Находим производную y'_x по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin t}{2\,(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Подставляя выражения для x, y и y'_x в формулу (3.1′), получаем уравнение касательной к данной кривой в произвольной точке

$$Y - 2\,(1-\cos t) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,[\,X - 2\,(t - \sin t)\,].$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ из последнего уравнения находим

$$Y - 2 = 1\cdot\left[\,X - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\,\right], \;\; Y - 2 = X - \pi + 2$$

или

$$X - Y - \pi + 4 = 0.$$

Пример 4. Доказать, что кривизна линии $x^2 + y^2 = 25$ является постоянной.

Решение. Искомую кривизну вычислим по формуле (3.3). Найдем сначала первую и вторую производную неявной функции $x^2 + y^2 - 25 = 0.$ Дифференцируя, получим:

$$2x + 2yy' = 0,\ \ y' = -\frac{x}{y};$$

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{x'y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.3), находим

$$k = \frac{\left|-\frac{25}{y^3}\right|}{\left[1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{25}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{25}{25^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{5},\ \ k = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, кривизна данной линии постоянна.

Пример 5. Найти радиус кривизны циклоиды $x = a\,(t - \sin t),\ \ y = a\,(1 - \cos t)$ в ее произвольной точке.

Решение. Из формул (3.4) и (3.5) вытекает, что радиус кривизны кривой, заданной параметрическими уравнениями, определяется формулой

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\left|x'y'' - y'x''\right|}.$$

Найдем первые и вторые производные функций x и y:

$$x' = a\,(1 - \cos t);\ \ y' = a\sin t; \qquad\qquad x'' = a\sin t;\ \ y'' = a\cos t.$$

Составим выражения $x'^2 + y'^2$ и $(x'y'' - y'x'')$:

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t +$$

$$+\sin^2 t) = a^2(1-2\cos t+1) = a^2(2-2\cos t) = 2a^2(1-\cos t),$$

$$x'y'' - y'x'' = a\,(1-\cos t)\,a\cos t - a\sin t a\sin t = a^2(\cos t -$$

$$-\cos^2 t - \sin^2 t) = a^2(\cos t - 1) = -a^2(1-\cos t).$$

Подставляя полученные выражения в формулу для радиуса кривизны, находим

$$R = \frac{\left[2a^2(1-\cos t)\,\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|-a^2(1-\cos t)\right|} = \frac{2\sqrt{2}a^3(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t)} = 2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}.$$

Так как $\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, то

$$R = 4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

В частности, если $t = \pi$, то $R = 4a$; если $t = 0$, то $R = 0$.

П р и м е р 6. Составить уравнение эволюты параболы $y = 2x^2$.

Р е ш е н и е. Найдем первую и вторую производную данной функции: $y' = 4x$, $y'' = 4$. Подставляя выражения для y, y', y'' в формулы (3.7), получим

$$X = x - \frac{4x\,(1+16x^2)}{4} = -16x^3,\ X = -16x^3;$$

$$Y = 2x^2 + \frac{1+16x^2}{4} = \frac{1+24x^2}{4},\ Y = \frac{1+24x^2}{4}.$$

Исключив параметр x, найдем уравнение эволюты данной параболы

$$Y = \frac{1}{4} + 6\left(\frac{X}{16}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

П р и м е р 7. Написать уравнение эволюты циклоиды

$$x = a\,(t-\sin t),\ y = a\,(1-\cos t).$$

Р е ш е н и е. Так как

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1-\cos t),\ x'y'' - y'x'' = -a^2(1-\cos t)$$

(см пример 5), то в соответствии с формулами (3.7) получаем

$$X = x - y' \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = a\,(t - \sin t) - a\,(\sin t) \cdot \frac{2a^2(1 - \cos t)}{-a^2(1 - \cos t)} =$$

$$= at - a\sin t + 2a\sin t = at + a\sin t;$$

$$Y = y + x' \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = a\,(1 - \cos t) + a\,(1 -$$

$$- \cos t) \cdot \frac{2a^2(1 - \cos t)}{-a^2(1 - \cos t)} = a\,(1 - \cos t) - 2a\,(1 - \cos t) =$$

$$= -a\,(1 - \cos t).$$

Следовательно, уравнения эволюты циклоиды имеют вид:

$$X = at + a\sin t;\;\; Y = -a\,(1 - \cos t).$$

Введем новую переменную по формуле $t = \pi + \tau$. Уравнения эволюты примут вид:

$$X = a\,[\pi + \tau + \sin(\pi + \tau)\,] = a\pi + a\tau - a\sin\tau = a\,(\tau - \sin\tau) + a\pi;$$

$$Y = -a\,[1 - \cos(\pi + \tau)\,] = -a\,(1 + \cos\tau) = -a - a\cos\tau =$$

$$= -2a + a - a\cos\tau = a - a\cos\tau - 2a = a\,(1 - \cos\tau) - 2a,$$

т.е.

$$X = a\,(\tau - \sin\tau) + a\pi;\;\; Y = a\,(1 - \cos\tau) - 2a.$$

Эти уравнения можно записать так:

$$x = a\,(t' - \sin t');\;\; y = a\,(1 - \cos t'),$$

где $x = X - a\pi$, $y = Y + 2a$, $\tau = t'$.

Следовательно, эволютой циклоиды является такая же циклоида, смещенная по оси Ox на величину πa и по оси Oy на величину $2a$ (рис 3.3).

Пример 8. Под каким углом кривая $y = e^x$ пересекает ось Oy?

Решение. Углом между кривой линией и прямой называется угол между этой прямой и касательной к кривой в точке их пересечения.

Найдем точку пересечения кривой $y = e^x$ и оси Oy. Так как ось Oy имеет уравнение $x = 0$, то точка пересечения определится из системы уравнений: $y = e^x$; $x = 0$, откуда $y = 1$. Следовательно, $M(0, 1)$ – точка пересечения.

Угловой коэффициент касательной в данной точке равен значению производной функции в этой точке: $f'(x) = e^x$, $f'(0) = e^0 = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$.

Итак, угол, образуемый касательной с осью Ox, равен $45°$. Очевидно с осью Oy касательная образует такой же угол.

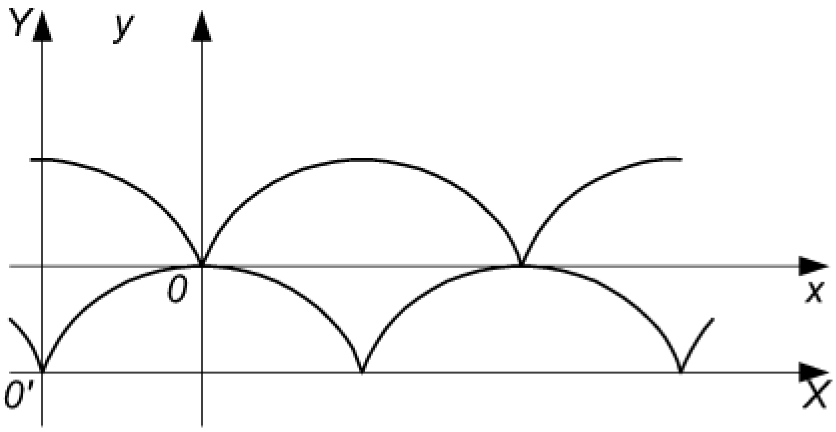


Рис. 3.3

Пример 9. Под какими углами пересекаются кривые $y = x^2$, $y^2 = x$?

Решение. Углом между двумя кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Найдем точки пересечения данных линий. Решая систему их уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2; \\ y^2 &= x, \end{aligned}\right\}$$

получим две точки пересечения: $O(0, 0)$, $M(1, 1)$.

Уравнения касательных к кривым в призвольной точке будут соответственно:

$$Y - y = 2x\,(X - x),$$

$$Y - y = \frac{1}{2\sqrt{x}}(X - x),$$

в частности, в точке $O(0, 0)$

$$Y = 0, \ \ X = 0,$$

а в точке $M\ (1, 1)$

$$Y - 1 = 2\,(x - 1), \ \ Y - 1 = \frac{1}{2}\,(X - 1).$$

Как видно из уравнений, касательные к кривым в точке $O\,(0, 0)$ совпадают с координатными осями, поэтому угол между кривыми равен $90°$.

В точке $M\ (1, 1)$ угол между линиями определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}, \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4},$$

где k_1=2, k_2=$\frac{1}{2}$ угловые коэффициенты касательных.

Пример 10. Тело движется вдоль прямой Ox по закону $x = t - \sin t$. Определить скорость и ускорение движения при $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. В силу механического значения первой и второй производной находим для любого момента времени t:

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \ \text{(скорость)},$$

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \sin t \ \text{(ускорение)}.$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ получаем $v = 1, \ \ w = 1.$

Задачи

1. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ в точке $M\ (1, 6)$.

2. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^3 - 3xy - 13 = 0$ в точке $M\ (-1, 2)$.

3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x = t^2$, $y = 4t$ при $t = -1$.

4. Какие углы образует кривая $y = x^2 - x$ с осью Ox в точках пересечения с этой осью?

5. Под каким углом пересекаются линии

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y = x^2 \ ?$$

6. Найти уравнение эволюты эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

7. Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2px$.

8. Вычислить кривизну кривой $y = e^x$ при $x = 0$.

9. Найти кривизну кривой $y = kx + b$ в ее произвольной точке.

10. Точка движется по прямой Ox по закону $x = t^3 - 9t^2 + 24t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты времени точка меняет направление движения?

11. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A\,(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

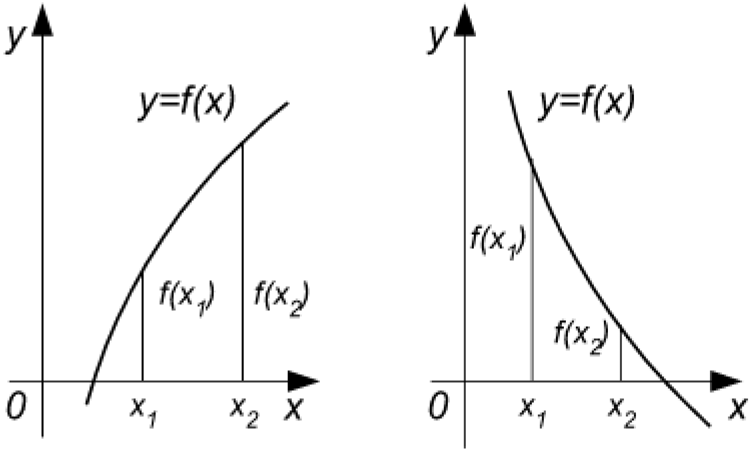
Ответы

1. $6x - y = 0$; $x + 6y - 37 = 0$. **2.** $x - 5y + 11 = 0$; $5x + y + 3 = 0$. **3.** $2x + y + 2 = 0$; $x - 2y - 9 = 0$. **4.** $135°$, $45°$. **5.** $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. **6.** $X = \left(a - \dfrac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$, $Y = \left(b - \dfrac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$. **7.** $Y^2 = \dfrac{8}{27p}(X - p)^3$. **8.** $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **9.** $k = 0$. **10.** $v = 3t^2 - 18t + 24$, $w = 6t - 18$; $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. **11.** $k(A - x)$.

§ 3.3. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция называется *возрастающей* в некотором промежутке (рис. 3.4, *а*), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) < f(x_2). \tag{3.8}$$



а)　　　　　***б***)

Рис 3.4

Функция называется *убывающей* (рис. 3.4, *б*) в некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) > f(x_2). \quad (3.9)$$

Достаточное условие возрастания (убывания) функции: если в данном промежутке производная данной функции положительна, то функция в этом промежутке возрастает; если производная данной функции в данном промежутке отрицательна, то функция в этом промежутке убывает.

Максимумом функции $y = f(x)$ называется такое ее значение $y_1 = f(x_1)$, которое больше всех других ее значений, принимаемых в точках *x*, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее (рис. 3.5), т.е.

$$f(x_1) > f(x), \quad (3.10)$$

где *x* – любая точка из некоторого интервала, содержащего точку x_1.

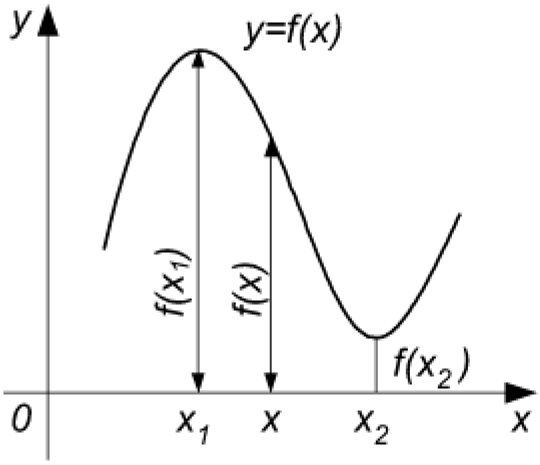


Рис. 3.5

Минимумом функции $y = f(x)$ называется такое ее значение $y_2 = f(x_2)$, которое меньше всех других ее значений, принимаемых в точках *x*, достаточно близких к точке x_2 и отличных от нее, т.е.

$$f(x_2) < f(x), \quad (3.11)$$

где *x* – любая точка из некоторого интервала, содержащего точку x_2.

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции. Точки, в которых достигается экстремум, называются *точками экстремума*.

Функция может иметь экстремум только в тех точках области ее определения, в которых производная равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими* точками аргумента функции.

Наименьшее и *наибольшее* значения непрерывной функции $y = f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигаются или в критических точках аргумента функции или на концах отрезка $[a, b]$.

Достаточное условие экстремума. *Первое правило.* Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через эту точку, то $f(x_0)$ – экстремум функции, причем:

1) функция имеет максимум в точке x_0, если знак производной меняется с плюса на минус (т.е. при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ $f'(x) > 0$, при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ $f'(x) < 0$);

2) функция имеет минимум в точке x_0, если знак производной меняется с минуса на плюс (т.е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ $f'(x_0) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).

Второе правило. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 будет точкой экстремума причем:

1) x_0 – точка максимума, если $f''(x_0) < 0$;

2) x_0 – точка минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Замечание. Пусть первая из неравных нулю в точке x_0 производных функции $y = f(x)$ имеет порядок *k*. Тогда, если *k* – четное, то точка x_0 является точкой максимума, если $f^{(k)}(0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(k)}(x_0) > 0$. Если же *k* – нечетное, то точка x_0 не является точкой экстремума.

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4.$$

Решение. Находим первую производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2).$$

Производная обращается в нуль, когда $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Эти точки делят бесконечный интервал на три интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$. Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов.

Если $x < -1$, то $f'(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3(x+1)(x-2) > 0$, так как $(x+1) < 0$ и $(x-2) < 0$. Следовательно, функция возрастает в промежутке $(-\infty, -1)$.

Если $-1 < x < 2$, то $f'(x) = 3(x+1)(x-2) < 0$, так как $(x+1) > 0$, $(x-2) < 0$, поэтому функция убывает в промежутке $(-1, 2)$.

Аналогично убеждаемся, что функция возрастает в промежутке $(2, \infty)$.

Заметив, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, строим эскиз графика (рис. 3.6).

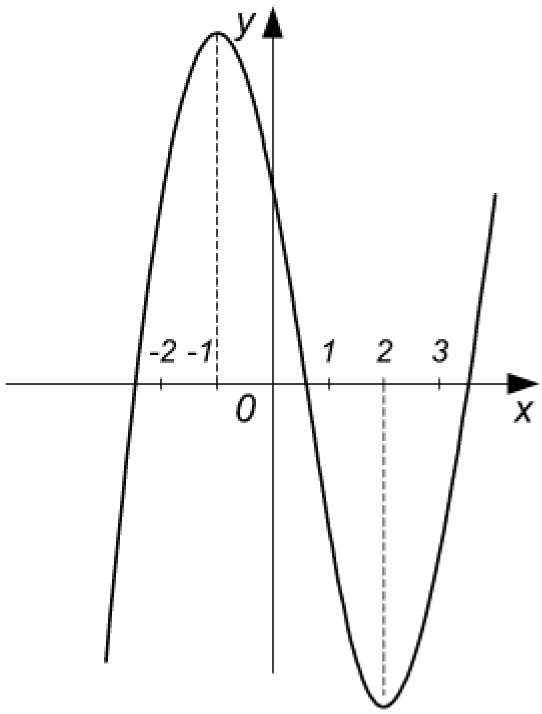


Рис. 3.6

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}.$$

Решение. Находим первую производную:

$$f'(x) = x^2 - x - 6.$$

Производная всюду непрерывна. Найдем точки, в которых она обращается в нуль: $x^2 - x - 6 = 0$.

Критическими точками аргумента функции являются точки $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

С помощью первой производной исследуем критические точки.

Так как

$$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)\,(x-3),$$

то при $x < -2$ имеем $f'(x) > 0$ (ибо $x + 2 < 0$, $x - 3 < 0$); при $-2 < x < 3$ имеем $f'(x) < 0$ (ибо $x + 2 > 0$, $x - 3 < 0$).

Таким образом, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = -2$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x_1 = -2$ функция имеет максимум, а именно

$$\max f(x) = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6\,(-2) + \frac{8}{3} = 10.$$

Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$: при $-2 < x < 3$ $f'(x) < 0$; при $x > 3$ $f'(x) > 0$ (ибо $x + 2 > 0$, $x - 3 > 0$), значит при переходе через точку $x_2 = 3$ производная функции меняет знак с минуса на плюс. Это означает, что функция в этой точке имеет минимум, а именно

$$\min f(x) = f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + \frac{8}{3} = -10\frac{5}{6}.$$

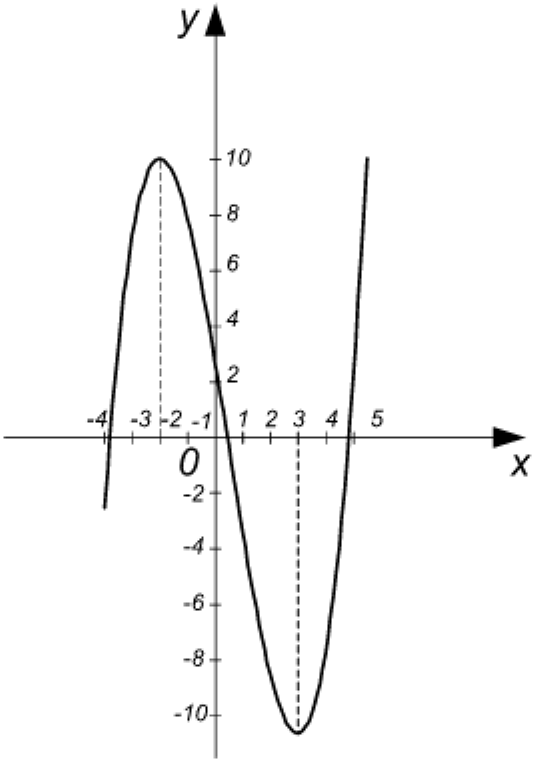


Рис. 3.7

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 3.7).

З а м е ч а н и е. Пользуясь первым правилом, нужно всегда иметь в виду локальный характер экстремума. Исследуя знак первой производной, нужно рассматривать точки слева и справа от критической точки и достаточно близкие к ней. Если в данном примере для $x_1 = -2$ взять достаточно удаленные точки (например, $x > 3$), то окажется $f'(x) > 0$ при $x < -2$ и $f'(x) > 0$ при $x > -2$ (к примеру при $x = 4$). Отсюда можно было бы сделать неверный вывод о том, что в точке $x_1 = -2$ экстремума нет.

П р и м е р 3. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+\frac{9}{4}.$$

Р е ш е н и е . Будем пользоваться вторым правилом достаточного условия экстремума. Находим первую и вторую производные:

$$f'(x)=x^3-6x^2+11x-6,\ \ f''(x)=3x^2-12x+11.$$

Точки экстремума ищем среди критических точек, т. е. точек, для которых $f'(x)=0$. Первая производная обращается в нуль, когда

$$x^3-6x^2+11x-6=0.$$

С помощью теоремы Безу можно установить, что $x=1$ есть корень последнего уравнения. Заметив это и разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)\,(x^2-5x+6)=$$

$$=(x-1)\,(x-2)\,(x-3)=0,$$

откуда

$$x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=3.$$

Исследуем знак второй производной при этих значениях x:

$$f''(1)=3\cdot1^2-12\cdot1+11=2>0;$$

$$f''(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+11=-1<0;$$

$$f''(3)=3\cdot3^2-12\cdot3+11=2>0.$$

Следовательно, $x=2$ есть точка максимума, $x=1$ и $x=3$ являются точками минимума. Найдем значения экстремумов:

$$\min f(x)=f(1)=\frac{1}{4}\cdot1^4-2\cdot1^3+\frac{11}{2}\cdot1^2-6\cdot1+\frac{9}{4}=0;$$

$$\max f(x)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot2^4-2\cdot2^3+\frac{11}{2}\cdot2^2-6\cdot2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4};$$

$$\min f(x)=f(3)=\frac{1}{4}\cdot3^4-2\cdot3^3+\frac{11}{2}\cdot3^2-6\cdot3+\frac{9}{4}=0.$$

График функции изображен на рис. 3.8.

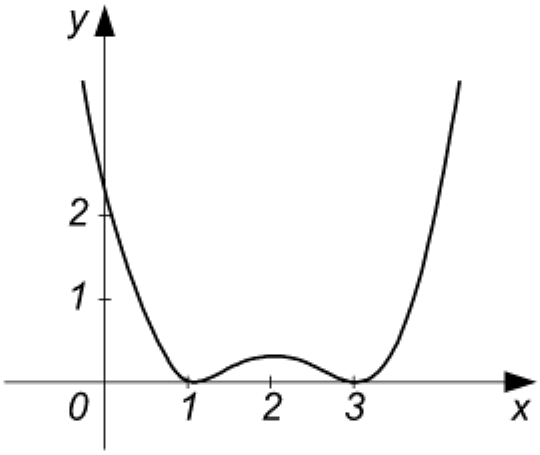


Рис. 3.8

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. Находим первую производную:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x_1 = \frac{4}{5}$, в точке $x_2 = 0$ она не существует (обращается в бесконечность). Следовательно, критическими точками являются точки $x_1 = \frac{4}{5}$ и $x_2 = 0.$

Исследуем характер критических точек. Так как $f'(x) < 0$ при $x < \frac{4}{5}$ $(x > 0)$ и $f'(x) > 0$ при $x > \frac{4}{5}$, то $x_1 = \frac{4}{5}$ – точка минимума, причем

$$\min f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5} - 2\right)\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$$

Далее, поскольку $f'(x) > 0$ при $x < 0,$ $f'(x) < 0$ при $x > 0$ $\left(\text{но } x < \frac{4}{5}\right)$, то при $x_2 = 0$ функция имеет максимум, причем

$$\max f(x) = f(0) = 0.$$

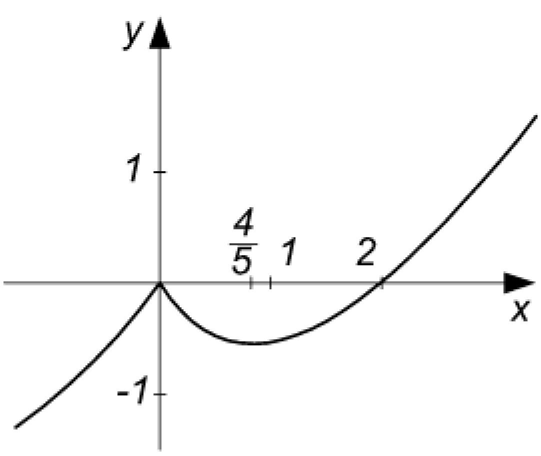


Рис. 3.9

Заметив, что в точке $x_2 = 0$ функция непрерывна и касательная к графику совпадает с осью Oy, строим график функции (рис. 3.9).

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Решение. Находим экстремумы функции:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1);$$

$$f'(x) = 0, \;\; 6(x^2 - 1) = 0, \;\; x_1 = -1, \;\; x_2 = 1;$$

$$f''(x) = 12x, \;\; f''(-1) < 0, \;\; f''(1) > 0.$$

Следовательно, в точке $x_1 = -1$ функция имеет максимум, причем

$$\max f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5 = 9,$$

в точке $x_2 = 1$ минимум, причем

$$\min f(x) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 5 = 1.$$

Вычисляем значения функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -11\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

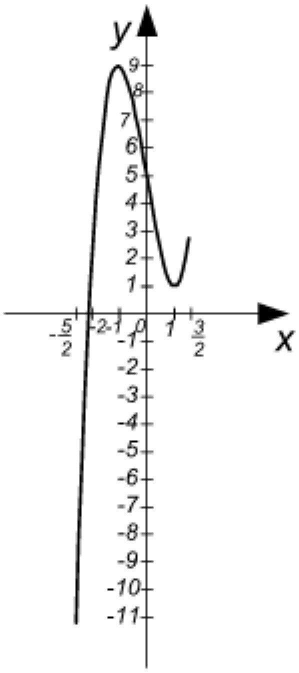


Рис. 3.10

Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1) = 9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -11\frac{1}{4}$ (рис. 3.10).

Пример 6. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим через x первое слагаемое, тогда второе равно $a - x$. Их произведение представляет функцию от x:

$$f(x) = x(a - x) = ax - x^2.$$

Исследуем эту функцию. Найдем производные

$$f'(x) = a - 2x, \;\; f''(x) = -2.$$

Первая производная равна нулю, когда $a - 2x = 0$ или $x = \frac{a}{2}$. Так как вторая производная отрицательна, то при $x = \frac{a}{2}$ функция принимает наибольшее значение. Второе слагаемое также равно $\frac{a}{2}$.

Пример 7. При каких размерах коробка (без крышки), изготовленная из квадратного листа картона со стороной a, имеет наибольшую вместимость?

Решение. Для изготовления коробки необходимо по углам листа вырезать квадраты и загнуть выступы получившейся крестообразной фигуры. Обозначим сторону вырезанного квадрата через x, тогда сторона основания коробки будет $a-2x$. Объем коробки выразится функцией $V=(a-2x)^2x=(a^2-4ax+4x^2)\,x=a^2x-4ax^2+4x^3$, которая определена в промежутке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

Дифференцируя функцию V, получим:

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2; \;\; V'' = -8a + 24x.$$

$V' = 0$, когда $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{a}{2}, \;\; x_2 = \frac{a}{6}.$$

Полученные значения x подставляем в выражение для второй производной:

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = -8a + 12a = 4a > 0; \qquad V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 4a = -4a < 0.$$

Следовательно, наибольший объем будет при $x = \frac{a}{6}$. Основанием коробки является квадрат со стороной $\frac{2}{3}a$.

Задачи

Определить промежутки возрастания и убывания функций:

1. $y = x^2 - 4x + 4$. **2.** $y = 6 - 3x^2 - x^3$.

3. $y = e^x$. **4.** $y = x^4 - 2x^2$.

Исследовать на экстремум функции:

5. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$. **6.** $y = \frac{(1-x^2)^2}{4}$.

7. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **8.** $y=\frac{\ln x}{x}$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций в промежутке $[-2, 2]$:

9. $y=-x^2$. **10.** $y=-x^3$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

11. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$. **12.** $y=\frac{1}{1+x^2}$.

13. Среди всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.

14. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

15. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 *см*. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

16. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

17. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой; толщина стенок постоянна. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости на его изготовление пошло минимум материала?

Ответы

1. Убывает в интервале $(-\infty, 2)$, возрастает в интервале $(2, \infty)$. **2.** Убывает в интервале $(-\infty, -2)$ и $(0, \infty)$, возрастает в $(-2, 0)$. **3.** Возрастает в интервале $(-\infty, \infty)$. **4.** Убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$, возрастает в интервалах $(-1, 0)$ и $(1, \infty)$. **5.** $\min f(x)=f(-1)=$ $=-2$, $\max f(x)=f(-3)=2$. **6.** $\max f(x)=f(0)=\frac{1}{4}$, $\min f(x)=$ $=f(-1)=f(1)=0$. **7.** Экстремума нет. **8.** $\max f(x)=f(e)=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$. **9.** 0; -4. **10.** 8; -8. **11.** 1; 0. **12.** 1; 0. **13.** $x=y=\frac{a}{2}$ (квадрат). **14.** Равнобедренный. **15.** 20 *см.* **16.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, где a и b – полуоси эллипса.

§ 3.4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты кривой

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* (или выпуклым вниз) в промежутке (a, b), если соответствующая дуга кривой расположена выше касательной в любой точке $M[x, f(x)]$ этой дуги (рис. 3.11).

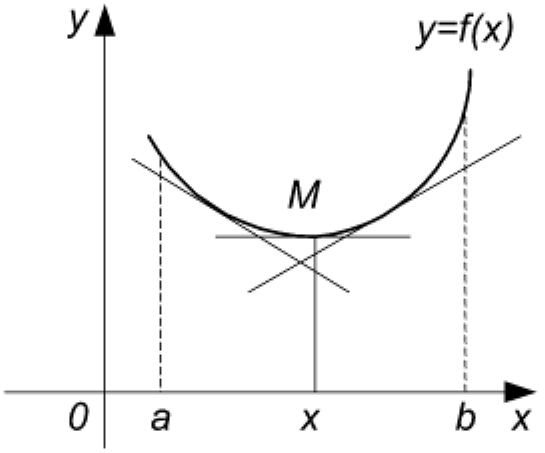


Рис. 3.11

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вниз* (или выпуклым вверх) в промежутке (a, b), если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной в любой точке $M[x, f(x)]$ этой дуги (рис. 3.12).

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) кривой: *если вторая производная функции $y = f(x)$ положительна внутри промежутка (a, b), то график функции вогнут вверх в данном промежутке; если вторая производная $f''(x)$ отрицательна внутри промежутка (a, b), то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз в этом промежутке.* (Сравните эти условия со вторым правилом нахождения экстремума).

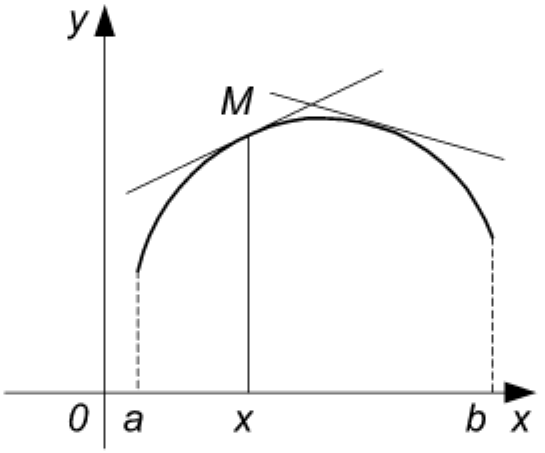


Рис. 3.12

Точкой перегиба непрерывной кривой $y = f(x)$ называется точка $M_0[x_0, f(x_0)]$, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот (относительно, например, направления вниз). Для абсциссы точки перегиба x_0 графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует. Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, называются *критическими точками* 2-го рода.

Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак, то $M\,[x_0, f(x_0)\,]$ – точка перегиба.

Асимптоты кривой

1. *Асимптотой* кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

2. Если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \tag{3.12}$$

то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

3. Если существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1 \tag{3.13}$$

или

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2\,, \tag{3.14}$$

то прямая $y = k_1 x + b_1$ есть правая наклонная асимптота кривой $y = f(x)$, а прямая $y = k_2 x + b_2$ есть левая наклонная асимптота.

4. Если в правой части уравнения кривой $y = f(x)$ можно выделить линейную часть

$$y = f(x) = kx + b + \alpha\,(x), \tag{3.15}$$

где $\alpha\,(x) \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой.

Пример 1. Найти интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$.

Решение. Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2xe^{-x^2};\ \ y'' = (4x^2 - 2)\,e^{-x^2}.$$

Приравняв нулю вторую производную, получим критические точки 2-го рода:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эти точки разбивают числовую ось на три интервала:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right).$$

Так как в первом и третьем интервалах вторая производная положительна, т. е.

$$y'' > 0 \text{ при } -\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y'' > 0 \text{ при } x > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

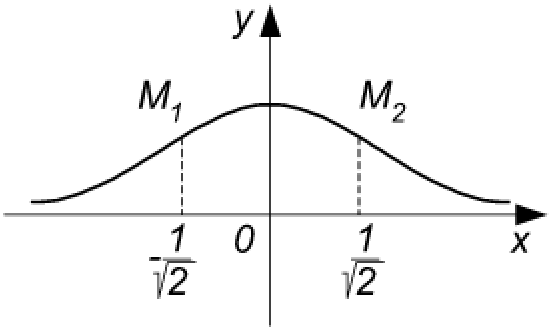


Рис. 3.13

то в этих интервалах кривая вогнута вверх. Поскольку $y'' < 0$ при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то в интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ кривая вогнута вниз (рис. 3.13). Точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба.

Пример 2. Найти точку перегиба графика функции $f(x) = x^3$.

Решение. Производные функции имеют вид:

$$f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x.$$

Вторая производная равна нулю при $x = 0$ и меняет знак в этой точке: $f''(x) < 0$, если $x < 0$, $f''(x) > 0$, если $x > 0$.

Следовательно, $x = 0$ есть точка перегиба. Из двух последних неравенств вытекает также, что график функции является выпуклым вверх при $x < 0$ и выпуклым вниз при $x > 0$. Кривая изображена на рис 1.6.

Пример 3. Найти точки перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Находим производные:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}},\ y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается. Эта производная не существует при $x_1 = 1$ (знаменатель дроби обращается в нуль). Посмотрим, меняет ли знак y'' при переходе через точку $x_1 = 1$.

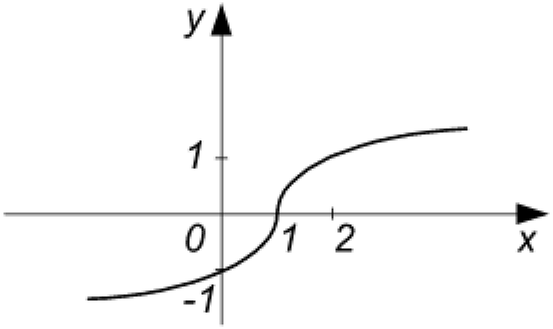


Рис. 3.14

Так как

$$y'' > 0 \text{ при } x < 1,$$

$$y'' < 0 \text{ при } x > 1,$$

то точка $M_0(1, 0)$ есть точка перегиба. Касательная в этой точке параллельна оси ординат (рис. 3.14), так как первая производная при $x = 1$ обращается в бесконечность.

П р и м е р 4. Найти асимптоты кривой $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \infty,$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой (см. формулу (3.12)).

Далее,

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, прямая $y = x$ (см. формулу (3.15)) будет асимптотой. Кривая изображена на рис. 3.15.

П р и м е р 5. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

Р е ш е н и е. График этой функции имеет две вертикальные асимптоты $x = -1$, $x = 1$, так как

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty.$$

Выделяя целую часть функции путем непосредственного деления или с помощью следующих простых преобразований, получаем

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2} = \frac{x^3 - x + x}{1 - x^2} = \frac{x(x^2 - 1) + x}{1 - x^2} = -x + \frac{x}{1 - x^2}.$$

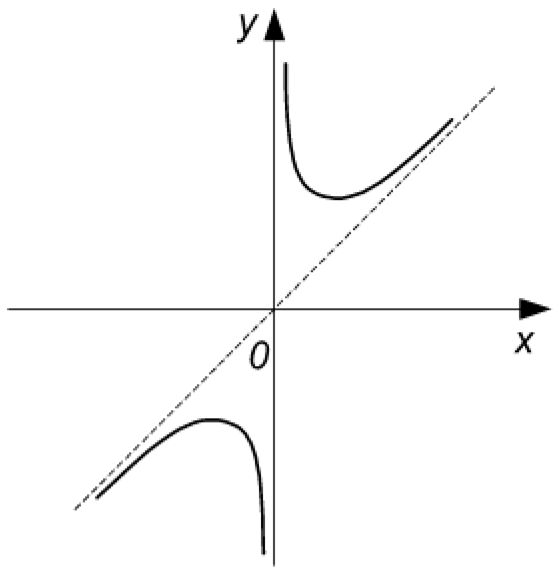


Рис. 3.15

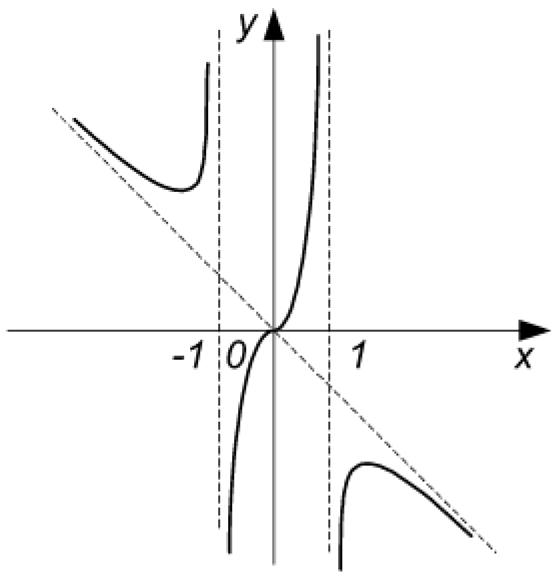


Рис. 3.16

Сравнивая с формулой (3.15), заключаем, что прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой (рис. 3.16).

З а м е ч а н и е . Вертикальные асимптоты кривой следует искать там, где знаменатель функции обращается в нуль.

П р и м е р 6 . Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Р е ш е н и е . Приравнивая знаменатель нулю, получаем две вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$.

По формулам (3.13) и (3.14) ищем наклонные асимптоты.

Имеем:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является правой наклонной асимптотой.

Далее,

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1, \; b_1 = \lim_{x \to -\infty} (y - x) = 0,$$

поэтому $y = -x$ также будет асимптотой (рис. 3.17).

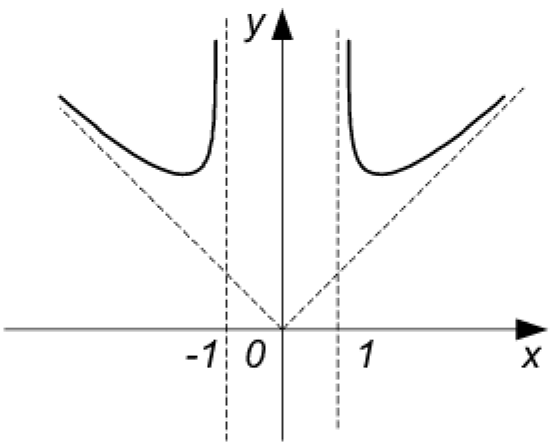


Рис. 3.17

Вторую наклонную асимптоту можно было получить, исходя из симметрии кривой относительно оси Oy.

Задачи

Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:

1. $y = \ln x$.

2. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

3. $y = \frac{3}{8}x^4 - x^3 + 2$.

4. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

Найти асимптоты кривых:

5. $y = \frac{2}{x+3}$.

6. $y = \frac{6}{x^2 - 16}$.

7. $y = \frac{x^2 + 8x - 6}{x}$.

8. $y = \frac{x^2}{x+4}$.

9. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

10. $b^2x^2 + a^2y^2 = x^2y^2$.

Ответы

1. Кривая вогнута вниз. **2.** В промежутке $(-\infty, 2)$ кривая вогнута вниз, в промежутке $(2, \infty)$ – вогнута вверх, $M\ (2, 7)$ – точка перегиба. **3.** $M\ (0, 2)$, $N\left(\frac{4}{3}, \frac{22}{27}\right)$ – точки перегиба. **4.** $M\ (0, 0)$, $N\left(-2, -4\right)$. **5.** $x = -3$. **6.** $x = -4$, $x = 4$. **7.** $x = 0$, $y = x + 8$. **8.** $x = -4$, $y = x - 4$. **9.** $y = 1$. **10.** $x = \pm a$, $y = \pm b$.

§ 3.5. Исследование функций и построение их графиков

Исследование функций можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область существования функции.

2. Исследовать изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области существования.

3. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

4. Вычислить значения экстремумов.

5. Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.

6. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями.

7. Найти асимптоты графика функции.

По результатам исследования можно построить математически грамотный эскиз ее графика.

Если исследуемая функция четная или нечетная, достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения.

Иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ и построить ее график.

Решение. Пользуемся схемой исследования функции.

1. Функция не определена лишь в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения состоит из трех интервалов: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

2. Исследуем изменение функции при x, стремящемся к концам интервалов области определения:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty.$$

3. Точки экстремума ищем среди критических точек, т.е. таких точек, где первая производная обращается в нуль. Находим производные данной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 3}\right)' = \frac{3x^2(x^2 - 3) - 2xx^3}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2};$$

$$f''(x) = \left[\frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2} \right]' = \frac{6x\,(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}.$$

Первая производная обращается в нуль, когда $x^2(x^2 - 9) = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. Исследуем знак второй производной при этих значениях x:

$$f''(-3) = \frac{6\,(-3)\,(9+9)}{(9-3)^3} < 0,\ f''(3) = \frac{6 \cdot 3\,(9+9)}{(9-3)^3} > 0,\ f''(0) = 0.$$

Таким образом, $x = -3$ является точкой максимума, $x = 3$ – точкой минимума.

Поскольку $f''(0) = 0$, обращаемся к первому правилу нахождения экстремума. Если x достаточно мало по абсолютному значению, то $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $x > 0$, так как $x^2 > 0$, $(x^2 - 3)^2 > 0$, $(x^2 - 9) < 0$. Знак первой производной при переходе через точку $x = 0$ не меняется, поэтому данная точка не является точкой экстремума.

Определим интервалы возрастания и убывания функции с помощью первой производной. Так как

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} > 0,$$

когда $|x| > 3$, т. е. при $-\infty < x < -3$, $3 < x < +\infty$, то функция возрастает в промежутках $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$. Так как

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} < 0,$$

когда $|x| < 3$, т. е. при $-3 < x < 3$, то функция убывает в промежутках $\left(-3, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, 3\right)$. (Заметим, что в точках $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ производная не определена, как и сама функция.)

4. Вычисляем значения экстремумов:

$$y_{\max} = y\,(3) = \frac{3^3}{9-3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2};$$

$$y_{\min} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{9-3} = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}.$$

5. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба. Вторая производная равна нулю при $x = 0$ и меняет знак при переходе через эту точку. В самом деле, при x, достаточно малых по абсолютной величине, получаем

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} > 0 \text{ при } x < 0,$$

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} < 0 \text{ при } x > 0,$$

так как $(x^2+9) > 0$ и $(x^2-3)^3 < 0.$ Следовательно, точка $O(0, 0)$ является точкой перегиба. Так как $f'(0) = 0,$ то касательная в этой точке совпадает с осью Ox.

Вторая производная не определена при $x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3},$ т. е. в точках, в которых не определена и сама функция. Так как $f''(x) < 0,$ когда $-\infty < x < -\sqrt{3}, \quad 0 < x < \sqrt{3}, \ f''(x) > 0$ при $-\sqrt{3} < x < 0,$ $\sqrt{3} < x < \infty,$ то график функции вогнут вниз в интервалах $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right),$ $\left(0, \sqrt{3}\right)$ и вогнут вверх в интервалах $\left(-\sqrt{3}, 0\right),$ $\left(\sqrt{3}, \infty\right).$

6. Для нахождения точек пересечения графика функции с координатными осями необходимо решить системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2-3}; \\ y = 0; \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2-3}; \\ x = 0. \end{array}\right\}$$

Обе системы имеют одно и то же решение: $x = 0, \quad y = 0.$ Таким образом, график функции пересекает координатные оси в начале координат.

7. Находим вертикальные асимптоты. Поскольку

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2-3} = -\infty; \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2-3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty;\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty,$$

то прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Данную функцию путем непосредственного деления можно представить в виде

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}=x+\frac{3x}{x^2-3},\ \text{где}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0,$$

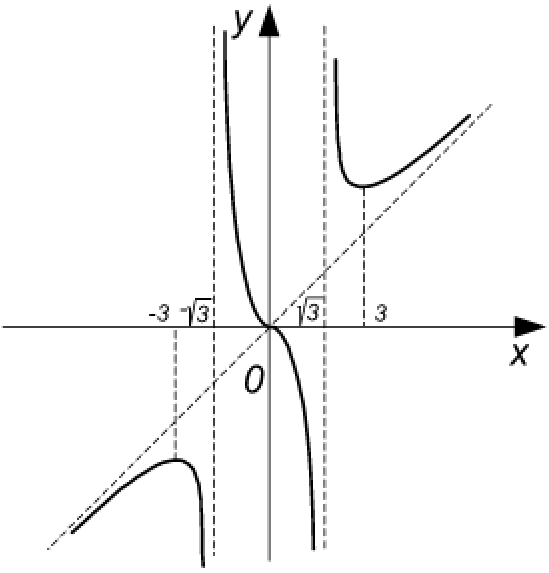


Рис. 3.18

поэтому в соответствии с формулой (3.15) заключаем, что прямая $y=x$ является наклонной асимптотой. На основании полученных результатов можно построить график функции (рис. 3.18). Полезно предварительно результаты исследования свести в таблицу (см. стр. 135).

З а м е ч а н и е. Функция $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ является нечетной, поэтому исследование ее можно провести лишь для $x>0$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

П р и м е р 2. Построить график функции $f(x)=x^3-3x$.

Р е ш е н и е.

1. Функция определена при всех x, т. е. областью ее существования будет бесконечный промежуток $(-\infty,+\infty)$.

2. На концах промежутка получаем:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}(x^3-3x)=+\infty.$$

3. С помощью производных

$$f'(x)=3x^2-3,\ f''(x)=6x$$

Таблица

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	–	–	–	Не суще-ствует	+	0	–	Не суще-ствует	+	+	+
y'	+	0	–	Не суще-ствует	–	0	–	Не суще-ствует	–	0	+
y''	–	–	–	Не суще-ствует	+	0	–	Не суще-ствует	+	+	+
Выводы	Функция возрастает, график вогнут вниз	Точка макси-мума $y_{\max}= =-\frac{9}{2}$	Функция убывает, график во-гнут вниз	Верти-кальная асимптота $x=-\sqrt{3}$	Функция убывает, график вогнут вверх	Точка перегиба	Функция убывает, график вогнут вниз	Верти-кальная асимптота $x=\sqrt{3}$	Функция убывает, график вогнут вверх	Точка минимума $y_{\min}=\frac{9}{2}$	Функция возрастает, график вогнут вверх

П р и м е ч а н и я : 1. График функции имеет наклонную асимптоту $y = x$.

2. График функции пересекает координатные оси в начале координат.

находим критические точки аргумента функции и исследуем их характер. Имеем:

$$3x^2-3=0,\ x^2-1=0,\ x_1=-1,\ x_2=1,$$

$$f''(-1)=6(-1)=-6<0,\ f''(1)=6>0.$$

Следовательно, $x=-1$ – точка максимума, $x=1$ – точка минимума.

4. Вычислим значения экстремумов:

$$y_{\max}=y(-1)=(-1)^3-3(-1)=-1+3=2;$$

$$y_{\min}=y(1)=1^3-3\cdot1=1-3=-2.$$

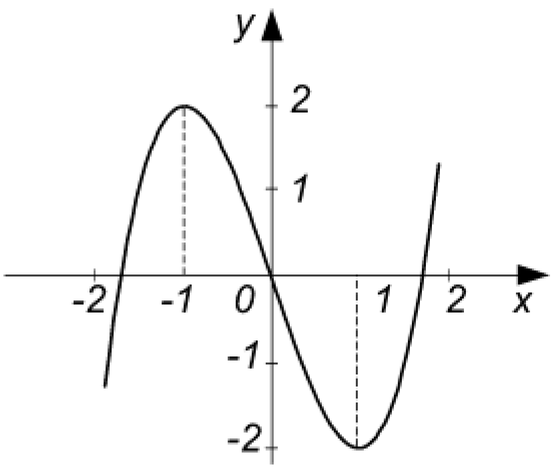


Рис. 3.19

5. Определим критические точки аргумента производной, решая уравнение $f''(x)=0$. Имеем $6x=0$ или $x=0$. Если $x<0$, то $f''(x)<0$, если $x>0$, то $f''(x)>0$.

Таким образом, $x=0$ – абсцисса точки перегиба.

6. Найдем точки пересечения с координатными осями. Решая систему $y=x^3-3x$, $y=0$, получаем точки пересечения кривой с осью Ox: $M_1\left(-\sqrt{3},0\right)$, $M_2\left(0,0\right)$, $M_3\left(\sqrt{3},0\right)$. Система $y=x^3-3x$, $x=0$ новых точек не дает, получаем известную уже точку $M_2\left(0,0\right)$.

7. Данная кривая асимптот не имеет (рис. 3.19).

З а м е ч а н и е . Функция $f(x)=x^3-3x$ является нечетной, поэтому ее исследование достаточно было провести для $x>0$.

П р и м е р 3 . Построить график функции $y=4x^{2.}-x^4-3$.

Р е ш е н и е .

1. Функция определена для всех x, т. е. в промежутке $(-\infty,+\infty)$.

2. На концах промежутка имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^2 - x^4 - 3) = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty}(4x^2 - x^4 - 3) = -\infty.$$

3. С помощью производных

$$y' = 8x - 4x^3, \; y'' = 8 - 12x^2$$

находим критические точки и исследуем их характер.

Первая производная обращается в нуль, когда

$$8x - 4x^3 = 0 \text{ или } 4x\,(2 - x^2) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \; x_2 = -\sqrt{2}, \; x_3 = \sqrt{2}.$$

Исследуем знак второй производной в полученных точках:

$$y''(0) = 8 > 0, \qquad y''\left(-\sqrt{2}\right) = y''\left(\sqrt{2}\right) = 8 - 12\cdot 2 = -16 < 0.$$

Следовательно, $x_1 = 0$ – точка минимума, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ – точки максимума.

4. Вычисляем значения экстремумов:

$$y_{\max} = y\left(-\sqrt{2}\right) = y\left(\sqrt{2}\right) = 4\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^4 - 3 = 1;$$

$$y_{\min} = y\,(0) = -3.$$

5. Решая уравнение $f''(x) = 0$, находим критические точки аргумента производной. Получаем

$$8 - 12x^2 = 0, \; 4\,(2 - 3x^2) = 0, \; x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Принимая эти значения, вторая производная меняет знак. В самом деле, если $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < x < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, то $f''(x) > 0$, если $x < -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и $x > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, то $f''(x) < 0$. Следовательно, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ – абсциссы точек перегиба. Ординаты последних находим из уравнения $y = 4x^2 - x^4 - 3$, получаем $y_1 = y_2 = -\frac{8}{9}$.

6. При $x = 0$ получаем $y = -3$, т. е. график функции пересекает ось Oy в точке $M(0, -3)$. При $y = 0$ имеем $4x^2 - x^4 - 3 = 0$. Решая это биквадратное уравнение, находим: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = \sqrt{3}$. Таким образом, точки $M_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $M_2(-1, 0)$, $M_3(1, 0)$, $M_4\left(\sqrt{3}, 0\right)$ являются точками пересечения с осью Ox.

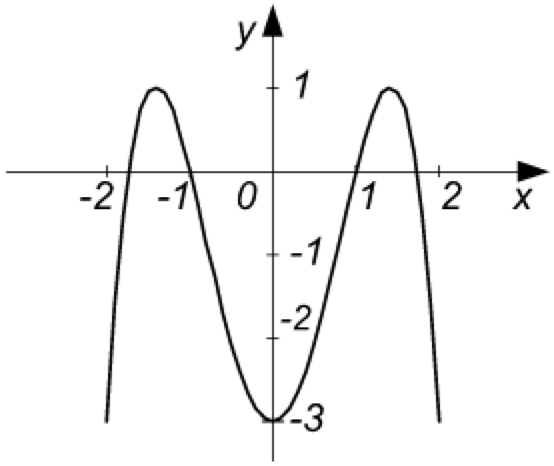


Рис. 3.20

7. Данная кривая асимптот не имеет, график ее изображен на рис. 3.20.

Пример 4. Исследовать функцию $x^2 = y^2 + x^4$ и построить ее график.

Решение. Разрешая данное уравнение относительно y, получим

$$y = \pm x\sqrt{1 - x^2}.$$

Исследуем функцию $y = x\sqrt{1 - x^2}$. Эта функция определена при $1 - x^2 \geq 0$ или $x^2 \leq 1$, т. е. при $-1 \leq x \leq 1$, область ее существования – сегмент $[-1, 1]$. Следовательно, график функции будет целиком помещаться в полосе между прямыми $x = -1$ и $x = 1$; слева от прямой $x = -1$ и справа от прямой $x = 1$ не будет ни одной точки графика. Функция равна нулю при $x = -1$ и $x = 1$.

Находим производные функции:

$$y' = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y'' = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

Заметим, что $y' = -\infty$ при $x = 1$. Это означает, что касательная к графику в точке $x = 1$ параллельна оси Oy.

Определяем критические точки аргумента функции и исследуем их характер:

$$y' = 0, \; 1 - 2x^2 = 0, \; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right]}{\sqrt{\left[1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^3}}=4>0,$$

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right]}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^3}}=-4<0.$$

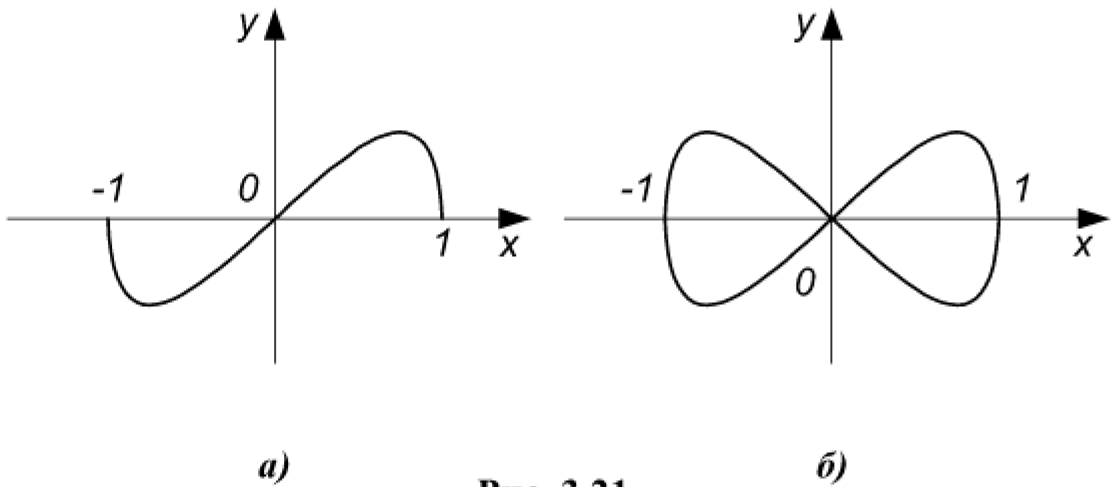


Рис. 3.21

Следовательно, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\approx-0{,}7$ – точка минимума и $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точка максимума функции.

Вычисляем значения экстремумов:

$$y_{\min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=-\frac{1}{2};$$

$$y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

Решая систему уравнений $y=x\sqrt{1-x^2}$, $y=0$, находим точки пересечения кривой с осью Ox: $M(-1,0)$, $O(0,0)$, $N(1,0)$. Точка $O(0,0)$ будет также единственной точкой пересечения с осью Oy.

График функции $y = x\sqrt{1-x^2}$ изображен на рис. 3.21, *а*, графики функций $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$ на рис. 3.21, *б*. В точке $O(0, 0)$ кривая пересекает себя, эта точка называется *узлом*.

Замечание. Для построения графика достаточно было исследовать функцию в промежутке $[0, 1]$, так как график симметричен относительно координатных осей (x и y входят в уравнение только в четных степенях).

Пример 5. Исследовать функцию $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ и построить ее график.

Решение. Функция не определена при $x = -1$ и $x = 1$. Область существования функции состоит из трех интервалов: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

На концах интервалов области существования имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0, \quad \lim_{x\to-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0.$$

Производная функции

$$y' = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{x^2-1}$$

не равна нулю ни в одной точке. Производная не существует, если $x^2 - 1 = 0$, т. е. при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но в этих точках не определена и сама функция. Следовательно, данная функция экстремумов не имеет.

При $x < -1$ $y' > 0$, при $-1 < x < 1$ $y' < 0$, при $x > 1$ $y' > 0$, откуда следует, что функция возрастает в интервале $(-\infty, -1)$, убывает в интервале $(-1, 1)$ и возрастает в интервале $(1, +\infty)$.

Вторая производная

$$y'' = \left(\frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

обращается в нуль при $x = 0$. Если $x < 0$, то $y'' > 0$, при $x > 0$ $y'' < 0$, следовательно, $x = 0$ – абсцисса точки перегиба.

Так как

$$\lim_{x\to -1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty, \ \lim_{x\to 1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty,$$

то прямые $x=-1$, $x=1$ являются вертикальными асимптотами.

Поскольку функцию $y=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ можно представить в виде

$$y = 0+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \text{ где } \lim_{x\to\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0,$$

то в силу формулы (3.15) график кривой имеет и горизонтальную асимптоту $y=0$ (рис. 3.22).

Пример 6. Построить график функции $y=\sqrt{\frac{125-x^3}{3x}}$.

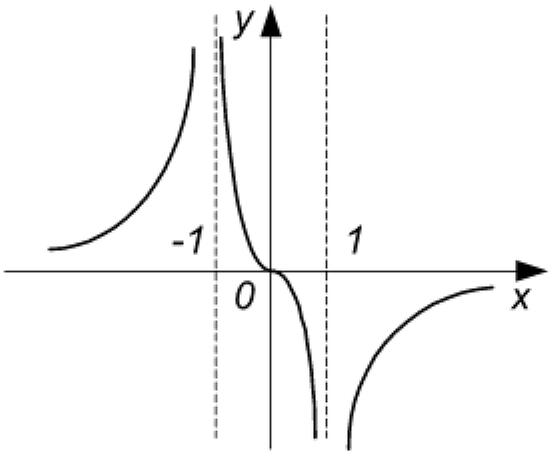


Рис. 3.22

Решение. Функция принимает действительные значения, когда $\frac{125-x^3}{3x} \geq 0$, откуда $125-x^3 \geq 0$, $x \geq 0$ или $0 \leq x \leq 5$. Аргумент x может принимать только положительные значения, ибо при $x<0$ подкоренное выражение будет отрицательным. При $x=0$ функция не определена. Следовательно, областью определения является полуинтервал $(0, 5]$.

Производная

$$y' = -\frac{125+2x^3}{6x^2 y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

всегда отрицательна, функция убывает. При $x\to 5$ производная $y'\to -\infty$ (касательная параллельна оси Oy).

Вторая производная

$$y'' = \frac{1}{2}(y-xy')\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$$

обращается в нуль, меняя знак, при $x=y=\frac{5}{\sqrt[3]{4}} \approx 3{,}15$ (точка перегиба), при этом $y' = -1$. График функции изображен на рис. 3.23.

П р и м е р 7 . Построить график функции $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

Р е ш е н и е . Функция определена и непрерывна при всех x. Первая производная

$$y' = \frac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x\,(6 - x)^2}}$$

существует всюду, за исключением точек $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

Исследуем предельные значения производной при x, стремящемся к нулю слева и справа:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6 - x)^2}} = -\infty; \quad \lim_{x \to +0} \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6 - x)^2}} = +\infty,$$

при $x < 0$ $y' < 0$, при $x > 0$ $y' > 0$, следовательно, функция имеет минимум в точке $x = 0$, причем $y_{\min} = 0$.

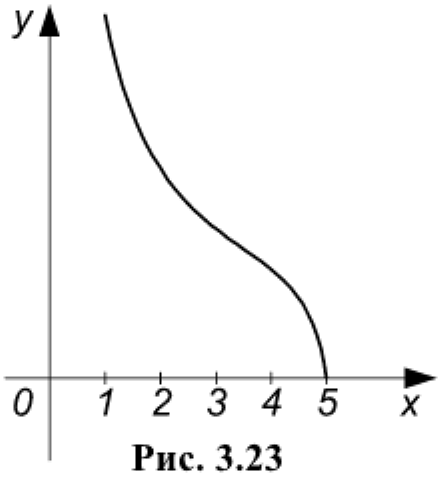


Рис. 3.23

Рассмотри критическую точку $x_2 = 6$. При $x \to 6 - 0$ $y' \to -\infty$, при $x \to 6 + 0$ также $y' \to -\infty$, т. е. производная отрицательна слева и справа от точки $x_2 = 6$, поэтому в данной точке экстремума нет. В этой точке функция убывает, касательная к кривой в точке $x_2 = 6$ вертикальна.

При $x = 4$ производная обращается в нуль. Так как при $x < 4$ $y' > 0$, при $x > 4$ $y' < 0$, то $x = 4$ – точка максимума, причем $y_{\max} = 2\sqrt[3]{4}$.

Таким образом, в промежутке $(-\infty, 0)$ функция убывает, в промежутке $(0, 4)$ – возрастает, в промежутке $(4, +\infty)$ – убывает.

Определяем точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Вторая производная $y'' = -\dfrac{8}{x^{\frac{4}{3}}(6 - x)^{\frac{5}{3}}}$ в нуль не обращается ни в одной точке, в точках $x = 0$ и $x = 6$ она не определена.

Исследуем знак второй производной вблизи этих точек. Так как $y'' < 0$ при $x < 0$ и при $x > 0$, то кривая выпукла вверх слева и справа от

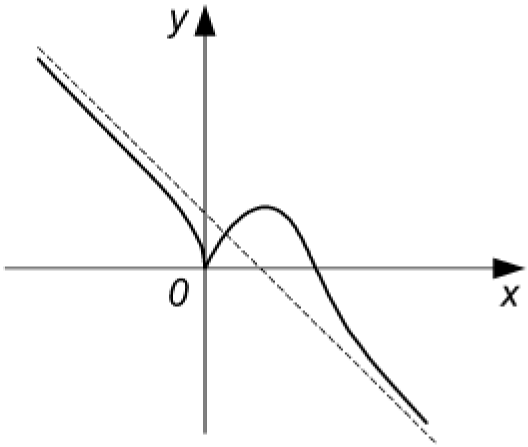


Рис. 3.24

точки с абсциссой $x = 0$ и, следовательно, точка $O(0, 0)$ не является точкой перегиба; с другой стороны, O – точка минимума (такая точка называется точкой возврата).

При $x < 6$ имеем $y'' < 0$, при $x > 6$ $y'' > 0$, поэтому точка $(6, 0)$ является точкой перегиба.

Определим асимптоты кривой:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^3} = 2.$$

Следовательно, прямая $y = -x + 2$ является асимптотой кривой $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ (рис. 3.24).

Задачи

Исследовать функции и построить их графики

1. $y = x^3 - 12x.$

2. $y = x^4 - 4x^2 + 5.$

3. $y = \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|, \ a > 0.$

4. $y^2 = x^2 + y^4.$

5. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

6. $y = \frac{x^2}{1 + x^2}.$

7. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

8. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

9. $y = \sin^3 x + \cos^3 x.$

10. $y = \frac{\ln x}{x}.$

11. $y^2 = x^3.$

12. $y^2 = x(x-3)^2.$

13. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$

14. $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

15. $y = 8x^2 e^{-x^2}$.

16. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$.

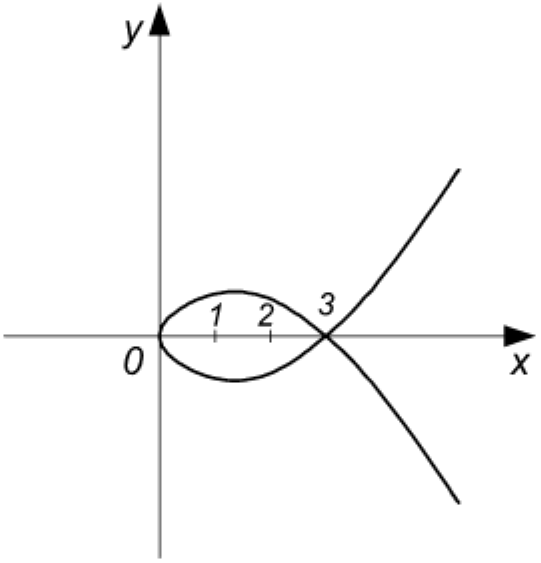


Рис. 3.25

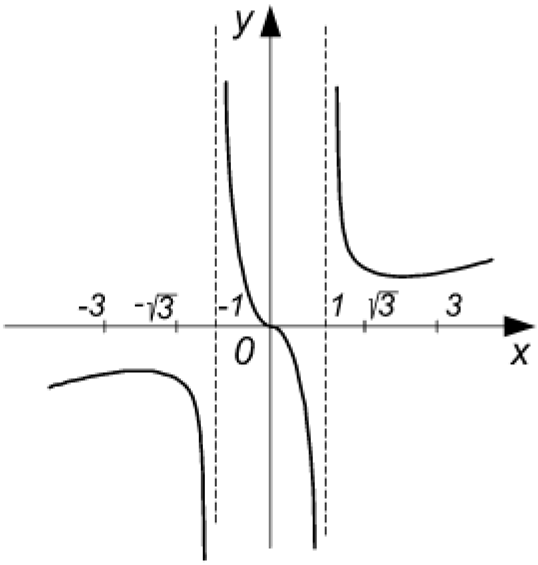


Рис. 3.26

Ответы

1. Функция определена при всех x; $x = -2$ – точка максимума, $y_{\max} = y(-2) = 16$; $x = 2$ – точка минимума, $y_{\min} = y(2) = -16$. **2.** Функция определена в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$; $y_{\min} = y\left(-\sqrt{2}\right) = y\left(\sqrt{2}\right) = 1$, $y_{\max} = y(0) = 5$. **3.** Область определения состоит из трех интервалов: $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$, (a, ∞). В первом и третьем интервале функция убывает, во втором возрастает. Асимптоты: $x = \pm a$, $y = 0$; $O(0, 0)$ – точка перегиба. **4.** Область определения – $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Кривая пересекает ось Oy в точках: $M_1(0, -1)$, $M_2(0, 1)$, $O(0, 0)$, последняя точка является точкой самопересечения (узел). **5.** $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{2}$; $y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Асимптота: $y = 0$. **6.** $y_{\min} = y(0) = 0$. Асимптота: $y = 1$. Точки перегиба: $M_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4}\right)$, $M_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4}\right)$. Кривая симметрична относительно оси Oy. **7.** Функция возрастает в промежутке $(-\infty, \infty)$. Точка перегиба: $O(0, 0)$ (см. приложение). **8.** Область определения $(-\infty, \infty)$; $y_{\min} = y(0) = 1$. Кривая симметрична относительно оси Oy (см. приложение).

9. $y_{\max} = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(2\pi) = 1,$ $y_{\max} = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71;$ $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71;$ $y_{\min} = y(\pi) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$ **10.** Область определения: $0 < x < \infty;$ $y_{\max} = y(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37.$ Точка перегиба: $M\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right).$

Асимптоты: $x = 0,$ $y = 0.$ **11.** Область определения: $0 \le x < \infty.$ Кривая симметрична относительно оси *Ox*, состоит из двух ветвей, расположенных по разные стороны от оси *Ox* и касающихся ее в начале координат. Линия эта называется полукубической параболой. **12.** Область определения $0 \le x < \infty.$ Кривая симметрична относительно оси *Ox*, касается оси *Oy* в начале координат. Через точку $M(3, 0)$ кривая проходит дважды (такая точка называется узлом). При $x = 1$ $y_{\max} = 2$ и $y_{\min} = -2$ (рис. 3.25). **13.** Область определения: $(-\infty, -1),$ $(-1, 1),$ $(1, \infty).$ Кривая симметрична относительно начала координат (рис. 3.26). Асимптоты: $x = -1,$ $x = 1;$ $y_{\min} = y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37.$

14. Кривая $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ называется *декартовым листом*. Начало координат является узлом; асимптота: $y = -x - a.$ Указание. Коэффициенты k и b уравнения асимптоты $y = kx + b$ находятся следующим образом: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = k = -1$ определяется из соотношения $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\,\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = 0$ (получено из уравнения кривой путем деления на x^3); $\lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) = b$ находится как $\lim\limits_{x\to\infty}(y + x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = -a$

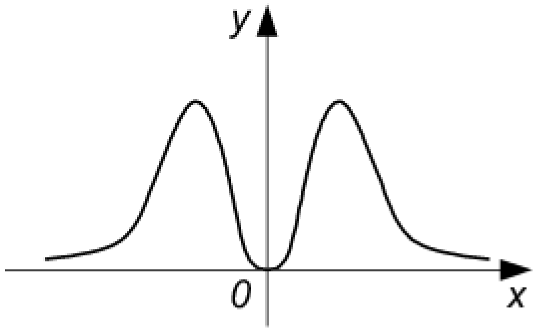


Рис. 3.27

15. Функция определена при всех x. Кривая симметрична относительно оси *Oy*; $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 8e^{-1} \approx 2{,}91;$ $y_{\min} = y(0) = 0;$ асимптота: $y = 0.$ Точки перегиба имеют абсциссы: $x_1 = -\frac{5+\sqrt{17}}{2} \approx -1{,}51;$ $x_2 = -\frac{5-\sqrt{17}}{2} \approx -0{,}47;$ $x_3 \approx 0{,}47;$ $x_4 \approx 1{,}51$ (рис. 3.27). **16.** Область определения: $(-\infty, -3),$ $(-3, 3),$ $(3, \infty);$ асимптоты: $y = 1,$ $x = -3,$ $x = 3,$ $y_{\max} = y(0) = 0.$

Раздел III.

Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава 4. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)\,dx$ называется общее выражение для всех первообразных функции $f(x)$.

Обозначение:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{4.1}$$

где $F'(x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x), \ d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{4.3}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \ \ (c = \text{const}). \tag{4.4}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx - \int f_2(x)\, dx + \int f_3(x)\, dx.$$

Таблица простейших неопределенных интегралов

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1). \tag{4.5}$$

$$\int 0 \cdot dx = C. \tag{4.5а}$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C. \tag{4.5б}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{4.6}$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \tag{4.7}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \tag{4.8}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C. \tag{4.9}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C. \tag{4.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \tag{4.11}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{4.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1. \tag{4.13}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1. \qquad (4.14)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \qquad (4.15)$$

§ 4.1. Интегрирование разложением

Метод разложения основан на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x),$$

то

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int x^3 dx.$

Решение. Применяем формулу (4.5) для случая $m = 3$. В соответствии с этой формулой получаем

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}\,dx.$

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, пользуясь свойствами 3 и 4 и формулой (4.5), находим

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}\,dx = \int (x^2 - 2x + 3)\,dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + 3\int dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\,\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx.$

Решение. Раскрывая скобки и пользуясь формулой (4.5) для случая, когда m – отрицательное число, находим

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx=\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4}=$$

$$=\int dx-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x-2\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=$$

$$=x+2x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-3}+C=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\sqrt{x}dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\operatorname{ctg}^2 x dx$.

Решение.

$$\int\operatorname{ctg}^2 xdx=\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)dx=\int\operatorname{cosec}^2 xdx-\int dx=$$

$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int(ax^3+bx^2+cx+p)\,dx$.

Решение.

$$\int(ax^3+bx^2+cx+p)\,dx=a\int x^3dx+b\int x^2dx+c\int xdx+$$

$$+p\int dx=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+px+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$.

Решение. Прибавляя и вычитая единицу из x^4, получаем

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1+x^2}\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$.

Решение. Так как

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x),$$

то

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

Задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x^4-3x^3+4x^2+6x-8}{x^2}\,dx$.

2. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

3. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$.

4. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

5. $\int \frac{3-4\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

6. $\int (ax-b)^3\,dx$.

7. $\int \frac{(1-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

8. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^3}\right) dx$.

9. $\int \left(\frac{4}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$.

10. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

Ответы

1. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+6\ln x+\frac{8}{x}+C$. 2. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$. 3. $\frac{1}{2}x+$ $+\frac{1}{2}\sin x+C$. 4. $x-\cos x+C$. 5. $3\operatorname{tg}x-4\sin x+C$. 6. $\frac{a^3}{4}x^4-a^2bx^3+$ $+\frac{3}{2}ab^2x^2-b^3x+C$. 7. $\sqrt{x}\left(2-\frac{4x^n}{2n+1}+\frac{2x^{2n}}{4n+1}\right)+C$. 8. $e^x-\frac{1}{2x^2}+C$. 9. $4\operatorname{arctg}x+5\arccos x+C$. 10. $x-\operatorname{arctg}x+C$.

§ 4.2. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции

Если

$$F(x)=\int f(x)\,dx,\ \ F'(x)=f(x), \tag{4.16}$$

то

$$F(u)=\int f(u)\,du, \tag{4.17}$$

где $u=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x. Формула (4.17) получается из формулы (4.16) путем формальной замены x на u, она дает возможность значительно расширить таблицу простейших интегралов. На ее основании получаем:

$$\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq-1). \tag{4.5'}$$

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C. \tag{4.6'}$$

$$\int e^u du=e^u+C. \tag{4.7'}$$

$$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C. \tag{4.8'}$$

$$\int\cos u\,du=\sin u+C. \tag{4.9'}$$

$$\int\sin u\,du=-\cos u+C. \tag{4.10'}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C. \qquad (4.11')$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\,\mathrm{ctg}\, u + C. \qquad (4.12')$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C_1. \qquad (4.13')$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg}\, u + C = -\mathrm{arcctg}\, u + C_1. \qquad (4.14')$$

$$\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C. \qquad (4.15')$$

При пользовании формулами $(9.5')$ – $(9.15')$ необходимо иметь в виду простейшие преобразования дифференциала:

1. $dx = d\,(x+b)$, где b – постоянная величина.
2. $dx = \frac{1}{a}\, d\,(ax)$, где постоянная $a \neq 0$.
3. $dx = \frac{1}{a}\, d\,(ax+b)$, где постоянная $a \neq 0$.
4. $xdx = \frac{1}{2}\, d\,(x^2)$.
5. $xdx = \frac{1}{2}\, d\,(x^2+b)$.
6. $\sin x dx = -\,d\,(\cos x)$.
7. $\cos x dx = d \sin x$.

В общем случае

$$\varphi'(x)\, dx = d\varphi\,(x).$$

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (2x+3)^2 dx$.

Решение. На основании преобразования 3 дифференциала имеем

$$dx = \frac{1}{2}\, d\,(2x+3).$$

Применяя формулу $(9.5')$ для случая, когда $u = 2x+3$, $\alpha = 2$, находим

$$\int (2x+3)^2 dx = \int (2x+3)^2 \frac{1}{2}\, d\,(2x+3) = \frac{1}{2} \int (2x+3)^2\, d\,(2x+3) =$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2x+3)^3}{3}+C=\frac{1}{6}\,(2x+3)^3+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\sqrt{x+4}dx.$

Решение. Согласно преобразованию 1,

$$dx=d\,(x+4).$$

Применяя формулу $(9.5')$ для случая, когда $u=x+4$ и $\alpha=\frac{1}{2}$, получим

$$\int\sqrt{x+4}dx=\int(x+4)^{\frac{1}{2}}d\,\,(x+4)=\frac{(x+4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{ax+b}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\int\frac{\frac{1}{a}d\,(ax+b)}{(ax+b)}=\frac{1}{a}\int\frac{d\,(ax+b)}{(ax+b)}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{x^2+2}.$

Решение.

$$\int\frac{xdx}{x^2+2}=\int\frac{\frac{1}{2}d\,(x^2+2)}{x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\,(x^2+2)}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\operatorname{tg}xdx.$

Решение.

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\,(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx.$

Решение. Так как

$$d\,(x^2+3x+5)=(x^2+3x+5)'\,dx=(2x+3)\,dx,$$

то

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,dx=\int\frac{d\,(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5}=\ln\,(x^2+3x+5)+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int e^{\frac{x}{2}}dx.$

Решение.

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx=\int e^{\frac{x}{2}}\,2d\left(\frac{x}{2}\right)=2\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=2e^{\frac{x}{2}}+C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int\cos\frac{x}{4}\,dx.$

Решение.

$$\int\cos\frac{x}{4}\,dx=\int\cos\frac{x}{4}\,4d\left(\frac{x}{4}\right)=4\int\cos\frac{x}{4}\,d\left(\frac{x}{4}\right)=4\sin\frac{x}{4}+C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 3x}=\int\frac{\frac{1}{3}d\,(3x)}{\sin^2 3x}=\frac{1}{3}\int\frac{d\,(3x)}{\sin^2 3x}=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 3x+C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int\frac{dx}{1+4x^2}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{1+4x^2}=\int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\,(2x)}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{d\,(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin 3x+C.$$

Задачи

Применяя простейшие преобразования дифференциала и таблицу интегралов $(9.5')$ – $(9.15')$, найти неопределенные интегралы:

1. $\int (3x-5)^2 dx.$ **2.** $\int \sqrt{2x+3}dx.$

3. $\int \sqrt{x^2-4}xdx.$ **4.** $\int e^{-\frac{x}{3}}dx.$

5. $\int \left(\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\right) dx.$ **6.** $\int \frac{xdx}{x^2+1}.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}.$ **8.** $\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}.$ **10.** $\int \frac{dx}{4x^2-1}.$

11. $\int \mathrm{ctg}\, xdx.$ **12.** $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+14} dx.$

Ответы

1. $\frac{1}{9}(3x-5)^3+C.$ **2.** $\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C.$ **3.** $\frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}+C.$

4. $-3e^{-\frac{x}{3}}+C.$ 5. $3\left(\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{3}\right)+C.$ **6.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$ **7.** $-2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}+$ $+C.$ **8.** $2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$ **9.** $3\arcsin\frac{x}{3}+C.$ **10.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C.$

11. $\ln\left|\sin x\right|+C.$ **12.** $\ln(x^2+6x+14)+C.$

§ 4.3. Метод подстановки

Интегрирование путем введения новой переменной (метод подстановки) основано на формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменной t.

Пример 1. Найти интеграл $\int xe^{x^2}dx.$

Решение. Положим $x^2 = t$, тогда $2xdx = dt$, $xdx = \dfrac{dt}{2}$. Подставляя полученные значения в подынтегральное выражение, получим

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Этот пример можно решить и по-другому (см. § 4.2):

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} xdx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d\,(x^2) = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d\,(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-2}dx$.

Решение. Чтобы избавиться от корня, положим

$$\sqrt{x-2} = t.$$

Возводя в квадрат это равенство, найдем x:

$$x = t^2 + 2,$$

откуда

$$dx = 2tdt.$$

Подставляя полученные равенства в подынтегральное выражение, находим

$$\int x\sqrt{x-2}dx = \int (t^2+2)\, t2tdt = \int (2t^4 + 4t^2)\, dt = 2\int t^4 dt + 4\int t^2 dt =$$

$$= 2\,\frac{t^5}{5} + 4\,\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}\, dt$.

Решение. Положим

$$\sqrt{1+4\sin x} = t,$$

откуда

$$1 + 4\sin x = t^2,\ 4\cos x dx = 2tdt,\ \cos x dx = \frac{1}{2}\, tdt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}\, tdt}{t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}\, t + C = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \cos^2 x \sin x dx$.

Решение. Положим $\cos x = u$,
откуда

$$-\sin x dx = du, \ \sin x dx = -du.$$

Таким образом,

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int u^2 (-du) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Тот же результат можно получить непосредственно (см. § 4.2):

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int \cos^2 x d(-\cos x) = -\int \cos^2 x d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

Решение. Положим

$$\sin x = u,$$

откуда

$$\cos x dx = du.$$

Таким образом,

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C.$$

Тот же результат получается и непосредственно:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. Пусть

$$\ln x = t,$$

тогда

$$\frac{1}{x} dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,\frac{1}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, получим

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}.$$

Положим

$$\operatorname{tg} x = t,$$

тогда

$$\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Полагая $\frac{x}{2} = t$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t} =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \ (a > 0)$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку

$$x = a\cos t.$$

Имеем

$$dx = -a\sin t dt.$$

Следовательно,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,(-a\sin t)\,dt =$$

$$= -a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t dt = -a^2\int\sin^2 t dt = -a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int\cos 2t dt = -\frac{a^2}{2}\,t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Возвращаемся к исходной переменной x. Так как $x = a\cos t$, то

$$\frac{x}{a} = \cos t,\ \ t = \arccos\frac{x}{a}.$$

Далее,

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t}\cos t =$$

$$= 2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{x}{a} = 2\,\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}\,t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2} + C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку

$$x = a\sec t.$$

Имеем:

$$dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t},$$

$$\sqrt{(x^2 - a^2)^3} = \sqrt{(a^2 \sec^2 t - a^2)^3} = \sqrt{a^6 \left(\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \right)^3} =$$

$$= \sqrt{a^6 \operatorname{tg}^6 t} = a^3 \operatorname{tg}^3 t;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = \int \frac{1}{a^3 \operatorname{tg}^3 t} \cdot \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t \cos t} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{a^2} \int (\sin t)^{-2} d\,(\sin t) = \frac{1}{a^2} \frac{(\sin t)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C.$$

Возвращаемся к переменной x. Так как

$$x = a \sec t,$$

то

$$\sec t = \frac{x}{a}, \ \frac{1}{\cos t} = \frac{x}{a}, \ \cos t = \frac{a}{x}.$$

Находим $\sin t$:

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

Пример 11. Показать, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \text{ где } a = \text{const}.$$

Решение. Применим так называемую подстановку Эйлера

$$\sqrt{x^2 + a} = t - x,$$

где t – новая переменная. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$$

или

$$a = t^2 - 2tx.$$

Находим дифференциалы от обеих частей последнего равенства:

$$0 = 2tdt - (2xdt + 2tdx)$$

или

$$tdx = (t - x)\, dt,$$

откуда

$$\frac{dx}{t - x} = \frac{dt}{t},$$

т. е.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{dt}{t}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} + \ln\left| t \right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Задачи

Методом подстановки найти интегралы:

1. $\int \sqrt{2x - 3}dx.$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\, dx.$

3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 6\cos x}}.$

4. $\int \sin^3 x \cos x dx.$

5. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx.$

6. $\int x^2 e^{x^3}\, dx.$

7. $\int \frac{dx}{4 - 5x}.$

8. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

9. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx.$

10. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

11. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$

Ответы

1. $\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$ **2.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-8\sqrt{x+4}+C.$ **3.** $-\frac{1}{3}\sqrt{1+6\cos x}+$ $+C.$ **4.** $\frac{\sin^4 x}{4}+C.$ **5.** $\frac{1}{\cos x}+C.$ **6.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$ **7.** $-\frac{1}{5}\ln\left|4-5x\right|+C.$ **8.** $\ln(\ln x)+C.$ **9.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C.$ Подстановка $\cos x=t.$ **10.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$ **11.** $-\sqrt{1-x^2}+C.$ **12.** $-\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

§ 4.4. Метод интегрирования по частям

Если $u=\varphi_1(x)$, $v=\varphi_2(x)$ – дифференцируемые функции от x, то из формулы для дифференциала произведения двух функций

$$d\,(uv)=udv+vdu$$

получается формула интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{4.18}$$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции.

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула (4.18) применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

Пример 1. Найти $\int x\sin x dx.$

Решение. Обозначим: $x=u$, $\sin x dx=dv.$

Для применения формулы (4.18) необходимо знать еще v и du. Дифференцируя равенство $x=u$, получаем $dx=du$. Интегрируя равенство $dv = \sin x dx = d\,(-\cos x)$, определяем $v = -\cos x$.

Подставляя значения u, v, du, dv в формулу (4.18), находим

$$\int x \sin x dx = x\,(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx = -x\cos x + \sin x +$$

$$+C = \sin x - x\cos x + C.$$

Пример 2. Найти $\int x \ln x dx$.

Решение. Полагая

$$\ln x = u, \;\; x dx = dv,$$

получаем

$$\frac{1}{x}\, dx = du, \;\; \frac{x^2}{2} = v.$$

По формуле (4.18) находим

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Пример 3. Найти $\int \arcsin x dx$.

Решение. Полагая

$$u = \arcsin x, \;\; dv = dx,$$

определяем

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \;\; v = x.$$

Следовательно,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\,(1-x^2) = x \arcsin x +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 4. Найти $\int x^2 \cos x dx.$

Решение. Полагая

$$u = x^2, \ dv = \cos x dx = d\,(\sin x),$$

получаем

$$du = 2x dx, \ v = \sin x.$$

Следовательно,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx. \qquad \text{(A)}$$

Полученный интеграл снова находится интегрированием по частям (пример 1). Его можно найти и не вводя явно u и v. Имеем

$$\int x \sin x dx = \int x d\,(-\cos x) = x\,(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C_1.$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (A), находим

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2\,(-x\cos x +$$

$$+\sin x + C_1) = x^2 \sin x + 2\,(x\cos x - \sin x) + C,$$

где $C = -2C_1$.

Пример 5. Найти $\int e^x \sin x dx.$

Решение. Положим

$$u = e^x, \ dv = \sin x dx,$$

отсюда

$$du = e^x dx, \ v = -\cos x.$$

Применяя формулу (4.18), получаем

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,e^x dx =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx. \qquad \text{(B)}$$

К интегралу в правой части снова применяем формулу интегрирования по частям, не вводя явно u и v. Имеем

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (В), находим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x -$$

$$- \int e^x \sin x dx;$$

$$\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x,$$

откуда

$$2\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x).$$

Следовательно,

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 6. Показать, что

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right] + C.$$

Решение. Положим

$$\sqrt{x^2 + a} = u, \ dx = dv,$$

отсюда

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx = du, \ v = x.$$

По формуле (4.18) получаем

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx.$$

Преобразуем интеграл в правой части:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2 + a}\, dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

откуда

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \right].$$

Так как (см. пример 11, § 4.3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C_1,$$

то

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right] + C.$$

Задачи

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

1. $\int xe^x dx.$ **2.** $\int \ln^2 x dx.$

3. $\int \operatorname{arctg} x dx.$ **4.** $\int x \arcsin x dx.$

5. $\int x^2 \sin x dx.$ **6.** $\int x^2 \ln x dx.$

7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$ **8.** $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$

Ответы

1. $e^x(x-1)+C.$ **2.** $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$ **3.** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$ **4.** $\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$ **5.** $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$ **6.** $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}+C.$ **7.** $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}+C.$ **8.** $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C.$

§ 4.5. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата по формуле

$$px^2 + qx + r = p[\,(x+\alpha)^2 \pm a^2\,]$$

сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C; \qquad (4.19)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \qquad (4.20)$$

где

$$u = x + \alpha.$$

Интеграл

$$\int \frac{mx + n}{px^2 + qx + r}\,dx \qquad (4.21)$$

сводится к интегралу (4.19) или (4.20) и интегралу

$$\int \frac{udu}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(u^2 \pm a^2)}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2 \pm a^2\right| + C. \qquad (4.22)$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

сводится к одному из интегралов:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C; \qquad (4.23)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C. \qquad (4.24)$$

Интеграл

$$\int \sqrt{px^2+qx+r}\,dx \tag{4.25}$$

сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \sqrt{u^2+\alpha}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+\alpha}\right| + C; \tag{4.26}$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C. \tag{4.27}$$

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Решение. Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (4.19) для случая, когда $u = x+2$, $a=3$, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

$$= \int \frac{d\,(x+2)}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$.

Решение. Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (4.20) для случая, когда $u = x-3$, $a=5$, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2-6x-16} = \int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9-16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-25} =$$

$$= \int \frac{d\,(x-3)}{(x-3)^2-5^2} = \frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{(x-3)-5}{(x-3)+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-8}{x+2}\right| + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+4x+1}$.

Решение. Как и в примере 2, получаем

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)} =$$

$$=\int\frac{dx}{3\left[\left(x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right]}=\int\frac{dx}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}}{\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|+C.$$

П р и м е р 4. Найти интеграл $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx.$

Р е ш е н и е. Это интеграл вида (4.21). Преобразуя квадратный трехчлен и переходя к новой переменной $x+1=t$, находим

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx=\int\frac{x+2}{(x^2+2x+1)+4}\,dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}\,dx=$$

$$=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+2^2}\,d\,(x+1)+\int\frac{d\,(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\,[\,(x+1)^2+2^2\,]}{(x+1)^2+2^2}+\int\frac{d\,(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln[\,(x+1)^2+2^2\,]+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C=\frac{1}{2}\ln\,(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

П р и м е р 5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$

Р е ш е н и е. Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и используя формулу (4.23), находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x+4-4-5)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}}=$$

$$=\int\frac{d\,(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$.

Решение. Как и в примере 5, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2\,(x^2+2x-3)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-2\,[\,(x^2+2x+1)-1-3]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-[\,(x+1)^2-4]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\,(x+1)}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$.

Решение. Преобразуя квадратный трехчлен и применяя формулу (4.24), находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x+9)-9+3}} = \int \frac{d\,(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-6}} =$$

$$= \ln \left|\, (x-3) + \sqrt{(x-3)^2-6}\, \right| + C =$$

$$= \ln \left| x-3+\sqrt{x^2-6x+3} \right| + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}$.

Решение. Как и в примере 7, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\,(x^2-2x+3)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+1)+2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\,(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left|\, (x-1) + \sqrt{(x-1)^2+2}\, \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x-1+\sqrt{x^2-2x+3} \right| + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2+8x+25}dx$.

Решение. Это интеграл вида (4.25). Преобразуя квадратный трехчлен и применяя формулу (4.26), находим

$$\int \sqrt{x^2+8x+25}dx = \int \sqrt{(x^2+8x+16)-16+25}dx =$$

$$= \int \sqrt{(x+4)^2+9}d\,(x+4) = \frac{x+4}{2}\sqrt{(x+4)^2+9} +$$

$$+\frac{9}{2}\ln\left|(x+4)+\sqrt{(x+4)^2+9}\right| + C =$$

$$= \frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25} + \frac{9}{2}\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+25}\right| + C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int \sqrt{8+2x-x^2}\,dx$.

Решение. Это также интеграл вида (4.25). Преобразуя квадратный трехчлен и применяя формулу (4.27), получаем

$$\int \sqrt{8+2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{-(x^2-2x-8)} =$$

$$= \int \sqrt{-(x^2-2x+1-1-8)}\,dx = \int \sqrt{-(x^2-2x+1)+9}dx =$$

$$= \int \sqrt{3^2-(x-1)^2}d\,(x-1) = \frac{x-1}{2}\sqrt{3^2-(x-1)^2} +$$

$$+\frac{3^2}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + C = \frac{x-1}{2}\sqrt{8+2x-x^2} +$$

$$+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^2+36}$.

2. $\int \frac{dx}{2x^2+17}$.

3. $\int \frac{dx}{3x^2-10}$.

4. $\int \frac{dx}{4x^2+10x-24}$.

5. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+2}$.

6. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$.

7. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

11. $\int \sqrt{x^2+4x+13}dx$.

12. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+C$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{17}}\,x+C$. **3.** $\frac{1}{2\sqrt{30}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{10}}{\sqrt{3}x+\sqrt{10}}\right|+$ $+C$. **4.** $\frac{1}{22}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C$. **5.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{8x-5}{\sqrt{7}}+C$.

6. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. **7.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$.

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$. **10.** $\ln\left|x+1+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$. **11.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+13}+\frac{9}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right|$.

12. $\frac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}+C$.

§ 4.6. Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от *целой рациональной функции* (многочлена) находится непосредственно:

$$\int (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\,dx = a_0\int dx + a_1\int xdx+\cdots+a_n\int x^n dx.$$

Интегрирование *дробной рациональной функции* после выделения целой части сводится к интегрированию *правильной рациональной дроби*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{4.28}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, причем степень $P(x)$ ниже степени $Q(x)$.

Если многочлен $Q(x)$ имеет действительные различные корни $a, b, \ldots, l$ соответственно кратности $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ и комплексные попарно сопряженные корни $\alpha_k \pm i\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, т. е. $Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}(x^2+p_1x+$ $+q_1)^{\nu_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\nu_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}$, то справедливо следующее разложение дроби (4.28) на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots +$$

$$+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \cdots + \frac{L_1}{(x-l)} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \cdots + \frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{\nu_1}x+D_{\nu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}} + \cdots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s} +$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \cdots + \frac{M_{\nu_s}x+N_{\nu_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}}. \qquad (4.29)$$

Постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}$, $B_1, \ldots, B_{\beta}$, $L_1, \ldots, L_{\lambda}$, C_1, $D_1, \ldots, M_{\nu_s}$, N_{ν_s} находятся *методом неопределенных коэффициентов*.

После разложения на простейшие слагаемые интегрирование правильной рациональной дроби сводится к нахождению интегралов вида:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^n}; \qquad (4.30)$$

$$I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx. \qquad (4.31)$$

Интеграл (4.30) находится по формуле $(4.5')$, если $n = 2, 3, \ldots$, или по формуле $(4.6')$, если $n = 1$.

Интеграл (4.31) при $m = 1$ является интегралом вида (4.21), при $m > 1$ применяется метод понижения (см. пример 5 § 4.6).

З а м е ч а н и е 1. Если многочлен $Q(x)$ имеет действительный корень b кратности β, то в формуле (4.29) ему соответствует β простейших слагаемых $\frac{A_{\mu}}{(x-b)^{\mu}}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \beta)$, каждое из которых равно дроби, числитель которой – постоянная, а знаменатель – соответствующая степень разности $(x-b)$, причем берутся все степени от 1 до β.

Замечание 2. Если многочлен $Q(x)$ имеет комплексные попарно сопряженные корни $a_k \pm ib_k$ кратности ν_k, то в разложении (4.29) им соответствует ν_k элементарных дробей вида

$$\frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + p_k x + q_k)^\mu} \ (\mu = 1, 2, \ldots, \nu_k),$$

числитель каждой из которых есть линейная функция (не постоянная, как в предыдущем случае), а знаменатель – степень соответствующего трехчлена, т. е. трехчлена

$$x^2 + p_k x + q_k = [x - (a_k + ib_k)]\,[x - (a_k - ib_k)],$$

причем берутся все степени от 1 до ν_k.

Замечание 3. Коэффициенты разложения (4.29) можно получить, полагая в тождестве (4.29) или ему равносильном x равным надлежащим образом выбранным числам (метод произвольных значений).

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{9-5x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx.$

Решение. Разложим сначала правильную рациональную дробь

$$\frac{9-5x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

на простейшие дроби, для чего нужно найти корни ее знаменателя, т. е. корни уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Один корень усматривается непосредственно, это $x_1 = 1.$ Так как

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6,$$

то

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)\,(x^2 - 5x + 6) =$$

$$= (x-1)\,(x-2)\,(x-3),$$

поэтому получаем также

$$x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

Итак, многочлен имеет действительные простые корни

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

В соответствии с формулой (4.29) ищем разложение данной дроби на простейшие

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}. \qquad \text{(A)}$$

(Слагаемых вида $\dfrac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}$ разложение не содержит, так как комплексных корней нет.) Приводя дроби в правой части к общему знаменателю, получаем

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=$$

$$=\frac{A\,(x-2)\,(x-3)+B\,(x-1)\,(x-3)+C\,(x-1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}.$$

Сравниваем числители

$$9-5x=A\,(x-2)\,(x-3)+B\,(x-1)\,(x-3)+C\,(x-1)\,(x-2). \qquad \text{(B)}$$

Раскрывая скобки в правой части равенства (B) и группируя члены, находим

$$9-5x=(A+B+C)\,x^2-(5A+4B+3C)\,x+(6A+3B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим три уравнения для определения неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$A+B+C=0;$$

$$5A+4B+3C=5;$$

$$6A+3B+2C=9.$$

Решая эту систему, находим: $A=2,\ \ B=1,\ \ C=-3.$

Следовательно,

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}$$

и поэтому

$$\int\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{x-2}\,dx-3\int\frac{1}{x-3}\,dx=$$

$$= 2\int \frac{d\,(x-1)}{x-1} + \int \frac{d\,(x-2)}{x-2} - 3\int \frac{d\,(x-3)}{x-3} =$$

$$= 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx = \ln\left|\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^3}\right| + C.$$

Замечание. Коэффициенты разложения (А) можно было бы найти полагая в равенстве (В) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Действительно, при $x = 1$ имеем $9 - 5 = A\,(-1)\,(-2)$, $4 = 2A$, откуда $A = 2$. Аналогично получаем $B = 1$, $C = -3$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)\,(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель которой $Q\,(x) = (x+2)\,(x-1)^2$ имеет простой корень $x_1 = -2$ и кратный корень $x_2 = 1$ (кратности 2).

В соответствии с формулой (4.29) разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2}{(x+2)\,(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

откуда

$$x^2 = A\,(x-1)^2 + B\,(x-1)\,(x+2) + C\,(x+2).$$

Полагая $x = 1$, получим $1 = C\,(1+2)$, откуда $C = \frac{1}{3}$.

При $x = -2$ находим $(-2)^2 = A\,(-2-1)^2$ или $4 = 9A$, откуда $A = \frac{4}{9}$.

Полагая $x = 0$, получаем $0 = A\,(0-1)^2 + B\,(0-1)\,(0+2) + C\,(0+2)$ или $A - 2B + 2C = 0$. Принимая во внимание значения A и C, из последнего уравнения находим $B = \frac{5}{9}$.

Следовательно,

$$\frac{x^2}{(x+2)\,(x-1)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{5}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2},$$

поэтому

$$\int \frac{x^2 dx}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{4}{9}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{5}{9}\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{x^2 dx}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{9}\ln\left|(x+2)^4(x-1)^5\right| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

П р и м е р 3. Найти интеграл $\int \frac{x}{x^3+1}dx.$

Р е ш е н и е. В данном случае

$$Q(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1),$$

причем второй множитель на действительные множители не разлагается.

На основании формулы (4.29) разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1).$$

Полагая последовательно $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, получим

$$-1 = A[1-(-1)+1] \text{ или } -1 = 3A;$$

$$0 = A(0-0+1) + (B\cdot 0 + C)(0+1) \text{ или } 0 = A + C;$$

$$1 = A(1-1+1) + (B+C)(1+1) \text{ или } 1 = A + 2B + 2C.$$

Из системы уравнений

$$-1 = 3A;\ A + C = 0;\ A + 2B + 2C = 1$$

находим

$$A = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3}.$$

Итак,

$$\frac{x}{x^3+1} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

Интегрируем

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx. \qquad \text{(A)}$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части равенства (A):

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}d\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] + \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \qquad \text{(B)}$$

Далее, поскольку

$$-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{3}\ln|x+1|, \qquad \text{(C)}$$

то равенство (A) с учетом (B) и (C) примет вид

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x^3+x^2+2}{x\,(x^2-1)^2}\,dx.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби. Так как знаменатель имеет корни $x_1=1$ и $x_2=-1$ кратности 2 и простой корень $x_3=0$, то разложение примет вид

$$\frac{x^3+x^2+2}{x\,(x^2-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{(x+1)^2},$$

откуда

$$x^3+x^2+2=A\,(x-1)^2(x+1)^2+B_1x\,(x-1)\,(x+1)^2+$$

$$+B_2x\,(x+1)^2+C_1x\,(x+1)\,(x-1)^2+C_2x\,(x-1)^2;$$

$$x^3+x^2+2=x^4(A+B_1+C_1)+x^3(B_1+B_2-C_1+C_2)+$$

$$+x^2(2B_2-2A-B_1-2C_2-C_1)+x\,(B_2-B_1+C_2+C_1)+A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим пять уравнений для определения пяти неизвестных:

$$\left.\begin{array}{c} A+B_1+C_1=0;\\ B_1+B_2-C_1+C_2=1;\\ 2B_2-2A-B_1-2C_2-C_1=1;\\ B_2-B_1+C_2+C_1=0;\\ A=2. \end{array}\right\}$$

Решая полученную систему, находим

$$A=2,\;B_1=-\frac{3}{4},\;B_2=1,\;C_1=-\frac{5}{4},\;C_2=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, подынтегральная функция разлагается на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{x^3+x^2+2}{x\,(x^2-1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{3}{4\,(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{5}{4\,(x+1)}-\frac{1}{2\,(x+1)^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x\,(x^2-1)^2}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} - \frac{3}{4}\int \frac{d\,(x-1)}{x-1} + \int \frac{d\,(x-1)}{(x-1)^2} -$$

$$-\frac{5}{4}\int \frac{d\,(x+1)}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x+1)}{(x+1)^2} =$$

$$= 2\ln x - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{5}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2\,(x+1)} + C =$$

$$= \frac{x+3}{2\,(1-x^2)} + \ln\frac{x^2}{\sqrt[4]{|x-1|^3|x+1|^5}} + C.$$

П р и м е р 5. Найти интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ $(m = 2, 3, \dots)$.

Р е ш е н и е. Выделим из выражения x^2+px+q полный квадрат двучлена

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Мы предполагаем, что трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $q - \frac{p^2}{4} > 0,$ поэтому можно положить

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2,\ a = +\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Вводя новую переменную

$$x + \frac{p}{2} = t,$$

находим

$$dx = dt,\ x^2+px+q = t^2 + a^2,\ Mx+N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Mt+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}. \qquad \text{(A)}$$

Первый из интегралов вычисляется подстановкой

$$t^2+a^2=u,\ 2tdt=du,$$

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{u^{m-1}}+C=$$

$$= -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C. \qquad \text{(B)}$$

Второй интеграл можно найти по рекуррентной формуле

$$I_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{a^2}\,I_m, \qquad \text{(C)}$$

где

$$I_m = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^m}\quad (m=1,2,3,\dots). \qquad \text{(D)}$$

Формула (C) получается с помощью метода интегрирования по частям. В самом деле, положим

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^m}=u,\ dz=dv,$$

тогда

$$du=-\frac{2mzdz}{(z^2+a^2)^{m+1}},\ v=z.$$

На основании формулы (4.18) имеем

$$I_m = \frac{z}{(z^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{z^2}{(z^2+a^2)^{m+1}}\,dz. \qquad \text{(E)}$$

Преобразуем последний интеграл

$$\int \frac{z^2}{(z^2+a^2)^{m+1}}\,dz = \int \frac{(z^2+a^2)-a^2}{(z^2+a^2)^{m+1}}\,dz = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^m} -$$

$$-\int \frac{a^2 dz}{(z^2+a^2)^{m+1}} = I_m - a^2 I_{m+1}. \qquad \text{(F)}$$

Подставляя выражение (F) в (E), получим

$$I_m = \frac{z}{(z^2+a^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}, \qquad \text{(G)}$$

откуда и получается формула (C).

Формула (C) сводит вычисление интеграла I_{m+1} к вычислению интеграла I_m.

Зная интеграл

$$I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}$$

(мы берем одно из его значений), по этой формуле при $m=1$ находим

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{z}{z^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}. \qquad \text{(H)}$$

Полагая в формуле (C) $m=2$, получим

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}I_2 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^2} +$$

$$+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{z}{z^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} \qquad \text{(K)}$$

и т. д. Таким путем можно вычислить интеграл I_m для любого натурального m.

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}\,dx.$

Решение. Знаменатель дроби $Q(x)=(1+x^2)^3$ имеет два мнимых корня $x=\pm i$ кратности 3. Функция разлагается на следующие простейшие дроби:

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3} = \frac{M_1x+N_1}{1+x^2} + \frac{M_2x+N_2}{(1+x^2)^2} + \frac{M_3x+N_3}{(1+x^2)^3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и сравнивая числители, получим

$$x^4+2x^2+4=M_3x+N_3+(M_2x+N_2)(1+x^2)+$$
$$+(M_1x+N_1)(1+x^2)^2. \qquad \text{(A)}$$

Для определения постоянных M_k, N_k $(k=1,2,3)$ применим смешанный метод.

Положим $x=\sqrt{-1}=i$; следовательно, $x^2=-1$. Подставляя это значение в тождество (A), получим

$$(-1)^2+2(-1)+4=M_3i+N_3 \text{ или } M_3i+N_3=3,$$

откуда

$$M_3=0,\ N_3=3.$$

Подставим в (A) значения M_3 и N_3:

$$x^4+2x^2+4=3+(M_2x+N_2)(1+x^2)+(M_1x+N_1)(1+x^2)^2.$$

Переносим 3 в левую часть:

$$(x^2+1)^2=(M_2x+N_2)(1+x^2)+(M_1x+N_1)(1+x^2)^2$$

и сокращаем на $1+x^2$:

$$x^2+1=M_2x+N_2+(M_1x+N_1)(1+x^2). \qquad \text{(B)}$$

Снова полагая $x=i$, получим $0=M_2i+N_2$, откуда $M_2=0$, $N_2=0$.

Подставим эти значения в тождество (B):

$$1+x^2=(M_1x+N_1)(1+x^2).$$

Следовательно,

$$1=M_1x+N_1,$$

откуда $M_1=0$, $N_1=1$.

Итак, разложение имеет вид

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{(1+x^2)^3}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\operatorname{arctg}x+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}. \qquad \text{(C)}$$

Интеграл в правой части равенства (C) получается по формуле (K) примера 5 при $a = 1$ и $z = x$:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. \tag{D}$$

Из равенств (C) и (D) имеем

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{11}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{9}{8} \frac{x}{1+x^2} + C.$$

Задачи

Найти интегралы от рациональных функций:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\, dx.$ **2.** $\displaystyle\int \frac{2x dx}{x^2+3x-4}.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$ **4.** $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\, dx.$ **6.** $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)\,(2x+3)\,(2x-5)}\, dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}\, dx.$ **8.** $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x\,(1+x^2)^2}\, dx.$

Ответы

1. $\ln\left|\dfrac{(x-1)\,(x+2)}{x}\right| + C.$ **2.** $\ln\sqrt[5]{(x-1)^2(x+4)^8} + C.$ **3.** $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{3}{2} \operatorname{arctg} x + C.$ **4.** $\ln|x+1| + \dfrac{4}{x+2} + C.$

5. $\dfrac{1}{3} \ln\left|\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)\,(x+2)^2}\right| + C.$ **6.** $\dfrac{1}{8} \ln\left|\dfrac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right| + C.$

7. $\dfrac{1}{3} \ln|x+1| - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{3} \ln(x^2+2) - \dfrac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{2}} + C.$ **8.** $\ln|x| - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + \dfrac{3x+1}{2\,(1+x^2)} + \dfrac{3}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

§ 4.7. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx, \ \int \sin ax \sin bx dx, \ \int \cos ax \cos bx dx$$

находятся с помощью тригонометрических формул:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)];$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)];$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

2. Интегралы вида

$$I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx,$$

где n и m – четные числа, находятся с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечетное, то интеграл находим непосредственно, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную. В частности, если $m = 2k+1$, то

$$I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^n x (1-\sin^2 x)^k d(\sin x).$$

3. Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то целесообразно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$, при этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ x = \operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

П р и м е р 1. Найти интеграл $\int \cos x \sin^2 x dx$.

Р е ш е н и е. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то на основании формулы $(4.5')$ при $u = \sin x$ получаем

$$\int \cos x \sin^2 x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

П р и м е р 2. Найти интеграл $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Р е ш е н и е. В данном случае $m = 3$, $n = 2$. Получаем

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x d(\sin x) = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^2 x d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

П р и м е р 3. Найти интеграл $\int \sin^4 x dx$.

Р е ш е н и е. Здесь $n = 4$, $m = 0$. Преобразуя подынтегральную функцию с помощью соответствующих формул, находим

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) +$$

$$+ \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8 \cdot 4}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

П р и м е р 4. Найти интеграл $\int \cos^5 x dx$.

Р е ш е н и е. В данном случае $n = 0$, $m = 5$. Отделяем множитель первой степени и выражаем $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x.$$

Вводя новую переменную t по формуле $\sin x = t$, получим

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int (1 - 2t^2 + t^4)\, dt = \int dt - 2\int t^2 dt + \int t^4 dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x, находим

$$\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

П р и м е р 5. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx -$$

$$-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \times$$

$$\times \frac{1}{2} d\,(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\,(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

П р и м е р 6. Найти интеграл $\int \sin 7x \sin 3x dx$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\sin 3x \sin 7x = \frac{1}{2}[\cos(7-3)\,x - \cos(7+3)\,x] =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x),$$

то

$$\int \sin 7x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int [\cos 4x - \cos 10x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 4x dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \cos 3x \cos x dx$.

Решение. Преобразуя подынтегральную функцию, находим

$$\int \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

Решение. Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$. Применяем подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Так как при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

то

$$\frac{1}{3 + \sin x + \cos x} = \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{2\,(t^2 + t + 2)}$$

и

$$\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\frac{dt}{t^2+t+2}.$$

Интегрируем

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция не меняется от замены $\sin x$ на $(-\sin x)$, $\cos x$ на $(-\cos x)$, т. е. $R(-\sin x,-\cos x)\equiv R(\sin x,\cos x)$. Применяем подстановку $\operatorname{tg} x=t$. Так как при этом

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x=\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

то

$$\frac{1}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}=\frac{1+t^2}{5+9t^2},\ \frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}=\frac{dt}{5+9t^2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}=\int\frac{dt}{5+9t^2}=\int\frac{\frac{1}{3}d\,(3t)}{\left(\sqrt{5}\right)^2+(3t)^2}=$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\int \sin x \cos^4 x dx.$

2. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

3. $\int \sin^2 5x dx.$

4. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

5. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx.$

6. $\int \sin x \sin 3x dx.$

7. $\int \cos 4x \cos 2x dx.$

8. $\int \sin 3x \cos 2x dx.$

9. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}.$

10. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}.$

Ответы

1. $-\frac{\cos^5 x}{5} + C.$ **2.** $-\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C.$ **3.** $\frac{x}{2} - \frac{\sin 10x}{20} + C.$ **4.** $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$ **5.** $-\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$ **6.** $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$ **7.** $\frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$ **8.** $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C.$ **9.** $\frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C.$ **10.** $\frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C.$

§ 4.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right] dx, \qquad (4.32)$$

где R – рациональная функция и $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ – целые числа, находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

где n – наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

2. Интеграл от дифференциального бинома, т. е. интеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx, \tag{4.33}$$

где m, n, p – рациональные числа, a и b – постоянные, отличные от нуля, сводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

1) когда p – целое число, – разложением на слагаемые по формулам бинома Ньютона;

2) когда $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, – подстановкой $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) когда $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число, – подстановкой $ax^{-n} + b = t^s$.

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx.$

Решение. Это интеграл вида (4.32), для которого $\dfrac{ax+b}{cx+d} = x + 9$ (т. е. $a = 1$, $b = 9$, $c = 0$, $d = 1$), $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{1}{2}.$

Применим подстановку

$$x + 9 = t^2,$$

откуда

$$x = t^2 - 9, \ dx = 2tdt$$

и

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2-9} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2-9} dt = 2\int \frac{(t^2-9)+9}{t^2-9} dt =$$

$$= 2\int dt + 18\int \frac{dt}{t^2-9} = 2t + \frac{18}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+9} + 3\ln \left| \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3} \right| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} dx.$

Р е ш е н и е . Это интеграл вида (4.32), для которого $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{2-x}{2+x}$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{3}$.

Применим подстановку

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3.$$

Выразим x, $2-x$ и dx через новую переменную t:

$$2-x=t^3(2+x),\ 2-2t^3=x+xt^3,\ 2-2t^3=x\,(1+t^3),$$

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3},\ 2-x=2-\frac{2-2t^3}{1+t^3}=\frac{4t^3}{1+t^3},\ \frac{1}{(2-x)^2}=\frac{(1+t^3)^2}{16t^6};$$

$$dx=\frac{-6t^2(1+t^3)-3t^2(2-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,dt=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Подставляя найденные выражения в интеграл, получим

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{1}{(2-x)^2}\,dx=\int t\cdot\frac{(1+t^3)^2}{16t^6}\cdot\frac{(-12t^2)}{(1+t^3)^2}\,dt=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=$$

$$=\frac{3}{8t^2}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

П р и м е р 3 . Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

Р е ш е н и е . Здесь $\frac{ax+b}{cx+d}=x+1$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2}$. Положим

$$x+1=t^2,$$

тогда

$$dx=2tdt,$$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=2\int\frac{t+2}{t^4-t}\,tdt=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt.$$

Разлагая подынтегральную функцию на элементарные дроби, получим

$$\frac{t+2}{t^3-1}=\frac{1}{t-1}-\frac{t+1}{t^2+t+1}.$$

Следовательно,

$$2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt=2\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t+1}{t^2+t+1}\right)\,dt=2\int\frac{dt}{t-1}-$$

$$-2\int\frac{t+1}{t^2+2\cdot\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,dt=2\int\frac{d\,(t-1)}{t-1}-$$

$$-2\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t+\frac{1}{2}\right)=2\int\frac{d\,(t-1)}{t-1}-$$

$$-2\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2\ln\left|t-1\right|-$$

$$-\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\ln\,(t-1)^2-$$

$$-\ln\,(t^2+t+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$

Решение. Это также интеграл типа (4.32), для которого $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ (т. е. $a=1,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=1$), $\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{1}{3},\quad \dfrac{p_2}{q_2}=\dfrac{2}{3},\quad \dfrac{p_3}{q_3}=\dfrac{1}{6}$, общий знаменатель всех дробей равен 6, поэтому применяем подстановку

$x = t^6$ (она дает возможность освободиться от всех радикалов).

Поскольку

$$x = t^6,$$

то

$$dx = 6t^5 dt,\ \sqrt[3]{x} = t^2,\ \sqrt[3]{x^2} = t^4.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)} dx = \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6 (1 + t^2)} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3 (t^2 + 1) + 1}{1 + t^2} dt = 6\int t^3 dt + 6\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{3}{2} t^4 + 6\operatorname{arctg} t +$$

$$+ C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

П р и м е р 5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Р е ш е н и е. Переписав интеграл в виде

$$\int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

и сравнив его с интегралом (4.33), заключаем, что $m = -\frac{2}{3},\ \ n = \frac{1}{3},\ \ p = \frac{1}{2}.$

Так как

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

есть целое число, то мы имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома.

Подстановка $a + bx^n = t^s$ в данном случае примет вид

$$\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right) = t^2,$$

откуда

$$x^{\frac{1}{3}} = t^2 - 1, \ \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = 2tdt, \ x^{-\frac{2}{3}} dx = 6tdt.$$

Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$\int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} dx = \int t \cdot 6tdt =$$

$$= 6\int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Переписав интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1 + x^4)^{-\frac{1}{4}} dx,$$

заключаем, что $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$. Так как $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (целое число), то имеем третий случай интегрируемости.

Подстановка

$$ax^{-n} + b = t^s,$$

где s – знаменатель числа p, в данном случае примет вид

$$x^{-4} + 1 = t^4,$$

откуда

$$x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, \ dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt,$$

$$\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t\,(t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)}dx.$ **2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)\,(x+1)^2}}.$ **4.** $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$ **6.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.$

7. $\displaystyle\int x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$ **8.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}.$

Ответы

1. $3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|-3\ln\sqrt[6]{2x-1}+C.$ **2.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$ Указание. Преобразовать вначале подынтегральную функцию $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=$ $=(x-1)\,(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}.$ **3.** $\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$ где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$ **4.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$ **5.** $\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\sqrt[3]{1+x^5}.$ **6.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C.$ **7.** $-\frac{1}{5}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+$ $+\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$ **8.** $3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}+C.$

§ 4.9. Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций основано на формулах:

$$\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C;\qquad(4.34)$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \qquad (4.35)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \qquad (4.36)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C. \qquad (4.37)$$

Интегралы от четных степеней $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ находятся с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1);\ \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ находятся отделением множителя первой степени и введением новой переменной.

Пример 1. Найти интеграл $\int \operatorname{sh}^2 x dx$.

Решение. Так как

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1),$$

то

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x dx - \frac{1}{2}\int dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 2x d\,(2x) - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{2}x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \operatorname{sh}^3 x dx$.

Решение. Представляя подынтегральную функцию в виде

$$\operatorname{sh}^3 x = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x$$

и принимая во внимание, что

$$\operatorname{sh} x dx = d\,(\operatorname{ch} x),\ \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1,$$

получаем

$$\int \operatorname{sh}^3 x dx = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int \operatorname{sh}^2 x d\,(\operatorname{ch} x) = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1)\, d\,(\operatorname{ch} x) =$$

$$= \int \operatorname{ch}^2 x d\,(\operatorname{ch} x) - \int d\,(\operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C.$$

П р и м е р 3. Найти интеграл $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x dx = \int (\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{ch}\,4x - 1}{2}\,dx = \frac{1}{8}\int \mathrm{ch}\,4x dx - \frac{1}{8}\int dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int \mathrm{ch}\,4x d\,(4x) - \frac{1}{8}\int dx = \frac{1}{32}\,\mathrm{sh}\,4x - \frac{1}{8}\,x + C.$$

П р и м е р 4. Найти интеграл $\int \mathrm{cth}^2 x dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \mathrm{cth}^2 x dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} + \int dx =$$

$$= -\,\mathrm{cth}\,x + x + C = x - \mathrm{cth}\,x + C.$$

П р и м е р 5. Найти интеграл $\int \mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}\,x dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \mathrm{ch}^3 x\,\mathrm{sh}\,x dx = \int \mathrm{ch}^3 x d\,(\mathrm{ch}\,x) = \frac{\mathrm{ch}^4 x}{4} + C.$$

Задачи

Найти интегралы от гиперболических функций:

1. $\int \mathrm{ch}^2 x dx$.

2. $\int \mathrm{ch}^3 x dx$.

3. $\int \mathrm{sh}^3 4x\,\mathrm{ch}\,4x dx$.

4. $\int \mathrm{th}^2 x dx$.

5. $\int \mathrm{ch}^4 x\,\mathrm{sh}\,x dx$.

6. $\int \mathrm{sh}^5 x\,\mathrm{ch}\,x dx$.

7. $\int \frac{1+2\,\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx$.

8. $\int \frac{1+\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}\,dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2x + \frac{1}{2}\,x + C$. **2.** $\mathrm{sh}\,x + \frac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + C$. **3.** $\frac{\mathrm{sh}^4 4x}{16} + C$. **4.** $\mathrm{th}\,x + x + C$.
5. $\frac{\mathrm{ch}^5 x}{5} + C$. **6.** $\frac{\mathrm{sh}^6 x}{6} + C$. **7.** $-\frac{\mathrm{ch}\,x + 2}{\mathrm{sh}\,x} + C$. **8.** $\frac{\mathrm{sh}\,x - 1}{\mathrm{ch}\,x} + C$.

Глава 5.
Определенный интеграл и его приложения

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. В каждом из элементарных отрезков длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ произвольным образом выберем точку z_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i = f(z_1)\,\Delta x_1 + f(z_2)\,\Delta x_2 + \dots + f(z_n)\,\Delta x_n. \qquad (5.1)$$

Сумма эта называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$ называется предел ее интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i. \qquad (5.2)$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то предел (5.2) существует и конечен.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

5. $\displaystyle\int_a^b [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b f_3(x)\,dx.$

6. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

7. $\displaystyle\left[\int_a^x f(x)\,dx\right]' = f(x).$

§ 5.1. Вычисление определенного интеграла

1. Теорема Ньютона-Лейбница. *Определенный интеграл от непрерывной функции в данном промежутке равен разности значений любой первообразной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5.3}$$

где

$$F'(x) = f(x).$$

2. Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{5.4}$$

где $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$; t – новая переменная; α, β – новые пределы интегрирования.

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x) \tag{5.5}$$

или

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{5.6}$$

4. Т е о р е м а о с р е д н е м з н а ч е н и и. *Если* $f(x) \le \Phi(x)$, *при* $a \le x \le b$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \Phi(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Если $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны при* $a \le x \le b$ *и* $\varphi(x) \ge 0$, *то*

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \le M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{5.8}$$

где m – наименьшее, а M – наибольшее значение функции $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

В частности, если $\varphi(x) \equiv 1$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{5.9}$$

Неравенства (5.8) и (5.9) можно заменить соответственно эквивалентными им равенствами:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{5.10}$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(d)\,(b-a), \tag{5.11}$$

где c и d – некоторые числа, лежащие между a и b.

Число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.12}$$

называется *средним значением* функции $y = f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$.

П р и м е р 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^4 x^2 dx$.

Р е ш е н и е. По формуле (5.3) имеем

$$\int_1^4 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

З а м е ч а н и е. В соответствии с теоремой Ньютона-Лейбница можно брать любую первообразную подынтегральной функции. В данном случае вместо $\frac{x^3}{3}$ можно было бы взять $\frac{x^3}{3} + 5$, которая также будет первообразной для функции $y = x^2$:

$$\int_1^4 x^2dx = \left(\frac{x^3}{3} + 5\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} + 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 5\right) = \frac{64}{3} + 5 - \frac{1}{3} - 5 = \frac{63}{3} = 21.$$

Тот же результат получается и в общем случае:

$$\int_1^4 x^2dx = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} + C\right) - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = 21.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь ту первообразную, для которой постоянное слагаемое равно нулю.

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

Р е ш е н и е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

П р и м е р 3. Вычислить $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$

Р е ш е н и е. На основании свойств 5 и 6 определенного интеграла и формулы (5.3) получаем

$$\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{5}\int_4^9 xdx + \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\,\Bigg|_4^9 +$$

$$+\sqrt{x}\,\Big|_4^9 = \frac{1}{5}(9^2 - 4^2) + \left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = \frac{1}{5}\cdot 65 + 1 = 14.$$

П р и м е р 4. Вычислить $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}dx.$

Р е ш е н и е. Введем новую переменную по формуле $\sqrt{x+4}=t.$ Определим x и dx. Возводя в квадрат обе части равенства $\sqrt{x+4}=t,$ получим $x+4=t^2,$ откуда $x=t^2-4$ и $dx=2tdt.$ Находим новые пределы интегрирования. Подставляя старые пределы в формулу $\sqrt{x+4}=t,$ получаем: $\sqrt{0+4}=t,$ откуда $t=2$ и $\alpha=2;$ $\sqrt{5+4}=t,$ откуда $t=3,$ $\beta=3.$

Таким образом,

$$\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}dx=\int\limits_2^3(t^2-4)\,t2tdt=\int\limits_2^3(2t^4-8t^2)\,dt=2\int\limits_2^3 t^4dt-$$

$$-8\int\limits_2^3 t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}\Bigg|_2^3-8\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^3=\frac{2}{5}(3^5-2^5)-\frac{8}{3}(3^3-2^3)=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 211-\frac{8}{3}\cdot 19=\frac{506}{15}=33\frac{11}{15}.$$

П р и м е р 5. Вычислить $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$

Р е ш е н и е. Положим $\sqrt{x}=t,$ тогда $x=t^2$ и $dx=2tdt.$ Подставляя старые пределы интегрирования в формулу $\sqrt{x}=t,$ получаем $\alpha=0,$ $\beta=2.$

Следовательно,

$$\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\int\limits_0^2\frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_0^2\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int\limits_0^2 dt-2\int\limits_0^2\frac{d\,(t+1)}{t+1}=$$

$$=2t\,\Big|_0^2-2\ln|t+1|\,\Big|_0^2=2\,(2-0)-2\,[\ln(2+1)-\ln(0+1)\,]=$$

$$=4-2\ln 3\approx 1{,}803.$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям (5.5). Полагая $u = \ln x$, $dv = dx$, определяем $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$.

Следовательно,

$$\int\limits_1^e \ln x dx = x\ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{x} x dx = x\ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e dx = x\ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - 1\cdot\ln 1 - (e-1) = e - 0 - e + 1 = 1.$$

Пример 7. Вычислить $\int\limits_0^\pi x\sin x dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\pi x\sin x dx = \int\limits_0^\pi x d\,(-\cos x) = x\,(-\cos x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi = -(\pi\cos\pi - 0\cdot\cos 0) + (\sin\pi - \sin 0) = \pi.$$

Пример 8. Определить площадь, ограниченную дугой косинусоиды в пределах от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$ и осью Ox.

Решение. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, заключаем, что искомая площадь выразится интегралом

$$S = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$S = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 9. Оценить интеграл $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}dx.$

Решение. Так как $0\le\cos^2 x\le 1,$ то по формуле (5.9) находим

$$\frac{\pi}{2}<I<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

т. е. $1{,}57<I<1{,}91.$

Задачи

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_2^4 (x^3+x)\,dx.$

2. $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx.$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$

4. $\int\limits_4^9 \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

5. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}.$

6. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$

8. $\int\limits_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx.$

9. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

10. $\int\limits_{\pi}^{0} x\cos x dx.$

Оценить интегралы:

11. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$

Ответы

1. 66. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 40. **5.** $-0{,}2\ln 2.$ **6.** $\ln 3.$ **7.** $\arcsin\frac{1}{3}.$ **8.** $\frac{20}{3}.$ **9.** $\pi.$ **10.** 2. **11.** $\frac{2}{9}<I<\frac{2}{7}.$ **12.** $\frac{2}{13}\pi<I<\frac{2}{7}\pi.$

§ 5.2. Площадь криволинейной фигуры в декартовых и полярных координатах

Площадь криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 5.1), ограниченной сверху графиком кривой $y = f(x)$, слева и справа – соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу – осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \text{ или } S = \int_a^b y dx. \tag{5.13}$$

Дифференциал переменной площади $AaxX$ (рис. 5.1) равен

$$dS = ydx.$$

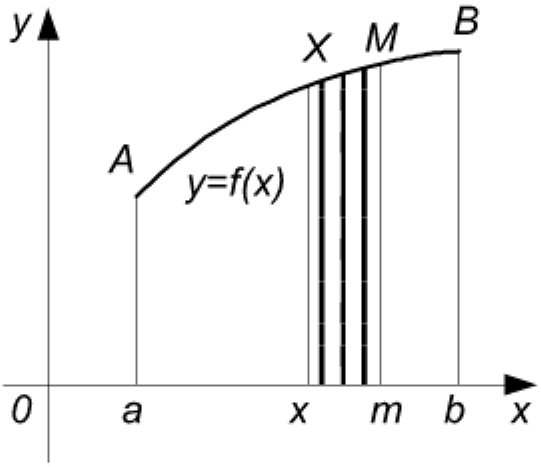


Рис. 5.1

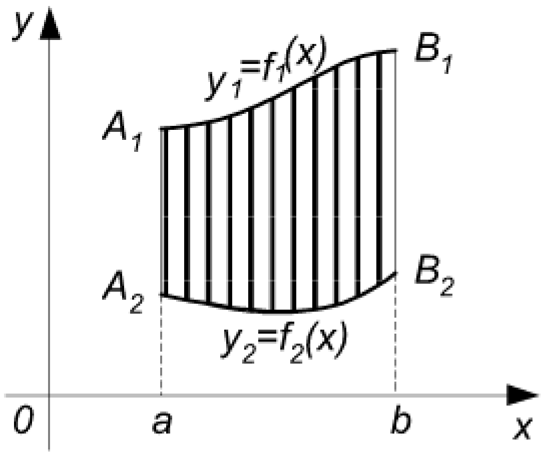


Рис. 5.2

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = f(t),\ y = \varphi(t),$$

то

$$dS = \varphi(t)\, f'(t)\, dt$$

и

$$S = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, f'(t)\, dt. \tag{5.14}$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 5.2), ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx \text{ или } S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx. \tag{5.15}$$

Площадь криволинейной трапеции *CcdD* (рис. 5.3), прилежащей к оси *Oy*, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi\,(y)\,dy \ \text{ или } \ S = \int_c^d x dy. \qquad (5.16)$$

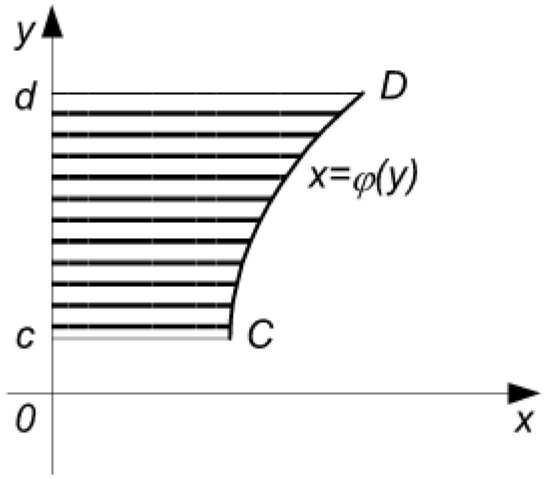


Рис. 5.3

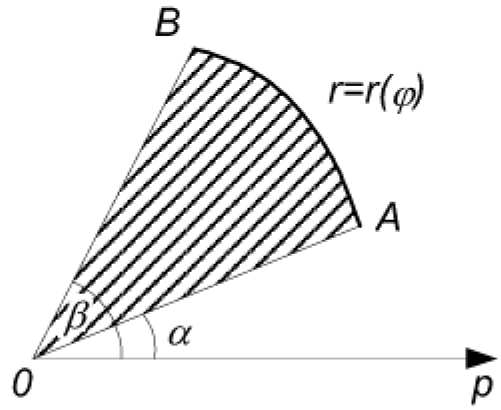


Рис. 5.4

Площадь сектора *OAB* (рис. 5.4) кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r\,(\varphi)$:

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \qquad (5.17)$$

Пример 1. Определить площадь, ограниченную линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ (рис. 5.5).

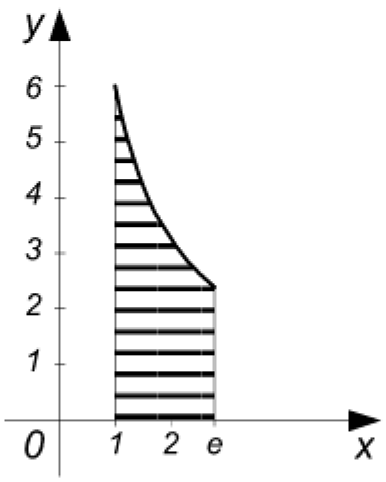


Рис. 5.5

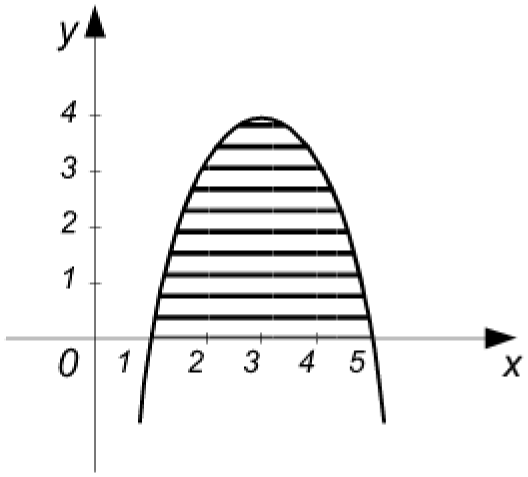


Рис. 5.6

Решение. Определяя y из уравнения гиперболы $xy = 6$, получим $y = \dfrac{6}{x}$. Из условия вытекает, что $a = 1$, $b = e$. Подставляя значения a, b

и $\dfrac{6}{x}$ (выражение для y) в формулу (5.13), находим:

$$S=\int_1^e \frac{6}{x}\,dx=6\int_1^e \frac{dx}{x}=6\ln x\,\Big|_1^e=6\,(\ln e-\ln 1)=6\,(1-0)=6.$$

П р и м е р 2. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=6x-x^2-5$ и осью Ox.

Р е ш е н и е. Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения кривой (параболы) с осью Ox (рис. 5.6). Решая систему $y=6x-x^2-5$, $y=0$, получим $x_1=1$, $x_2=5$, следовательно, $a=1$, $b=5$.

Таким образом, искомая площадь равна

$$S=\int_1^5 y\,dx=\int_1^5 (6x-x^2-5)\,dx=6\int_1^5 x\,dx-\int_1^5 x^2dx-5\int_1^5 dx=$$

$$=6\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^5-\frac{x^3}{3}\Big|_1^5-5x\,\Big|_1^5=3\,(5^2-1^2)-\frac{1}{3}\,(5^3-1^3)-$$

$$-5\,(5-1)=3\cdot 24-\frac{1}{3}\cdot 124-5\cdot 4=\frac{216-124-60}{3}=$$

$$=\frac{32}{3}=10\,\frac{2}{3}.$$

П р и м е р 3. Определить площадь, ограниченную параболой $y=x^2-5x+6$ и координатными осями (и прилегающую к обеим осям).

Р е ш е н и е. Найдем пределы интегрирования. Так как фигура ограничена слева осью Oy, то нижний предел интегрирования $a=0$. Кривая $y=x^2-5x+6$ пересекает ось Ox в двух точках: $x_1=2$, $x_2=3$ (рис. 5.7), следовательно, верхний предел $b=2$. Таким образом,

$$S=\int_0^2 (x^2-5x+6)\,dx=\int_0^2 x^2dx-5\int_0^2 x\,dx+6\int_0^2 dx=$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 - 5\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + 6x\,\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 5\cdot\frac{2^2}{2} + 6\cdot 2 =$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

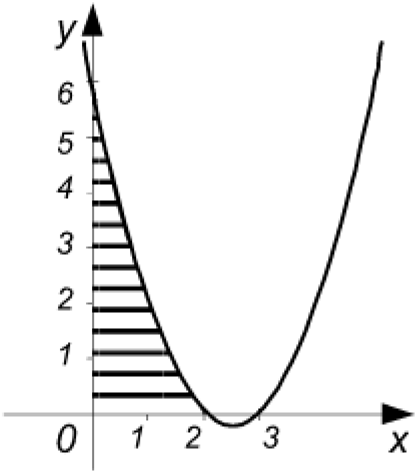


Рис. 5.7

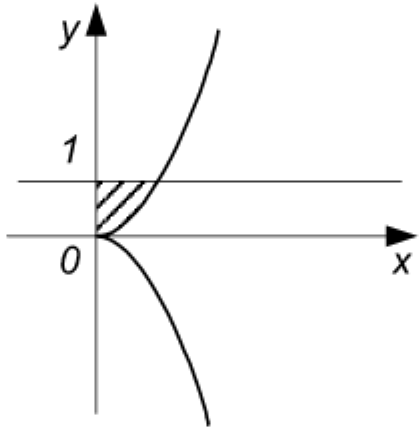


Рис. 5.8

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$, прямой $y = 1$ и осью Oy (рис. 5.8).

Решение. Искомую площадь определим по формуле (5.16). Подставляя в нее значения $c = 0$, $d = 1$ и выражение $x = y^{\frac{2}{3}}$, получим

$$S = \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

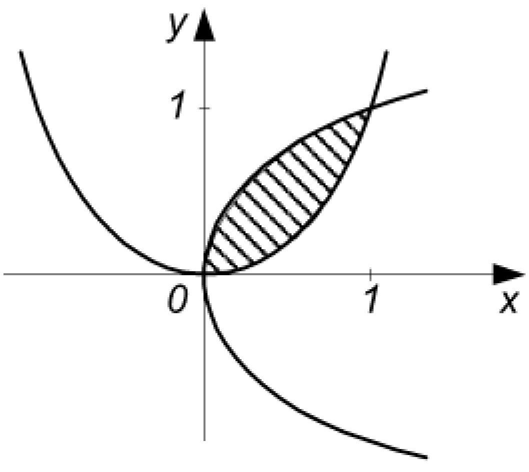


Рис. 5.9

Пример 5. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями:

$$y = x^2,\ y^2 = x.$$

Решение. Решая совместно систему уравнений $y = x^2$, $y^2 = x$, находим абсциссы точек пересечения данных кривых: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Следовательно, пределы интегрирования будут: $a = 0$, $b = 1$ (рис. 5.9). Искомую площадь вычисляем по формуле (5.15). Заметим вначале, что $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = x^2$ (получено из уравнений линий).

Таким образом,

$$S = \int_0^1 (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

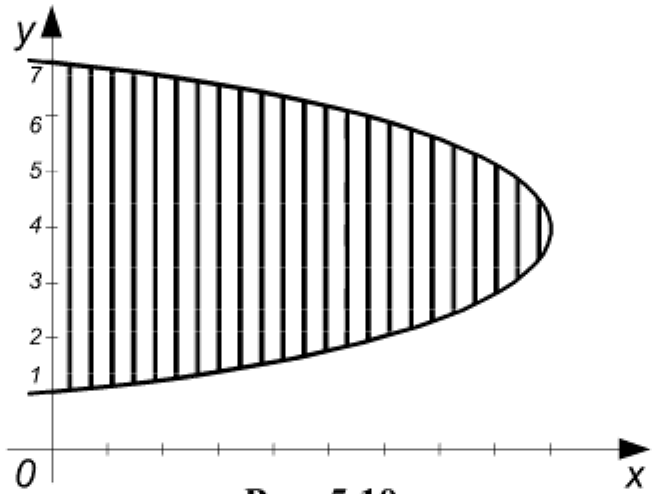


Рис. 5.10

Пример 6. Вычислить площадь, ограниченную параболой $x = 8y - y^2 - 7$ и осью Oy.

Решение. Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения кривой с осью Oy.

Решая систему уравнений $x = 8y - y^2 - 7$, $x = 0$, получаем $y_1 = 1$, $y_2 = 7$ (рис. 5.10). По формуле (5.16) находим

$$S = \int_1^7 (8y - y^2 - 7)\, dy = 8\int_1^7 y dy - \int_1^7 y^2 dy - 7\int_1^7 dy =$$

$$= 8 \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_1^7 - \left. \frac{y^3}{3} \right|_1^7 - 7y \,\Big|_1^7 = 4\,(49 - 1) - \frac{1}{3}(343 - 1) -$$

$$- 7\,(7 - 1) = 192 - 114 - 42 = 36.$$

Пример 7. Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ и осью Ox (см. рис. 5.11).

Решение. По формуле (5.14) получаем:

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a\,(1 - \cos t)\, a\,(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t +$$

$$+\cos^2 t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}dt-2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\frac{1}{4}a^2\int_0^{2\pi}\cos 2t\,d\,(2t)=$$

$$=\frac{3}{2}a^2 t\,\Big|_0^{2\pi}-2a^2\sin t\,\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{4}\sin 2t\,\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

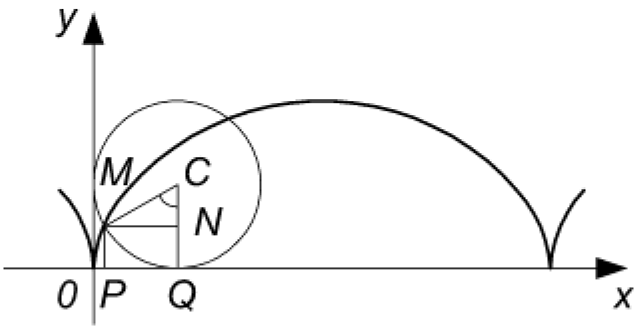


Рис. 5.11

П р и м е р 8. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Р е ш е н и е. Кривая симметрична относительно координатных осей (рис. 5.12), поэтому достаточно определить одну четвертую искомой площади по формуле (5.17):

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\,(2\varphi)=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$

Таким образом, $S=a^2$. В частности, при $a=2$ получим $S=4$.

Задачи

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y=x^2-6x+8,\ y=0.$ **2.** $x=4-y^2,\ x=0.$

3. $y=\ln x,\ x=e,\ y=0.$ **4.** $y^3=x^2,\ y=1.$

5. $y^2=2px,\ x^2=2py.$ **6.** $y=2-x^2,\ y^3=x^2.$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

7. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ (астроида).

8. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ (эллипс).

9. Одним витком спирали Архимеда $r=a\varphi$.

10. $x^2+y^4=y^2.$

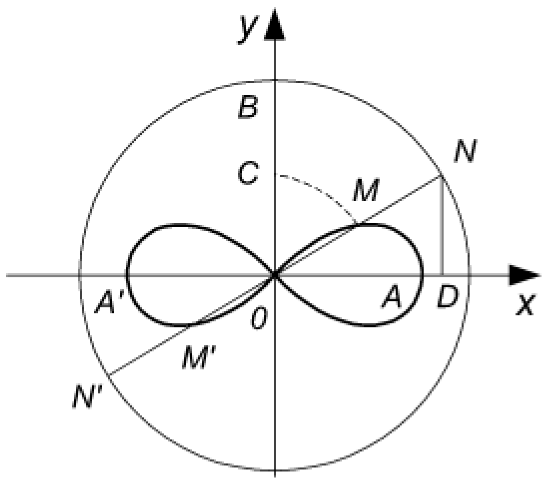


Рис. 5.12

Вычислить площади, ограниченные петлей кривой:

11. $y^2(2a-x)=x(x-a)^2$ (строфоида).

12. $x^3+y^3-3axy=0$ (декартов лист).

Ответы

1. $\frac{4}{3}$. **2.** $\frac{32}{3}$. **3.** 1. **4.** $\frac{4}{5}$. **5.** $\frac{4}{3}p^2$. **6.** $2\frac{2}{15}$. **7.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **8.** πab. **9.** $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$. **10.** $\frac{4}{3}$. **11.** $\frac{4-\pi}{2}a^2$. **12.** $\frac{3a^2}{2}$. Указание. Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, получим:

$$\rho=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi};\ S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Так как $\sin\varphi=\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\varphi$, то подынтегральное выражение сводится к виду $\frac{\operatorname{tg}^2\varphi d\,(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}$, откуда сразу находится первообразная: $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}$.

§ 5.3. Длина дуги кривой

Длина дуги кривой $y=f(x)$, где $a\le x\le b$, вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx\ \ \textit{или}\ \ l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (5.18)$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t)\ \ (t_1\le t\le t_2),$$

определяется формулой

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\ \ \textit{или}\ \ l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)}\,dt. \qquad (5.19)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \qquad (5.20)$$

Пример 1. Найти длину дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Чему равна длина астроиды при $a = 1$, $a = \frac{2}{3}$?

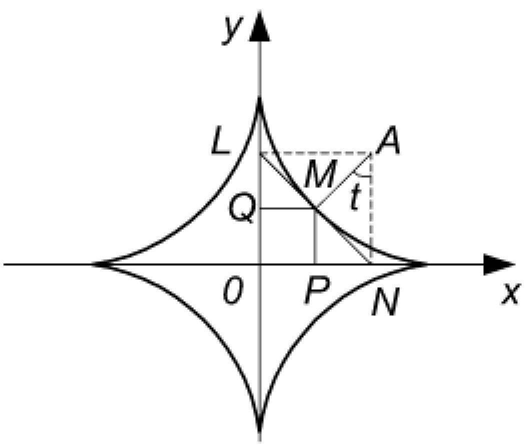


Рис. 5.13

Решение. Поскольку астроида симметрична относительно координатных осей (рис. 5.13), нам достаточно вычислить длину дуги AB и полученный результат умножить на 4.

Дифференцируя функцию $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ как неявную, получим

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y' = 0, \ y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Найдем выражение для подынтегральной функции, входящей в формулу (5.18). Имеем

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

По формуле (5.18) находим

$$\frac{1}{4} l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \left. \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_0^a = \left. \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \right|_0^a = \frac{3}{2} a, \ l = 6a.$$

При $a = 1$ получаем $l = 6$, при $a = \dfrac{2}{3}$ $l = 4$.

П р и м е р 2. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 5$.

Р е ш е н и е. Указанная дуга состоит из двух частей, симметричных относительно оси Ox (см. рис. 5.8).

Вычислим длину одной из них. Находя производную функции $y^2 = x^3$ и подставляя ее в формулу (5.18), получим

$$\frac{1}{2}l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4 + 9x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_0^5 (4 + 9x)^{\frac{1}{2}}\,d\,(4 + 9x) =$$

$$= \frac{1}{18}\left.\frac{(4 + 9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^5 = \frac{1}{27}(4 + 9x)\sqrt{4 + 9x}\,\Big|_0^5 = \frac{1}{27}(49\cdot 7 - 4\cdot 2) = \frac{335}{27},$$

$$l = \frac{670}{27} = 24\frac{22}{27}.$$

П р и м е р 3. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Р е ш е н и е. Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды (рис. 5.11), когда t меняется от 0 до 2π. Следовательно, в формуле (5.19) $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Найдем выражение для подынтегральной функции в формуле (5.19). Дифференцируя уравнения циклоиды, получим:

$$x'_t = a\,(1 - \cos t);\;\; y'_t = a\sin t.$$

Таким образом,

$$x_t'^2 + y_t'^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t =$$

$$= a^2(1 - 2\cos t + 1) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (5.19), находим

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4a\,(\cos\pi-\cos 0)=$$

$$=-4a\,(-1-1)=8a.$$

Итак, $l=8a$. Например, при $a=\dfrac{1}{2}$ $l=4$, при $a=1$ $l=8$.

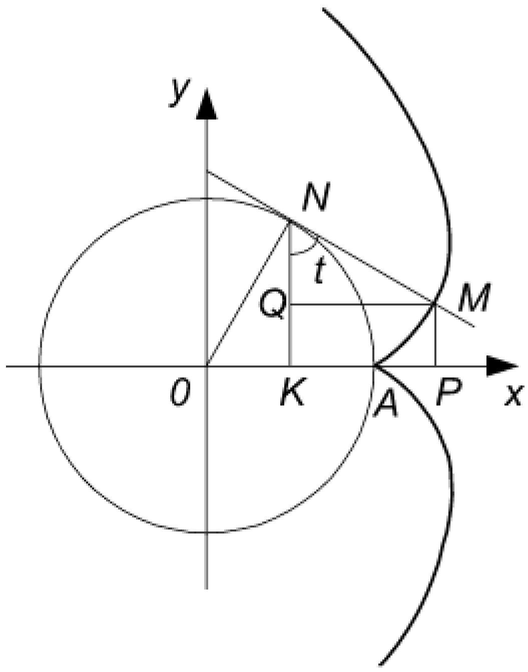


Рис. 5.14

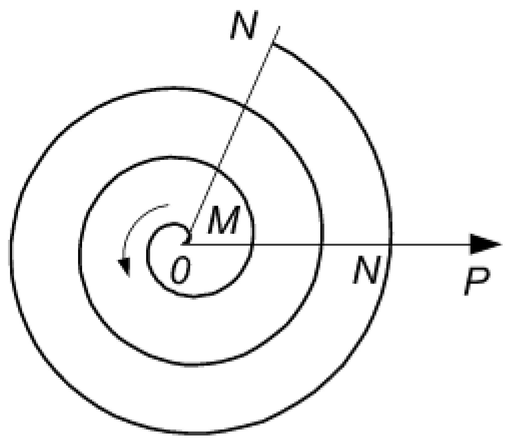


Рис. 5.15

Пример 4. Найти длину дуги эвольвенты (развертки) окружности: $x\ =a\,(t\sin t+\cos t)$, $y=a\,(\sin t-t\cos t)$ от точки $A\,(t=0)$ до произвольной точки $M\,(t)$.

Решение. По формуле (5.19) получаем

$$l=\int_0^{t}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=a\int_0^{t}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\,dt=a\int_0^{t}t\,dt=\frac{at^2}{2}.$$

Развертка окружности изображена на рис. 5.14.

Пример 5. Найти длину дуги спирали Архимеда $r=a\varphi$ от полюса O до любой точки M (см. рис. 5.15).

Решение. По формуле (5.20) получаем

$$l = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Так как

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+b} + b\ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)\right] + C,$$

то

$$l = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]\Bigg|_0^{\varphi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right].$$

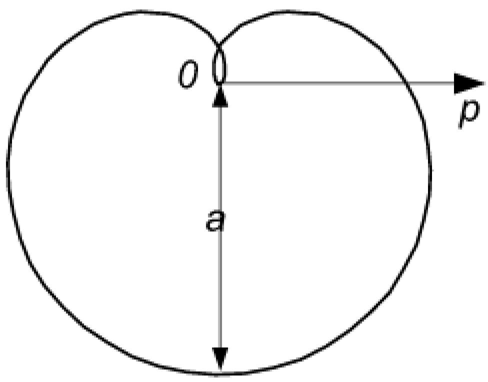


Рис. 5.16

Пример 6. Вычислить длину кривой $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

Решение. Вся кривая описывается точкой при изменении φ от 0 до 3π (рис. 5.16).

Так как $r' = a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$, то на основании формулы (5.20) находим

$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{3\pi} \frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi} d\varphi - \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\cos\frac{2\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\varphi\,\Bigg|_0^{3\pi} - \frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\,\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{a}{2}3\pi,\ \ l = \frac{3\pi a}{2}.$$

Задачи

Найти длину дуги кривой:

1. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$, отсеченной осью Ox.

2. $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

3. $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ между прямыми $x = \pm a$.

4. $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ от $y = 0$ до $y = 3$.

5. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Вычислить длину всей кривой:

6. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

7. $x = a\,(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a\,(2\sin t - \sin 2t)$.

8. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2 = a^2 - b^2)$.

9. $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

10. Найти длину петли кривой: $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$.

11. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$ до $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

12. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$ (рис. 5.17) находящейся внутри круга радиуса $r = a$.

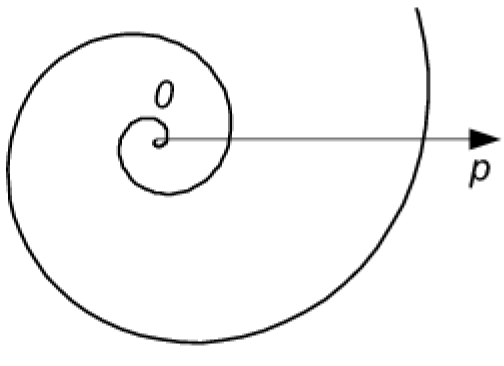


Рис. 5.17 Логарифмическая спираль $r = ae^{k\varphi}$

Ответы

1. $2\sqrt{3} + \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$. У к а з а н и е. $\int\sqrt{1 + x^2}\,dx$ вычисляется интегрированием по частям (см. пример 6, § 9.4).

2. $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$. У к а з а н и е. При вычислении интеграла $\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + x}{x}}$ применить подстановку $x = \mathrm{sh}^2\,t$.

3. $2a\,\mathrm{sh}1 \approx 2{,}35a$. **4.** $9\dfrac{1}{3}$. У к а з а н и е. Длина дуги кривой $x = \varphi(y)$ вычисляется по формуле $l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + x'^2}\,dy$. **5.** $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$. Кривая называется *логарифмической спиралью* (рис. 5.17), ее уравнение в полярных координатах: $r = e^{\varphi}$. **6.** $2\pi a$. **7.** $16a$. **8.** $\dfrac{4(a^3 - b^3)}{ab}$. **9.** $8a$. **10.** $4\sqrt{3}$. У к а з а н и е. Пределы интегрирования определяются из уравнения $t - \dfrac{1}{3}t^3 = 0$. **12.** $a\sqrt{2}$.

§ 5.4. Объем тела вращения

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 5.18), где AB – дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 dx \quad \text{или} \quad V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (5.21)$$

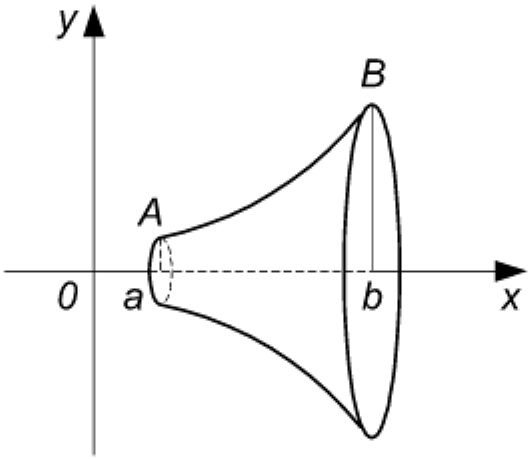


Рис. 5.18

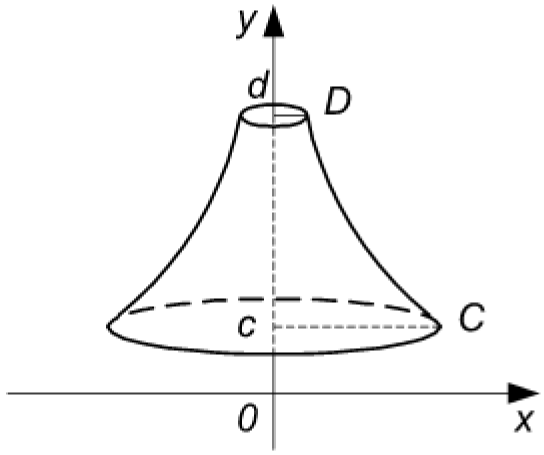


Рис. 5.19

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 5.19), где CD – дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \text{ или } V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\, dy. \quad (5.22)$$

Пример 1. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2x$, прямой $x = 3$ и осью Ox.

Решение. В соответствии с условием задачи определяем пределы интегрирования $a = 0$, $b = 3$ (рис. 5.20).

По формуле (5.21) находим

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = 9\pi.$$

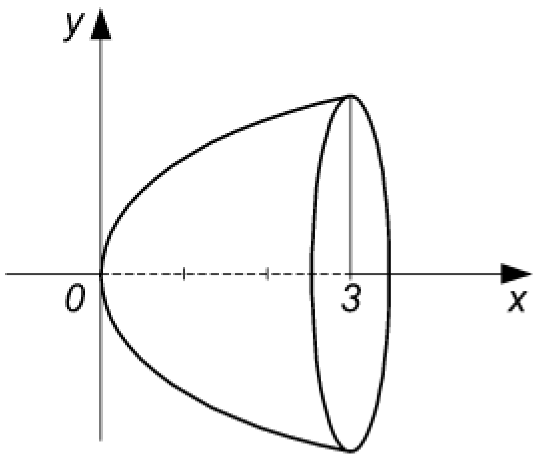


Рис. 5.20

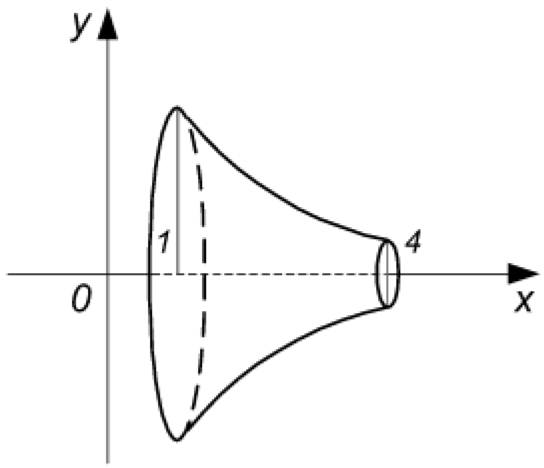


Рис. 5.21

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $x = 1$, $x = 4$ и осью Ox (рис. 5.21).

Решение. Из условия вытекает, что $a = 1$, $b = 4$. Из уравнения кривой $xy = 4$ находим $y = \dfrac{4}{x}$, откуда $y^2 = \dfrac{16}{x^2}$. Следовательно,

$$V_x = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x} \Bigg|_1^4 =$$

$$= -16\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 12\pi.$$

Пример 3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямыми $y = \pm 2b$.

Решение. Искомый объем определяем по формуле (5.22). Из условия, что пределы вытекает интегрирования будут: $c = -2b$, $d = 2b$. Выражение для x^2, входящее в эту формулу, определяется из уравнения гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2},\ x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.22), получаем

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_{-2b}^{2b} a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \int_{-2b}^{2b} dy + \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-2b}^{2b} y^2 dy =$$

$$= \pi a^2 y \Big|_{-2b}^{2b} + \pi \frac{a^2}{b^2}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2b}^{2b} = \pi a^2 [2b - (-2b)] +$$

$$+ \frac{\pi a^2}{3b^2}[(2b)^3 - (-2b)^3] = \pi a^2 4b + \frac{16}{3}\pi a^2 b = \frac{28}{3}\pi a^2 b,\ V = \frac{28}{3}\pi a^2 b.$$

Пример 4. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг оси Oy. (Тело это называется *эллипсоидом вращения*, рис. 5.22.)

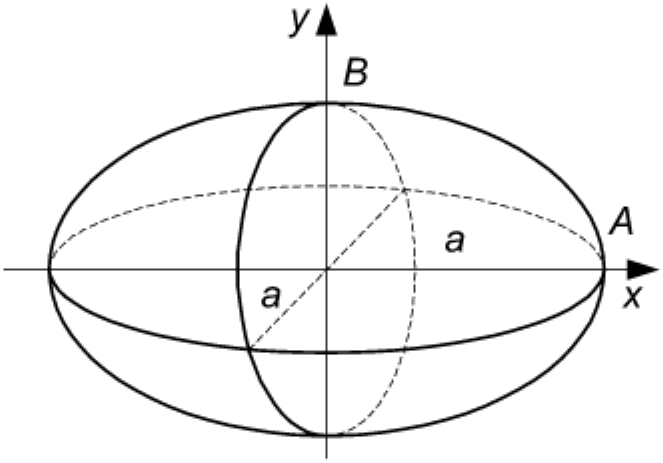


Рис. 5.22

Решение. Так как в данном случае $c = -b$, $d = b$,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

то по формуле (5.22) определяем

$$V_y = \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^{b} dy - \pi\frac{a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2 dy =$$

$$= \pi a^2 y \Big|_{-b}^{b} - \frac{\pi a^2}{3b^2} y^3 \Big|_{-b}^{b} = \pi a^2 [b - (-b)] - \frac{\pi a^2}{3b^2} [b^3 - (-b)^3] =$$

$$= 2\pi a^2 b - \frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Итак, $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$ При $a = b = R$ получаем $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ – объем шара.

Пример 5. Найти объем тела, полученного вращением одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

вокруг оси Ox.

Решение. Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды, когда t меняется от 0 до 2π (см. рис. 5.11), при этом x изменяется от 0 до $2\pi a$. Так как $x = a(t - \sin t)$, то

$$dx = a(t - \sin t)' dt = a(1 - \cos t)\, dt.$$

Следовательно,

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3\left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) - (1 - \sin^2 t) \cos t \right] dt =$$

$$= \pi a^3 \left[\int_0^{2\pi} \frac{5}{2} dt - 4 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos 2t d(2t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) \right] =$$

$$= \pi a^3 \left[\frac{5}{2} t \Big|_0^{2\pi} - 4 \sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} \right] = \pi a^3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi.$$

Таким образом,

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

Задачи

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1. $2y^2 = x^3,\ x = 4.$ **2.** $y^2 = 2px,\ x = p.$

3. $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0.$

4. $y^2 + x^4 = x^2.$ **5.** $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a},\ x = \pm a,\ y = 0.$

6. $x^2 - y^2 = a^2,\ x = \pm 2a.$ **7.** $x = a\cos t,\ y = b\sin t.$

8. $x = t^3,\ y = t^2,\ x = \pm 1.$

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

9. $y^3 = 4x^2,\ y = 2.$ **10.** $x^2 + y^4 = y^2.$

11. $x^2 + y^2 = a^2.$ **12.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

13. $y^2 = 4 - x.$ **14.** $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8.$

15. $x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(t - \cos t).$ **16.** $x = t,\ y = t^2,\ y = 4.$

Ответы

1. 32π. **2.** πp^3. **3.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **4.** $\dfrac{4\pi}{15}$. Указание. Пределы интегрирования $a = -1,\quad b = 1$ находятся из уравнения кривой $y^2 = x^2(1 - x^2)$. **5.** $\pi a^3\left(\dfrac{\mathrm{sh}^2\,x}{2} + 1\right)$. **6.** $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **7.** $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$. **8.** $\dfrac{6\pi}{7}$. **9.** π. **10.** $\dfrac{4\pi}{15}$. **11.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **12.** $\dfrac{32\pi a^3}{105}$. **13.** $\dfrac{512}{15}\pi$. **14.** $19{,}2\pi$. **15.** $6\pi^3 a^3$. **16.** 8π.

§ 5.5. Приложения определенных интегралов к решению простейших физических задач

1. Если точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина скорости ее $v = f(t)$ есть известная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[a, b]$, равен

$$S = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad (5.23)$$

2. Работа переменной силы $X = F(x)$, действующей в направле-

нии оси Ox, на отрезке $[a, b]$ определяется формулой

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (5.24)$$

3. Сила давления P жидкости удельного веса γ на вертикальную пластинку, погруженную в жидкость, вычисляется по формуле

$$P = \gamma \int_a^b xy dx, \qquad (5.25)$$

где $y = f(x)$ – известная функция, зависящая от формы пластинки.

Пример 1. Скорость точки $v = 0{,}1t^3$ *м/сек*. Найти путь s, пройденный точкой за промежуток времени $T = 10$ *сек*, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки за этот промежуток?

Решение. По формуле (5.23) получаем

$$s = \int_0^{10} 0{,}1t^3 dt = 0{,}1 \cdot \frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10} = 250\ м.$$

Следовательно,

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{T} = 25\ м/сек.$$

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 *м*, если сила 1 *н* растягивает ее на 0,01 *м*?

Решение. Согласно закону Гука, сила X *н*, растягивающая пружину на x *м*, равна $X = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Полагая $x = 0{,}01\ м$ и $X = 1\ н$, получим $k = 100$, следовательно, $X = kx = 100x$. Искомую работу определяем по формуле (5.24):

$$A = \int_0^{0{,}06} 100x dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18\ (дж).$$

Пример 3. Вычислить силу давления P воды на погруженную в нее вертикально пластинку, имеющую форму треугольника ABC с основанием $AC = b$ и высотой $BD = h$, предполагая, что вершина B этого треугольника лежит на свободной поверхности жидкости, а основание AC параллельно ей (рис. 5.23).

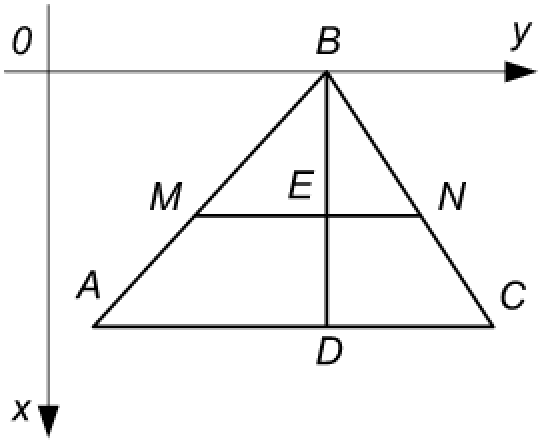


Рис. 5.23

Решение. Пусть MN – ширина пластинки на уровне $BE = x$. Из подобия треугольников MBN и ABC находим

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD} \text{ или } \frac{y}{b} = \frac{x}{h},$$

отсюда

$$y = \frac{bx}{h}.$$

На основании формулы (5.25) получаем

$$P = \gamma \int_0^h x\,\frac{bx}{h}\,dx = \frac{\gamma b}{h}\int_0^h x^2 dx = \frac{\gamma b}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{\gamma b}{h}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{\gamma b h^3}{3}.$$

Известно, что вес кубического метра воды равен 1000 *кг*. Следовательно, если b и h выражены в метрах, то $\gamma = 9{,}80665\cdot 10^3\,н$ и

$$P = 9{,}80665\cdot 10^3\,\frac{bh^2}{3}.$$

Например, если $b = 6\,м$ и $h = 2\,м$, то $P = 78453{,}2\,н.$

Задачи

1. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха определяется по формуле

$$v = v_0 - gt,$$

где t – протекшее время; g – ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t *сек* после броска?

2. Скорость движения точки $v = te^{-0{,}01t}$ $м/сек$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

3. Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $y = \dfrac{A}{a-bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость в любой момент времени t, если начальная скорость равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту времени $t = t_1$.

4. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H.

5. Какую работу нужно затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности земли радиуса R на высоту h?

6. Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости.

7. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса $R = 2\,м$, вращающийся с угловой скоростью $\omega = \frac{100}{3}\pi\ рад/сек$ вокруг своего диаметра (удельный вес железа $\gamma = 7{,}8\cdot 10^3\ кг/м^3$)?

8. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 80\,м$, нижнее основание $b = 50\,м$, а высота плотины $h = 20\,м$.

9. Найти силу давления жидкости, удельный вес которой γ, на вертикальный эллипс с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень h, причем большая ось $2a$ эллипса параллельна уровню жидкости $(h \ge b)$.

Ответы

1. $v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **2.** $s = 10^4\,м$. **3.** $v = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a-bt}\right)$. $h = \frac{A}{b^2}\left[bt_1 - (a - bt_1)\ln\frac{a}{a-bt_1}\right]$. **4.** $A = \frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. У к а з а н и е. Элементарная сила (сила тяжести) равна весу воды в объеме слоя толщиной dx, т. е. $dF = \pi\gamma R^2 dx$, где γ – вес единицы объема воды. Следовательно, элементарная работа силы $dA = \gamma\pi R^2 (H - x)\,dx$, где x – уровень воды. **5.** $A = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{2}}$. Сила, действующая на тело массы m, равна $F = k\frac{mM}{r^2}$, где r – расстояние от центра земли. Так как при $r = R$ имеем $F = mg$, то $kM = gR^2$. Искомая работа будет

$$A = \int\limits_R^{R+h} k\,\frac{mM}{r^2}\,dr = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{mgh}{1+\dfrac{h}{R}}.$$ **6.** $\frac{1}{4}\,MR^2\omega^2$. Р е ш е - н и е . Кинетическая энергия частицы диска $dk = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho r^2\omega^2}{2}\,d\sigma$, где σ – элемент площади; r – расстояние его от оси вращения; ρ – поверхностная плотность, $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Таким образом, $dk = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2}\,r^2 d\sigma$. Отсюда $k = \frac{M\omega^2}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}$. **7.** $k = \frac{M}{5}\,R^2\omega^2 = 22{,}5\cdot 10^8$ *дж*. У к а з а - н и е . Количество необходимой работы равно запасу кинетической энергии. **8.** $P = \frac{(a+2b)\,h^2}{b} \approx 117679{,}8\cdot 10^3$ *н*. **9.** $p = ab\gamma\pi h$.

§ 5.6. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами*.

Интегралы с бесконечными пределами. По определению имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\,[F\,(b) - F\,(a)\,], \qquad (5.26)$$

где

$$F'(x) = f(x).$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (5.26), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Если $\left|f(x)\right| \le \varphi\,(x)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi\,(x)\,dx$ сходится, то и интеграл (5.26) также сходится (*признак сравнения*).

Аналогично определяются:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx; \qquad (5.27)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (5.28)$$

Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a,b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то по определению имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx, \qquad (5.29)$$

где ε и η изменяются независимо друг от друга. В случае $c = b$ или $c = a$ получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (5.30)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \qquad (5.31)$$

Несобственный интеграл (5.29) называется *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, существуют или нет определяющие его пределы соответствующих определенных (собственных) интегралов.

Если существует непрерывная на $[a,b]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ при $x \ne c$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (5.32)$$

Пример 1. Показать, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ сходится.

Решение. По определению

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}.$$

Так как

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \,\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

то интеграл сходится.

П р и м е р 2. Показать, что несобственные интегралы $\int\limits_0^{+\infty} x dx$, $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$ расходятся.

Р е ш е н и е. Так как

$$\int_0^{+\infty} x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} b^2 = +\infty,$$

то интеграл расходится.

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos x)\Big|_0^b = -\lim_{b\to+\infty} (\cos b).$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty} \cos b$ не существует, то интеграл расходится.

П р и м е р 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \ (\alpha \neq -1).$$

Р е ш е н и е. По определению

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right).$$

Существование последнего предела зависит от величины α.

Если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right)=\frac{1}{\alpha-1},$$

интеграл сходится.

Если $\alpha < 1$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right)=+\infty,$$

интеграл расходится.

При $\alpha = 1$ интеграл также расходится, ибо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\,\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty.$$

Пример 4. С помощью признака сравнения показать, что интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ сходится.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}}=\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}.$$

Так как при $x\to\infty$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}<\frac{1}{x^2}$$

и $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ сходится (см. пример 3), то на основании признака сравнения заключаем, что интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

также сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Это интеграл от неограниченной функции (подынтегральная функция не определена в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, при $x \to -1$ и $x \to 1$ функция неограниченно возрастает).

По определению имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon}^{0} + \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin x \Big|_{0}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon \to 0} [\arcsin(1-\varepsilon)] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Пример 6. Исследовать, при каких значениях $\alpha > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$ $(b > a)$.

Решение. Если $\alpha \neq 1$, то интеграл

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} [(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}]$$

при $\varepsilon \to 0$ имеет пределом ∞ или конечное число $\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$ в зависимости от того, будет ли $\alpha > 1$ или $\alpha < 1$.

Если $\alpha = 1$, то

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-a} = [\ln(b-a) - \ln\varepsilon] \to \infty \quad (\text{при } \varepsilon \to 0).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при $\alpha < 1$.

Пример 7. Показать, что интеграл $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится.

Решение. Подынтегральная функция не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$ и непрерывна при $-1 \le x < 0$, $0 < x \le 8$.

Так как первообразная функция $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$ непрерывна в точке $x = 0$, то на основании формулы (5.32) получаем

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{8} = \frac{9}{2}.$$

Задачи

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. **2.** $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx$.

3. $\int_{0}^{\infty} \cos x dx$. **4.** $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$ $(b > a, \lambda > 0)$.

5. $\int_{-2}^{2} \frac{2x dx}{x^2 - 4}$. **6.** $\int_{0}^{1} \ln x dx$. **7.** $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

Ответы

1. π. **2.** 1. **3.** Расходится. **5.** Расходится. **6.** -1. **7.** Расходится.

Раздел IV.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Глава 6. Функции нескольких переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z. Функция двух переменных обозначается одним из символов:

$$z = f(x, y),\ z = \varphi(x, y),\ z = F(x, y),\ z = z(x, y) \text{ и т. п.}$$

Систему значений x и y называют точкой $M(x, y)$, а функцию двух переменных – функцией точки $z = f(M)$.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Значение функции $z = f(x, y)$ при $x = a$, $y = b$ обозначается через $f(a, b)$.

Переменная величина u называется функцией трех переменных величин x, y, z, если каждой тройке значений x, y, z соответствует единственное значение u. Обозначение:

$$u = f(x, y, z),\ u = \varphi(x, y, z) \text{ и т. п.}$$

Функцию $u = f(x, y, z)$ называют функцией точки $u = f(M)$, где $M(x, y, z)$.

Аналогично определяется функция n переменных $x, y, z, \dots, t$:

$$u = f(x, y, z, \dots, t).$$

Совокупность значений $x, y, z, \dots, t$ называется точкой $M(x, y, z, \dots, t)$ n-мерного пространства, а функция n переменных – функцией точки $u = f(M)$.

§ 6.1. Область определения функции двух и трех переменных. Частное и полное приращение

Совокупность всех точек, в которых определена функция нескольких переменных, называется *областью существования* или *областью* *определения* функции.

Для функции двух переменных областью определения является некоторая часть координатной плоскости, ограниченная одной или несколькими линиями (или вся плоскость), для функции трех переменных – часть пространства (или все пространство).

Частные приращения функции $z = f(x, y)$ определяются формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \tag{6.1}$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{6.2}$$

Полное приращение функции $z = f(x, y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\,. \tag{6.3}$$

Частные приращения функции $u = f(x, y, z)$ определяются формулами:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z); \tag{6.4}$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z); \tag{6.5}$$

$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \tag{6.6}$$

Полное приращение функции $u = f(x, y, z)$:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \tag{6.7}$$

Аналогично определяются частные приращения функции n переменных. Например,

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t). \tag{6.8}$$

Полное приращение функции n переменных:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots, t). \tag{6.9}$$

П р и м е р 1 . Найти область определения функции $z = Ax + By$

Р е ш е н и е . Функция двух переменных $z = Ax + By$ определена при всех x и y. Следовательно, ее областью существования будет вся плоскость Oxy. (Геометрическим изображением этой функции является плоскость в пространстве.)

П р и м е р 2 . Найти область определения функции $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Р е ш е н и е . Разрешив это уравнение относительно z, получим две функции

$$z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}\,.$$

Функции определены, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е.

$$9-x^2-y^2 \geq 0 \text{ или } x^2+y^2 \leq 9.$$

Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса $R=3$ с центром в начале координат. Таким образом, областью существования этих функций будет круг радиуса $R=3$. (Сами функции изображают сферу радиуса $R=3$ с центром в начале координат.)

Пример 3. Найти область определения функции $z=\sqrt{xy}$.

Решение. Данная функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $xy \geq 0$. Это возможно в двух случаях: 1) $x \geq 0$, $y \geq 0$; 2) $x \leq 0$, $y \leq 0$. Первому условию удовлетворяют координаты всех точек, лежащих в первой четверти и на координатных осях, второму – координаты точек, лежащих в третьей четверти и на координатных осях. Следовательно, область определения – совокупность точек, расположенных в первом и третьем координатных углах и на координатных осях.

Пример 4. Найти область существования функции

$$z=\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Решение. Функция определена, когда подкоренное выражение положительно (в отличие от предыдущего примера равенство нулю здесь исключается), т. е.

$$9-x^2-y^2>0 \text{ или } x^2+y^2<9.$$

Последнему неравенству удовлетворяют точки, лежащие внутри круга радиуса $R=3$ (граничные точки исключаются). Область определения функции – совокупность точек, лежащих внутри круга радиуса $R=3$ с центром в начале координат.

Пример 5. Определить приращения функции $z=xy$, когда x и y изменяются от точки $M_0(1,2)$ до точек: $M_1(1{,}1;2)$, $M_2(1;1{,}9)$, $M_3(1{,}1;2{,}2)$.

Решение.

1. При изменении x и y от точки $M_0(1,2)$ до точки $M_1(1{,}1;2)$ приращение получает только аргумент x, причем $\Delta x=1{,}1-1=0{,}1$. Частное приращение функции по x определится формулой (6.1):

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = xy + \Delta x y - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_x z = y\Delta x,\ \ \Delta_x z = 2\cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

2. Когда x и y меняются от точки $M_0(1, 2)$ до точки $M_2(1; 1{,}9)$ приращение получает лишь аргумент y, причем $\Delta y = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$.

Частное приращение функции по y вычисляется с помощью формулы (6.2):

$$\Delta_y z = x\,(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y - xy = x\Delta y;$$

$$\Delta_y z = x\Delta y,\ \ \Delta_y z = 1\,(-0{,}1) = -0{,}1.$$

3. В последнем случае (при изменении от M_0 до M_3) приращения получают оба аргумента, причем $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$; $\Delta y = 2{,}2 - 2 = 0{,}2$.

Полное приращение функции определяется формулой (6.3):

$$\Delta z = (x + \Delta x)\,(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy =$$

$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y,\ \ \Delta z = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}42.$$

Замечание. Из формул $\Delta_x z = y\Delta x$, $\Delta_y z = x\Delta y$, $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ видно, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример 6. Найти линии уровня функции $z = xy$.

Решение. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется геометрическое место точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение: уравнение линии уровня есть

$$f(x, y) = c.$$

В данном случае имеем $xy = c$. Линии уровня являются гиперболами при $c \neq 0$.

Пример 7. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. *Поверхностью уровня* функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется геометрическое место точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение, т. е.

$$f(x, y, z) = c.$$

Поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ даются уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = c,$$

которое определяет совокупность сфер радиусов $R=\sqrt{c}$ с центром в начале координат.

Пример 8. Дана функция $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x+2y}$. Доказать, что:

1) $f(1,2)= \;=\dfrac{1}{f(2,1)}$; 2) $f(c,c)=-f(-c,c)$.

Решение. Так как

$$f(1,2)=\frac{2\cdot 1+2}{1+2\cdot 2}=\frac{4}{5},\; f(2,1)=\frac{2\cdot 2+1}{2+2\cdot 1}=\frac{5}{4},$$

то

$$f(1,2)\cdot f(2,1)=1,\; f(1,2)=\frac{1}{f(2,1)}.$$

Так как

$$f(c,c)=\frac{2c+c}{c+2c}=\frac{3c}{3c}=1,\; f(-c,c)=\frac{2(-c)+c}{-c+2c}=$$

$$=\frac{-c}{c}=-1,$$

то

$$f(c,c)=-f(-c,c).$$

Задачи

Найти области существования функций:

1. $z=x^2+y^2$.

2. $z=\ln(y+x)$.

3. $z=\dfrac{y}{y-x}$.

4. $x^2+y^2+z^2-a^2=0$.

5. $z=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

6. $z=\sqrt{(x^2+y^2-4)(25-x^2-y^2)}$.

Построить линии уровня функций:

7. $z=x+y$.

8. $z=x^2-y^2$.

9. $z=\dfrac{y}{x^2}$.

10. $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

Найти поверхности уровня функций трех переменных:

11. $u=x+y+z$.

12. $u=x^2+y^2-z^2$.

13. Дан периметр $2p$ треугольника. Выразить площадь S треугольника как функцию двух его сторон x и y. Определить и построить область возможных значений x и y.

14. Определить объем V правильной четырехугольной пирамиды как функцию ее высоты x и бокового ребра y.

15. Дана функция $F(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{y^2 + x}$. Вычислить $F(0, 1)$, $F(0, -1)$, $F(1, 1)$, $F(2, -2)$, $F(a, a)$, $F(a, -a)$.

16. Доказать, что для функции $z = x^3 + xy^2 - 2y^3$ выполняется равенство $F(tx, ty) = t^3 F(x, y)$.

17. Определить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz для функции $z = x^2 - xy + y^2$. Вычислить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz, если x изменяется от 2 до 2,1, а y изменяется от 2 до 1,9.

Ответы

1. Вся плоскость Oxy. **2.** Полуплоскость, расположенная над прямой $x + y = 0$ $(x + y > 0)$. **3.** Две полуплоскости, определяемые прямой $y - x = 0$. **4.** Круг радиуса $R = a$, включая граничные точки. **5.** Круг радиуса $R = a$, исключая точки окружности $x^2 + y^2 = a^2$. **6.** Кольцо между окружностями радиусов $R_1 = 2$, $R_2 = 5$. **7.** $x + y = c$; прямые, параллельные прямой $x + y = 0$. **8.** $x^2 - y^2 = c$; равносторонние гиперболы при $c \neq 0$. **9.** $y = cx^2$; параболы. **10.** $c(x^2 + y^2) = 2x$; окружности. **11.** $x + y + z = c$. **12.** $x^2 + y^2 - z = c$. **13.** $S = \sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}$. Область существования функции: $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x + y > p$, т. е. множество точек внутри треугольника, ограниченного линиями: $x = p$, $y = p$, $x + y = p$. **14.** $V = \dfrac{2}{3}(y^2 - x^2)\,x$. **15.** 1; -1; 1; $\dfrac{1}{3}$; 1; $\dfrac{a^2 - a}{a^2 + a} = \dfrac{a - 1}{a + 1}$. **17.** $\Delta_x z = (2x - y + \Delta x)\,\Delta x = 0{,}21$; $\Delta_y z = (2y - x + \Delta y)\,\Delta y = -0{,}19$; $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z - \Delta x \Delta y = 0{,}03$.

§ 6.2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность

Число A называется *пределом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x, y)$, отстоящих от M_0 меньше чем на δ, выполняется неравенство

$$\left| f(x,y) - A \right| < \varepsilon. \tag{6.10}$$

Обозначения предела функции:

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = A; \tag{6.11}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A. \tag{6.12}$$

Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если выполняется равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0), \tag{6.13}$$

причем точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначить $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (6.13) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0), \tag{6.14}$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{6.15}$$

Принимая во внимание формулу (6.13), равенству (6.15) можно придать вид

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0, \tag{6.16}$$

где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $M_0(x_0, y_0)$, $M(x,y)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (6.16), то точка N_0 называется *точкой разрыва функции* $z = f(x,y)$.

Нарушение условий непрерывности функции $z = f(x,y)$ может происходить как в отдельных точках, так и в точках, образующих одну или несколько линий (линии разрыва).

П р и м е р 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$.

Р е ш е н и е. В точке $M(2, 0)$ функция $z = \dfrac{\sin xy}{y}$ не определена. Умножив и разделив данную функцию на $x \neq 0$, получим

$$\frac{\sin xy}{y} = \frac{x\sin xy}{xy} = x\,\frac{\sin xy}{xy}.$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x\cdot\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x\cdot \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2,$$

так как $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$

П р и м е р 2. Дана функция

$$f(x, y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} \quad (x^2 + y^2 \neq 0), \quad f(0, y) = 0, \quad f(x, 0) = 0,$$

найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Р е ш е н и е. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда при $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ получим $\rho =$
$= \sqrt{\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$. Составим разность $f(x, y) - 0$ и оценим ее:

$$|f(x, y) - 0| \leq |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon.$$

На основании формулы (6.10) заключаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$$

П р и м е р 3. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е . Данную функцию можно представить так:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2}\, x.$$

Поскольку

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \le \frac{1}{2}$$

(это можно получить из соотношения $(x - y)^2 \ge 0$: $x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$, $x^2 + y^2 \ge 2xy$, $\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$), то

$$\left| f(x, y) \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \cdot \left| x \right| \le \frac{1}{2} \left| x \right|.$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то при $\left| x \right| < \delta$ и $\delta = 2\varepsilon$ получим

$$\left| f(x, y) - 0 \right| \le \frac{1}{2} \left| x \right| < \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon,$$

т. е.

$$\left| f(x, y) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

П р и м е р 4 . Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е . Разделив числитель и знаменатель на x^2, получим

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x} \right)^2}{1 + \left(\dfrac{y}{x} \right)^2}.$$

Так как при $x \to 0$ и $y \to 0$ произвольным образом отношение $\dfrac{y}{x}$ не имеет предела, то данная функция также не имеет предела.

Если положить, что $x \to 0$ и $y \to 0$ вдоль прямой $y = kx$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Предел зависит от коэффициента k, для каждой прямой $y=kx$ он будет своим.

Пример 5. Дана функция $f(x,y,z)=\dfrac{xy+z}{xy-z}$ $(x^2+y^2\neq 0,$ $xy-z\neq 0)$. Показать, что при $x\to 0,\ y\to 0$ функция не имеет предела.

Решение. Предположим сначала, что $M(x,y,z)\to M_0(0,0,0)$ вдоль прямой, не лежащей в плоскости Oxy. Уравнения этой прямой можно написать так:

$$x=at,\ y=bt,\ z=ct.$$

На этой прямой данная функция является функцией одной переменной t, а именно:

$$f(x,y,z)=\varphi(t)=\frac{abt^2+ct}{abt^2-ct}=\frac{abt+c}{abt-c}.$$

Следовательно,

$$\lim_{M\to M_0}f(x,y,z)=\lim_{t\to 0}\varphi(t)=-1.$$

Пусть теперь $M\to M_0$, оставаясь в плоскости Oxy. Для любой точки этой плоскости $z=0$, поэтому

$$f(x,y,z)=\frac{xy}{xy}=1$$

и

$$\lim_{M\to M_0}f(x,y,z)=1.$$

Сравнивая полученные результаты, заключаем, что данная функция не имеет предела в начале координат, ибо предел не должен зависеть от способа стремления точки M к предельной точке M_0.

Пример 6. Показать, что функция $z=xy$ непрерывна в любой точке плоскости Oxy.

Решение. Прежде всего функция $z=xy$ определена при всех x и y, т. е. во всех точках плоскости Oxy. Полное приращение функции определяется формулой

$$\Delta z=x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, получаем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

т. е. функция $z = xy$ непрерывна в любой точке $M(x, y)$.

Пример 7. Найти точки разрыва функции

$$f(x, y) = \frac{3}{4 - x^2 - y^2}.$$

Решение. Функция не определена там, где знаменатель обращается в нуль, т. е. в точках, для которых $4 - x^2 - y^2 = 0$. Эта функция разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 4$. Следовательно, линией разрыва является окружность $x^2 + y^2 = 4$.

Задачи

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 4}} \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} (x \neq 0, y \neq 0)$.

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{y}{x + y}$.

Доказать непрерывность функций:

5. $z = x - y$.

6. $z = x^2 + y^2$.

7. $u = x + y + z$.

8. $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Найти точки разрыва функций:

9. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$.

10. $f(x, y) = \dfrac{y^2 x}{x^2 + y^4}$, $f(0, 0) = 0$.

11. $z = \dfrac{y^2 + x^2}{y^2 - x^2}$.

12. $z = \dfrac{6}{x^2 - y^2 - 2}$.

13. $u = \dfrac{x + y + z}{z - xy}$.

14. $u = \dfrac{4}{z^2 - x^2 - y^2}$.

Ответы

1. 4. **2.** 0. **3.** Не существует. **4.** Не существует. **9.** $O(0, 0)$. **10.** $O(0, 0)$. **11.** Прямые $y = \pm x$. **12.** Гипербола $x^2 - y^2 = 2$. **13.** Гиперболический параболоид $z = xy$. **14.** Конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Глава 7. Производные и дифференциалы

§ 7.1. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{(частная производная по } x\text{)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad \text{(частная производная по } y\text{)}.$$

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Разность между полным приращением Δz и полным дифференциалом dz есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, т. е.

$$\Delta z - dz = \varepsilon \cdot \rho, \ \varepsilon \to 0, \text{ когда } \rho \to 0, \tag{7.1}$$

где

$$dz = A(x, y)\,\Delta x + B(x, y)\,\Delta y. \tag{7.2}$$

Функция, обладающая непрерывными частными производными, заведомо имеет полный дифференциал. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{7.3}$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется *дифференцируемой.*

Из формулы (7.1) следует, что

$$\Delta z \approx dz \tag{7.4}$$

или

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{7.5}$$

Формулу (7.5) можно переписать так:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{7.6}$$

Полный дифференциал функции трех переменных вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{7.7}$$

Пример 1. Найти частные производные функции $z = x^2 + 2xy + y^2$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию x, получаем частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (y^2)'_x = 2x + 2y + 0 = 2\,(x+y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y, находим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (y^2)'_y = 0 + 2x + 2y = 2\,(x+y).$$

Пример 2. Найти частные производные функции

$$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение. Пользуясь правилами нахождения частных производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x = \frac{x'(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2)'_x\,x}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-2xx}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_y=\frac{x'_y(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)'_y x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_z=\frac{x'_z(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)'_z x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции

$$u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

то по формуле (7.3) находим

$$du=\frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

Пример 4. Найти полный дифференциал функции

$$u=x^2+y^2+z^2.$$

Решение. Определяя частные производные функции

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=2z$$

и подставляя их в формулу (7.7), находим

$$du=2xdx+2ydy+2zdz.$$

Пример 5. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a=8\,м$, $b=6\,м$, $c=3\,м$, когда его длина и ширина увеличивается соответственно на $10\,см$ и $5\,см$, а высота уменьшится на $15\,см$.

Р е ш е н и е . Объем параллелепипеда выражается формулой $V = xyz$, где x, y, z, – его измерения. Приращение объема можно приближенно подсчитать по формуле

$$\Delta V \approx dV, \text{ где } dV = yzdx + xzdy + xydz.$$

Так как по условию $x = 8$, $y = 6$, $z = 3$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}05$, $dz = -0{,}15$, то

$$dV = 6 \cdot 3 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 3 \cdot 0{,}05 + 8 \cdot 6 \cdot (-0{,}15) = 1{,}8 + 1{,}2 - 7{,}2 = -4{,}2.$$

Итак, объем уменьшится на $4{,}2\,м^3$.

П р и м е р 6 . Вычислить приближенно $1{,}02^{3,01}$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число можно считать приращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = \ = 0{,}01$.

Первоначальное значение функции $z = 1^3 = 1$. На основании формул (7.4) и (7.5) получаем

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y = 3 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

По формуле (7.6) находим

$$1{,}02^{3,01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$$

Задачи

Найти полные дифференциалы функций:

1. $z = \sin^2 y + \cos^2 x$. **2.** $z = \dfrac{x+y}{xy}$.

3. $r = e^{\frac{t}{s}}$. **4.** $u = r^2 \cos^2 \varphi$.

5. $u = x^2 yz$. **6.** $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Вычислить значения полных дифференциалов функций:

7. $z = \dfrac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.

8. $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}1$.

Подсчитать приближенно изменения функций:

9. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, x изменяется от 2 до 2,1; y – от 3 до 2,5.

10. $\varphi = \arcsin\dfrac{y}{x}$, x изменяется от 5 до 4,5; y – от 3 до 3,3.

Вычислить приближенно:

11. $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$. **12.** $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

13. Как изменится диагональ l прямоугольника со сторонами $a = 10\,см$, $b = 24\,см$, если сторону a удлинить на $4\,мм$, а сторону b укоротить на $1\,мм$? Найти приближенную величину изменения и сравнить с точной.

Ответы

1. $dz = \sin 2y dy - \sin 2x dx$. **2.** $dz = -\left(\dfrac{dx}{x^2}+\dfrac{dy}{y^2}\right)$. **3.** $dr = e^{\frac{t}{s}}\left(\dfrac{1}{s}dt - \right.$ $\left.-\dfrac{t}{s^2}ds\right)$. **4.** $du = 2r(\cos 2\varphi dr - r\sin 2\varphi d\varphi)$. **5.** $du = x(2zydx + xzdy +$ $+ xydz)$. **6.** $du = \dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}(xdx + ydy + zdz)$. **7.** 0,075. **8.** $-0{,}1e^2 \approx$ $\approx -0{,}739$. **9.** $-0{,}1$. **10.** 0,15. **11.** 1,00. **12.** 4,998. **13.** $dl = 0{,}062\,см$; $\Delta l = 0{,}065\,см$.

§ 7.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Употребляются и другие обозначения:

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{7.9}$$

Если смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{7.10}$$

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка. Например, для функции $z = f(x, y)$ частные производные третьего порядка определяются формулами:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Частные производные третьего и высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Дифференциалы второго, третьего и более высоких порядков функции $z = f(x, y)$ определяются формулами $d^2 z = d\,(dz)$, $d^3 z = d\,(d^2 z)$ и т. д. Они выражаются через частные производные следующим образом:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2; \tag{7.11}$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\, dx^2 dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\, dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\, dy^3. \tag{7.12}$$

Вообще справедлива символическая формула

$$d^n z = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z, \tag{7.13}$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = (x^2 + y^2)^2$.

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)'_x = 2\,(x^2 + y^2)\,2x = 4x^3 + 4xy^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\,(x^2+y^2)\,(x^2+y^2)'_y = 2\,(x^2+y^2)\,2y = 4x^2y + 4y^3.$$

Дифференцируя каждую из полученных функций по x и по y, получим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3+4xy^2) = (4x^3+4xy^2)'_x = 12x^2+4y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4x^2y+4y^3)'_y = 4x^2+12y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (4x^3+4xy^2)'_y = 8xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4x^2y+4y^3)'_x = 8xy.$$

Как и следовало ожидать,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Пример 2. Дана функция $u = x^2y^3$. Найти ее частные производные третьего порядка.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$u'_x = 2xy^3,\ u'_y = 3x^2y^2,\ u''_{xx} = 2y^3,\ u''_{xy} = 6xy^2,$$

$$u''_{yx} = 6xy^2,\ u''_{yy} = 6x^2y,\ u'''_{xxx} = 0,\ u'''_{xyx} = 6y^2,\ u'''_{yxx} = 6y^2,$$

$$u'''_{yyx} = 12xy,\ u'''_{yyy} = 6x^2,\ u'''_{xxy} = 6y^2,\ u'''_{xyy} = 12xy,\ \ u'''_{yxy} = 12xy.$$

Пример 3. Доказать, что функция

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

Решение. Найдем сначала частные производные данной функции $u=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-y\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-z\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Сложив вторые производные, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Пример 4. Найти дифференциалы второго и третьего порядка функции $u=x^2y^3$.

Решение. Принимая во внимание результаты примера 2, по формулам (7.11) и (7.12) находим:

$$d^2z=2y^3dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2;$$

$$d^3z=3\cdot 6y^2dx^2dy+3\cdot 12xydxdy^2+6x^2dy^3.$$

Задачи

Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **2.** $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. **3.** $u=xz^2+\sin\dfrac{x}{y}$.

4. Дана функция $y=f(x+at)+\varphi\,(x-at)$, где $a=\text{const}$, а $f(w)$ и

$\varphi(w)$ – две произвольные функции, имеющие первую и вторую производные. Показать, что y удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

5. Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $u=x^4y^2$.

Ответы

1. $z''_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\quad z''_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

3. $u''_{xx}=-\left(\dfrac{1}{y}\right)^2\sin\dfrac{x}{y}$; $\quad u''_{xy}=-\dfrac{1}{y^2}\left(\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right)$; $\quad u''_{xz}=2z$; $\quad u''_{yy}=$ $=\dfrac{2x}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{x^2}{y^4}\sin\dfrac{x}{y}$; $\;u''_{yz}=0$; $\;u''_{zz}=2x$.

§ 7.3. Дифференцирование неявных функций

Функция n переменных $x, y, z, \ldots, t, u$ называется *неявной*, если она задана уравнением

$$F(x, y, z, \ldots, t, u)=0, \tag{7.14}$$

не разрешенным относительно u.

Если функция $F(x, y, z, \ldots, t, u)=0$ и ее частные производные $F'_x, F'_y, F'_z, \ldots, F'_t, F'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0, u_0)$ и в ее окрестности и если $F(M_0)=0$, но $F'_u(M_0)\neq 0$, то уравнение $F(x, y, z, \ldots, t, u)=0$ вблизи точки $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0, u_0)$ и в самой точке определяет u как непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, z, \ldots, t$.

При соблюдении указанных условий производные неявной функции u, заданной уравнением $F(x, y, z, \ldots, t, u)=0$, находятся по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_u},\ \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{F'_z}{F'_u},\ldots,\ \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{F'_t}{F'_u}. \tag{7.15}$$

В частности, если y – неявная функция одной переменной x, заданная уравнением $F(x, y)=0$, то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = -\frac{F_x'}{F_y'}; \tag{7.16}$$

для функции двух переменных, определяемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}. \tag{7.17}$$

П р и м е р 1. Найти первую и вторую производную неявной функции

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

Р е ш е н и е. В данном случае $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Производная ее определяется формулой (7.16). Находим частные производные этой функции по x и по y:

$$F_x' = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_x' =$$

$$= \frac{1\cdot 2x}{2\,(x^2 + y^2)} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2};$$

$$F_y' = \frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\cdot 2y - \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right):\left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x+y}{x-y}.$$

Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(x+y)'(x-y) - (x-y)'(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(1+y')\,(x-y) - (1-y')\,(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$=\frac{\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)(x-y)-\left(1-\frac{x+y}{x-y}\right)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2\,(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

П р и м е р 2. Найти полный дифференциал функции $z=z\,(x,y)$, заданной уравнением $e^{xyz}-\operatorname{arctg}\frac{xy}{z}=0.$

Р е ш е н и е. В данном случае $F\,(x,y,z)=e^{xyz}-\operatorname{arctg}\frac{xy}{z}$. Находим сначала частные производные функции $F\,(x,y,z)$:

$$F'_x=\frac{\partial F}{\partial x}=yze^{xyz}-\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}}\cdot\frac{y}{z}=yz\left(e^{xyz}-\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right);$$

$$F'_y=\frac{\partial F}{\partial y}=xze^{xyz}-\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}}\cdot\frac{x}{z}=xz\left(e^{xyz}-\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right);$$

$$F'_z=\frac{\partial F}{\partial z}=xye^{xyz}-\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}}\cdot\left(\frac{-xy}{z^2}\right)=xy\left(e^{xyz}+\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right).$$

По формулам (7.17) получаем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\left(e^{xyz}-\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)}{xy\left(e^{xyz}+\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)}=\frac{z\,[1-(x^2y^2+z^2)\,e^{xyz}]}{x\,[1+(x^2y^2+z^2)\,e^{xyz}]};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz\left(e^{xyz}-\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)}{xy\left(e^{xyz}+\frac{1}{x^2y^2+z^2}\right)}=\frac{z\,[1-(x^2y^2+z^2)\,e^{xyz}]}{y\,[1+(x^2y^2+z^2)\,e^{xyz}]}.$$

Следовательно,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{1-(x^2y^2+z^2)\,e^{xyz}}{1+(x^2y^2+z^2)\,e^{xyz}}\cdot\frac{z}{xy}\,(ydx+xdy).$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = z\,(x, y)$, заданной уравнением $z^2 - 2xy = c$.

Решение. Возьмем дифференциалы обеих частей данного уравнения:

$$d\,(z^2 - 2xy) = dc,\;\; d\,(z^2) - d\,(2xy) = dc,$$

$$2zdz - 2\,(xdy + ydx) = 0,\;\; zdz - (xdy + ydx) = 0,$$

$$zdz = xdy + ydx,\;\; dz = \frac{y}{z}\,dx + \frac{x}{z}\,dy.$$

Задачи

Найти производные неявных функций:

1. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$

2. $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$

Найти частные производные неявных функций:

3. $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 60 = 0.$

4. $\dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{z}{c} = 0.$

Найти полные дифференциалы функций $z = z\,(x, y)$, заданных уравнениями:

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0.$

6. $z - ye^{\frac{x}{z}} = 0.$

Ответы

1. $y' = -\dfrac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^x \cos y - e^y \cos x}$. **2.** $y' = -\dfrac{2x^3 + 2xy^2 - a^2x}{2x^2y + 2y^3 + a^2y}$. **3.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3x}{5z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{4y}{5z}$. **4.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{cy}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{cx}{x^2 + y^2}$. **5.** $dz = -\dfrac{x}{z}\,dx + \dfrac{1-y}{z}\,dy.$

6. $dz = \dfrac{ze^{\frac{x}{z}}\,(zdy + ydx)}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}.$

§ 7.4. Дифференцирование сложных функций

Если

$$u = F\,(v_1, v_2, \dots, v_n), \tag{7.18}$$

где

$$v_1 = f_1(x, y, z, \dots, t),\ v_2 = f_2(x, y, z, \dots, t), \dots,$$

$$v_n = f_n(x, y, z, \dots, t), \tag{7.19}$$

то функция u называется *сложной* функцией независимых переменных $x, y, z, \dots, t$. Переменные $v_1, v_2, \dots, v_n$ называются *промежуточными аргументами.*

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по данной независимой переменной:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x};\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial y};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

В частности, если все промежуточные аргументы являются функциями одной независимой переменной x, то функция (7.18) будет сложной функцией от x. Производная этой функции называется *полной* производной и находится по формуле

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{dv_1}{dx} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{dv_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{dv_n}{dx}. \tag{7.21}$$

П р и м е р 1. Найти $\dfrac{du}{dx}$, если $u = e^{z-2y}$, где $z = \sin x$, $y = x^2$.

Р е ш е н и е. Функция $u = e^{z-2y}$ зависит от двух промежуточных аргументов $v_1 = y$, $v_2 = z$. По формуле (7.21), которая в данном случае принимает вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx},$$

получаем

$$\frac{du}{dx} = e^{z-2y}(-2)\,2x + e^{z-2y}\cos x = e^{z-2y}(\cos x - 4x) =$$

$$= e^{\sin x - 2x^2}(\cos x - 4x),$$

так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{z-2y}(-2),\ \frac{\partial u}{\partial z} = e^{z-2y},\ \frac{dy}{dx} = 2x,\ \frac{dz}{dx} = \cos x.$$

Замечание. Тот же результат можно получить и другим путем, выразив u как явную функцию x

$$u = e^{\sin x - 2x^2}$$

и продифференцировав последнюю:

$$\frac{du}{dx} = (e^{\sin x - 2x^2})'(\sin x - 2x^2)' = e^{\sin x - 2x^2}(\cos x - 4x).$$

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$u = x^2 \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Функцию u двух переменных x и y можно представить следующей формулой:

$$u \equiv F(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_1 v_2 - v_3 v_4, \tag{A}$$

где

$$v_1 = x^2,\ v_2 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ v_3 = y^2,\ v_4 = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}. \tag{B}$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y)$ определяется формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ с помощью формул (7.20), которые в данном случае примут вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial v_3}\cdot\frac{\partial v_3}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial v_4}\cdot\frac{\partial v_4}{\partial x};\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial v_3}\cdot\frac{\partial v_3}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial v_4}\cdot\frac{\partial v_4}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad (C)$$

Из формул (В) получаем:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial v_1}{\partial y}=0;\ \frac{\partial v_2}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial v_3}{\partial x}=0;\ \frac{\partial v_3}{\partial y}=2y;$$

$$\frac{\partial v_4}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial v_4}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=$$

$$=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial u}{\partial v_1}=v_2,\ \frac{\partial u}{\partial v_2}=v_1,\ \frac{\partial u}{\partial v_3}=-v_4,\ \frac{\partial u}{\partial v_4}=-v_3$$

и подставляя полученные выражения в формулы (С), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v_2\cdot 2x+v_1\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}+(-v_4)\cdot 0+(-v_3)\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=$$

$$=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\frac{y^2y}{x^2+y^2}=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{y\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=$$

$$=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=v_2\cdot 0+v_1\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+(-v_4)\cdot 2y+(-v_3)\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=$$

$$= \frac{x^2 x}{x^2 + y^2} - 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{x\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} =$$

$$= x - 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}.$$

Следовательно,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \left(2x\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - y\right)dx +$$

$$+\left(x - 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\right)dy.$$

П р и м е р 3. Дана дифференцируемая функция $u = f(x, y)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Показать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Р е ш е н и е. Применяем формулы (7.20), которые в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}; \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

По этим формулам получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}\,r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\,r\cos\varphi$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi; \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi.$$

Возводя в квадрат обе части двух последних равенств и почленно складывая полученные результаты, находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = t$, $y = t^2$.

2. Найти $\dfrac{du}{dx}$, если $u = e^{z^2 - y^2}$, где $z = \cos x$, $y = \sin x$.

3. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, если $u = v^3 w^3 + \dfrac{w^2}{v^2}$, где $v = \cos y$, $w = \sin x$.

4. Найти полный дифференциал функции

$$u = \frac{\sin v}{\cos w},\ \text{где}\ v = xy,\ w = \frac{x}{y}.$$

5. Показать, что если функция $u = f(x + ay)$ дифференцируемая, то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a\,\frac{\partial u}{\partial x}.$$

6. Показать, что функция $u = f(v, w)$, где $v = x + at$, $w = y + bt$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ответы

1. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2(1 + 2t^2)}{t(1 + t^2)}$. **2.** $\dfrac{du}{dx} = -2e^{\cos 2x}\sin 2x$. **3.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} =$ $= 3\sin^2 x\cos x\cos^3 y + 2\,\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2\sin^2 x\sin y}{\cos^3 y} -$ $- 3\sin^3 x\sin y\cos^2 y$. **4.** $du = \dfrac{\cos xy}{\cos\dfrac{x}{y}}(ydx + xdy) + \dfrac{\sin xy\sin\dfrac{x}{y}}{y^2\cos^2\dfrac{x}{y}}(ydx - xdy)$.

Глава 8.
Применения частных производных

§ 8.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Координаты направляющего вектора нормали $\overline{m} = \{a, b, c\}$ к поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \tag{8.1}$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пропорциональны значениям соответствующих частных производных функции (8.1), вычисленных в этой точке:

$$a = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \; b = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \; c = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0, \tag{8.2}$$

где

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = F'_x(x_0, y_0, z_0), \; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = F'_y(x_0, y_0, z_0), \; \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Координаты вектора $\overline{m}$ входят в уравнение касательной плоскости к поверхности (8.1) в точке M:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0 \tag{8.3}$$

и в уравнения нормали к данной поверхности в той же точке:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}. \tag{8.4}$$

Для поверхности

$$z = f(x, y) \tag{8.5}$$

уравнения касательной плоскости и нормали в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принимают вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \tag{8.6}$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{8.7}$$

Пример 1. Найти направляющий вектор нормали к эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке $M_0(1, -1, 1)$.

Решение. Прежде всего точка M_0 лежит на эллипсоиде, в чем можно убедиться, подставив ее координаты в данное уравнение. Этому уравнению можно придать вид

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0.$$

Сравнивая данное уравнение с уравнением (8.1), заключаем, что

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6. \tag{A}$$

Находим частные производные функции (A):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 6z$$

и вычисляем их значения в точке $M(1, -1, 1)$, т. е. при $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 2, \ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = -4, \ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 6.$$

Следовательно, получен направляющий вектор нормали

$$\overline{m} = \{2, -4, 6\}.$$

Замечание. В качестве направляющего вектора нормали можно взять вектор $\overline{m'} = \{1, -2, 3\}$ или любой другой вектор, коллинеарный вектору $\overline{m} = \{2, -4, 6\}$.

Пример 2. Составить уравнения нормали и касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ в точке $M_0(3, -1, 5)$.

Решение. Найдем частные производные функции $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 6.$$

Вычислив их значения в точке $M_0(3, -1, 5)$, получим направляющий вектор нормали $\overline{m} = \{4, 2, 4\}$.

В соответствии с формулой (8.3) составляем уравнение касательной плоскости

$$4(x-3) + 2(y+1) + 4(z-5) = 0$$

или

$$2x + y + 2z - 15 = 0.$$

На основании формулы (8.4) находим уравнения нормали

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{2}.$$

Пример 3. В какой точке касательная плоскость к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + 4y^2$ параллельна плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$? Написать уравнения нормали и касательной плоскости в этой точке.

Решение. В данном случае поверхность задана уравнением, разрешенным относительно z, т. е. уравнением вида (8.5), где $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$.

Уравнение касательной плоскости в произвольной точке M в соответствии с формулой (8.6) имеет вид

$$z - z_0 = 4x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0)$$

или

$$4x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Эта плоскость по условию задачи должна быть параллельна плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$. Так как плоскости параллельны, то их коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны:

$$\frac{4x_0}{8} = \frac{8y_0}{-32} = \frac{-1}{-2},$$

откуда

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}y_0 = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$x_0 = 1,\ y_0 = -2.$$

Из уравнения $z = 2x^2 + 4y^2$ находим $z_0 = 18$. Следовательно, $M_0(1, -2, 18)$ – искомая точка.

Уравнение (A) при полученных значениях x_0, y_0, z_0 принимает вид

$$4(x-1) - 16(y+2) - (z-18) = 0$$

или

$$4x - 16y - z - 18 = 0.$$

В соответствии с формулой (8.7) составляем уравнения нормали в точке $M_0(1, -2, 18)$:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-16} = \frac{z-18}{-1}.$$

Задачи

Составить уравнения нормали и касательной плоскости к каждой из следующих поверхностей в указанной точке:

1. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$, $M_0(1, -1, 1)$.

2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $M_0(3, 4, 5)$.

3. $z = 4x^2 - 9y^2$, $M_0(1, 1, -5)$.

4. $x = 2y^2 + 3z^2$, $M_0(5, 1, 1)$.

5. В каких точках поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 2z + 12 = 0$$

касательные плоскости к ней параллельны координатным плоскостям?

6. К поверхности $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ провести касательную плоскость, отсекающую на осях координат равные отрезки.

Ответы

1. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}$; $2x - 3y + 4z - 9 = 0$. **2.** $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5}$; $3x + 4y - 5z = 0$. **3.** $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{-18} = \frac{z+5}{-1}$; $8x - 18y - z + 5 = 0$. **4.** $\frac{x-5}{-1} =$

$= \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{6}$; $x - 4y - 6z + 5 = 0$. **5.** В точках $M_1(-7, 2, -1)$, $M_2(-1, 2, -1)$ касательные плоскости параллельны *Oyz*; в точках $M_3(-4, 5, -1)$, $M_4(-4, -1, -1)$ плоскости параллельны *Oxz*; в точках $M_5(-4, 2, 2)$, $M_6(-4, 2, -4)$ плоскости параллельны *Oxy*. **6.** $x + y + z - 3 = 0$; $x + y + z + 3 = 0$.

§ 8.2. Экстремум функции нескольких переменных

Максимумом (минимумом) функции $z = f(x, y)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых ею в точках, достаточно близких к точке $M_0(x_0, y_0)$ и отличных от нее.

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*.

Аналогично определяется экстремум функции трех и более переменных.

Экстремум функции нескольких переменных может достигаться лишь в точках, лежащих внутри области ее определения, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль. Такие точки называются *критическими*. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ критические точки находятся из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Условия (8.8) являются *необходимыми условиями* экстремума. *Достаточные условия* экстремума для функции $z = f(x, y)$ выражаются с помощью определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2, \tag{8.9}$$

где

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0), \tag{8.10}$$

а именно:

1) если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) – точка максимума, при $A > 0$ (или $C > 0$) – точка минимума,

2) если $\Delta < 0,$ то в точке M_0 нет экстремума.

Если $\Delta = 0,$ то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy.$$

Решение. Находим частные производные первого и второго порядка:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 9y; \; f'_y(x, y) = 3y^2 + 9x;$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x; \; f''_{xy}(x, y) = 9; \; f''_{yy}(x, y) = 6y.$$

Обращая в нуль первые производные, получим систему уравнений для определения критических точек:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 9y = 0, \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} x^2 + 3y = 0, \\ y^2 + 3x = 0 \end{aligned}\right\}$$

Определяя y из первого уравнения и подставляя его выражение

$$y = -\frac{1}{3}x^2 \tag{A}$$

во второе уравнение, получим

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 3x = 0, \; x^4 + 27x = 0$$

или

$$x(x^3 + 27) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \; x_2 = -3.$$

(Комплексные корни уравнения $x^3 + 27 = 0$ или $(x+3)(x^2 - 3x + {}$ ${}+ 9) = 0$ не принимаем во внимание.)

Находим значения y, соответствующие значениям $x_1 = 0,$ $x_2 = -3.$ Из уравнения (A) имеем $y_1 = 0,$ $y_2 = -3.$ Получены две критические точки $M_1(0, 0),$ $M_2(-3, -3).$

Вычислим значения частных производных второго порядка в этих точках:

$$A_1 = f''_{xx}(0,0) = 0,\ B_1 = f''_{xy}(0,0) = 9,\ C_1 = f''_{yy}(0,0) = 0,$$

$$A_2 = f''_{xx}(-3,-3) = -18,\ B_2 = f''_{xy}(-3,-3) = 9,$$

$$C_2 = f''_{yy}(-3,-3) = -18.$$

Находим определитель (8.9):

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0\cdot 0 - 9^2 = -81;$$

$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-18)(-18) - 9^2 = 243.$$

В силу достаточных условий заключаем, что в точке M_1 нет экстремума, так как $\Delta_1 < 0$, в точке M_2 функция имеет максимум, ибо $\Delta_2 > 0$ и $A_2 < 0$, причем

$$\max f(x,y) = f(-3,-3) = 27.$$

Пример 2. Найти экстремум функции

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138y + 290.$$

Решение. Находим первые и вторые частные производные:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57;$$

$$f'_y(x,y) = 6xy - 18x - 36y + 138;$$

$$f''_{xx}(x,y) = 6x - 36;\ f''_{xy}(x,y) = 6y - 18;\ f''_{yy}(x,y) = 6x - 36.$$

Приравнивая нулю первые производные, получаем систему уравнений для определения критических точек:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57 = 0;\\ 6xy - 18x - 36y + 138 = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 12x - 6y + 19 = 0;\\ 2xy - 6x - 12y + 46 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим уравнение

$$x^2 + y^2 + 2xy - 18x - 18y + 65 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(x + y)^2 - 18\,(x + y) + 65 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $(x + y)$, решая его, находим

$$x + y = 13,\ \ x + y = 5. \tag{B}$$

Вычитая почленно второе уравнение системы (А) из первого, получаем

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 27 = 0$$

или

$$(x - y)^2 - 6\,(x - y) - 27 = 0,$$

откуда

$$x - y = 9,\ \ x - y = -3. \tag{C}$$

Таким образом для определения критических точек получены четыре системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 13; \\ x - y &= 9; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 13; \\ x - y &= -3; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 5; \\ x - y &= 9; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 5; \\ x - y &= -3. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, находим четыре критические точки $M_1(11, 2)$, $M_2(5, 8)$, $M_3(7, -2)$, $M_4(1, 4)$.

Вычисляем значения частных производных второго порядка в указанных точках:

$$A_1 = f''_{xx}(11, 2) = 30,\ \ B_1 = f''_{xy}(11, 2) = -6, \quad C_1 = f''_{yy}(11, 2) = 30;$$

$$A_2 = f''_{xx}(5, 8) = -6,\ \ B_2 = f''_{xy}(5, 8) = 30, \quad C_2 = f''_{yy}(5, 8) = -6;$$

$$A_3 = f''_{xx}(7, -2) = 6,\ \ B_3 = f''_{xy}(7, -2) = -30, \quad C_3 = f''_{yy}(7, -2) = 6;$$

$$A_4 = f''_{xx}(1, 4) = -30,\ \ B_4 = f''_{xy}(1, 4) = 6, \quad C_4 = f''_{yy}(1, 4) = -30$$

и значения определителя (8.9):

$$\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 30 \cdot 30 - (-6)^2 = 864;$$

$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = (-6)(-6) - 30^2 = -864;$$

$$\Delta_3 = A_3C_3 - B_3^2 = 6 \cdot 6 - (-30)^2 = -864;$$

$$\Delta_4 = A_4C_4 - B_4^2 = (-30)(-30) - 6^2 = 864.$$

Так как $\Delta_2 < 0$ и $\Delta_3 < 0$, то в точках M_2 и M_3 экстремумов нет. Поскольку $\Delta_1 > 0$ и $A_1 > 0$, то точка M_1 является точкой минимума, причем

$$\min f(x, y) = f(11, 2) = 10.$$

Так как $\Delta_4 > 0$ и $A_4 < 0$, то точка M_4 есть точка максимума, причем

$$\max f(x, y) = f(1, 4) = 570.$$

Задачи

Найти экстремумы функций:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$

2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$

3. $z = x^3 + y^3 - 6xy.$

4. $z = x^3 + y^3 - 3axy.$

5. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12.$

Ответы

1. $\min f(x, y) = f(1, -2) = -4.$ **2.** $\min f(x, y) = f(5, 3) = -42.$ **3.** $z_{\min} = z(2, 2) = -8.$ **4.** Минимум при $a > 0$, максимум при $a < 0.$ **5.** $z_{\max} = z(1, 2) = 19.$

§ 8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней наибольшего и наименьшего значений или в критических точках, или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области необходимо:

1. Найти критические точки (лежащие внутри данной области) и вычислить в них значения функции.

2. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области.

3. Сравнить все полученные значения функции: самое большее (меньшее) и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в данной области.

Замечание 1. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти критические точки и значения функции в них.

Замечание 2. Для функции $z = f(x, y)$ граница области состоит из нескольких дуг (отрезков), уравнения которых $y = f(x)$, где $a \le x \le b$ или $x = \varphi(y)$, где $c \le y \le d$, поэтому на соответствующих дугах границы данная функция является функцией одной переменной:

$$z = f[x, f(x)] = z(x) \text{ или } z = f[\varphi(y), y] = z(y).$$

Если граница задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t) \; (\alpha \le t \le \beta),$$

то данная функция также превращается в функцию одной переменной:

$$z = f(x, y) = f[\varphi_1(t); \varphi_2(t)] = z(t).$$

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 9$.

Решение. Данная функция имеет частные производные:

$$f_x'(x, y) = 4x; \; f_y'(x, y) = -4y.$$

Приравнивая нулю эти производные, получим систему уравнений, из которой находим $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Значение функции в критической точке $M_0(0, 0)$ равно нулю:

$$z_0 = f(0, 0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Границей данной замкнутой области является окружность

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ или } y^2 = 9 - x^2,$$

где $-3 \le x \le 3$. Функция $z = 2x^2 - 2y^2$ на границе области становится функцией одной переменной x:

$$z(x) = 2x^2 - 2(9 - x^2) = 4x^2 - 18,$$

аргумент которой изменяется на отрезке $[-3, 3]$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x)$ на указанном отрезке. Дифференцируя эту функцию, получаем $z'(x) = 8x$. Из уравнения $z'(x) = 0$ находим единственную критическую точку $x_1 = 0$, в которой функция $z(x)$ имеет значение $z_1 = -18$. Вычислим ее значения на концах отрезка $[-3, 3]$, т. е. в точках $x = -3$, $x = 3$:

$$z_2 = z(-3) = 4(-3)^2 - 18 = 18;$$

$$z_3 = z(3) = 4 \cdot 3^2 - 18 = 18.$$

Сравнивая между собой числа z_0, z_1, z_2, z_3, заключаем, что функция $z = 2x^2 - 2y^2$ имеет наибольшее значение, равное 18 и наименьшее значение, равное -18, причем:

$$z_{\text{наиб}} = f(-3, 0) = f(3, 0) = 18;$$

$$z_{\text{наим}} = f(0, -3) = f(0, 3) = -18.$$

З а м е ч а н и е . Наибольшее и наименьшее значения функции на границе области можно было найти и другим способом. Окружность $x^2 + y^2 = 9$ имеет следующие параметрические уравнения:

$$x = 3\cos t;\ y = 3\sin t\ \ (0 \le t \le 2\pi).$$

Подставляя эти выражения для x и y в формулу $z = 2x^2 - 2y^2$, получим функцию одной переменной t:

$$z(t) = 2(3\cos t)^2 - 2(3\sin t)^2 = 18(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

или

$$z(t) = 18\cos 2t,$$

для которой $z'(t) = -36\sin 2t$. На отрезке $[0, 2\pi]$ функция $z(t) = 18\cos 2t$ имеет критические точки $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \dfrac{3}{2}\pi$, которым соответствуют следующие значения функции:

$$z_1 = z(t_1) = 18;\ z_2 = z(t_2) = -18;$$

$$z_3 = z(t_3) = 18;\ z_4 = z(t_4) = -18.$$

П р и м е р 2 . Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике с вершинами $A(-3, -3)$, $B(-3, 2)$, $C(1, 2)$, $D(1, -3)$.

Решение. Возьмем частные производные данной функции:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 6y; \ f'_y(x, y) = 3y^2 + 6x.$$

Из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 6y = 0; \\ 3y^2 + 6x = 0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} x^2 + 2y = 0; \\ y^2 + 2x = 0 \end{array}\right\}$$

находим две критические точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-2, -2)$, обе они принадлежат прямоугольнику $ABCD$ (рис. 8.1).

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$z_1 = f(0, 0) = 0, \ z_2 = f(-2, -2) = 8.$$

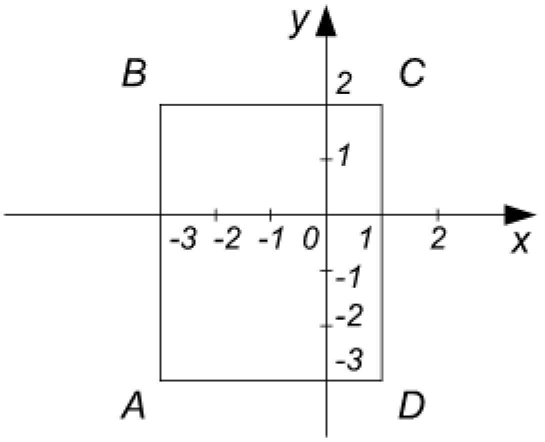


Рис. 8.1

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе прямоугольника $ABCD$. Эту границу удобно разбить на четыре отрезка AB, BC, CD, DA, на каждом из которых могут оказаться свои критические точки. Кроме того, необходимо учесть и концы отрезков, т. е. точки A, B, C и D.

Ищем критические точки на отрезке AB, уравнение которого $x = -3$, причем $-3 \le y \le 2$. На этом отрезке данная функция становится функцией одной переменной y:

$$z = f(-3, y) = -27 + y^3 - 18y; \ z(y) = y^3 - 18y - 27.$$

Производная этой функции

$$z' = 3y^2 - 18$$

обращается в нуль при $y = -\sqrt{6} \approx -2{,}45$, $y = \sqrt{6} \approx 2{,}45$. Второго значения рассматривать не будем, так как оно не принадлежит отрезку AB, для которого $-3 \le y \le 2$. Вычислим значение функции $z(y)$ при $y = -\sqrt{6}$:

$$z_3 = z\left(-\sqrt{6}\right) = \left(-\sqrt{6}\right)^3 - 18\left(-\sqrt{6}\right) - 27 = 12\sqrt{6} -$$

$$-27 \approx 2{,}4.$$

На отрезке BC $y = 2$ $(-3 \le x \le 1)$, поэтому

$$z = f(x, 2) = x^3 + 8 + 12x.$$

Функция $z(x) = x^3 + 12x + 8$ критических точек не имеет, так как ее производная $z'(x) = 3x^2 + 12$ в нуль не обращается.

На отрезке CD, где $x = 1$ $(-3 \le y \le 2)$,

$$z = f(1, y) = 1 + y^3 + 6y,$$

также нет критических точек.

На отрезке DA $y = -3$ $(-3 \le x \le 1)$, поэтому

$$z = f(x, -3) = x^3 - 27 - 18x.$$

Функция $z(x) = x^3 - 18x - 27$ имеет критическую точку $x = -\sqrt{6}$ (точка $x = \sqrt{6}$, в которой производная $z'(x) = 3x^2 - 18$ также обращается в нуль, отрезку DA не принадлежит).

Вычисляем значение функции $z(x)$ в точке $x = -\sqrt{6}$:

$$z_4 = z\left(-\sqrt{6}\right) = \left(-\sqrt{6}\right)^3 - 18\left(-\sqrt{6}\right) - 27 =$$

$$= 12\sqrt{6} - 27 \approx 2{,}4.$$

Осталось найти значения функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в вершинах A, B, C, D:

$$z_5 = f(A) = f(-3, -3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 6(-3)(-3) = 0;$$

$$z_6 = f(B) = f(-3, 2) = (-3)^3 + 2^3 + 6(-3)\,2 = -55;$$

$$z_7 = f(C) = f(1, 2) = 1^3 + 2^3 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 21;$$

$$z_8 = f(D) = f(1, -3) = 1^3 + (-3)^3 + 6(-3)\,1 = -44.$$

Сравнивая z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, заключаем, что функция $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике $ABCD$ достигает наименьшего значения, равного -55, в точке B, и наибольшего значения, равного 21, – в точке C.

Пример 3. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму трех измерений, равную положительной постоянной a, найти тот, объем которого наибольший.

Решение. Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда через x, y, z. Из условия задачи видно, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Объем параллелепипеда V выразится формулой

$$V = xyz.$$

По условию задачи

$$x + y + z = a,\ a > 0,$$

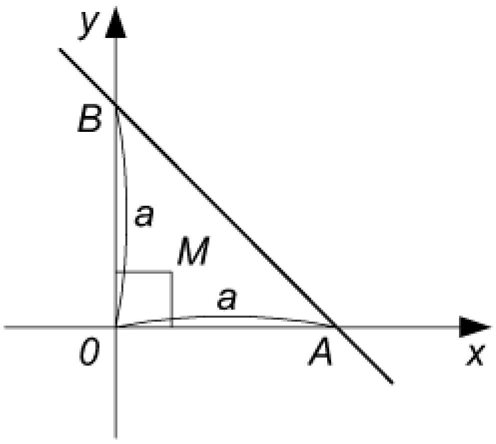


Рис. 8.2

откуда

$$z = a - x - y,$$

поэтому

$$V = xy\,(a - x - y).$$

Полученная функция двух переменных определена внутри треугольника OBA, ограниченного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ (рис. 8.2). Функция $V\,(x, y) = xy\,(a - x - y)$ имеет частные производные:

$$V'_x(x, y) = ay - 2xy - y^2,\ V'_y(x, y) = ax - x^2 - 2xy,$$

$$V''_{xx}(x, y) = -2y,\ V''_{xy} = a - 2x - 2y,\ V''_{yy} = -2x.$$

Приравняв нулю частные производные первого порядка, находим:

$$\left.\begin{aligned} ay - 2xy - y^2 &= 0; \\ ax - x^2 - 2xy &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то сокращая первое уравнение на y, второе – на x, получим систему

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= a; \\ x + 2y &= a, \end{aligned}\right\}$$

решение которой

$$x_0 = \frac{a}{3},\ y_0 = \frac{a}{3}.$$

Критическая точка $M\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ лежит внутри области определения функции, т. е. внутри треугольника OAB.

Вычислим в этой точке значения вторых частных производных:

$$V''_{xx}(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}a;\ V''_{xy}(x_0, y_0) = -\frac{1}{3}a;$$

$$V''_{yy}(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}a$$

и определитель (8.9):

$$\Delta = \left(-\frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{2}{3}a\right) - \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A = V''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то точка M является точкой максимума.

Из уравнения $z = a - x - y$ находим $z_0 = \frac{a}{3}$. Таким образом, $x_0 = = y_0 = z_0 = \frac{a}{3}$; искомый параллелепипед есть куб, ребро которого равно $\frac{a}{3}$ и объем $V = \frac{a^3}{27}$.

Задачи

Найти наибольшие и наименьшие значения функций в указанных замкнутых областях:

1. $z = f(x, y) = 3x + 3y$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

2. $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

3. $z = x^2 y(4 - x - y)$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

4. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

5. Положительное число a разложить на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

6. Открытый прямоугольный ящик должен иметь данный объем V. Определить размеры ящика, при которых на его изготовление потребуется наименьшее количество материала.

7. Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющий наибольший объем.

8. Дан треугольник с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. В плоскости треугольника ABC найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшей.

Ответы

1. $z_{\text{наиб}} = f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}$; $z_{\text{наим}} = f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{2}$. **2.** $z_{\text{наиб}} = f(-1, 0) = f(1, 0) = 1$; $z_{\text{наим}} = f(0, -1) = f(0, 1) = -1$. **3.** $z_{\text{наиб}} = f(2, 1) = 4$; $z_{\text{наим}} = f(4, 2) = -64$. **4.** $z_{\text{наиб}} = f(2, -1) = 13$; $z_{\text{наим}} = f(1, 1) = f(0, -1) = -1$. **5.** $x = y = z = \dfrac{a}{3}$. **6.** $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$; $z = \dfrac{1}{2}(2V)^{\frac{1}{3}}$. **7.** $x = y = z = a$. **8.** $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. $M_0(x_0, y_0)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC.

Раздел V.

Дифференциальные уравнения

Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = f(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Решение $F(x, y) = 0$, заданное в неявном виде, называется *интегралом* дифференциального уравнения.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от x и n произвольных *независимых* постоянных C_1, $C_2, \ldots, C_n$, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом.*

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным, т. е. решение вида:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0),$$

где $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ – фиксированные числа.

Частным интегралом называется интеграл, полученный из общего путем фиксирования произвольных постоянных:

$$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = 0,$$

где $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ – фиксированные числа.

Пример 1. Определить порядок дифференциального уравнения:

1) $y'' - 3y' + 2y - 4 = 0;$
2) $x(1+x)\,y' - (1+2x)\,y - (1+2x) = 0;$
3) $y^{\mathrm{IV}} - 16y'' = 0;$
4) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

Решение. Первое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, так как порядок старшей, входящей в него производной равен 2, второе – уравнением первого порядка, ибо оно содержит только первую производную. (Заметим, что в первом уравнении коэффициенты при y, y', y'' и свободный член являются числами, во втором уравнении они зависят от x.) Третье уравнение является уравнением четвертого порядка, так как порядок старшей производной равен 4, четвертое – уравнением третьего порядка, поскольку третья производная является старшей производной, содержащейся в этом уравнении. (Заметим, что третье уравнение не содержит y, y', y''' и x, четвертое также не содержит x.)

Пример 2. Показать, что функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y''' - 8y = 0$.

Решение. Найдем третью производную данной функции:

$$y' = 2e^{2x},\ y'' = 4e^{2x},\ y''' = 8e^{2x}.$$

Подставляя выражения для y и y''' в дифференциальное уравнение, получим тождество $8e^{2x} - 8e^{2x} = 0$. Это означает, что функция $y = e^{2x}$ есть решение данного уравнения. Это решение – частное, так как оно не содержит произвольных постоянных.

Пример 3. Показать, что функция $y = C_1 e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 3y = x - 1$. Является ли это решение общим?

Решение. Находим две первые производные данной функции:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + \frac{1}{3},\ y'' = 9C_1 e^{3x}.$$

Подставляем выражения для y, y' и y'' в исходное уравнение:

$$9C_1e^{3x}-4\left(3C_1e^{3x}+\frac{1}{3}\right)+3\left(C_1e^{3x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)=$$

$$=9C_1e^{3x}-12C_1e^{3x}-\frac{4}{3}+3C_1e^{3x}+x+\frac{1}{3}\equiv x-1.$$

Так как получено тождество, то функция $y=C_1e^{3x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$ является решением данного уравнения. Это решение не является общим, ибо оно содержит только одну произвольную постоянную, а порядок уравнения равен 2.

Пример 4. Убедиться в том, что функция $y=C_1e^{x}+C_2e^{x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$ является решением уравнения $y''-4y'+3y=x-1$.

Решение. Найдем производные

$$y'=C_1e^{x}+C_2e^{x}+\frac{1}{3},\ \ y''=C_1e^{x}+C_2e^{x}$$

и, подставляя выражения для y, y' и y'' в данное уравнение, получаем тождество

$$(C_1e^{x}+C_2e^{x})-4\left(C_1e^{x}+C_2e^{x}+\frac{1}{3}\right)+3\left(C_1e^{x}+C_2e^{x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)=$$

$$=(C_1e^{x}+C_2e^{x})-4\,(C_1e^{x}+C_2e^{x})-\frac{4}{3}+3\,(C_1e^{x}+C_2e^{x})+\ x+\frac{1}{3}\equiv x-1.$$

Следовательно, данная функция является решением дифференциального уравнения. Это решение будет частным, так как оно содержит лишь одну *независимую* постоянную (постоянные C_1 и C_2 в данном случае не являются независимыми: их число можно уменьшить; поскольку сумма двух постоянных также есть постоянная, то можно обозначить $C_1+C_2=C$), тогда

$$y=Ce^{x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}.$$

Пример 5. Показать, что функция $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$ является общим решением уравнения $y''-4y'+3y=x-1$.

Решение. Данная функция содержит две независимые произвольные постоянные (их число нельзя уменьшить, как в предыдущем примере). Если мы покажем, что функция удовлетворяет уравнению, то это и будет означать, что она является общим решением данного дифференциального уравнения.

Поскольку

$$y' = 3C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3},\ y'' = 9C_1e^{3x} + C_2e^x,$$

то подстановка выражений y, y', y'' в уравнение приводит к тождеству

$$9C_1e^{3x} + C_2e^x - 4\left[3C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3}\right] + 3\left[C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right] =$$

$$= 9C_1e^{3x} + C_2e^x - 12C_1e^{3x} - 4C_2e^x - \frac{4}{3} + 3C_1e^{3x} + 3C_2e^x + \ x + \frac{1}{3} \equiv x - 1.$$

Пример 6. Дано общее решение $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$. Какие частные решения получаются при $C_1 = 2$, $C_2 = 3$? При каких значениях параметров C_1 и C_2 получаются частные решения: $y = \sin 2x$, $y = \cos 2x$?

Решение. Подставляя значения $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ в формулу для общего решения, получим частное решение $y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$. Частное решение $y = \sin 2x$ получается из общего при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, частное решение $y = \cos 2x$ при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Пример 7. Показать, что функция $y^2 - x^2 - Cy = 0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$.

Решение. Дифференцируя по x данную неявную функцию, получим

$$2yy' - 2x - Cy' = 0,\ y'(2y - C) = 2x,\ y' = \frac{2x}{2y - C}.$$

Из уравнения $y^2 - x^2 - Cy = 0$ находим

$$C = \frac{y^2 - x^2}{y}$$

и подставляем его выражение в формулу для производной y':

$$y' = \frac{2x}{2y - \dfrac{y^2 - x^2}{y}}, \quad y' = \frac{2xy}{y^2 + x^2}.$$

Подстановка производной в дифференциальное уравнение приводит к тождеству

$$\frac{2xy}{y^2 + x^2}(y^2 + x^2) - 2xy \equiv 0.$$

Таким образом, неявная функция $y^2 - x^2 - Cy = 0$, зависящая от одной произвольной постоянной, есть решение дифференциального уравнения, т. е. является общим интегралом этого уравнения.

Пример 8. Найти дифференциальное уравнение, общим решением которого является функция $y = C_1 x + C_2$, зависящая от двух произвольных постоянных.

Решение. Дважды дифференцируя данную функцию, исключаем параметры C_1 и C_2:

$$y' = C_1, \quad y'' = 0.$$

Уравнение $y'' = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пример 9. Составить дифференциальное уравнение, общее решение которого

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим:

$$y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2}, \quad y'' = C_1 - \frac{2C_2}{x^3}.$$

Из уравнений

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}, \quad y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2}$$

исключим C_1. Умножая второе уравнение на x и вычитая из него первое, получим

$$xy' - y = -\frac{2C_2}{x}.$$

Прибавляя это уравнение к уравнению $y'' = \frac{2C_2}{x^3}$, умноженному на x^2, исключим C_2:

$$xy' - y + y''x^2 = 0.$$

Полученное уравнение является искомым.

Пример 10. Найти дифференциальное уравнение семейства кривых $y = Cx^3$.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получаем $y' = 3Cx^2$. Подставляя сюда выражение $C = \frac{y}{x^3}$, полученное из данного уравнения, находим искомое дифференциальное уравнение

$$y' = 3\frac{y}{x^3} \cdot x^2, \quad y' = \frac{3y}{x}.$$

Задачи

1. Определить порядок дифференциального уравнения:

1) $y' + p(x)y = q(x)$;

2) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$;

3) $y''' - ay'' + by' + Cy = 0$;

4) $y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} - y = 0$.

2. Дано общее решение $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Найти частные решения в случаях:

1) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$;

2) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$;

3) $C_1 = 1$, $C_2 = -2$.

3. Дан общий интеграл $x^2 - y^2 - Cx = 0$ дифференциального уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$. Найти частные интегралы при $C = 4$, $C = 6$, $C = -8$, $C = -10$ и построить их.

В задачах 4 – 10 показать, что данные функции удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям; установить, какими решениями они являются – общими или частными:

4. $y = x(\ln x^2 + C)$; $xy' - y = 2x$.

5. $y = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$, $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

6. $y = C_1 e^x \sin x,\ \ y'' - 2y' + 2y = 0.$

7. $y = C_1 \sin 7x + C_2 \cos 7x,\ \ y'' + 49y = 0.$

8. $x^2 + y^2 - C^2 = 0,\ \ x + yy' = 0.$

9. $y^2 - x^2 - 2y = 0,\ \ y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0.$

10. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x},\ \ y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

Найти дифференциальное уравнение семейства кривых:

11. $y = Cx^2.$ **12.** $y = C \sin x.$

Найти дифференциальное уравнение, общим решением которого является данная функция:

13. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$ **14.** $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$

15. $y = C_1 + C_2 \cos(x + C_3).$ **16.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$

Ответы

1. 1) первый порядок; 2) второй; 3) третий; 4) пятый. **2.** 1) $y = e^{2x}$; 2) $y = e^x$; 3) $y = e^x - 2e^{2x}$. **3.** 1) $x^2 - y^2 - 4x = 0$ или $(x-2)^2 - y^2 = 4$ (равнобочная гипербола, центр которой находится в точке $M(2, 0)$, полуоси равны двум); 2) $x^2 - y^2 - 6x = 0$; 3) $x^2 - y^2 + 8x = 0$; 4) $x^2 - y^2 + 10x = 0$. **4.** Общее решение. **5.** Частное решение. **8.** Общий интеграл. **9.** Частный интеграл. **10.** Общее решение. **11.** $y' = \dfrac{2y}{x}$. **12.** $y' = y \operatorname{ctg} x$. **13.** $y'' - 2y' - 8y = 0$. **14.** $y'' + 9y = 0$. **15.** $y''' + y' = 0$. **16.** $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Глава 9.
Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением называют уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. *Порядком дифференциального уравнения* называют порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в одном из следующих видов:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{9.1}$$

где $F(x, y, y')$ – функция переменных x, y, y';

$$P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy = 0, \tag{9.2}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – функция переменных x, y;

$$y' = f(x, y). \tag{9.3}$$

Решением дифференциального уравнения в промежутке (a, b) называют дифференцируемую функцию $y = \varphi(x)$, обращающую это уравнение в тождество в данном промежутке. График решения называют *интегральной линией*.

Задача Коши. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего условию: $y = y_0$ при $x = x_0$, где y_0, x_0 – заданные числа. Геометрически задача Коши означает следующее: найти интегральную линию, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$. Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области G плоскости Oxy, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то решение задачи Коши существует и является единственным. В этом случае через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная линия.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называют функцию $y = \varphi(x, C)$, обладающую следующими свойствами: 1) при любых значениях произвольной постоянной C она обращает уравнение в тождество, 2) значение произвольной постоянной C можно определить так, чтобы она удовлетворяла условию задачи Коши. Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называют *особым*.

Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, называют *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка. *Частным интегралом* называют решение, полученное из общего при фиксированном значении C_0: $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

§ 9.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$X(x)\,Y(y)\,dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0, \tag{9.4}$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ – функции только от x; $Y(y)$, $Y_1(y)$ – функции только от y.

Уравнение (9.4) делением на произведение $Y(y)\cdot X_1(x)$ приводится к *уравнению с разделенными переменными:*

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0. \tag{9.5}$$

Общий интеграл уравнения (9.9)

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C. \tag{9.6}$$

З а м е ч а н и е. При делении на произведение $Y(y)\cdot X_1(x)$ можно потерять те решения уравнения (9.4), которые обращают это произведение в нуль.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $x = a$, где a есть корень уравнения $X_1(x) = 0$, т. е. $X_1(a) = 0$, является решением уравнения (9.4). Функция $y = b$, где b корень уравнения $Y_1(y) = 0$, т. е. $Y_1(b) = 0$, также является решением уравнения (9.4).

Решения $x = a$ и $y = b$, если они имеются, геометрически представляют собой прямые линии, соответственно параллельные оси Oy и оси Ox.

П р и м е р 1. Проинтегрировать уравнение

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(3, -4)$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение можно переписать так:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{или} \quad xdx + ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделенными переменными (коэффициент при dx – функция только от x, при dy – функция только от y).

Интегрируя, получим

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1 \text{ или } x^2+y^2=2C_1.$$

Полагая $2C_1=C^2$ (что можно сделать, так как $x^2+y^2\ge 0$), общий интеграл запишем в виде

$$x^2+y^2=C^2.$$

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство окружностей радиусов C с центром в начале координат (рис. 9.1).

Найдем ту окружность, которая проходит через точку $M\,(3,-4)$. Подставляя координаты точки M в уравнение $x^2+y^2=C^2$, находим

$$3^2+(-4)^2=C^2 \text{ или } C^2=25.$$

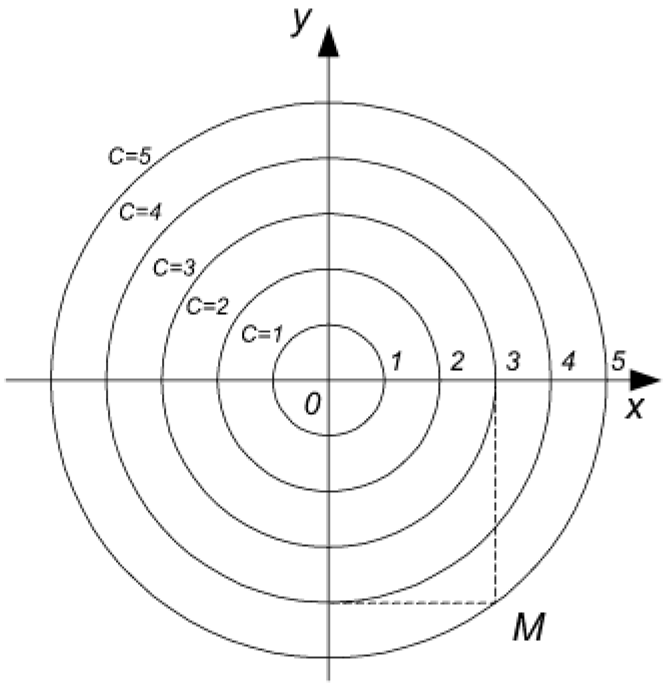


Рис. 9.1

Подставив значение C^2 в общий интеграл, получим искомую окружность

$$x^2+y^2=25.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \quad (x\ne 0).$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y=3$ при $x=2$.

Решение. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|y|+\ln|x|=C_1. \qquad \text{(A)}$$

Постоянную C_1 можно записать в виде

$$C_1=\ln|C| \quad (C\ne 0)$$

(поскольку любое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Подставляя выражение для C_1 в равенство (A) и преобразуя его, получим

$$\ln|xy| = \ln|C| \quad (C \neq 0).$$

Потенцируя последнее равенство, находим общий интеграл $xy = C$ $(C \neq 0)$, геометрически представляющий собой семейство гипербол, асимптотами которых являются координатные оси.

Решим задачу Коши для данного уравнения по заданным начальным условиям: $y_0 = 3$ при $x_0 = 2$. Подставив эти значения в уравнение $xy = C$, получим $2 \cdot 3 = C$ или $C = 6$.

Таким образом, получено частное решение $xy = 6$. Это гипербола, проходящая через точку $M_0(2, 3)$.

З а м е ч а н и е. Разделяя переменные, мы предполагали, что $y \neq 0$, и, следовательно, могли потерять решение $y = 0$. Действительно, $y = 0$ – решение уравнения (в чем можно убедиться непосредственно), оно может быть получено из общего интеграла при $C = 0$. Таким образом, общий интеграл дается формулой

$$xy = C,$$

где C может принимать любые действительные значения (в том числе и $C = 0$).

П р и м е р 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)\, dy - 2xydx = 0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y = 1$ при $x = 0$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (коэффициент при dy – функция только от x, при dx – произведение функций, одна из которых зависит только от x, другая – только от y). Разделив обе части уравнения на произведение $y\,(1 + x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1 + x^2} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln|y| - \ln(1 + x^2) = \ln|C|$$

или

$$\ln\left(\frac{|y|}{1+x^2}\right)=\ln|C|,$$

откуда получаем общее решение

$$y=C\,(1+x^2).$$

Чтобы найти искомое частное решение, достаточно определить значение C по начальным условиям:

$$1=C\,(1+0),\ \ C=1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y=1+x^2.$$

Замечание. При делении на $y\,(1+x^2)$ предполагалось, что $y\,(1+x^2)\neq 0$, т. е. $y\neq 0$, $1+x^2\neq 0$. Но $y=0$ – решение уравнения, в чем можно непосредственно убедиться. Это решение получается из общего при $C=0$.

Пример 4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0.$$

Решение. Выносся соответствующие множители за скобки, данное уравнение можно записать так:

$$x\,(y^2+1)\,dx+y\,(1-x^2)\,dy=0,$$

откуда видно, что это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части последнего уравнения на произведение $(y^2+1)\,(1-x^2)\neq 0$, получим

$$\frac{xdx}{1-x^2}+\frac{ydy}{1+y^2}=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$-\ln\left|1-x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=\ln|C|$$

или

$$\ln\left|\frac{1+y^2}{1-x^2}\right|=\ln|C|,$$

откуда получаем общий интеграл:

$$1 + y^2 = C\,(1 - x^2).$$

П р и м е р 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$dr - r d\varphi = 0.$$

Р е ш е н и е. В данном уравнении искомая функция обозначена буквой r, ее аргумент – буквой φ. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dr}{r} = d\varphi,$$

откуда

$$\ln r = \varphi + C_1.$$

Из последнего уравнения находим

$$r = e^{\varphi + C_1} = Ce^{\varphi},$$

где $C = e^{C_1}$.

Следовательно, общее решение определяется формулой

$$r = Ce^{\varphi}.$$

Задачи

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, найти указанные частные решения и построить их:

1. $y' = 4x^3$; $y = 0$ при $x = 0$.

2. $(x^2 + 4)\,y' - 2xy = 0$, $y = 5$ при $x = 1$.

3. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$, $y = 1$ при $x = e$.

4. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y = 1$ при $x = 0$.

5. $y' = y^2$, $y = 1$ при $x = -1$.

6. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$, $y = 1$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

7. $(x + 3)\,dy - (y + 3)\,dx = 0$.

8. $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$.

9. $(xy^2 + x)\,dx + (y + x^2 y)\,dy = 0$.

10. $y' = y^2 \cos x$.

11. $\sin x dx + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.

12. $dr - r \operatorname{ctg} \varphi d\varphi = 0$.

Ответы

1. $y = x^4 + C, \quad y = x^4$. **2.** $y = C(x^2 + 4), \quad y = x^2 + 4$. **3.** $y = C\ln x$, $y = \ln x$. **4.** $y = -\sqrt{1 - x^2} + C, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$. **5.** $y = -\dfrac{1}{x + C}, \quad y = -\dfrac{1}{x}$. **6.** $y = C\sin x - 1, \quad y = 2\sin x - 1$. **7.** $y = C(x + 3) - 3$. **8.** $y = \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| + C$. **9.** $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$. **10.** $y = \dfrac{1}{C - \sin x}$. **11.** $y = \dfrac{(\cos x + C)^2}{4}$. **12.** $r\sin\varphi = C$.

§ 9.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{9.7}$$

называется *однородным*, если коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения n, т. е. функциями, для которых при любом k выполняются тождества

$$P(kx, ky) \equiv k^n P(x, y),\ Q(kx, ky) \equiv k^n Q(x, y). \tag{9.8}$$

Уравнение (9.7) можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.9}$$

С помощью подстановки

$$y = ux, \tag{9.10}$$

где u – новая неизвестная функция, однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{9.11}$$

для которого

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{9.12}$$

преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x &= u + h; \\ y &= v + k, \end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

где постоянные h и k находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1 h + b_1 k + c_1 &= 0; \\ a_2 h + b_2 k + c_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9.14)$$

сводится к однородному уравнению. При $\Delta = 0$ преобразованием $a_1 x + b_1 y = t$ уравнение (9.11) сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1. Проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение

$$xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx = 0.$$

Решение. Коэффициенты при dy и dx соответственно равны:

$$Q(x, y) = x;\ P(x, y) = -\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями первой степени. Действительно,

$$Q(kx, ky) = kx = kQ(x, y);$$

$$P(kx, ky) = -\left(ky + \sqrt{k^2 x^2 + k^2 y^2}\right) = -ky - k\sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= -k\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = kP(x, y).$$

Таким образом, тождества (9.8) выполняются.

Положим $y = ux$, тогда $dy = udx + xdu$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$x(udx + xdu) - \left(ux + \sqrt{x^2 + u^2 x^2}\right) dx = 0.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и сокращая на x, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$xdu - \sqrt{1 + u^2}\,dx = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln x = \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) + \ln C,$$

откуда

$$x = C\left(u + \sqrt{1+u^2}\right).$$

Подставляя сюда выражение $u = \dfrac{y}{x}$ (полученное из равенства $y = ux$), находим

$$x = C\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)$$

или

$$\frac{x^2}{C} - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения и сокращая на x^2, получим общий интеграл

$$x^2 - 2Cy = C^2,$$

геометрически представляющий собой семейство парабол с вершинами на оси Oy.

Пример 2. Найти общий интеграл однородного уравнения

$$(x^2 - y^2)\, dy - 2yxdx = 0.$$

Решение. В данном случае имеем:

$$Q(x, y) = x^2 - y^2;\; P(x, y) = -2xy.$$

Эти функции являются однородными функциями второй степени. В самом деле:

$$Q(kx, ky) = (kx)^2 - (ky)^2 = k^2(x^2 - y^2) \equiv k^2 Q(x, y);$$

$$P(kx, ky) = -2\,(kx)\,(ky) = k^2(-2xy) \equiv k^2 P(x, y).$$

Полагая $y = ux$, находим

$$dy = xdu + udx.$$

Подставляя выражения для y и dy в исходное уравнение и сокращая на $x^2 \neq 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$(1 - u^2)\,(xdu + udx) - 2udx = 0$$

или

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-1}{u\,(1+u^2)}\,du=0 \quad (u\neq 0).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1-u^2}{u\,(1+u^2)}=\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2},$$

и интегрируя полученное уравнение, находим

$$\ln|x|=\ln|u|-\ln\left|1+u^2\right|+\ln|C|,$$

откуда

$$x=\frac{Cu}{1+u^2}.$$

Подставляя сюда выражение для u, определяемое из равенства $y=ux$, получим общий интеграл

$$x^2+y^2=Cy,$$

представляющий семейство окружностей с центрами на оси Oy и проходящих через начало координат.

Замечание. При $u=0$ получаем решение $y=0$. Это решение является частным. В самом деле, общий интеграл $x^2+y^2=Cy$ можно переписать в виде $C_1(x^2+y^2)=y$, где $C_1=\dfrac{1}{C}$. При $C_1=0$ получаем $y=0$.

Пример 3. Проинтегрировать однородное уравнение

$$(y^4-2x^3y)\,dx+(x^4-2xy^3)\,dy=0.$$

Решение. Функции

$$P\,(x,y)=y^4-2x^3y,\; Q\,(x,y)=x^4-2xy^3$$

являются однородными функциями четвертой степени. Пусть $y=ux$, тогда $dy=udx+xdu$ и уравнение (после сокращения на $x^4\neq 0$) примет вид

$$(u^4+u)\,dx-(1-2u^3)\,xdu=0$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-2u^3}{u+u^4}\,du, \quad \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u} - \frac{3u^2}{1+u^3}\right) du \quad (u \neq 0, \ u \neq -1).$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln\left|1+u^3\right| + \ln|C|,$$

откуда

$$x\,(1+u^3) = Cu.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для u, находим общий интеграл

$$x^3 + y^3 = Cxy,$$

который можно переписать в виде $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где $3a = C$. Интегральные кривые – декартовы листы.

З а м е ч а н и е . При $u = -1$ получаем $y = -x$ – решение уравнения. Это решение частное, оно получается из общего интеграла $x^3 + y^3 = Cxy$ при $C = 0$. При $u = 0$ получаем решение $y = 0$. Кроме того, $x = 0$ также является решением. Эти решения – частные, они получаются из общего интеграла $C_1(x^3 + y^3) = xy$ при $C_1 = 0$.

П р и м е р 4 . Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(4y - 3x - 5)\,y' + 7x - 3y + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е . Это уравнение вида (9.15)

$$y' = \frac{-7x + 3y - 2}{-3x + 4y - 5},$$

здесь $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 9 = -19 \neq 0.$

Вводим новые переменные по формулам (9.13):

$$\left.\begin{aligned} x &= u + h; \\ y &= v + k, \end{aligned}\right\}$$

где h, k должны удовлетворять уравнениям (9.14):

$$\left.\begin{aligned} -7h + 3k - 2 &= 0; \\ -3h + 4k - 5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти уравнения, находим $h = \frac{7}{19}$, $k = \frac{29}{19}$. Таким образом, формулы (9.13) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= u + \frac{7}{19}; \\ y &= v + \frac{29}{19}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$dx = du, \; dy = dv.$$

Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{-7u + 3v - \frac{49}{19} + \frac{87}{19} - 2}{-3u + 4v - \frac{21}{19} + \frac{116}{19} - 5} = \frac{-7u + 3v}{-3u + 4v}$$

или

$$\frac{dv}{du} = \frac{-7 + 3\left(\frac{v}{u}\right)}{-3 + 4\left(\frac{v}{u}\right)}. \tag{A}$$

Сделаем подстановку

$$\frac{v}{u} = z,$$

откуда

$$v = uz, \; \frac{dv}{du} = \frac{dz}{du} \cdot u + z \cdot 1,$$

поэтому уравнение (A) принимает вид

$$\frac{dz}{du} \cdot u + z = \frac{-7 + 3z}{-3 + 4z}.$$

Преобразуем последнее уравнение

$$\frac{dz}{du} \cdot u = \frac{3z - 7}{4z - 3} - z = \frac{3z - 7 - 4z^2 + 3z}{4z - 3} = \frac{-\left(4z^2 - 6z + 7\right)}{4z - 3}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{(4z-3)\,dz}{4z^2-6z+7}=-\frac{du}{u}$$

или

$$\frac{(4z-3)\,dz}{2\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)}=-\frac{du}{u}.$$

Пользуясь формулой

$$\int\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}=\ln f(z),$$

из последнего уравнения находим

$$\frac{1}{2}\ln\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)=-\ln u+\frac{1}{2}\ln C_1.$$

Умножим на 2:

$$\ln\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)=\ln C_1-2\ln u,$$

$$\ln\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)+\ln u^2=\ln C_1,$$

$$\ln\left[u^2\left(2z^2-3z+\frac{7}{2}\right)\right]=\ln C_1.$$

Подставляя сюда выражение для $z=\frac{v}{u}$, получим

$$\ln\left(2v^2-3uv+\frac{7}{2}u^2\right)=\ln C_1.$$

Перейдем к переменным x, y по формулам:

$$\left.\begin{aligned}u&=x-\frac{7}{19},\\ v&=y-\frac{29}{19}.\end{aligned}\right\}$$

$$\ln\left[2\left(y-\frac{29}{19}\right)^2-3\left(x-\frac{7}{19}\right)\left(y-\frac{29}{19}\right)+\frac{7}{2}\left(x-\frac{7}{19}\right)^2\right]=\ln C_1.$$

$$2y^2 - \frac{4\cdot 29}{19}y + 2\left(\frac{29}{19}\right)^2 - 3xy + \frac{21}{19}y + \frac{87}{19}x - \frac{21\cdot 29}{19^2} +$$

$$+\frac{7}{2}x^2 - \frac{49}{19}x + \frac{7\cdot 49}{2\cdot 19^2} = C_1.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$2y^2 - 3xy + \frac{7}{2}x^2 + 2x - 5y = C.$$

Задачи

Проинтегрировать однородные дифференциальные уравнения:

1. $2xyy' = y^2 - 4x^2$.

2. $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0$.

3. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xydy = 0$.

4. $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0$.

5. $(2xy + y^2)\,dx + (2xy + x^2)\,dy = 0$.

6. $xy' - y + x\operatorname{tg}\frac{y}{x} = 0$.

7. $xdy - ydx = ydy$.

8. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

9. $(x^2 + y^2)\,dx - 2x^2dy = 0$.

10. $(x^2 + y^2 + xy)\,dx = x^2dy$.

Проинтегрировать уравнения, приводящиеся к однородным:

11. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\,\frac{dy}{dx}$.

12. $(2x + 8)\,dx + (3y - 5x - 11)\,dy = 0$.

Ответы

1. $y^2 + 4x^2 - 8Cx = 0$. **2.** $2x^2 + xy - Cy = 0$. **3.** $x^2 - y^2 = Cx$. **4.** $y = \frac{4x}{\ln x + C}$. **5.** $xy\,(x + y) = C$. **6.** $x\sin\frac{y}{x} = C$. **7.** $\ln y + \frac{x}{y} = C$. **8.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = C$. **9.** $2x = (x - y)\,(\ln x + C)$. **10.** $y = x\operatorname{tg}(\ln Cx)$. **11.** $(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C$. **12.** $C\,(3y - 2x + 1)^3(y - x - 1)^2 = 0$.

§ 9.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение первой степени относительно y и y', т. е. уравнение вида

$$\varphi_1(x)\,y' + \varphi_2(x)\,y + \varphi_3(x) = 0 \quad (\varphi_1(x) \neq 0) \tag{9.15}$$

или

$$y' + p(x)\,y = q(x). \tag{9.16}$$

Решение линейного уравнения ищется в виде

$$y = u(x)\,v(x). \tag{9.17}$$

Подстановка выражений для y и y' в уравнение (9.16) приводит его к виду

$$v\frac{du}{dx} + \left[\frac{dv}{dx} + p(x)\,v\right]u = q(x). \tag{9.18}$$

В качестве v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx} + p(x)\,v = 0, \tag{9.19}$$

тогда функция u определяется из уравнения

$$v\frac{du}{dx} = q(x). \tag{9.20}$$

Если функция $q(x) \equiv 0$, то уравнение (9.16) принимает вид

$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{9.21}$$

и называется *линейным однородным*, его общее решение выражается формулой

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{9.22}$$

Для решения неоднородного линейного уравнения (9.16) можно применять *метод вариации произвольной постоянной*. Этот метод состоит в том, что сначала находят общее решение уравнения (9.21), т. е. соотношение (9.22). Далее, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищут решение неоднородного уравнения (9.16) в виде (9.22). Для этого подставляют в уравнение (9.16) y и y', определяемые из формулы (9.22), и из полученного дифференциального уравнения находят функцию $C(x)$. Общее решение уравнения (9.16) получается в виде

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{9.23}$$

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}, \tag{9.24}$$

где α – действительное число. В случае $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ уравнение (9.24) является линейным. Во всех других случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки

$$u = y^{1-\alpha}. \tag{9.25}$$

Пример 1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y' + y - kx = 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением вида (9.16), где $p(x) = 1$, $q(x) = kx$. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' + uv - kx = 0 \text{ или } u(v' + v) + u'v - kx = 0. \tag{A}$$

В качестве v выберем одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$v' + v = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} + v = 0. \tag{B}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln v = -x, \;\; v = e^{-x}.$$

Уравнение (A) с учетом (B) перепишем так:

$$u'v - kx = 0 \text{ или } \frac{du}{dx}v - kx = 0.$$

Подставляя сюда значение $v = e^{-x}$, получим

$$du - kxe^{x}dx = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$u = \int kxe^{x}dx = k\int xd\,(e^{x}) = k\left[xe^{x} - \int e^{x}dx\right] =$$

$$= kxe^{x} - ke^{x} + C = ke^{x}(x-1) + C.$$

Подставим выражения для u, v в формулу $y = vu$:

$$y = uv = e^{-x}[ke^{x}(x-1) + C] = k\,(x-1) + Ce^{-x}.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения таково:

$$y = k\,(x-1) + Ce^{-x}.$$

Пример 2. Найти общее решение линейного уравнения $xy' - y = x^3$.

Решение. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение перепишем в виде

$$x\,(u'v + uv') - uv = x^3 \text{ или } u\,(xv' - v) + xu'v = x^3. \qquad \text{(A)}$$

Выберем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, тогда

$$x\frac{dv}{dx} - v = 0,\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},\ \ln v = \ln x,\ v = x.$$

Уравнение (A) при $v = x$ запишем так:

$$x^2du = x^3dx,\ du = xdx,$$

откуда

$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно,

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x$$

общее решение.

Пример 3. Проинтегрировать линейное уравнение $y' + y = x + 2$.

Решение. Пусть $y = uv$, тогда

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляя выражения для y и y' в уравнение, получим

$$u'v + uv' + uv = x + 2,\ u\,(v' + v) = x + 2 - u'v. \qquad \text{(A)}$$

Потребуем, чтобы $v' + v = 0$, тогда

$$\frac{dv}{dx} + v = 0,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \ln v = -x,\ v = e^{-x}.$$

Если $v' + v = 0$, то уравнение (A) принимает вид

$$x + 2 - u'v = 0.$$

Подставляя сюда значение v, перепишем уравнение в виде

$$x+2-e^{-x}\frac{du}{dx}=0,\ du=e^{x}(x+2)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$u=\int e^{x}(x+2)\,dx=\int xe^{x}dx+2\int e^{x}dx=xe^{x}-\int e^{x}dx+2e^{x}+C,$$

$$u=xe^{x}+e^{x}+C.$$

Следовательно,

$$y=uv=e^{-x}[C+e^{x}(x+1)\,].$$

Таким образом, общее решение дается формулой

$$y=Ce^{-x}+x+1.$$

П р и м е р 4 . Найти решение уравнения

$$(x+y)\,y'=1, \tag{A}$$

удовлетворяющее начальному условию: $y=0$ при $x=-1$.

Р е ш е н и е . По виду это уравнение не является линейным, так как содержит произведение искомой функции y и ее производной y'. Однако, если рассматривать x как функцию от y, то, учитывая, что

$$y'=\frac{1}{x'},$$

получим линейное уравнение

$$x'=x+y. \tag{B}$$

Применим подстановку

$$x=uv,$$

тогда

$$x'=u'v+uv'.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (B), получим

$$u'v+uv'=uv+y\ \text{ или }\ u'v+u\,(v'-v)=y. \tag{C}$$

Выберем функцию $v\neq 0$ так, чтобы обратился в нуль коэффициент при u в последнем уравнении

$$v'-v=0,\ \frac{dv}{dy}-v=0,\ \frac{dv}{v}=dy. \tag{D}$$

Интегрируя, получим

$$\ln v = y,\ \ v = e^{y}. \tag{E}$$

Подставляя это значение в уравнение (C), в силу равенства (D) находим

$$e^{y}\frac{du}{dy} = y,\ \ du = ye^{-y}dy,$$

$$u = \int ye^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C. \tag{F}$$

Таким образом, общее решение уравнения (B) есть:

$$x = uv = (-ye^{-y} - e^{-y} + C)\,e^{y} \quad \text{или} \quad x = -y - 1 + Ce^{y}.$$

Полагая $x = -1$ и $y = 0$, получим $-1 = -1 + C$, т. е. $C = 0$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = -(x+1).$$

П р и м е р 5. Проинтегрировать линейное уравнение

$$y' - y\,\mathrm{th}\,x = \frac{1}{2}. \tag{A}$$

Р е ш е н и е. Применим метод вариации произвольной постоянной. Решим сначала линейное однородное уравнение

$$y' - y\,\mathrm{th}\,x = 0, \tag{B}$$

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{th}\,x dx,\ \ \ln y = \int \mathrm{th}\,x dx = \ln \mathrm{ch}\,x + \ln C,$$

$$y = C\,\mathrm{ch}\,x.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)\,\mathrm{ch}\,x. \tag{C}$$

Дифференцируя, находим

$$y' = C'(x)\,\mathrm{ch}\,x + C(x)\,\mathrm{sh}\,x. \tag{D}$$

Подставляя (C) и (D) в уравнение (A), получим:

$$C'(x)\,\mathrm{ch}\,x + C(x)\,\mathrm{sh}\,x - C(x)\,\mathrm{ch}\,(x)\,\mathrm{th}\,(x) = \frac{1}{2},$$

$$C'(x)\,\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2},\ \ C'(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x},$$

откуда

$$C(x) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Осуществляя подстановку

$$e^x = t,\ e^x dx = dt,$$

найдем

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

Итак,

$$C(x) = \operatorname{arctg} e^x + C. \tag{E}$$

Подставляя (E) в (C), получим

$$y = \operatorname{ch} x\,[\operatorname{arctg} e^x + C].$$

П р и м е р 6. Проинтегрировать уравнение

$$x^2(x-1)\,y' - y^2 - x\,(x-2)\,y = 0. \tag{A}$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение можно привести к виду

$$y' - \frac{x\,(x-2)}{x^2(x-1)}\,y = \frac{1}{x^2(x-1)}\,y^2. \tag{A$'$}$$

Это уравнение Бернулли, т. е. уравнение вида (9.24). Здесь

$$p(x) = -\frac{x\,(x-2)}{x^2(x-1)};\ q(x) = \frac{1}{x^2(x-1)};\ \alpha = 2.$$

Подстановка (9.25) в данном случае принимает вид

$$u(x) = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y},$$

т. е.

$$u(x) = \frac{1}{y},\ y = \frac{1}{u(x)}, \tag{B}$$

откуда

$$u'(x) = -\frac{1}{y^2}\,y',\ y' = -y^2u'(x). \tag{C}$$

Подставляя (B) и (C) в уравнение (A), получим линейное неоднородное уравнение относительно u:

$$x^2(x-1)\frac{du}{dx}+x(x-2)\,u=-1. \tag{D}$$

Решим соответствующее однородное линейное уравнение:

$$x^2(x-1)\frac{du}{dx}+x(x-2)\,u=0. \tag{E}$$

Так как

$$\frac{du}{dx}=-\frac{x(x-2)}{x^2(x-1)}\cdot u$$

и

$$\frac{du}{u}=-\frac{x-2}{x(x-1)}\,dx=-\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx,$$

то

$$\ln u=-2\ln x+\ln(x-1)+\ln C_1,$$

$$\ln u=\ln\frac{C_1(x-1)}{x^2},$$

откуда

$$u=\frac{C_1(x-1)}{x^2}. \tag{F}$$

Общее решение уравнения (D) ищем с помощью метода вариации произвольной постоянной.

Полагаем

$$u=C_1(x)\cdot\frac{x-1}{x^2}. \tag{G}$$

Дифференцируя функцию $u(x)$, получим

$$\frac{du}{dx}=C_1'(x)\frac{x-1}{x^2}+C_1(x)\frac{2-x}{x^3}. \tag{H}$$

Подставляя (H) в уравнение (D), находим

$$x^2(x-1)\left[C_1'(x)\frac{x-1}{x^2}+C_1(x)\frac{2-x}{x^3}\right]+$$

$$+ x\,(x-2)\,C_1(x)\,\frac{x-1}{x^2} = -1$$

или

$$C_1'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2},\quad \frac{dC_1(x)}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2},\quad dC_1 = -\frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$C_1(x) = \frac{1}{x-1} + C. \tag{J}$$

Подставляя (J) в (G), получим общее решение уравнения (D):

$$u\,(x) = \frac{x-1}{x^2}\left[\frac{1}{x-1} + C\right].$$

Переходя к переменной y, получим:

$$\frac{1}{y} = \left(C + \frac{1}{x-1}\right)\frac{x-1}{x^2},$$

$$\frac{1}{y} = C\,\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 + C\,(x-1)}{x^2}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{x^2}{1 + C\,(x-1)}$$

общее решение исходного уравнения.

Задачи

Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1. $y' - 4y = e^{2x}$.

2. $y' - \dfrac{xy}{x^2+1} = x$.

3. $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\,y = 1$.

4. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}\,y = 1 + x^2$.

5. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{2x}{\cos x}$.

6. $y'x - y - x^2 = 0$.

7. $y' - \dfrac{2x}{x^2+1}\,y = 2x\,(x^2+1)$.

8. $y'\cos x + y\sin x = 1$.

Проинтегрировать уравнения Бернулли:

9. $yy' + y^2 + 4x\,(x+1) = 0$.

10. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Ответы

1. $y = Ce^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}$. **2.** $y = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}$. **3.** $y = \sqrt{1-x^2}\,\times$ $\times\,(\arcsin x + C)$. **4.** $y = (x+C)(1+x^2)$. **5.** $y = \dfrac{x^2+C}{\cos x}$. **6.** $y = x^2 + Cx$. **7.** $y = C(x^2+1) + (x^2+1)^2$. **8.** $y = C\cos x + \sin x$. **9.** $4x^2 + y^2 = Ce^{-2x}$. **10.** $y = x^4\left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2$.

§ 9.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{9.26}$$

левая часть которого есть полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du(x, y). \tag{9.27}$$

Уравнение (9.26) с учетом (9.27) можно записать так:

$$du(x, y) = 0, \tag{9.28}$$

поэтому его общий интеграл имеет вид

$$u(x, y) = C. \tag{9.29}$$

Функция $u(x, y)$ может быть найдена из системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y);\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9.30}$$

является необходимым и достаточным условием того, что левая часть уравнения (9.26) есть полный дифференциал некоторой функции.

Если левая часть уравнения (9.26) не является полным дифференциалом и существует функция $\mu = \mu(x, y)$ такая, что

$$\mu(Pdx + Qdy) = du,$$

то функция $\mu = \mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Функция $\mu\,(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \tag{9.31}$$

Если

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f\,(x), \tag{9.32}$$

то интегрирующий множитель зависит только от x, т. е.

$$\mu = \mu\,(x).$$

Если

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi\,(y), \tag{9.33}$$

то интегрирующий множитель зависит только от y, т. е.

$$\mu = \mu\,(y).$$

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$2xydx + x^2dy = 0.$$

Решение. Левая часть данного уравнения есть полный дифференциал функции $u\,(x, y) = x^2y$, т. е.

$$2xydx + x^2dy = d\,(x^2y).$$

Исходное уравнение можно переписать в виде

$$d\,(x^2y) = 0,$$

откуда получается его общий интеграл

$$x^2y = C.$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$x^3dx + (ydx + xdy - ydy) = 0.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения, получаем

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\,(xy) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0$$

или

$$d\left(\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}\right)=0,$$

откуда находим общий интеграл

$$\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C.$$

П р и м е р 3 . Проинтегрировать уравнение

$$(y^3-2xy)\,dx+(3xy^2-x^2)\,dy=0.$$

Р е ш е н и е . Это уравнение вида (9.30), для которого

$$P(x, y)=y^3-2xy,\ Q(x, y)=3xy^2-x^2.$$

Находя соответствующие частные производные, получим:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}=3y^2-2x;\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}=3y^2-2x,$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy=(y^3-2xy)\,dx+(3xy^2-x^2)\,dy,$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^3-2xy,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3xy^2-x^2. \qquad \text{(A)}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (А), считая y постоянным, при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ – неизвестную функцию от y:

$$u(x, y)=\int(y^3-2xy)\,dx=y^3x-yx^2+\varphi(y).$$

Дифференцируя функцию $u(x, y)$ по y, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2x-x^2+\varphi'(y).$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = 3xy^2 - x^2,$$

поэтому

$$3xy^2 - x^2 + \varphi'(y) = 3xy^2 - x^2,$$

откуда $\varphi'(y) = 0$ и $\varphi(y) = C_1$.

Таким образом,

$$u(x, y) = y^3 x - yx^2 + C_1.$$

С другой стороны, по формуле (9.29)

$$u(x, y) = C_2,$$

поэтому общий интеграл имеет вид

$$y^3 x - x^2 y = C, \text{ где } C = C_2 - C_1.$$

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$x(x + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$$

Решение. В данном случае

$$P(x, y) = x(x + 2y),\ Q(x, y) = x^2 - y^2,$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Условие (9.30) выполнено, поэтому данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 2yx,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Из первого равенства получаем

$$u(x, y) = \int (x^2 + 2xy)\,dx$$

или

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \varphi(y).$$

Дифференцируя по y функцию $u(x, y)$, находим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y).$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

то

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2,$$

откуда

$$\varphi'(y) = -y^2$$

и

$$\varphi(y) = -\int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + C_1.$$

Подставляя найденное выражение для $\varphi(y)$ в формулу для $u(x, y)$, получим

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2$$

или

$$\frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} = C_3.$$

Таким образом, общий интеграл можно записать в виде

$$x^3 + 3x^2 y - y^3 = C, \text{ где } C = 3C_3.$$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0.$$

Решение. Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - y^3) = 2xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(1-xy^2)=-y^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Интегрирующий множитель ищем в виде функции только от y:

$$\mu(x, y)\equiv\mu(y),$$

так как в данном случае выполняется условие (9.33), а именно:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2}{y}.$$

Для этого множителя имеем:

$$\frac{\partial\mu(y)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial\mu(y)}{\partial y}=\frac{d\mu}{dy}.$$

Условие (9.31), которое более подробно можно записать так

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P-\frac{\partial\mu}{\partial x}Q=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

принимает вид

$$\frac{d\mu}{dy}(xy^2-y^3)=\mu[-y^2-(2xy-3y^2)]$$

или

$$\frac{d\mu}{dy}(xy^2-y^3)=\mu(2y^2-2xy),$$

откуда

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y(y-x)}{y^2(x-y)}dy,\ \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{y}dy.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\ln\mu=-2\ln y=\ln\frac{1}{y^2},\ \mu(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Умножая исходное уравнение на интегрирующий множитель $\mu(y)=$ $=\frac{1}{y^2}$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$(x-y)\,dx+\left(\frac{1}{y^2}-x\right)\,dy=0.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial\,(x-y)}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}-x\right)=-1,\ \frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x},$$

где

$$P_1=\frac{\partial u}{\partial x}=x-y,\ Q_1=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y^2}-x.$$

Так как

$$P_1=\frac{\partial u}{\partial x}=x-y,$$

то

$$u\,(x,y)=\frac{x^2}{2}-yx+\varphi\,(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=-x+\varphi'(y),$$

$$-x+\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}-x,\ \varphi'(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\varphi\,(y)=-\frac{1}{y}+C_1.$$

Подставляя функцию $\varphi\,(y)$ в выражение для $u\,(x,y)$, находим

$$u\,(x,y)=\frac{x^2}{2}-yx-\frac{1}{y}+C_1.$$

Так как

$$u\,(x,y)=C_2,$$

то

$$\frac{x^2}{2}-yx-\frac{1}{y}+C_1=C_2$$

или

$$\frac{x^2}{2} - yx - \frac{1}{y} = C.$$

Преобразуя последнее равенство, получим общий интеграл в виде

$$x^2y - 2xy^2 - 2 - 2Cy = 0.$$

Задачи

Найти общие интегралы дифференциальных уравнений, предварительно преобразовав их левые части:

1. $xdy + ydx = 0.$ **2.** $y^2dx + 2xydy = 0.$

3. $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$ **4.** $xdx + ydy = 0.$

Показать, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и найти их общие интегралы:

5. $(x^2 + 2xy + a^2)\,dx + (x^2 + y^2 - a^2)\,dy = 0.$

6. $(\cos x + x\cos y + e^y)\,dy + (\sin y - y\sin x)\,dx = 0.$

7. $\operatorname{ch} x\,(\operatorname{ch} y - 1)\,dx + \operatorname{sh} y\,(\operatorname{sh} x + 1)\,dy = 0.$

8. $\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right]dy = 0.$

Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu\,(x)$ или $\mu\,(y)$:

9. $(y^2 - 2x - 2)\,dx + 2ydy = 0.$

10. $y^2dx + (xy - 1)\,dy = 0.$

11. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$

12. $(1 + x^2y)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$

Ответы

1. $xy = C.$ У к а з а н и е. $xdy + ydx = d\,(xy).$ **2.** $y^2x = C.$ **3.** $\dfrac{y}{x} = C.$ **4.** $x^2 + y^2 = C^2.$ **5.** $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3a^2x - 3a^2y = C.$ **6.** $x\sin y + y\cos x + e^y = C.$ **7.** $\operatorname{ch} y\,(1 + \operatorname{sh} x) - \operatorname{sh} x = C.$ **8.** $\dfrac{xy}{x-y} + \ln\dfrac{x}{y} = C.$ **9.** $\mu\,(x) = e^x,$

$y^2e^x - 2xe^x = C$. **10.** $\mu(y) = \dfrac{1}{y}$, $xy - \ln y = C$. **11.** $\mu(x) = \dfrac{1}{x}$, $3x^2y + x^3y^3 = C$. **12.** $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $y^2 - \dfrac{2}{x} + xy = C$.

§ 9.5. Разные дифференциальные уравнения первого порядка

Определить типы дифференциальных уравнений и решить их, найти указанные частные решения:

1. $y' = \dfrac{6}{x^2 - 9}$, $y = 0$ при $x = 0$.

2. $(1 - x^2)\, y' + xy - 3 = 0$, $y = 1$ при $x = 0$.

3. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, $y = 1$ при $x = -1$.

4. $(y + xy^2)\, dx - xdy = 0$, $y = -1$ при $x = 1$.

Определить типы дифференциальных уравнений и проинтегрировать их:

5. $(2xy + 2y^2 - 9x^2)\, dx + (x^2 + 4xy)\, dy = 0$.

6. $y' + y - xy^3 = 0$. **7.** $y' + y - x^2 = 0$.

8. $(1 - x^2y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0$.

9. $\left(\sqrt{21 - 8x - 4x^2}\right) dy - dx = 0$.

10. $(3x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\, dy = 0$.

11. $xy' - y = 2x$. **12.** $xy' - 3y + x^4y^2 = 0$.

13. $xdx + (x + y)\, dy = 0$. **14.** $y' + y\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x$.

15. $(y - 2x - 1)\, dx + (x + 2y + 1)\, dy = 0$.

16. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\, dy = 0$.

17. $(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0$.

18. $x(x^2 - 1)\, y' - (2x^2 - 1)\, y + 4x^3 = 0$.

Ответы

1. Уравнение с разделяющимися переменными, $y = \ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + C$; $y =$

$= \ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$. **2.** Линейное, $y = 3x + C\sqrt{1-x^2}$; $y = 3x + \sqrt{1-x^2}$. **3.** Однородное, $x^2 + y^2 - 2Cy = 0$; $x^2 + y^2 - 2y = 0$. **4.** Интегрирующий множитель $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$; $y = -\dfrac{2x}{x^2 + 2C}$; $y = -\dfrac{2x}{x^2+1}$. **5.** Уравнение в полных дифференциалах, оно же однородное, $x^2 y + 2xy^2 - 3x^3 = C$. **6.** Уравнение Бернулли, $\dfrac{1}{y^2} = x + \dfrac{1}{2} + Ce^{2x}$. **7.** Линейное, $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$. **8.** $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $-\dfrac{1}{x} - xy + \dfrac{y^2}{2} = C$. **9.** Уравнение с разделяющимися переменными, $y = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2(x+1)}{5} + C$. **10.** Уравнение в полных дифференциалах, оно же однородное, $x^3 + x^2 y - y^2 x - y^3 = C$. **11.** Линейное, $y = x[\ln(x^2) + C]$. **12.** Уравнение Бернулли, $7x^3 = y(x^7 + C)$. **13.** Однородное, $\ln\sqrt{y^2 + xy + x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2y+x}{\sqrt{3}x} = C$. **14.** Линейное, $y = \dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + C}{\sin x} - 1$. **15.** Уравнение, сводящееся к однородному, $y^2 + xy - x^2 + y - x = C$. **16.** Уравнение в полных дифференциалах, $(x+y)(x^2 - 7xy + y^2) = C$. **17.** Уравнение, сводящееся к однородному, $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$. **18.** Линейное, $y = 4x + Cx\sqrt{x^2 - 1}$.

§ 9.6. Задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям

Многие научные и технические задачи приводят к интегрированию дифференциальных уравнений. В таких задачах требуется найти зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого процесса, найти уравнение кривой или поверхности и т. п.

При решении этих задач необходимо:

1. Составить дифференциальное уравнение из условия задачи.
2. Определить его тип и выбрать соответствующий метод решения.

3. Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение и получить его общее решение.

4. Найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.

5. Вычислить по мере необходимости значения вспомогательных параметров (коэффициент пропорциональности и др.), используя дополнительные условия задачи.

6. Найти общий закон рассматриваемого процесса и, если это требуется, численные значения искомых величин.

Приступая к составлению дифференциального уравнения, нужно выбрать независимую переменную и искомую функцию, выразить приращение функции, соответствующее заданному приращению аргумента, через величины, о которых идет речь в условии задачи. Составив отношение приращения функции к приращению аргумента и переходя к пределу, получим дифференциальное уравнение.

При составлении дифференциального уравнения часто бывает целесообразным применять *метод дифференциалов*, заключающийся в том, что приближенное соотношение между бесконечно малыми приращениями искомых величин, верное с точностью до бесконечно малых высшего порядка, заменяется соответствующим соотношением между их дифференциалами.

Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись геометрическим или механическим смыслом производной.

Кроме того, при составлении дифференциального уравнения, в зависимости от условия задачи, используются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук.

Пример 1. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(1,4)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомой кривой, AB – отрезок касательной к кривой в данной точке, заключенный между координатными осями. По условию задачи $BM = MA$. Если OP – абсцисса точки M, то $\Delta\ AMP \sim \Delta\ ABO$ и

$$\frac{OA}{PA} = \frac{OB}{MP} = \frac{AB}{MA}. \text{ Но } \frac{AB}{MA} = 2 \text{ и } PA = OP, \text{ поэтому}$$

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{MP} = 2, \text{ т. е. } OA = 2x,\ OB = 2y.$$

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ выражается с помощью производной $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\alpha$, где $\alpha = \angle BAX$. С другой стороны, так как $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\angle BAO$ и $\mathrm{tg}\angle BAO = \frac{OB}{OA}$, то

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (см. § 9.1, пример 2), получим

$$xy = C.$$

Так как кривая должна проходить через точку $M_0(1, 4)$, то подставляя ее координаты в данное уравнение, находим:

$$1 \cdot 4 = C,\ C = 4.$$

Таким образом, искомая кривая определяется уравнением

$$xy = 4.$$

Пример 2. Точка движется по прямой линии с постоянным ускорением. Найти закон движения точки.

Решение. В качестве независимой переменной выберем время, тогда пройденный путь и скорость точки будут функциями времени. Обозначим путь, пройденный за время t, через s, скорость точки – через v и ускорение через w. По условию $w = a$, где a – постоянная величина. Пусть в начальный момент времени заданы значение скорости v_0 и значение пути s_0, т. е. $v = v_0$, $s = s_0$ при $t = 0$, где v_0 и s_0 – некоторые постоянные.

Так как ускорение точки при прямолинейном движении равно производной скорости по времени, то по условию задачи можно составить следующее дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ или } dv = adt.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $v = at + C_1$. Значение постоянной C_1 определим по начальным условиям: $v = v_0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения v и t в выражение v, найдем:

$$v_0 = a \cdot 0 + C_1, \ C_1 = v_0.$$

Следовательно, скорость движения точки выразится формулой

$$v = at + v_0.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости v через производную от пути по времени $v = \frac{ds}{dt}$, получим новое дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0 \ \text{ или } \ ds = (at + v_0)\, dt.$$

Интегрируя это уравнение, найдем общее решение данной задачи

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2.$$

Так как $s = s_0$ при $t = 0$, то $C_2 = s_0$, следовательно,

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0.$$

В частности, полагая в выражениях для v и s $a = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$, получим закон движения при свободном падении тела в пустоте:

$$v = gt, \ h = \frac{1}{2} gt^2.$$

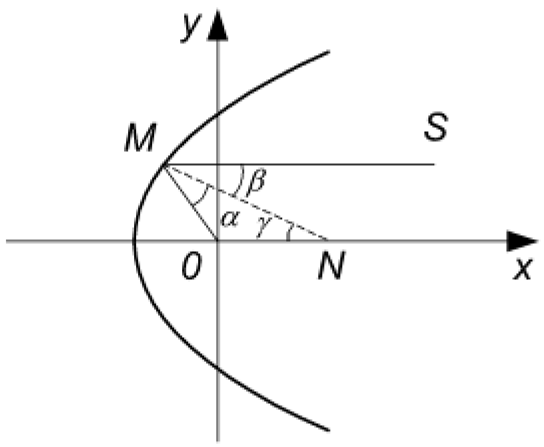


Рис. 9.2

Пример 3. Определить форму зеркала, отражающего лучи точечного источника параллельным пучком.

Решение. Источник света примем за начало координат, а ось Ox направим параллельно отраженным лучам.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, являющейся сечением зеркала плоскостью Oxy. Проведем нормаль к кривой в точке M (рис. 9.2) до пересечения с осью Ox в точке $N(x, 0)$.

Обозначим через α угол OMN и через β – угол SMN. Согласно закону отражения, $\alpha = \beta$. Так как $\gamma = \angle ONM = \beta = \alpha$, то $\Delta\, OMN$ – равнобедренный, причем $OM = ON$. Очевидно,

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отрезок ON определим из уравнения нормали

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Полагая здесь $Y = 0$, получим

$$-y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

отсюда находим отрезок

$$X = ON = x + yy'.$$

Подставляя в равенство $OM = ON$ выражения для OM и ON, получаем однородное дифференциальное уравнение

$$x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2},$$

которое может быть решено с помощью подстановки $y = ux$.

Чтобы упростить выкладки, применим искусственный прием. Положим

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Дифференцируя второе равенство по x, получим

$$2\rho\frac{d\rho}{dx} = 2x + 2yy' \ \text{ или } \ \rho\frac{d\rho}{dx} = x + yy'.$$

Но

$$x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho,$$

поэтому

$$\rho\frac{d\rho}{dx} = \rho \ \text{ или } \ \frac{d\rho}{dx} = 1,$$

откуда $\rho = x + C$. Таким образом,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C,\ y^2 = 2Cx + C^2.$$

Кривые эти являются параболами. Поверхность искомого зеркала – параболоид вращения.

Пример 4. В сосуд, содержащий 10 *л* воды, со скоростью 2 *л* в минуту непрерывно поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. За независимую переменную примем время t, за искомую функцию $y(t)$ – количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, как изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$. В сосуд поступает 2 *л* раствора в одну минуту, а в Δt минут – $2\Delta t$ литров, в которых содержится $0{,}3\cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ *кг* соли. С другой стороны, за тот же промежуток времени Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 *л*) содержится $y(t)$ *кг* соли, следовательно, в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\Delta t\cdot y(t)$ *кг* соли, если бы содержание соли в сосуде оставалось неизменным за время Δt. Но поскольку за указанное время оно меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t\to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ *л* содержится $0{,}2\Delta t\,[y(t)+\alpha]$ *кг* соли, где $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Следовательно, в растворе, поступающем за промежуток времени Δt, содержится $0{,}6\Delta t$ *кг* соли, а в вытекающем – $0{,}2\Delta t\cdot[y(t)+\alpha]$ *кг*. Приращение количества соли за это время равно разности найденных выражений, т. е.

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0{,}6\Delta t-0{,}2\Delta t\cdot[y(t)+\alpha],$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Разделим обе части полученного уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$y'(t)=0{,}6-0{,}2y(t).$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое можно записать так:

$$\frac{dy}{0{,}6-0{,}2y}=dt.$$

Интегрируя его, получим

$$y=3-Ce^{-0{,}2t}.$$

Значение произвольной постоянной определим из начального условия

$y=0$ при $t=0$ (в начальный момент в сосуде соли не было). Подставив в общее решение значения $t=0$ и $y=0$, найдем:

$$0=3-C,\ C=3.$$

Итак, изменение количества соли в сосуде определяется формулой

$$y=3-3e^{-0,2t}.$$

При $t=5$ получаем

$$y(5)=3-3e^{-0,2\cdot 5}=3-3e^{-1}\approx 1,9\ (кг).$$

Пример 5. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $5\ м/сек$. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 *сек* после этого скорость лодки уменьшается до $2\ м/сек$. Определить скорость лодки через 2 *мин* после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

Решение. Примем за независимую переменную время t, тогда скорость лодки v будет некоторой функцией t. На движущуюся лодку действует сила $F=kv$, где k – коэффициент пропорциональности. С другой стороны, по закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение, т. е. $F=m\dfrac{dv}{dt}$ (ускорение равно производной от скорости по времени). Следовательно, можно составить следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$m\frac{dv}{dt}=-kv \text{ или } \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt.$$

Интегрируя это уравнение находим его общее решение

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Постоянную интегрирования определим из начального условия: $v=5\ м/сек$ при $t=0$. Подставляя эти значения в общее решение, находим

$$5=Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0},\ C=5.$$

Следовательно, изменение скорости в зависимости от времени определится формулой

$$v=5e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad (A)$$

В этой формуле в показателе степени содержится неизвестный коэффициент $\frac{k}{m}$. Его можно определить из дополнительного условия: при $t = 40\,сек$ скорость лодки $v = 2\,м/сек$, поэтому

$$2 = 5e^{-\frac{k}{m}\cdot 40},$$

откуда

$$e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (А), получим

$$v = 5\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}\right]^{t}.$$

Из этой формулы находим скорость лодки при $t = 2\,мин = 120\,сек$:

$$v = 5\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}\right]^{120} = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{8}{25} = 0{,}32\ (м/сек).$$

Пример 6. Найти зависимость между высотой места над уровнем моря и давлением воздуха.

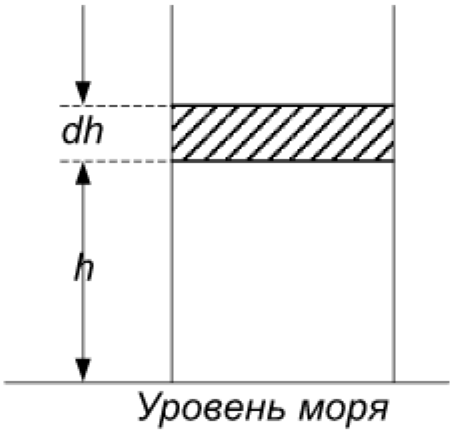


Рис. 9.3

Решение. Обозначим высоту места над уровнем моря через h ($м$) и давление воздуха через $p\,(н/м^2)$. Рассмотрим призматический столб воздуха, опирающийся на горизонтальную площадку в $1\,м^2$, расположенную на уровне моря (рис. 9.3).

Давление воздуха p в сечении этого столба на высоте h определится весом части столба, опирающейся на указанное сечение. Увеличение высоты h на бесконечно малую величину dh влечет за собой уменьшение давления на бесконечно малую величину dp, измеряемую весом слоя воздуха между двумя сечениями h и $h + dh$. Следовательно, получается уравнение

$$-dp = \gamma dh,$$

где γ есть вес одного кубометра воздуха под давлением p (здесь пренебрегается тем, что γ меняется при переходе от нижнего сечения к верхнему). Но величина γ сама пропорциональна давлению, что вытекает из закона Бойля – Мариотта $(pv = p_0 v_0)$, т. е. $\gamma = kp$, где k – коэффициент пропорциональности. Подставляя это выражение для γ в уравнение $-dp = \gamma dh$, получим

$$-dp = kpdh \text{ или } \frac{dp}{p} = -kdh.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$p = Ce^{-kh}.$$

Пусть $p = p_0$ при $h = 0$ (т. е. давление на уровне моря равно p_0), тогда $p_0 = Ce^{-k \cdot 0}$, $C = p_0$.

Таким образом, искомая зависимость устанавливается формулой

$$p = p_0 e^{-kh}.$$

Коэффициент k определяется из дополнительных условий.

Решая полученное уравнение относительно h, получаем формулу

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

позволяющую вычислить высоту h места над уровнем моря по давлению воздуха p.

Пример 7. В некоторой химической реакции вещество B разлагается на два вещества X и Y, причем скорость образования каждого из них пропорциональна наличному количеству b вещества B. Найти законы изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t, если в начале процесса $b = b_0$, $x = 0$, $y = 0$, а по истечении одного часа $b = \frac{1}{2} b_0$, $x = \frac{b_0}{8}$, $y = \frac{3b_0}{8}$.

Решение. Если через x и y обозначены количества веществ X и Y соответственно, то производная $\frac{dx}{dt}$ выражает скорость образования вещества X, производная $\frac{dy}{dt}$ – скорость образования вещества Y. В каждый момент времени t количество b разложившегося вещества B определяется формулой $b = b_0 - x - y$, где b_0 – первоначальное количество вещества B. Согласно условию задачи получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = k\,(b_0 - x - y),\ \frac{dy}{dt} = l\,(b_0 - x - y),$$

где k и l – коэффициенты пропорциональности.

Эту систему можно свести к одному дифференциальному уравнению первого порядка. В самом деле, разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого уравнения, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l}{k}.$$

Решая это уравнение, будем иметь

$$y = \frac{l}{k}x + C_1.$$

Используя начальные условия ($x = 0$, $y = 0$ при $t = 0$), находим, что $C_1 = 0$, поэтому $y = \frac{l}{k}x$. Подставляя полученное выражение для y в первое из уравнений исходной системы, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + (k + l)\,x = kb_0,$$

общее решение которого

$$x = \frac{kb_0}{k + l} + C_2 e^{-(k+l)\,t}.$$

Так как $x = 0$ при $t = 0$, то $C_2 = -\frac{kb_0}{k + l}$ и

$$x = \frac{kb_0}{k + l}(1 - e^{-(k+l)\,t}).$$

Подставляя полученное выражение для x в равенство $y = \frac{l}{k}x$, находим, что

$$y = \frac{lb_0}{k + l}(1 - e^{-(k+l)\,t}).$$

Определим теперь значения коэффициентов k и l. Так как $x = \frac{b_0}{8}$ и $y = \frac{3b_0}{8}$ при $t = 1$, то подстановка этих значений в выражения для x и y

приводит к системе уравнений:

$$\frac{k}{k+l}(1-e^{-(k+l)})=\frac{1}{8};\ \frac{l}{k+l}(1-e^{-(k+l)})=\frac{3}{8}.$$

Сложив почленно эти уравнения, получим

$$1-e^{-(k+l)}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$e^{-(k+l)}=2^{-2}\ \text{ и }\ k+l=\ln 2.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, найдем $l=3k$.

Следовательно, $k=\frac{1}{4}\ln 2,\ \ l=\frac{3}{4}\ln 2.$

Таким образом, искомое решение определяется формулами:

$$x=\frac{b_0}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right);\ y=\frac{3b_0}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right).$$

Задачи

Составить дифференциальные уравнения из условий следующих задач и решить их.

1. Найти кривую, проходящую через точку $M\,(1,3)$ и для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

2. Найти такую кривую, проходящую через точку $M\,(0,3)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, уменьшенной на две единицы.

3. Через сосуд емкостью a литров, наполненный водным раствором соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени вливается b литров чистой воды и вытекает такое же количество раствора. Найти закон, по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

4. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки $1{,}5\,м/сек$, скорость ее через $4\,сек$ $1\,м/сек$. Когда скорость уменьшится до $0{,}01\,м/сек$? Какой путь может пройти лодка до остановки?

5. Тело охладилось за 20 *мин* от 100 до $60°$. Температура окружающего воздуха поддерживается равной $20°$. Когда тело остынет до $30°$?

6. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 5 *л* в минуту. Поступающая в бак вода перемешивается с имеющимся раствором, и смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через 1 *час*?

7. Найти кривую, все нормали которой проходят через постоянную точку.

8. Вода вытекает через отверстие в дне цилиндрического сосуда. По какому закону понижается уровень воды с течением времени, если известно, что скорость v, с которой жидкость вытекает из отверстия, зависит от высоты h столба жидкости следующим образом: $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$.

9. Судно водоизмещением в 12000 *т* движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20\ м/сек$. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 *т* при скорости $1\ м/сек$. Какое расстояние пройдет судно после остановки двигателя, прежде чем скорость станет равной $5\ м/сек$. В какое время судно пройдет это расстояние?

Ответы

1. Дифференциальное уравнение $y = 2xy'$, $y^2 = 9x$. **2.** $y' = y - 2$, $y = e^x + 2$. **3.** $\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}x$, $x = C_0 e^{-\frac{b}{a}t}$, где C_0 – первоначальное количество соли. **4.** 50 *сек*; 15 *м*. **5.** $\frac{dU}{dt} = k\,(U - 20)$, где U – температура тела. Общее решение $U = 20 + Ce^{kt}$. Решение, соответствующее начальным условиям задачи: $U = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Тело остынет до $30°$ через 1 час. Указание. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. **6.** 0,5 *кг*. **7.** Окружность. **8.** $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$, $t = \frac{2}{k}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)$, где H – высота сосуда. **9.** $M\frac{dv}{dt} = -kv^2$, где M – масса судна; $\frac{12000}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = -36v^2$, $\frac{1}{v} = 0{,}03t + \frac{1}{16}$, $t = 4{,}6\ сек$, $s = 38{,}8\ м$. Указание. Принять $g = 10\ м/сек^2$.

Глава 10.
Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{10.1}$$

или

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{10.2}$$

Общим решением уравнения (10.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{10.3}$$

от x и двух произвольных независимых постоянных C_1, C_2, обращающая данное уравнение в тождество.

Общее решение уравнения (10.1), заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{10.4}$$

называется *общим интегралом*.

Частное решение

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0), \tag{10.5}$$

где C_1^0, C_2^0 – фиксированные числа, получается из общего решения (10.3) при фиксированных значениях C_1 и C_2.

З а д а ч а К о ш и . *Найти решение дифференциального уравнения* (10.1), *удовлетворяющее условиям:* $y = y_0$, $y' = y_0'$ *при* $x = x_0$. Постоянные определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x, C_1, C_2); \\ y_0' &= \varphi_x'(x, C_1, C_2). \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

§ 10.1. Простейшие типы интегрируемых уравнений второго порядка, случаи понижения порядка

К простейшим типам интегрируемых дифференциальных уравнений второго порядка относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части формулы (10.2), зависит или только от x, или только от y, или только от y', т. е. уравнения вида:

$$y'' = f(x); \tag{10.7}$$

$$y'' = f(y); \tag{10.8}$$

$$y'' = f(y'). \tag{10.9}$$

Общее решение уравнения (10.7) находится двукратным интегрированием.

Уравнение (10.8) интегрируется подстановкой

$$y' = p, \tag{10.10}$$

которая дает возможность свести его к уравнению с разделяющимися переменными y и p:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p, \ \frac{dp}{dy} \cdot p = f(y).$$

Из последнего уравнения определяется p, а из уравнения $y' = p$ – общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Уравнение (10.9) подстановкой (10.10) сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и p:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \ \frac{dp}{dx} = f(p), \ \frac{dp}{f(p)} = dx.$$

В некоторых случаях дифференциальные уравнения второго порядка сводятся к уравнениям первого порядка.

Уравнение

$$y'' = f(x, y') \tag{10.11}$$

подстановкой (10.10) приводится к уравнению

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

с неизвестной функцией p.

Уравнение

$$y'' = f(y, y') \tag{10.12}$$

той же подстановкой сводится к уравнению

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

где роль независимой переменной играет y.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y'' = \cos x$.

Решение. Так как $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то $\dfrac{dy'}{dx} = \cos x$, $dy' = \cos x dx$, откуда

$$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1,\ \frac{dy}{dx} = \sin x + C_1.$$

Интегрируя еще раз, получаем:

$$y = \int (\sin x + C_1)\, dx = -\cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

Пример 2. Найти интегральную кривую уравнения $y'' = x + 1$, проходящую через точку $M_0(1, 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Решение. Находим сначала общее решение данного уравнения. Имеем:

$$y'' = \frac{dy'}{dx},\ \frac{dy'}{dx} = x + 1,\ dy' = (x+1)\, dx,\ y' = \int (x+1)\, dx,$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + x + C_1;\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + x + C_1,\ dy = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) dx,$$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее условиям: $y_0 = 1$, $y_0' = \dfrac{1}{2}$ при $x_0 = 1$. Подставляя эти значения в выражения для $y(x)$ и $y'(x)$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} y(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1; \\ y'(1) = \frac{1}{2} + 1 + C_1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} C_1 + C_2 = \frac{1}{3}; \\ C_1 = -1. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $C_1 = -1$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$, поэтому искомая интегральная кривая определяется уравнением

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{4}{3}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' = 2y'$.

Решение. Правая часть данного уравнения зависит только от y'. Это уравнение вида (10.9). Полагая $y' = p$, находим:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx},\ \frac{dp}{dx} = 2y' = 2p,\ \frac{dp}{p} = 2dx,\ \ln p =$$

$$= 2x + \ln C',\ p = e^{2x+\ln C'} = C'e^{2x},\ \frac{dy}{dx} = C'e^{2x},\ dy = C'e^{2x}dx,$$

$$y = \frac{C'}{2}e^{2x} + C_2,\ y = C_1e^{2x} + C_2.$$

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$.

Решение. Это уравнение вида (10.8), так как правая часть его зависит только от y. Полагая $y' = p$, получим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Уравнение перепишем в виде

$$3p\frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \text{ или } p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то для определения y получаем уравнение

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx \text{ или } \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}} - 1}} = dx,$$

откуда

$$x + C_2 = \pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем подстановку

$$C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2,$$

откуда

$$y^{\frac{1}{3}} = (t^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}};\ dy = 3t\,(t^2+1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \frac{1}{C_1^2}\int \frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt = \frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right).$$

Окончательно получаем

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}\left(C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2\right).$$

П р и м е р 5. Проинтегрировать уравнение

$$(1+x^2)\,y'' - 2xy' = 0.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение вида (10.11), так как в него явно не входит искомая функция y. Положим $y' = p$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

и уравнение принимает вид

$$(1+x^2)\,\frac{dp}{dx} - 2xp = 0 \text{ или } (1+x^2)\,dp - 2xpdx = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|,$$

откуда

$$p = C_1(1+x^2).$$

Так как

$$p = \frac{dy}{dx}, \text{ то } \frac{dy}{dx} = C_1(1 + x^2),$$

и, следовательно, общее решение определяется формулой

$$y = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2.$$

Замечание. Разделяя переменные, мы предполагали, что $p \neq 0$, $1 + x^2 \neq 0$, поэтому могли потерять решения $p = 0$, $1 + x^2 = 0$. Из первого равенства вытекает, что $y' = 0$ и $y = C$. Функция $y = C$ является решением исходного уравнения, в чем можно убедиться непосредственно. Эти решения получаются из общего решения при $C_1 = 0$. Второе равенство невозможно при действительных x, оно не определяет функцию, являющуюся решением данного уравнения.

Пример 6. Проинтегрировать уравнение $yy'' - y'^2 = 0$.

Решение. Это уравнение вида (10.12), так как оно не содержит явно аргумента x. Положим $y' = p$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p, \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Подставляя выражения для y' и y'' в исходное уравнение, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными y и p:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{y} = 0 \quad (py \neq 0).$$

Интегрируя, находим

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

откуда $p = C_1 y$.

Так как $p = y'$, то $\dfrac{dy}{dx} = C_1 y$. Интегрируя это уравнение, получаем $\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|$ или $y = C_2 e^{C_1 x}$.

З а м е ч а н и е . Решения $y = 0$, $y = C$ $(y' = 0)$ получаются из общего решения соответственно при $C_2 = 0$ и $C_1 = 0$.

Задачи

Проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка:

1. $y'' = \sin x$.

2. $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

3. $y'' = \dfrac{6}{y^3}$.

4. $4y''\sqrt{y} = 1$.

5. $y'' = \dfrac{1}{a}\left(\sqrt{1 + y'^2}\right)^3$.

6. $xy'' - y' = 0$.

7. $(1 + x^2)\, y'' + y'^2 + 1 = 0$.

8. $yy'' + y'^2 + 1 = 0$.

Ответы

1. $y = -\sin x + C_1 x + C_2$. **2.** $y = \ln x + C_1 x + C_2$. **3.** $C_1 y^2 - 6 = (C_1 x + C_2)^2$. **4.** $3x + C_1 = 4\sqrt{C + \sqrt{y}}\left(\sqrt{y} - 2C\right)$. **5.** $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$. **6.** $y = C_1 x^2 + C_2$. **7.** $y = -C_1 x + (C_1^2 + 1)\ln(C_1 + x) + C_2$. **8.** $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$.

§ 10.2. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{10.13}$$

где a, b, c – постоянные, $f(x)$ – функция от x.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (10.13) называется *однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами* или уравнением без правой части:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{10.14}$$

Уравнение (10.14) можно привести к виду

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{10.15}$$

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{10.16}$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (10.15).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (10.16) получаем общее решение уравнения (10.15) в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \qquad (10.17)$$

если k_1 и k_2 – различные действительные числа;

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{k_1 x}, \qquad (10.18)$$

если $k_1 = k_2$;

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \qquad (10.19)$$

если $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ – комплексные числа.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1,\ y' = 2$ при $x = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение (10.16) для данного уравнения принимает вид $k^2 - 5k + 6 = 0.$

Так как это уравнение имеет различные действительные корни $k_1 = 2,\ k_2 = 3,$ то в соответствии с формулой (10.17) общее решение данного дифференциального уравнения таково:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Чтобы найти искомое частное решение, подставим начальные данные в выражения для y и y', где

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}.$$

Подстановка этих данных приводит к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2; \\ 2 &= 2C_1 + 3C_2, \end{aligned}\right\}$$

откуда определяются значения произвольных постоянных: $C_1 = 1,$ $C_2 = 0.$ Следовательно, искомое частное решение определяется формулой

$$y = e^{2x}.$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 4y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = -2.$

В соответствии с формулой (10.18) получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 + k + 1 = 0$$

имеет комплексные корни $k_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. В соответствии с формулой (10.19) находим общее решение

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -3$.

Общее решение определится формулой

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет мнимые корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$.

Общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Задачи

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$. **2.** $y'' + 2y' - 8y = 0$.

3. $y'' + 3y' + 2y = 0$. **4.** $y'' - 4y' = 0$.

5. $y'' - 2y' + y = 0$. **6.** $y'' + 8y' + 16y = 0$.

7. $y'' - 4y' + 13y = 0$. **8.** $y'' + 6y' + 25y = 0$.

9. $y'' + 9y = 0$. **10.** $y'' - 16y = 0$.

Ответы

1. $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. **2.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}$. **3.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. **4.** $y = C_1 + C_2e^{4x}$. **5.** $y = e^x(C_1 + C_2x)$. **6.** $y = e^{-4x}(C_1 + C_2x)$. **7.** $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. **8.** $y = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$. **9.** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. **10.** $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$.

§ 10.3. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{10.20}$$

Общее решение уравнения (10.20) находится по формуле

$$y = y_0 + \overline{y}, \tag{10.21}$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{10.22}$$

а $\overline{y}$ – частное решение неоднородного уравнения.

В простейших случаях, когда функция $f(x)$, входящая в уравнение (10.20), является показательной или полиномом, указанное частное решение находится с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(x) = ae^{mx}, \tag{10.23}$$

где a, m – постоянные, то частное решение уравнения (10.20) находят в форме

$$\overline{y} = Ae^{mx}, \tag{10.24}$$

когда m не является корнем характеристического уравнения для уравнения (10.22), и в форме

$$\overline{y} = Axe^{mx} \quad \text{или} \quad \overline{y} = Ax^2e^{mx}, \tag{10.25}$$

когда m – соответственно простой или кратный корень характеристического уравнения.

Если

$$f(x) = a\cos mx + b\sin mx, \tag{10.26}$$

где a, b, m – постоянные, то частное решение уравнения (10.20) ищут в форме

$$\bar{y} = A\cos mx + B\sin mx, \tag{10.27}$$

когда

$$p^2 + (q - m^2)^2 \neq 0, \tag{10.28}$$

и в форме

$$y = x\,(A\cos mx + B\sin mx), \tag{10.29}$$

когда

$$p = 0,\ q = m^2. \tag{10.30}$$

Если

$$f(x) = P_n(x), \tag{10.31}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то частное решение уравнения (10.20) ищут в форме

$$\bar{y} = Q_n(x) \tag{10.32}$$

при

$$q \neq 0 \tag{10.33}$$

и в форме

$$\bar{y} = xQ_n(x) \tag{10.34}$$

при

$$q = 0,\ p \neq 0. \tag{10.35}$$

П р и м е р 1 . Проинтегрировать уравнение $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$.

Р е ш е н и е . Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения таково:

$$y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Находим частное решение исходного уравнения. Так как в данном случае $f(x) = 6e^{2x}$ (т. е. $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 6$, $m = 2$) и $m = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (10.24) ищем частное решение в виде

$$\bar{y} = Ae^{2x}.$$

Находя производные этой функции $\bar{y}' = 2Ae^{2x}$, $\bar{y}'' = 4Ae^{2x}$ и подставляя выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получим

$$4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 6e^{2x},\ 2Ae^{2x} = 6e^{2x}.$$

Так как $\bar{y}$ – решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т. е. является тождеством,

$$2Ae^{2x} \equiv 6e^{2x},$$

откуда

$$2A = 6,\ \ A = 3.$$

Следовательно, частное решение имеет вид $\bar{y} = 3e^{2x}$.

На основании формулы (10.21) получаем общее решение исходного уравнения

$$y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 - k - 2 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y'' - y' - 2y = 0$$

определяется формулой $y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

Функция $f(x) = e^{2x}$ получается из формулы (10.23) при $a = 1$, $m = 2$. Так как $m = 2$ – простой корень характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (10.25) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = Axe^{2x}.$$

Подставляя в исходное уравнение выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, где

$$\bar{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},\ \bar{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x},$$

получим

$$(4Ae^{2x}+4Axe^{2x})-(Ae^{2x}+2Axe^{2x})-2Axe^{2x}\equiv e^{2x},\ 3Ae^{2x}\equiv e^{2x},$$

откуда $3A=1$, $A=\frac{1}{3}$. Следовательно, $\overline{y}=\frac{1}{3}xe^{2x}$.

На основании формулы (10.21) получаем общее решение

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}xe^{2x}.$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$y''-4y'+4y=e^{2x}.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y''-4y'+4y=0$$

имеет общее решение

$$y_0=(C_1+C_2x)\,e^{2x},$$

так как характеристическое уравнение

$$k^2-4k+4=0$$

имеет равные корни $k_1=k_2=2$.

Частное решение исходного уравнения ищем в виде $\overline{y}=Ax^2e^{2x}$, ибо $m=2$ – двойной корень характеристического уравнения. Находим производные функции $\overline{y}$:

$$\overline{y}'=2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x};\quad \overline{y}''=2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}$$

и подставляем выражения для $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ в уравнение, получаем

$$2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}-4\,(2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x})+4Ax^2e^{2x}\equiv e^{2x}$$

или

$$2Ae^{2x}\equiv e^{2x},$$

откуда

$$2A=1,\ A=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, получено частное решение $y=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$, общее решение определится формулой

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17.$$

Решение. Правая часть данного уравнения является полиномом второй степени $f(x) = P_2(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 2$, $b = -4$, $c = -17$. Так как $q \neq 0$, то в соответствии с формулой (10.32) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}' = 2Ax + B$, $\bar{y}'' = 2A$ в данное уравнение, получаем

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 4x - 17$$

или

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = 2x^2 - 4x - 17.$$

Поскольку $\bar{y}$ – решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x, т. е. является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие в разных частях, равны между собой:

$$2A = 2,\ 6A + 2B = -4,\ 2A + 3B + 2C = -17.$$

Из полученной системы уравнений находим, что

$$A = 1,\ B = -5,\ C = -2,$$

поэтому

$$\bar{y} = x^2 - 5x - 2.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

определяется формулой

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x},$$

так как характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. На основании формулы (10.21) получаем общее решение

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x^2 - 5x - 2$$

исходного уравнения.

П р и м е р 5. Проинтегрировать уравнение

$$y'' - 7y' + 10y = x^2.$$

Р е ш е н и е. Правая часть данного уравнения есть многочлен вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Так как $q \neq 0$, то решение ищем в виде

$$\overline{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя в данное уравнение выражения для $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$, где

$$\overline{y}' = 2Ax + B, \ \overline{y}'' = 2A,$$

получаем $2A - 7(2Ax + B) + 10(Ax^2 + Bx + C) = x^2$
или

$$10Ax^2 + (10B - 14A)x + (2A - 7B + 10C) = x^2,$$

откуда

$$10A = 1, \ 10B - 14A = 0, \ 2A - 7B + 10C = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$A = 0{,}1, \ B = 0{,}14, \ C = 0{,}078,$$

поэтому

$$\overline{y} = 0{,}1x^2 + 0{,}14x + 0{,}078.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 7y' + 10y = 0$$

определяется формулой

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{5x},$$

так как характеристическое уравнение

$$k^2 - 7k + 10 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 5$.
На основании формулы (10.21) получаем общее решение

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 0{,}1x^2 + 0{,}14x + 0{,}078$$

исходного уравнения.
П р и м е р 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' = x^2.$$

Решение. Так как в данном случае $q = 0$ (в левой части отсутствует член, содержащий y), то в соответствии с формулой (10.34) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = x\,(Ax^2 + Bx + C),\ \ \bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Подставляя в уравнение выражения

$$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ \ \bar{y}'' = 6Ax + 2B,$$

получим

$$(6Ax + 2B) - 3\,(3Ax^2 + 2Bx + C) \equiv x^2$$

или

$$-9Ax^2 + (6A - 6B)\,x + 2B - 3C \equiv x^2,$$

откуда

$$-9A = 1,\ \ 6A - 6B = 0,\ \ 2B - 3C = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{y} = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{3x},$$

так как для характеристического уравнения $k^2 - 3k = 0$ получаем $k_1 = 0$, $k_2 = 3$.

По формуле (10.21) получаем общее решение

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Пример 7. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 2\sin 2x + 3\cos 2x.$$

Решение. Правая часть данного уравнения является тригонометрическим полиномом вида $f(x) = a\cos mx + b\sin mx$, где $a = 3$, $b = 2$, $m = 2$. Так как выполняется условие (10.28), в соответствии с формулой (10.27) частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Находя производные

$$\bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,\ \ \bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставляя в данное уравнение выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, получим

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4\,(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+4\,(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv 2\sin 2x + 3\cos 2x$$

или

$$8B\cos 2x - 8A\sin 2x \equiv 3\cos 2x + 2\sin 2x,$$

откуда

$$8B = 3,\ \ -8A = 2,$$

т. е.

$$A = -\frac{1}{4},\ \ B = \frac{3}{8}.$$

Следовательно, частное решение определяется формулой

$$\bar{y} = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\,e^{-2x}.$$

По формуле (10.21) находим общее решение данного уравнения

$$y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = \sin 3x.$$

Решение. Правая часть данного уравнения является тригонометрическим многочленом вида $f(x) = a\cos mx + b\sin mx$, где $a = 0$, $b = 1$, $m = 3$. Так как выполнено условие (10.28), частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Находим производные

$$\bar{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \ \ \bar{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение, получаем

$$(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) - 12\,(-3A\sin 3x + 3B\cos 2x) +$$

$$+ 36\,(A\cos 3x + B\sin 3x) \equiv \sin 3x$$

или

$$(27A - 36B)\,\cos 3x + (27B + 36A)\,\sin 3x \equiv \sin 3x,$$

откуда

$$27A - 36B = 0, \ \ 27B + 36A = 1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$A = \frac{4}{225}, \ \ B = \frac{1}{75}.$$

Следовательно, имеем частное решение

$$\bar{y} = \frac{4}{225}\cos 3x + \frac{1}{75}\sin 3x.$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 12y' + 36y = 0$$

имеет общее решение

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^{6x},$$

так как для характеристического уравнения

$$k^2 - 12k + 36 = 0,$$

получаем $k_1 = k_2 = 6.$

По формуле (10.21) находим общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{6x} + \frac{4}{225}\cos 3x + \frac{1}{75}\sin 3x$$

исходного уравнения.

Замечание. Частное решение мы искали в виде $\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$, а не в виде $\bar{y} = B\sin 3x$, так как из того факта, что $a = 0$ не следует, что $A = 0$.

Задачи

1. $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$. **2.** $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$.

3. $y'' - 2y' + y = e^{x}$. **4.** $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$.

5. $y'' + y' - 6y = -x^2 - \dfrac{29}{18}$. **6.** $y'' - 4y' + 3y = x - 1$.

7. $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$. **8.** $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$.

9. $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$. **10.** $y'' + 16y = -24\sin 4x$.

Ответы

1. $y = C_1e^{7x} + C_2e^{-x} - 2e^{3x}$. **2.** $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} + 2xe^{2x}$. **3.** $y = (C_1 + C_2x)\,e^{x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{x}$. **4.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-4x} + 2x^2 - x - 1$. **5.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{18}x + \dfrac{1}{3}$. **6.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{x} + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$. **7.** $y = C_1 + C_2e^{2x} - x^3 + x^2 - 5x$. **8.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x} - \dfrac{2}{13}\sin x - \dfrac{9}{39}\cos x$. **9.** $y = C_1e^{6x} + C_2e^{2x} + 2\sin 4x + \dfrac{1}{4}\cos 4x$. **10.** $y = C_1\sin 4x + C_2\cos 4x + 3x\cos 4x$.

Глава 11.
Дифференциальные уравнения порядка выше второго. Системы дифференциальных уравнений

§ 11.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{11.1}$$

решается путем n-кратного интегрирования.

Уравнение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11.2}$$

не содержащее искомой функции y, подстановкой

$$y^{(k)} = u, \tag{11.3}$$

где $y^{(k)}$ – низшая из производных, сводится к уравнению

$$F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-k)}) = 0, \tag{11.4}$$

порядок которого равен $n-k$.

Уравнение

$$F(y, y', \ldots, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11.5}$$

не содержащее независимой переменной x, также допускает понижение порядка с помощью подстановки

$$y' = p.$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' = \sin x$.

Решение. В левой части этого уравнения стоит третья производная искомой функции, в правой – функция только от x, это уравнение вида (11.1). Так как $y''' = \dfrac{dy''}{dx}$, то

$$\frac{dy''}{dx} = \sin x, \;\; dy'' = \sin x \, dx,$$

откуда

$$y'' = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1.$$

Поскольку $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{dy'}{dx} = -\cos x + C_1 \text{ или } dy' = (-\cos x + C_1)\, dx.$$

Интегрируя, получаем

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

или

$$dy = (-\sin x + C_1 x + C_2)\, dx.$$

Интегрируя еще раз, находим общее решение исходного уравнения

$$y = \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение $xy^{\mathrm{IV}} + y''' = 0.$

Р е ш е н и е. Это уравнение вида (11.2), для которого $k = 3$, $n = 4$. Принимая низшую производную y''' за новую неизвестную функцию u, осуществим подстановку (11.3)

$$y''' = u,$$

откуда $y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{du}{dx}$. Таким образом, данное уравнение сводится к уравнению первого порядка относительно u:

$$xu' + u = 0 \text{ или } \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0,$$

из которого получаем

$$u = \frac{C_1}{x}.$$

Так как $u = y'''$, то для определения y имеем уравнение

$$y''' = \frac{C_1}{x},$$

в котором правая часть зависит только от x, т. е. уравнение вида (11.1). Трижды интегрируя, получаем соответственно:

$$y'' = \int \frac{C_1}{x}\, dx = C_1 \ln x + C_2,\ \ y'' = C_1 \ln x + C_2;$$

$$y' = C_1(x\ln x - x) + C_2 x + C_3;$$

$$y = C_1\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right) + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$$

или

$$y = C_1' x^2 \ln x + C_2' x^2 + C_3 x + C_4,$$

где

$$C_1' = \frac{C_1}{2},\ C_2' = \frac{C_2}{2} - \frac{3}{4}C_1.$$

Пример 3. Решить уравнение $y^{\mathrm{IV}} = 2y'''$.

Решение. Положим $y''' = u$, тогда $y^{\mathrm{IV}} = u'$, поэтому уравнение примет вид

$$u' = 2u,\ \frac{du}{dx} = 2u.$$

Разделяя переменные (в предположении, что $u \neq 0$) и интегрируя, получим

$$\ln u = 2x + C,\ u = e^{2x+C} = C_1 e^{2x}.$$

Так как

$$u = y''',\ \text{то}\ y''' = C_1 e^{2x},$$

откуда:

$$y'' = \frac{C_1}{2}e^{2x} + C_2;\ y' = \frac{C_1}{4}e^{2x} + C_2 x + C_3;$$

$$y = \frac{C_1}{8}e^{2x} + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4. \qquad \text{(A)}$$

Замечание. Если $u = 0$, т. е. $y''' = 0$, то $y'' = C_2$, $y' = C_2 x + C_3$, $y = \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$. Это решение получается из формулы (A) при $C_1 = 0$.

Задачи

Решить уравнения:

1. $y''' = 2x$. **2.** $y''' = \cos x$.

3. $y''' = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **4.** $y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{1}{x}$.

5. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1.$ **6.** $(y''')^2 + (y'')^2 = 1.$

Ответы

1. $y = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$ **2.** $y = -\sin x + \dfrac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$

3. $y = \ln \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$ **4.** $6y = x^3 \ln x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$

5. $y = C_1 \ln x + C_2 x + C_3 - \dfrac{1}{2x}.$ **6.** $y = C_3 + C_2 x - \sin(x + C_1).$

§ 11.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (11.7)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – постоянные величины, называется *линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение уравнения (11.7) определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n, \qquad (11.8)$$

где $y_1, \ldots, y_n$ – его линейно независимые частные решения. Последние находятся с помощью характеристического уравнения

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \qquad (11.9)$$

Если характеристическое уравнение имеет n действительных различных корней $r_m (m = 1, 2, \ldots, n)$, то каждому из них соответствует частное решение

$$y_m = e^{r_m x} \qquad (11.10)$$

и общее решение уравнения (11.7) принимает вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \qquad (11.11)$$

Если уравнение (11.9) имеет k действительных равных корней $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$ (т. е. корень r_1 имеет кратность k), то в формуле (11.8) им соответствуют решения

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = x e^{r_1 x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1} e^{r_1 x}. \qquad (11.12)$$

Однократным комплексно сопряженным корням $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ уравнения (11.9) в формуле (11.8) соответствуют решения:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x;\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (11.13)$$

Комплексно сопряженным корням $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности k соответствуют следующие частные решения:

$$\begin{aligned} &y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x; \\ &y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \qquad (11.14)$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

Решение. Для данного уравнения с постоянными коэффициентами составим характеристическое уравнение (при этом нужно сохранить коэффициенты; вместо y поставить 1, вместо ее производной k-го порядка поставить r^k):

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$r^2(r-2) - (r-2) = 0,\ \ (r-2)(r^2-1) = 0,$$

откуда

$$r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2.$$

В соответствии с формулой (11.11) получаем общее решение

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x}.$$

Замечание. Нумерация корней не имеет существенного значения. В самом деле, если считать, что $r_1 = 2, r_2 = -1, r_3 = 1,$ то общее решение определится формулой

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{x},$$

которое отличается от найденного выше только обозначениями произвольных постоянных.

Пример 2. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0,$$

один из корней которого $r_1 = 1$ можно получить методом проб.

Так как

$$(r^3 - 7r^2 + 15r - 9) : (r-1) = r^2 - 6r + 9,$$

то уравнение принимает вид

$$(r-1)\,(r^2-6r+9)=0,$$

откуда $r_2=r_3=3.$ Таким образом, характеристическое уравнение имеет один простой (однократный корень $r_1=1$) и двукратный корень $r_2=3$ (k=2).

В соответствии с формулами (11.12) и (11.8) получаем общее решение

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}+C_3xe^{3x}$$

или

$$y=C_1e^x+(C_2+C_3x)\,e^{3x}.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение $y^{\mathrm{IV}}-16y=0.$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$r^4-16=0 \text{ или } (r^2-4)\,(r^2+4)=0$$

имеет корни

$$r_1=2,\; r_2=-2,\; r_3=2i,\; r_4=-2i.$$

Мнимым сопряженным корням r_3 и r_4 (для которых $\alpha=0,\;\; \beta=2$) соответствуют частные решения

$$y_3=\cos 2x,\;\; y_4=\sin 2x,$$

полученные из формул (11.13).

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

П р и м е р 4. Решить уравнение $y^{\mathrm{IV}}-4y'''+8y''-8y'+4y=0.$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$r^4-4r^3+8r^2-8r+4=0.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, получим

$$r^4-4r^3+8r^2-8r+4=r^4-4r^3+4r^2+4r^2-8r+4=$$

$$=(r^2-2r+2)^2=(r^2-2r+2)\,(r^2-2r+2)=0,$$

откуда $r^2-2r+2=0,\;\; r^2-2r+2=0.$

Следовательно, комплексно сопряженные корни характеристического уравнения $r_{1,2}=1\pm i$ имеют кратность k=2. Так как в данном случае $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то в соответствии с формулами (11.14) и (11.8) общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + C_3 x e^x \cos x + C_4 x e^x \sin x$$

или

$$y = e^x \, [(C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x].$$

П р и м е р 5. Решить уравнение $y^{(6)} + 2y^{(\mathrm{IV})} + y'' = 0.$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению:

$$r^6 + 2r^4 + r^2 = 0.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, получим

$$r^2 (r^4 + 2r^2 + 1) = 0 \text{ или } r^2 (r^2 + 1)^2 = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение

$$rr\,(r^2 + 1)\,(r^2 + 1) = 0$$

имеет один двукратный действительный корень $r = 0$ $(r_1 = r_2 = 0)$ и пару двукратных мнимых сопряженных корней $r = \pm i$ $(r_3 = r_4 = i,$ $r_5 = r_6 = -i).$ По формулам (11.14), (11.12) и (11.8) получаем общее решение

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x.$$

П р и м е р 6. Решить уравнение $y^{(8)} + 2y^{(6)} - 2y'' - y = 0.$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$r^8 + 2r^6 - 2r^2 - 1 = 0$$

имеет два корня $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, которые можно получить методом проб, поэтому левая часть его должна делиться на $(r-1)$ и на $(r+1)$, следовательно, и на $(r^2 - 1)$. Произведя указанное деление, получим

$$(r^8 + 2r^6 - 2r^2 - 1) : (r^2 - 1) = r^6 + 3r^4 + 3r^2 + 1 = (r^2 + 1)^3.$$

Итак, характеристическое уравнение принимает вид

$$(r^2 - 1)\,(r^2 + 1)^3 = 0 \text{ или } (r-1)\,(r+1)\,(r^2 + 1)\,(r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет два указанных простых действительных корня и два мнимых корня кратности $k = 3$ $(r_3 = r_4 = r_5 = i,$ $r_6 = r_7 = r_8 = -i).$

В соответствии с формулами (11.14), (11.12) и (11.8) находим общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\cos x + (C_6 + C_7 x + C_8 x^2)\sin x.$$

Задачи

Решить однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$ **2.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

3. $y''' - 3y' - 2y = 0.$ **4.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

5. $y^{\mathrm{IV}} - 81y = 0.$ **6.** $y^{\mathrm{IV}} - 6y''' + 14y'' - 14y' + 5y = 0.$

7. $y^{(5)} + 4y^{\mathrm{IV}} + y''' - 10y'' - 4y' + 8y = 0.$

8. $y^{(6)} + 8y^{\mathrm{IV}} + 16y'' = 0.$ **9.** $y^{(8)} - y^{(6)} - 9y^{\mathrm{IV}} - 11y'' - 4y = 0.$

10. $y^{(9)} + 2y^{(7)} + y^{(5)} = 0.$

Ответы

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ $(r_1 = 1,\ \ r_2 = 2,\ \ r_3 = -2)$. **2.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$ $(r_1 = 1,\ \ r_2 = 2,\ \ r_3 = 3)$. **3.** $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + C_3 e^{2x}$ $(r_1 = r_2 = -1,\ \ r_3 = 2)$. **4.** $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^x$ $(r_1 = r_2 = r_3 = 1)$. **5.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$ $(r_1 = 3,\ \ r_2 = -3,\ \ r_3 = 3i,\ r_4 = -3i)$. **6.** $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^{2x}$ $(r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = 2 + i,\ \ r_4 = 2 - i)$. **7.** $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\, e^{-2x}$ $(r_1 = r_2 = 1,\ \ r_3 = r_4 = r_5 = -2)$. **8.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x + (C_5 + C_6 x)\sin 2x$ $(r_1 = r_2 = 0,\ \ r_3 = r_4 = 2i,\ \ r_5 = r_6 = -2i)$. **9.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\cos x + (C_6 + C_7 x + C_8 x^2)\sin x$ $(r_1 = 2,\ \ r_2 = -2,\ \ r_3 = r_4 = r_5 = i,\ r_6 = r_7 = r_8 = -i)$. **10.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + (C_6 + C_7 x)\cos x + (C_8 + C_9 x)\sin x$ $(r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0,\ \ r_6 = r_7 = i,\ \ r_8 = r_9 = -i)$.

§ 11.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (11.15)$$

называется *линейным неоднородным уравнением с постоянными ко-*

эффициентами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (11.15) становится однородным:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (11.16)$$

Общее решение уравнения (11.15) определяется формулой

$$y = y_0 + \bar{y}, \qquad (11.17)$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (11.16), а $\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

В простейших случаях частное решение может быть найдено с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x), \qquad (11.18)$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени *m*, то частное решение ищут в виде

$$\bar{y} = e^{\alpha x} M_m(x), \qquad (11.19)$$

где $M_m(x)$ – многочлен той же степени *m* с неопределенными коэффициентами, если α не является корнем характеристического уравнения, соответствующего уравнению (11.16), и в виде

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} M_m(x), \qquad (11.20)$$

если α – корень указанного уравнения кратности *k*.

В частности, при $\alpha = 0$ $f(x) = P_m(x)$ и если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение $\bar{y} = M_m(x)$, если $\alpha = 0$ – корень характеристического уравнения кратности *k*, то $\bar{y} = x^k M_m(x)$.

Если

$$f(x) = e^{\alpha x} \, [P(x) \cos\beta x + Q(x) \sin\beta x], \qquad (11.21)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, наибольшая степень которых *m*, то частное решение ищут в виде

$$\bar{y} = e^{\alpha x} \, [M(x) \cos\beta x + N(x) \sin\beta x], \qquad (11.22)$$

если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и в виде

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} \, [M(x) \cos\beta x + N(x) \sin\beta x], \qquad (11.23)$$

где $M(x)$ и $N(x)$ – многочлены степени m, если $\alpha + i\beta$ – корень указанного уравнения кратности k.

Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \qquad (11.24)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ – функции вида (11.18) и (11.21), то существует частное решение

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3, \qquad (11.25)$$

определяемое указанными выше правилами.

В общем случае частное решение уравнения (11.15) может быть найдено с помощью *метода вариации произвольных постоянных* (метода Лагранжа). Если

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

общее решение однородного уравнения (11.16), то общее решение неоднородного уравнения (11.15) ищут в виде

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n. \qquad (11.26)$$

Функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ находят из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0; \\ &C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0; \\ &C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (11.27)$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' + y = e^{2x}(x^2 + x + 1)$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, правая часть которого есть функция вида (11.18), где $\alpha = 2$, $P_2(x) = x^2 + x + 1$, т. е. m=2.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + y = 0.$$

Так как характеристическое уравнение $r^3 + 1 = 0$ имеет корни $r_1 = -1$, $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, то общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_0 = C_1 e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

В соответствии с формулой (11.19) частное решение исходного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = e^{2x} (Ax^2 + Bx + C),$$

поскольку число $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения и $P_2(x)$ – многочлен второй степени.

Находим производные функции $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = e^{2x} (2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C);$$

$$\bar{y}'' = e^{2x} (2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C);$$

$$\bar{y}''' = e^{2x} (12A + 24Ax + 12B + 8Ax^2 + 8Bx + 8C).$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$ и $\bar{y}'''$ в данное уравнение и сокращая на e^{2x}, получим тождество

$$12A + 24Ax + 12B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C \equiv x^2 + x + 1,$$

откуда

$$9A = 1,\ 24A + 9B = 1,\ 12A + 12B + 9C = 1$$

и

$$A = \frac{1}{9},\ B = -\frac{5}{27},\ C = \frac{17}{81},$$

поэтому

$$\bar{y} = e^{2x} \left(\frac{1}{9} x^2 - \frac{5}{27} x + \frac{17}{81} \right).$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) +$$

$$+ e^{2x} \left(\frac{x^2}{9} - \frac{5x}{27} + \frac{17}{81} \right).$$

Пример 2. Решить уравнение $y''' + y' = x^4$.

Решение. Правая часть уравнения есть функция вида (11.18), для которой $\alpha = 0$, m=4.

Характеристическое уравнение

$$r^3 + r = 0 \text{ или } r\,(r^2 + 1) = 0$$

имеет корни $r_1 = 0$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, поэтому общее решение однородного уравнения $y''' + y' = 0$ определяется формулой

$$y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Так как число $\alpha = 0$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = xe^{0\cdot x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$$

или

$$\bar{y} = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex.$$

Находим производные функции $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E;$$

$$\bar{y}'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D;$$

$$\bar{y}''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C.$$

Подставляя выражения для $\bar{y}', \bar{y}'''$ в данное уравнение, получим тождество

$$60Ax^2 + 24Bx + 6C + 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E = x^4,$$

откуда

$$5A = 1,\ 4B = 0,\ 60A + 3C = 0,\ 24B + 2D = 0,\ 6C + E = 0,$$

т. е.

$$A = \frac{1}{5},\ B = 0,\ C = -4,\ D = 0,\ E = 24.$$

Таким образом

$$\bar{y} = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x$$

и

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x.$$

П р и м е р 3. Проинтегрировать уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.

Р е ш е н и е. В данном случае правая часть – функция вида (11.18), где $\alpha = 1$, m=0. Число $\alpha = 1$ равно трехкратному корню характеристического уравнения $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, поэтому частное решение в соответствии с формулой (11.20) ищем в виде

$$\overline{y} = ax^3 e^x.$$

Дифференцируя функцию $\overline{y}$, получаем:

$$\overline{y}' = (ax^3 + 3ax^2)\, e^x; \ \overline{y}'' = (ax^3 + 6ax^2 + 6ax)\, e^x;$$

$$\overline{y}''' = (ax^3 + 9ax^2 + 18ax + 6a)\, e^x.$$

Подставляя найденные значения $\overline{y}', \overline{y}'', \overline{y}'''$ и $\overline{y}$, сокращая результат на e^x, получим

$$6a = 2, \ a = \frac{1}{3}.$$

Так как $y_0 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^x$, то общее решение данного уравнения определится формулой

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x.$$

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} - y = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} + \cos\beta x.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$r^4 - 1 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i, r_4 = -i$, поэтому

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

В соответствии с формулой (11.25) ищем частное решение:

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \overline{y}_3,$$

где

$$\overline{y}_1 = Ae^{\alpha x}, \ \overline{y}_2 = Be^{-\alpha x}, \ \overline{y}_3 = C\sin\beta x + D\cos\beta x$$

соответственно частные решения уравнений

$$y^{\mathrm{IV}} - y = e^{\alpha x}, \ y^{\mathrm{IV}} - y = e^{-\alpha x}, \ y^{\mathrm{IV}} - y = \cos\beta x.$$

Находя производные $\bar{y}_1^{\mathrm{IV}}, \bar{y}_2^{\mathrm{IV}}, \bar{y}_3^{\mathrm{IV}}$ и подставляя их выражения и $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ в последние уравнения, получим:

$$A = \frac{1}{\alpha^4 - 1}, \ B = \frac{1}{\alpha^4 - 1}, \ C = 0, \ D = \frac{1}{\beta^4 - 1}.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{\alpha^4 - 1} + \frac{\cos\beta x}{\beta^4 - 1}.$$

З а м е ч а н и е . В случае, если $\alpha = \beta = 1,$ общее решение будет:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{x}{4}(e^x - e^{-x}) - \frac{x \sin x}{4}.$$

В этом случае частные решения нужно искать в виде:

$$\bar{y}_1 = Axe^x; \ \bar{y}_2 = Bxe^{-x}; \ \bar{y}_3 = x\,(C\sin x + D\cos x).$$

П р и м е р 5 . Решить уравнение $y''' + y' = \operatorname{tg} x.$

Р е ш е н и е . Характеристическое уравнение $r^3 + r = 0$ имеет корни $r_1 = 0, \ r_2 = i, \ r_3 = -i,$ поэтому

$$y_1 = 1, \ y_2 = \cos x, \ y_3 = \sin x$$

и общее решение однородного уравнения выразится формулой

$$y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Методом вариации произвольных постоянных находим общее решение данного неоднородного уравнения, полагая

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x.$$

Система (11.27) для определения функций $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ запишется так:

$$C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0;$$

$$-C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0;$$

$$-C_2' \cos x - C_3' \sin x = \operatorname{tg} x.$$

Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего – на $\cos x$ и сложив почленно, получим

$$C_2' = -\sin x.$$

Из второго уравнения имеем

$$C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Сложив почленно первое уравнение с третьим, получим

$$C_1' = \operatorname{tg} x.$$

Интегрируя три полученных уравнения, находим:

$$C_1(x) = -\ln\cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \cos x + C_2;$$

$$C_3(x) = \sin x - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Следовательно, общее решение данного неоднородного уравнения выразится формулой

$$y = -\ln\cos x - \sin x \cdot \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ C_2\cos x + C_3\sin x + \overline{C_1},$$

где $\overline{C_1} = C_1 + 1.$

Задачи

Решить линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y''' - y'' + y' - y = (x+1)\,e^{2x}.$

2. $y''' - 7y' + 6y = x^2.$

3. $y^{\mathrm{IV}} - 8y''' + 23y'' - 28y' + 12y = x.$

4. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = -8e^{-x} + 8e^{x} + 12\sin x - 12\cos x.$

5. $y^{(5)} - y'' = x.$

6. $y^{(6)} + 3y^{\mathrm{IV}} + 3y'' + y = 9\sin 2x.$

7. $y''' + 2y'' + 5y' = 4xe^{-x} - 68\cos 2x + x.$

8. $y^{\mathrm{IV}}-3y''-4y=x^2+1+e^{3x}+4\cos x.$

С помощью метода вариации произвольных постоянных решить линейные неоднородные уравнения:

9. $y'''-3y''+y'-3y=\sin x.$

10. $y'''-2y''-y'+2y=\dfrac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}.$

Ответы

1. $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x+e^{2x}\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{4}{25}\right).$ **2.** $y=\dfrac{1}{6}\left(x^2+\dfrac{7}{3}x+\right.$ $\left.+\dfrac{49}{18}\right)+C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}.$ **3.** $y=\dfrac{3x+7}{36}+(C_1+C_2x)\,e^{2x}+C_3e^x+$ $+C_4e^{3x}.$ **4.** $y=(C_1+C_2x+x^2)\,e^x+(C_3+C_4x-x^2)\,e^{-x}+3\sin x-3\cos x.$ **5.** $y=C_1+C_2x+\dfrac{x^3}{6}+C_3e^{-x}+C_4e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_5e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x.$ **6.** $y=$ $=(C_1+C_2x+C_3x^2)\cos x+(C_4+C_5x+C_6x^2)\sin x-\dfrac{1}{3}\sin 2x.$ **7.** $y=-(x+$ $+1)\,e^{-x}+8\cos 2x-2\sin 2x+\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{2x}{25}+C_1+C_2e^{-x}\cos 2x+C_3e^{-x}\sin 2x.$ **8.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos x+C_4\sin x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{e^{3x}}{50}-\dfrac{2x\sin x}{5}.$ **9.** $y=$ $=C_1e^{3x}+C_2\sin x+C_3\cos x+\dfrac{3\cos x-21\sin x}{200}+\dfrac{x}{20}(3\cos x-\sin x).$ **10.** $y=$ $=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+\dfrac{1}{x}.$

§ 11.4. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами называется совокупность дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
y_1'&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n+f_1(x);\\
y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n+f_2(x);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'&=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{n}y_n+f_n(x);
\end{aligned}\right\}\qquad(11.28)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – неизвестные функции независимой переменной x; a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ – постоянные величины.

Если при всех рассматриваемых значениях x все данные функции $f_k(x) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то система (11.28) называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Решением системы (11.28) называется система n функций

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \tag{11.29}$$

обращающих равенства (11.28) в тождества.

Задача Коши. *Найти такое решение (11.29) системы (11.28), которое при $x = x_0$ принимало бы заданные значения*

$$y_1(x_0) = b_1,\ y_2(x_0) = b_2,\ \ldots,\ y_n(x_0) = b_n.$$

Методом исключения $(n - 1)$ неизвестных функций система (11.28) в некоторых случаях может быть сведена к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно одной из неизвестных функций.

Замечание. Если независимую переменную обозначить через t, то система (11.28) примет вид

$$\dot{y}_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(t)\ \ (k = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{11.30}$$

где точкой обозначена производная по t. Этот способ обозначения очень часто применяется в механике.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z,\ \frac{dz}{dx} = -y.$$

Решение. Эта система из двух уравнений с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных функций y и z. Дифференцируя по x первое уравнение, находим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}.$$

Принимая во внимание второе уравнение системы, получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y,\ \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$

Таким образом, данная система сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянным коэффициентом относительно неизвестной функции y. Решим это уравнение. Так как характеристическое уравнение $r^2+1=0$ имеет корни $r_1=i, r_2=-i$, то общее решение определится формулой

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Отсюда и из первого уравнения системы находим z:

$$z=\frac{dy}{dx}=-C_1\sin x+C_2\cos x.$$

Итак, получено обще решение системы:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x;\ z=-C_1\sin x+C_2\cos x.$$

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=5y+4z;\ \frac{dz}{dx}=4y+5z.$$

Найти решение, удовлетворяющее условию: $y=2, z=0$ при $x=0$.

Решение. Дифференцируя по x первое уравнение и подставляя выражения для первых производных из данной системы, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=5\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=5(5y+4z)+4(4y+5z),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=41y+40z. \qquad \text{(A)}$$

Из первого уравнения системы найдем z:

$$z=\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}-5y\right). \qquad \text{(B)}$$

Подставляя выражение (B) в уравнение (A), находим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=41y+10\left(\frac{dy}{dx}-5y\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=10\frac{dy}{dx}-9y \text{ или } y''-10y'+9y=0.$$

Решая это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (см. § 15.2), получим

$$y=C_1e^x+C_2e^{9x}. \qquad \text{(C)}$$

Функция z выражается формулой (B), для чего находим

$$y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}.$$

Следовательно,

$$z = \frac{1}{4}[C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5(C_1 e^x + C_2 e^{9x})] = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Общее решение системы:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x};\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \tag{D}$$

Решим задачу Коши, т. е. найдем решение, удовлетворяющее условию $y = 2$, $z = 0$ при $x = 0$. Подставляя эти значения в систему (D), получим

$$2 = C_1 + C_2,$$

$$0 = -C_1 + C_2,$$

откуда $C_1 = 1, C_2 = 1$. Итак, получено частное решение

$$y = e^x + e^{9x},\ z = -e^x + e^{9x}.$$

П р и м е р 3. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 5x - 3y + 2e^{3t}; \\ \dot{y} &= x + y + 5e^{-t}. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Это система вида (11.30), точкой здесь обозначена производная по независимой переменной t. Как и в предыдущих примерах, это система двух уравнений относительно двух неизвестных функций x и y, но эта система является неоднородной $(f_1(t) = 2e^{3t}, f_2(t) = 5e^{-t})$. Покажем, что систему можно привести к неоднородному линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференцируя по t первое уравнение и подставляя выражения для $\dot{x}, \dot{y}$ из уравнений системы, находим

$$\ddot{x} = 5\dot{x} - 3\dot{y} + 6e^{3t} =$$

$$= 5(5x - 3y + 2e^{3t}) - 3(x + y + 5e^{-t}) + 6e^{3t},$$

$$\ddot{x} - 22x + 18y = 16e^{3t} - 15e^{-t}. \tag{A}$$

Найдем y из первого уравнения системы:

$$y = \frac{1}{3}(5x - \dot{x} + 2e^{3t}). \tag{B}$$

Подставляя выражение для y в уравнение (A), получим

$$\ddot{x} - 22x + 6(5x - \dot{x} + 2e^{3t}) = 16e^{3t} - 15e^{-t},$$

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 4e^{3t} - 15e^{-t}. \tag{C}$$

Решая это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, находим

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}. \tag{D}$$

Так как

$$\dot{x} = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 12e^{3t} + e^{-t},$$

то из уравнения (B) получаем

$$y = \frac{1}{3}[5(C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}) -$$

$$-(2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 12e^{3t} + e^{-t}) + 2e^{3t}],$$

$$y = C_1e^{2t} + \frac{1}{3}C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \tag{E}$$

Общее решение определяется формулами (D) и (E).

З а м е ч а н и е . Частное решение уравнения (C) необходимо было искать в виде

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2,$$

где $\bar{x}_1$ – частное решение уравнения $\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 4e^{3t}$, $\bar{x}_2$ – частное решение уравнения $\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = -15e^{-t}$, причем $\bar{x}_1 = Ae^{3t}, \bar{x}_2 = Be^{-t}$.

П р и м е р 4 . Решить систему уравнений:

$$\dot{x} = y; \ \dot{y} = z, \ \dot{z} = x.$$

Р е ш е н и е . Дифференцируя по t первое уравнение и принимая во внимание второе, находим

$$\ddot{x} = \dot{y}, \ \ddot{x} = z.$$

Дифференцируя последнее уравнение и принимая во внимание третье уравнение системы, получим

$$\dddot{x} = \dot{z}, \ \dddot{x} = x.$$

Решим это линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Имеем

$$x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \tag{A}$$

Так как $y = \dot{x}$, то

$$y = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \right.$$

$$\left. - \frac{C_2\sqrt{3} + C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \tag{B}$$

Поскольку $z = \dot{y}$, то

$$z = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2\sqrt{3} - C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \tag{C}$$

Общее решение системы определяется формулами (A) – (C).

Пример 5. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + z - y; \\ \dot{y} &= x + y - z; \\ \dot{z} &= 2x - y. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Дифференцируя по t первое уравнение и принимая во внимание все уравнения системы, находим

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{z} - \dot{y} = (x + z - y) + (2x - y) - (x + y - z),$$

$$\ddot{x} = 2x + 2z - 3y.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\dddot{x} = 2\dot{x} + 2\dot{z} - 3\dot{y} = 2\,(x + z - y) + 2\,(2x - y) - 3\,(x + y - z),$$

$$\dddot{x} = 3x + 5z - 7y.$$

Таким образом, для определения x, y, z через $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$ имеем три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + z - y; \\ \ddot{x} &= 2x + 2z - 3y; \\ \dddot{x} &= 3x + 5z - 7y. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно x, y, z, получим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 2; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} \dot{x} & 1 & -1 \\ \ddot{x} & 2 & -3 \\ \dddot{x} & 5 & -7 \end{vmatrix} = \dot{x} + 2\ddot{x} - \dddot{x};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dot{x} \\ 2 & 2 & \ddot{x} \\ 3 & 5 & \dddot{x} \end{vmatrix} = 4\dot{x} - 2\ddot{x}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & \dot{x} & -1 \\ 2 & \ddot{x} & -3 \\ 3 & \dddot{x} & -7 \end{vmatrix} = 5\dot{x} - 4\ddot{x} + \dddot{x}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\dot{x} + 2\ddot{x} - \dddot{x}}{2} \ \text{ или } \ \dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0; \tag{A}$$

$$y = \frac{4\dot{x} - 2\ddot{x}}{2} \ \text{ или } \ y = 2\dot{x} - \ddot{x}; \tag{B}$$

$$z = \frac{5\dot{x} - 4\ddot{x} + \dddot{x}}{2} \ \text{ или } \ z = \frac{1}{2}(5\dot{x} - 4\ddot{x} + \dddot{x}). \tag{C}$$

Уравнение (A) является линейным однородным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Решая его, находим

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}. \tag{D}$$

Из уравнений (B) и (C) с учетом формулы (D) получаем соответственно:

$$y = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}; \tag{E}$$

$$z = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}. \tag{F}$$

Итак, общее решение системы определяется формулами (D) – (F).

Задачи

Решить линейные однородные системы с постоянными коэффициентами:

1. $\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -2y;\\ \frac{dz}{dx} &= z.\end{aligned}\right\}$ **2.** $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y;\\ \frac{dy}{dt} &= 2y.\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 8y - x;\\ \dot{y} &= x + y.\end{aligned}\right\}$ **4.** $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x + y;\\ \dot{y} &= 3y - 2x.\end{aligned}\right\}$

Решить линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами:

5. $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 4y + e^{-2t};\\ \dot{y} &= x - 2y - 3e^{-2t}.\end{aligned}\right\}$ **6.** $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 3y;\\ \dot{y} &= x - 2y + 2\sin t.\end{aligned}\right\}$

Решить линейные однородные системы с постоянными коэффициентами:

7. $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - y + z;\\ \dot{y} &= x + y + z;\\ \dot{z} &= 4x - y + z.\end{aligned}\right\}$ **8.** $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 4y - 2z - 3x;\\ \dot{y} &= z + x;\\ \dot{z} &= 6x - 6y + 5z.\end{aligned}\right\}$

Ответы

1. $y = C_1 e^{-2x}$; $z = C_2 e^{x}$. **2.** $y = C_1 e^{2t}$; $x = \frac{C_1}{2} e^{2t} + C_2$. **3.** $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$; $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. **4.** $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$; $y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$. **5.** $x = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t} + 3e^{-2t}$; $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 4e^{-2t}$. **6.** $x = 3C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + 3\sin t$; $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - \cos t + 2\sin t$. **7.** $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}$; $y = C_1 e^{t} - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}$; $z = -C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}$. **8.** $x = C_1 e^{t} + C_3 e^{-t}$; $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$; $z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}$.

Глава 12. Приближенное решение уравнений

§ 12.1. Отделение корней уравнений

Корнем уравнения

$$f(x) = 0 \tag{12.1}$$

называется такое значение $x = \xi$ аргумента, при котором это уравнение обращается в тождество: $f(\xi) = 0$. Корень уравнения (12.1) геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, точки касания или другой общей точки графика функции $y = f(x)$ и оси Ox (рис. 12.1).

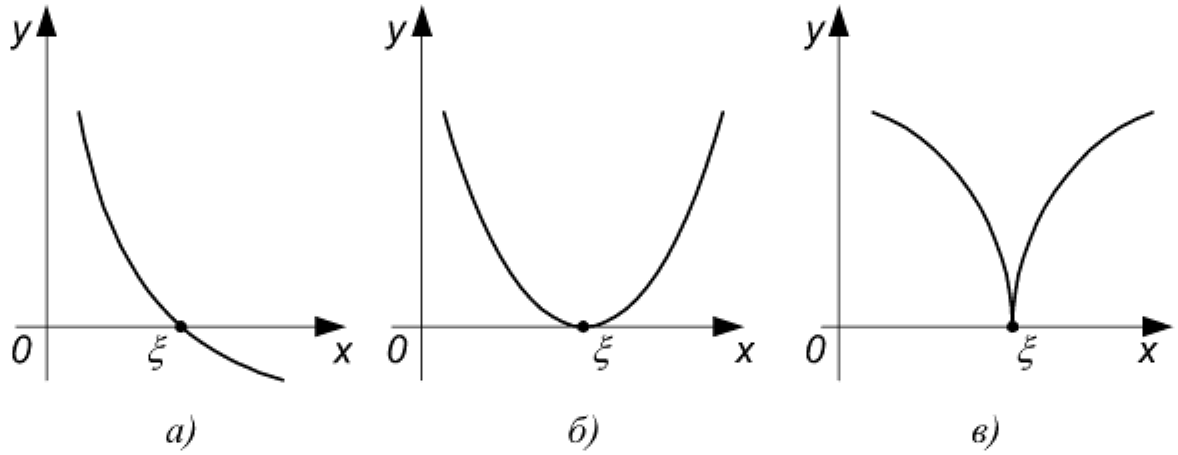


Рис. 12.1

Отделить корень уравнения – значит найти такой *конечный* промежуток, внутри которого имеется *единственный* корень данного уравнения. Отделение корней можно осуществить аналитическим или графическим способом.

Для отделения корней уравнения (12.1) применяют следующий критерий: если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то этот отрезок содержит один и только один корень уравнения $f(x) = 0$. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке является сохранение знака ее производной (если $f'(x) > 0$, то функция возрастает; если $f'(x) < 0$, функция убывает).

Отделение корней уравнения (12.1) можно выполнить графически, построив график функции $f(x)$, по которому можно судить о том, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью Ox. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение (12.1) в эквивалентном виде:

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{12.2}$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ строились проще, чем график $f(x)$. Корень уравнения (12.2) представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$. Таким способом можно, например, отделить корни уравнения $x^3 + px + q = 0$; это будут абсциссы точек пересечения прямой $y = -px - q$ и линии $y = x^3$.

Пример 1. Отделить корни уравнения $x^3 + 2x - 1 = 0$.

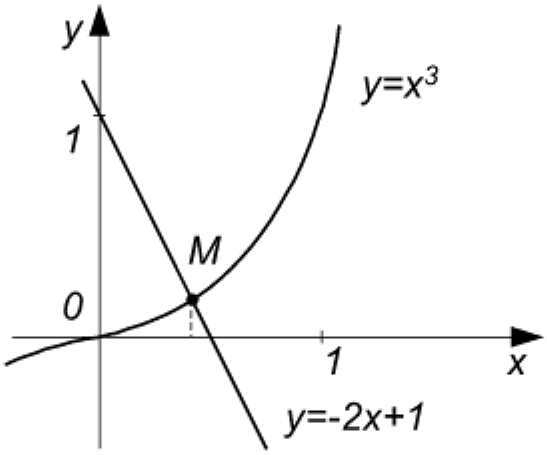


Рис. 12.2

Решение. В данном случае $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $\quad f'(x) = 3x^2 + 2$. Поскольку $f'(x) > 0$ при всех x, то функция $f(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток (a, b), на котором он находится. Методом проб находим отрезок $[a, b]$, для которого $f(a)\, f(b) < 0$ (т. е. на концах отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков). Для этого вычислим значения функции при некоторых значениях аргумента:

$$f(-1) = (-1)^3 + 2\,(-1) - 1 = -4 < 0,\ f(0) = -1 < 0,\ f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0.$$

Так как $f(-1)\, f(0) > 0$, то на отрезке $[-1, 0]$ корня нет; поскольку $f(0)\, f(1) < 0$, то корень находится на отрезке $[0, 1]$.

Замечание 1. Можно указать отрезок меньшей длины, которому принадлежит корень. Взяв середину отрезка $[0, 1]$, т. е. положив $x = 0{,}5$, получим $f(0{,}5) = (0{,}5)^3 + 2 \cdot 0{,}5 - 1 > 0$. Так как $f(0)\, f(0{,}5) < 0$, то корень находится на отрезке $[0; 0{,}5]$. Этот процесс можно продолжать.

Замечание 2. Корень данного уравнения можно отделить и графически. Придадим уравнению вид $x^3 = -2x + 1$, т. е. вид (12.2), и построим графики функций $y = x^3$, $y = -2x + 1$ (рис. 12.2). Эти графики пересекаются в точке M, абсцисса которой принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Пример 2. Графически отделить корни уравнения $x \ln x - 1 = 0$.

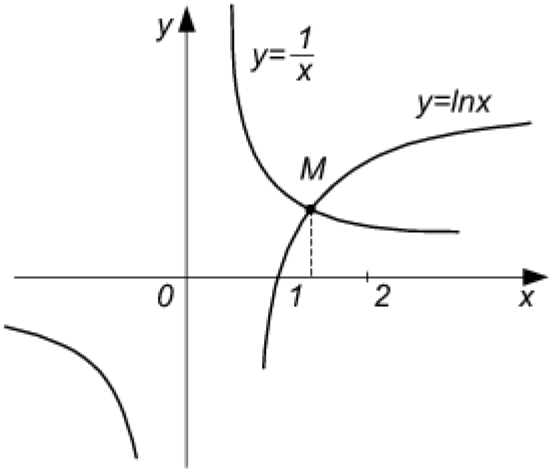


Рис. 12.3

Решение. Данное уравнение представим в виде $\ln x = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ и рассмотрим графики двух функций: $y = \ln x$, $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 12.3). Графики этих функций пересекаются в единственной точке M, абсцисса которой принадлежит интервалу $(1, 2)$. Следовательно, единственный корень уравнения находится в интервале $(1, 2)$.

Задачи

Отделите корни уравнений:

1. $x^3 + 3x - 1 = 0$. **2.** $x^3 - 5x + 1 = 0$.

3. $xe^x - 1 = 0$. **4.** $x^3 + x - 3 = 0$.

5. $x^3 + 4x + 3 = 0$. **6.** $x^3 - 2x + 7 = 0$.

7. $x^3 - 3x + 1 = 0$. **8.** $x^3 - 7x + 4 = 0$.

9. $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. **10.** $x^3 + 4x^2 - 6 = 0$.

11. $x^4 + x - 1 = 0$. **12.** $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

13. $e^x + x - 3 = 0$. **14.** $e^x + x^2 - 2 = 0$.

15. $(x-1)^2 - \sin 2x = 0$.

Ответы

1. $(0, 1)$. **2.** $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$. **3.** $(0, 1)$. **4.** $(1, 2)$. **5.** $(-1, 0)$. **6.** $(-3, -2)$. **7.** $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. **8.** $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$. **9.** $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$. **10.** $(-4, -3)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$. **11.** $(0, 1)$, $(-2, -1)$. **12.** $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. **13.** $(-3, -2)$, $(-2, -1)$. **14.** $(-2, -1)$, $(0, 1)$. **15.** $(0, 1)$, $(1, 2)$.

§ 12.2. Метод касательных

Метод касательных (или метод Ньютона) состоит в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ находится единственный корень ξ уравнения (12.1). Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$ до пересечения с осью Ox (рис. 12.4): ее уравнение имеет вид $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, находим абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox: $x_1 = \dfrac{a - f(a)}{f'(a)}$ в предположении, что $f'(a) \neq 0$. Абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox можно взять в качестве x_1 – первого приближения корня. Проведя касательную через соответствующую точку $A_1(x_1, f(x_1))$ и найдя точку ее пересечения с осью Ox, получим x_2 – второе приближение корня. Аналогично определяются последующие приближения. В методе касательных n-ое приближение вычисляется по формуле

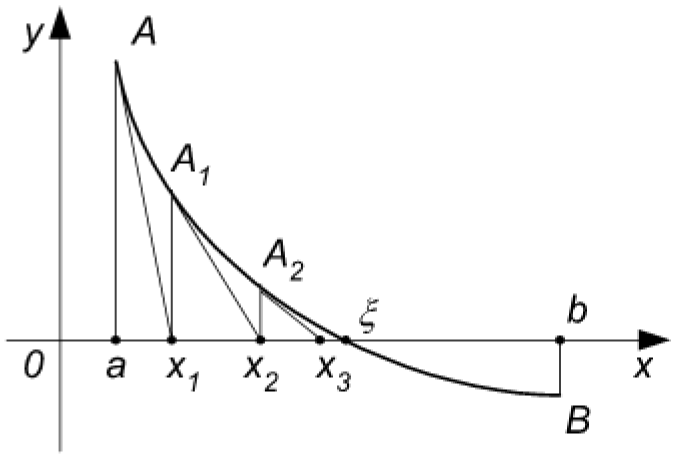


Рис. 12.4

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{12.3}$$

причем за начальное приближение принимается такое значение x_0 из отрезка $[a, b]$, для которого выполняется *условие Фурье*

$$f(x_0)\, f''(x) > 0\,. \tag{12.4}$$

Если функция $f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то оценка абсолютной погрешности вычислений определяется формулой

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{f(x_n)}{\mu}, \tag{12.5}$$

где $\mu = \min\limits_{a \le x \le b} \left|f'(x)\right|$.

Пример 1. Методом касательных найти действительный корень уравнения $x^3 + x - 3 = 0$.

Решение. Записав данное уравнение в виде $x^3 = -x + 3$ и построив графики функций $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x + 3$, найдем, что единственный корень уравнения принадлежит отрезку $[1, 2]$. Укажем отрезок меньшей длины, на котором находится корень. Так как $f(x) = x^3 + x - 3$, $f(1{,}2) = (1{,}2)^3 + 1{,}2 - 3 = -0{,}072 < 0$, $f(1{,}3) = (1{,}3)^3 + 1{,}3 - 3 = 0{,}497 > 0$, то корень лежит на отрезке $[1{,}2; 1{,}3]$. Серединой этого отрезка является точка $x = 1{,}25$. Поскольку $f(1{,}25) = (1{,}25)^3 + 1{,}25 - 3 = 0{,}203125 > 0$ и $f(1{,}2) < 0$, то искомый корень принадлежит отрезку $[1{,}20; 1{,}25]$. Данная функция $f(x) = x^3 + x - 3$ имеет производные $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f''(x) = 6x$, принимающие положительные значения на отрезке $[1{,}20; 1{,}25]$. В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 1{,}25$, так как для этой точки выполняется условие (12.4).

Результаты вычислений, выполненных по формуле (12.3) записываем в таблице 12.1, из которой видно, что искомый корень $x = 1{,}21341$.

Таблица 12.1

n	x_n	x_n^3	$f(x_n) = x_n^3 + x_n - 3$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 1$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,25	1,953125	0,203125	5,6875	0,035714	1,214286
1	1,214286	1,790452	0,004738	5,42347	0,000874	1,213412
2	1,213412	1,786590	0,000002	5,417107	0,0000004	1,213412

Пример 2. Вычислить приближенно по методу касательных с точностью до пяти десятичных знаков после запятой больший отрицательный корень уравнения $x^3 - 12x - 8 = 0$.

Решение. Графически отделяя корни данного уравнения, заключаем, что уравнение имеет три действительных корня; больший отрицательный корень принадлежит отрезку $[-1, 0]$. Укажем отрезок меньшей длины, на котором находится корень; это отрезок $[-0{,}7; -0{,}65]$.

Поскольку $f''(x) = 6x$, $f''(-0{,}65) < 0$,

$f(-0{,}65) < 0$, $f(-0{,}65)\,f''(-0{,}65) > 0$, т. е. выполнено условие (12.4), то в качестве нулевого приближения берем $x_0 = -0{,}65$. По формуле (12.3) вычисляем последовательные приближения, записываем их в таблице 12.2, из которой видно, что искомый корень $x = -0{,}694593$.

Таблица 12.2

n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{1}{f'(x_n)}$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	– 0,65	– 0,474625	– 0,093175	– 0,044223	– 0,694223
1	– 0,694223	– 0,003902	– 0,094759	– 0,000370	– 0,694593
2	– 0,694593	– 0,000003	– 0,095711	– 0,0000003	– 0,694593

Задачи

Методом касательных найдите действительные корни уравнений:

1. $x^3 + x - 1 = 0.$ **2.** $x^3 - x + 1 = 0.$

3. $x^3 + x - 3 = 0.$ **4.** $x^3 - x + 3 = 0.$

5. $x^3 + x + 1 = 0.$ **6.** $x^3 + 2x - 4 = 0.$

7. $x^3 - 3x + 3 = 0.$ **8.** $x^3 + 8x - 6 = 0.$

9. $x^4 + x + 1 = 0.$ **10.** $x^4 + 5x - 3 = 0.$

11. $x^5 + 4x - 2 = 0.$ **12.** $x^5 - 6x + 4 = 0.$

Ответы

1. 0,682328. **2.** – 1,324718. **3.** 1,213412. **4.** – 1,671699. **5.** – 0,6823. **6.** 1,179509. **7.** – 2,103803. **8.** 0,706011. **9.** 0,724492. **10.** – 1,875719; 0,577721. **11.** 0,492738. **12.** – 1,700040; 0,693378; 1,310235.

§ 12.3. Метод итераций

Если каким-либо способом получено приближенное значение x_0 корня уравнения (12.1), то уточнение корня можно осуществить методом последовательных приближений или методом итераций. Для этого уравнение (12.1) представляют в виде

$$x = \varphi(x), \tag{12.6}$$

что всегда можно сделать, и притом многими способами, например,

$$x = x + cf(x), \tag{12.7}$$

где c – произвольная постоянная.

Пусть число x_1 есть результат подстановки x_0 в правую часть уравнения (12.6): $x_1 = \varphi(x_0)$; далее, $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2), \ldots,$

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \qquad (12.8)$$

Процесс последовательного вычисления чисел x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ по формуле (12.8) называется методом последовательных приближений или методом итераций.

Итерационный процесс сходится $(\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi)$, если на отрезке $[a, b]$, содержащем корень ξ и его последовательные приближения, выполнено условие

$$\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| \le q < 1. \qquad (12.9)$$

З а м е ч а н и е. В качестве x_0 можно взять произвольное значение из интервала, содержащего корень; такой интервал можно сделать достаточно малым.

П р и м е р 1. Методом итераций найти меньший положительный корень уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Графически отделяя корни данного уравнения, заключаем, что уравнение имеет три действительных корня, лежащих в отрезках $[-3; -2]$, $[0; 1]$, $[2; 3]$. Найдем меньший положительный корень, принадлежащий отрезку $[0; 1]$. Укажем отрезок меньшей длины, на котором находится корень. Поскольку $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{11}{8} < 0$, то корень принадлежит отрезку $[0; 0{,}5]$.

Данное уравнение приведем к виду (12.6):

$$x = \frac{(x^3 + 1)}{5} \text{ или } x = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{(x^3 + 1)}{5}$. Так как $\varphi'(x) = \frac{3x^2}{5}$, $\max\limits_{0 \le x \le 0{,}5} |\varphi'(x)| = \frac{3}{20} < 1$, то условие (12.9) выполнено; процесс итераций будет сходиться. Взяв в качестве начального приближения середину отрезка, т. е. приняв $x_0 = 0{,}25$, вычисление последующих приближений проведем по формуле

$$x_{n+1} = \frac{(x_n^3 + 1)}{5}.$$

Результаты этих вычислений представлены в таблице 12.3, из которой видно, что искомый корень $x = 0{,}20164$.

Таблица 12.3

n	x_n	x_n^3	$x_n^3 + 1$	$x_{n+1} = (x_n^3+1)/5$
0	0,25	0,01563	1,01563	0,20313
1	0,20313	0,00838	1,00838	0,20168
2	0,20168	0,00821	1,00821	0,20164
3	0,20164	0,00820	1,00820	0,20164

Замечание. При нахождении двух других корней исходного уравнения методом последовательных приближений уже нельзя пользоваться формулой $x = \dfrac{(x^3+1)}{5}$, так как

$$\max_{2<|x|<3} |\varphi'(x)| = \max_{2<|x|<3} \left| \frac{3x^2}{5} \right| = \frac{27}{5} > 1,$$

т. е. условие (12.9) не выполняется. В этом случае данное уравнение следует представить в другом виде, например, $x = \sqrt[3]{5x-1}$; для функции $\varphi(x) = \sqrt[3]{5x-1}$ условие (12.9) на отрезках $[-3; -2]$, $[2; 3]$ будет выполняться.

Пример 2. Методом итераций найти отрицательный корень уравнения $x^4 + x - 3 = 0$.

Решение. Данное уравнение имеет два действительных корня; отрицательный корень находится на отрезке $[-1{,}5; -1{,}4]$, так как для его концов выполняется условие $f(-1{,}5)\,f(-1{,}4) < 0$.

Уравнение запишем в виде (12.7):

$$x = x + c\,(x^4 + x - 3),$$

где c – произвольная постоянная. Выберем значение c так, чтобы для функции $\varphi(x) = x + c\,(x^4 + x - 3)$ на отрезке $[-1{,}5; -1{,}4]$ выполнялось условие (12.9). В качестве такого значения можно взять $c = 0{,}1$, тогда

$$\varphi(x) = x + 0{,}1\,(x^4 + x - 3);\ \varphi(x) = 0{,}1x^4 + 1{,}1x - 0{,}3;$$

$$\varphi'(x) = 0{,}4x^3 + 1{,}1;\quad \max_{-1{,}5 \le x \le -1{,}4} |\varphi'(x)| = 0{,}25 < 1,$$

т. е. выполнено условие (12.9) для функции $\varphi(x)$ на отрезке $[-1{,}5; -1{,}4]$.

Взяв $x_0 = -1{,}45$, вычисления последующих приближений осуществим по формуле

$$x_{n+1} = 0{,}1x_n^4 + 1{,}1x_n - 0{,}3$$

и представим результаты в таблице 12.4, из которой видно, что $x = -1{,}45262$ – корень данного уравнения.

Таблица 12.4

n	x_n	x_n^2	x_n^4	$0{,}1x_n^4$	$1{,}1x_n$	$x_{n+1} = 0{,}1x_n^4 + 1{,}1x_n - 0{,}3$
0	– 1,45	2,1025	4,42051	0,44205	– 1,595	– 1,45295
1	– 1,45295	2,11106	4,45657	0,44566	– 1,59825	– 1,45259
2	– 1,45259	2,11002	4,45218	0,44522	– 1,59785	– 1,45263
3	– 1,45263	2,11013	4,45265	0,44527	– 1,59789	– 1,45262
4	– 1,45262	2,11011	4,45256	0,44526	– 1,59788	– 1,45262

Пример 3. Методом итераций найти действительные корни уравнения $x^5 + x - 3 = 0$.

Решение. Графически отделяя корни данного уравнения, заключаем, что уравнение имеет единственный действительный корень, принадлежащий отрезку $[1, 2]$. Для решения этого уравнения методом итераций не имеет смысла представлять его в виде $x = 3 - x^5$, так как функция $\varphi(x) = 3 - x^5$ имеет производную $\varphi'(x) = -5x^4$, для которой $\left|\varphi'(x)\right| = \left|-5x^4\right| > 1$ на отрезке $[1, 2]$, т. е. не выполняется условие (12.9). Если же представить данное уравнение в виде $x = \sqrt[5]{3-x}$ ($\varphi(x) = \sqrt[5]{3-x}$), то $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{5\sqrt[5]{(3-x)^4}}$ и $\left|\varphi'(x)\right| \le \dfrac{1}{5} < 1$ при $1 \le x \le 2$. Поскольку в этом случае условие (12.9) выполнено, процесс итераций будет сходиться.

Вычисления проведем с помощью натуральных логарифмов. Логарифмируя уравнение $x = \sqrt[5]{3-x}$, получаем $\ln x = \dfrac{1}{5}\ln(3-x)$. Принимая $x_0 = 1$, находим $\ln x_1 = \dfrac{\ln 2}{5} = \dfrac{0{,}6931}{5} = 0{,}1386$, откуда $x_1 = 1{,}1487$.

Последующие приближения находим по формуле $\ln x_n = \dfrac{\ln(3 - x_{n-1})}{5}$ и записываем результаты в таблице 12.5.

Таблица 12.5

n	x_{n-1}	$3 - x_{n-1}$	$\ln(3 - x_{n-1})$	$\ln x_n$	x_n
1	1,1487	1,8513	0,6159	0,1232	1,3111
2	1,1311	1,8689	0,6253	0,1251	1,1332
3	1,1332	1,8668	0,6242	0,1248	1,1329
4	1,1329	1,8671	0,6244	0,1249	1,1330
5	1,1330	1,8670	0,6243	0,1249	1,1330

Задачи

Методом итераций найдите действительные корни уравнений:

1. $x^3 + 3x + 2 = 0.$

2. $x^3 + 6x - 5 = 0.$

3. $x^3 + 3x - 1 = 0.$

4. $x^3 - 6x + 7 = 0.$

5. $x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$

6. $x^3 + 4x^2 - 1 = 0.$

7. $x^4 + 2x - 1 = 0.$

8. $x^4 - 6x + 3 = 0.$

9. $x^5 - 5x + 5 = 0.$

10. $x^6 - x - 1 = 0.$

11. $e^{-x} - x - 2 = 0.$

12. $x + \ln x - 2 = 0.$

Ответы

1. – 0,5961. **2.** 0,760133. **3.** 0,322185. **4.** – 2,90057. **5.** 3,103803. **6.** – 0,53740; – 3,93543; 0,47283. **7.** –1,39534; 0,47463. **8.** 0,51140. **9.** – 1,680494. **10.** – 0,77809; 1,13472. **11.** 0,4464. **12.** 1,55701.

Глава 13.
Приближенное вычисление определенных интегралов

§ 13.1. Формулы прямоугольников

Формулы прямоугольников имеют вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k = h\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \tag{13.1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k = h\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \tag{13.2}$$

где

$$h = \frac{(b-a)}{n},\ \ y_k = f(x_k),\ \ x_k = a + kh\ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{13.3}$$

Формула (13.1) называется формулой левых прямоугольников (рис. 13.1а), формула (13.2) – формулой правых прямоугольников (рис. 13.1б).

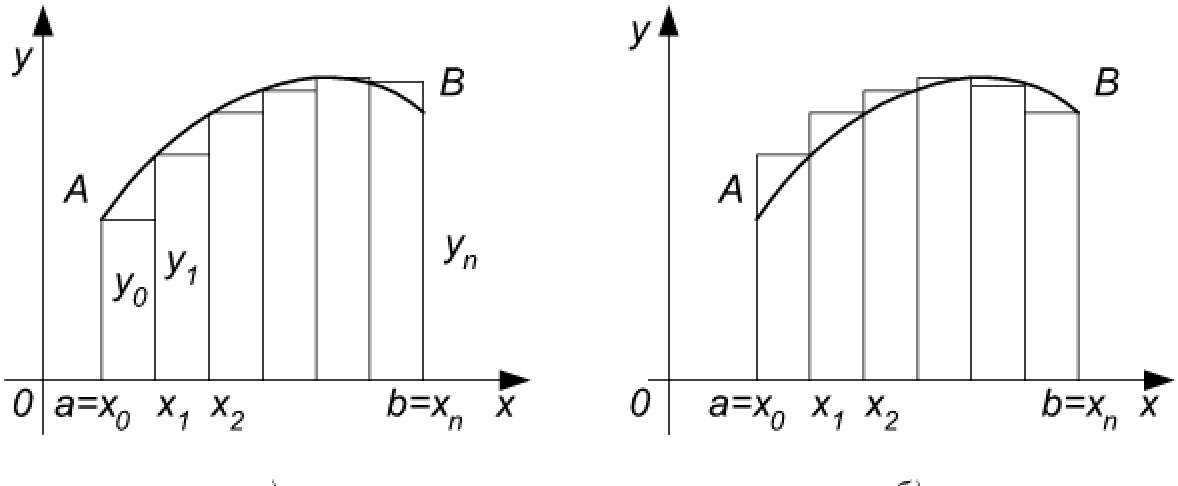


Рис. 13.1

Абсолютная погрешность метода прямоугольников определяется неравенством

$$\left| R_n(f) \right| \le \frac{(b-a)^2 M}{2n}, \tag{13.4}$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right|$.

Пример 1. По формулам прямоугольников, приняв $n = 10$, вычислить $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

Решение. Здесь $h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$, $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Составим таблицу соответствующих значений аргумента и функции, необходимых для приближенного вычисления данного интеграла (таблица 13.1).

Таблица 13.1

k	x_k	x_k^3	$1+x_k^3$	$y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+x_k^3}$
0	0	0	1	1
1	0,1	0,001	1,001	0,99900
2	0,2	0,008	1,008	0,99206
3	0,3	0,027	1,027	0,97371
4	0,4	0,064	1,064	0,93985
5	0,5	0,125	1,125	0,88889
6	0,6	0,216	1,216	0,82237
7	0,7	0,343	1,343	0,74460
8	0,8	0,512	1,512	0,66138
9	0,9	0,729	1,729	0,57837
10	1	1	2	0,5
				$\sum_{k=1}^{9} y_k = 7{,}60023$

Так как $\sum_{k=0}^{9} y_k = 8{,}60023$, $\sum_{k=1}^{10} y_k = 8{,}10023$, то по формулам (13.1) и (13.2) соответственно получим: $J_л = 0{,}1 \cdot 8{,}60023 = 0{,}86002$, $J_п = 0{,}1 \cdot 8{,}10023 = 0{,}81002$.

Пример 2. На сколько частей следует разбить промежуток интегрирования, чтобы с точностью до 0,1 вычислить $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$?

Р е ш е н и е . Абсолютная погрешность при вычислении определенного интеграла по методу прямоугольников определяется неравенством (13.4). В задаче ставится условие $\left|R_n(f)\right| \le \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}1$. Соотношение $\left|R_n(f)\right| \le \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{(b-a)^2 M}{2n} \le \varepsilon$, откуда

$$n \ge \frac{(b-a)^2 M}{2\varepsilon}. \qquad \text{(A)}$$

В данном случае $a = 2, b = 7, \varepsilon = 0{,}1$. Так как $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}}$, $M = \max\limits_{2\le x\le 7}\left|f'(x)\right| = \dfrac{1}{16}$, то

$$n \ge \frac{(7-2)^2 \cdot \frac{1}{16}}{2\cdot 0{,}1} \approx 7{,}8.$$

Поскольку n – число целое, нужно взять $n = 8$. (Для удобства вычислений можно принять $n = 10$).

Задачи

По формулам прямоугольников, приняв $n = 10$, вычислить определенные интегралы:

1. $\displaystyle\int_1^{11} \frac{dx}{x+2}$. **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\, dx$.

3. $\displaystyle\int_0^{10} \sqrt{x^2+2}\, dx$. **4.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos x}{1+x}\, dx$.

5. $\displaystyle\int_0^{0,9} \sin x^2\, dx$. **6.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

На сколько частей следует разбить промежуток интегрирования, чтобы по формулам прямоугольников с точностью до 0,1 вычислить интегралы:

7. $\displaystyle\int_1^{2} \ln x\, dx$. **8.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x+1}$.

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x \, dx.$ **10.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin\frac{x}{2} \, dx.$

Ответы

1. $J_л = 1{,}603$; $J_п = 1{,}348$. **2.** $J_л = 0{,}303$; $J_п = 0{,}314$. **3.** $J_л = 48{,}891$. **4.** $J_п = 0{,}565$; $J_л = 0{,}640$. **5.** $J_п = 0{,}266$. **6.** $J_п = 0{,}444$. **7.** 5. **8.** 5. **9.** 3.

§ 13.2. Формула трапеций

Формула трапеций имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right), \qquad (13.5)$$

где

$$h = \frac{b-a}{n}, \; x_k = a + kh, \; y_k = f(x_k) \; (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad (13.6)$$

Правая часть формулы (13.5) выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна h (рис. 13.2). Если R_n – остаточный член приближенной формулы (13.5), то

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}, \qquad (13.7)$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

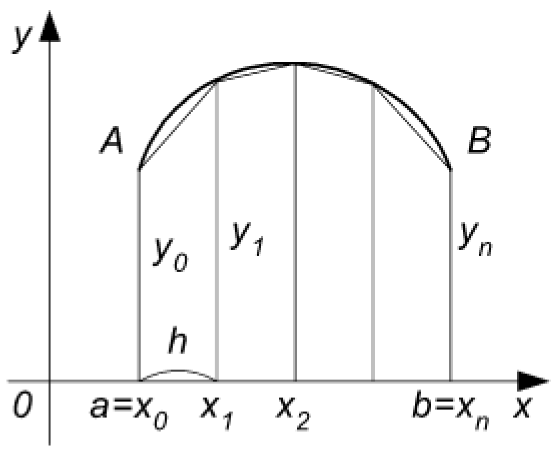


Рис. 13.2

Пример 1. По формуле трапеций вычислить $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ при $n = 5$.

Решение. С помощью формул (13.6) находим h, x_k, y_k: $h = 1$, $x_k = k$, $y_k = \frac{1}{\sqrt{x_k + 4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$;

$y_0 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447$, $y_2 \approx 0{,}409$, $y_3 \approx 0{,}377$, $y_4 \approx 0{,}353$,

$y_5 \approx \dfrac{1}{3}.$

По формуле (13.5) получаем

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \cdot (0{,}250 + 0{,}447 + 0{,}409 + 0{,}377 + 0{,}353 + 0{,}166) = 2{,}002.$$

З а м е ч а н и е. Полученное приближенное значение интеграла мало отличается от результата, найденного с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} = \int_0^5 (x+4)^{-\frac{1}{2}} d\,(x+4) = 2\,(x+4)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^5 = 2.$$

П р и м е р 2. По формуле трапеций с точностью до 0,01 вычислить $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x-1}.$

Р е ш е н и е. Для определения числа n отрезков, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, воспользуемся неравенством (13.7). Неравенство $|R_n| \le \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{(b-a)^3 M}{12n^2} \le \varepsilon,$ откуда

$$n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}.$$

Так как $\varepsilon = 0{,}01,$

$$f(x) = \frac{1}{x-1},\ f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3},$$

$$M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)| = \max_{2 \le x \le 3} \left| \frac{2}{(x-1)^3} \right| = 2, \text{ то}$$

$$n \ge \sqrt{\frac{(3-2)^3 \cdot 2}{12 \cdot 0{,}01}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 100}{12}} = \sqrt{\frac{50}{3}} > \sqrt{16} = 4.$$

Поскольку n – число целое, то можно взять $n = 5$. Определив n, найдем $h = 0{,}2$, $x_k = 2 + 0{,}2k$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$: $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}2$, $x_2 = 2{,}4$, $x_3 = 2{,}6$, $x_4 = 2{,}8$, $x_5 = 3$; $y_k = \dfrac{1}{x_k - 1}$: $y_0 = 1$, $y_1 = 0{,}833$,

$y_2 = 0{,}714,\ \ y_3 = 0{,}625,\ \ y_4 = 0{,}556,\ \ y_5 = 0{,}500.$

По формуле (13.5) получаем

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-1} \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right) = 0{,}2\ (0{,}5 + 0{,}833 + 0{,}714 +$$

$$+0{,}625 + 0{,}556 + 0{,}250) = 0{,}2 \cdot 3{,}478 = 0{,}6956.$$

З а м е ч а н и е . Полученный результат удовлетворяет условиям задачи. Действительно,

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1)\Big|_2^3 \approx 0{,}6931;\ \left|R_n\right| = \left|0{,}6931 - 0{,}6956\right| = 0{,}0025 < 0{,}01.$$

Задачи

По формуле трапеций, приняв $n = 10$, вычислите определенные интегралы при указанных значениях параметра p:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+p}$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+px}$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

По формуле трапеций с точностью до 0,01 вычислите определенные интегралы:

3. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

5. $\displaystyle\int_0^{1,2} e^x\, dx$.

6. $\displaystyle\int_1^3 \ln 2x\, dx$.

Ответы

1. 1) 0,69314; 2) 0,40555; 3) 0,28769; 4) 0,22315; 5) 0,18232; 6) 0,15415; 7) 0,13353; 8) 0,11778; 9) 0,10536; 10) 0,09531. **2.** 1) 0,69314; 2) 0,56078; 3) 0,46442; 4) 0,40551; 5) 0,36231; 6) 0,32906; 7) 0,30257; 8) 0,28089; 9) 0,26280; 10) 0,24744. **3.** 0,916. **4.** 0,693. **5.** 2,320. **6.** 2,682.

§ 13.3. Формула парабол

Формула парабол (или формула Симпсона) имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})], \quad (13.8)$$

где

$$h = \frac{b-a}{2n}, \; x_k = a + kh, \; y_k = f(x_k) \; (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (13.9)$$

Правая часть формулы (13.8) выражает площадь фигуры, составленной из параболических трапеций $x_0 M_0 M_2 x_2$, $x_2 M_2 M_4 x_4$ и т. д. (рис. 13.3). Дуга $M_0 M_1 M_2$ графика функции $f(x)$ заменена дугой параболы, проходящей через точки M_0, M_1, M_2. Аналогичная замена произведена и для остальных дуг.

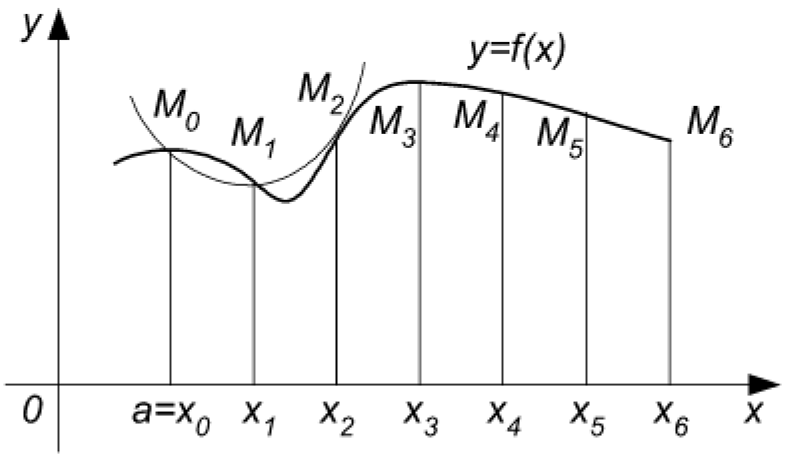


Рис. 13.3

Оценка остаточного члена формулы (13.8) определяется неравенством

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5 M}{180\,(2n)^4}, \qquad (13.10)$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right|$.

П р и м е р 1. По формуле парабол вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$, приняв $2n = 10$.

Решение. Соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x}dx$ является «неберущимся интегралом». Так как первообразная подынтегральной функции в данном случае не выражается в элементарных функциях, то формулу Ньютона-Лейбница здесь применить нельзя. Данный интеграл можно вычислить только приближенно.

Составим таблицу соответствующих значений функции: $y_k = f(x_k) = \frac{\sin x_k}{x_k} (k = 1,2,\ldots,10)$ (см. табл. 13.2).

Таблица 13.2

k	x_k	$\sin x_k$	y_k (k – нечетное)	y_k (k – четное)
1	0,1	0,09985	0,99850	
2	0,2	0,19867		0,99335
3	0,3	0,29552	0,98507	
4	0,4	0,38942		0,97355
5	0,5	0,47943	0,95886	
6	0,6	0,56464		0,94107
7	0,7	0,64422	0,92031	
8	0,8	0,71736		0,89670
9	0,9	0,78333	0,87037	
10	1	0,84147		
Σ			4,73311	3,80467

Поскольку $h = 0{,}1$, $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 4{,}73311 = 18{,}93244$, $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3{,}80467 = 7{,}60934$, $y_0 + y_{10} = 1 + 0{,}84147 = = 1{,}84147$, то по формуле (13.8) получаем $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{10} + + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] = \frac{1}{30}(1{,}84147 + 18{,}93244 + +7{,}60934) = 0{,}94611$.

Пример 2. По формуле парабол с точностью до 0,0001 вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой (13.10). Неравенство $|R_n| \le \varepsilon$ будет выполнено, когда

$$\frac{(b-a)^5 \cdot M}{180 \cdot (2n)^4} \le \varepsilon, \text{ т. е. при } 2n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \cdot M}{180\,\varepsilon}}.$$

Найдем значение $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right|$. Так как

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(x) = -2 \cdot \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{24\,(x-x^3)}{(1+x^2)^4},\ f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24\,(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5},$$

то $M = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| = 24$ (Максимум модуля четвертой производной найден с помощью $f^{\mathrm{V}}(x) = -240x\,\dfrac{3x^4-10x^2+3}{(1+x^2)^6}$). Поскольку $a = 0$, $b = 1$, $M = 24$, $\varepsilon = 0{,}0001$, то

$$2n \ge \sqrt[4]{\frac{(1-0)^5 \cdot 24}{180 \cdot 0{,}0001}} \approx 6{,}07.$$

Так как $2n$ – число целое и четное, то можно взять $2n = 8$. Замечая, что $h = \dfrac{b-a}{2n} = \dfrac{1-0}{8} = 0{,}125$, $y_0 = 1$, $y_8 = 0{,}5$, составляем таблицу значений $y_k = \dfrac{1}{1+x_k^2}$ (Таблица 13.3).

По формуле (13.8) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4\,(y_1+y_3+y_5+y_7) + 2\,(y_2+y_4+y_6) + y_8] =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 4 \cdot 3{,}14672 + 2 \cdot 2{,}38118 + 0{,}5) = 0{,}785395.$$

З а м е ч а н и е 1 . Полученное значение данного интеграла лишь шестым десятичным знаком отличается от значения, найденного по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398.$$

З а м е ч а н и е 2 . В оценке погрешности фигурирует значение максимума модуля четвертой производной от подынтегральной функции. Отыскать это значение иногда оказывается затруднительным. Весьма удобный способ оценки точности результата – контрольный просчет по той же формуле, но с удвоенным шагом (с уменьшенным в два раза числом отрезков разбиения).

Таблица 13.3

k	x_k	$1+x_k^2$	y_k (k – нечетное)	y_k (k – четное)
1	0,125	1,01563	0,98461	
2	0,250	1,06250		0,94118
3	0,375	1,14063	0,87670	
4	0,500	1,25000		0,80000
5	0,625	1,39063	0,71910	
6	0,750	1,56250		0,64000
7	0,875	1,76563	0,56637	
8	1	2		
Σ			3,14678	2,38118

Задачи

По формуле парабол, приняв $2n = 10$, вычислите определенные интегралы при указанных значениях параметра p:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+px^2}$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+p^2}$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$.

Ответы

1. 1) 0,785398; 2) 0,667853; 3) 0,588826; 4) 0,536078; 5) 0,488999. **2.** 1) 0,785398; 2) 0,231824; 3) 0,107250; 4) 0,061245; 5) 0,039479.

Глава 14. Приближенное решение дифференциальных уравнений

§ 14.1. Метод Эйлера

Пусть требуется решить задачу Коши: найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{14.1}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При численном решении уравнения (14.1) задача ставится так: в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти приближения y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ для значений точного решения $y(x_k)$. Разность $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ во многих случаях принимают постоянной h и называют шагом сетки, тогда

$$x_k = x_0 + kh \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{14.2}$$

Метод Эйлера для решения указанной задачи Коши основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$, где $\Delta y = y(x+h) - y(x)$, $\Delta x = (x+h) - x = h.$

Приближенные значения y_k в точках $x_k = x_0 + kh$ вычисляются по формуле

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{14.3}$$

Пример 1. С помощью метода Эйлера найти значения решения уравнения $y' = y + x^2$, удовлетворяющего условию $y(0) = 1$, в первых пяти точках отрезка $[0; 0{,}5]$ при $h = 0{,}1.$

Решение. По формуле (14.2) находим точки $x_0 = 0;$ $x_1 = 0{,}1;$ $x_2 = 0{,}2;$ $x_3 = 0{,}3;$ $x_4 = 0{,}4;$ $x_5 = 0{,}5.$ Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, находим в соответствии с формулой (14.3). Результаты вычислений отражены в таблице 14.1.

Замечание. Точное решение уравнения $y' = y + x^2$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, выражается формулой $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$. Следовательно, $y(0{,}4) = 3e^{0{,}4} - (0{,}4)^2 - 2\cdot(0{,}4) - 2 = 1{,}5154.$

Таблица 14.1

k	x_k	x_k^2	y_k	$f(x_k, y_k) = y_k + x_k^2$	$hf(x_k, y_k) = 0{,}1(y_k + x_k^2)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	0	0	1	1	0,1	1,1
1	0,1	0,01	1,1	1,11	0,111	1,211
2	0,2	0,04	1,211	1,251	0,1251	1,3361
3	0,3	0,09	1,3361	1,4261	0,1426	1,4787
4	0,4	0,16	1,4787	1,6387	0,1639	1,6426

Пример 2. Методом Эйлера найти значения решения дифференциального уравнения $y' = 2x - y$, для которого $y(1) = 1$, в пяти точках отрезка $[1; 1{,}5]$, приняв $h = 0{,}1$.

Решение. На основании формулы (14.2) определяем точки $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}1$; $x_2 = 1{,}2$; $x_3 = 1{,}3$; $x_4 = 1{,}4$; $x_5 = 1{,}5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условию данной задачи Коши, вычисляем по формуле (14.3). Результаты вычислений занесены в таблицу 14.2.

Таблица 14.2

k	y_k	x_k	$2x_k$	$f(x_k, y_k) = 2x_k - y_k$	$hf(x_k, y_k) = 0{,}1(2x_k - y_k)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	1,0000	1,0	2,0	1,0000	0,1000	1,1000
1	1,1000	1,1	2,2	1,1000	0,1100	1,2100
2	1,2100	1,2	2,4	1,1900	0,1190	1,3290
3	1,3290	1,3	2,6	1,2710	0,1271	1,4561
4	1,4561	1,4	2,8	1,3439	0,1344	1,5905
5	1,5905	1,5	3,0	1,4095	0,1410	1,7315

Задачи

Приняв $h = 0{,}1$, методом Эйлера решить указанную задачу Коши для каждого из уравнений:

1. $y' = y + 3x$, $y(0) = -1$, $x \in [0; 0{,}5]$.

2. $y' = x - 2y$, $y(0) = 0$, $x \in [0; 1]$.

3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0; 1]$.

4. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0; 1]$.

5. $y' = x^2 y + x^3$, $y(0) = 1$, $x \in [0; 1]$.

6. $y'(y^2 + x) = y$, $y(1) = 1$, $x \in [1; 2]$.

Ответы

1. $y_1 = -1{,}1$; $y_2 = -1{,}18$; $y_3 = -1{,}238$; $y_4 = -1{,}2718$; $y_5 = -1{,}279$. **2.** $y_1 = 0$; $y_2 = 0{,}01$; $y_3 = 0{,}0278$; $y_4 = 0{,}0524$; $y_5 = 0{,}08192$. **3.** $y_1 = 1{,}1$; $y_2 = 1{,}231$; $y_3 = 1{,}402536$; $y_4 = 1{,}629246$.

§ 14.2. Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта – один из наиболее употребительных методов повышенной точности.

Пусть требуется найти численное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Идея метода Рунге-Кутта состоит в представлении разности

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) \tag{14.4}$$

в виде суммы поправок k_j с коэффициентами p_j: $\Delta y = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_r k_r$, где $k_1 = f(x, y)$, $k_2 = f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1), \ldots$, $k_r = hf(x + \alpha_r h, y + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} k_2 + \ldots + \beta_{rr-1} k_{r-1})$.

Коэффициенты $p_j, \alpha_j, \beta_{ji}$ находят сравнением разложений Δy и k_i по степеням h. В случае $r = 4$ получают

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ &k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x + h, y + k_3), \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{14.6}$$

При $x = x_0$ с помощью формул (14.4) – (14.6) находим

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{14.7}$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \tag{14.8}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1^i &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right), \\ k_3^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right), \\ k_4^i &= hf(x_i + h, y_i + k_3^i). \end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

Метод Рунге-Кутта применим также к системам дифференциальных уравнений первого порядка, а также к обыкновенным дифференциальным уравнениям высших порядков.

Пример 1. Методом Рунге-Кутта найти решение задачи Коши для уравнения $y' = y - x^2, y(1) = 0, x \in [1, 2]$ в первых пяти точках, взяв $h = 0{,}1$.

Решение. Поскольку в данном случае $f(x, y) = y - x^2$ и в силу условия $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, то $f(x_0, y_0) = y_0 - x_0^2 = 0 - 1 = -1$. По формулам (14.9) находим: $k_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(-1) = -0{,}1$; $k_2^0 = 0{,}1 f(1{,}05; -0{,}05) = 0{,}1[(-0{,}05) - (1{,}05)^2] = -0{,}1152$; $k_3^0 = 0{,}1 f(1{,}05; -0{,}0576) = 0{,}1[(-0{,}0576) - (1{,}05)^2] = -0{,}1160$; $k_4^0 = 0{,}1 f(1{,}1; -0{,}1160) = 0{,}1[(-0{,}1160) - (1{,}1)^2] = -0{,}1326$. По формуле (14.8) вычислим $\Delta y_0 = \frac{1}{6}[(-0{,}1) + 2(-0{,}1152) + 2(-0{,}1160) + (-0{,}1326)] = -0{,}1158$.

Значение y_1 вычислим по формуле $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ (см. формулу (14.7) при $i = 0$): $y_1 = 0 + (-0{,}1158) = -0{,}1158$. Таким образом, получено приближенное значение $y_1 = -0{,}1158$ при $x_1 = 1{,}1$.

С помощью формул (14.9) при $i = 1$ найдем приближенное значение y_2 при $x_2 = 1{,}2$, решив новую задачу Коши для того же уравнения $y' = y - x^2$, $y(1{,}1) = -0{,}1158$.

Аналогично находим y_3, y_4, y_5. Результаты решения исходной задачи представлены в таблице 14.3.

Таблица 14.3

i	x_i	y_i	x_i^2	$f(x_i,y_i)=$ $=y_i-x_i^2$	$k_j=h\times$ $\times f(x_i,y_i)$	p_j	$S=$ $=\sum_{j=1}^{4} p_j k_j$	$\Delta y_i=$ $=\frac{1}{6}S$
0	1	0	1	– 1	– 0,1	1		
	1,05	– 0,05	1,1025	– 1,1525	– 0,1152	2		
	1,05	– 0,0576	1,1025	– 1,1601	– 0,1160	2		
	1,1	– 0,1160	1,21	– 1,3260	– 0,1326	1	– 0,6950	– 0,1158
$x_1=x_0+h=1{,}1,\ y_1=y_0+\Delta y_0=-0{,}1158.$								
1	1,1	– 0,1158	1,21	– 1,3258	– 0,1326	1		
	1,15	– 0,1821	1,3225	– 1,5046	– 0,1505	2		
	1,15	– 0,1910	1,3225	– 1,5135	– 0,1514	2		
	1,2	– 0,2672	1,44	– 1,7072	– 0,1707	1	– 0,9071	– 0,1501
$x_2=x_0+2h=1{,}2,$ $y_2=y_1+\Delta y_1=-0{,}1158+(-0{,}1501)=-0{,}2659.$								
2	1,2	– 0,2659	1,44	– 1,7059	– 0,1706	1		
	1,25	– 0,3512	1,5625	– 1,9137	– 0,1914	2		
	1,25	– 0,3616	1,5625	– 1,9241	– 0,1924	2		
	1,3	– 0,4583	1,69	– 2,1483	– 0,2148	1	– 1,1150	– 0,1925
$x_3=x_0+3h=1{,}3,$ $y_3=y_2+\Delta y_2=-0{,}2659+(-0{,}1925)=-0{,}4584.$								
3	1,3	– 0,4584	1,69	– 2,1484	– 0,2148	1		
	1,35	– 0,5858	1,8225	– 2,3883	– 0,2388	2		
	1,35	– 0,5778	1,8225	– 2,4003	– 0,2400	2		
	1,4	– 0,6984	1,96	– 2,6584	– 0,2658	1	– 1,4382	– 0,2397
$x_4=x_0+4h=1{,}4,$ $y_4=y_3+\Delta y_3=-0{,}4584+(-0{,}2397)=-0{,}6981.$								
4	1,4	– 0,6981	1,96	– 2,6581	– 0,2658	1		
	1,45	– 0,8310	2,1025	– 2,9335	– 0,2934	2		
	1,45	– 0,8448	2,1025	– 2,9473	– 0,2947	2		
	1,5	– 0,9928	2,25	– 3,2428	– 0,3243	1	– 1,7663	– 0,2944
$x_5=x_0+5h=1{,}5,$ $y_5=y_4+\Delta y_4=-0{,}6981+(-0{,}2944)=-0{,}9925.$								

Пример 2. Методом Рунге-Кутта найти решение задачи Коши для уравнения $y' = 3x + y$, $y(0) = -1$, $x \in [0, 1]$, приняв $h = 0{,}1$.

Решение. Как и в предыдущем примере, с помощью формул (14.7) – (14.9) находим значения y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (см. таблицу 14.4).

Таблица 14.4

i	x_i	y_i	$3x_i$	$3x_i + y_i$	k_j	p_j	$S = \sum_{j=1}^{4} p_j k_j$	$\Delta y_i = \frac{1}{6} S$
0	0	– 1	0	– 1	– 0,1	1	– 0,1	
	0,05	– 1,05	0,15	– 0,9	– 0,09	2	– 0,18	
	0,05	– 1,045	0,15	– 0,895	– 0,0895	2	– 0,1790	
	0,1	– 1,0895	0,3	– 0,7895	– 0,07895	1	– 0,07895	– 0,08966
$x_1 = 0{,}1, y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -1 + (-0{,}08966) = -1{,}08966.$								
1	0,1	– 1,08966	0,3	– 0,78966	– 0,07897	1	– 0,07897	
	0,15	– 1,12915	0,45	– 0,67915	– 0,06792	2	– 0,13584	
	0,15	– 1,12362	0,45	– 0,67362	– 0,06736	2	– 0,13472	
	0,2	– 1,15702	0,6	– 0,55702	– 0,05570	1	– 0,05570	– 0,06754
$x_2 = 0{,}2, y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -1{,}08966 + (-0{,}06754) = -1{,}15720.$								
2	0,2	– 1,15720	0,6	– 0,55720	– 0,05572	1	– 0,05572	
	0,25	– 1,18506	0,75	– 0,43506	– 0,04351	2	– 0,08702	
	0,25	– 1,17896	0,75	– 0,42896	– 0,04290	2	– 0,08580	
	0,3	– 1,20010	0,9	– 0,30010	– 0,03001	1	– 0,03001	– 0,04309
$x_3 = 0{,}3, y_3 = y_2 + \Delta y_2 = -1{,}15720 + (-0{,}04309) = -1{,}20029.$								
3	0,3	– 1,20029	0,9	– 0,30029	– 0,03003	1	– 0,03003	
	0,35	– 1,21531	1,05	– 0,16531	– 0,01653	2	– 0,03306	
	0,35	– 1,20856	1,05	– 0,15856	– 0,01586	2	– 0,03172	
	0,4	– 1,21615	1,2	– 0,01615	– 0,00162	1	– 0,00162	– 0,01607
$x_4 = 0{,}4, y_4 = y_3 + \Delta y_3 = -1{,}20029 + (-0{,}01607) = -1{,}21636.$								
4	0,4	– 1,21636	1,2	– 0,01636	– 0,00164	1	– 0,00164	
	0,45	– 1,21717	1,35	0,13283	0,01328	2	0,02656	
	0,45	– 1,20971	1,35	0,14029	0,01403	2	0,02806	
	0,5	– 1,20232	1,5	0,29768	0,02977	1	0,02977	0,01379
$x_5 = 0{,}5, y_5 = y_4 + \Delta y_4 = -1{,}21636 + 0{,}01379 = -1{,}20257.$								

З а м е ч а н и е . Точное решение уравнения $y' = 3x + y$, удовлетворяющее условию $y = -1$ при $x = 0$, выражается формулой $y = 2e^x - 3x - 3$. Следовательно, $y(0{,}5) = 2e^{0{,}5} - 3 \cdot 0{,}5 - 3 = 2 \cdot 1{,}6487 - 1{,}5 - 3 = -1{,}2026$. Этот результат совпадает со значением, вычисленным по методу Рунге-Кутта $(y_5 = -1{,}20257)$.

Задачи

Методом Рунге-Кутта, приняв $h = 0{,}1$, найти приближенные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

1. $y' = x - y$, $y(0) = -1$, $x \in [0, 1]$.

2. $y' = x^2 - y$, $y(0) = 2$, $x \in [0, 1]$.

3. $y' = x + y$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$.

4. $y' = 2x - y$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$.

5. $y' = x - y + 2$, $y(1) = 0$, $x \in [1, 2]$.

Ответы

1. $y_1 = -0{,}9$; $y_2 = -0{,}8$; $y_3 = -0{,}7$; $y_4 = -0{,}6$; $y_5 = -0{,}5$; $y_6 = -0{,}4$; $y_7 = -0{,}3$; $y_8 = -0{,}2$; $y_9 = -0{,}1$; $y_{10} = 0$. **2.** $y_1 = 1{,}81$; $y_2 = 1{,}64$; $y_3 = 1{,}49$; $y_4 = 1{,}36$; $y_5 = 1{,}25$; $y_6 = 1{,}16$; $y_7 = 1{,}09$; $y_8 = 1{,}04$; $y_9 = 1{,}01$. **3.** $y_1 = 1{,}110341$; $y_2 = 1{,}242805$; $y_3 = 1{,}399717$; $y_4 = 1{,}583648$; $y_5 = 1{,}797441$; $y_6 = 2{,}044235$; $y_7 = 2{,}327503$; $y_8 = 2{,}651079$; $y_9 = 3{,}019202$; $y_{10} = 3{,}436559$. **4.** $y_1 = 0{,}9145125$; $y_2 = 0{,}8561927$; $y_3 = 0{,}8224552$; $y_4 = 0{,}8109608$; $y_5 = 0{,}8195928$; $y_6 = 0{,}8464358$; $y_7 = 0{,}8897568$; $y_8 = 0{,}9479878$. **5.** $y_1 = 0{,}1099996$; $y_2 = 0{,}2399993$; $y_3 = 0{,}3899991$; $y_4 = 0{,}5599988$; $y_5 = 0{,}7499986$; $y_6 = 0{,}9599984$; $y_7 = 0{,}0119000$.

Глава 15. Интерполирование функций

§ 15.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}. \tag{15.1}$$

Этот многочлен удовлетворяет условиям $P_n(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, где x_k – узлы (или полюсы) интерполяции, y_k – заданные числа.

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}. \tag{15.2}$$

Формулы (15.1) и (15.2) можно записать так:

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}; \quad f(x) \approx \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)},$$

где

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n), \tag{15.3}$$

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

Производя интерполирование функции $f(x)$ по формуле Лагранжа (15.2), заменяют эту функцию полиномом $P_n(x)$, совпадающим с ней в $n+1$ данных точках отрезка $[a, b]$. В остальных точках этого отрезка разность $R_n = f(x) - P_n(x)$ отлична от нуля и представляет собой погрешность метода. Эта разность, называемая остаточным членом интерполяции, определяется формулой

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega(x)}{(n+1)!},$$

в которой $\omega(x)$ выражается равенством (15.3), ξ – точка промежутка $[a, b]$, зависящая от x.

Пример 1. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа, который в точках $x_0 = -3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ принимает соответственно значения $y_0 = -5$, $y_1 = -11$, $y_2 = 10$.

Решение. При $n = 2$ формула (15.1) имеет вид

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Подставляя в эту формулу заданные значения, находим

$$P_2(x) = -5 \frac{(x+1)(x-2)}{(-3+1)(-3-2)} - 11 \frac{(x+3)(x-2)}{(-1+3)(-1-2)} + 10 \frac{(x+3)(x+1)}{(2+3)(2+1)},$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{11}{6}(x^2 + x - 6) + \frac{2}{3}(x^2 + 4x + 3) =$$

$$= \frac{1}{6}[-3(x^2 - x - 2) + 11(x^2 + x - 6) + 4(x^2 + 4x + 3)] = \frac{1}{6}(12x^2 + 30x - 48).$$

Следовательно, $P_2(x) = 2x^2 + 5x - 8$.

Пример 2. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа $P(x)$, для которого $P(-1) = -11, P(1) = -3, P(2) = 1, P(3) = 13$.

Решение. В данном случае $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $y_0 = -11$, $y_1 = -3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 13$. При $n = 3$ формула (15.1) принимает вид

$$P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Подставляя в эту формулу данные значения, получаем

$$P(x) = -11 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} - 3 \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} +$$

$$+1 \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} + 13 \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{11}{24}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) -$$

$$-\frac{3}{4}(x^3 - 4x^2 + x + 6) - \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - x + 3) + \frac{13}{8}(x^3 - 2x^2 - x + 2) =$$

$$= x^3\left(\frac{11}{24}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{13}{8}\right)+x^2\left(-\frac{11}{4}+3+1-\frac{13}{4}\right)+x\left(\frac{121}{24}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{13}{8}\right)+$$

$$+\left(-\frac{11}{4}-\frac{18}{4}-1+\frac{13}{4}\right)=x^3-2x^2+3x-5.$$

Итак, $P_3(x)=x^3-2x^2+3x-5.$

Пример 3. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей

x	-1	0	1	2	3
y	17	7	5	11	49

Решение. В данном случае $x_0=-1,\quad x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=3,$ $y_0=17,\quad y_1=7,$ $y_2=5,\quad y_3=11,\quad y_4=49.$

При $n=4$ формула (15.1) имеет вид

$$P(x)=y_0\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}+$$

$$+y_1\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+$$

$$+y_2\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$

$$+y_3\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+$$

$$+y_4\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$

Подставляя в эту формулу данные значения, получаем

$$P(x)=17\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}+$$

$$+7\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-2)(0-3)}+5\,\frac{(x+1)\,x\,(x-2)(x-3)}{(1+1)\cdot1\cdot(1-2)(1-3)}+$$

$$+11\,\frac{(x+1)\,x\,(x-1)(x-3)}{(2+1)\cdot2\cdot(2-1)(2-3)}+49\,\frac{(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)}{(3+1)\cdot3\cdot(3-1)(3-2)}.$$

Производя соответствующие вычисления и преобразования, находим

$$P(x)=\frac{17}{24}(x^4-6x^3+11x^2-6x)-\frac{7}{6}(x^4-5x^3+5x^2+5x-6)+$$

$$+\frac{5}{4}(x^4-4x^3+x^2+6x)-\frac{11}{6}(x^4-3x^3-x^2+3x)+$$

$$+\frac{49}{24}(x^4-2x^3-x^2+2x)=x^4\left(\frac{17}{24}-\frac{7}{6}+\frac{5}{4}-\frac{11}{6}+\frac{49}{24}\right)+$$

$$+x^3\left(-\frac{17}{4}+\frac{35}{6}-5+\frac{11}{2}-\frac{49}{12}\right)+x^2\left(\frac{187}{24}-\frac{35}{6}+\frac{5}{4}+\frac{11}{6}-\frac{49}{24}\right)+$$

$$+x\left(-\frac{17}{4}-\frac{35}{6}+\frac{15}{2}-\frac{11}{2}+\frac{49}{12}\right)+7=x^4-2x^3+3x^2-4x+7.$$

Следовательно, $P_4(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x+7.$

Задачи

Найти интерполяционные многочлены Лагранжа для следующих функций, заданных таблицами:

1.

x	-2	-1	3
y	12	6	2

2.

x	-1	1	2
y	10	6	13

3.

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

4.

x	0	1	2	3
y	1	1	11	37

5.

x	-3	-2	-1	1	2
y	46	7	2	-2	11

6.

x	-3	-2	-1	1	2
y	-9	-16	-3	11	36

Ответы

1. $P_2(x)=x^2-3x+2.$ **2.** $P_2(x)=3x^2-2x+5.$ **3.** $P_3(x)=x^3-x^2+x-1.$ **4.** $P_3(x)=x^3+2x^2-3x+1.$ **5.** $P_4(x)=x^4+x^3-2x^2-3x+1.$ **6.** $P_4(x)=x^4+2x^3-3x^2+5x+6.$

§ 15.2. Разности различных порядков. Разделенные разности

Рассмотрим значения $y_i = f(x_i)$ функции $y = f(x)$ в точках x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$. Выделим всевозможные пары соседних значений: (y_0, y_1), (y_1, y_2), $(y_2, y_3), \ldots$ и в каждом случае вычтем предыдущее значение из последующего, получим разности: $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2, \ldots$. Эти разности называются конечными разностями первого порядка или просто первыми разностями. Обозначения первых разностей:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}, \tag{15.4}$$

или

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Замечание. Иногда употребляются и другие обозначения, например, $\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i$, $f'_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i$.

Разностями второго порядка, или вторыми разностями, называют разности первых разностей и обозначают через $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0, \\
\Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1, \\
\Delta^2 y_2 &= \Delta y_3 - \Delta y_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_n - \Delta y_{n-1}, \\
\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n.
\end{aligned}\right\} \tag{15.5}$$

Разности третьего порядка, или третьи разности, определяются и обозначаются так:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \quad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \quad \ldots, \quad \Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n, \quad \ldots$$

Аналогично определяются последующие разности. Разности $(k+1)$-го порядка получаются из разностей k-го порядка по формулам

$$\Delta^{k+1} y_0 = \Delta^k y_1 - \Delta^k y_0, \quad \Delta^{k+1} y_1 = \Delta^k y_2 - \Delta^k y_1, \ldots \tag{15.6}$$

Таблица разностей различных порядков строится согласно схеме (таблица 15.1).

Таблица 15.1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\vdots$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\vdots$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\vdots$		
x_4	y_4	Δy_4	$\vdots$			
x_5	y_5	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$					

Каждое число этой таблицы (начиная с третьего столбца) является разностью двух смежных чисел столбца слева (из нижнего числа вычитается верхнее; разность записывается в следующем столбце между этими числами). Третий столбец содержит первые разности, четвертый – вторые и т. д.

Для контроля вычислений при составлении таблицы разностей пользуются следующим утверждением: сумма чисел в каждом столбце разностей равна разности крайних чисел предыдущего столбца. Например, $\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{n-1} + \Delta y_n = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + {}$ $+ (y_3 - y_2) + \ldots \ + (y_n - y_{n-1}) + (y_{n+1} - y_n) = y_{n+1} - y_0$.

Все разности в таблице принято записывать целыми числами или в единицах младшего разряда значений функции.

З а м е ч а н и е . Конечные разности n-го порядка от многочлена степени n постоянны, а конечные разности $(n+1)$-го порядка равны нулю. Это свойство дает простой способ составления таблиц многочленов. Непосредственно вычисляем значения многочлена для $n+1$ значений аргумента и составляем таблицу, в которую входят разности до n-го порядка включительно. Далее, пользуясь тем, что разности n-го порядка постоянны, продолжаем столбец разностей $(n-1)$-го порядка. Для получения новых чисел этого столбца складываем соответствующие разности $(n-1)$-го порядка с разностями n-го порядка. Затем последовательно продолжаем столбцы разностей $(n-2)$-го, $(n-3)$-го порядков и т. д. пока не получим продолжение столбца $y_i = f(x_i)$, т. е. значений многочлена.

Разделенные разности первого порядка определяются формулами

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},\ f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \ldots,\ f(x_n, x_{n-1}) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}. \quad (15.7)$$

Разделенные разности второго порядка получаются из разделенных разностей первого порядка по формулам

$$\left.\begin{aligned} f(x_2, x_1, \ \ x_0) &= \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}, \\ f(x_3, x_2, \ \ x_1) &= \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}. \end{aligned}\right. \tag{15.8}$$

Аналогично определяются разделенные разности третьего порядка:

$$\left.\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1, x_0) &= \frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0}, \\ f(x_4, x_3, x_2, x_1) &= \frac{f(x_4, x_3, x_2) - f(x_3, x_2, x_1)}{x_4 - x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

Разделенные разности n-го порядка получаются из разностей $(n-1)$ -го порядка по формулам

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)}{x_n - x_0}. \tag{15.10}$$

В случае равноотстоящих узлов с шагом h $(x_k = x_0 + kh)$ разделенные разности различных порядков имеют вид:

$$f(x_1, x_0) = \frac{\Delta y_0}{h}, \ f(x_2, x_1) = \frac{\Delta y_1}{h}, \ \ldots, \ f(x_n, x_{n-1}) = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}; \tag{15.11}$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}, \ f(x_3, x_2, x_1) = \frac{\Delta^2 y_1}{2!\, h^2}, \ \ldots; \tag{15.12}$$

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}. \tag{15.13}$$

П р и м е р 1 . Составить таблицу разностей различных порядков при следующих значениях x и $f(x)$:

$$x_0 = -1, \ x_1 = -2, \ x_2 = 1, \ x_3 = 2, \ x_4 = 3;$$

$$y_0 = 0, \ y_1 = 7, \ y_2 = 30, \ y_3 = -16, \ y_4 = -45.$$

Р е ш е н и е . По формулам (15.4) находим первые разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 7 - 0 = 7; \ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 30 - 7 = 23;$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = -16 - 30 = -46; \ \Delta y_3 = y_4 - y_3 = -45 - (-16) = -29.$$

В соответствии с формулами (15.5) вычисляем разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 23 - 7 = 16;\ \ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = -46 - 23 = -69;$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = -29 - (-46) = 17.$$

Пользуясь определениями и соответствующими формулами получаем разности третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -69 - 16 = -85;$$
$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 17 - (-69) = 86$$

и разность четвертого порядка $\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 86 - (-85) = 171.$

Полученные разности можно представить в виде таблицы 15.2.

Таблица 15.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-1 -2 1 2 3	0 7 30 -16 -45	7 23 -46 -29	16 -69 17	-85 86	171
$\sum$		-45	-36	1	
S	-45	-36	1		

Замечание. Последние две строки служат для контроля вычислений: в строке $\sum$ числа равны суммам чисел, стоящих в соответствующем столбце, в строке S – разности последнего и первого чисел соответствующего столбца. Совпадение этих чисел (по диагонали) означает, что вычисления сделаны верно.

Пример 2. Составить таблицу разделенных разностей различных порядков при следующих значениях x и $y = f(x)$:

$$x_0 = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2;$$

$$y_0 = -9,\ y_1 = -16,\ y_2 = -3,\ y_3 = 11,\ y_4 = 36.$$

Р е ш е н и е . В соответствии с определениями находим разделенные разности первого порядка:

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-16-(-9)}{-2-(-3)} = -7; \; f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-16)}{-1-(-2)} = 13;$$

$$f(x_3, x_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{11-(-3)}{1-(-1)} = 7; \; f(x_4, x_3) = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{36-11}{2-1} = 25;$$

разности второго порядка:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{13-(-7)}{-1-(-3)} = 10;$$

$$f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{7-13}{1-(-2)} = -2;$$

$$f(x_4, x_3, x_2) = \frac{f(x_4, x_3) - f(x_3, x_2)}{x_4 - x_2} = \frac{25-7}{2-(-1)} = 6;$$

разности третьего порядка:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0} = \frac{-2-10}{1-(-3)} = -3;$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_4, x_3, x_2) - f(x_3, x_2, x_1)}{x_4 - x_1} = \frac{6-(-2)}{2-(-2)} = 2;$$

разность четвертого порядка:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_4, x_3, x_2, x_1) - f(x_3, x_2, x_1, x_0)}{x_4 - x_0} = \frac{2-(-3)}{2-(-3)} = 1.$$

Полученные разделенные разности можно представить в виде таблицы 15.3.

Таблица 15.3

x	y	Разделенные разности			
-3	-9				
		-7			
-2	-16		10		
		13		-3	
-1	-3		-2		1
		7		2	
1	11		6		
		25			
2	36				

П р и м е р 3 . Дан многочлен $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$ Известны его значения при $x_0 = 0,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 3:$

$P(0)=1, \quad P(1)=3, \quad P(2)=7, \quad P(3)=19$. Найти значения многочлена при $x_k = k \quad (k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.

Решение. Составляем таблицу разностей различных порядков (таблица 15.4).

Таблица 15.4

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	2	2	6
1	3	4	8	
2	7	12		
3	19			

Таблица 15.5

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	2	2	6
1	3	4	8	6
2	7	12	14	
3	19	26		
4	45			

Поскольку для многочлена третьей степени разности третьего порядка постоянны, то эту таблицу можно продолжить, начиная с последнего столбца. Записываем в столбце $\Delta^3 y$ следующую цифру 6; складывая это число с числом 8, получаем 14 – новое число столбца $\Delta^2 y$; аналогично получаем число $26 = 14 + 12$ столбца Δy и значение $y_4 = P(4) = 45$ (таблица 15.5).

Продолжая этот процесс, получаем новую таблицу (таблица 15.6).

Таблица 15.6

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	2	2	6
1	3	4	8	6
2	7	12	14	6
3	19	26	20	6
4	45	46	26	6
5	91	72	32	6
6	163	104	38	6
7	267	142	44	6
8	409	186	50	
9	595	236		
10	831			

Следовательно, найдены искомые значения данного многочлена: $P(5) = 91$, $P(6) = 163$, $P(7) = 267$, $P(8) = 409$, $P(9) = 595$, $P(10) = 831$.

Задачи

Найти разности различных порядков:

1.

k	0	1	2
x_k	-1	1	2
y_k	10	6	13

2.

k	0	1	2
x_k	-2	-1	1
y_k	12	6	0

3.

k	0	1	2	3	4	5
x_k	-3	-2	-1	0	1	2
y_k	-9	-16	-3	6	11	36

Найти разделенные разности различных порядков:

4.

k	0	1	2
x_k	2	4	5
y_k	1	15	28

5.

k	0	1	2
x_k	1	2	3
y_k	-4	-7	-16

6.

k	0	1	2	3	4
x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	-16	-3	6	11	36

7. Дан многочлен $P(x) = 2x^2 - 5x + 7$ и его значения: $P(0) = 7$, $P(1) = 4$, $P(2) = 5$. Найти значения $P(k)$, где $k = 2, 3, \ldots, 10$.

8. Дан многочлен $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 15$ и его значения: $P(0) = 15$, $P(1) = 7$, $P(2) = 3$, $P(3) = 15$, $P(4) = 55$. Найти его значения при $x = 5, 6, \ldots, 10$.

9. Дан многочлен $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$ и его значения: $P(0) = 3$, $P(1) = 3$, $P(2) = 13$, $P(3) = 63$, $P(4) = 207$. Найти его значения при $x = 5, 6, \ldots, 10$.

§ 15.3. Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad (15.14)$$

в котором $f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), \ldots, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ – разделенные разности различных порядков. Этот многочлен удовлетворяет условиям $y_k = f(x_k) = P_n(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Интерполяционной формулой Ньютона называется формула

$$f(x) \approx y_0 + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (15.15)$$

Замечание 1. Поскольку любой k-й член многочлена Ньютона зависит только от k первых узлов интерполяции и от значений функции в этих узлах, добавление новых узлов вызывает в формуле (15.14) лишь добавление новых членов без изменения первоначальных. Это является существенным преимуществом многочлена Ньютона по сравнению с многочленом Лагранжа.

Замечание 2. В силу единственности интерполяционного многочлена n-ой степени интерполяционный многочлен Ньютона перегруппировкой членов можно преобразовать в интерполяционный многочлен Лагранжа и обратно.

В случае равноотстоящих узлов интерполяции $(x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh)$ из формулы (15.15) с учетом равенств (15.11) – (15.13) получается интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования вперед»:

$$f(x) \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)\,(x - x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}). \qquad (15.16)$$

Эта формула удобна при интерполировании функций для значений x, близких к наименьшему узлу x_0.

Интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования назад» имеет вид:

$$f(x) \approx y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3} \times$$

$$\times (x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1). \quad (15.17)$$

Формула (15.17) удобна при интерполировании функций для значений x, близких к наибольшему узлу x_n.

Замечание. В формуле (15.16) коэффициенты многочлена содержат конечные разности различных порядков, принадлежащей верхней (нисходящей) строке таблицы разностей (см. таблицу 15.1). В формуле (15.17) коэффициенты многочлена содержат разности различных порядков, принадлежащие нижней (восходящей) строке этой таблицы.

Пример 1. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения: $f(2) = 1, f(4) = 15, f(5) = 28.$

Решение. В данном случае $x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 5,$ $y_0 = 1, y_1 = 15, y_2 = 28.$ Отметим, что узлы не являются равноотстоящими (так как $x_1 - x_0 \neq x_2 - x_1$). Интерполяционный многочлен (15.14) при $n = 2$ принимает вид

$$P_2(x) = y_0 + (x - x_0)\,f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)\,f(x_2, x_1, x_0)\,. \qquad (\mathrm{I})$$

Вычислим разделенные разности:

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{15-1}{4-2} = 7, \;\; f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28-15}{5-4} = 13,$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{13-7}{5-2} = 2.$$

Подставив эти значения в формулу (I), найдем искомый интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P_2(x) = 1 + 7\,(x-2) + 2\,(x-2)(x-4).$$

Замечание. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$P_2(x) = 2x^2 - 5x + 3.$$

Пример 2. Найти многочлены Ньютона «интерполирования вперед» и «интерполирования назад» для функции, заданной таблицей

x	0	1	2	3
y	5	1	7	29

Вычислить значения функции при $x = 0{,}5$ и $x = 2{,}5$.

Решение. В данном случае
$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3; \quad y_0 = 5, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 7, \quad y_3 = 29;$ узлы интерполирования являются равноотстоящими
$(x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1)$.

Составим таблицу конечных разностей различных порядков (таблица 15.7).

Таблица 15.7

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	$\underline{5}$			
		$-\underline{4}$		
1	1		$\underline{10}$	
		6		$\underline{6}$
2	7		$\underline{\underline{16}}$	
		$\underline{\underline{22}}$		
3	$\underline{\underline{29}}$			

Числа верхней (нисходящей) строки этой таблицы (подчеркнуты одной чертой) входят множителями в коэффициенты многочлена Ньютона для формулы «интерполирования вперед». Правая часть формулы (15.16) при $n = 3$ принимает вид

$$P_в(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Использовав условие задачи и указанные числа, найдем многочлен Ньютона для «интерполирования вперед»

$$P_в(x) = 5 + \frac{-4}{1}(x - 0) + \frac{10}{2!\,1^2}(x - 0)(x - 1) + \frac{6}{3!\,1^3}(x - 0)(x - 1)(x - 2),$$

$$P_в(x) = 5 - 4x + 5x\,(x - 1) + x\,(x - 1)(x - 2). \qquad \text{(II)}$$

Числа нижней (восходящей) строки таблицы 15.7 (подчеркнуты двумя чертами, включая и число 6) входят в коэффициенты многочлена Ньютона для «интерполирования назад». Правая часть формулы (15.17) при $n = 3$ имеет вид

$$P_н(x) = y_3 + \frac{\Delta y_2}{h}(x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^2}(x - x_4)(x - x_3) +$$

$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)\,.$$

Использовав условие задачи и числа таблицы 15.7, подчеркнутые двумя чертами (включая число 6), найдем многочлен Ньютона для «интерполирования назад»

$$P_н(x)=29+22\,(x-3)+\frac{16}{2!}(x-3)\,(x-2)+\frac{6}{3!}(x-3)\,(x-2)\,(x-1),$$

$$P_н(x)=29+22\,(x-3)+8\,(x-3)\,(x-2)+(x-3)\,(x-2)\,(x-1). \qquad \text{(III)}$$

Значение функции при $x=0{,}5$ найдем с помощью первого многочлена:

$$f\,(0{,}5)=P_в(0{,}5)=5-4\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}5\,(-0{,}5)+0{,}5\,(-0{,}5)\,(-1{,}5)=2{,}125,$$

а значение функции при $x=2{,}5$ – с помощью второго многочлена:

$$f\,(2{,}5)=P_н(2{,}5)=29+22\,(-0{,}5)+8\,(-0{,}5)\,(0{,}5)+(-0{,}5)\cdot 0{,}5\cdot(1{,}5)=15{,}625.$$

З а м е ч а н и е . Найденные многочлены отличаются только формой. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем один и тот же многочлен в обычной форме:

$$P_3(x)=x^3+2x^2-7x+5.$$

Задачи

Найти интерполяционные многочлены Ньютона для функций, заданных следующими таблицами:

1.

x	1	3	4
y	6	24	45

2.

x	– 3	– 2	– 1
y	8	14	23

3.

x	– 3	– 1	1	2
y	8	6	4	18

4.

x	– 1	1	2	3
y	13	1	7	29

5.

x	– 1	1	2	3
y	– 15	1	12	41

6.

x	– 2	– 1	1	2	3
y	57	15	3	9	47

7. Найти интерполяционные многочлены Ньютона «интерполирования вперед» и «интерполирования назад» для функции $y=f\,(x)$ по следующим данным: $f(-2)=-50, f(-1)=-22, f(0)=-8,$ $f(1)=-2, f(2)=26.$

8. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x)=2^x$ по ее значениям в точках $x_0=-1, x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$ и вычислить $f(-0{,}5), f(2{,}5).$

Ответы

1. $P_2(x)=6+9\,(x-1)+4\,(x-1)\,(x-3).$ **2.** $P_2(x)=1{,}5x^2+13{,}5x+35.$ **3.** $P_3(x)=x^3+3x^2-2x+2.$ **4.** $P_3(x)=x^3+2x^2-7x+5.$ **5.** $P_3(x)=-15+$ $+8\,(x+1)+(x+1)\,(x-1)+2\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2),$ или $P_3(x)=2x^3-3x^2+$ $+6x-4.$ **6.** $P_4(x)=57-42\,(x+2)+12\,(x+2)\,(x+1)-2\,(x+2)\,(x+1)\times$ $\times(x-1)+(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2),$ или $P_4(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x+5.$ **7.** $P_в(x)=-50+28\,(x+2)-7\,(x+2)\,(x+1)+x\,(x+1)\,(x+2)+x\,(x-1)\times$ $\times(x+1)\,(x+2),$ $P_н(x)=26+28\,(x-2)+11\,(x-2)\,(x-1)+5x\,(x-1)\times$ $\times(x-2)+x\,(x-1)\,(x-2)\,(x+1),$ или $P(x)=x^4+3x^3-5x^2+7x-8.$ **8.** $P_в(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}x\,(x+1)+\frac{1}{12}x\,(x+1)\,(x-1)+\frac{1}{48}x\,(x+1)\times$ $\times(x-1)\,(x-2),$ $P_н(x)=8+4\,(x-3)+(x-3)\,(x-2)+\frac{1}{6}(x-3)\,(x-2)\times$ $\times(x-1)+\frac{1}{4}(x-3)\,(x-2)\,(x-1)\,x;$ $f(-0{,}5)\approx P_в(-0{,}5)\approx 0{,}6992,$ $f(2{,}5)\approx$ $\approx P_н(2{,}5)\approx 5{,}6680.$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бугров С.Я., Никольский С.М.** Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.
2. **Бугров С.Я., Никольский С.М.** Задачник. – М.: Наука, 1984.
3. **Гусак А.А.** Высшая математика: В 2-х т. – Мн.: ТетраСистемс, 1998–2003.
4. **Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А.** Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1998–2003.
5. **Гусак А.А.** Задачи и упражнения по высшей математике: В 2-х ч. – Мн.: Выш. шк., 1988.
6. **Гусак А.А.** Элементы методов вычислений – Мн.: БГУ, 1982.
7. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Основы математического анализа. В 2-х т. – М.: Наука, 1971.
8. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы: В 2-х т. – М.: Наука, т.1 – 1976, т.2 – 1977.
9. **Кудрявцев Л.Д.** Краткий курс математического анализа – М.: Наука, 1989.
10. **Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.Н., Шабунин М.И.** Сборник задач по математическому анализу. – Мн.: Наука, 1984.
11. **Матвеев Н.М.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – С.–Петербург.: Специальная литература, 1996.
12. **Матвеев Н.М.** Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. шк., 1987.

Оглавление

Введение 3

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава 1. Функция 4
§ 1.1. Понятие функции. Область определения функции 4
§ 1.2. График функции. Простейшие преобразования графика. 14
§ 1.3. Предел переменной величины. Бесконечно малая и бесконечно большая величина 27
§ 1.4. Нахождение пределов 38
§ 1.5. Число e, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ 49
§ 1.6. Разные примеры на нахождение пределов 57
§ 1.7. Сравнение бесконечно малых величин 60
§ 1.8. Непрерывность функции 65

Раздел II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 2. Производная и дифференциал 71
§ 2.1. Производные степенных и тригонометрических функций 72
§ 2.2. Производная сложной функции 75
§ 2.3. Производные показательных и логарифмических функций 79
§ 2.4. Производные обратных тригонометрических функций 82
§ 2.5. Производные неявных функций 85
§ 2.6. Производные высших порядков 87
§ 2.7. Производные гиперболических функций и функций, заданных параметрически 90
§ 2.8. Дифференциал функции 93

Глава 3. Приложения производной 97
§ 3.1. Правило Лопиталя – Бернулли 97
§ 3.2. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между кривыми. Кривизна плоской кривой. Скорость и ускорение 106

§ 3.3. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции 115
§ 3.4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты кривой. 125
§ 3.5. Исследование функций и построение их графиков 130

Раздел III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 4. Неопределенный интеграл 146
§ 4.1. Интегрирование разложением 148
§ 4.2. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции 151
§ 4.3. Метод подстановки...155
§ 4.4. Метод интегрирования по частям 162
§ 4.5. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен 167
§ 4.6. Интегрирование рациональных функций 172
§ 4.7. Интегрирование тригонометрических функций 184
§ 4.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций...190
§ 4.9. Интегрирование гиперболических функций 196

Глава 5. Определенный интеграл и его приложения 199
§ 5.1. Вычисление определенного интеграла 200
§ 5.2. Площадь криволинейной фигуры в декартовых и полярных координатах 206
§ 5.3. Длина дуги кривой...212
§ 5.4. Объем тела вращения 218
§ 5.5. Приложения определенных интегралов к решению простейших физических задач 222
§ 5.6. Несобственные интегралы 226

Раздел IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 6. Функции нескольких переменных 232
§ 6.1. Область определения функции двух и трех переменных. Частное и полное приращение 232
§ 6.2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность...237

Глава 7. Производные и дифференциалы 243
§ 7.1. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных 243
§ 7.2. Производные и дифференциалы высших порядков 247
§ 7.3. Дифференцирование неявных функций 251
§ 7.4. Дифференцирование сложных функций 255

Глава 8. Применения частных производных 260
§ 8.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 260
§ 8.2. Экстремум функции нескольких переменных 264
§ 8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции 268

Раздел V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 9. Дифференциальные уравнения первого порядка 283
§ 9.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 284
§ 9.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка 289
§ 9.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли 296
§ 9.4. Уравнения в полных дифференциалах 305
§ 9.5. Разные дифференциальные уравнения первого порядка 313
§ 9.6. Задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям 314

Глава 10. Дифференциальные уравнения второго порядка 326
§ 10.1. Простейшие типы интегрируемых уравнений второго порядка, случаи понижения порядка 326
§ 10.2. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 332
§ 10.3. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 335

Глава 11. Дифференциальные уравнения порядка выше второго. Системы дифференциальных уравнений 345
§ 11.1. Уравнения, допускающие понижение порядка 345

§ 11.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами 348
§ 11.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами 352
§ 11.4. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами 360

Раздел VI. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Глава 12. Приближенное решение уравнений 368
§ 12.1. Отделение корней уравнений 368
§ 12.2. Метод касательных 371
§ 12.3. Метод итераций 373

Глава 13. Приближенное вычисление определенных интегралов 378
§ 13.1. Формулы прямоугольников 378
§ 13.2. Формула трапеций 381
§ 13.3. Формула парабол 384

Глава 14. Приближенное решение дифференциальных уравнений 388
§ 14.1. Метод Эйлера 388
§ 14.2. Метод Рунге-Кутта 390

Глава 15. Интерполирование функций 395
§ 15.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа 395
§ 15.2. Разности различных порядков. Разделенные разности 399
§ 15.3. Интерполяционный многочлен Ньютона 406

Литература 411

Учебное издание

Гусак Алексей Адамович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры и задачи

6-е издание

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *С. В. Процко*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 23.06.2011.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага для офсетной печати. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 24,18. Уч.-изд. л. 20,8. Тираж 1500 экз.
Заказ

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью «ТетраСистемс».
ЛИ № 02330/0494056 от 03.02.2009.
Удостоверение о государственной гигиенической регистрации
№ 08-33-2.79451 от 14.10.2008.
Ул. Железнодорожная, 9, 220014, г. Минск. Тел. 219-74-01,
e-mail: rtsminsk@mail.ru, http://www.ts.by.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство “Белорусский Дом печати”».
ЛП № 02330/0494179 от 03.04.2009.
Пр. Независимости, 79, 220013, г. Минск.