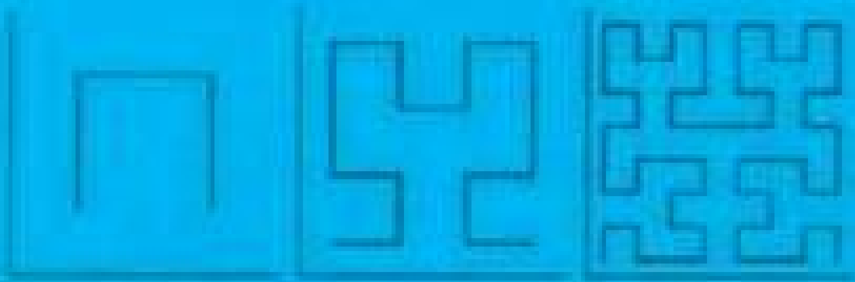
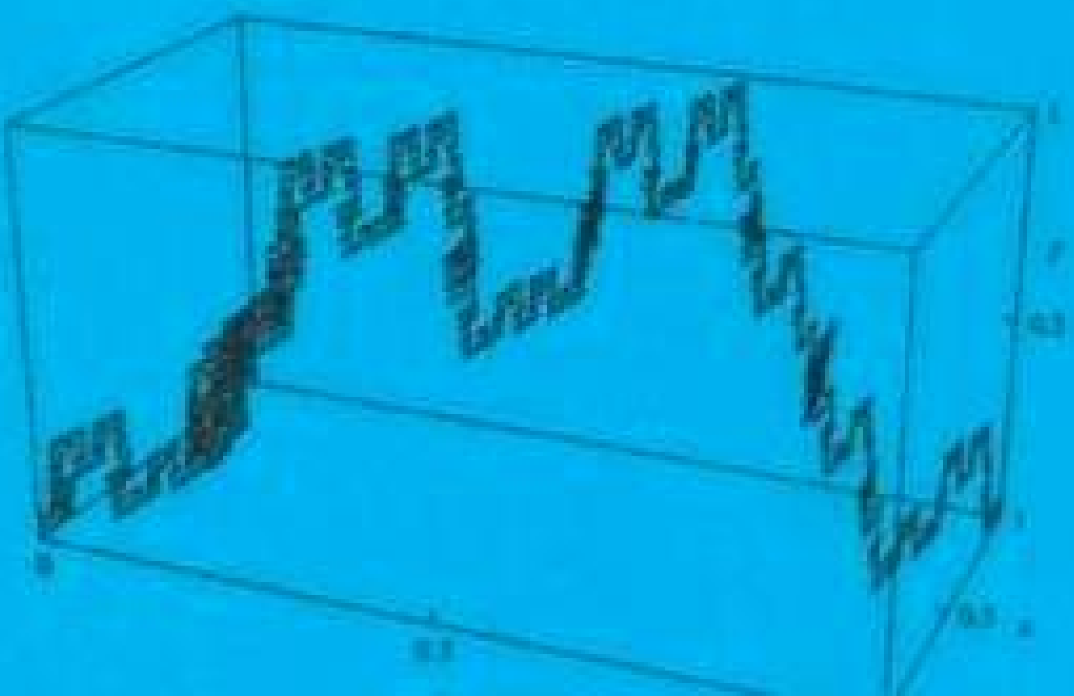
А. В. Махоркин, В. В. Махоркин

МАТЕМАТИКА ФРАКТАЛОВ





Калининград
2011

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

А. В. Махоркин, В. В. Махоркин

МАТЕМАТИКА ФРАКТАЛОВ

Рекомендуется
Редакционно-издательским советом БФУ им. И. Канта
в качестве учебного пособия

Издательство
Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта
2011

УДК 510:514
ББК В16
М79

Рецензент

И. В. Карпов — д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотр.,
Западного отделения Института земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН

Махоркин А. В., Махоркин В. В.
М79 Математика фракталов: учеб. пособие. — Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта, 2011. — 155 с.
ISBN 978-5-9971-0163-3

Дано введение в математику фрактальных множеств, активно используемых в различных разделах современной математики и ее приложениях. Основное внимание уделяется изучению свойств фрактальных множеств, которые возникают как в различных ветвях чистой математики, так и в ее приложениях в науке и технике.

Учебное пособие соответствует действующим программам курсов направления «математика» по профилю «математический анализ», может быть использовано для преподавания подобных курсов для направлений «математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «прикладная математика и информатика» и специальности «компьютерная безопасность».

Предназначено для студентов и аспирантов математических факультетов.

УДК 510:514
ББК В16

ISBN 978-5-9971-0163-3

ВВЕДЕНИЕ

Основу этого учебного пособия составляют курсы «Математика фракталов» и «Элементы хаотической динамики» для студентов специальности «математика» специализации «математический анализ», а также «Элементы теории фракталов» для обучающихся по специальности «математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

В последние тридцать лет теория фрактальных множеств стала очень активно исследоваться, что в первую очередь обусловлено бурным развитием компьютерных технологий, и применяться в самых разнообразных сферах, например теоретической физике, цифровой обработке сигналов и изображений, технологиях нефтегазодобычи и др.

Для успешного усвоения материала курса необходимы глубокие знания в области действительного анализа, функционального анализа, общей топологии, линейной алгебры, комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений.

Главная задача представленного учебного пособия — введение в математические аспекты теории фрактальных множеств.

В первой главе раскрываются основные свойства топологических и метрических пространств, связь метрик и топологий. Особенное внимание уделяется компактам и связности.

Во второй главе — примеры фрактальных множеств: канторовы множества, ковры Серпинского и пространство-заполняющие кривые.

В третьей — представлены основные числовые характеристики фрактальных множеств: метрики Хаусдорфа, топологические размерности, размерность подобия, мера и размерность Хаусдорфа.

В четвертой — обсуждаются пространства строк (модельные пространства) и некоторые их применения в теории фрактальных множеств.

Текст учебного пособия сопровождается заданиями, которые позволяют осуществлять самоконтроль, а также расширить и углубить понимание математики фрактальных множеств.

Для более глубокого изучения материала курса приводится список рекомендованной литературы по математике фракталов.

Данное учебное пособие является первой книгой серии, второй будет «Математика хаоса», третьей — «Математика вейвлетов».

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Метрические пространства

***Определение* 1.1.1.** Пусть X — множество. Функция $d : X \times X \to R$ такая, что:

1) для любых $x,y \in X$: $d(x,y) \geq 0$;

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3) для любых $x,y \in X$: $d(x,y) = d(y,x)$ (симметричность);

4) для любых $x,y,z \in X$: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (неравенство треугольника) называется метрикой (расстоянием) на X.

Замечание: $d(x,y)$ — расстояние между точками x и y.

***Определение* 1.1.2.** Множество X, на котором задана метрика d, называется метрическим пространством и обозначается (X, d).

Замечание. Если не нужно явно указывать метрику или из текста ясно, какая метрика имеется в виду, то мы будем вместо (X,d) писать просто X.

Метрические пространства в математике встречаются очень часто и позволяют описывать многие важные свойства рассматриваемых объектов.

Рассмотрим некоторые примеры метрических пространств.

1. $X = R$, $d(x,y) = |x - y|$:

1) очевидно, для любых $x,y \in R$: $|x - y| \geq 0$;

2) $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3) $|x - y| = |y - x|$;

4) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Это стандартные свойства абсолютной величины.

Таким образом, множество действительных чисел относительно так определенного расстояния является метрическим пространством.

2. Пусть $X \neq \varnothing$. Положим

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Очевидно, имеем:

1) $d(x,y) \geq 0$;

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3) $d(x,y) = d(y,x)$;

4) проверим: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Если x, y, z различны, то это соотношение верно. Если x, y, z не все различны, то это соотношение также верно.

Таким образом, (X,d) — метрическое пространство.

3. Пусть $X = R^2$ и пусть $(x^1,x^2) \in R^2$ и $(y^1,y^2) \in R^2$, положим $d(x, y) = \sqrt{\left(x^1 - y^1\right)^2 - \left(x^2 - y^2\right)^2}$. Свойства метрики естественным образом выполняются (смотри курс математического анализа). Таким образом, (X,d) — метрическое пространство и такая метрика на R^2 называется эвклидовой (стандартной).

4. Пусть $[a,b] \subset R$ — отрезок. Обозначим $C^0([a,b])$ множество всех непрерывных числовых функций на [a,b]. Определим

$$d : C^0([a, b]) \times C^0([a, b]) \to R$$

следующим образом: $d(f, g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$:

1) $d(f,g) \geq 0$;

2) $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;

3) $d(f,g) = d(g,f)$;

4) неравенство треугольника следует из того, что

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

для всех $x \in [a,b]$. Но тогда

$$|f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)|,$$

для всех $x \in [a,b]$. Поэтому

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)|.$$

Таким образом,

$$d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g).$$

$(C^0([a,b]),d)$ — метрическое пространство.

5. Рассмотрим $C^0([a,b])$ и положим $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$:

1) $d_1(f,g) \ge 0$;

2) $d_1(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$. Так как если $f = g$, то $d_1(f,g) = 0$. Если же $d_1(f,g) = 0$, то в случае $f \ne g$ существует отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, такой, что для всякого $x \in [\alpha,\beta]$ $|f(x) - g(x)| > 0$. Но тогда $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = d_1(f,g) > 0$;

3) $d_1(f,g) = d_1(g,f)$;

4) неравенство треугольника следует из того, что для всех $x \in [a,b]$

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|,$$

интегрируя которые, получим неравенство треугольника. Таким образом, (X,d_1) — метрическое пространство.

Если мы имеем метрическое пространство (X,d), то можно получить новое метрическое пространство (X, d'), например $d'(x,y) = \min(1, d(x,y))$ или $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

То, что таким образом мы получили метрику на множестве X, доказать самостоятельно. Во втором случае использовать то, что функция $z \mapsto \dfrac{z}{1+z}$ *для* $z \ge 0$ *возрастает. Следует обратить внимание на то, что для любых* $x, y \in X$ $d'(x,y) \le 1$*!*

Еще одной важной структурой является векторное нормированное пространство. В основном мы будем рассматривать векторные пространства над полем действительных чисел.

***Определение* 1.1.3.** Пусть E — векторное пространство над полем действительных чисел. Функция $\nu: E \to R$ называется нормой на E, если:

1) для всех $x \in E$ $\nu(x) \geq 0$;

2) $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) для всех $x \in E$ и для всех $\alpha \in R$ $\nu(\alpha x) = |\alpha| \nu(x)$;

4) для всех $x, y \in E$ $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ (неравенство треугольника).

Замечание: $\nu(x) \overset{\text{def}}{=} \| x \|$ и называется нормой вектора x.

***Определение* 1.1.4.** Векторное пространство E, на котором задана норма ν, называется векторным нормированным пространством и обозначается (E,ν).

Примеры векторных нормированных пространств:

а) множество действительных чисел R и $\nu(x) = |x|$;

б) R^n и $\nu_1(x) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2}$ — (R^n, ν_1)-нормированное векторное пространство;

в) R^n и $\nu_2(x) = |x^1| + |x^2| + \cdots + |x^n|$ — (R^n, ν_2)-нормированное векторное пространство;

г) R^n и $\nu_3(x) = \max\{|x^1|, |x^2|, \ldots, |x^n|\}$ — (R^n, ν_3)-нормированное векторное пространство.

Проверить это самостоятельно.

В трех последних примерах на одном и том же векторном пространстве определены три различные нормы.

Пусть (E,ν) — векторное нормированное пространство, положим $d(x, y) = \| x - y \|$. Тогда имеем:

1) для любых $x, y \in X$ $d(x,y) \geq 0$;

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3) для любых $x, y \in X$ $d(x,y) = d(y,x)$;

4) для любых $x, y, z \in X$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Таким образом, норма индуцирует метрику на E, следовательно, всякое нормированное векторное пространство, определяя указанным выше способом метрику на нем, может быть наделено структурой метрического пространства.

***Определение* 1.1.5.** Пусть (X,d) — метрическое пространство.

1. Открытым шаром с центром в точке $a \in E$ и радиусом $r > 0$ называется множество $B_r(a) = \{ x \in E : d(a, x) < r \}$.

2. Замкнутым шаром с центром в точке $a \in E$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\overline{B}_r(a) = \{ x \in E : d(a, x) \le r \}$.

3. Сферой с центром в точке $a \in E$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S_r(a) = \{ x \in E : d(a, x) = r \}$.

П р и м е р ы:

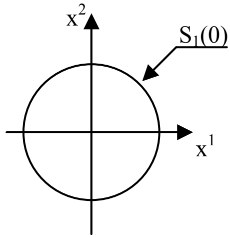


Рис. 1.1

1. (R^2, ν_1) — $S_1(0)$ является «обычной» окружностью на плоскости.

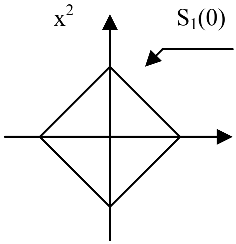


Рис. 1.2

2. (R^2, ν_2) — $S_1(0)$ является «квадратом».

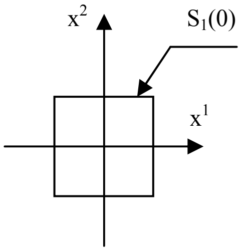


Рис. 1.3

3. (R^2, ν_3) — $S_1(0)$ является «ромбом».

Уже эти примеры показывают — насколько «странной» может быть «привычная» окружность.

Еще один пример метрик — это так называемые неархимедовые метрики, с их помощью такие метрики «создается» p-адический анализ, объектами которого являются p-адические числа. Множество p-адических чисел Q_p получается как пополнение множества рациональных чисел Q по этой новой метрике (по аналогии с множеством действительных чисел, которое получается пополнением множества рациональных по эвклидовой метрике) [1; 2].

Мы определим на множестве рациональных чисел метрику с очень необычными свойствами. Пусть Q — множество рациональных чисел и p — простое число. Для всякого $x \in Z \subset Q$ положим $\operatorname{ord}_p x = \{$наибольшей степени числа p, на которое делится число x$\}$. Если $x \in Q$ и $x \notin Z$, то можно считать, что $x = \frac{a}{b}$, где $a,b \in Z$, тогда полагаем $\operatorname{ord}_p x = \operatorname{ord}_p a - \operatorname{ord}_p b$. Очевидно, что если $x = \frac{c}{d}$, то c = u a и d = u b, где $u \in Z$. Тогда $\operatorname{ord}_p c = \operatorname{ord}_p a + \operatorname{ord}_p u$ и $\operatorname{ord}_p d = \operatorname{ord}_p b + \operatorname{ord}_p u$. Поэтому $\operatorname{ord}_p \frac{c}{d} = \operatorname{ord}_p \frac{a}{b}$, то есть $\operatorname{ord}_p x$ определено однозначно (не зависит от его представления в виде рациональной дроби).

Определим отображение $\nu : Q \to R$ следующим образом:

$$\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{\operatorname{ord}_p x}}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Замечание: $\nu(x) \overset{\text{def}}{=} |x|_p$.

Очевидно, для всякого $x \in Q$ имеем $|x|_p \geq 0$; $x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x|_p = 0$; для любых $x,y \in Q$ имеем $|xy|_p = |x|_p |y|_p$; неравенство треугольника требует некоторых усилий.

Пусть $x=\frac{a}{b}$ и $y=\frac{c}{d}$, тогда $x+y=\frac{ad+bc}{bd}$. По определению

$$\operatorname{ord}_p(x+y)=\operatorname{ord}_p(ad+bc)-\operatorname{ord}_p bd \ge \min\{\operatorname{ord}_p(ad),\operatorname{ord}_p(bc)\}-$$
$$-\operatorname{ord}_p b-\operatorname{ord}_p d=\min\{\operatorname{ord}_p a-\operatorname{ord}_p b,\operatorname{ord}_p c-\operatorname{ord}_p d\}=$$
$$=\min\{\operatorname{ord}_p x,\operatorname{ord}_p y\}\quad .$$

Но тогда

$$|x+y|_p=\frac{1}{p^{\operatorname{ord}_p(x+y)}}\le \max\{p^{-\operatorname{ord}_p x},p^{-\operatorname{ord}_p y}\}=\max\{|x|_p,|y|_p\}.$$

Поэтому очевидно, что $|x+y|_p\le|x|_p+|y|_p$.

Таким образом, функция $|\ldots|_p$ — норма на Q. Кроме того, по определению $|1|_p=1$ и $|-x|_p=|x|_p$.

Но эта норма обладает более сильным, чем неравенство треугольника, свойством:

$$|x+y|_p\le\max\{|x|_p,|y|_p\}\ .$$

Норма, обладающая этим свойством, называется неархимедовой, а само это свойство — сильным неравенством треугольника. Метрика, определяемая такой нормой, обладает свойством

$$|x-y|_p=|(x-z)+(z-y)|_p\le\max\{|x-z|_p,|z-y|_p\},$$

поэтому d(x,y) ≤ max {d(x,z), d(z,y)} — это сильное неравенство треугольника для метрики. Такая метрика также называется неархимедовой.

В этой метрике мы имеем для всякого $n\in N$ $|n|_p\le 1$. По индукции $|1|_p=1$, пусть $|k|_p\le 1$, для всякого k = 1,2,…, n–1, тогда $|n|_p=|(n-1)+1|_p\le\max\{|(n-1)|_p,|1|_p\}\le 1$. Кроме того, $|-n|_p=|n|_p$. Но это означает, что замкнутый шар $\overline{B}_1(0)$ в p-адической метрике содержит множество Z (множество целых чисел).

Следует иметь в виду, что для всякого $x \in Q_p$ $\left|x\right|_p$ может принимать значения только из множества $H_p = \{0\} \cup \{p^n\}$, где $n \in Z$.

Пусть $B_r(a) \subset Q_p$ и $b \in B_r(a)$, тогда точка b является центром шара $B_r(a)$, то есть $B_r(a) = B_r(b)$. Очень необычно.

Если даны три точки x, y, $x–y \in Q_p$ и $\left|x\right|_p < \left|y\right|_p$, то $\left|x - y\right|_p = \left|y\right|_p$. Это свойство называется свойством равнобедренного треугольника.

Эти некоторые свойства неархимедовых метрик показывают, насколько нужно быть осторожным с объектами в общих метрических пространствах, моделями для которых выступают объекты эвклидовых метрик.

Кроме того, метрические пространства Q_p имеют интересную связь с очень важным и одним из первых фракталов — Канторовым множеством.

***Определение* 1.1.6.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Множество $U \subset X$ называется открытым, если для всякого $x \in U$ существует шар $B_r(x) \subset U$.

П р и м е р. Шар $B_r(a) \subset X$ является открытым множеством. Действительно, пусть $x \in B_r(a)$, очевидно, что $d(a,x) = s < r$. Тогда, учитывая неравенство треугольника, шар $B_s(x) \subset B_r(a)$.

Таким образом, во множестве всех подмножеств множества X выделяется множество всех открытых подмножеств. Обозначим его $\mathcal{O}$. Здесь важно то, что открытые множества определяются метрикой d, а так как на множестве может существовать не одна метрика, то другая метрика определяет, вообще говоря, другой запас открытых множеств, но у них есть совпадающие свойства.

Теорема 1.1.1. Пусть (X,d) — метрическое пространство и $\mathcal{O}$ — множество всех открытых подмножеств в X, определяемых метрикой d. Тогда

1) $\varnothing \in \mathcal{O}$ и $X \in \mathcal{O}$;

2) всякое объединение множеств из $\mathcal{O}$ принадлежит $\mathcal{O}$;

3) пересечение конечного числа множеств из $\mathcal{O}$ принадлежит $\mathcal{O}$.

Доказательство: 1) очевидно; 2) пусть $U_i \in \mathcal{O}$ для всякого $I \in I$, если $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, то $x \in U_{i_0}$, поэтому существует $B_r(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$; 3) пусть $U_i \in \mathcal{O}$, для всякого $I \in I$, где $I = \{1,2,\ldots,k\}$, если, $x \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, то $x \in U_i$ для всякого $i \in I$. Поэтому для всякого $i \in I$ $x \in B_{r_i}(x) \subset U_i$. Возьмем $r_0 = \min \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, тогда $B_{r_0}(x) \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$.

Теорема доказана.

Определение **1.1.7.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Всякое множество, в котором содержится открытое множество, имеющее точку $x \in X$, называется окрестностью точки x.

Замечание. Открытое множество является окрестностью каждой своей точки! Такие окрестности называются открытыми окрестностями.

Пример. Шар $B_r(x)$ — окрестность каждой своей точки.

Таким образом, во множестве всех подмножеств множества X выделяются подмножества, являющиеся окрестностями.

Еще один важный класс подмножеств.

Определение **1.1.8.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Подмножество $V \subset X$ называется замкнутым, если $X \setminus V$ — открытое.

Обозначим $\mathcal{C}$ множество всех замкнутых подмножеств множества X. Используя законы взаимности, получим следующую теорему.

Теорема 1.1.2. Пусть (X,d) метрическое пространство. Тогда

1) $\varnothing \in \mathcal{C}$ и $X \in \mathcal{C}$;

2) всякое пересечение множеств из $\mathcal{C}$ принадлежит $\mathcal{C}$;

3) объединение конечного числа множеств из $\mathcal{C}$ принадлежит $\mathcal{C}$.

Пример. Замкнутый шар $\overline{B}_r(a)$ является замкнутым множеством. Если $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$, то $d(a,x) = r + s$, где $s > 0$. Тогда шар $B_s(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$.

Замечание. Существуют множества, которые одновременно являются и открытыми, и замкнутыми. Например, $\varnothing$ и X, но это тривиальный случай. Вот нетривиальный пример в Q_p:

$$\overline{B}_{p^n}(a) = \left\{ x \in Q_p : \| x - a \|_p \le p^n \right\} =$$
$$= \left\{ x \in Q_p : \| x - a \|_p < p^{n+1} \right\} = B_{p^{n+1}}(a).$$

Замкнутый шар $\overline{B}_{p^n}(a)$ совпадает с открытым шаром $B_{p^{n+1}}(a)$.

Существуют множества, которые не являются и неоткрытыми, и незамкнутыми. Например, в эвклидовой метрике полуинтервал $[a,b) \subset R$.

***Определение* 1.1.9.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества $A \subset X$, если всякий шар $B_r(x)$ пересекается с множеством A. Множество всех точек прикосновения множества A называется замыканием множества A и обозначается $\overline{A}$.

Замечание. Очевидно, это условие эквивалентно: всякая окрестность точки x пересекается со множеством A. По определению $A \subset \overline{A}$.

Является ли множество $\overline{A}$ замкнутым?

Лемма 1.1.1. Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A \subset X$ — замкнутое множество, тогда $A = \overline{A}$.

Доказательство. Пусть A — замкнуто, тогда X\A — открытое множество являющееся окрестностью каждой своей точки, не пересекающееся с множеством A. Поэтому множество X \ A не содержит точек прикосновения множества A, то есть $\overline{A} \subset A$.

Лемма 1.1.1 доказана.

Лемма 1.1.2. Пусть (X,d) метрическое пространство и $A \subset X$, тогда $\overline{A}$ — замкнутое множество.

Доказательство. Если $x \in X \backslash \overline{A}$, тогда точка x не является точкой прикосновения множества A. Поэтому существует шар $B_r(x)$ такой, что $B_r(x) \cap A = \varnothing$. Покажем, что $B_r(x) \cap \overline{A} = \varnothing$. Если бы существовал $y \in B_r(x) \cap \overline{A}$, тогда точка $y \in \overline{A}$ и шар $B_r(x)$ был бы ее окрестностью, т. е. $B_r(x) \cap A \neq \varnothing$ — противоречие. Таким образом, $X \backslash \overline{A}$ — открытое множество, поэтому $\overline{A}$ — замкнуто.

Лемма 1.1.2 доказана.

Следствие 1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Доказательство. По лемме 1.1.2 $\overline{A}$ — замкнуто, по лемме 1.1.1 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Следствие 2. Для того чтобы $A \subset X$ было замкнутым множеством, необходимо и достаточно, чтобы $A = \overline{A}$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Замыкание открытого шара $B_r(a)$ содержится в замкнутом шаре $\overline{B}_r(a)$, но может не совпадать с ним. *Привести пример.*

***Определение* 1.1.10.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества $A \subset X$, если всякая окрестность точки x пересекается как со множеством A, так и со множеством X\A. Множество всех граничных точек множества A называется границей множества A и обозначается Gr A.

Замечание. Из определения граничной точки следует, что если $x \in \mathrm{Gr}\ A$, то $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{X \setminus A}$. Но тогда $\mathrm{Gr}\ A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, что означает Gr A — замкнутое множество.

Примеры:

1. (R^2, ν_1), тогда $\mathrm{Gr}\ B_r(a) = S_r(a)$.

2. В Q_p сфера $S_r(a) = \{x \in Q_p : \| x - a \|_p = r\}$ является открытым множеством. Пусть $x \in S_r(a)$, $0 < \varepsilon < r$, где $\varepsilon, r \in H_p$, рассмотрим открытый шар $B_\varepsilon(x)$: возьмем $y \in B_\varepsilon(x)$, тогда по свойству равнобедренного треугольника

$$\| y - a \|_p = \max\{ \| x - a \|_p, \| x - y \|_p \} = r.$$

Таким образом, $y \in S_r(a)$, то есть $B_\varepsilon(x) \subset S_r(a)$, поэтому $S_r(a)$ — открытое множество. Но в любом метрическом пространстве сфера — замкнутое множество. Тогда в Q_p сфера $S_r(a)$ не является границей шара $B_r(a)$. Более того, у шара $B_r(a)$ нет границы. Подробности смотри в работах [1; 2].

***Определение* 1.1.11.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества $A \subset X$, если существует шар (окрестность точки "x") $B_r(x) \subset A$. Множество внутренних точек множества A обозначается $\overset{0}{A}$ (также для обозначения внутренности используется Int A).

Замечание. Точка $x \in X$ является внутренней точкой множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда множество A — ее окрестность. Если множество A открыто, то оно совпадает со своей внутренностью. По определению $\overset{0}{A} \subset A$.

***Определение* 1.1.12.** Пусть (X,d) — метрическое пространство.

Точка $x \in X$ называется внешней точкой множества $A \subset X$, если она является внутренней точкой его дополнения. Внешность множества $A \subset X$ — это множество всех его внешних точек.

П р и м е р. Рассмотрим на эвклидовой плоскости R^2 замкнутый круг $D^2 = \left\{x \in R^2 : \nu_1(x) \le 1\right\}$. Внешностью круга D^2 является множество $R^2 \setminus D^2 = \left\{x \in R^2 : \nu_1(x) > 1\right\}$.

***Определение* 1.1.13.** Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A \subset X$ — непустое подмножество. Диаметром множества A называется

$$\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x, y).$$

З а м е ч а н и е. Диаметр множества — действительное положительное число или же он равен $+\infty$.

П р и м е р. Пусть $B_r(a)$ — шар в метрическом пространстве (X,d), тогда $\delta(B_r(a)) \le 2r$. *Доказать самостоятельно, используя неравенство треугольника.*

П р и м е р. Если L — прямая в R^2, то очевидно $\delta(L) = +\infty$ (в эвклидовой метрике).

З а д а н и е. Пусть (X,d) — метрическое пространство и A, B — его непустые подмножества, причем $A \subset B$, тогда $\delta(A) \subset \delta(B)$.

***Определение* 1.1.14.** Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A \subset X$ и $B \subset X$ — непустые подмножества. «Расстоянием» между этими множествами называется число

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

З а м е ч а н и е. Слово «расстояние» в этом определении взято в кавычки, так как определенная величина не является расстоянием, которое выше у нас — синоним метрики.

В дальнейшем мы определим «настоящее» расстояние между подмножествами (определенного типа) в метрическом пространстве.

Если множество A = {x} — одноточечное множество, то в этом случае мы будем применять обозначение $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$.

Вот некоторые свойства так определенного «расстояния», если $A \cap B \neq \varnothing$, то у этих множеств есть общая точка и поэтому $d(A,B) = 0$. Если $d(A,B) = 0$, то это не означает, что $A \cap B \neq \varnothing$.

Пусть $A = \left\{ \left(x^1, x^2\right) \in R^2 : x^2 = \dfrac{1}{x^1}, x^1 > 0 \wedge x^2 > 0 \right\}$, а множество $B = \left\{ \left(x^1, x^2\right) \in R^2 : x^2 = 0 \wedge x^1 > 0 \right\}$. Тогда в эвклидовой метрике $d(A,B) = 0$, но $A \cap B = \varnothing$!

***Определение* 1.1.15.** Пусть (X,d) — метрическое пространство, непустое подмножество $A \subset X$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Это определение эквивалентно тому, что $\delta(A) < +\infty$. Докажите это.

Задание. Пусть (X,d) — метрическое пространство и A, B — его непустые ограниченные подмножества, тогда подмножество $A \cup B$ ограниченно.

Следует иметь в виду, что ограниченность подмножества зависит от метрики, так как если взять (R^2, d_1), где d_1 — эвклидова метрика, то одномерное подпространство $L \subset R^2$ неограниченно. Если перейти к метрике d на R^2, такой, что $d(x,y) = \min\{1, d_1(x,y)\}$(смотри выше), то всякое подмножество в R^2 будет ограниченно, как, впрочем, и само R^2!

Пусть (X,d) — метрическое пространство, $A \subset X$ — непустое подмножество и $\varepsilon > 0$, положим $V_\varepsilon(A) = \left\{ x \in X : d(x,A) < \varepsilon \right\}$.

Лемма 1.1.3. $V_\varepsilon(A) = \bigcup\limits_{a \in A} B_\varepsilon(a)$.

Доказательство. Пусть $x \in V_\varepsilon(A)$, но $x \notin \bigcup\limits_{a \in A} B_\varepsilon(a)$. Тогда для всякого $a \in A$, $d(x,a) \geq \varepsilon$. Поэтому $d(x,A) \geq \varepsilon$. Противоречие.

Если $x \in \bigcup\limits_{a \in A} B_\varepsilon(a)$, то существует $B_\varepsilon(a)$, такое, что $x \in B_\varepsilon(a)$. Тогда $d(x,a) < \varepsilon$, следовательно, $d(x,A) < \varepsilon$.

Лемма 1.1.3 доказана.

Следствие. $V_\varepsilon(A)$ — открытое множество.

Доказательство. $V_\varepsilon(A)$ является объединением открытых шаров.

Множество $V_\varepsilon(A)$ называется ε-окрестностью множества A, если $A = \{a\}$, то очевидно, что $V_\varepsilon(A) = B_\varepsilon(a)$.

Лемма 1.1.4. Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A \subset X$ — непустое подмножество. Для того чтобы точка $x \in \overline{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $d(x, A) = 0$.

Доказательство. Пусть $x \in \overline{A}$. Возьмем шар $B_\varepsilon(x)$, тогда существует $y \in A$, такой, что $0 \le d(x,y) < \varepsilon$ (ε — любое положительное число). Это означает $d(x, A) = 0$.

Если $d(x, A) = 0$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $y \in A$, такой, что $d(x,y) < \varepsilon$. То есть $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$, поэтому $x \in \overline{A}$.

Лемма 1.1.4 доказана.

Лемма 1.1.5. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Для того чтобы точка $x \in X$ была внешней для множества $A \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы $d(x, A) > 0$.

Доказательство. Если точка $x \in X$ такая, что $r = d(x, A) > 0$, то для всякого $y \in B_r(x)$: $d(x,y) < r$, поэтому $y \in X \backslash A$, это означает $B_r(x) \subset X \backslash A$. Таким образом, точка x — внешняя точка множества A.

Если точка x — внешняя точка множества A, то существует шар $B_r(x) \subset X \backslash A$. Тогда $d(x, A) \ge r > 0$.

Лемма 1.1.5 доказана.

***Определение* 1.1.16.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется плотным во множестве $B \subset X$, если $B \subset \overline{A}$. Множество $A \subset X$ называется плотным в X (всюду плотным), если $\overline{A} = X$.

Замечание. Если A плотно в B и $x \in B$, то всякий открытый шар с центром в точке x (всякая открытая окрестность точки x) пересекается со множеством A. Если множество A плотно в X, то всякое непустое открытое в X множество пересекается со множеством A.

П р и м е р. Если мы обозначим I множество всех иррациональных чисел в R, то I плотно в R, так как $\overline{I} = R$.

***Определение* 1.1.17.** Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем существует не более чем счетное плотное подмножество.

П р и м е р. Множество действительных чисел R в эвклидовой метрике является сепарабельным метрическим пространством, так как множество рациональных чисел Q — счетное и $\overline{Q} = R$.

***Определение* 1.1.18.** Семейство непустых открытых множеств $\{U_{i\in I}\}$ в X называется базой открытых множеств метрического пространства (X,d), если каждое непустое открытое множество метрического пространства (X,d) является объединением некоторых элементов семейства $\{U_{i\in I}\}$.

Теорема 1.1.3. Для того чтобы метрическое пространство было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала не более чем счетная база открытых множеств.

Доказательство. См., например: [3; 4].

***Определение* 1.1.19.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если $\mathrm{Int}\overline{A} = \varnothing$.

З а д а н и е. Если множество A нигде не плотно, то $X \setminus \overline{A}$ плотно в X. *Доказать самостоятельно.*

П р и м е р. Всякая прямая на плоскости R^2 в эвклидовой метрике является нигде не плотным подмножеством, так как если $L \subset R^2$ прямая, то $\overline{L} = L$ и на плоскости R^2 не существует открытого множества, содержащегося в L.

На рисунке 1.4 иллюстрируется еще одно эквивалентное определение нигде не плотного подмножества [4; 5].

***Определение* 1.1.20.** Пусть (X,d) — метрическое пространство, множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если во всяком открытом множестве $U \subset X$ существует открытое множество $V \subset U$, такое, что $V \cap A = \varnothing$.

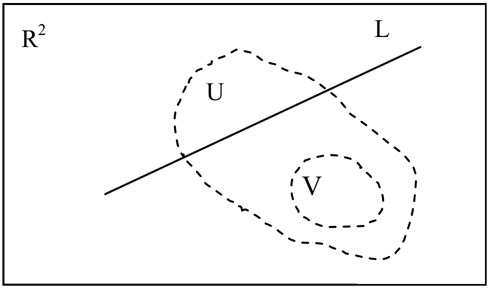


Рис. 1.4

З а д а н и е. Доказать эквивалентность определений 1.1.19 и 1.1.20.

П р и м е р. Подмножество целых чисел Z ⊂ является нигде не плотным подмножеством в R, наделенным эвклидовой метрикой.

Пусть (X,d) — метрическое пространство и $Y \subset X$. Обозначим $d_Y = d|_{Y\times Y}$ сужение отображения d на $Y\times Y$.

Лемма 1.1.6. d_Y — метрика на Y.

Доказательство следует из того, что $Y\times Y\subset X\times X$.

***Определение* 1.1.21.** Пара (Y,d_Y) называется подпространством метрического пространства (X,d).

Здесь следует иметь в виду, что если, например, $X = R^2$, а $Y \subset R^2$ — это прямоугольник, то шар в Y может отличаться от шара в R^2.

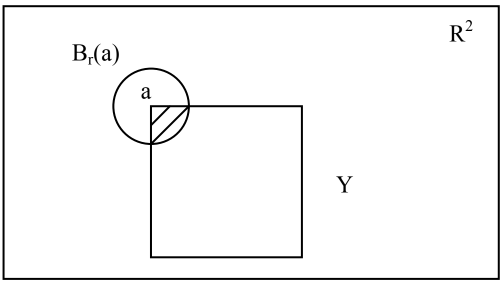


Рис. 1.5

Здесь $B_r(a)$ — шар радиуса r на эвклидовой плоскости R^2 с центром в точке a, являющейся вершиной прямоугольника Y, а его заштрихованная часть — шар в прямоугольнике Y, с тем же центром и того же радиуса!

Теорема 1.1.4. Пусть (Y,d_Y) — подпространство метрического пространства (X,d). Для того чтобы $V \subset Y$ было открыто в Y, необходимо и достаточно, чтобы существовало открытое в X множество U, такое, что $U \cap Y = V$.

Доказательство. Пусть U открыто в X и $U \cap Y = V$. Возьмем $x \in V$. Так как U открыто в X, то существует шар $B_r(x)$ в X, такой, что $B_r(x) \subset U$ и $B_r(x) \cap Y$ — шар в Y. Тогда по построению $B_r(x) \cap Y \subset U \cap Y$, следовательно, множество V вместе с каждой своей точкой содержит шар в подпространстве Y с центром в этой точке. Таким образом, V — открытое в Y множество.

Пусть V открыто в Y. Тогда для всякой точки $x \in V$ существует шар $B_{r(x)}(x)$ в X (r зависит от x), такой, что шар $B_{r(x)}(x) \cap Y \subset V$. Возьмем $U = \bigcup\limits_{x \in V} B_{r(x)}(x)$ — открытое в X множество. Очевидно, $V = \bigcup\limits_{x \in B} B_{r(x)}(x) \cap Y = U \cap Y$. Таким образом, $V = U \cap Y$, причем U открыто в X.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Эта теорема является «ключом» к пониманию «устройства» подпространств метрических пространств.

Из этой теоремы легко получить:

Следствие 1. Для того чтобы $V \subset Y$ было окрестностью точки $x \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы $V = U \cap Y$, где U — окрестность точки x в X.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Следствие 2. Для того чтобы всякое открытое подмножество в Y было открыто в X, необходимо и достаточно, чтобы Y было открыто в X.

Доказательство. Пусть всякое открытое в Y подмножество открыто в X. Так как Y открыто в Y, то Y открыто в X. Пусть Y открыто в X и V открыто в Y, тогда существует W, открытое в X, такое, что $V = Y \cap W$. Таким образом, V открыто в X.

Следствие доказано.

Так как замкнутое множество — это дополнение открытого множества, то, используя свойство «операции» дополнение, можно легко доказать следующую теорему.

Теорема 1.1.5. Пусть (Y,d_Y) — подпространство метрического пространства (X,d). Для того чтобы $B \subset Y$ было замкнуто в Y, необходимо и достаточно, чтобы существовало замкнутое в X множество A, такое, что $A \cap Y = B$.

Доказательство. Если B — замкнуто в Y, то $Y \backslash B$ — открыто в Y. Тогда по теореме 1.1.4 существует U, открытое в X, такое, что $Y \cap U = Y \backslash B$. Но соотношение $Y \cap U = Y \backslash B$ легко преобразуется в эквивалентное соотношение $B = Y \cap (X \backslash U)$ (*доказать самостоятельно*). Полагаем $A = X \backslash U$.

Если $B = A \cap Y$, где A — замкнуто в X, то существует открытое в X подмножество U, такое, что $A = X \backslash U$. Тогда $B = Y \cap (X \backslash U)$, поэтому $Y \backslash B = Y \cap U$ открыто в Y. Таким образом, B — замкнутое подмножество в Y.

Теорема доказана.

Утверждение, аналогичное следствию 2, для замкнутых подмножеств сформулировать и доказать самостоятельно.

Как «ведут» себя замыкания в подпространствах?

Теорема 1.1.6. Пусть (Y,d_Y) — подпространство метрического пространства (X,d) и $B \subset Y$, тогда замыкание множества B в подпространстве Y равно $\overline{B} \cap Y$, где $\overline{B}$ — замыкание множества B в пространстве X.

Доказательство. Обозначим $\overline{B}_Y$ замыкание множества B в подпространстве Y. Пусть $x \in \overline{B}_Y$ и V — ее окрестность в Y, тогда $B \cap V \neq \varnothing$ и существует окрестность U точки x в X, такая, что $V = Y \cap U$. Тогда $x \in \overline{B} \cap Y$.

Наоборот, если $x \in \overline{B} \cap Y$, то существует окрестность U точки x в X, такая, что $B \cap U \neq \varnothing$, кроме того, $Y \cap U$ — окрестность точки x в Y. Тогда $x \in \overline{B}_Y$.

Теорема доказана.

§ 2. Топологии и метрики

***Определение* 1.2.1.** Пусть X — множество. Множество его подмножеств $\mathcal{J}$ называется топологией на X, если:

1) $\varnothing \in \mathcal{J}$ и $X \in \mathcal{J}$;

2) всякое объединение множеств из $\mathcal{J}$ принадлежит $\mathcal{J}$;

3) пересечение конечного числа элементов из $\mathcal{J}$ принадлежит $\mathcal{J}$.

***Определение* 1.2.2.** Множество X, на котором задана топология $\mathcal{J}$, называется топологическим пространством и обозначается (X, $\mathcal{J}$).

Когда мы рассматривали метрические пространства, то, используя метрику, мы выделили в нем множество подмножеств, которое обозначили $\mathcal{O}$, а его элементы назвали открытыми множествами. Свойства элементов $\mathcal{O}$, согласно теореме 1.1.1, совпадают со свойствами множества подмножеств $\mathcal{J}$ из определения 1.2.1. Поэтому $\mathcal{O}$ определяет в метрическом пространстве топологию! Но эта топология задается метрикой, поэтому является вторичным понятием. Если (X,d) — метрическое пространство, то оно естественным образом определяет топологическое пространство (X, $\mathcal{O}$)! Очень важным долгое время в топологии был вопрос: при каких условиях топология на X определяется некоторой метрикой на X? Это так называемая проблема метризации.

Некоторые объекты в метрических пространствах задаются индуцированной топологией, следовательно, они могут быть определены в топологических пространствах!

Понятия окрестностей, открытых и замкнутых множеств, замыкания, границы, плотных подмножеств, связности, непрерывности и некоторые другие определяются только топологией рассматриваемого метрического пространства.

Определение **1.2.3.** Пусть (X, $\mathcal{J}$) — топологическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым тогда и только тогда, когда $U \in \mathcal{J}$.

Определение **1.2.4.** Пусть (X, $\mathcal{J}$) — топологическое пространство. Подмножество $V \subset X$ называется замкнутым, если $X \setminus V$ открыто.

Определение **1.2.5.** Пусть (X, $\mathcal{J}$) — топологическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется окрестностью точки $x \in X$, если существует открытое множество W, содержащее точку x, такое, что $W \subset U$.

Аналогично § 1 в топологических пространствах определяются внутренние точки, точки прикосновения, внешние точки, граничные точки, плотные подмножества.

Определение **1.2.6.** Пусть $(X_1, \mathcal{J}_1)$ и $(X_2, \mathcal{J}_2)$ — топологические пространства. Отображение $f: X_1 \to X_2$ называется непрерывным в точке $a \in X_1$, если для всякой окрестности V точки f(a) в X_2 существует такая окрестность U точки a в X_1, что $f(U) \subset V$.

Если отображение $f: X_1 \to X_2$ непрерывно в каждой точке топологического пространства X_1, то оно называется непрерывным.

Определение **1.2.7.** Пусть $(X_1, \mathcal{J}_1)$ и $(X_2, \mathcal{J}_2)$ — топологические пространства. Отображение $f: X_1 \to X_2$ называется непрерывным в точке $a \in X_1$, если для всякой окрестности V точки f(a) ее полный прообраз $f^{-1}(V)$ является окрестностью точки a.

З а д а н и е. Доказать эквивалентность этих определений.

Определение **1.2.8.** Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — метрические пространства. Отображение $f: X_1 \to X_2$ называется непрерывным в точке $a \in X_1$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что если $d_1(a,x) < \delta$, то $d_2(f(a),f(x)) < \varepsilon$.

Замечание. Очевидно, что определение 1.2.8 эквивалентно тому, что для всякого шара $B_\varepsilon(f(a))$ в X_2 существует шар $B_\delta(a)$ в X_1, такой, что $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.

Лемма 1.2.1. Пусть (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — метрические пространства, тогда определения 1.2.6 и 1.2.8 эквивалентны.

Доказательство. Пусть $a \in X_1$. Условие $d_1(a,x) < \delta$ эквивалентно $x \in B_\delta(a)$ (здесь $B_\delta(a)$ — шар в X_1), а условие $d_2(f(a),f(x)) < \varepsilon$ эквивалентно $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ (здесь $B_\varepsilon(f(a))$ — шар в X_2).

Окрестность точки в метрическом пространстве — это множество, содержащее шар с центром в этой точке.

Лемма 1.2.1 доказана.

Теорема 1.2.1. Пусть $(X_1,\mathcal{J}_1)$ и $(X_2, \mathcal{J}_2)$ — топологические пространства и отображение $f: X_1 \to X_2$, тогда эквивалентны следующие условия:

1) отображение f непрерывно;
2) прообраз всякого открытого в X_2 множества относительно отображения f открыт в X_1;
3) прообраз всякого замкнутого в X_2 множества относительно отображения f замкнут в X_1;
4) для всякого $W \subset X_1$, $f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$.

Доказательство. Смотри работу [7].

Лемма 1.2.2. Пусть $(X_1,\mathcal{J}_1)$, $(X_2, \mathcal{J}_2)$, $(X_3,\mathcal{J}_3)$ — топологические пространства $f: X_1 \to X_2$, $g: X_2 \to X_3$ — непрерывные отображения, тогда отображение $g \circ f : X_1 \to X_3$ непрерывно.

Доказательство. Пусть W открыто в X_3, тогда $g^{-1}(W)$ открыто в X_2, так как g непрерывно. Но отображение f также непрерывно, поэтому $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ открыто в X_1.

Лемма 1.2.2 доказана.

***Определение* 1.2.9.** Пусть $(X_1,\mathcal{J}_1)$ и $(X_2, \mathcal{J}_2)$ — топологические пространства. Отображение $f: X_1 \to X_2$ называется гомеоморфизмом, если:

1) отображение f — биекция;

2) отображения f и f^{-1} непрерывны;

З а м е ч а н и е. Гомеоморфизм — топологическое понятие. Свойства топологических пространств, сохраняющихся при гомеоморфизмах, называются топологическими.

П р и м е р ы:

1. Отображение $f: R \to (-1,1)$ такое, что для всякого $x \in R$ $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ является биекцией, обратное отображение — $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, очевидно, оба эти отображения непрерывны.

Здесь R и $(-1,1)$ рассматриваются в эвклидовой метрике. Таким образом, отображение $f: R \to (-1,1)$ — гомеоморфизм и как топологические пространства R и $(-1,1)$ неразличимы.

2. Пусть $X = (0,+\infty) \subset R$ в эвклидовой метрике и $f: X \to X$ такое, что для всякого $x \in X$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Очевидно, что это отображение гомеоморфизм. Если $A = (0,1) \subset X$, то A — ограниченное множество, но $f(A) = (1,+\infty)$ не является ограниченным множеством. Таким образом, ограниченность — не топологическое свойство. Имеются и другие свойства метрических пространств, не сохраняющихся при гомеоморфизмах.

***Определение* 1.2.10.** Пусть (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — метрические пространства. Биективное отображение $f: X_1 \to X_2$ называется изометрией, если для любых $(x,y) \in X_1 \times X_1$ $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, изометрия — метрическое понятие. Свойства метрических пространств, сохраняющихся при изометриях, называются метрическими.

Если f — изометрия, то $f^{-1}: X_2 \to X_1$ — биекция. Тогда для любых $(u,v) \in X_2 \times X_2$ имеем

$$d_1\left(f^{-1}(u), f^{-1}(v)\right) = d_2\left(f\left(f^{-1}(u)\right), f\left(f^{-1}(y)\right)\right) = d_2(u, v).$$

Таким образом, в этом случае отображение f^{-1}: $X_2 \to X_1$ — изометрия!

Кроме того, изометрия метрических пространств (X_1,d_1) и (X_2,d_2) является гомеоморфизмом топологических пространств $(X_1, \mathcal{O}_1)$ и $(X_2, \mathcal{O}_2)$. *Доказать самостоятельно*.

Пусть на множестве X заданы две метрики — d_1 и d_2, тогда они определяют на множестве X две топологии — $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, которые в общем случае различны. Но как известно [7], любые две нормы на R^n определяют одну и ту же топологию!

Обозначим X_1 множество X, наделенное метрикой d_1, а X_2 множество X, наделенное метрикой d_2.

***Определение* 1.2.11.** Если тождественное отображение $1_X : X_1 \to X_2$ является гомеоморфизмом, то метрики d_1 и d_2 называются топологически эквивалентными.

Замечание. Важно то, что тождественное отображение — гомеоморфизм, а не только непрерывное отображение (*привести пример, когда тождественное отображение только непрерывно*). Если метрики d_1 и d_2 топологически эквивалентны, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Отношение топологической эквивалентности является отношением эквивалентности (*проверить самостоятельно*).

В метрических пространствах существует очень важный класс отображений (см. также равномерные структуры).

***Определение* 1.2.12.** Пусть (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — метрические пространства. Отображение f: $X_1 \to X_2$ называется равномерно непрерывным, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $d_1(x,y) < \delta$, то $d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Легко заметить, что если f: $X_1 \to X_2$ — равномерно непрерывное отображение, то оно непрерывно (*доказать самостоятельно*). Но не наоборот. Например, если f: $R \to R$ такое, что для всех $x \in R$ $f(x) = x^2$ и на R задана эвклидова метрика, то для фиксированного $h > 0$ будем иметь $\left|f(x+h) - f(x)\right| = h|2x+h|$ эту величину нельзя сделать меньше заданного $\varepsilon > 0$, для всех $x \in R$.

П р и м е р . Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A \subset X$. В §1 мы определили отображение $D_A : X \to R$ такое, что для всякого $x \in X$ $D_A(x) = d(x,A)$ — расстояние от точки x до множества A. Пусть $x,y \in X$ и $z \in A$, тогда $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, переходя к инфимуму, получим

$$D_A(x) \le d(x,y) + D_A(y) \text{ и } D_A(y) \le d(x,y) + D_A(x).$$

Поэтому

$$|D_A(x) - D_A(y)| \le d(x,y).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что если $d(x,y) < \delta$, то $|D_A(x) - D_A(y)| < \varepsilon$. Таким образом, отображение $D_A : X \to R$ равномерно непрерывно.

Во множестве всех метрик на множестве X существует еще одно важное отношение эквивалентности.

***Определение* 1.2.13.** Метрики d_1 и d_2 на множестве X называются эквивалентными, если существуют положительные числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что для всяких $x,y \in X$

$$\alpha d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta d_1(x,y).$$

Очевидно, что это отношение эквивалентности (*проверить самостоятельно*).

Лемма 1.2.3. Если на множестве X метрики d_1 и d_2 эквивалентны, то они топологически эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\beta}$, тогда если $d_1(x,y) < \delta$, то $d_2(x,y) < \varepsilon$. Таким образом, тождественное отображение $1_X : X_1 \to X_2$ равномерно непрерывно. Аналогично, если $d_2(x,y) < \alpha\varepsilon$, то $d_1(x,y) < \varepsilon$, что означает равномерную непрерывность отображения $1_X : X_2 \to X_1$. Но равномерно непрерывное непрерывно, поэтому тождественное отображение $1_X : X_1 \to X_2$ — гомеоморфизм.

Лемма 1.2.3 доказана.

Пусть даны два метрических пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2). Рассмотрим декартово произведение $X_1 \times X_2$. Можно ли естественным образом наделить его метрикой, используя метрики сомножителей?

З а д а н и е. Доказать, что $d(x, y)$ — метрики на $X_1 \times X_2$:

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\};$$

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2);$$

$$d(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}.$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$.

Поэтому естественным образом наделить произведение $X_1 \times X_2$ метрикой, используя метрики сомножителей, нельзя!

Очевидно, что эти метрики эквивалентны, так как

$$\max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \le d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

$$\text{и } d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \le 2\max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Оставшееся соотношение получить самостоятельно.

В дальнейшем, если мы имеем два метрических пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2), будем считать, что декартово произведение $X_1 \times X_2$ наделено метрикой $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$, которую будем называть «стандартной» метрикой произведения метрических пространств. Таким образом, мы имеем новое метрическое пространство ($X_1 \times X_2$, d) — произведение метрических пространств (X_1,d_1) и (X_2,d_2). Конструкцию произведения метрических пространств легко распространить на произведение конечного числа метрических пространств.

Такой выбор метрики на $X_1 \times X_2$ конечно субъективен, но есть некоторые свойства этой метрики, которые делают ее более «удобной».

Лемма 1.2.4. Пусть даны метрические пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2). Тогда

$$B_r(a) = B_r(a_1) \times B_r(a_2),$$

где $B_r(a)$— шар в ($X_1 \times X_2$, d), $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$, $B_r(a_1)$— шар в (X_1,d_1) и $B_r(a_2)$ — шар в (X_2,d_2).

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2) \in B_r(a)$, тогда $d_1(a_1, x_1) < r$ и $d_2(a_2, x_2) < r$, то есть $x = (x_1, x_2) \in B_r(a_1) \times B_r(a_2)$. Аналогично в обратную сторону.

Лемма 1.2.4 доказана.

Задание. Что представляет собой шар в $R^2 \times R^2$ в метрике произведения эвклидовых метрик на R^2.

Используя лемму 1.2.4, легко получить следующую лемму.

Лемма 1.2.5. Пусть U_1 открыто в X_1, U_2 открыто в X_2, тогда их произведение $U_1 \times U_2$ открыто в $X_1 \times X_2$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Замечание. Пусть $U \subset X_1 \times X_2$. По определению множество U открыто в $X_1 \times X_2$, если для всякого $x = (x_1, x_2) \in U$ существует шар $B_r(x) \subset U$, то есть $B_r(x_1) \times B_r(x_2) \subset U$. Но шар $B_r(x_1)$ — окрестность точки x_1 в X_1, аналогично шар $B_r(x_2)$ — окрестность точки x_2 в X_2. С учетом этого можно сказать, что множество U является открытым в $X_1 \times X_2$, если для всякого $x = (x_1, x_2) \in U$ существуют окрестности U_1 точки x_1 и U_2 точки x_2, такие, что $U_1 \times U_2 \subset U$.

Лемма 1.2.6. Пусть $A_1 \subset X_1$ и $A_2 \subset X_2$, тогда $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Следствие. Для того чтобы $A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2$ было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы A_1 было замкнуто в X_1 и A_2 было замкнуто в X_2.

Если мы имеем произведение $X_1 \times X_2$, то возникают канонические (естественные) проекции $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ и $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, такие, что для всех $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ и $\pi_2(x_1, x_2) = x_2$.

Лемма 1.2.7. Отображения $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ и $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ непрерывны.

Доказательство. Для отображения π_1 пусть U_1 открыто в X_1, тогда $\pi_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$, но X_2 открыто в X_2, поэтому $U_1 \times X_2$ открыто в $X_1 \times X_2$.

Лемма 1.2.7 доказана.

Следующая теорема описывает одно «характеристическое» свойство топологии произведения метрических пространств.

Теорема 1.2.2. Пусть даны метрические пространства (Y, δ), $(X_1 \times X_2, d)$. Для того чтобы отображение $f : Y \to X_1 \times X_2$ было непрерывно необходимо и достаточно, чтобы были непрерывны, отображения $\pi_1 \circ f : Y \to X_1$ и $\pi_2 \circ f : Y \to X_2$.

Доказательство. Имеем $f = (f_1, f_2)$, где $f_1 = \pi_1 \circ f$ и $f_2 = \pi_2 \circ f$. Если отображение $f : Y \to X_1 \times X_2$ непрерывно, то непрерывны отображения $f_1 = \pi_1 \circ f$ и $f_2 = \pi_2 \circ f$, так как π_1 и π_2 непрерывны и композиция непрерывных отображений непрерывна.

Очевидно (см. выше), что для непрерывности отображения $f : Y \to X_1 \times X_2$ достаточно доказать открытость множеств вида $f^{-1}(U_1 \times U_2)$, где U_1 открыто в X_1 и U_2 открыто в X_2. Имеем $f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$. Если f_1 и f_2 непрерывны, то $f_1^{-1}(U_1)$ и $f_2^{-1}(U_2)$ открыты в Y, это означает, что $f^{-1}(U_1 \times U_2)$ открыто в Y.

Теорема 1.2.2 доказана.

Теорема 1.2.3. Пусть даны метрические пространства (Y, δ), $(X_1 \times X_2, d)$. Для того чтобы отображение $f : Y \to X_1 \times X_2$ было равномерно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы были равномерно непрерывны отображения $\pi_1 \circ f : Y \to X_1$ и $\pi_2 \circ f : Y \to X_2$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

По определению метрика на множестве X — это отображение $d : X \times X \to R$. Таким образом, мы здесь имеем отображение произведения метрических пространств $X \times X$, каждое из которых наделено метрикой d в метрическое пространство R, наделенное эвклидовой метрикой.

Лемма 1.2.8. Отображение $d : X \times X \to R$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Используя неравенство треугольника, получим

$$|d(x, y) - d(u, v)| \le d(x, y) + d(u, v),$$

но метрика $d(x, y) + d(u, v)$ на $X \times X$ эквивалентна стандартной метрике на $X \times X$.

Лемма 1.2.8 доказана.

Следствие 1.2.1. Отображение $d : X \times X \to R$ непрерывно.

Следствие 1.2.2. Отображения $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ и $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ равномерно непрерывны.

Доказательство. Тождественное отображение

$$id_{X_1 \times X_2} : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$$

непрерывно, поэтому отображения $\pi_1 \circ id_{X_1 \times X_2}$ и $\pi_2 \circ id_{X_1 \times X_2}$ равномерно непрерывны (теорема 1.1.3). Но очевидно, что

$$\pi_1 \circ id_{X_1 \times X_2} = \pi_1 \text{ и } \pi_2 \circ id_{X_1 \times X_2} = \pi_2 .$$

Следствие доказано.

§ 3. Некоторые типы метрических и топологических пространств

1. Последовательности

Важную роль в изучении метрических пространств играют последовательности.

***Определение* 1.3.1.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Отображение $\varphi : N \to X$, где N — множество натуральных чисел, называется последовательностью в X.

З а м е ч а н и е. $x_n \overset{\text{def}}{=} \varphi(n)$. Отображение определяет график, и наоборот. Поэтому последовательность мы будем также обозначать $\{x_n\}_{n\in N}$.

Определение **1.3.2.** Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность в (X,d). Точка a $\in$ X называется пределом последовательности, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ имеет место $d(a, x_n) < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что условие определения 1.3.2 эквивалентно $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$, где $d(a, x_n)$ — числовая последовательность). Кроме того, очевидна эквивалентность $d(a, x_n) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B_\varepsilon(a)$, поэтому можно дать следующее определение:

Определение **1.3.3.** Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность в (X,d). Точка a $\in$ X называется пределом последовательности, если для всякого шара $B_\varepsilon(a)$ существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ имеет место $x_n \in B_\varepsilon(a)$.

З а м е ч а н и е. Так как U(a) $\subset$ X — окрестность точки a и существует шар $B_\varepsilon(a) \subset U(a)$, являющейся окрестностью точки a, то очевидно следующее определение.

Определение **1.3.4.** Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность в (X,d). Точка a $\in$ X называется пределом последовательности, если для всякой окрестности U(a) точки a существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ имеет место $x_n \in U(a)$.

Определение **1.3.5.** Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность в (X,d). a $\in$ X называется пределом последовательности, если во всякой окрестности U(a) точки "a" содержатся все члены последовательности, за исключением их конечного числа.

З а д а н и е. Доказать, что это определение эквивалентно определению 1.3.4.

Определение **1.3.6.** Последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в (X,d), которая имеет предел, называется сходящейся. В противном случае она называется расходящейся.

Замечание. Если последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в (X,d) имеет предел a, то это обозначается $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, или $a = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)$.

***Определение* 1.3.7.** Последовательность $\varphi : N \to X$ в (X,d) называется ограниченной последовательностью, если ограниченно множество $\varphi(N) \subset X$.

Лемма 1.3.1. Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве является ограниченной.

Доказательство. Пусть последовательность $\varphi : N \to X$ в (X,d), является сходящейся. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ имеет место $d(a, \varphi(n)) < \varepsilon$. Представим множество N в виде $N = N_1 \cup N_2$, где $N_1 = \{1,2,\ldots,n_0\}$, $N_2 = N \backslash N_1$. Тогда $\varphi(N) = \varphi(N_1) \cup \varphi(N_2)$. Множество $\varphi(N_1)$ ограниченно, так как оно конечное множество. Множество $\varphi(N_2) \subset B_\varepsilon(a)$, поэтому также ограниченно, значит, множество $\varphi(N)$ ограниченно.

Лемма 1.3.1 доказана.

Лемма 1.3.2 (свойство Хаусдорфа). Пусть даны метрическое пространство (X,d) и две его различные точки a_1 и a_2, тогда существуют их окрестности $U(a_1)$ и $U(a_2)$, такие, что $U(a_1) \cap U(a_2) = \varnothing$.

Доказательство. Так как $a_1 \neq a_2$, то $d(a_1, a_2) = r > 0$. Возьмем шары $B_{r/2}(a_1)$ и $B_{r/2}(a_2)$, тогда $B_{r/2}(a_1) \cap B_{r/2}(a_2) = \varnothing$.

Лемма 1.3.2 доказана.

***Определение* 1.3.8.** Топологическое пространство называется хаусдорфовым (отделимым), если для любых двух его различных точек существуют их непересекающиеся окрестности.

Замечание. Для топологических пространств свойство Хаусдорфа может выполнять, но может и не выполняться.

Лемма 1.3.3. В метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в (X,d) имеет два предела, которые мы обозначим a_1 и a_2. Возьмем их непересекающиеся окрестности $U(a_1)$ и $U(a_2)$, тогда в окрестности $U(a_1)$ должны содержаться все члены последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$, за исключением их конечного числа, поэтому в окрестности $U(a_2)$ может содержаться лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$, что противоречит определению предела последовательности.

Лемма 1.3.3 доказана.

***Определение* 1.3.9.** Пусть $\varphi : N \to X$ — последовательность в (X,d) и $\beta : N \to N$ — возрастающее отображение, тогда отображение $\varphi \circ \beta : N \to X$ называется подпоследовательностью последовательности $\varphi : N \to X$.

Замечание. Обычно $\beta(k) = n_k$, поэтому подпоследовательность обозначают $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$.

Очевидно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ для любой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$, но не наоборот!

Пусть даны метрические пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2) и сходящаяся последовательность $\varphi : N \to X_1$, причем известно, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)$. Кроме того, дано непрерывное отображение $f : X_1 \to X_2$. Как действуют непрерывные отображения на сходящиеся последовательности?

Очевидно, что $f \circ \varphi : N \to X_2$ — последовательность в X_2. Будет ли она сходящейся, а если это так, то каков ее предел?

Лемма 1.3.4. Пусть даны метрические пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2) и сходящаяся последовательность $\varphi : N \to X_1$, причем известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = a$. Кроме того, дано непрерывное отображение $f : X_1 \to X_2$. Тогда $f \circ \varphi : N \to X_2$ — сходящаяся последовательность в X_2 и $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi(n)) = f(a)$.

Доказательство. Пусть V(f(a)) — окрестность точки f(a), так как отображение f непрерывно, то существует окрестность U(a) точки a, такая, что $f(U(a)) \subset V(f(a))$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = a$, тогда существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ $\varphi(n) \in U(a)$, то есть для всех таких n $(f \circ \varphi)(n) \subset V(f(a))$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi(n)) = f(a)$.

Лемма 1.3.4 доказана.

З а м е ч а н и е. Таким образом, непрерывные отображения переводят сходящиеся последовательности в сходящиеся последовательности. Кроме того, доказано важное свойство:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\varphi(n)) = f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Таким образом, для непрерывных отображений «операции» f и lim перестановочны (по условиям леммы 1.3.4).

В метрических пространствах при помощи последовательностей легко описать замыкание множества.

Лемма 1.3.5. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $A \subset X$ и ($A \neq \varnothing$). Для того чтобы $a \in \overline{A}$, необходимо и достаточно, чтобы во множестве A существовала последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$, такая, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{A}$, тогда для всякого шара $B_{1/n}(a)$ в X имеем $B_{1/n}(a) \cap A \neq \varnothing$. Построим последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в A, где x_n — произвольный элемент из $B_{1/n}(a) \cap A$. По определению предела последовательности $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность в A, если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то какую бы окрестность U(a) точки a мы бы не взяли, она пересечется с множеством A. Таким образом, $a \in \overline{A}$.

Лемма 1.3.5 доказана.

2. Полные метрические пространства

***Определение* 1.3.10.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в X называется последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $m > n_0$ и $n > n_0$ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Замечание. Здесь важно то, что свойство последовательности «быть фундаментальной» не является топологическим!

Пример. Пусть X = (0, +∞) наделено эвклидовой метрикой, тогда последовательность $\{x_n = 1/n\}_{n\in N}$ — последовательность Коши в X. Отображение $f: X \to X$ такое, что для всякого $x \in X$ $f(x) = 1/x$, т. е. очевидно, что это отображение — гомеоморфизм. Последовательность $\{f(x_n) = n\}_{n\in N}$ не является последовательностью Коши в X!

Лемма 1.3.6. Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве — последовательность Коши.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в (X,d) сходящаяся и $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Используя неравенство треугольника, имеем

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, a) + d(x_n, a).$$

Существует номер n_0, такой, что для всех $m > n_0$ и $n > n_0$ будем иметь $d(x_m, a) < \varepsilon/2$ и $d(x_n, a) < \varepsilon/2$, но тогда $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в X — последовательность Коши.

Лемма 1.3.6 доказана.

Замечание. Последовательность Коши не обязательно сходящаяся. Последовательность $\{x_n = 1/n\}_{n\in N}$ является последовательностью Коши во множестве X = (0, +∞), наделенном эвклидовой метрикой, но не является сходящейся в X. Так как в R $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, но $0 \notin X$.

***Определение* 1.3.11.** Метрическое пространство называется полным метрическим пространством, если всякая последовательность Коши из элементов этого пространства в нем сходящаяся.

З а м е ч а н и е. В полных метрических пространствах для определения сходимости последовательности достаточно изучать саму последовательность, в то время как в общих метрических пространствах в этом случае требуется привлекать объект, внешний по отношению к самой последовательности, сам предел.

Полные метрические пространства обладают и многими другими замечательными свойствами.

П р и м е р. Множество действительных чисел в эвклидовой метрике является полным метрическим пространством.

Объединяя лемму 1.3.5 и определение 1.3.10, получим критерий Коши.

Критерий Коши. Для того чтобы последовательность в полном метрическом пространстве была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши.

Лемма 1.3.7. Всякая последовательность Коши — ограниченная последовательность.

Доказательство. Пусть $\varphi : N \to X$ в (X,d) — последовательность Коши, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ и всех $m > n_0$ имеет место $d\bigl(\varphi(m), \varphi(n)\bigr) < \varepsilon$. Представим множество N в виде $N = N_1 \cup N_2$, где $N_1 = \{1,2,\ldots,n_0\}$, $N_2 = N \setminus N_1$. Тогда $\varphi(N) = \varphi(N_1) \cup \varphi(N_2)$. Множество $\varphi(N_1)$ ограниченно, так как оно конечное. Множество $\varphi(N_2)$ имеет конечный диаметр, так как $\delta\bigl(\varphi(N_2)\bigr) \le \varepsilon$, поэтому также ограниченно, значит, множество $\varphi(N)$ ограниченно.

Лемма 1.3.7 доказана.

***Определение* 1.3.12.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Подмножество $A \subset X$ называется полным метрическим подпространством, если как подпространство (в индуцированной метрике) оно является полным метрическим пространством.

З а м е ч а н и е. Множество $Q \subset R$, где R наделено эвклидовой метрикой, не является полным метрическим подпространством.

Лемма 1.3.8. Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A \subset X$ — полное подпространство в X, тогда A замкнуто в X.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{A}$, тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в A такая, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (лемма 1.3.5), но A — полное метрическое пространство, поэтому $a \in A$. Тогда $A = \overline{A}$, следовательно, A замкнуто.

Лемма 1.3.8 доказана.

Лемма 1.3.9. Всякое замкнутое подмножество полного метрического пространства — полное метрическое подпространство.

Доказательство. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство и $A \subset X$ — его замкнутое подмножество. Возьмем последовательность Коши $\{x_n\}_{n\in N}$ в A, тогда она является последовательностью Коши и в X, следовательно, сходится в X. Таким образом, если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $a \in A$, то есть A замкнуто.

Лемма 1.3.9 доказана.

Пусть на множестве X заданы две метрики — d_1 и d_2. Обозначим X_1 метрическое пространство (X,d_1), а X_2 метрическое пространство (X,d_2). Кроме того, пусть $\mathcal{K}_1$ — множество всех последовательностей Коши в X_1, $\mathcal{K}_2$ — множество всех последовательностей Коши в X_2.

Лемма 1.3.10. Если метрики d_1 и d_2 эквивалентны, то $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$.

Доказательство. Если метрики d_1 и d_2 на множестве X эквивалентны, тогда существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что

$$\alpha d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta d_1(x,y)$$

для всех $x,y \in X$. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \in \mathcal{K}_1$, тогда имеем $d_2(x_m,x_n) \le \beta d_1(x_m,x_n)$ для любых $x_m,x_n \in X$. Возьмем $\varepsilon > 0$, так как $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность Коши в X_1, то существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ и всех $m > n_0$ имеет место $d_1(x_m, x_n) < \varepsilon/\beta$. Тогда $d_2(x_m, x_n) < \varepsilon$ для всех $n > n_0$ и всех $m > n_0$. Таким образом, $\{x_n\}_{n\in N} \in \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$.

Обратно — доказать самостоятельно.

Лемма 1.3.10 доказана.

Последовательность может иметь сходящуюся подпоследовательность, но не быть сходящейся. Например, последовательность $\{(-1)^n\}_{n\in N}$ в R (в эвклидовой метрике).

Лемма 1.3.11. Если последовательность Коши имеет сходящуюся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.

Доказательство. *Самостоятельно* [3].

Лемма 1.3.12. Пусть (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — полные метрические пространства, тогда их произведение $(X_1 \times X_2, \delta)$ — полное метрическое пространство.

Доказательство. Пусть $\{(x_n, y_n)\}_{n\in N}$ — последовательность Коши в $X_1 \times X_2$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ и всех $m > n_0$ имеет место $\delta((x_m, y_m),(x_n, y_n)) < \varepsilon$. Таким образом, для этих же n, m будем иметь $d_1(x_m, x_n) < \varepsilon$ и $d_2(y_m, y_n) < \varepsilon$. Это означает, что последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ в X_1 и $\{y_n\}_{n\in N}$ в X_2 являются последовательностями Коши. По условию (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — полные метрические пространства, тогда последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ в X_1 и $\{y_n\}_{n\in N}$ в X_2 являются сходящимися. Пусть $a_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $a_2 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, тогда если $\varepsilon > 0$, то существует n_0, такое, что для всех $n > n_0$ будем иметь $d_1(a_1, x_n) < \varepsilon$ и $d_2(a_2, y_n) < \varepsilon$. Тогда для всех таких n $\delta((a_1, a_2),(x_n, y_n)) < \varepsilon$, это означает, что последовательность $\{(x_n, y_n)\}_{n\in N}$ сходится.

Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a_1, a_2)$.

Лемма 1.3.12 доказана.

***Определение* 1.3.13.** Пусть (X,d) — метрическое пространство. Отображение $f : X \to X$ называется сжимающим, если существует $0 < r < 1$, такое, что для любых $x,y \in X$

$$d(f(x),f(y)) \le r \cdot d(x,y).$$

З а м е ч а н и е. Легко увидеть, что всякое сжимающее отображение является равномерно непрерывным и, следовательно, непрерывным.

***Определение* 1.3.14.** Точка $a \in X$ называется неподвижной точкой отображения $f : X \to X$, если $f(a) = a$.

Теорема 1.3.1. Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство и $f : X \to X$ — сжимающее отображение. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ (обратить внимание на то, что точка произвольная). Образуем последовательность

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{k+1} = f(x_k) \ldots$$

Используя неравенство треугольника, показать (самостоятельно), что полученная последовательность является последовательностью Коши и, следовательно, сходится.

Обозначим $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Так как отображение $f : X \to X$ сжимающее, то оно непрерывно, поэтому

$$a = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty}(x_k)) = f(a).$$

Таким образом, точка a действительно является неподвижной точкой отображения $f : X \to X$.

Докажем единственность полученной неподвижной точки.

Если неподвижных точек две — a_1, a_2 ($a_1 \ne a_2$), то

$$d(f(a_1), f(a_2)) = d(a_1, a_2) < d(a_1, a_2) \text{ —}$$

противоречие.

Теорема 1.3.1 доказана [3; 4].

3. Компакты

Определение **1.3.15.** Семейство $\{U_i\}_{i\in I}$ подмножеств множества X называется покрытием множества X, если $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Покрытие топологического пространства называется открытым (замкнутым) покрытием, если для всякого $i \in I$ U_i является его открытым (замкнутым) подмножеством. Покрытие топологического пространства называется конечным, если множество I — конечное множество.

Определение **1.3.16.** Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — покрытие топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ и $H \subset I$. Подсемейство $\{U_i\}_{i\in H}$ называется подпокрытием покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$, если оно является покрытием X. Подпокрытие называется конечным, если оно конечное покрытие.

Определение **1.3.17.** Топологическое пространство называется компактным топологическим пространством (компактом), если оно хаусдорфово и всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Пример. Отрезок $[a,b] \subset R$ в эвклидовой топологии является компактным топологическим пространством.

Пример. Для вещественной прямой R в эвклидовой топологии возьмем $U_n = (-n, n)$. Тогда семейство $\{U_n\}_{n\in N}$ — покрытие топологического пространства R, но это семейство не содержит конечного подсемейства, являющего покрытием R. Таким образом, множество действительных чисел в эвклидовой топологии не есть компактное топологическое пространство.

Определение **1.3.18.** Топологическое пространство называется компактным топологическим пространством (компактом), если оно хаусдорфово и всякое семейство его замкнутых подмножеств, имеющих пустое пересечение, содержит конечное подсемейство с пустым пересечением.

Эквивалентность этих определений легко следует из свойств взаимности.

Лемма 1.3.13. Пусть $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых подмножеств компактного топологического пространства, имеющая пустое пересечение, тогда существует элемент этой последовательности V_p, такой, что $V_p = \varnothing$.

Доказательство. В семействе $\left\{V_i\right\}_{i \in N}$ содержится конечное подсемейство, имеющее пустое пересечение, тогда один из элементов этого подсемейства пуст.

Лемма 1.3.13 доказана.

Замечание. Для вещественной прямой R в эвклидовой топологии возьмем $V_n = [n, +\infty)$. Тогда $V_1, V_2, \ldots, V_n \ldots$ — убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств, пересечение которых пусто, но не один из элементов этого семейства не пуст. Множество действительных чисел в эвклидовой топологии не является компактным топологическим пространством.

Лемма 1.3.14. Пусть $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых подмножеств компактного топологического пространства, ни одно из которых не пусто, тогда пересечение всех элементов этой последовательности не пусто.

Доказательство. Если бы это пересечение было пусто, то из леммы 1.3.13 следует, что один из элементов этой последовательности был бы пуст, но это противоречит условию.

Лемма 1.3.14 доказана.

***Определение* 1.3.19.** Пусть $\left\{x_n\right\}_{n \in N}$ — последовательность в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T})$. Точка $b \in X$ называется точкой сгущения (предельной точкой) последовательности, если для всякой окрестности U точки b существует бесконечное подмножество $P \subset N$ такое, что $x_n \in U$ для всякого $n \in P$.

Замечание. Если точка $b \in X$ является точкой сгущения последовательности, то в последовательности существует подпоследовательность, сходящаяся к b. Кроме того, очевидно, что если последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ в топологическом пространстве сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то a — единственная точка сгущения последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$.

Теорема 1.3.2. Всякая последовательность в компактном топологическом пространстве имеет предельную точку.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ — последовательность в компактном топологическом пространстве (X, $\mathcal{T}$). Рассмотрим множества $A_n = (x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p} ...)$, где $n \in N$. Тогда, переходя к замыканиям, получим убывающую последовательность непустых замкнутых подмножеств компактного топологического пространства (X, $\mathcal{T}$): $\overline{A}_1 \supset \overline{A}_2 \supset ... \supset \overline{A}_n \supset ...$. По лемме 1.3.14 существует $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$, следовательно, всякая окрестность V точки b пересекается со всеми множествами A_n. Таким образом, в окрестности V содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$, что означает b — предельная точка этой последовательности.

Теорема 1.3.2 доказана.

***Определение* 1.3.20.** Подмножество топологического пространства называется компактом, если в индуцированной топологии оно является компактным топологическим пространством.

Замечание. Очевидно, что если (X,$\mathcal{T}$) — топологическое пространство и $A \subset X$, то A будет компактом в X, если всякое его покрытие открытыми в X множествами содержит конечное подпокрытие, что следует из определения индуцированной топологии.

Теорема 1.3.3. Всякое замкнутое подмножество компактного топологического пространства является компактом.

Доказательство. Пусть (X,$\mathcal{T}$) — компактное топологическое пространство и $A \subset X$ его замкнутое подмножество.

Возьмем семейство $\{V_i\}_{i\in I}$ замкнутых в A подмножеств с пустым пересечением. Так как A замкнуто в X, то $\{V_i\}_{i\in I}$ — семейство замкнутых в X подмножеств с пустым пересечением, но X — компакт, поэтому это семейство содержит конечное подсемейство с пустым пересечением.

Теорема 1.3.3 доказана.

Теорема 1.3.4. Всякое компактное подмножество топологического пространства является замкнутым подмножеством.

Доказательство. Пусть $(X,\mathcal{T})$ — топологическое пространство и $K \subset X$ — его компактное подмножество. Покажем, что $X\backslash K$ открыто в X. Если $y \in X\backslash K$, то $y \notin K$. По условию X — хаусдорфово, поэтому для всякого $x \in K$ существуют открытые в X окрестности U(x) (точки x) и V(x) (точки y), которые не пересекаются. Семейство $\{U(x)\}_{x\in X}$ является открытым покрытием компакта K, поэтому существует конечное число элементов этого покрытия — $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_p)$, покрывающих K. Им соответствуют окрестности $V(x_1), V(x_2), \ldots, V(x_p)$ точки y, причем $U(x_i) \cap V(x_i) = \varnothing$ для $i = 1,2,\ldots,p$. Тогда открытое множество $V = \bigcap_{i=1}^{p} V(x_i)$ не пересекается со множеством K, то есть $V \subset X\backslash K$, следовательно, множество $X\backslash K$ открыто.

Теорема 1.3.4 доказана.

Теорема 1.3.5. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$ и $(X_2, \mathcal{T}_2)$ — топологические пространства, причем X_2 — хаусдорфово. $A \subset X_1$ — компакт, $f : X_1 \to X_2$ — непрерывное отображение. Тогда $f(A) \subset X_2$ — компакт в X_2.

Доказательство. Обозначим $B = f(A)$. Пусть $\{V_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие множества B. Тогда $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ — открытое покрытие множества A. Так как A — компакт, то существует конечное множество $P \subset I$, такое, что $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in P}$ — покрытие множества A. Но тогда $B \subset \bigcup_{i \in P} V_i$, таким образом, множества B — компакт.

Теорема 1.3.5 доказана.

Теорема 1.3.6. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$ и $(X_2, \mathcal{T}_2)$ — топологические пространства, причем пространство X_1 — компактно, а X_2 — хаусдорфово и $f : X_1 \to X_2$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда отображение $f : X_1 \to f(X_1)$ — гомеоморфизм.

Доказательство. Отображение $f : X_1 \to f(X_1)$ — непрерывная биекция. Так как X_1 компакт, то $f(X_1)$ — компакт в X_2 и, следовательно, является замкнутым подмножеством в X_2. Пусть V замкнуто в X_1, тогда V — компакт в X_1, следовательно, $f(V) \subset f(X_1)$ — компакт в X_2, являющийся в нем замкнутым подмножеством, тогда $f(V) = f(V) \cap f(X_1)$ замкнуто в $f(X_1)$. Таким образом, отображение $f^{-1} : f(X_1) \to X_1$ непрерывно, а отображение $f : X_1 \to f(X_1)$ — гомеоморфизм.

Теорема 1.3.6 доказана.

***Определение* 1.3.21.** Метрическое пространство называется компактным пространством, если оно является (в индуцированной топологии) компактным топологическим пространством.

Замечание. Подмножество метрического пространства называется компактом, если оно компактное топологическое подпространство.

Теорема 1.3.7. Всякое компактное метрическое пространство является полным метрическим пространством.

Доказательство. Если $\{x_n\}_{n \in N}$ — последовательность Коши в компактном метрическом пространстве (X, d), то она имеет предельную точку, но это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n \in N}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Последовательность Коши, имеющая сходящуюся подпоследовательность, сама является сходящейся. Таким образом, метрическое пространство (X, d) — полное метрическое пространство.

Теорема 1.3.7 доказана.

Замечание. Из теоремы 1.3.2 следует, что всякая последовательность в компактном метрическом пространстве имеет точку сгущения.

***Определение* 1.3.22.** Метрическое пространство называется вполне ограниченным, если его можно покрыть конечным числом множеств диаметра меньше ε, где ε — любое положительное число.

Замечание. Всякое вполне ограниченное метрическое пространство является ограниченным как объединение конечного числа ограниченных множеств, но не наоборот: если метрическое пространство ограниченно, то это не означает что оно вполне ограниченно!

Пример. Рассмотрим метрическое пространство (R^2,d), где d — эвклидова метрика. Перейдем от этой метрики к метрике d' на R^2, определенной следующим образом: для любых x,y $\in R^2$ $d'(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$, тогда (R^2,d') — ограниченное метрическое пространство, но оно не является вполне ограниченным!

Теорема 1.3.8. Пусть (X, d) — метрическое пространство, тогда эквивалентны следующие условия:

1) X — компактное пространство;

2) всякая бесконечная последовательность в X имеет сходящуюся подпоследовательность;

3) X является полным и вполне ограниченным метрическим пространством.

Доказательство. См. главу 2 и работу [8].

Замечание. Теорема, аналогичная этой для подмножеств в R^n, более проста.

Теорема 1.3.9. Пусть (R^n, d) — метрическое пространство (d — эвклидова метрика) и $A \subset R^n$, тогда эквивалентны следующие условия:

1) A — компакт;

2) всякая последовательность в A имеет сходящуюся в A подпоследовательность;

3) множество A замкнуто и ограниченно.

Доказательство. См. работу [7].

Из теоремы 1.3.5 следуют:

Следствие 1. Пусть (X, d) — метрическое пространство и A — компакт в X. Отображение $f: X \to R$ непрерывно, тогда f(A) — компакт в R.

Следствие 2. Пусть (X, d) — метрическое пространство и A — компакт в X. Отображение $f: X \to R$ непрерывно, тогда существуют точки $a, b \in A$, такие, что

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x) \text{ и } f(b) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Доказательство. $f(A) \subset R$ замкнуто и ограниченно. Тогда существуют inf f(A) и sup f(A) и они принадлежат множеству f(A).

Следствие 2 доказано.

Лемма 1.3.15. Пусть (X, d) — метрическое пространство и A — компакт в X. Тогда для всякой открытой окрестности U множества A существует вещественное число r > 0, такое, что $V_r(A) \subset U$.

Доказательство. Имеем $A \subset U$, тогда $A \cap X \backslash U = \varnothing$. Функция $f: A \to R$ такая, что для всякого $x \in A$ $f(x) = d(x, X \backslash U)$ непрерывна и положительна. Тогда существует точка $x_0 \in A$, такая, что $f(x_0) = \inf_{x \in A} d(x, X \setminus U)$, обозначим $f(x_0) = r > 0$. По определению $V_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$, тогда $V_r(A) \subset U$.

Лемма 1.3.15 доказана.

Замечание. В этом случае говорят, что семейство $\{V_r(A)\}_{r>0}$ образует фундаментальную систему окрестностей множества A, а семейство $\{B_{1/n}(a)\}_{n \in N}$ — фундаментальную систему окрестностей точки a (конечно, в метрическом пространстве).

4. Связность

***Определение* 1.3.23.** Топологическое пространство $(X,\mathcal{T})$ называется связным, если его нельзя представить в виде $X = A \cup B$, где A и B открыты (замкнуты) в X, непусты и $A \cap B = \varnothing$. Множества A и B (указанные выше) называются разбиением пространство $(X, \mathcal{T})$.

Замечание. Очевидно, что это определение эквивалентно: топологическое пространство $(X,\mathcal{T})$ называется связным, если единственными «одновременно» открытыми и замкнутыми подмножествами в X являются X и $\varnothing$.

***Определение* 1.3.24.** Подмножество топологического пространства называется связным, если оно как подпространство связное.

Замечание. Связное топологическое пространство — это пространство, которое можно рассматривать как нечто «целое».

Лемма 1.3.16. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — его подпространство. Если существуют непустые подмножества A и B в Y такие, что $A \cup B = Y$, $\overline{A} \cap B = \varnothing$ и $\overline{B} \cap A = \varnothing$. Тогда подпространство Y несвязно.

Доказательство. Если $\overline{A} \cap B = \varnothing$, то $\overline{A} \subset A$, поэтому A замкнуто в Y, если $\overline{B} \cap A = \varnothing$, то B замкнуто в Y. Таким образом, Y несвязно. Если Y несвязно и A, B — его разбиение, то $\overline{A} \cap B = \varnothing$ и $\overline{B} \cap A = \varnothing$.

Лемма 1.3.16 доказана.

Теорема 1.3.10. Для того чтобы $X \subset R$ (R в эвклидовой топологии) было связно, необходимо и достаточно, чтобы X было открытым, замкнутым или полуоткрытым интервалом.

Доказательство. Пусть X — связное множество и a, $b \in X$. Покажем, что тогда отрезок $[a,b] \subset X$. Если бы это было не так, то существовала бы точка $c \notin X$. Рассмотрим открытые в R множества $(-\infty, c)$ и $(c, +\infty)$. Тогда открытые в X множества $(-\infty, c) \cap X$ и $X \cap (c, +\infty)$ образуют разбиение X на два непустых открытых подмножества, объединение которых есть X, что противоречит связности множества X. Покажем, что из этого следует, что X — промежуток. Обозначим $m = \inf X$ и $M = \sup X$. Пусть $c \in X$, если $m = -\infty$, то для всякого $x < c$ существует $d \in X$, такое, что $d < x$. Таким образом, по доказанному выше $x \in X$, следовательно, $(-\infty, c] \subset X$. Если m — конечное число и $m < c$, то для всякого x, такого, что $m < x < c$, существует $y \in X$, такая, что $m < y < x$ и $(m, c] \subset X$. Аналогично для M.

Таким образом, множество X содержит промежуток с началом в точке m и концом в точке M.

Пусть X — промежуток с началом в точке m и концом в точке M. Пусть существуют открытые в X множества U и V, такие, что $X = U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$, то, взяв $x \in U$ и $y \in V$ $(x < y)$, рассмотрим отрезок $[x,y]$. Обозначим $\beta = \sup U \cap [x,y]$. Если $\beta \in U$, то $\beta < y$, поэтому существует отрезок $[\beta, \beta+\delta] \subset [x,y]$, что противоречит определению числа β. Если $\beta \in V$, то $x < \beta$, поэтому существует отрезок $[\beta - \varepsilon, \beta] \subset [x,y]$. Мы также получим противоречие. Таким образом, число β не может принадлежать ни U ни V, что противоречит $[x,y] \subset X$. Таким образом, множество X связно.

Теорема 1.3.10 доказана.

Следствие. Топологическое пространство R связно.

Лемма 1.3.17. Пусть X — топологическое пространство, если A — его связное подмножество, то всякое подмножество $B \subset X$ такое, что $A \subset B \subset \overline{A}$ связно.

Доказательство. Пусть U,V — открытые в B множества, такие, что $B = U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$. По условию A плотно в B, поэтому $A \cap U \neq \varnothing$ и $A \cap V \neq \varnothing$, и эти множества открыты в A. Кроме того, $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ и $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \varnothing$, но это противоречит связности множества A.

Лемма 1.3.17 доказана.

З а д а н и е. Доказать (используя лемму 1.3.16), что если A связно в топологическом пространстве X, то $\overline{A}$ связно.

Лемма 1.3.18. Пусть в топологическом пространстве X дано семейство его связных подмножеств, имеющих непустое пересечение, тогда их объединение связно.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство связных подмножеств в X, таких, что существует $a \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Пусть $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ и $A = U\cup V$, причем U,V открыты в A и $U\cap V=\varnothing$. Не ограничивая общности, будем считать, что $a\in U$. По условию существует A_{i_0} такое, что $V \cap A_{i_0} \neq \varnothing$. Так как $U \cap A_{i_0} \neq \varnothing$, то $V \cap A_{i_0}$ и $U \cap A_{i_0}$ не пусты и открыты в A_{i_0}, кроме того, их объединение есть A_{i_0}, а их пересечение пусто, что противоречит связности A_{i_0}.

Лемма 1.3.18 доказана.

Пусть X — топологическое пространство и $a\in X$. Обозначим C(a) объединение всех связных подмножеств пространства X, содержащих точку a. По лемме 1.3.17 множество C(a) связно и является наибольшим (объяснить почему наибольшим) связным множеством, содержащим точку a.

Определение **1.3.25.** Множество C(a) называется компонентой связности точки $a\in X$.

З а д а н и е. Доказать, если $b\in C(a)$, то $C(b) = C(a)$, если $b\notin C(a)$, то $C(b) \cap C(a) = \varnothing$.

Лемма 1.3.19. Пусть X — топологическое пространство и $a\in X$, тогда компонента связности C(a) замкнута.

Доказательство. Из леммы 1.3.16 следует, что $\overline{C(a)}$ связно, а из определения 1.3.25 следует, что $\overline{C(a)} \subset C(a)$.

Лемма 1.3.19 доказана.

Определение **1.3.26.** Пусть $A \subset X$, где X — топологическое пространство. Компоненты связности точек подпространства A называются компонентами связности множества A.

Определение **1.3.27.** Пусть X — топологическое пространство. Подпространство $A \subset X$ называется вполне несвязным, если всякая его компонента связности состоит из одной точки.

Примеры. Всякое дискретное пространство вполне несвязно, но не наоборот. Вполне несвязно и Q_p в метрике $|\ldots|_p$ [1]!

Множество рациональных (иррациональных) чисел вполне несвязно, так как всякий промежуток $]a,b[\subset R$ ($a \neq b$) содержит как рациональные, так и иррациональные числа.

Определение **1.3.28.** Топологическое пространство называется локально связным, если всякая его точка имеет фундаментальную систему связных окрестностей.

Замечание. Топологическое пространство может быть связным, но не локально связным. *Привести пример.*

Топологическое пространство может быть локально связным но несвязным. *Привести пример.*

Задание. *Доказать, что множество R, наделенное эвклидовой топологией, связно (использовать теорему 1.3.10).*

Лемма 1.3.20. Топологическое пространство локально связно тогда и только тогда, когда у всякого открытого в нем подмножества его компоненты связности открыты.

Доказательство. Пусть каждая точка топологического пространства X имеет фундаментальную систему связных окрестностей. Возьмем открытое в X множество U, и пусть C(a) ($a \in U$) — его компонента связности. Тогда для всякого $x \in C(a)$ существует ее связная окрестность $V \subset U$, и поэтому $V \subset C(a)$. Таким образом, множество C(a) вместе со всякой своей точкой содержит и некоторую ее окрестность, поэтому C(a) открыто в U.

Пусть U — открытая в X окрестность точки $a \in X$. По условию его компоненты связности открыты в U, то есть C(a) — открытая связная окрестность точки $a \in X$ и $C(a) \subset U$.

Лемма 1.3.20 доказана.

З а м е ч а н и е. Если X — локально связное топологическое пространство, оно само является открытым, поэтому каждая его компонента связности — открыто-замкнутое подмножество в X. Таким образом, компоненты связности локально связного топологического пространства образуют его разбиение.

Лемма 1.3.21. Всякое открытое подмножество в R является объединением не более чем счетного множества открытых в R попарно не пересекающихся промежутков.

Доказательство. Пусть U открыто в R, тогда (см. выше) компонентами связности множества U являются открытые промежутки. Так, множество рациональных чисел Q счетное и оно плотно в R, то каждая компонента связности множества U пересекается со множеством Q. Отображение, которое каждому числу из $Q \cap U$ ставит в соответствие компоненту связности множества U, содержащую эту точку, очевидно, является сюръективным, поэтому множество компонент связности множества U счетное.

Лемма 1.3.21 доказана.

Лемма 1.3.22. Пусть A — подмножество топологического пространства X и S — такое связное подмножество в X, что множества $A \cap S$ и $(X \setminus A) \cap S$ не пусты, тогда $\mathrm{Gr}A \cap S \neq \varnothing$.

Доказательство. Если $\mathrm{Gr}A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \varnothing$, то множества $\overline{A}$ и $\overline{X \setminus A}$ образуют разбиение пространства X и являются замкнутыми в X. Тогда множества $\overline{A} \cap S$ и $\overline{X \setminus A} \cap S$ образует разбиение множества S, что противоречит его связности.

Лемма 1.3.22 доказана.

Следствие. Если топологическое пространство X связно и A — его подмножество, такое, что $A \neq \varnothing$ и $A \neq X$, тогда $\mathrm{Gr}\, A \neq \varnothing$.

Доказательство. *Самостоятельно* [8].

Теорема 1.3.11. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, где X,Y — топологические пространства. Тогда $f(X) \subset Y$ связно.

Доказательство. Пусть U,V — открытые в Y подмножества, такие, что $f(X) \cap U$ и $f(X) \cap V$ — разбиение подпространства f (X). Так как отображение f непрерывно, то $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ открыты в X и образуют разбиение пространства X, что противоречит его связности.

Теорема 1.3.11 доказана.

Замечание. Если $f: X \to Y$ — гомеоморфизм, то X связно эквивалентно, а Y— связно.

Теорема 1.3.12. Пусть $f: X \to R$ — непрерывное отображение, причем X — связное топологическое пространство и a_1, $a_2 \in f(X)$ ($a_1 < a_2$). Тогда для любого числа $a \in R$, удовлетворяющего условию $a_1 < a < a_2$, существует такое $x \in X$, что $f(x) = a$.

Доказательство. Так как f — непрерывное отображение, то f(X) — связное подмножество в R, и потому $[a_1, a_2] \subset f(X)$.

Теорема 1.3.11 доказана.

Теорема 1.3.13. Пусть X,Y — связные топологические пространства, тогда $X \times Y$ в топологии произведения является связным топологическим пространством.

Доказательство. Фиксируем точку $(a_0,b_0) \in X \times Y$ и пусть $(a,b) \in X \times Y$. Тогда $(a_0,b) \in X \times \{b\} \cap \{a_0\} \times Y$. Кроме того, подпространства $X \times \{b\}$ и $\{a_0\} \times Y$ связны, так как X гомеоморфно $X \times \{b\}$ и Y гомеоморфно $\{a_0\} \times Y$, поэтому (лемма 1.3.18) подпространство $X \times \{b\} \cup \{a_0\} \times Y$ является компонентой связности точки (a_0,b) и содержит точку (a,b). То есть $C((a_0,b) = X \times Y$.

Теорема 1.3.13 доказана.

Глава 2. ПРИМЕРЫ ФРАКТАЛОВ

§ 1. Канторово множество

«Первоначально построенные для чисто абстрактных целей, канторовы множества впоследствии превратились в почти идеальные модели для огромного числа явлений реального мира — от странных аттракторов в нелинейных динамических системах до распределения галактик во Вселенной» [28].

«Это замечательное множество (канторово множество) представляет интерес значительно больший, чем интерес отдельного примера. Оно имеет большое принципиальное значение и постоянно применяется всюду, где вообще применяется теория множеств» [5].

Рассмотрим отрезок [0,1] и обозначим его C_0. Удалим из отрезка [0,1] интервал (1/3,2/3) и обозначим $C_1 = [0,1/3]\cup[2/3,1]$. Из каждого отрезков [0,1/3], [2/3,1] удалим их «средние трети». Обозначим $C_2 = [0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$ и так далее.

Таким образом, мы получим последовательность вложенных друг в друга непустых компактов — $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, тогда по лемме 1.3.14 множество $\mathfrak{C} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ является непустым замкнутым подмножеством в R и, следовательно, в C_0. Множество $C_0 \backslash \mathfrak{C}$ — открытое в $\mathfrak{C}$ множество, представляющее собой объединение всех удаленных «средних третей», аналогично множество R\ $\mathfrak{C}$ — объединение всех удаленных «средних третей» и открытого множества $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

На рисунке 2.1 изображено несколько этапов построения Канторова множества.

Рис. 2.1

***Определение* 2.1.1.** Множество $\mathfrak{C}$ называется Канторовым (Канторовой пылью, Канторовым троичным множеством, Канторовым дисконтинуум).

Лемма 2.1.1. Множество $\mathfrak{C}$ является компактом в R.

Доказательство. Следует из леммы 1.3.14.

***Определение* 2.1.2.** Множество $X \subset R$ называется совершенным, если оно замкнуто и не содержит изолированных точек.

З а м е ч а н и е. Точка $x \in X$ называется изолированной, если существует ее окрестность U(x) в R, которая не содержит других точек множества X, отличных от x.

Лемма 2.1.2. Множество $\mathfrak{C}$ является совершенным.

Доказательство. Множество $\mathfrak{C}$ — компакт, следовательно, замкнуто в R. Пусть $x\in \mathfrak{C}$ и пусть U(x) = (a,b). Покажем, что $U(x) \cap \mathfrak{C} \neq \{x\}$. Так как $x\in \mathfrak{C}$, то $x \in C_n$ для всякого $n \in N$. По построению множество C_n состоит из 2^n замкнутых отрезков I_n^k (каждый из которых имеет длину $1/3^n$) и $k = 1,2,\ldots,2^n$. Обозначим $I_n^k(x)$ тот из отрезков I_n^k, который содержит точку x. Выберем $n \in N$ таким, что $I_n^k(x) \subset (a,b)$. Пусть $x_n \neq x$ — один из концов отрезка $I_n^k(x)$, тогда $x_n \in (a,b)$. Таким образом, для всякого $x \in \mathfrak{C}$ всякая ее окрестность $U(x)$ имеет точки множества $\mathfrak{C}$, отличные от самой точки x. Во множестве $\mathfrak{C}$ нет изолированных точек.

Замечание. Поэтому Канторово множество иногда называют Канторовым совершенным множеством.

Лемма 2.1.2 доказана.

Лемма 2.1.3. Множество $\mathfrak{C}$ является вполне несвязным.

Доказательство. Связные множества в R — это промежутки (см. теорему 1.3.10). Пусть $x \in \mathfrak{C}$ и $x \in \left]\alpha,\beta\right[$ (промежуток). Возьмем $I_n^k(x)$ (см. выше), так, чтобы $I_n^k(x) \subset \left]\alpha,\beta\right[$. По построению множества $\mathfrak{C}$ при переходе от C_n к C_{n+1} из отрезка $I_n^k(x)$ удаляется «средняя треть», тогда x принадлежит одному из оставшихся отрезков. Удаленную треть обозначим J_n. По построению $J_n \subset \left]\alpha,\beta\right[$. Поэтому промежуток $\left]\alpha,\beta\right[$ не содержится в $\mathfrak{C}$. Следовательно, компонента связности точки x — одноточечное множество $\{x\}$. Таким образом, множество $\mathfrak{C}$ — вполне несвязное.

Лемма 2.1.3 доказана.

Замечание. Следует иметь в виду, что если $x,y \in \mathfrak{C}$ и $x \neq y$, то существует C_n, такое, что точка x принадлежит $I_n^{k_1}$, а точка y принадлежит $I_n^{k_2}$ ($k_1 \neq k_2$).

Лемма 2.1.4. Множество $\mathfrak{C}$ является нигде неплотным в R.

Доказательство. Так как $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, то нужно доказать, что множество $R \setminus \mathfrak{C}$ плотно в R. Пусть $x \in \mathfrak{C}$ и $B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ — ее окрестность в R. Возьмем $n \in N$ таким, что $1/3^n < \varepsilon$. Так как $x \in \mathfrak{C}$, то $x \in C_n$, поэтому $x \in I_n^k(x)$. По построению $I_n^k(x) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ при переходе от C_n к C_{n+1} из отрезка $I_n^k(x)$

удаляется «средняя треть», которая содержится во множестве $R\backslash\mathfrak{C}$. Поэтому $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap R\backslash\mathfrak{C}\neq\varnothing$, это означает, что множество $R\backslash\mathfrak{C}$ плотно в R.

Лемма 2.1.4 доказана.

Замечание. Из изложенного выше следует, что Канторово множество не содержит внутри себя интервала!

Существует одно (очень полезное) описание Канторова множества. Для этого используем обозначения, отличные от введенных выше:

$$I_0 = [0,1/3];\ I_1 = [2/3,1];\ I_{00} = [0,1/9];\ I_{01} =[2/9,3/9];\ I_{10} = [6/9,7/9];\ I_{11} = [8/9,1]\ldots$$

Кроме того, обозначим полученные при построении Канторова множества «средние трети» следующим образом:

$$J = (1/3,2/3),\ J_0 = (1/9,2/9),\ J_1 = (7/9,8/9),\ J_{00} = (1/27,2/27),$$
$$J_{01} = (7/27,8/27),\ J_{10} = (19/27,20/27),\ J_{11} = (25/27,26/27)\ldots$$

Таким образом, мы получили в отрезке [0,1] множества двух видов: $I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ и $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, где $i_1, i_2,\ldots, i_k = 0,1$.

Если $x\in\mathfrak{C}$, то существуют единственный I_{i_1}, такой, что $x\in I_{i_1}$, и единственный I_{i_1,i_2}, такой, что $x\in I_{i_1,i_2}$, и так далее.

Так мы получили убывающую последовательность отрезков:

$$I_{i_1}\supset I_{i_1,i_2}\supset\ldots\supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\supset\ldots$$

Поставим точке $x\in\mathfrak{C}$ в соответствие последовательность индексов $i_1, i_2,\ldots, i_k,$ определяемых последовательностью $I_{i_1}\supset I_{i_1,i_2}\supset\ldots\supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\supset\ldots$ (каждое i_k равно 0 или 1), — эта последовательность точкой x определяется однозначно.

И наоборот, каждой последовательности индексов $i_1, i_2,\ldots, i_k\ldots$ соответствует убывающая последовательность вида $I_{i_1}\supset I_{i_1,i_2}\supset\ldots\supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\supset\ldots$, которая определяет единственную точку x, принадлежащую всем членам последовательности $I_{i_1}\supset I_{i_1,i_2}\supset\ldots\supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\supset\ldots$ [5].

Таким образом, мы получили биекцию Канторова множества $\mathfrak{C}$ на множество бесконечных двоичных дробей:

$$0,i_1, i_2,.., i_k\ldots \text{ (каждое } i_k \text{ равно 0 или 1).}$$

Лемма 2.1.5. Канторово множество имеет мощность континуума.

Доказательство. Мощность множества бесконечных двоичных дробей — континуум [5].

Лемма 2.1.5 доказана.

Это утверждение можно доказать, используя диагональный процесс, следующим образом. Предположим, что множество $\mathfrak{C}$ счетное, и занумеруем (используя троичные дроби) его элементы:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0,a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}\ldots \\ &x_2 = 0,a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n = 0,a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nk}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Рассмотрим точку $z = 0,z_1\ z_2\ldots\ z_n\ldots$ Здесь $z_1 = \{0,2\}\setminus a_{11}$, $z_2 = \{0,2\}\setminus a_{22},\ldots, z_n = \{0,2\}\setminus a_{nn}\ldots$ По построению $z \in \mathfrak{C}$, но не совпадает ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n\ldots$ Таким образом, множество $\mathfrak{C}$ несчетно.

Очевидно, две различные «средние трети» не пересекаются. Множество, состоящее из всех удаленных «средних третей», естественным образом упорядочено: если J' и J'' (обозначение временное) — две удаленных «средних трети», то мы будем считать, что $J' < J''$ тогда и только тогда, когда для всякого $x_1 \in J'$ и для всякого $x_2 \in J''$, $x_1 < x_2$.

Лемма 2.1.6. Во множестве всех «средних третей» нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Доказательство. Пусть интервал (α,β) является наименьшей «средней третью» (относительно введенного выше порядка), тогда $\alpha \in \mathfrak{C}$. Покажем, что $\alpha \neq 0$. Если бы $\alpha = 0$, тогда наименьшей «средней третью» была бы интервал $(0,\beta)$ и точка

0 было бы изолированной точкой Канторова множества, что невозможно. Поэтому найдется точка $\lambda\in\mathfrak{C}$, такая, что $\lambda < \alpha$. Так как множество $\mathfrak{C}$ нигде не плотно в R, то $(\lambda, \alpha) \cap R\setminus \mathfrak{C} \neq \varnothing$. Пусть $x \in (\lambda, \alpha) \cap R\setminus \mathfrak{C}$, тогда эта точка принадлежит некоторой «средней трети» $J \subset (\lambda, \alpha)$. Тогда $J < (\alpha,\beta)$.

Лемма 2.1.6 доказана.

Лемма 2.1.7. Пусть J' и J'' — «средние трети», тогда существует «средняя треть» J, такая, что $J' < J < J''$ (или $J' > J > J''$).

Доказательство. Пусть $J' =(\alpha',\beta')$, $J'' =(\alpha'',\beta'')$ и $J' < J''$. Тогда $\beta' < \alpha''$. Так как множество $\mathfrak{C}$ нигде не плотно в R, то существует $x\in(\beta',\alpha'')\cap R\setminus \mathfrak{C}$. Поэтому существует «средняя треть» J, такая, что $J \subset (\beta',\alpha'')$. Тогда $J' < J < J''$.

Лемма 2.1.7 доказана.

***Определение* 2.1.3.** Биекция $f : X \to Y$, где X,Y — упорядоченные множества, называется изоморфизмом, если $x_1 \leq x_2$ эквивалентно $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Лемма 2.1.8. Упорядоченное (относительно определенного выше порядка) множество всех удаленных «средних третей» изоморфно множеству всех двоично-рациональных чисел интервала (0,1).

Доказательство. «Средней трети» $J_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ поставим в соответствие конечную двоичную дробь: $0,i_1,i_2,\dots, i_k,1 =$
$$= \frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+\dots+\frac{i_k}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}.$$

Тогда J получает номер 1/2, J_0 — номер 1/4, J_1 — номер 3/4, J_{00} — номер 1/8, J_{01} — номер 3/8, J_{10} — номер 5/8, J_{11} — номер 7/8 …

Построенное отображение, очевидно, является биекцией, сохраняющей порядок. Например, $J_0 < J_{10}$ и $1/4 < 5/8$. *В общем случае доказать самостоятельно* [5].

Лемма 2.1.8 доказана.

Так как $\mathfrak{C} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_k$, то точки Канторова множества разделяются на два класса: в первый класс отнесем все точки, являющиеся концевыми точками отрезков $I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, — такие точки образуют счетное множество. Во второй класс — все остальные точки, они образуют несчетное множество.

Если точка x — левый конец некоторой «средней трети» $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, то $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k,0}$, $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k,0,1}$, $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k,0,1,1}$ …

А если точка x — правый конец «средней трети» $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, то $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k,1}$, $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k,1,0}$, $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k,1,0,0}$ …

Последовательность индексов у таких отрезков стабилизируется. Полученные точки являются точками первого класса, им соответствуют двоично-рациональные числа.

Оставшиеся точки Канторова множества обладают тем свойством, что если x — такая точка, то существует последовательность

$$I_{i_1} \supset I_{i_1,i_2} \supset \ldots \supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \supset \ldots,$$

такая, что точка x принадлежит всем отрезкам этой последовательности, причем последовательность индексов у таких отрезков не стабилизируется.

Канторово множество может быть определено при помощи троичных дробей как множество всех тех точек отрезка [0,1] в разложении которых в троичную дробь есть только цифры 0 и 2 [5;10]. Точки «средней трети» (1/3, 2/3) характеризуются тем, что первый знак их разложения в троичную дробь — 1. Следует учитывать, что концы этого интервала имеют по два разложения: 0,10000… = 0,02222… и 0,20000 = 0,12222…, но среди этих разложений есть разложения, в которых присутствуют только цифры 0 и 2! Аналогично для концевых точек других «средних третей» — в их разложениях в троичную дробь имеются разложения, не содержащие цифры 1. Таким образом,

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ a_n = 0,2 \right\}.$$

З а м е ч а н и е. Поэтому Канторово множество $\mathfrak{C}$ иногда называют Канторовым троичным множеством.

З а д а н и е. Доказать, что $1/4 \in \mathfrak{C}$, но $1/5 \notin \mathfrak{C}$. Будет ли 1/4 граничной точкой некоторого из отрезков I_n^k.

З а д а н и е. Верно ли утверждение $\sqrt{2}/2 \in \mathfrak{C}$.

Теорема А. $[-1,1] \subset \mathfrak{C} - \mathfrak{C}$.

Доказательство. Имеем $\mathfrak{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ и $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ Пусть $C_0 \times C_0 = [0,1] \times [0,1] \supset C_1 \times C_1 \supset C_2 \times C_2 \supset \ldots$, тогда $\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \times C_k = \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$. Рассмотрим квадрат $K_0 = [0,1] \times [0,1]$ и прямую, определяемую уравнением $y = x + a$, где $a \in [-1,1]$. Множество $C_1 \times C_1$ состоит из четырех квадратов K_1, K_2, K_3, K_4, расположенных в углах квадрата K_0. Прямая $y = x + a$ пересечет по крайней мере один из этих квадратов (*объяснить почему*). Возьмем один из таких квадратов, который обозначим K_{i_1}. Множество $C_2 \times C_2$ состоит из шестнадцати равных квадратов. Выберем из них четыре квадрата, расположенных в углах квадрата K_{i_1}. Прямая $y = x + a$ также пересечет один из них, обозначим его $K_{i_1 i_2}$ $(i_1, i_2 = 1,2,3,4)$, и т. д. Получим последовательность вложенных друг в друга компактов (квадратов): $K_0 \supset K_{i_1} \supset K_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset K_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots$, каждый из которых пересекает прямая $y = x + a$. Тогда по лемме 1.3.14 и так как диаметр $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ стремится к нулю, существует единственная точка $(x_0, y_0) \in \bigcap_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{\infty} K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. По построению $x_0 \in C_k$ и $y_0 \in C_k$ для всякого $k = 0,1,2,\ldots$, то есть $x_0 \in \mathfrak{C}$ и $y_0 \in \mathfrak{C}$, кроме того, $a = y_0 - x_0$ (рис. 2.2) [9].

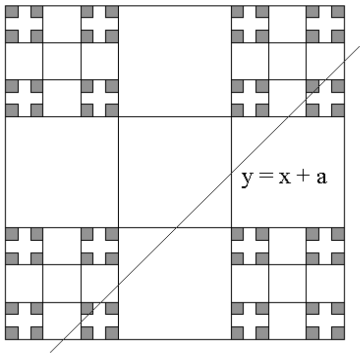


Рис. 2.2

Теорема А доказана.

З а д а н и е. Доказать, что $[-1,1] \supset \mathfrak{C} - \mathfrak{C}$.

З а м е ч а н и е. Среди вещественных чисел есть те, которые называются числа Лиувилля. Пусть $\mathcal{L} \subset R$ — множество всех чисел Лиувилля [13]. Для чисел Лиувилля справедливо $\mathcal{L} - \mathcal{L} = R$.

Кроме того, $\mathcal{L}$ — множество второй категории, а $\mathfrak{C}$ — множество первой категории [13].

В теореме А было использовано множество $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$.

З а д а н и е. Построить СИФ для $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$, доказать, что $\dim_T \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} = 0$ и $\dim_H \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} = 2 \log 2/\log 3$.

З а д а н и е. Доказать, что множество $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ является вполне несвязным.

Лемма 2.1.9. Лебегова мера Канторова множества $\mathfrak{C}$ равна нулю.

Доказательство. Так как $\mathfrak{C} \subset C_n$ для всякого натурального n, то 2^n отрезков I_n^k $(k = 1,2,..,2^n)$, входящих в C_n, образуют покрытие, которое назовем покрытием n-го ранга множества $\mathfrak{C}$. Обозначим $\left|I_n^k\right|$ длину отрезка I_n^k, тогда $\left|I_n^k\right| = \frac{1}{3^n}$. Отрезков покрытия n-го ранга 2^n, тогда их общая длина равна $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, то мера Лебега Канторова множества $\mathfrak{C}$ равна нулю!

Лемма 2.1.9 доказана.

Замечание. Мощность Канторова множества $\mathfrak{C}$ — континуум!

Множество $\mathfrak{C}$ (Канторово множество) является одним из первых примеров фрактала, широко используемого в самых разных разделах современной математики.

Одна из важнейших характеристик топологического пространства — его размерность [12]. Размерности топологического пространства определяются разными способами, некоторые из них мы рассмотрим в дальнейшем.

Обозначим $\dim_T X$ топологическую размерность (малая индуктивная размерность или размерность по покрытиям) сепарабельного метрического пространства X.

Лемма 2.1.10. $\dim_T \mathfrak{C} = 0$.

Доказательство. См. далее.

Для характеристики фракталов широко применяется размерность Хаусдорфа. Хаусдорфову размерность топологического X (ее еще называют фрактальной размерностью) обозначают $\dim_H X$. Существуют и другие фрактальные размерности.

Лемма 2.1.11. $\dim_H \mathfrak{C} = \log 2/\log 3$.

Доказательство. См. далее.

Размерность Хаусдорфа может быть не целой! Следует обратить внимание на то, что $\dim_T \mathfrak{C} < \dim_H \mathfrak{C}$.

Одно из определений фрактала: *это непустое компактное подмножество A сепарабельного метрического пространства X, для которого* $dim_T A < dim_H A$.

Рассмотрим два отображения: $f_1 : [0,1] \to [0,1]$, такое, что $f_1(x) = x/3$ для всякого $x \in [0,1]$, и $f_2 : [0,1] \to [0,1]$, такое, что $f_2(x) = x/3 + 2/3$, для всякого $x \in [0,1]$. Используя эти отображения, получим отображение F: $\mathcal{K}[0,1] \to \mathcal{K}[0,1]$ (здесь $\mathcal{K}[0,1]$ множество всех компактных подмножеств множества [0,1]), определенное следующим образом: если $X \subset [0,1]$ — компактное подмножество, то $F(X) = f_1(X) \cup f_2(X)$. Кроме того, мы получим семейство отображений $\{F^n\}_{n \in N}$, где $F^n = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{n}$ — n-я итерация отображения F. Как будет показано в дальнейшем, последовательность $F^n([0,1])$ сходится ко множеству Кантора, смысл которого будет объяснен ниже.

Теорема 2.1.1. $F(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{C}$, тогда $x \in C_k$ для всякого $k \in N$. Так как $C_{k+1} = f_1(C_k) \cup f_2(C_k)$, то $x \in f_1(C_k)$ или $x \in f_2(C_k)$. Если $x \in f_1(C_k)$, то $3x \in C_k$, следовательно, $3x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, но $f_1(3x) = x$, поэтому $x \in f_1(\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k) = f_1(\mathfrak{C})$. Если $x \in f_2(C_k)$, то $3x - 2 \in C_k$, следовательно $3x - 2 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, но $f_2(3x - 2) = x$, поэтому $x \in f_2(\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k) = f_2(\mathfrak{C})$.

Пусть $x \in F(\mathfrak{C})$, тогда $x \in f_1(\mathfrak{C}) \cup f_2(\mathfrak{C})$. Если $x \in f_1(\mathfrak{C})$, то существует $y \in C_k$ для всякого $k \in N$, такой, что $f_1(y) = x$, но тогда $x \in C_{k+1}$ для всякого $k \in N$. Таким образом, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \mathfrak{C}$.

Случай $x \in f_2(\mathfrak{C})$ *— доказать самостоятельно.*

Теорема 2.1.1 доказана.

З а м е ч а н и е. $F(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$ означает, что множество $\mathfrak{C}$ — неподвижная точка отображения F (аттрактор), которая, как будет показано ниже, является пределом последовательности C_0, $F(C_0)$, $F^2(C_0)$,…, $F^n(C_0)$, …, но для этого нам понадобится метрика Хаусдорфа. $F(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$ означает, что множество $\mathfrak{C}$ — самоподобное. Самоподобность — важное свойство фрактала.

Некоторые авторы фракталом называют непустое компактное самоподобное множество.

Для множества Кантора $\dim_S \mathfrak{C} = \log 2/\log 3$, где $\dim_S$ ... — размерность подобия (см. ниже). Таким образом, $\dim_H \mathfrak{C} = \dim_S \mathfrak{C}$.

Используя множество Кантора, можно получить интересный объект. Рассмотрим

$$C_0 \times C_0 \supset C_1 \times C_0 \supset C_2 \times C_0 \supset \ldots \supset C_k \times C_0 \supset \ldots$$

Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \times C_0 = \mathfrak{C} \times [0,1]$. Множество $\mathfrak{C} \times [0,1]$ называется гребнем Кантора. Вот несколько шагов его построения.

Рис. 2.3

Вот еще один очень интересный объект, он называется Канторовой лестницей (это график функции, которая называется Канторовой).

Функция Кантора $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$ строится следующим образом (см. доказательство леммы 8). Если $x \in J$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 1/2, если $x \in J_0$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 1/4, если $x \in J_1$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 3/4, если $x \in J_{00}$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 1/8, если $x \in J_{01}$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 3/8, если $x \in J_{10}$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 5/8, если $x \in J_{11}$ или является его граничной точкой, то ȼ(x) = 7/8 и так далее.

Таким образом, мы определили функцию ȼ на множестве, являющемся объединением всех замыканий вида $\overline{J}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ (рис. 2.4).

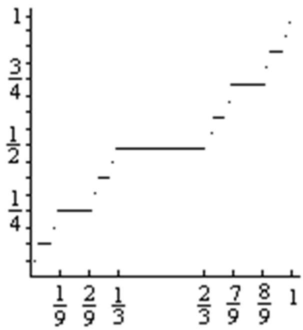


Рис. 2.4

Пусть теперь x не принадлежит никакому множеству вида $\overline{J}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Произведем «сечение» во множестве всех «средних третей». В первый класс отнесем все «средние трети» левее точки x, во второй — все «средние трети» правее точки x.

Тогда, используя лемму 8, мы получим сечение во множестве всех двоично-рациональных чисел интервала (0,1).

Если «средняя треть» $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ находится левее точки 1/2, то ее номер $0,i_1i_2\ldots i_k1$ больше, чем любое число из $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Если «средняя треть» $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ находится правее точки ½, то ее номер $0,i_1i_2\ldots i_k1$ меньше, чем любое число из $J_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$.

Положим ȼ (x) равен двоичной дроби, производящей построенное сечение. Кроме того, положим ȼ (0) = 0 и ȼ (1) = 1. Графически функцию Кантора можно изобразить следующим образом:

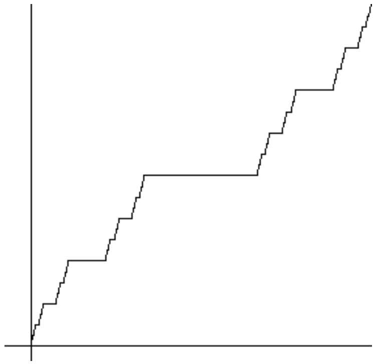


Рис. 2.5

Теорема 2.1.2. Функция $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$ является не убывающей.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 < x_2$, такие, что

1) $x_1 \in J_{r_1}$ и $x_2 \in J_{r_2}$ (здесь r_1 и r_2 — номера соответствующих «средних третей»), тогда $J_{r_1} \le J_{r_2}$, поэтому $\mathfrak{c}(x_1) \le \mathfrak{c}(x_2)$;

2) x_1 принадлежит «средней трети» J_{r_1}, а x_2 является граничной точкой «средней трети» J_{r_2}. Если $J_{r_1} = J_{r_2}$, тогда $\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2)$, в случае $J_{r_1} < J_{r_2}$ $\mathfrak{c}(x_1) < \mathfrak{c}(x_2)$;

3) x_1 является граничной точкой «средней трети» J_{r_1} и x_2 — граничной точкой «средней трети» J_{r_2}. Если $J_{r_1} = J_{r_2}$, то $\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2)$, в случае $J_{r_1} < J_{r_2}$ $\mathfrak{c}(x_1) < \mathfrak{c}(x_2)$;

4) x_1 и x_2 не принадлежат никакому множеству вида $\bar{J}_r$. Тогда $r_1 = \mathfrak{c}(x_1) = \inf\{r\colon J_r$ — «средняя треть», J_r лежит правее точки $x_1\}$ и $r_2 = \mathfrak{c}(x_2) = \sup\{r\colon J_r$ — «средняя треть», J_r лежит левее точки $x_2\}$. Пусть J_{r_1} — «средняя треть», лежащая правее точки x_1, и J_{r_2} — «средняя треть», лежащая левее точки x_2, та-

кие, что $J_{r_1} < J_{r_2}$. Тогда $\mathfrak{c}(x_1) < r_1 < r_2 < \mathfrak{c}(x_2)$. *Нерассмотренные случаи — доказать самостоятельно.*

Теорема 2.1.2 доказана.

Теорема 2.1.3. Канторова функция $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$ является непрерывной.

Доказательство. (см. теорему 2.1.2).

1. Пусть x_0 принадлежит некоторой «средней трети», то по построению функция $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$ постоянна на этой «средней трети», поэтому непрерывна в точке x_0.

2. Пусть x_0 — граничная точка некоторой «средней трети», которую мы обозначим J_{r_0}. Здесь r_0 — номер «средней трети» J_{r_0} (для определенности точка x_0 — левая граница J_{r_0}). По построению $\mathfrak{c}(x_0) = r_0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует двоично-рациональная дробь $r < r_0$, такая, что $r_0 - r < \varepsilon$. Возьмем «среднею треть» J_r, тогда $J_r < J_{r_0}$. Обозначим x' одну из граничных точек «средней трети» J_r, пусть она будет правой граничной точкой (*объяснить, почему можно взять и левую*). Пусть x'' — правая граничная точка «средней трети» J_{r_0}. Интервал (x', x'') содержит точку x_0, и поэтому является ее окрестностью. Если $x_0 \le x < x''$, то $\mathfrak{c}(x) < \mathfrak{c}(x_0) + \varepsilon$. Если $x' < x < x_0$, то $r = \mathfrak{c}(x') \le \mathfrak{c}(x) \le \mathfrak{c}(x_0) = r_0$. Таким образом, $\mathfrak{c}(x_0) - \varepsilon \le \mathfrak{c}(x) < r_0$.

3. Пусть $x_0 \in \mathfrak{C}$. Возьмем две двоично — рациональные дроби r' и r'', такие, что $r' < \mathfrak{c}(x_0) < r''$ и $r'' - r' < \varepsilon$. Обозначим x' правую граничную точку «средней трети» $J_{r'}$ (*можно левую — почему?*), x'' левую граничную точку «средней трети» $J_{r''}$ (*можно правую — почему?*). Тогда $x' < x_0 < x''$. Если x произвольная точка интервала (x', x''), то $r' < \mathfrak{c}(x) < r''$. Таким образом, $|\mathfrak{c}(x) - \mathfrak{c}(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема 2.1.3 доказана [5].

Следует обратить внимание на то, что канторова функция $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$ возрастает от 0 до 1, но на «средних третях» она постоянна! Таким образом, все «возрастание» происходит на канторовом множестве $\mathfrak{C}$.

Следствие. $\mathfrak{c}(\mathfrak{C}) = [0,1]$.

Доказательство. Граничные точки удаленных «средних третей» принадлежат канторовому множеству $\mathfrak{C}$.

Следствие доказано.

Замечание. Образ вполне несвязного множества (канторова множества) относительно непрерывного отображения является связным множеством (отрезком $[0,1]$). Кроме того, $\dim_T \mathfrak{C} = 0$, но $\dim_T \mathfrak{c}(\mathfrak{C}) = 1$. Таким образом, непрерывное отображения $\mathfrak{c}$ «увеличило» топологическую размерность.

Функция $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$, называемая канторовой лестницей, имеет много интересных свойств.

Рассмотрим систему аффинных отображений:

$$f_0(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},\ f_1(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Если $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ — график канторовой лестницы, то мы, очевидно, имеем

$$\Gamma_{\mathfrak{c}} = f_0(\Gamma_{\mathfrak{c}}) \cup f_1(\Gamma_{\mathfrak{c}}) \cup f_2(\Gamma_{\mathfrak{c}}).$$

Таким образом, множество $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ — самоподобное (аттрактор) относительно СИФ определяемой (f_0, f_1, f_2).

Тогда $\dim_S \Gamma_{\mathfrak{c}}$ является решением уравнения

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Так как $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ — график непрерывного отображения, то $\dim_T \Gamma_{\mathfrak{c}} = 1$.

Кроме того, функция $\mathfrak{c}$: $[0,1] \to [0,1]$ обладает свойством самоаффинности: $2\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(3x)$, если $x\in[0,1/3]$; $\mathfrak{c}(x) = 1/2$, если $x\in[1/3,2/3]$; $2\mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(3x - 2) + 1$, если $x\in[2/3,1]$.

Пример изображения Канторовой лестницы представлен на рисунке 2.6.

Рис. 2.6

Вот еще один пример использования множества Кантора. Пусть

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \times [0,1] \cup [0,1] \times \mathfrak{C} \subset R^2.$$

Задание. Доказать, что двухмерная Лебегова мера множества $\mathfrak{S}$ равна нулю.

Множество $\mathfrak{S}$ обладает одним интересным свойством. Пусть даны два числа $a,b \in R$, такие, что $0 < a \le 1$ и $0 < b \le 1$. Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b, тогда множество $\mathfrak{S}$ содержит его границу, так как $[-1,1] \subset \mathfrak{C} - \mathfrak{C}$. Сам прямоугольник, конечно, не содержится во множестве $\mathfrak{S}$.

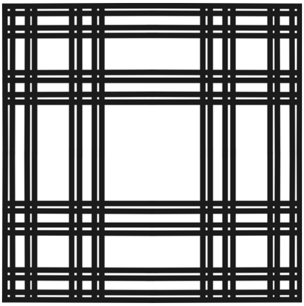


Рис. 2.7

Конструкцию множества $\mathfrak{S}$ можно понять из рисунка 2.7.

Как уже отмечалось в первой главе, существуют интересные связи между p — адическими числами и канторовом множеством.

Рассмотрим множество целых 2-адических чисел, которое обозначается Z_2 [1]. По определению имеем

$$Z_2 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k : a_k = 0{,}1 \right\}.$$

Пусть x,y $\in Z_2$ такие, что $|x-y|_2 < 1/p^n$, тогда в 2-адическом разложении числа $x-y$ первый отличный от нуля член встретится на n+1-м месте [1]. Множество $Z_2 \subset Q_2$, и поэтому оно естественным образом наделяется топологией индуцированной 2-адической метрикой на Q_2. Множество $\mathfrak{C} \subset R$, и поэтому оно наделяется топологией индуцированной эвклидовой метрикой на R.

Теорема В. Топологическое пространство Z_2 гомеоморфно топологическому пространству $\mathfrak{C}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение φ: $Z_2 \to \mathfrak{C}$, такое, что $\varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k / 3^{k+1}$. Это отображение является биекцией, так как используемые нами представления чисел из Z_2 и $\mathfrak{C}$ единственны.

Покажем, что отображения φ и φ^{-1} непрерывны. Пусть $x_0 \in Z_2$ и $\varepsilon > 0$, возьмем n_0 таким, что $1/3^{n_0} < \varepsilon$ и $\delta = 1/2^{n_0}$. Тогда для всякого $x \in Z_2$, такого, что $|x-x_0|_p < 1/2^{n_0}$, первые n-члены в 2-адическом представлении чисел x и x_0 совпадают.

Тогда $\varphi(x)$, $\varphi(x_0) \in \mathfrak{C}$ и в указанном выше разложении в троичную дробь имеют совпадающие первые n-члены, что означает $\varphi(x), \varphi(x_0) \in I_n^k \subset C_n$ (для некоторого $k = 1,2,..,2^n$), и поэтому $\left|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right| < 1/3^{n_0} < \varepsilon$. Таким образом, отображение φ непрерывно.

Непрерывность отображения φ^{-1} доказать самостоятельно.

Теорема B доказана.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема C. Всякое сепарабельное метрическое пространство является непрерывным образом некоторого подмножества канторова множества.

Теорема D. Всякое компактное метрическое пространство является непрерывным образом канторова множества.

Теорема E. Всякое компактное вполне несвязное совершенное метрическое пространство гомеоморфно канторову множеству.

Доказательство см. в работе [5].

Следствие. Топологические пространства Z_2 и Z_p (в топологиях индуцированных соответствующими метриками) гомеоморфны.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Интересным множеством на плоскости является множество, конструкцию которого легко понять из рисунка 2.8.

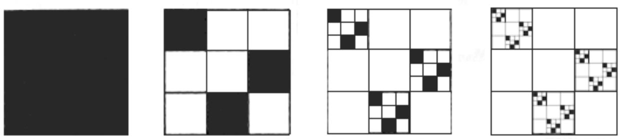


Рис. 2.8

Обозначим Q_0 первое слева множество на рисунке 2.8, Q_1 второе слева множество, Q_2 третье слева множество, Q_3 четвертое слева множество и т. д. Положим

$$\mathcal{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n .$$

По построению

$$Q_0 = K_0,\ Q_1 = K_1^1 \cup K_1^2 \cup K_1^3,\ Q_2 = K_2^1 \cup K_2^2 \cup K_2^3 \cup \ldots \cup K_2^9,$$
$$Q_3 = K_3^1 \cup K_3^2 \cup K_3 \cup \ldots \cup K_3^{27} \ldots$$

Здесь K_n^i — соответствующий квадрат в квадрате Q_n (рис. 2.8).

Если $a \in \mathcal{Q}$, то $a \in K_0$, $a \in K_1^{i_1}$, $a \in K_2^{i_2}$ …, $a \in K_n^{i_n}$ … Причем по построению

$$K_0 \supset K_1^{i_1} \supset K_2^{i_2} \supset \ldots \supset K_n^{i_n} \supset \ldots$$

Тогда $\{a\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} K_n^{i_n}$.

Множество $\mathcal{Q}$ непусто. Множество $\mathcal{Q}$ — компакт.

Так как $\mathcal{Q} \subset Q_n$ (для всякого натурального n), то Лебегова мера множества $\mathcal{Q}$ равна нулю.

З а д а н и е. Доказать, что множество $\mathcal{Q}$ вполне несвязно.

З а д а н и е. Доказать, что $\dim_T \mathcal{Q} = 0$.

Так как $\mathcal{Q} = f_1(\mathcal{Q}) \cup f_2(\mathcal{Q}) \cup f_3(\mathcal{Q})$, где

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},\ f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

то множество $\mathcal{Q}$ самоподобное (аттрактор) и размерность подобия множества $\mathcal{Q}$ равна 1($\dim_S \mathcal{Q} = 1$).

Таким образом, множество $\mathcal{Q}$ — фрактал.

Вот еще один из примеров плоского Канторового множества (фрактала).

Несколько этапов его построения изображено на рисунке 2.9.

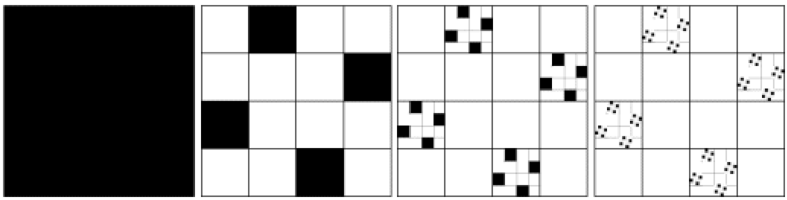


Рис. 2.9

З а д а н и е. Описать его свойства (см. свойства множества Q).

§ 2. Ковер Серпинского

Ковер Серпинского — еще один из простейших фракталов.

Возьмем на плоскости R^2 равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 1 (первая слева фигура на рисунке 2.10 обозначим ее S_0), на его сторонах возьмем серединные точки и соединим их прямолинейными отрезками. Таким образом, треугольник S_0 разобьется на четыре равных треугольника. Удалим внутренность центрального треугольника. Полученную фигуру (на рисунке 2.10 она вторая слева) обозначим S_1. Продолжая этот процесс (несколько шагов которого изображены на рисунке 2.10), мы получим последовательность $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$ (рис. 2.10).

Рис. 2.10

***Определение* 2.2.1.** Множество $\mathcal{S} = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} S_n$ называется ковром Серпинского.

З а м е ч а н и е. Фигура S_n состоит из 3^n замкнутых равносторонних треугольников. Таким образом $S_n = \bigcup\limits_{i=1}^{3^n} T_n^i$, где каждый треугольник T_n^i — «уменьшенный» в 2^n раз исходный треугольник S_0.

Лемма 2.2.1. Множество $\mathcal{S}$ является компактом.

Доказательство. Каждое множество S_n замкнуто, поэтому их пересечение замкнуто, но оно и ограниченно. Таким образом, множество $\mathcal{S}$ — компакт.

Лемма 2.2.1 доказана.

Лемма 2.2.2. Множество $\mathcal{S}$ является совершенным.

Доказательство. Пусть точка $a \in \mathcal{S}$ является изолированной, тогда существует шар $B_\varepsilon(a)$, такой, что $B_\varepsilon(a) \cap \mathcal{S} = \{a\}$. Возьмем натуральное число n, такое, что $1/2^n < \varepsilon$. По построению $a \in S_n$, и поэтому $a \in T_n^{i_0}$, причем $T_n^{i_0} \subset B_\varepsilon(a)$. Таким образом, мы получим $B_\varepsilon(a) \cap \mathcal{S} \setminus \{a\} \neq \varnothing$ — противоречие.

Лемма 2.2.2 доказана.

Лемма 2.2.3. Мера Лебега (двумерная) ковра Серпинского равна нулю.

Доказательство. Фигура S_n состоит из 3^n треугольников, длина стороны каждого из которых равна $1/2^n$. Таким образом, площадь S_n равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. По определению $\mathcal{S} \subset S_n$ для всякого натурального n и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Лемма 2.2.3 доказана.

Рассмотрим СИФ, определяющую ковер Серпинского (§1 главы 3), это три отображения f_i: $R^2 \to R^2$ ($i = 1,2,3$), такие, что

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{S} = f_1(\mathcal{S}) \cup f_2(\mathcal{S}) \cup f_3(\mathcal{S})$, и поэтому $\mathcal{S}$ — аттрактор этой СИФ.

Лемма 2.2.4. Множество $\mathcal{S}$ связно.

Доказательство. Множества $f_1(\mathcal{S})$, $f_2(\mathcal{S})$, $f_3(\mathcal{S})$ образуют цепь (§1 главы 3), поэтому множество связно.

Лемма 2.2.4 доказана.

Канторово множество является вполне несвязным (совершенным) компактом — дисконтинуумом. Ковер Серпинского — связный компакт — континуум.

***Определение* J**. Множество $J \subset R^n$ называется жордановой кривой, если существует непрерывное отображение $f:[0,1] \to R^n$, такое, что $f([0,1]) = J$.

З а м е ч а н и е. Так как отрезок $[0,1]$ — связное и компактное множество, то J — континуум, который будем также называть жордановым континуумом.

Какие континуумы являются жордановыми?

Один из ответов на этот вопрос дает теорема Хана — Мазуркевича.

Теорема Н — М. Для того чтобы континуум был жордановым, необходимо и достаточно, чтобы он был локально связным.

Доказательство. См. работу [11].

Теорема Серпинского дает возможность определить, когда континуум является локально связным.

Теорема S. Для того чтобы континуум был локально связен, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ его можно было представить в виде объединения конечного числа континуумов, каждый из которых имеет диаметр меньше ε.

Доказательство. См. работу [11].

Построенный выше ковер Серпинского называют первым континуумом Серпинского.

Легко увидеть, что континуум Серпинского является локально связным, следовательно, он — жордановый континуум.

Для того чтобы найти непрерывное отображение $f_{\mathcal{S}} : [0,1] \to R^2$, для которого $f_{\mathcal{S}}([0,1]) = \mathcal{S}$, мы возьмем другую СИФ:

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix},$$

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аттрактором этой СИФ также будет первый континуум Серпинского. *Доказать!*

Но используя эту СИФ, мы можем определить непрерывное отображение $f_{\mathcal{S}} : [0,1] \to R^2$, для которого $f_{\mathcal{S}}([0,1]) = \mathcal{S}$.

Кроме того, эта СИФ удовлетворяет условию открытого множества (см. далее). Поэтому $\dim_S \mathcal{S} = \dim_H \mathcal{S}$.

По определению размерности подобия $\dim_S \mathcal{S} = \log 3 / \log 2$,

тогда его размерность Хаусдорфа — $\dim_H \mathcal{S} = \log 3 / \log 2$.

Из рисунка 2.11 видно, а в дальнейшем будет доказано, что $\dim T\, \mathcal{S} = 1$.

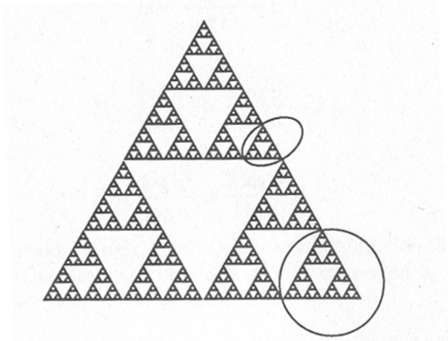


Рис. 2.11

Таким образом, $\mathcal{S}$ — фрактал.

Хотя построенное нами множество и называется ковром Серпинского, собственно ковром Серпинского является другое множество (второй континуум Серпинского).

Вот как оно строится: единичный квадрат G_0 делим на девять равных частей (уменьшенных в три раза квадратов) и удаляем внутренность центрального квадрата. Получаем фигуру G_1 (на рисунке 2.12 она слева).

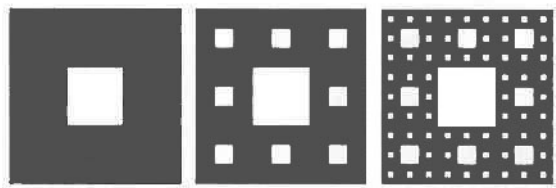


Рис. 2.12

Каждый из восьми квадратов входящих в фигуру G_1, делим на девять равных частей и из каждой части удаляем внутренность центрального квадрата. Получаем фигуру G_2 (на рисунке 2.12 она в центре).

Каждый из шестидесяти четырех квадратов, входящих в фигуру G_2, делим на девять равных частей и из каждой части удаляем внутренность центрального квадрата. Получаем фигуру G_3 (на рисунке 2.12 она справа). И так далее.

Продолжая этот процесс (несколько шагов которого изображено на рисунке 2.11), мы получим последовательность $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$

***Определение* 2.2.2.** Множество $\mathcal{G} = \bigcap_{i=0}^{\infty} G_n$ называется ковром Серпинского.

Описать его свойства (см. свойства множества $\mathcal{S}$).

Множества $\mathcal{S}$ и $\mathcal{G}$ нигде не плотны в R^2.

Множества $\mathcal{S}$ и $\mathcal{G}$ являются плоскими континуумами и называются канторовыми кривыми [5; 9].

Следует иметь в виду, что множества на плоскости могут быть гомеоморфны, но одно из них нигде не плотно в R^2, а другое всюду плотно в R^2. Привести пример.

Пусть f: $[0,1] \to R^2$ — непрерывное отображение. Так как отрезок $[0,1]$ — связный компакт, то и $f([0,1]) \subset R^2$ — связный компакт (континуум). Более точно, континуумы в R^2, являющиеся непрерывными образами отрезка $[0,1]$, называются жордановыми кривыми.

§ 3. Пространство-заполняющие кривые

Жордановы кривые могут сильно не соответствовать нашим интуитивным представлениям о кривых.

Первую жорданову кривую с очень необычными свойствами построил известный итальянский математик Дж. Пеано (1890 г.).

Он показал, что существует непрерывное отображение $f: [0,1] \to R^2$, такое, что $f([0,1])$ является единичным квадратом на плоскости, таким образом, квадрат — жорданова кривая. Вот как строится такое отображение.

Пусть $k(t_i) = 2 - t_i$, где $t_i = 0,1,2$. Положим

$$f_p^1(t) = 0, t_1\left(k^{t_2}(t_3)\right)\left(k^{t_2+t_4}(t_5)\right)\ldots, \quad f_p^2(t) = 0, \left(k^{t_1}(t_2)\right)\left(k^{t_1+t_3}(t_4)\right)\ldots.$$

Конечно, следует сравнить это отображение с отображением Кантора отрезка [0,1] в квадрат $[0,1] \times [0,1]$, которое является сюръекцией, но не непрерывным отображением [23].

Подробно рассмотрим более поздний геометрический вариант построения кривой Пеано.

Рассмотрим на плоскости квадрат $Q = [0,1] \times [0,1]$. Возьмем отображение f_1: $[0,1] \to Q$ таким, что для всякого $t \in [0,1]$ будем иметь $f_1(t) = (t,t)$. Разобьем отрезок $I = [0,1]$ на девять равных частей: $I_1 = [0,1/9]$, $I_2 = [1/9,2/9]$, $I_3 = [2/9,3/9]$, $I_4 = [3/9,4/9]$, $I_5 = [4/9,5/9]$, $I_6 = [5/9,6/9]$, $I_7 = [6/9,7/9]$, $I_8 = [7/9,8/9]$, $I_9 = [8/9,1]$. Соответственно, разобьем квадрат Q на девять равных квадратов:

$$Q_1 = [0,1/3] \times [0,1/3],\ Q_2 = [0,1/3] \times [1/3,2/3],$$

$$Q_3 = [0,1/3] \times [2/3,1],\ Q_4 = [1/3,2/3] \times [2/3,1],$$

$$Q_5 = [1/3,2/3] \times [1/3,2/3],\ Q_6 = [1/3,2/3] \times [0,1/3],$$

$$Q_7 = [2/3,1] \times [0,1/3],\ Q_8 = [2/3,1] \times [1/3,2/3],$$

$$Q_9 = [2/3,1] \times [2/3,1].$$

Определим отображение f_2: $[0,1] \to Q$ следующим образом:

$$f_2(t) = \begin{cases} (3t, 3t), & t \in [0,\ 1/9] \\ (2/3 - 3t, 3t), & t \in [1/9,\ 2/9] \\ (3t - 2/3, 3t), & t \in [2/9, 3/9] \\ (3t - 2/3, 2 - 3t), & t \in [3/9, 4/9] \\ (2 - 3t, 2 - 3t), & t \in [4/9, 5/9] \\ (3t - 4/3, 2 - 3t), & t \in [5/9,\ 6/9] \\ (3t - 4/3, 3t - 2), & t \in [6/9,\ 7/9] \\ (10/3 - 3t, 3t - 2), & t \in [7/9,\ 8/9] \\ (3t - 2, 3t - 2), & t \in [8/9,\ 1] \end{cases}$$

На рисунке 2.13 построены $f_1(I)$ и $f_2(I)$.

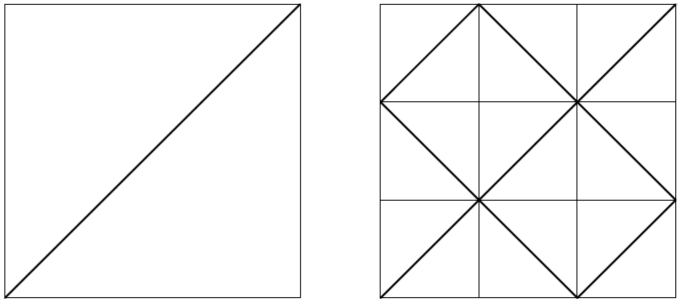


Рис. 2.13

На f_1 (I) и f_2 (I) не указано направление движения. Чтобы направление движения было понятно, мы «немножко исказим» f_2 (I) и f_3 (I) и получим изображения, на которых направление движения уже понятно.

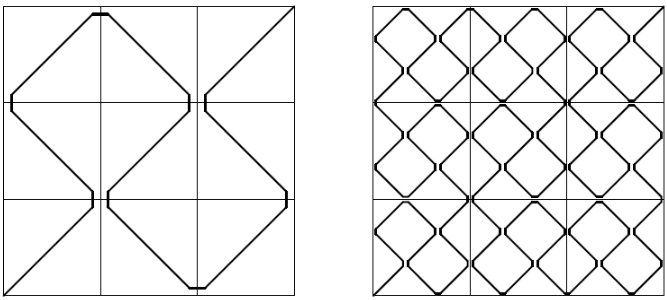


Рис. 2.14

Далее делим каждый из отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_9$ на девять равных отрезков, которые обозначаем $I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{19}, I_{21}, I_{22}, \ldots, I_{29}, \ldots, I_{91}, I_{92}, \ldots, I_{99}$, и каждый из девяти квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_9$ делим на девять равных квадратов $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{19}, Q_{21}, Q_{22}, \ldots,$

$Q_{29},\ldots, Q_{91}, Q_{92},\ldots, Q_{99}$ (следить за нумерацией) и аналогично, как мы определяли отображение f_2: $[0,1] \to Q$, определяем отображение f_3: $[0,1] \to Q$.

Продолжая таким образом, мы получим последовательность отображений $\{f_n: [0,1] \to Q\}_{n\in N}$. Каждое отображение f_n: $[0,1] \to Q$ является непрерывным. (*Почему?*)

Рассмотрим множество $C^0(I)$ (множество всех непрерывных функций на отрезке [0,1]), причем множество Q наделено метрикой, определяемой нормой $\nu_3(x) = \max\left\{\left|x^1\right|,\left|x^2\right|\right\}$ (см. §1 главы 1). На множестве $C^0(I)$ зададим топологию равномерной сходимости. В полном метрическом пространстве $C^0(I)$ мы имеем последовательность $\{f_n: [0,1] \to Q\}_{n\in N}$.

Лемма 2.3.1. Последовательность $\{f_n: [0,1] \to Q\}_{n\in N}$ является последовательностью Коши в $C^0(I)$.

Доказательство. Рассмотрим члены последовательности f_n и f_{n+1}. Пусть $t\in[0,1]$, тогда $\left\| f_n(t) - f_{n+1}(t) \right\| \le 1/3^n$, получим

$$\left\| f_n(t) - f_{n+p}(t) \right\| \le \left\| f_n(t) - f_{n+1}(t) \right\| + \left\| f_{n+1}(t) - f_{n+2}(t) \right\| + \ldots +$$
$$+ \left\| f_{n+p-1}(t) - f_{n+p}(t) \right\| \le 1/3^n + 1/3^{n+1} + \ldots + 1/3^{n+p-1} < 1/3^{n-1}.$$

Лемма 2.3.1 доказана.

Так как метрическое пространство $C^0(I)$ является полным, то последовательность $\{f_n: [0,1] \to Q\}_{n\in N}$ сходится к непрерывной функции $f: [0,1] \to Q$ ($f\in C^0(I)$).

Лемма 2.3.2. $f(I) = Q$.

Доказательство. Пусть $x_0\in Q$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем $n\in N$ таким, что $1/3^n < \varepsilon/2$. Очевидно, что

$$\left\| x_0 - f(t) \right\| \le \left\| x_0 - f_n(t) \right\| + \left\| f_n(t) - f(t) \right\|.$$

По построению точка x_0 принадлежит одному из 9^n квадратов.

Тогда существует $t \in I$ такое, что $\| x_0 - f_n(t) \| \le 1/3^n$, кроме того, $\| f_n(t) - f(t) \| \le 1/3^n$ для всех $t \in I$ и достаточно больших n.

Таким образом, множество f(I) плотно в Q, т. е. $\overline{f(I)} = Q$. Но, очевидно, $\overline{f(I)} = f(I)$.

Лемма 2.3.2 доказана.

Построенное отображение f: $[0,1] \to Q$ не является инъекцией, так как тогда оно было бы непрерывной биекцией. Но это невозможно. (*Почему?*) Существуют кратные точки.

Задание. Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство. Доказать, что если f: $X \to Y$ — непрерывная биекция, тогда это отображение является гомеоморфизмом.

График построенного отображения f: $[0,1] \to R^2$, являясь подмножеством в R^3, будет «обычной» кривой. А вот его проекцией на плоскость (x^1,x^2) вдоль оси t будет квадрат $[0,1] \times [0,1]$!

Кроме того, отображение f: $[0,1] \to Q$ является нигде не дифференцируемым [9; 20].

На рисунках 2.15 и 2.16 изображены графики координатных функций для отображений f_2 и f_3 соответственно.

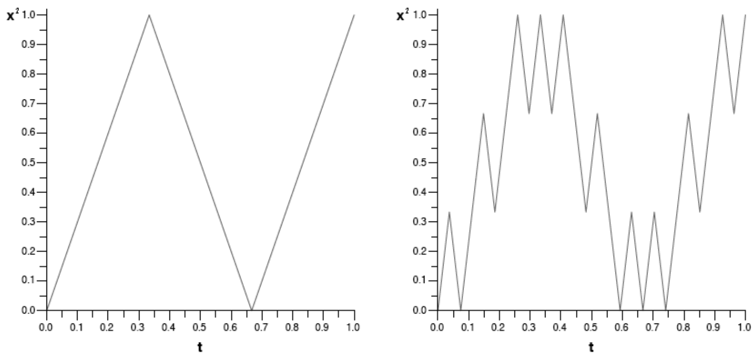


Рис. 2.15

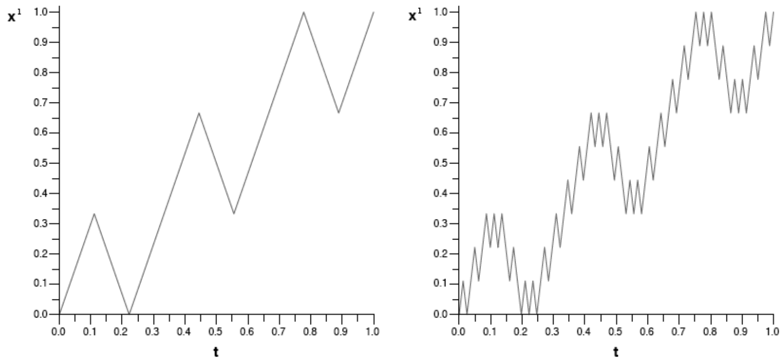


Рис. 2.16

З а д а н и е. Найти проекцию Γ_f (график функции Пеано) на плоскость (t,x^1) вдоль оси x^2 и проекцию Γ_f на плоскость (t,x^2) вдоль оси x^1.

Существуют и другие отображения f: $[0,1] \to Q$, которые называются кривыми Пеано [9; 23].

Следует иметь в виду [11; 23], что если континуум локально связан, то он — жордановая кривая [11]. Ковер Серпинского является локально связным континуум, поэтому он — жордановая кривая!

Кривая Пеано — пространство-заполняющая кривая.

***Определение* 2.3.1.** Непрерывное отображение f: $[0,1] \to R^n$ называется пространство-заполняющей кривой, если в R^n существует n-мерный шар, содержащийся в f ([0,1]).

Сам Дж. Пеано строил свою кривую как отображение не на квадрат, а на треугольник.

Такие кривые изучали многие математики. Пример пространство-заполняющей кривой дал Д. Гильберт (1891 г.). На рисунке 2.17 приведена первая страница статьи Д. Гильберта, в которой он дал описание построения кривой, заполняющей квадрат. Эта кривая носит его имя.

Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.*)

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Peano hat kürzlich in den Mathematischen Annalen**) durch eine arithmetische Betrachtung gezeigt, wie die Punkte einer Linie stetig auf die Punkte eines Flächenstückes abgebildet werden können. Die für eine solche Abbildung erforderlichen Functionen lassen sich in übersichtlicherer Weise herstellen, wenn man sich der folgenden geometrischen Anschauung bedient. Die abzubildende Linie — etwa eine Gerade von der Länge 1 — theilen wir zunächst in 4 gleiche Theile 1, 2, 3, 4 und das Flächenstück, welches wir in der Gestalt eines Quadrates von der Seitenlänge 1 annehmen, theilen wir durch zwei zu einander senkrechte Gerade in 4 gleiche Quadrate 1, 2, 3, 4 (Fig. 1). Zweitens theilen wir jede der Theilstrecken 1, 2, 3, 4 wiederum in 4 gleiche Theile, so dass wir auf der Geraden die 16 Theilstrecken 1, 2, 3, ..., 16 erhalten; gleichzeitig werde jedes der 4 Quadrate 1, 2, 3, 4 in 4 gleiche Quadrate getheilt und den so entstehenden 16 Quadraten

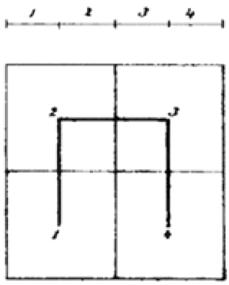


Fig. 1.

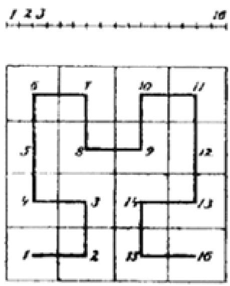


Fig. 2.

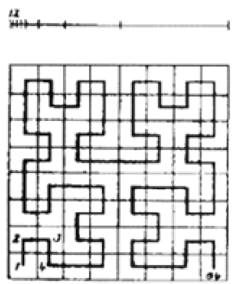


Fig. 3.

werden dann die Zahlen 1, 2 ... 16 eingeschrieben, wobei jedoch die Reihenfolge der Quadrate so zu wählen ist, dass jedes folgende Quadrat sich mit einer Seite an das vorhergehende anlehnt (Fig. 2). Denken wir uns dieses Verfahren fortgesetzt — Fig. 3 veranschaulicht den

*) Vergl. eine Mittheilung über denselben Gegenstand in den Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Bremen 1890.

**) Bd. 36, S. 157.

30*

Рис. 2.17

Построим кривую Гильберта. Рассмотрим отрезок $I = [0,1]$ и квадрат $K = [0,1]\times[0,1]$.

Разобьем отрезок $I = [0,1]$ на четыре равных отрезка, которые обозначим I_0, I_1, I_2, I_3 соответственно и назовем их отрезками первого ранга. Аналогично, разделим квадрат K на четыре равных квадрата, которые обозначим K_0, K_1, K_2, K_3 соответственно и назовем их квадратами первого ранга (рис. 2.18).

K_1	K_2
K_0	K_3

Рис. 2.18

Каждый из отрезков I_0, I_1, I_2, I_3 разобьем на четыре равных отрезка, которые обозначим I_{00}, I_{01}, I_{02}, I_{03}, I_{10}, I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{20}, I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{30}, I_{31}, I_{32}, I_{33} соответственно и назовем их отрезками второго ранга. Каждый из квадратов K_0, K_1, K_2, K_3 разобьем на четыре равных квадрата, которые обозначим K_{00}, K_{01}, K_{02}, K_{03}, K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{20}, K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{30}, K_{31}, K_{32}, K_{33} соответственно и назовем их квадратами второго ранга (рис. 2.19).

K_{11}	K_{12}	K_{21}	K_{22}
K_{10}	K_{13}	K_{20}	K_{23}
K_{03}	K_{02}	K_{31}	K_{30}
K_{00}	K_{01}	K_{32}	K_{33}

Рис. 2.19

З а д а н и е. Построить разбиение квадрата K квадратами третьего ранга и указать их нумерацию.

Из построения следует, что если отрезки $I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ и $I_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ имеют общий конец, то квадраты $K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ и $K_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ имеют общую сторону [5]. Кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty}\delta\left(I_{i_1 i_2,\ldots,i_k}\right)=0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\delta\left(K_{i_1 i_2,\ldots,i_k}\right)=0$.

Если $t\in I$, тогда для всякого натурального k существует единственный отрезок $I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ ранга k, содержащий точку t, или существуют два отрезка $I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, $I_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ ранга k, для которых точка t является их общим концом.

В первом случае возьмем квадрат $K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ ранга k, во втором — любой из соответствующих квадратов $K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, $K_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$.

Таким образом, будем иметь две последовательности:

$$I_{i_1} \supset I_{i_1,i_2} \supset I_{i_1,i_2,i_3} \supset \ldots \supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \supset \ldots$$

$$K_{i_1} \supset K_{i_1,i_2} \supset K_{i_1,i_2,i_3} \supset \ldots \supset K_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \supset \ldots .$$

По построению $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = t$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ состоит из единственной точки, которую обозначим x.

Таким образом, каждой точке $t\in[0,1]$ единственным образом соответствует точка $x\in [0,1]\times [0,1]$ (*проверить самостоятельно*).

Полученное отображение обозначим

$$f_{\mathcal{H}}\colon [0,1] \to [0,1]\times [0,1]$$

и назовем кривой Гильберта.

Пример построения кривой Гильберта представлен на рисунках 2.20 и 2.21.

Верхняя часть рисунка 2.21 — аппроксимации образа отображения $f_{\mathcal{H}}$ в квадрате. Нижняя часть рисунка 2.21 — аппроксимация трехмерного графика $f_{\mathcal{H}}$ в кубе.

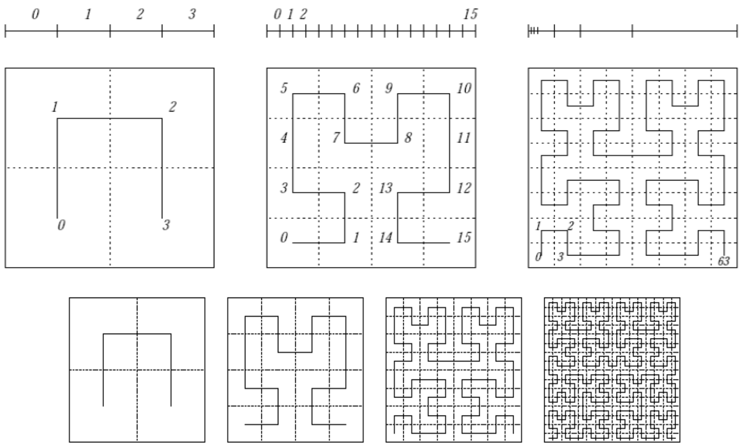


Рис. 2.20

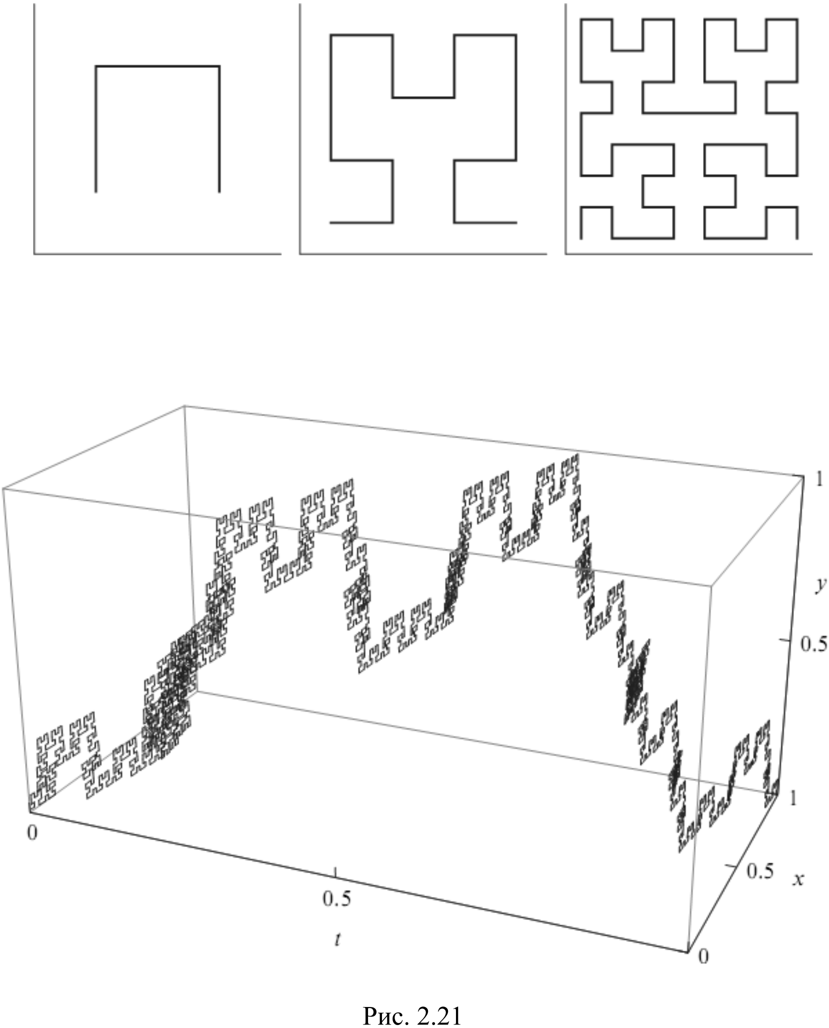


Рис. 2.21

Лемма 2.3.3. Отображение $f_{\mathcal{H}}$: $[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ является сюръекцией.

Доказательство. Пусть $x\in [0,1]\times[0,1]$, тогда существует последовательность

$$K_{i_1} \supset K_{i_1,i_2} \supset K_{i_1,i_2,i_3} \supset \ldots \supset K_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \supset \ldots$$

такая, что $x = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Этой последовательности соответствует последовательность

$$I_{i_1} \supset I_{i_1,i_2} \supset I_{i_1,i_2,i_3} \supset \ldots \supset I_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \supset \ldots,$$

для которой $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = t$. Тогда $f_{\mathcal{H}}(t) = x$.

Лемма 2.3.3 доказана.

Замечание. Таким образом, $f_{\mathcal{H}}([0,1]) = [0,1]\times[0,1]$ и кривая Гильберта является пространство — заполняющей кривой.

Теорема 2.3.1. Отображение $f_{\mathcal{H}}$: $[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ является непрерывным.

Доказательство. Пусть $t_0\in[0,1]$, $f_{\mathcal{H}}(t_0) = x_0$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем n таким, что $K_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \subset B_\varepsilon(x_0)$, если точка t_0 принадлежит одному отрезку $I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$. Если точка t_0 принадлежит двум смежным отрезкам — $I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ и $J_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, то выберем n так, чтобы $K_{i_1,i_2,\ldots,j_n} \cup K_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \subset B_\varepsilon(x_0)$. Если $t\in I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, то $f_{\mathcal{H}}(t) \in B_\varepsilon(x_0)$. Если $t \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \cup I_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$, то $f_{\mathcal{H}}(t) \in B_\varepsilon(x_0)$.

Теорема 2.3.1 доказана.

З а м е ч а н и е. Отображение $f_{\mathcal{H}}$: $[0,1] \to [0,1]\times [0,1]$ является непрерывным и сюръективным, но оно не может быть инъективным!

Теорема 2.3.2. Отображение $f_{\mathcal{H}}$: $[0,1] \to [0,1]\times [0,1]$ является нигде недифференцируемым.

Доказательство. Пусть $t\in[0,1]$, построим последовательность $\{t_n\}_{n\in N}$ в $[0,1]$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Причем $\left| t - t_n \right| \le 16\cdot 4^{-n}$ и $f_{\mathcal{H}}(t)$, $f_{\mathcal{H}}(t_n)$ были расположены так, как показано на рисунке 2.22.

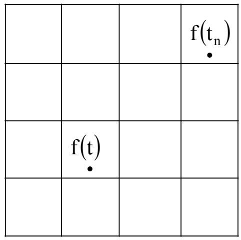


Рис. 2.22

В этом случае $\left| f^1_{\mathcal{H}}(t) - f^1_{\mathcal{H}}(t_n) \right| \ge 2^{-n}$, но тогда

$$\frac{\left| f^1_{\mathcal{H}}(t) - f^1_{\mathcal{H}}(t_n) \right|}{\left| t - t_n \right|} \ge 2^{-n} / \left(16\cdot 4^{-n}\right) = 2^{n-4},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left| f^1_{\mathcal{H}}(t) - f^1_{\mathcal{H}}(t_n) \right|}{\left| t - t_n \right|} = \infty.$

Таким образом, отображение $f_{\mathcal{H}}$: $[0,1] \to [0,1]\times [0,1]$ является нигде недифференцируемым [23].

Теорема 2.3.2 доказана.

З а д а н и е. Для функции $f^2_{\mathcal{H}}$ доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| f^2_{\mathcal{H}}(t) - f^2_{\mathcal{H}}(t_n) \right|}{\left| t - t_n \right|} = \infty.$$

Таким образом, функции $f^1_{\mathcal{H}}$ и $f^2_{\mathcal{H}}$ нигде недифференцируемы.

Графики аппроксимаций координатных функций отображения $f_{\mathcal{H}}$ представлены на рисунке 2.23.

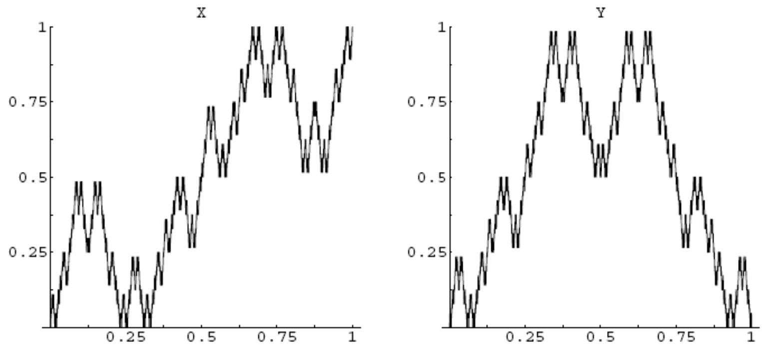


Рис. 2.23

У этих пространство-заполняющих кривых есть важное общее свойство — наличие кратных точек! Вот что об этом сказал Н. Н. Лузин: «…предложение (иметь кратные точки) имеет огромную принципиальную важность для геометрии, так как оно показывает, в чем именно кроется самая геометрическая сущность различия числа измерений плоскости и прямой» [25].

Глава 3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФРАКТАЛОВ

§ 1. Метрика Хаусдорфа

Пусть (X,d) — метрическое пространство, обозначим $\mathcal{K}(X)$ множество всех непустых компактных подмножеств метрического пространства X.

Определение **3.1.1.** $d_H(A,B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset U_\varepsilon(B) \text{ и } B \subset U_\varepsilon(A)\}$ $(A,B \in \mathcal{K}(X))$ называется расстоянием между множествами A и B.

З а м е ч а н и е. Здесь $U_\varepsilon(A)$ — ε-окрестность множества A.

З а д а н и е. Пусть $A \subset R^n$ и $A \neq \varnothing$. Доказать, что для любых $r,s > 0$ имеет место $U_s(U_r(A)) = U_{r+s}(A)$ (метрика эвклидова).

Таким образом мы определили функцию

$$d_H: \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to R.$$

Теорема 3.1.1. Функция d_H: $\mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to R$ является метрикой на $\mathcal{K}(X)$.

Доказательство. $d_H(A,B) \geq 0$ для любых $A,B \in \mathcal{K}(X)$, так как A,B — компакты, то $d_H(A,B) < +\infty$, что следует из определения 3.1.1.

Если A = B, то $A \subset U_\varepsilon(B)$ и $B \subset U_\varepsilon(A)$ для всякого $r > 0$. Таким образом, $d_H(A,B) = 0$. Пусть $d_H(A,B) = 0$. Если $x \in B$, тогда $x \in U_r(A)$ для всякого $r > 0$, но A замкнуто, поэтому $x \in A$. Поэтому $B \subset A$. Аналогично получим $A \subset B$. Таким образом, A = B.

Очевидно, что $d_H(A,B) = d_H(B,A)$.

Пусть $A,B,C \in \mathcal{K}(X)$ и $\varepsilon > 0$. Если $x \in A$, тогда существуют $y \in B$, для которого $d(x,y) < d_H(A,B) + \varepsilon$, и $z \in C$, для которого $d(y,z) < d_H(B,C) + \varepsilon$. Таким образом, для всякого $x \in A$ существует $z \in C$, причем $d(x,z) < d_H(A,B) + d_H(B,C) + 2\varepsilon$, то есть $A \subset U_r(C)$, где $r = d_H(A,B) + d_H(B,C) + 2\varepsilon$. Аналогично $C \subset U_r(A)$, где $r = d_H(A,B) + d_H(B,C) + 2\varepsilon$, поэтому $d_H(A,C) < d_H(A,B) + d_H(B,C) + 2\varepsilon$. Это означает, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, что $d_H(A,C) \le d_H(A,B) + d_H(B,C)$.

Теорема 3.1.1 доказана [21; 17].

Замечание. На множестве $\mathcal{K}(X)$ мы получили «настоящую» метрику и, следовательно, метрическое пространство $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Сравнить с определением 1.1.14, где «расстоянием» между множествами A,B называется число $d(A,B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} d(x,y)$.

Задание. Пусть $a,b \in R^n$, где R^n снабжена эвклидовой метрикой, $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$. Найти $d_H(A,B)$.

Используя задание, получим следующее утверждение: пусть $h: R^n \to \mathcal{K}(R^n)$ такое, что для всякого $a \in R^n$, $h(a) = \{a\}$. Тогда h — изометрия между R^n и $h(R^n) \subset \mathcal{K}(R^n)$.

Как обычно, мы будем писать $A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$ и в случае метрического пространства $(\mathcal{K}(X), d_H)$. Как всякое метрическое пространство, $(\mathcal{K}(X), d_H)$ — пространство Хаусдорфа.

Вот полезная теорема.

Теорема 3.1.2. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в метрическом пространстве $(\mathcal{K}(X),d_H)$, тогда $A = \left\{x \in X : x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ и } x_n \in A_n\right\}$.

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что $A \subset U_\varepsilon(A_n)$ и $A_n \subset U_\varepsilon(A)$ для всех $n \geq n_0$. Пусть $x \in A$ и $\varepsilon_k = 1/k$, тогда существует n_k такое, что $A \subset U_{1/k}(A_n)$ для всех $n \geq n_k$. Возьмем $x_{n_1} \in A_{n_1}, x_{n_2} \in A_{n_2}, \ldots, x_{n_k} \in A_{n_k}, \ldots$, $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$ так, чтобы $d(x, x_{n_k}) < 1/k$. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Построим последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$, в которой $x_n \in A_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Члены $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_{n_1-1} \in A_{n_1-1}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ выбираем произвольно. Выберем члены $x_{n_1+1} \in A_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2-1} \in A_{n_2-1}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ так, чтобы $d(x, x_{n_1+1}) < 1, \ldots, d(x, x_{n_2-1}) < 1$. Члены $x_{n_2+1} \in A_{n_2+1}, \ldots, x_{n_3-1} \in A_{n_3-1}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ выберем так, чтобы $d(x, x_{n_2+1}) < 1/2, \ldots, d(x, x_{n_3-1}) < 1/2$. Продолжая, получим последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$, в которой $x_n \in A_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, что означает $A \subset B$, где $B = \left\{x \in X:\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ и } x_n \in A_n\right\}$.

Обратно, пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(x \in B)$, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0' такое, что $A_n \subset U_{\varepsilon/2}(A)$ для всех $n \geq n_0'$ и существует n_0'' такое, что $d(x,x_n) < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n_0''$. Пусть $n \geq n_0'$ и $n \geq n_0''$, тогда $d(x,x_n) < \varepsilon/2$ и существует $a \in A$ такой, что $d(x_n,a) < \varepsilon/2$ поэтому $d(x,a) < \varepsilon$, то есть $B \subset U_\varepsilon(A)$.

Таким образом, $A \subset B$ и $B \subset U_\varepsilon(A)$ и тогда $d_H(A,B) < \varepsilon$, но ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получим $d_H(A,B) = 0$. Следовательно, $A = B$.

Теорема 3.1.2 доказана.

З а м е ч а н и е. $A \subset B$ можно доказать проще. Пусть $x \in A$ и пусть $d_H(A,A_n) = r_n$ ($\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$), тогда для всякого $n = 1,2,\ldots$, будем иметь $A \subset U_{r_n+1/n}(A_n)$, и существует $x_n \in A_n$, для которого $d(x,x_n) < r_n + 1/n$, но тогда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и поэтому $x \in B$. Таким образом, $A \subset B$.

Вот еще одно полезное свойство предела в метрике Хаусдорфа.

Теорема 3.1.3. Пусть $\{A_n\}_{n\in N}$ — последовательность в $(\mathcal{K}(X),d_H)$, такая, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ (конечно в X!). Тогда в метрике Хаусдорфа $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, где $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим семейство открытых в X подмножеств $\{X \setminus A_n\}_{n\in N}$ и добавим к нему открытое подмножество $U_\varepsilon(A)$, получим открытое покрытие пространства X и, следовательно, компакта A_1. (*Почему?*)

Построенное открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Таким образом, существует n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ будем иметь $A_1 \subset \{X \setminus A_n\} \cup U_\varepsilon(A)$. $(X\setminus A_1 \subset X\setminus A_2 \subset \ldots \subset \subset X\setminus A_k \ldots)$. Тогда $A_n \subset U_\varepsilon(A)$ для всех $n \geq n_0$.

По условию $A \subset A_n$ для всех $n \in N$, поэтому $A \subset U_\varepsilon(A_n)$ для всех $n \in N$ и, следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что $d_H(A,A_n) < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Теорема 3.1.3 доказана.

З а м е ч а н и е. При построении множества Кантора мы получили последовательность компактов $C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots$ Тогда по теореме 3.1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \mathfrak{C}$ в метрическом пространстве $(\mathcal{K}(R),d_H)$, где $\mathfrak{C} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_k$.

Какие свойства метрического пространства (X,d) «наследует» метрическое пространство($\mathcal{K}$(X),d_H)?

Теорема 3.1.4. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство, тогда метрическое пространство ($\mathcal{K}$(X),d_H) является полным.

Доказательство. Так как критерии компактности в R^n являются более простыми, то мы проведем доказательство для $X = R^n$. Пусть $\{A_n\}_{n\in N}$ — последовательность Коши в $\mathcal{K}$(X) (здесь A_n — элемент пространства $\mathcal{K}$(X) и компакт в X). Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что для всех $m,n \ge n_0$ имеем $d_H(A_m,A_n) < \varepsilon/2$. Пусть $A = \left\{x \in X : x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ и } x_n \in A_n\right\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Если $x\in A$, то для достаточно большого k и такого, что $k \ge n_0$, будем иметь $d(x,x_k) < \varepsilon/2$ и $d_H(A_k,A_n) < \varepsilon/2$ $(n \ge n_0)$. Это означает, что существует $x_n\in A_n$, для которого $d(x_k,x_n) < \varepsilon/2$, поэтому $d(x,x_n) < \varepsilon$ и, следовательно, $A \subset U_\varepsilon(A_n)$ для всех $n \ge n_0$.

Пусть $y\in A_n$ $(n \ge n_0$, отбрасывание конечного числа членов несущественно). Рассмотрим последовательность $\left\{\varepsilon/2^p\right\}_{p\in N}$: для $\varepsilon/2^1$ существует $k_1 = n$ такой, что для всех $m,n \ge k_1$ имеем $d_H(A_m,A_n) < \varepsilon/2$. Поэтому $d_H\left(A_{k_1},A_m\right) < \varepsilon/2$ для всех $m \ge k_1$. Для $\varepsilon/2^2$ существует k_2 $(k_1 < k_2)$ такой, что для всех $m,n \ge k_2$ имеем $d_H(A_m,A_n) < \varepsilon/2^2$. Поэтому $d_H\left(A_{k_2},A_m\right) < \varepsilon/2^2$ для всех $m \ge k_2$, …, для $\varepsilon/2^p$ существует k_p $(k_{p-1} < k_p)$ такой, что для всех $m,n \ge k_p$ имеем $d_H(A_m,A_n) < \varepsilon/2^p$. Поэтому $d_H\left(A_{k_p},A_m\right) < \varepsilon/2^p$ для всех $m \ge k_p$ и т. д. Это позволяет определить последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$, такую, что $y_k\in A_k$ (см. доказательство теоремы 3.1.1). Для всех $k < n$ члены y_k выбираем произвольно,

$y_n = y$. Если $k_1 < k < k_2$, то (используя $d_H\left(A_{k_1}, A_m\right) < \varepsilon/2$ для всех $m \ge k_1$) выбираем y_k так, чтобы $d\left(y_{k_1}, y_k\right) < \varepsilon/2$. Если $k_2 < k < k_3$, то (используя $d_H\left(A_{k_2}, A_m\right) < \varepsilon/2^2$ для всех $m \ge k_2$) выбираем y_k так, чтобы $d\left(y_{k_2}, y_k\right) < \varepsilon/2^2$, …, если $k_{p-1} < k < k_p$, то (используя $d_H\left(A_{k_p}, A_m\right) < \varepsilon/2^p$ для всех $m \ge k_p$) выбираем y_k так, чтобы $d\left(y_{k_p}, y_k\right) < \varepsilon/2^p$, и т. д.

Мы получили последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$, такую, что $y_k \in A_k$. По построению для всякого $\varepsilon/2^p$ существует k_p такой, что для всех $m,n \ge k_p$ $d\left(y_m, y_n\right) < \varepsilon/2^p$. Таким образом, последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$ — фундаментальная последовательность в полном метрическом пространстве X, и поэтому она сходится. Пусть $x = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$, тогда $x \in A$. Очевидно, $d\left(y, y_k\right) \le d\left(y_{k_1}, y_{k_p}\right) + d\left(y_{k_p}, y_k\right) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2^p < \varepsilon$ ($y_{k_1} = y_n = y$ и k_p фиксировано, $d\left(y_{k_1}, y_{k_p}\right) < \varepsilon/2$, $k_p > k_1$). Метрика $d(x,y)$ — непрерывная функция, поэтому $d\left(y, x\right) = \lim\limits_{k\to\infty} d\left(y, y_k\right) < \varepsilon$. Таким образом, $A_n \subset U_\varepsilon(A)$. Кроме того, $A \ne \varnothing$ (следует из того, что для всякого $y \in A_n$ существует $x \in A$, причем $d(y,x) < \varepsilon$).

Так как A_n — компакт, то A_n вполне ограниченно и, следовательно, является ограниченным подмножеством в X. Подмножество $U_\varepsilon(A_n)$ также ограниченно, и поэтому A — ограниченное подмножество в X

Докажем, что A замкнуто. Если $x \in \overline{A}$, то существует последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$ в A такая, что $d(x,y_n) < 1/2^n$, и для всякого $n \in N$ существует $x_n \in A_n$: $d(x_n,y_n) < d_H(A_n,A) + 1/2^n$. Тогда

$$d(x_n,x) \le d(x_n,y_n) + d(y_n,x) < d_H(A_n,A) + 1/2^n + 1/2^n,$$

что означает $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, x\right) = 0$, поэтому $x \in A$, т. е. $A = \overline{A}$. Таким образом мы доказали, что подмножество A ограниченно и замкнуто. Для случая $X = R^n$ это означает, что A — компакт, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ в метрическом пространстве $(\mathcal{K}(X),d_H)$.

В общем случае нужно доказать вполне ограниченность множества A. Пусть $\varepsilon > 0$, возьмем n таким, что $d_H(A_n,A) < \varepsilon/3$. Так как A_n — компакт, у него существует $\varepsilon/3$-сеть $\{y_1, y_2,\ldots, y_p\}$. Возьмем подмножество $\{x_1, x_2,\ldots, x_p\}\subset A$, причем $d(y_i,x_i) < \varepsilon/3$. Покажем, что $\{x_1, x_2,\ldots, x_p\}\subset A$ является ε-сеть. Если $x\in A$, так как $A \subset U_{\varepsilon/3}(A_n)$, то существуют $y\in A_n$ такой, что $d(x, y) < \varepsilon/3$, $y_i \in A_n$ такой, что $d(y, y_i) < \varepsilon/3$, и x_i такой, что $d(y_i, x_i) < \varepsilon/3$. Тогда $d(x, x_i) < \varepsilon$, и поэтому $\{x_1, x_2,\ldots, x_p\}\subset A$ — ε-сеть. Мы доказали, что подмножество A вполне ограниченно, а также, что множество A замкнуто в полном метрическом пространстве X и, следовательно, само является полным метрическим пространством. Это доказывает, что подмножество A — компакт в X.

Теорема 3.1.4 доказана.

В изучении фракталов эта теорема играет важную роль, так как многие фракталы являются неподвижными точками для сжимающих отображений вида $F: \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$, и в этом случае полнота пространства $\mathcal{K}(X)$ выступает на первый план.

Уже на примере Канторова множества, ковра Серпинского и некоторых других фракталов видно, что отображения вида $F: \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ строятся специальным образом.

Если $f: X \to X$, где (X,d) — метрическое пространство, сжимающее отображение, то существует $0 < r <1$ такое, что

$$d(f(x),f(y)) \le rd(x,y)$$

для всех $x,y \in X$.

Если (X,d) — полное метрическое пространство и $f: X \to X$ — сжимающее отображение, то по теореме о неподвижной точке существует единственная неподвижная точка отображения f, которую мы обозначим $\mathfrak{F}(f)$.

Лемма 3.1.1. Пусть f_i: X → X ((X,d) — метрическое пространство, i = 1,2,…,m) — семейство сжимающих отображений, тогда $F(A) = f_1(A)\cup f_2(A)\cup\ldots\cup f_m(A)$ — компакт в X для всякого компакта A в X.

Доказательство. Всякое сжимающее отображение является непрерывным, поэтому $f_1(A)$, $f_2(A)$, …, $f_m(A)$ — компакты в X. Тогда $F(A) = f_1(A)\cup f_2(A)\cup\ldots\cup f_m(A)$ — компакт в X.

Лемма 3.1.1 доказана.

Теорема 3.1.5. Пусть f_i: X → X ((X,d) — метрическое пространство, i = 1,2,…,m) — семейство сжимающих отображений и $r_1,r_2,..,r_m$ — соответствующие коэффициенты сжатия. Тогда отображение F: $\mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ будет сжимающим с коэффициентом сжатия $r = \max\{ r_1,r_2,..,r_m \}$.

Доказательство. Корректность отображения F: $\mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ следует из леммы 1. Пусть $A,B,C,D \in \mathcal{K}(X)$.

1. $s = d_H(A,B)$ и $\varepsilon > 0$. Если $x \in A$, тогда существует $y \in B$ такой, что $d(x,y) < s + \varepsilon$, и поэтому $d(f_i(x), f_i(y)) < r_i(s + \varepsilon)$. Тогда $f_i(A) \subset U_{r_i(s+\varepsilon)}(f_i(B))$. Аналогично получим $f_i(B) \subset U_{r_i(s+\varepsilon)}(f_i(A))$. Таким образом, $d_H(f_i(A), f_i(B)) \le r_i\, d_H(A,B)$.

2. $p = d_H(A,C)$, $q = d_H(B,D)$ и $\varepsilon > 0$. Имеем $A \subset U_{p+\varepsilon}(C)$ и $B \subset U_{q+\varepsilon}(D)$, тогда $A\cup B \subset U_{p+\varepsilon}(C)\cup U_{q+\varepsilon}(D) \subset U_t(C\cup D)$. Аналогично получим $C\cup D \subset U_{p+\varepsilon}(A)\cup U_{q+\varepsilon}(B) \subset U_t(A\cup B)$, где $t = \max\{p + \varepsilon, q + \varepsilon\}$. Таким образом, $d_H(A\cup B, C\cup D) \le \max\{ d_H(A,C), d_H(B,D)\}$. Для любых $A, B \in \mathcal{K}(X)$ по индукции будем иметь

$$d_H(F(A),F(B)) < d_H\left(\bigcup_{i=1}^{m} f_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} f_i(B)\right) \le \max_{1\le i\le m}\{d_H(f_i(A), f_i(B))\}.$$

Но из вышеприведенного пункта 1 следует, что

$$\max_{1\le i\le m}\{d_H(f_i(A), f_i(B))\} \le \max\ \{ r_1,r_2,..,r_m \}\ d_H(A,B).$$

Объединяя эти формулы, получим

$$d_H(F(A),F(B)) \le r\ d_H(A,B).$$

Таким образом, отображение F: $\mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ является сжимающим отображением с коэффициентом сжатия r.

Теорема 3.1.5 доказана.

З а м е ч а н и е. Таким образом, неподвижная точка сжимающего отображения F: $\mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ может быть получена как предел последовательности $K, F(K), F^2(K), \ldots, F^n(K)$ … (где K — произвольный компакт в X) в метрическом пространстве $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

З а м е ч а н и е. Для множества Кантора мы построили отображение F: $\mathcal{K}([0,1]) \to \mathcal{K}([0,1])$ такое, что $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$ для всякого компакта $A \subset [0,1]$, где $f_1(x) = x/3$ и $f_2(x) = x/3 + 2/3$ для всякого $x \in [0,1]$. Отображения f_1 и f_2 являются сжимающими с коэффициентом 1/3. Поэтому по теореме 3.1.5 отображение F: $\mathcal{K}([0,1]) \to \mathcal{K}([0,1])$ является сжимающим с коэффициентом 1/3 и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку — множество Кантора.

***Определение* 3.1.2.** Пусть f_i: X → X ((X,d) — метрическое пространство, i = 1,2,…,m) — семейство сжимающих отображений, тогда $F = \{f_1, f_2, .., f_m\}$ называется системой итерированных функций (СИФ), или отображением Хатчинсона [14].

***Определение* 3.1.3.** Пусть (X,d) — метрическое пространство, отображение f: X → X называется подобием, если существует такое r > 0, что для всех $x,y \in X$: $d(f(x),f(y)) = r d(x,y)$. Число r называется коэффициентом подобия. Если r < 1, то подобие будем называть сжатием.

З а м е ч а н и е. Каждая из функций $f_1(x) = x/3$ и $f_2(x) = x/3 + 2/3$ является сжатием с коэффициентом 1/3.

Определение **3.1.4.** Пусть (X_1,d_1), (X_2,d_2) — метрические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется отображением ограниченного возрастания (Липшициевым), если существует такое $s > 0$, что для всех $x,y \in X_1$: $d_2(f(x),f(y)) \le sd_1(x,y)$. Число s называется коэффициентом (постоянной) Липшица.

Определение **3.1.5.** Пусть (X_1,d_1), (X_2,d_2) — метрические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется отображением ограниченного убывания, если существует такое $r > 0$, что для всех $x,y \in X_1$: $d_2(f(x),f(y)) \ge rd_1(x,y)$.

Определение **3.1.6.** Пусть (X_1,d_1), (X_2,d_2) — метрические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется отображением ограниченного искажения, если существуют такие $r,s > 0$, что для всех $x,y \in X_1$: $rd_1(x,y) \le d_2(f(x),f(y)) \le sd_1(x,y)$.

З а м е ч а н и е. Если $f\colon X_1 \to X_2$ является отображением ограниченного убывания при $x,y \in X_1$, таких, что $x \ne y$, то $f(x) \ne f(y)$. Таким образом, отображение $f\colon X_1 \to X_2$ является инъекцией.

Определение **3.1.7.** Пусть (X_1,d_1), (X_2,d_2) — метрические пространства. Биективное отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется билипшициевым (липеоморфизмом), если существуют такие $r,s > 0$, что для всех $x,y \in X_1$: $rd_1(x,y) \le d_2(f(x),f(y)) \le sd_1(x,y)$.

З а м е ч а н и е. Липеоморфизм еще называют метрическим изоморфизмом. Если отображение $f\colon X_1 \to X_2$ — липеоморфизм, то $f\colon X_1 \to X_2$ и $f^{-1}\colon X_2 \to X_1$ являются отображениями Липшица, и поэтому они оба равномерно непрерывные и, следовательно, непрерывные. Тогда $f\colon X_1 \to X_2$ — гомеоморфизм.

Пусть $f\colon X_1 \to X_2$ — отображение Липшица. Обозначим K множество всех его констант Липшица. Если $r_0 = \inf K$, тогда существует последовательность $\{r_k\}_{k\in N}$ в K такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} r_n = r_0$. Будем иметь $d_2(f(x),f(y)) \le r_k\, d_1(x,y)$ для всех $x,y \in X_1$. Тогда $d_2(f(x),f(y)) \le r_0 d_1(x,y)$ для всех $x,y \in X_1$. Таким образом, $r_0 \in K$ и является наименьшим элементом множества K. Его обозначим $\mathcal{L}(f)$. Очевидно, что $\mathcal{L}(f) > 0$.

Задание. Доказать, что $\mathcal{L}(f) = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{d_2(f(x), f(y))}{d_1(x, y)}$.

Если $(X_1,d_1) = (X_2,d_2)$ и $\mathcal{L}(f) < 1$, тогда $f\colon X_1 \to X_2$ — сжимающее отображение. Отображения подобия являются Липшициевыми отображениями.

***Определение* 3.1.8.** Пусть $f_i\colon X \to X$ ((X,d) — метрическое пространство, $i = 1,2,\ldots,m$ и $m > 1$), семейство подобий и $r_1,r_2,..,r_m$ — соответствующие коэффициенты подобия, причем $r_1 < 1$, $r_2 < 1,..$, $r_m < 1$. Непустое компактное подмножество $A \subset X$ называется самоподобным, если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} f_i(A)$.

Задание. Доказать, что $\mathfrak{F}(f_1), \mathfrak{F}(f_2),\ldots, \mathfrak{F}(f_m) \in A$.

Задание. Найти систему итерированных функций (СИФ) для единичного квадрата на плоскости.

Замечание. Самоподобное множество — неподвижная точка отображения (Хатчинсона) $F\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$, соответствующего системе итерированных функций $F = \{ f_1,f_2,..,f_m\}$.

Примеры самоподобных множеств: множество Кантора, ковер Серпинского, снежинка Коха и многие другие.

Замечание. Самоподобное множество состоит из «миниатюрных» самих себя. Следует иметь в виду, что множество X может быть самоподобным относительно разных СИФ.

Пример. $X = [0,1]$. СИФ состоит из двух функций — $f_1(x) = x/2$ и $f_2(x) = x/2 + 1/2$. Тогда $X = f_1(X) \cup f_2(X)$.

Но можно в качестве СИФ взять три функции — $f_1(x) = x/3$, $f_2(x) = x/3 + 1/3$ и $f_3(x) = x/3 + 2/3$. Тогда $X = f_1(X) \cup f_2(X) \cup f_3(X)$.

Во многих приложениях вопрос о связности самоподобного множества очень важен. Мы ограничимся случаем $X = R^n$.

Определение **3.1.9.** Множество $\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ подмножеств в R^n называется цепью, если для любых двух его элементов A_j, A_k существует $\left\{A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_p}\right\}\subset\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ такое, что все множества $A_j\cap A_{i_1}$, $A_{i_1}\cap A_{i_2},\dots,$ $A_{i_p-1}\cap A_{i_p}$, $A_{i_p}\cap A_k$ не пусты. В этом случае будем говорить, что множества A_j, A_k соединяются цепью [5].

Определение **3.1.10.** Множество $A\subset R^n$ называется ε-цепью, если для любых $x,y\in A$ существует $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}\subset A$ такое, что $\|x-a_1\|\le\varepsilon$, $\|a_1-a_2\|\le\varepsilon,\dots,\|a_{m-1}-a_m\|\le\varepsilon$, $\|a_m-y\|\le\varepsilon$.

Лемма 3.1.2. Если множество $\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ — цепь и каждый его элемент — ε-цепь, то $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m$ — ε-цепь.

Доказательство. Пусть $A = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m$. Если $x,y\in A$, то либо $x,y\in A_i$, которое является ε-цепью, либо $x\in A_j$ и $y\in A_k$.

По условию $\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ — цепь, поэтому существует $\left\{A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_p}\right\}\subset\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ такое, что все множества $A_j\cap A_{i_1}$, $A_{i_1}\cap A_{i_2},\dots,$ $A_{i_p-1}\cap A_{i_p}$, $A_{i_p}\cap A_k$ не пусты. Это условие позволяет построить $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}\subset A$ такое, что $\|x-a_1\|\le\varepsilon$, $\|a_1-a_2\|\le\varepsilon,\dots,\|a_{m-1}-a_m\|\le\varepsilon$, $\|a_m-y\|\le\varepsilon$. Таким образом, множество A — ε-цепь.

Лемма 3.1.2 доказана.

Лемма 3.1.3. Если $A\subset R^n$ — ε-цепь и $f: R^n\to R^n$ — сжатие с коэффициентом s, то f(A) — εs-цепью.

Доказательство. Пусть $f(x),f(y)\in f(A)$. По условию A является ε-цепью, поэтому существует $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}\subset A$ такое, что $\|x-a_1\|\le\varepsilon$, $\|a_1-a_2\|\le\varepsilon,\dots,\|a_{m-1}-a_m\|\le\varepsilon$, $\|a_m-y\|\le\varepsilon$. Тогда $\|f(x)-f(a_1)\|=s\|x-a_1\|\le\varepsilon s$, $\|f(a_1)-f(a_2)\|=s\|a_1-a_2\|\le\varepsilon s$, $\dots,\|f(a_m)-f(y)\|=s\|a_m-y\|\le\varepsilon s$. Таким образом, множество f(A) — εs-цепь.

Лемма 3.1.3 доказана.

Теорема 3.1.6. Пусть A — самоподобное множество, определяемое системой итерированных функций $F = \{f_1, f_2, .., f_m\}$, тогда эквивалентны следующие условия:

1) множество A связно;

2) множество $\{f_1(A), f_2(A), \ldots, f_m(A)\}$ является цепью.

Доказательство. Пусть множество A связно. Так как A — самоподобное множество, определяемое системой итерированных функций $F = \{f_1, f_2, .., f_m\}$, тогда $f_1(A) \cup f_2(A) \cup \ldots \cup f_m(A) = A$. Отображения $f_1, f_2, .., f_m$ — сжатия, и поэтому они непрерывны. Тогда множества $f_1(A)$, $f_2(A)$, …, $f_m(A)$ связны и компактны. Предположим, что множества $f_1(A)$, $f_2(A)$, …, $f_m(A)$ не образуют цепь, тогда существуют два множества — $f_j(A)$ и $f_k(A)$, которые нельзя соединить цепью. Это позволяет построить разбиение связного множества A на два замкнутых непересекающихся множества, что противоречит связности множества A.

Пусть $\{f_1(A), f_2(A), \ldots, f_m(A)\}$ — цепь. Покажем, что тогда самоподобное множество $A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \ldots \cup f_m(A)$ является связным. Если A несвязно, то существуют два непустых компактных подмножества — $U, V \subset A$, таких, что $U \cup V = A$ и $U \cap V = \varnothing$. Возьмем $\mu = \min\limits_{x \in U, y \in V} \| x - y \| > 0$. Пусть $0 < \varepsilon < \mu$ и пусть r — наибольшее из коэффициентов $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Множество A, очевидно, — $\delta(A)$-цепь. По лемме 3.1.2 каждое из множеств $f_1(A), f_2(A), \ldots, f_m(A)$ — $r\delta(A)$-цепь. По лемме 3.1.1 множество $A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \ldots \cup f_m(A)$ — $r\delta(A)$-цепь. Используя самоподобие, легко получить, что множество A — $r^p\delta(A)$-цепь для любого натурального числа p, и поэтому число $r^p\delta(A)$ можно сделать таким, что $r^p\delta(A) < \mu$. Противоречие.

Теорема 3.1.6 доказана.

Пример. Множество Кантора. Его СИФ состоит из двух функций $f_1(x) = x/3$ и $f_2(x) = x/3 + 2/3$. Тогда $f_1(\mathfrak{C}) \subset [0,1/3]$, но $f_2(\mathfrak{C}) \subset [2/3,1]$, поэтому множество $\mathfrak{C}$ несвязно.

Конечно, в общем случае проверить, является ли семейство $f_1(A), f_2(A), \ldots, f_m(A)$ цепью, очень трудно. Существует один эффективный способ проверить это. Для этого нужно использовать формулу Вильямса.

Теорема 3.1.7. Пусть A — самоподобное множество, определяемое системой итерированных функций $F = \{f_1, f_2, .., f_m\}$, тогда

$$A = \overline{\bigcup_{i_1, i_2, \ldots i_k} \mathfrak{F}\left(f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \ldots \circ f_{i_k}\right)},$$

где $\mathfrak{F}\left(f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \ldots \circ f_{i_k}\right)$ — неподвижная точка отображения $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \ldots \circ f_{i_k}$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Замечание. Настоятельно рекомендуем провести доказательство, так как, на наш взгляд, оно позволяет глубже взглянуть на то, как устроены самоподобные множества [17].

Вот простой пример того, как, используя эту формулу, можно доказать связность самоподобного множества. Рассмотрим СИФ, определяющую ковер Серпинского: это три отображения f_i: $R^2 \to R^2$ ($i = 1,2,3$), такие, что

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 + 1/2 \\ y/2 \end{pmatrix}, f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 + 1/4 \\ y/2 + \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}.$$

Для ковра Серпинского $\mathcal{S} = f_1(\mathcal{S}) \cup f_2(\mathcal{S}) \cup f_3(\mathcal{S})$. Очевидно, что $\mathfrak{F}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{F}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{F}(f_3) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Тогда из формулы Вильямса следует, что, во-первых, $\mathfrak{F}(f_1)$, $\mathfrak{F}(f_2)$, $\mathfrak{F}(f_3) \in \mathcal{S}$. Во-вторых, $f_2(\mathfrak{F}(f_1)) \in \mathcal{S}_2$, $f_1(\mathfrak{F}(f_2)) \in \mathcal{S}_1$; $f_2(\mathfrak{F}(f_3)) \in \mathcal{S}_2$, $f_3(\mathfrak{F}(f_2)) \in \mathcal{S}_3$. Но по построению $f_2(\mathfrak{F}(f_1)) = f_1(\mathfrak{F}(f_2))$ и $f_2(\mathfrak{F}(f_3)) = f_3(\mathfrak{F}(f_2))$. Таким образом, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \varnothing$ и $\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 \neq \varnothing$, тогда по теореме 3.1.6 множество $\mathcal{S}$ связно. Конечно, это простой пример, но он показывает, что, зная только СИФ, можно определить, связно ли самоподобное множество, определяемое этой СИФ.

***Определение* 3.1.11.** Пусть f_i: X → X ((X,d) — метрическое пространство, i = 1,2,…,m и m > 1) — семейство сжатий (СИФ) с коэффициентами $r_1, r_2, .., r_m$. Вещественное число d называется размерностью подобия самоподобного множества A, определяемого этой СИФ, если оно является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^d = 1$$

и обозначается $\dim_S A$.

Лемма 3.1.4. Число $\dim_S A$ определено однозначно.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i^x$ (x > 0). Имеем $\varphi(+0) = m \geq 2$ и $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Ее производная $\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i^x \log r_i < 0$, поэтому функция φ(x) монотонно убывает. Тогда по теореме о промежуточном значении существует единственное значение d, такое, что φ(d) = 1 [8].

Лемма 3.1.4 доказана.

Пример. Для множества Кантора СИФ определяется двумя сжатиями с коэффициентами 1/3, поэтому $\dim_S \mathfrak{C}$ = log2/log3. Так как $(1/3)^d + (1/3)^d = 1$. Для ковра Серпинского — тремя сжатиями с коэффициентами 1/2, поэтому $\dim_S \mathcal{S}$ = log3/log2. Так как $(1/2)^d + (1/2)^d + (1/2)^d = 1$. Для кривой Коха — двумя сжатиями с коэффициентами $1/\sqrt{3}$, поэтому $\dim_S \mathfrak{K}$ = log4/log3. Так как $\left(1/\sqrt{3}\right)^d + \left(1/\sqrt{3}\right)^d = 1$.

Задание. Для отрезка [0,1] существует СИФ с двумя сжатиями с коэффициентами 2/3. Найти $\dim_S$ [0,1] для такой СИФ.

З а м е ч а н и е. Как было указано выше, для отрезка [0,1] существуют и другие СИФ. Поэтому, вычисляя $\dim_S [0,1]$, мы получим разные числа, т. е. $\dim_S X$ определяется его СИФ, которая, конечно, сама определяет множество X.

Размерность подобия может быть вычислена только для очень узкого класса множеств.

З а д а н и е. Для отрезка [0,1] найти СИФ с двумя сжатиями, такими, что $\dim_S [0,1] = 2$ для такой СИФ.

Существует важная связь между $\dim_H X$ и $\dim_S X$.

Теорема А. Пусть X — самоподобное множество (конечно, определяемое СИФ), тогда $\dim_H X \le \dim_S X$.

Доказательство. См. §3.

Вычисляя $\dim_S [0,1]$ для различных СИФ и сравнивая ее с $\dim_H [0,1]$, мы видим, что в одних случаях $\dim_H X \le \dim_S X$, а в других — $\dim_H X = \dim_S X$! Что выделяет СИФ для случая $\dim_H X = \dim_S X$. Здесь следует иметь в виду, что в этом случае $\dim_H X$ определяется самим множеством.

Определение **3.1.12.** Система итерированных функций $F = \{f_1, f_2, .., f_m\}$(СИФ), определенная на евклидовом пространстве (R^n, d), удовлетворяет условию открытого множества, если существует непустое, открытое и ограниченное множество $U \subset R^n$, такое, что $f_i(U) \subset U$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$) и $f_i(U) \cap f_j(U) = \varnothing$ при $i \ne j$ [21].

З а д а н и е. Для отрезка [0,1] найти СИФ, которое удовлетворяют условию открытого множества.

Теорема В. Пусть X — самоподобное множество (конечно, определяемое СИФ) удовлетворяет условию открытого множества, тогда $\dim_H X = \dim_S X$.

Доказательство. См. §3.

Теорема 3.1.8. Пусть (X,d) — компактное метрическое пространство, тогда $(\mathcal{K}(X), d_H)$ — компактное метрическое пространство.

Доказательство. Так как X — компакт, то для всякого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть, $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Точки

$\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_m\} \in \mathcal{K}(X)$. Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$, то есть множества вида $\{x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k}\}$, где $1 \le i_1 < i_2 <,\ldots, < i_k \le m$. Все эти множества являются элементами множества $\mathcal{K}(X)$. Покажем, что они образуют ε-сеть в $\mathcal{K}(X)$. Пусть A — компакт в X, тогда существует минимальное число шаров $B_\varepsilon(x_{i_1})$, $B_\varepsilon(x_{i_2}),\ldots$, $B_\varepsilon(x_{i_k})$, покрывающих компакт A. Их объединение — ε-окрестность множества $\{x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k}\}$, которую мы обозначим $U_\varepsilon\{x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k}\}$. По построению $A \subset U_\varepsilon\{x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k}\}$ и $\{x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k}\} \subset U_\varepsilon(A)$. Тогда расстояние в метрике d_H между множествами A и $\{x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k}\}$ меньше ε.

Так как X — компакт, то X — полное метрическое пространство. Тогда по теореме 3.1.4 $\mathcal{K}(X)$ — полное метрическое пространство, что означает $\mathcal{K}(X)$ — компакт.

Теорема 3.1.8 доказана.

Таким образом, при переходе от X к $\mathcal{K}(X)$ сохраняется не только полнота, но и компактность!

Пусть $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение, где X,Y — компакты. Определим отображение $\mathcal{K}(f)\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ следующим образом: если $A\in\mathcal{K}(X)$, то $(\mathcal{K}(f))(A) = f(A)$.

Теорема 3.1.9. Пусть $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение, где X,Y — компакты. Тогда отображение $\mathcal{K}(f)\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ является непрерывным.

Доказательство. Докажем непрерывность отображения $\mathcal{K}$(f): $\mathcal{K}$(X) → $\mathcal{K}$(Y) в точке A∈ $\mathcal{K}$(X). Отображение f: X→Y равномерно непрерывно. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $d(x,y) < \delta$, то $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Если a∈A, тогда для всякого x ∈ X, такого, что $d(a,x) < \delta$, будем иметь $d(f(a),f(x)) < \varepsilon$. Рассмотрим δ-окрестность U_δ (A) множества A. Пусть компакт Z в X такой, что $Z \subset U_\delta$ (A) и $A \subset U_\delta$ (Z), тогда $f(Z) \subset U_\varepsilon$ (f(A)) и $f(A) \subset U_\varepsilon$ (f(Z)). Таким образом, для всех $Z \in \mathcal{K}(X)$, таких, что $d_H(A, Z) < \delta$, мы получили $d_H(f(A), f(Z)) < \varepsilon$.

То есть отображение $\mathcal{K}$(f): $\mathcal{K}$(X) → $\mathcal{K}$(Y) непрерывно в точке A∈ $\mathcal{K}$(X).

Замечание. Здесь следует иметь в виду, что $A \subset X$ — компакт и $A \in \mathcal{K}(X)$. Кроме того, символом d_H мы обозначаем метрику как в $\mathcal{K}$(X), так и в $\mathcal{K}$(Y).

Теорема 3.1.9 доказана.

Пусть $\mathcal{MK}$ — класс всех компактных метрических пространств. Для любых X,Y ∈ $\mathcal{MK}$ определим Mor (X,Y) как множество всех непрерывных отображений из X в Y. Таким образом, мы получили категорию [14; 15].

«Переход» от X к $\mathcal{K}$(X) и от f: X→Y к $\mathcal{K}$(f): $\mathcal{K}$(X) → $\mathcal{K}$(Y) определяет функтор из $\mathcal{MK}$ в $\mathcal{MK}$ [15; 16].

Для метрических пространств непрерывные отображения в качестве морфизмов не учитывают структуру метрического пространства.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс всех метрических пространств. Для любых X,Y $\in \mathcal{M}$ определим Mor (X,Y) как множество всех отображений Липшица из X в Y.

Задание. Получим ли мы таким образом категорию?

Теорема 3.1.10. Пусть (X,d_x) и (Y,d_Y) — метрические пространства. Если последовательность $\{f_n\}_{n\in N}$ сходится к отображению f в топологии равномерной сходимости на компактах, то для всякого компакта $A \subset X$ последовательность $\{f_n(A)\}_{n\in N}$ сходится к f(A) в метрике Хаусдорфа на $\mathcal{K}(Y)$.

Доказательство. Как известно [6], множества вида

$$\mathcal{U}_{A,\varepsilon}(f) = \left\{g \in C^0(X,Y) : d_Y(f(x),g(x)) < \varepsilon \quad \text{для всякого } x \in A\right\}$$

для произвольного компакта A и произвольного $\varepsilon > 0$ образуют фундаментальную систему окрестностей отображения f в топологии равномерной сходимости на компактах. По условию существует n_0 такое, что $d_Y(f(x),f_n(x)) < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$ и всех $x \in A$. Возьмем $U_\varepsilon(f(A))$ (ε — окрестность компакта (f(A)), тогда для всех $n \geq n_0$ будем иметь $f_n(A) \subset U_\varepsilon(f(A))$ и $f(A) \subset U_\varepsilon(f_n(A))$. Таким образом, в метрическом пространстве $(\mathcal{K}(Y),d_H)$ последовательность $f_n(A)\}_{n\in N}$ сходится к f(A).

Теорема 3.1.10 доказана.

Замечание. Последовательность $\mathcal{K}(f_n)$ сходится к $\mathcal{K}(f)$ поточечно.

Дополнение. Компактные метрические пространства

Задание. Доказать, что если последовательность Коши $\{x_n\}_{n\in N}$ в метрическом пространстве (X,d) содержит сходящуюся к b подпоследовательность, то сама последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ сходится к b.

Теорема 3.1.11. Пусть (X,d) — метрическое пространство, тогда эквивалентны следующие условия:

1) X компактно;

2) всякая бесконечная последовательность в X имеет по крайней мере одну предельную точку;

3) X является полным и вполне ограниченным.

Доказательство. Пусть X — компактное метрическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N}$ последовательность его элементов. Положим $P_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, \ldots\}}$. Покажем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$. Пусть это не так, тогда семейство множеств $\{U_n\}_{n\in N}$, где $U_n = X \setminus P_n$, образует открытое покрытие метрического пространства X. В силу компактности метрического пространства X у этого покрытия существует конечное подпокрытие $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}$. Но тогда $P_{n_1} \cap P_{n_2} \cap \ldots \cap P_{n_k} = \varnothing$. Возьмем $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ и получим $P_m \subset P_{n_1} \cap P_{n_2} \cap \ldots \cap P_{n_k}$ — противоречие. Таким образом, существует $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$, она является предельной точкой последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$.

Пусть всякая последовательность в X имеет по крайней мере одну предельную точку. Возьмем последовательность Коши $\{x_n\}_{n\in N}$ в X, тогда она сходится, следовательно, метрическое пространство X полно.

Пусть X не является вполне ограниченным. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что X нельзя покрыть конечным числом шаров радиуса β. Один шар радиуса β с центром в точке x_1 не покрывает пространство X, тогда существует точка x_2, не принадлежащая этому шару, для которой $d(x_1,x_2) \geq \beta$. Два шара с центрами в точках x_1 и x_2 радиусов β не покрывают пространство X, тогда существует точка x_3, не принадлежащая объединению этих шаров, для которой $d(x_1,x_3) \geq \beta$ и $d(x_2,x_3) \geq \beta$. Поступая аналогично, получим последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$, для которой $d(x_i,x_n) \geq \beta$ для $i < n$. Эта последовательность не может иметь сходящуюся подпоследовательность. (*Почему?*) Противоречие. Таким образом, X вполне ограниченно.

Пусть X полное и вполне ограниченное и $\{U_i\}_{i\in N}$ — открытое покрытие пространства X, такое, что никакое его конечное подсемейство не покрывает X. Тогда существует шар B_1 радиуса 1/2, такой, что никакое конечное подсемейство покрытия $\{U_i\}_{i\in N}$ не покрывает его. Пусть существует шар B_{n-1} радиуса $1/2^{n-1}$, такой, что никакое конечное подсемейство покрытия $\{U_i\}_{i\in N}$ не покрывает его. Так как X вполне ограниченно, то возьмем его конечное покрытие (C_k) $(1\le k \le m)$ шарами радиуса $1/2^n$. Среди шаров C_k, имеющих не пустое пересечение с B_{n-1}, найдется по крайней мере один шар $B_n = C_{k_0}$, который не покрывается никаким конечным подсемейством покрытия $\{U_i\}_{i\in N}$. Таким образом мы построим последовательность шаров B_n (радиус B_n равен $1/2^n$) и последовательность $\{x_n\}$ — их центров.

Пусть x_n — центр шара B_n и x_{n-1} — центр шара B_{n-1}. Существует $a \in B_{n-1}\cap C_{k_0}$, тогда $d(x_{n-1}, x_n) \le 1/2^{n-1} + 1/2^n < 1/2^{n-2}$. Тогда для $q > p \ge n$ получим $d(x_p, x_q) \le d(x_p, x_{p+1}) + \ldots + d(x_{q-1}, x_q) <$ $< 1/2^{p-1} + \ldots + 1/2^{q-2} < 1/2^{n-2}$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ является последовательностью Коши в X, и поэтому она сходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и U_{i_0} — такой элемент покрытия $\{U_i\}_{i\in N}$, что $a \in U_{i_0}$. Существует $r > 0$ такое, что шар $B_r(a) \subset U_{i_0}$. Из определения точки a следует, что существует x_n такой, что $d(a, x_n) < 1/2^n < r/2$. Тогда $B_n \subset B_r(a) \subset U_{i_0}$. Противоречие, так как никакое конечное подсемейство покрытия $\{U_i\}_{i\in N}$ не покрывает B_n.

Теорема 3.1.11 доказана.

Следует иметь в виду, что всякое вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно [8].

§2. Топологические размерности

Размерность топологического пространства — важная его характеристика [12]. В дальнейшем под словом «пространство» будет пониматься метрическое пространство со счетным базисом.

***Определение* 3.2.1.** Пространство называется нульмерным, если существует базис, состоящий из его открыто-замкнутых подмножеств.

Пример. Пусть $A = \{x_1,x_2,\ldots,x_k\} \subset R^n$, наделим множество A индуцированной метрикой. Возьмем $\varepsilon = \min\limits_{i\neq j}\left\| x_i - x_j \right\|$. Тогда $\{x_i\} = B_{\varepsilon/2}(x_i)$ и $\{x_i\} = \overline{B}_{\varepsilon/2}(x_i)$. Таким образом, множества $\{x_i\}$ — открыто-замкнутые, они образуют базис топологии на A.

Определение 3.2.1 очевидно эквивалентно тому, что каждая точка пространства имеет фундаментальную систему окрестностей, состоящую из открыто-замкнутых подмножеств.

Пример. Множество Q в p-адической топологии — нульмерное, так как все шары в Q открыто-замкнуты.

Пример. Множество Кантора является нульмерным. Пусть $x\in\mathfrak{C}$ и $x\in(a,b)$. Существует n такое, что $x\in I_n^k \subset (a,b)$, поэтому есть интервал $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ и $x\in (\alpha,\beta)$, кроме того, $(\alpha,\beta) \cap \mathfrak{C} = \varnothing$.

Задание. $A \subset R^n$ — счетное подмножество (в индуцированной топологии). Доказать, что A — нульмерное.

Лемма 3.2.1. Пусть f: $X\to Y$ — гомеоморфизм, причем X — нульмерное пространство. Тогда Y также нульмерно.

Доказательство. Прообраз относительно отображения f открытого (замкнутого) множества открыт (замкнут).

Лемма 1 доказана.

Теорема 3.2.1. Топологическое пространство R (в эвклидовой топологии) не является нульмерным.

Доказательство. Пусть $A \subset R$, причем $A \neq \varnothing$ и $A \neq R$. Так как R связно, множество A имеет непустую границу, это означает, что множество A не открыто-замкнутое. Таким образом, в R единственными открыто-замкнутыми множествами являются только $\varnothing$ и R. Следовательно, множество R не нульмерное.

Теорема 3.2.1 доказана.

Следствие. Отрезок $[a,b] \subset R$ не является нульмерным.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Используя понятие размерности, каждому пространству X поставим в соответствие число из множества $\{-1,0,1,2,\ldots,\infty\}$, которое обозначим ind X.

***Определение* 3.2.2.** Если $X = \varnothing$, то $\text{ind } X = -1$. Если $k \geq 0$, то будем говорить, что $\text{ind } X \leq k$, если существует (открытый) базис $\{W\}$, такой, что $\text{ind Gr } W \leq k-1$. И будем говорить, что $\text{ind } X = k$, если $\text{ind } X \leq k$ и $\text{ind } X \leq k-1$ ложно. Наконец, $\text{ind } X = \infty$, если $\text{ind } X \leq k$ ложно для всякого k.

Замечание. ind X называется малой индуктивной размерностью пространства X.

Теорема 3.2.2. $\text{ind } R = 1$.

Доказательство. Уже доказано, что $\text{ind } R > 0$. Пусть $x \in R$, тогда семейство $\{B_r(x)\}$ — фундаментальная система окрестностей точки x. Причем $\text{Gr } B_r(x) = \{x - r, x + r\}$, но это множество нульмерно. Следовательно, $\text{ind } R \leq 1$. Таким образом, $\text{ind } R = 1$.

Теорема 3.2.2 доказана.

Теорема 3.2.3. Пусть X,Y — пространства и $f: X \to Y$ — гомеоморфизм. Тогда $\text{ind } X = \text{ind } Y$.

Доказательство. Индукцией по размерности. Если $\text{ind } X = -1$, то $X = \varnothing$. Тогда $Y = \varnothing$.

Пусть теорема справедлива для всех пространств с $\text{ind } X \leq n$. Имеем гомеоморфизм $f: X \to Y$, причем $\text{ind } X = n + 1$. По определению в X существует базис $\{W\}$, такой, что $\text{ind Gr } W \leq n$.

Так как f: X→Y — гомеоморфизм, то по теореме об инвариантности области [12] семейство {f(W)} — базис в Y, кроме того, $f|_{\mathrm{GrW}}: \mathrm{GrW} \to f(\mathrm{GrW})$ — гомеоморфизм, для всякого базисного множества W. Так как ind Gr W ≤ n, то по индуктивному предположению ind f(Gr W) ≤ n. Тогда по определению малой индуктивной размерности ind Y ≤ n. Случай ind Y ≤ n невозможен, так как тогда ind X ≤ n. Таким образом, ind Y = n + 1.

Теорема 3.2.3 доказана.

Теорема 3.2.4. Пусть X — пространство и A — его подпространство, тогда ind A ≤ ind X.

Доказательство. Будем считать, что ind X < ∞.

Для X = ∅ теорема очевидно справедлива. Пусть теорема справедлива, если ind X ≤ n. Возьмем пространство X с ind X = = n + 1 и его подпространство A. Возьмем точку x ∈ A и ее окрестность U (в A). Тогда $U = U' \cap A$, где U' открыто в X. Так как ind X = n + 1 и $x \in U'$, то существует множество V' из фундаментальной системы окрестностей точки x (в X), такое, что $V' \subset U'$ и $\mathrm{ind\ Gr}\,V' \leq n$. Пусть $V = V' \cap A$, тогда $V \subset U$ и $\mathrm{Gr}\,V \subset \mathrm{Gr}\ V'$ (здесь Gr V — граница множества V в A и Gr V' — граница множества V' в X). Тогда ind $\mathrm{Gr}\,V \leq n$, поэтому ind A ≤ n.

Теорема 3.2.4 доказана.

Пример. ind $\mathcal{S}$ = 1 (здесь $\mathcal{S}$ — ковер Серпинского). По построению отрезок $[0,1] \subset \mathcal{S}$, поэтому ind $\mathcal{S} \geq 1$. Пусть $x \in \mathcal{S}$ и $B_r(x)$, тогда существует $T_n^i \subset B_r(x)$ ($x \in T_n^i$) и легко построить окрестность U(x) точки x, такую, что $U(x) \subset B_r(x)$ и Gr U(x) пересекается с $\mathcal{S}$ только по вершинам треугольника T_n^i (рис. 3.1). Следовательно, ind $\mathcal{S} \leq 1$, поэтому ind $\mathcal{S} = 1$.

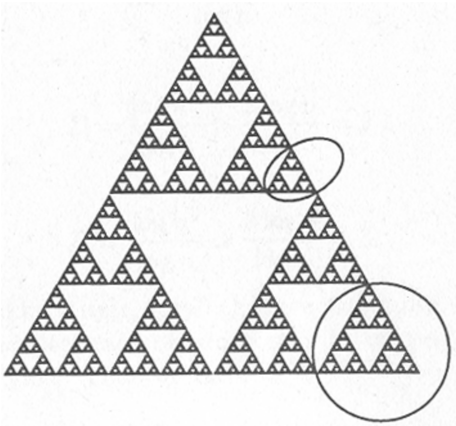


Рис. 3.1

Вот полезное свойство размерности подпространств.

Лемма 3.2.2. Пусть Y — подпространство пространства X. Тогда ind Y $\le$ n в том и только в том случае, если для всякой $x \in Y$ существует базис $\mathcal{B}$ (окрестностей точки x) в X такой, что для всякого $W \in \mathcal{B}$ ind $(W \cap Y) \le n-1$.

Доказательство. См. работу [12].

Теорема 3.2.5. Пусть A,B — подмножества в пространстве X. Тогда ind $(A \cup B) \le 1+$ ind A + ind B.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по m + n, где m = ind A, а n = ind B.

Если $m + n = -2$, тогда $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$, поэтому получим ind $(A \cup B) = 1 + (-1) + (-1) = 1$. Пусть ind A= m, а ind B = n. Будем считать, что утверждение верно для одного из двух случаев: ind A$\le$ m и ind B $\le$ n–1; ind A$\le$ m–1 и ind B $\le$ n.

Пусть $x \in A \cup B$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x \in A$. Пусть U — открытая окрестность точки x в X. Тогда существует открытая окрестность V точки x в X такая, что $V \subset U$

и ind (Gr $V \cap A$) $\leq$ m–1. Имеем Gr $V \cap B \subset B$ и ind (Gr $V \cap B$) $\leq$ n. По предположению индукции ind(Gr $V \cap (A \cup B)$) $\leq$ m+n.

Таким образом, ind $(A \cup B) \leq 1+$ ind A + ind B.

Теорема 3.2.5 доказана.

Следствие. Пусть Y_1, $Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ — нульмерные подпространства пространства X. Тогда, $\operatorname{ind} \bigcup_{i=1}^{n+1} Y_i \leq n$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Теорема 3.2.6. Пусть $\{C_n\}_{n \in N}$ — семейство замкнутых подмножеств в пространстве X, таких, что ind $C_n \leq k$ для всякого $k \in N$. Тогда $\operatorname{ind} \bigcup_{i \in N} C_i \leq k$.

Доказательство. Пусть k — конечно. Будем доказывать индукцией по k. Если k = 0, тогда утверждение справедливо [3; 2; 14].

Пусть $k \geq 1$ и утверждение теоремы справедливо для меньших значений k. Во всяком T_n возьмем базис открытых множеств $\mathcal{B}_n$ такой, что ind Gr U < k для всякого $U \in \mathcal{B}_n$. Не ограничивая общности, будем считать, что базис $\mathcal{B}_n$ счетный (теорема Линделефа). Тогда для всех n и всех $U \in \mathcal{B}_n$ (лемма 3.2.2) будем иметь ind Gr U $\leq$ k–1. Рассмотрим множество

$$Y = \bigcup_{n \in N} \bigcup_{U \in \mathcal{B}_n} \operatorname{Gr} U .$$

По предположению индукции ind Y $\leq$ k–1.

Семейство множеств

$$\mathcal{B}'_n = \left\{ U \setminus Y : U \in \mathcal{B}_n \right\}$$

является базисом открытых множеств в пространстве $Z_n = T_n \setminus Y$, кроме того, множества U\Y открыто-замкнуты в Z_n. Следовательно, ind $Z_n = 0$, и поэтому $\operatorname{ind} \bigcup_{n \in N} Z_n = 0$.

Очевидно, что множества $Z_n = T_n \setminus Y = T_n \cap Z$ ($Z = \bigcup_{n\in N} Z_n$) замкнуты в Z. Тогда по теореме 3.2.5

$$\mathrm{ind}\, T = \mathrm{ind}\,(Y\cup Z) \le 1 + (k-1) + 0 = k.$$

Теорема 3.2.6 доказана.

Теорема 3.2.7. Пусть ind X = k, тогда $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} X_i$, где $X_i \subset X$ и ind $X_i = 0$ для всякого $i = 1,2,\ldots,k+1$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Определение **3.2.3** Пространство X называется нульмерным, если для всякого $x\in X$ и всякого замкнутого его подмножества Z, такого, что $x\notin Z$, существуют открытые окрестности U точки x и V множества Z, причем

1) $X = U\cup V$;

2) $U \cap V = \varnothing$.

Замечание. U,V открыто-замкнуты в X.

Задание. Доказать эквивалентность определений нульмерности пространства.

Лемма 3.2.3. Пусть X — компакт и C — замкнутое подмножество в X. Если точка $x\in X$ может быть отделена от всякой точки $y\in C$, то она может быть отделена и от множества C.

Доказательство. Для всякой пары (x,y), где $y\in C$, существуют открыто-замкнутые в X множества $U_x^{(y)}$(окрестность точки x) и V_y (окрестность точки y), которые отделяют точки x,y. Так как C — компакт, то существует конечное число окрестностей $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_k}$, таких, что $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$. Рассмотрим множества $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_x^{(y_i)}$ и $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$. Множества U, V являются открыто-замкнутыми в X. Кроме того, $x\in U$ и $C \subset V$. По построению $U \cap V = \varnothing$. Следовательно, множества U,V отделяют точку x и множество C.

Лемма 3.2.3 доказана.

Теорема 3.2.8. Если пространство нульмерно, тогда оно вполне несвязно.

Доказательство. Пусть X нульмерно и $x \in X$. Если C(x) — компонента точки x и существует $y \in C(x)$, такое, что $y \neq x$, тогда в X существуют открыто-замкнутые множества U и V, отделяющие x,y, такие, что $C(x) \cap U \neq \varnothing$ и $C(x) \cap V \neq \varnothing$. Что противоречит связности множества C(x). Поэтому $C(x) = \{x\}$.

Теорема 3.2.8 доказана.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

***Определение* 3.2.4.** Конечная последовательность $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ в пространстве (X,d) называется ε-цепью ($\varepsilon > 0$), если

$$d(x_0,x_1) \leq \varepsilon,\ d(x_1,x_2) \leq \varepsilon, \ldots,\ d(x_{n-1},x_n) \leq \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что ε-цепь $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ соединяет точки x_0 и x_n, которые называются соответственно началом и концом ε-цепи $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$.

З а м е ч а н и е. Сравнить с аналогичными определениями §1.

***Определение* 3.2.5.** Подмножество A пространства X называется ε-сцепленным, если любые две его точки можно соединить ε-цепью из элементов множества A [5].

***Определение* 3.2.6.** Подмножество A пространства X называется сцепленным, если оно является ε-сцепленным для всякого $\varepsilon > 0$ [5].

Определим в пространстве X отношение $\mathcal{R}_\varepsilon(x,y)$ — существует ε-цепь, соединяющая точки x и y.

З а д а н и е. Доказать, что отношение $\mathcal{R}_\varepsilon(x,y)$ — отношение эквивалентности на пространстве X.

Пусть $A_{x,\varepsilon}$ — класс эквивалентности точки $x \in X$ по отношению эквивалентности $\mathcal{R}_\varepsilon(x,y)$.

Теорема 3.2.9. Всякое связное пространство X — сцепленное.

Доказательство. Если пространство X не является сцепленным, то существуют две его точки a и b, которые не могут быть при некотором $\varepsilon > 0$ соединены никакой ε-цепью. Рассмотрим множество $A_{a,\varepsilon}$. Имеем $A_{a,\varepsilon} \neq \varnothing$ и $X \setminus A_{a,\varepsilon} \neq \varnothing$.

Множество $A_{a,\varepsilon}$ открыто — если $y \in A_{a,\varepsilon}$, то всякую $z \in B_\varepsilon(y)$ можно соединить ε-цепью с точкой a.

Множество $A_{a,\varepsilon}$ замкнуто — если $y \in \overline{A}_{a,\varepsilon}$, то существует точка $z \in A_{a,\varepsilon} \cap B_\varepsilon(y)$.

Таким образом, множества $A_{a,\varepsilon}$ и $X \setminus A_{a,\varepsilon}$ открыто-замкнуты в X, что противоречит связности пространства X.

Теорема 3.2.9 доказана.

Теорема 3.2.10. Всякое сцепленное компактное пространство связное.

Доказательство. Пусть сцепленное компактное пространство (X,d) не является связным. Тогда $X = B_1 \cup B_2$ и $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ (B_1 и B_2 — компакты в X). Кроме того, имеем $d(B_1, B_2) = \varepsilon_0 > 0$. Тогда пространство X не может быть ε-сцепленным если $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Теорема 3.2.10 доказана.

Таким образом доказана и следующая теорема.

Теорема 3.2.11. Для того чтобы компактное пространство было связным, необходимо и достаточно, чтобы оно было сцепленным.

Положим $A_x = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} A_{x,\varepsilon}$ для всякого $x \in X$. Очевидно, что это класс эквивалентности точки x в пространстве X по отношению $\mathcal{R}(x,y)$: для всякого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь, соединяющая точки x и y.

Лемма 3.2.4. Если X — компактное пространство, тогда A_x — компакт в X.

Доказательство. Всякое множество $A_{x,\varepsilon}$ — компакт в X.

Лемма 3.2.4 доказана.

Следствие. Множество A_x связно.

Доказательство. Любые две точки $a,b \in A_x$ могут быть соединены ε-цепью для любого $\varepsilon > 0$.

Следствие доказано.

Задание. Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Верно ли, что $A_{x,\varepsilon_1} \subset A_{x,\varepsilon_2}$?

Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ — убывающая последовательность положительных вещественных чисел. Тогда

$$A_{x,\varepsilon_1} \supset A_{x,\varepsilon_2} \supset \ldots \supset A_{x,\varepsilon_n} \supset \ldots .$$

Лемма 3.2.5. $A_x = \bigcap_{\varepsilon>0} A_{x,\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{x,\varepsilon_n}$.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Лемма 3.2.6. Если X — компактное пространство, тогда $C(x) = A_x$.

Доказательство. Так как множество $A_{x,\varepsilon}$ открыто-замкнуто в X, то, очевидно, $C(x) \subset A_x$. С другой стороны, множество A_x связно, и поэтому $A_x \subset C(x)$. Таким образом, $A_x = C(x)$.

Лемма 3.2.6 доказана.

Лемма 3.2.7. Пусть $A_{x,\varepsilon_1} \supset A_{x,\varepsilon_2} \supset \ldots \supset A_{x,\varepsilon_n} \supset \ldots$ — последовательность в компактном пространстве X. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что для всех $n \geq n_0$ будем иметь $A_{x,n} \subset U_\varepsilon(A_x)$.

Доказательство. В метрике Хаусдорфа последовательность $A_{x,\varepsilon_1} \supset A_{x,\varepsilon_2} \supset \ldots \supset A_{x,\varepsilon_n} \supset \ldots$ сходится к A_x.

Лемма 3.2.7 доказана.

Следствие. Во всякой окрестности W множества A_x содержится некоторое A_{x,ε_n} .

Доказательство. Множества $\{U_\varepsilon(A_x)\}_{\varepsilon>0}$ образуют фундаментальную систему окрестностей компакта A_x [8].

Следствие доказано.

Лемма 3.2.8. Если пространство X вполне несвязно, то $A_x = \{x\}$ для всякой точки $x \in X$.

Доказательство следует из леммы 3.2.5.

Теорема 3.2.12. Если компактное пространство вполне несвязно, то оно нульмерно.

Доказательство. Пусть W — окрестность точки x в компактном вполне несвязном пространстве X. По следствию из леммы 6 существует открыто-замкнутое $A_{x,\varepsilon_n} \subset W$. Следовательно, пространство X нульмерно.

Теорема 3.2.12 доказана.

Таким образом доказана и следующая теорема.

Теорема 3.2.13. Для того чтобы компактное пространство X было нульмерным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне несвязным.

Теорема 3.2.14. Пусть пространство X нульмерно (ind X = 0). Тогда для любых его замкнутых непересекающихся подмножеств A,B существуют открыто-замкнутые подмножества U и V в X, для которых $A \subset U$ и $B \subset V$. Кроме того, $U \cup V = X$ и $U \cap V = \varnothing$.

Доказательство. Так как ind X = 0, то существует базис $\mathcal{B}$ в X, состоящий из открыто-замкнутых подмножеств. Для всякого $x \in X$ возьмем $U \in \mathcal{B}$, такое, что $x \in U$ (обозначим его U(x)), причем $A \cap U(x) = \varnothing$ или $B \cap U(x) = \varnothing$ (*объяснить, почему это возможно*). Таким образом, семейство $\{U(x)\}_{x \in X}$ является открытым покрытием пространства X. По теореме Линделефа из этого покрытия можно выделить счетное подпокрытие $\{U(x_i)\}_{i \in N}$. Определим

$$V_1 = U(x_1), \ldots,$$

$$V_n = U(x_n) \setminus V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{n-1} = U(x_n) \cap \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} V_k \right) \ldots$$

Все множества V_n открыто-замкнуты в X. Кроме того,

$$V_i \cap V_j = \varnothing \ (i \neq j) \text{ и } \bigcup_{i \in N} V_i = X.$$

По построению каждое из множеств V_n или не пересекается с A, или не пересекается с B.

Обозначим U объединение всех множеств V_n, которые не пересекаются с B. Тогда множество U открыто и $U \cap B = \varnothing$.

Обозначим V объединение всех множеств V_n, которые пересекаются с B. Очевидно, $V = X \setminus U$ и множество V является открытым. Таким образом, множества U,V являются открыто-замкнутыми. Кроме того, $V \cap A = \varnothing$, поэтому $A \subset U$ и $B \subset V$.

Теорема 3.2.14 доказана.

***Определение* 3.2.7.** Пусть A,B — непересекающиеся подмножества в пространстве X. Будем говорить, что множество $S \subset X$ отделяет множества A,B, если существуют открытые подмножества U и V в X, для которых $A \subset U$ и $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ и $S = X \setminus U \cup V$.

Теорема 3.2.11 и определение 3.2.7 показывают, что имеет место определение, эквивалентное предыдущим.

***Определение* 3.2.8.** Пространство X называется нульмерным, если для любых его замкнутых, непересекающихся подмножеств A,B существуют открыто-замкнутые подмножества U и V в X, для которых $A \subset U$ и $B \subset V$, такие, что $U \cup V = X$ и $U \cap V = \varnothing$.

Теперь дадим определение большой индуктивной размерности, обозначаемой Ind …

***Определение* 3.2.9.** Если $X = \varnothing$, то Ind X = –1. Если $k \geq 0$, то будем говорить, что Ind $X \leq k$, если любые его два замкнутых непересекающихся подмножества могут быть разделены множеством S, таким, что Ind $S \leq k-1$. Ind X = k, если Ind $X \leq k$ и Ind $X \leq k-1$ ложно. Мы будем говорить, что Ind $X = \infty$, если Ind $X \leq k$ ложно для всякого $k \in N^+$.

Замечание. Если ind X = 0, тогда любые его два замкнутых непересекающихся подмножества могут быть разделены пустым подмножеством.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.15. ind X = 0 эквивалентно Ind X = 0.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Коротко рассмотрим знаменитые теоремы сложения.

Лемма 3.2.9. Пусть в пространстве X даны два замкнутых непересекающихся подмножества A и B. Если $Z \subset X$ такое, что $\operatorname{Ind} Z = 0$, тогда существует подмножество S, которое разделяет A,B и $S \cap Z = \varnothing$.

Доказательство. Самостоятельно [12].

Теорема 3.2.16. Пусть в пространстве X дана последовательность $\{C_n\}_{n\in N}$ его замкнутых подмножеств, причем $\operatorname{Ind} C_n = 0$ для всякого $k \in N^+$. Тогда $\operatorname{Ind} \bigcup_{n\in N^+} C_n = 0$.

Доказательство. Пусть $C = \bigcup_{n\in N^+} C_n$. Пусть A,B — замкнутые непересекающиеся подмножества в C. Тогда существуют открыто-замкнутые подмножества L_1 и M_1 в C_1, для которых $A \cap C_1 \subset L_1$ и $B \cap C_1 \subset M_1$ $(= C_1 \setminus L_1)$. Множества $A \cup L_1$ и $B \cup M_1$ — замкнутые непересекающиеся подмножества. Так как пространство X нормально, то существуют открытые в X множества U_1 и V_1, такие, что $A \cup L_1 \subset U_1$ а $B \cup M_1 \subset V_1$. Кроме того, $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \varnothing$ [27]. В C_2 существуют открыто-замкнутые подмножества L_2 и M_2 $(= C_2 \setminus L_2)$, такие, что $C_2 \cap \overline{U_1} \subset L_2$ и $C_2 \cap \overline{V_1} \subset M_2$. Множества $L_2 \cup \overline{U_1}$ и $M_2 \cup \overline{V_1}$ замкнутые и непересекающиеся. Тогда существуют открытые в X множества U_2 и V_2, такие, что $L_2 \cup \overline{U_1} \subset U_2$ и $M_2 \cup \overline{V_1} \subset V_2$. Кроме того, $\overline{U_2} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. Продолжая, получим две последовательности $\{U_n\}_{n\in N^+}$ и $\{V_n\}_{n\in N^+}$. Пусть $U = \bigcup_{n\in N^+} U_n$ и $V = \bigcup_{n\in N^+} V_n$. Тогда U,V — открытые непересекающиеся подмножества в X. По построению $A \subset U$ и $B \subset V$. Множества U,V открыты и замкнуты в C.

Теорема 3.2.16 доказана.

Из теоремы 3.2.12 можно вывести следующую теорему:

Теорема 3.2.17. Пусть в пространстве X дана последовательность $\{C_n\}_{n\in N}$ его замкнутых подмножеств, причем ind $C_n = 0$ для всякого $k\in N^+$. Тогда $\operatorname{ind} \bigcup\limits_{n\in N^+} C_n = 0$.

З а м е ч а н и е. Множества рациональных и иррациональных чисел в R (Эвклидова метрика) имеют малую индуктивную размерность 0, их объединение (множество действительных чисел) — 1!

Для сепарабельных метрических пространств малая и большая индуктивная размерность совпадают!

§3. Размерность Хаусдорфа

Ограничимся рассмотрением пространства R^n, будем обозначать $|X|$ диаметр множества $X \subset R^n$.

З а м е ч а н и е. $|X| = \sup\limits_{x,y\in X} \| x - y \|$.

***Определение* 3.3.1.** δ-покрытием множества X называется счетное семейство подмножеств $\{U_i\}$ в R^n, таких, что

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{и} \quad 0 < |U_i| \le \delta.$$

З а д а н и е. Доказать, что $|U| = |\overline{U}|$.

Пусть $\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$, где s — неотрицательное действительное число и инфимум берется по всем δ-покрытиям множества X.

Для фиксированного множества X $\mathcal{H}_\delta^s(X)$ зависит от двух переменных — s, δ, а функция $\mathcal{H}_\delta^s(X)$ принимает значения в отрезке $[0,\infty]$. Если фиксировать s, то $\mathcal{H}_\delta^s(X)$ будет зависеть только от δ. Очевидно, что если $\delta' \geq \delta$, то $\mathcal{H}_\delta^s(X) \geq \mathcal{H}_{\delta'}^s(X)$. Поэтому, если не исключать ∞, существует предел

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \to +0} \mathcal{H}_\delta^s(X) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(X).$$

Лемма 3.3.1. Функция $\mathcal{H}^s(X)$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{H}^s(\varnothing) = 0$;

2) $\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y)$, если $X \subset Y$;

3) если $\{X_i\}_{i \in I}$ — счетное семейство подмножеств в R^n, то

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mathcal{H}^s(X_i).$$

Доказательство. *Самостоятельно.*

Замечание. $\mathcal{H}^s(X)$ называется s-мерной внешней Хаусдорфовой мерой.

Если $s < t$ и $\{U_i\}$ — произвольное δ-покрытие множества X, тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

поэтому $\mathcal{H}_\delta^t(X) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(X)$.

Тогда если $\mathcal{H}^s(X) < \infty$, то $\mathcal{H}^t(X) = 0$, если $\mathcal{H}^t(X) > 0$, то

$$\mathcal{H}^s(X) = \infty.$$

Таким образом, график функции $\mathcal{H}^s(X)$ (как функции s) является ступенчатой функцией с не более чем одной точкой разрыва (рис. 3.2).

Здесь $t^* = \dim_H X$.

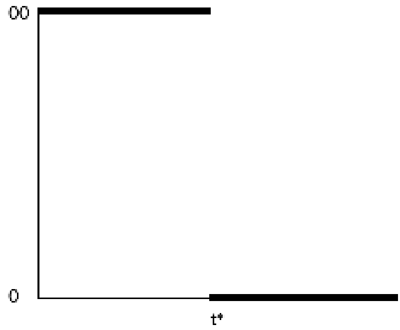


Рис. 3.2

Определение **3.3.2.** Точка разрыва графика t^* функции $\mathcal{H}^s(X)$ (как функции s), если она существует, называется Хаусдорфовой размерностью пространства X и обозначается $\dim_H X$.

По определению

$$\mathcal{H}^s(X) = \infty, \text{если } 0 \le s < \dim_H X, \text{ и } \mathcal{H}^s(X) = 0, \text{если} \dim_H X < s < \infty.$$

Кроме того, имеет место

$$\dim_H X = \sup_s \{\mathcal{H}^s(X) = \infty\} = \inf_s \{\mathcal{H}^s(X) = 0\}.$$

З а м е ч а н и е. Если $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$, то мы будем говорить, что X является s-множеством.

П р и м е р 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset R^n$ $(x_i \neq x_j)$. Тогда для $s > 0$

$$\mathcal{H}^s(X) = 0, \text{ но } \mathcal{H}^s(X) = k \text{ для } s = 0.$$

Теорема 3.3.1. Размерность Хаусдорфа s-множества Кантора C log2/log3=0,63092… и s-мерная внешняя Хаусдорфова мера $\mathcal{H}^s(C) = 1$.

Доказательство. Заметим, что C_k является δ-покрытием C ($C \subset C_k$) и C_k есть объединение 2^k подинтервалов длины $\delta = 3^{-k}$.

Тогда $\mathcal{H}^s_\delta(X) \le 2^k 3^{-sk} = 1$, при этом δ можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно большим k. Следовательно, $\mathcal{H}^s(X) \le 1$.

Теперь покажем, что $\mathcal{H}^s(X) \ge 1$. Для этого докажем более сильное утверждение: для любого покрытия $\{I_i\}$ множества Кантора C замкнутыми интервалами справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^s \ge 1$. Это обеспечивает выполнение неравенства $\mathcal{H}^s(X) \ge 1$.

Допустим, что существует покрытие $\{I_i\}$ множества Кантора C, для которого $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^s < 1$. Будем считать, что каждый I_i есть открытый интервал. Этого можно достичь, «слегка расширяя» каждый I_i, сохраняя неравенство. Тогда компактность C означает, что можно выделить конечное покрытие, т. е. $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$. Тогда для достаточно большого k $C_k \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$. Выберем k как наименьшее число, обладающее свойством: каждый подинтервал длины 3^{-k}, входящий в покрытие C_k, содержится в некотором I_i. Рассмотрим случай, когда каждый I_i содержит не менее двух подинтервалов. Множество $I_i \backslash C_k$ — подмножество I_i, полученное удалением точек, принадлежащих C_k, есть объединение конечного числа открытых интервалов. Обозначим J один из этих интервалов наибольшей длины. Можно считать, что граничные точки интервала J есть внутренние точки I_i, сужая I_i.

Пусть для простоты $I_i = J \cup J_0 \cup J_1$, где J_0 и J_1 — полуинтервалы, полученные удалением точек J из I_i. Тогда из структуры C_k следует, что $|J_0|, |J_1| < |J|$. Поэтому получаем

$$|I_i|^s = \left(|J| + |J_0| + |J_1|\right)^s \geq \left(\frac{3}{2}\left(|J_0| + |J_1|\right)\right)^s \geq 2\left(\frac{|J_0| + |J_1|}{2}\right)^s \geq |J_0|^s + |J_1|^s.$$

Здесь используется выпуклость функции $f(x) = x^s$. Эти неравенства показывают, что если заменить в покрытии $\{I_i\}$ каждый I_i на $J_0 \cup J_1$, то $\sum_{i=1}^{m} |I_i| \geq 2^k 3^{-sk} = 1$, так как можно считать, что каждый I_i содержит точно один подинтервал длины 3^{-k}.

Теорема 3.3.1 доказана.

Лемма 3.3.2. Пусть A — подмножество R^n и ψ: A→ R^n — отображение Липшица, что означает $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$ для некоторой постоянной c и всех $x,y \in A$. Тогда для любого $s \geq 0$, $\mathcal{H}^s(\psi(A)) \leq c^s \mathcal{H}^s(A)$ и $\dim_H(\psi(A)) \leq \dim_H(A)$.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — произвольное δ-покрытие A. Тогда $\{\psi(A \cap U_i)\}$ — покрытие ψ(A) и

$$|\psi(A \cap U_i)| = \sup_{x,y \in A \cap U_i} \|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c \sup_{x,y \in U_i} \|x - y\| = c|U_i|.$$

Следовательно, такое покрытие ψ(A) есть cδ-покрытие. Следовательно,

$$\mathcal{H}^s_{c\delta}(\psi(A)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\psi(A \cap U_i)|^s \leq c^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Так как $\{U_i\}$ — произвольное δ-покрытие A, то $\mathcal{H}^s_{c\delta}(\psi(A)) \leq c^s \mathcal{H}^s_{\delta}(A)$. Переходя к пределу в обоих частях неравенства, получим $\dim_H(\psi(A)) \leq \dim_H(A)$.

Лемма 3.3.2 доказана.

Лемма 3.3.3. Пусть A — подмножество R^n и ψ: A→ R^n — отображение Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1]$, т.е. для всех $x,y \in A$ и для некоторой постоянной c $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|^\alpha$. Тогда $\dim_H(\psi(A)) \leq \alpha^{-1} \bullet \dim_H(A)$.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — произвольное δ-покрытие A. Тогда $\{\psi(A \cap U_i)\}$ — покрытие ψ(A) и $|\psi(A \cap U_i)| = \sup\limits_{x,y \in A \cap U_i} \|\psi(x) - \psi(y)\| \le c \sup\limits_{x,y \in U_i} \|x - y\|^{\alpha} = c|U_i|^{\alpha}$.

Следовательно, $\{\psi(A \cap U_i)\}$ является $c\delta^{\alpha}$-покрытием ψ(A).

Тогда $\mathcal{H}^{s}_{c\delta^{\alpha}}(\psi(A)) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\psi(A \cap U_i)|^{s} \le c^{s} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |U_i|^{s\alpha}$. Из неравенства получаем $\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^{\alpha}}(\psi(A)) \le c^{s/\alpha}\, \mathcal{H}^{s}_{\delta}(A)$.

Если $s > \dim_H(A)$, тогда $\mathcal{H}^{s}(A) = 0$. Следовательно, $\mathcal{H}^{s/\alpha}(\psi(A)) = 0$. Таким образом, $\dim_H(\psi(A)) \le \dfrac{s}{\alpha}$ для всех $s > \dim_H(A)$. Тогда $\dim_H(\psi(A)) \le \alpha^{-1} \bullet \dim_H(A)$.

Лемма 3.3.3 доказана.

Когда отображение $\psi: R^n \to R^n$ — гомеоморфизм и вместе с обратным отображением оно является отображением Липшица, т. е. для некоторых постоянных c_1 и c_2 выполняются неравенства $c_1 \cdot \|x - y\| \le \|\psi(x) - \psi(y)\| \le c_2 \cdot \|x - y\|$ для любой пары $x, y \in R^n$, то для такого отображения $\dim_H(\psi(A)) = \dim_H(A)$. Это следует из леммы 3.3.2, примененной к отображению ψ и ψ^{-1}.

Теорема 3.3.2. Множество $A \subset R^n$, размерность Хаусдорфа которого меньше 1 ($\dim_H(A) < 1$), вполне несвязно.

Доказательство. Пусть x и y — различные точки множества A и $f: R^n \to [0, \infty)$ — отображение, определяемое $f(t) = |t - x|$. Так как $|f(t) - f(s)| = ||t - x| - |s - x|| \le |(t - x) - (s - x)| = |t - s|$, то отображение f не увеличивает расстояние и, следовательно, является отображением Липшица с постоянной 1. Из леммы 3.3.2 следует, что $\dim_H(f(A)) \le \dim_H(A) < 1$. Тогда f(A) — подмножество R^n, $\mathcal{H}^1$

— мера (или длина), равная нулю [20]. Следовательно, f(A) имеет плотное дополнение. Выберем $q \notin f(A)$ и $0 < q < f(y)$. Это означает, что $A = \{t \in A : |t - x| < q\} \cup \{t \in A : |t - x| > q\}$, т.е. A — это объединение двух непересекающихся открытых множеств, причем x принадлежит одному множеству, а y — другому. Это означает, что x и y принадлежат различным компонентам связности множества A.

Теорема 3.3.2 доказана.

Семейство сжатий $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$ имеет единственное самоподобное множество $V = \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i(V)$, для которого определим размерность подобия как положительный корень d уравнения (уравнение подобия)

$$\sum_{i=1}^{m} \left(L(\psi_i)\right)^d = 1,$$

где $L(\psi_i)$ — коэффициент сжатия. Корень d этого уравнения зависит только от постоянных Липшица, сжатий ψ_i. Обозначим эту величину $\dim_s(V)$. Хотя это число $\dim_s(V)$ называют размерностью, оно не является ею в общепринятом смысле. Такое название используется потому, что при выполнении определенных условий эта величина согласуется размерностью Хаусдорфа самоподобного множества V. Отметим, что рассматриваемое уравнение имеет единственный положительный корень, так как функция $f(x) = \sum_{i=1}^{m} (L(\psi_i))^x$ монотонно убывает и удовлетворяет соотношениям $f(0+) = m \geq 2 > f(\infty) = 0$. Докажем следующую теорему

Теорема 3.3.3. Для самоподобного множества V

$$\dim_s(V) \geq \dim_H(V).$$

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что $\mathcal{H}^s(V) < \infty$, здесь s = $\dim_s(V)$. Пусть A — подмножество R^n и $i_1 i_2 \ldots i_k (1 \le i_j \le m, j = 1,2,\ldots,m)$ — последовательность k натуральных чисел. Для упрощения записи используем обозначение $A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \equiv \psi_{i_1} \circ \psi_{i_2} \circ \ldots \circ \psi_{i_k}(A)$. Тогда $\bigcup\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} V_{i_1 i_2 \ldots i_k} = V$.

Кроме того, имеем $\left|V_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right| \le |V| \prod\limits_{j=1}^{k} L(\psi_{i_j}) \le \lambda^k |V|$, где λ — наибольшее среди $L(\psi_i)$, которая, конечно, меньше 1. Пусть $\delta = \lambda^k|V|$. Тогда $\left\{V_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right\}$ есть δ-покрытие V и, следовательно,

$$\mathcal{H}^s_\delta(V) \le \sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_k=1}^{m} \left|V_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right|^s \le |V|^s \sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_k=1}^{m} \prod_{j=1}^{k} (L(\psi_{i_j}))^s$$

$$\le |V|^s \left(\sum_{i=1}^{m} L(\psi_i))^s\right)^k = |V|^s.$$

Величину δ можно уменьшать, если это необходимо, выбирая k достаточно большим. Таким образом получили неравенство

$$\mathcal{H}^s(V) \le |V|^s.$$

Теорема 3.3.3 доказана.

Вычислить размерность подобия как положительный корень уравнения — непростая задача, но можно получить ее оценку с высокой степенью точности. Важно знать, когда неравенство в теореме 3.3.3 становится равенством. При выполнении равенства размерность Хаусдорфа, которую трудно определить, может быть получена или оценена с помощью корня уравнения подобия.

Определение 3.3.3. Множество сжатий $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ удовлетворяет условию открытого множества, если существует непустое ограниченное открытое множество $U \subset R^n$, такое, что

$$\psi_i(U) \subset U, 1 \le i \le m, \text{ и } \psi_i(U) \cap \psi_j(U) = \varnothing, i \ne j.$$

Так как $\Phi(\overline{U}) \subset \overline{U}$, то $V \subset \overline{U}$.

Определение 3.3.4. Отображение $\psi : R^n \to R^n$ называется отображением сжатия, если $\|\psi(x) - \psi(y)\| = L(\psi)\|x - y\|$ для всех $x, y \in R^n$. Другими словами, отображение ψ есть линейное преобразование, т. е. композиция сжатий подобия, вращений и инверсий. Приведем теперь теорему Хатчинсона [21].

Теорема 3.3.4. Пусть V — самоподобное множество, определяемое семейством отображений сжатий, которое удовлетворяет условию открытого множества. Тогда $\dim_s(V) = \dim_H(V)$.

П р и м е р . Кривая Коха.

Рассмотрим четыре преобразования подобия, определяющие СИФ:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти подобия применим к отрезку [0,1] (рис. 3.4, *а*) и получим конфигурацию (рис. 3.4, *б*). После применения таких преобразований подобия к ломаной *б* получим ломаную *в* и т. д.

Предел такой последовательности ломаных (множеств) в метрике Хаусдорфа является кривой Коха (K).

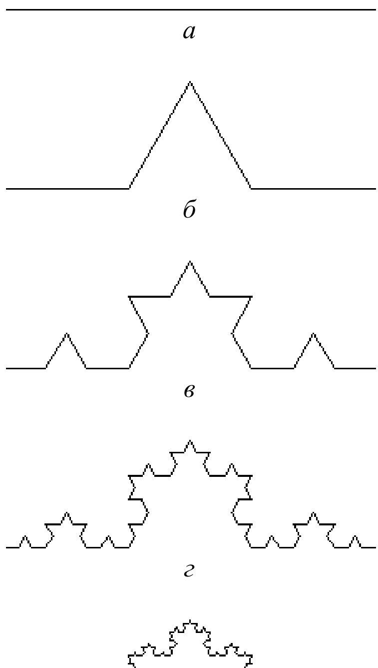


Рис. 3.3

З а д а н и е. Доказать, что СИФ, определяющая кривую Коха, удовлетворяет условию открытого множества.

Размерность подобия такой СИФ есть корень уравнения

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Следовательно, $\dim_s(K) = {\log 4}/{\log 3}$. Это означает, что размерность Хаусдорфа кривой Коха K $\dim_H(K) = {\log 4}/{\log 3}$.

Замечание. Множество, определяемое двумя различными СИФ, может иметь различные размерности подобия.

Рассмотрим, например, отрезок [0,1].

Первый СИФ:

$$x' = \frac{1}{2}x, x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Второй СИФ:

$$x' = \frac{2}{3}x, x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

В первом случае размерность подобия $\dim_s([0,1])$ — корень уравнения $2\left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$, равная 1.

В втором случае размерность подобия $\dim_s([0,1])$ — корень уравнения $2\left(\frac{2}{3}\right)^s = 1$, равная $\frac{\log 2}{\log 3 - \log 2}$, что больше 1.

Для того чтобы размерность подобия характеризовала множество, требуется выполнение условия открытого множества. Легко проверить, что в первом случае открытое множество (0,1) удовлетворяет условию открытого множества: два его образа (0,1/3) и (2/3,1) не пересекаются и содержатся в (0,1). Следовательно, по теореме Хатчинсона размерность Хаусдорфа отрезка [0,1] $\dim_H([0,1]) = 1$. Откуда следует, что во втором случае условие открытого множества не выполняется.

Глава 4. ПРОСТРАНСТВА СТРОК

§ 1. Основные понятия

Пусть $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Множество $\mathcal{A}$ назовем алфавитом, его элементы — буквами. Набор букв алфавита вида 10010101 — конечной строкой. В дальнейшем строки мы будем обозначать строчными буквами греческого алфавита. Количество букв в строке α называется ее длиной и обозначается $|\alpha|$. Длина строки 10010101 равна восьми. Примем соглашение о том, что существует строка нулевой длины, которую мы будем называть пустой строкой и обозначать o.

Если α и β — две конечные строки, то можно определить новую строку $\alpha\beta$, которая записывается сначала буквами строки α, а затем — буквами строки β. Такая операция называется соединением двух строк α и β. Например, если α = 10010101 и β = 01101, то $\alpha\beta$ = 1001010101101.

Пусть дана строка α, тогда определим две новых строки $\alpha 0$ и $\alpha 1$, первую из которых назовем левым наследником, а вторую — правым.

Множество всех строк из алфавита $\mathcal{A}$ длины n обозначим $\mathcal{A}^{(n)}$. Тогда множество всех строк конечной длины из алфавита $\mathcal{A}$, которое мы обозначим $\mathcal{A}^{(*)}$, является объединением

$$\mathcal{A}^{(*)} = \mathcal{A}^{(0)} \cup \mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)} \cup \ldots \cup \mathcal{A}^{(n)} \cup \ldots.$$

и называется бесконечным бинарным деревом (рис. 4.1).

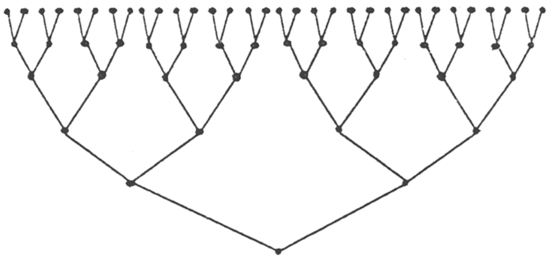


Рис. 4.1

Пусть даны две строки α и β, если существует строка γ такая, что $\beta = \alpha\gamma$, то строка α называется префиксом строки β, и в этом случае мы пишем $\alpha \prec \beta$. Таким образом, во множестве $\mathcal{A}^{(*)}$ мы ввели отношение частичного порядка.

Если $\alpha \in \mathcal{A}^{(*)}$ и $|\alpha| \geq n$, то символом $\alpha\rangle n$ будем обозначать строку, состоящую из первых n букв строки α, то есть ее префикс длины n. Например, $1001010101101\rangle 5 = 10010$.

Используя алфавит $\mathcal{A}$ мы можем рассматривать бесконечные строки, которые также будем обозначать строчными буквами греческого алфавита. Из текста обычно ясно, о какой строке — конечной или бесконечной — идет речь. Множество всех бесконечных строк из алфавита $\mathcal{A}$ мы обозначим $\mathcal{A}^{(\omega)}$. Если $\alpha \in \mathcal{A}^{(\omega)}$, то для всякого натурального n существует непустая строка $\alpha\rangle n$.

Очевидно, что $\mathcal{A}^{(\omega)} = \mathcal{A}^{N} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_i = \{0,1\}$ для всякого $i \in N$ [18]. Тогда (см. определение прямого произведения множеств) существует функция f_σ: $N \to \mathcal{A}$, такая, что

$$f_\sigma(1)\, f_\sigma(2)\, \ldots\, f_\sigma(n) \ldots = \sigma.$$

Множество $\mathcal{A}$ наделим дискретной топологией, а множество $\mathcal{A}^{N}$ — топологией произведения.

Теорема 4.1.1. Канторово множество гомеоморфно множеству $\mathcal{A}^{N}$, наделенному топологией произведения.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{C}$ — множество Кантора. Определим отображение f: $\mathfrak{C} \to \mathcal{A}^{N}$ ($f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$) следующим образом. Если $a \in \mathfrak{C}$, тогда $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (причем $a_n = 0$ или 2) и мы положим $f_n(a) = a_n/2$. Таким образом, $f(a) = (a_1/2, a_2/2, \ldots, a_n/2, \ldots)$. По построению отображение f является инъекцией, так как если $a, b \in \mathfrak{C}$ и $a \neq b$, то для некоторого i имеем $a_i \neq b_i$. Кроме того отображение f — сюръекция, так как для всякой строки $\alpha \in \mathcal{A}^{(\omega)}$ имеем $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, и поэтому $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{3^n}\right) = \alpha$.

Так как множество $\mathcal{A}^{N}$ наделено топологией произведения, то по определению топологии произведения отображение f: $\mathfrak{C} \to \mathcal{A}^{N}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения f_n: $\mathfrak{C} \to \mathcal{A}$. Пусть $x \in \mathfrak{C}$ и $f_n(x) = 0$, тогда $x_n = 0$ в троичном представление числа x. Из построения множества

$\mathfrak{C}$ следует, что $x \in C_{n-1}$, и поэтому x принадлежит одному из отрезков I, их объединением является C_{n-1}, который при переходе от C_{n-1} к C_n превращается в два отрезка — I_0 (левый) и I_2 (правый). Таким образом, $f_n(x) = 0$ эквивалентно $x \in \mathfrak{C} \cap I_0$. Но множество $\mathfrak{C} \cap I_0$ замкнуто, поэтому отображение f_n: $\mathfrak{C} \to \mathcal{A}$ непрерывно. Что означает, отображение f: $\mathfrak{C} \to \mathcal{A}^{N}$ непрерывно. Множество $\mathfrak{C}$ — компакт, тогда отображение f: $\mathfrak{C} \to \mathcal{A}^{N}$ — гомеоморфизм [8].

Теорема 4.1.1 доказана.

З а м е ч а н и е. Таким образом, мы наделили множество $\mathcal{A}^{(\omega)}$ естественной топологией, которую обозначим τ, и получили топологическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)}, \tau)$.

Пусть $A \subset \mathcal{A}^{(*)}$, строку $\gamma \in \mathcal{A}^{(*)}$ назовем нижней границей множества A, если для всякой строки $\alpha \in \mathcal{A}^{(*)}$ мы имеем $\gamma \prec \alpha$.

Строку $\nu \in \mathcal{A}^{(*)}$ назовем наибольшей (точной) нижней границей множества A, если она является нижней границей множества A и для всякой нижней границы γ множества A мы имеем $\gamma \prec \nu$. Очевидно, $\nu = \inf A$.

Теорема 4.1.2. Всякое непустое множество $A \subset \mathcal{A}^{(*)}$ имеет единственную точную нижнюю границу.

Доказательство. Так как множество $A \neq \varnothing$, то существует $\alpha \in A$, и пусть $|\alpha| = n$. Возьмем целое число k такое, что $0 \le k \le n$, и рассмотрим строки вида $\alpha\rangle k$, которые являются нижними границами множества A. Множество тех целых k, для которых вышесказанное справедливо, не пусто, так как строка $\alpha\rangle 0$, очевидно, — нижняя граница множества A. Пусть m — наибольшее из таких k. По определению $\alpha\rangle m$ является нижней границей множества A. Тогда если β — произвольная нижняя граница множества A, то $\beta \prec \alpha$, и поэтому $\beta = \alpha\rangle k$. Таким образом, $k \le m$, и поэтому $\beta \prec \alpha\rangle m$. Это означает, что $\alpha\rangle m$ — точная нижняя граница множества A. Пусть точных нижних границ множества A две — ν_1 и ν_2, тогда $\nu_1 \prec \nu_2$ и $\nu_2 \prec \nu_1$, что означает $\nu_1 = \nu_2$.

Теорема 4.1.2 доказана.

Важную роль в изучении фракталов играют специальные отображения, которые называются модельными. Вот один пример такого отображения:

$$h_1: \mathcal{A}^{(\omega)} \to R.$$

Это отображение определяется следующим образом: для всякого $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ положим $h_1(\alpha) = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots = \alpha_1/2 + \alpha_2/2^2 + \ldots + \alpha_n/2^n + \ldots$ Очевидно, что $h_1(\mathcal{A}^{(\omega)}) = [0,1]$.

Вот еще один пример такого отображения:

$$h_2: \mathcal{A}^{(\omega)} \to R,$$

где $h_2(\alpha) = 0, 2\alpha_1 2\alpha_2\ldots 2\alpha_n\ldots = 2\alpha_1/3 + 2\alpha_2/3^2 + \ldots + 2\alpha_n/3^n + \ldots$. Очевидно, что $h_2(\mathcal{A}^{(\omega)}) = \mathfrak{C}$ (теорема 2.2.1).

Модельное отображение $h_2: \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$ обладает следующим свойством:

$$h_2(0\alpha) = h_2(\alpha)/3 \text{ и } h_2(1\alpha) = h_2(\alpha)/3+2/3.$$

З а д а н и е. Доказать это свойство.

Имеем два отображения:

$$L: \mathcal{A}^{(\omega)} \to \mathcal{A}^{(\omega)} \text{ и } R: \mathcal{A}^{(\omega)} \to \mathcal{A}^{(\omega)},$$

такие, что $L(\alpha) = 0\alpha$ и $R(\alpha) = 1\alpha$ для всякого $\alpha \in \mathcal{A}^{(\omega)}$, и два отображения f_1: $R \to R$ и f_2: $R \to R$, такие, что для всякого $x \in R$ $f_1(x) = x/3$ и $f_2(x) = x/3 + 2/3$.

З а д а н и е. Используя отображения L, R, f_1, f_2, записать формулу $h_2(0\alpha) = h_2(\alpha)/3$ и $h_2(1\alpha) = h_2(\alpha)/3+2/3$.

Определим отображение

$$d: \mathcal{A}^{(\omega)} \times \mathcal{A}^{(\omega)} \to R,$$

следующим образом: если $\alpha = \beta$, то $d(\alpha,\beta) = 0$. Если $\alpha \neq \beta$, то возьмем их наибольший общий префикс γ. Тогда $\alpha = \gamma\alpha'$ и $\beta = \gamma\beta'$. Положим $d(\alpha,\beta) = 1/2^k$, где $k = |\gamma|$.

Теорема 4.1.3. Отображение $d: \mathcal{A}^{(\omega)} \times \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$ является метрикой на $\mathcal{A}^{(\omega)}$.

Доказательство. По определению для любых α, $\beta \in \mathcal{A}^{(\omega)}$ имеем $d(\alpha,\beta) \geq 0$ и $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$. Проверим выполнение неравенства треугольника. Пусть даны α, $\beta, \gamma \in \mathcal{A}^{(\omega)}$, причем m — длина наибольшего общего префикса строк α и β, а n — длина наибольшего общего префикса строк β и γ. Положим $k = \min\{m,n\}$. Тогда $\beta\rangle k$ — наибольший общий префикс строк α и γ, поэтому

$$d(\alpha,\gamma) = 1/2^k = 1/2^{\min\{m,n\}} = \max\{1/2^m, 1/2^n\} =$$
$$= \max\{ d(\alpha,\beta), d(\beta,\gamma) \}.$$

Но $\max\{d(\alpha,\beta), d(\beta,\gamma)\} \leq d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma)$. Таким образом, мы получили $d(\alpha,\gamma) \leq d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma)$.

Теорема 4.1.3 доказана.

Такую метрику часто обозначают $d_{1/2}$. Мы доказали, что метрика $d_{1/2}$ удовлетворят сильному неравенству треугольника! Метрика $d_{1/2}$ неархимедова.

Метрика индуцирует топологию, и поэтому на множестве $\mathcal{A}^{(\omega)}$ мы имеем топологию, которую обозначим $\tau_{1/2}$, и получим еще одно топологическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)}, \tau_{1/2})$.

Как связаны между собой топологии τ и $\tau_{1/2}$?

З а д а н и е. Пусть d_0 — дискретная метрика на $\mathcal{A}$. Определим функцию

$$D\colon \mathcal{A}^{(\omega)} \times \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$$

следующим образом. Если $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\beta = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$, то

$$D(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_0(\alpha_n,\beta_n)}{2^n}.$$

Доказать, что функция $D\colon \mathcal{A}^{(\omega)} \times \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$ является метрикой на $\mathcal{A}^{(\omega)}$.

З а м е ч а н и е. Таким образом, на множестве $\mathcal{A}^{(\omega)}$ возникает еще одна топология — τ_D.

Как связаны между собой топологии τ и τ_D?

З а д а н и е. Пусть d_0 — дискретная метрика на $\mathcal{A}$. Будет ли метрическое пространство $(\mathcal{A}, d_0)$ полным метрическим пространством? Является ли метрика d_0 неархимедовой?

Теорема 4.1.4. Метрическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_{1/2})$ — полное метрическое пространство.

Доказательство. Пусть $\{\alpha^k\}_{k\in N}$ — последовательность Коши в $\mathcal{A}^{(\omega)}$. Тогда для всякого натурального k существует натуральное число n_k такое, что $d_{1/2}(\alpha^m, \alpha^{n_k}) < 1/2^k$ для всех $m \geq n_k$. По определению метрики $d_{1/2}$ получим, что $\alpha^m\rangle k = \alpha^{n_k}\rangle k$ для всех $m \geq n_k$. Определим $\beta \in \mathcal{A}^{(\omega)}$ следующим образом: $\beta\rangle k = \alpha^{n_k}\rangle k$ для всякого натурального k. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует $1/2^k < \varepsilon$, мы получим, что $d_{1/2}(\alpha^m, \beta) < 1/2^k < \varepsilon$ для всех $m \geq n_k$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^m = \beta$.

Теорема 4.1.4 доказана.

Теорема 4.1.5. Метрическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_{1/2})$ является компактом.

Доказательство. Метрическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_{1/2})$ будет компактом в том случае, если оно является полным и вполне ограниченным метрическим пространством. Полноту мы доказали. *Вполне ограниченность доказать самостоятельно.*

Теорема 4.1.5 доказана.

Замечание. Хорошая подсказка для доказательства — рисунок бесконечного бинарного дерева.

Всякое вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно!

Задание. Явно указать счетный базис метрического пространства $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_{1/2})$. Пусть $0 < r < 1$, определим отображение

$$d_r\colon \mathcal{A}^{(\omega)} \times \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$$

следующим образом: если $\alpha = \beta$, то $d_r(\alpha,\beta) = 0$. Если $\alpha \neq \beta$, то возьмем их наибольший общий префикс γ. Тогда $\alpha = \gamma\alpha'$ и $\beta = \gamma\beta'$. Положим $d_r(\alpha,\beta) = r^k$, где $k = |\gamma|$.

Теорема 4.1.6. Отображение $d_r\colon \mathcal{A}^{(\omega)} \times \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$ является метрикой на $\mathcal{A}^{(\omega)}$.

Доказательство. *Самостоятельно* — аналогично теореме 4.1.3.

З а м е ч а н и е. Метрическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_r)$ будет полным и компактным. *Проверить самостоятельно*.

Таким образом, на множестве $\mathcal{A}^{(\omega)}$ мы имеем семейство топологий τ_r для всякого $0 < r < 1$.

Теорема 4.1.7. Если $0 < r < 1$ и $0 < s < 1$, то $\tau_r = \tau_s$.

Доказательство. Покажем, что тождественное отображение $id_{\mathcal{A}(\omega)}$: $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_r) \to (\mathcal{A}^{(\omega)}\ d_{s)}$ является непрерывным. Пусть $\varepsilon > 0$, и $\alpha \in \mathcal{A}^{(\omega)}$. Возьмем k таким, что $s^k < \varepsilon$ и пусть $r^k = \delta$. Тогда для всякого χ $(= \chi_1\chi_2\ldots\chi_{k,}\ \chi_{k+1}\ldots)$, такого, что $d_r\ (\alpha,\chi) < \delta$, мы будем иметь $\alpha\rangle k +1 = \chi\rangle k + 1$. Это означает, что $d_s\ (\alpha,\chi) < \varepsilon$. Таким образом, отображение $id_{\mathcal{A}(\omega)}$: $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_r) \to (\mathcal{A}^{(\omega)}, d_{s)}$ является непрерывным в точке α и, следовательно, непрерывным.

Непрерывность отображения $id_{\mathcal{A}(\omega)}$: $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_s) \to (\mathcal{A}^{(\omega)}, d_{r)}$ доказывается аналогично.

Отображение $id_{\mathcal{A}(\omega)}$: $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_r) \to (\mathcal{A}^{(\omega)}, d_s)$ — гомеоморфизм, и поэтому $\tau_r = \tau_s$.

Теорема 4.1.7 доказана.

З а м е ч а н и е. Если отображение $id_{\mathcal{A}(\omega)}$: $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d_r) \to (\mathcal{A}^{(\omega)}, d_s)$ — гомеоморфизмом, то метрики d_r и d_s называются топологически эквивалентными.

З а д а н и е. Доказать, что отображение

$$id_{\mathcal{A}(\omega)}\colon (\mathcal{A}^{(\omega)}, d_r) \to (\mathcal{A}^{(\omega)}\ d_{s)}$$

равномерно непрерывное.

Замечание. Если мы интересуемся топологией метрического пространства ($\mathcal{A}^{(\omega)}$,d_r), то мы можем заменить метрику d_r на топологически эквивалентную. Но если нас интересуют метрические свойства пространства ($\mathcal{A}^{(\omega)}$,d_r), то при такой замене некоторые свойства могут утратиться.

Теорема 4.1.8. Рассмотрим метрическое пространство ($\mathcal{A}^{(\omega)}$,$d_{1/3}$). Модельное отображение h_2: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to$ R является отображением ограниченного искажения.

Доказательство. Докажем, что имеет место формула

$$\frac{1}{3}d_{1/3}(\alpha,\beta) \le \left| \ h_2(\alpha) - h_2(\beta) \ \right| \le d_{1/3}(\alpha,\beta). \qquad (*)$$

Пусть γ наибольший общий префикс строк α,β. Тогда мы будем иметь $\alpha = \gamma\alpha'$ и $\beta = \gamma\beta'$, причем первые буквы строк α' и β' различны. Докажем неравенство (∗) по индукции. Если $|\gamma| = 0$, тогда $d_{1/3}(\alpha,\beta) = 1$.

По определению отображения h_2: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to$ R, $h_2(\alpha)\in[0,1]$ и $h_2(\beta)\in[0,1]$. Тогда $\left|h_2(\alpha)-h_2(\beta)\right| \le 1$, кроме того, если $h_2(\alpha)\in[0,1/3]$, то $h_2(\beta)\in[2/3,1]$, и наоборот. И мы будем иметь $\left|h_2(\alpha)-h_2(\beta)\right| \ge 1/3$. В этом случае неравенство (∗) доказано.

Предположим, это неравенство доказано для случая $|\gamma| = n$. Пусть $|\gamma| = n+1$, тогда $\gamma = 0\eta$ или $\gamma = 1\eta$ для строки η, для которой $|\eta| = n$. Выберем один из этих случаев. Возьмем $\gamma = 0\eta$. Тогда по предположению индукции будем иметь

$$\frac{1}{3}d_{1/3}(\eta\alpha',\eta\beta') \le \left| \ h_2(\eta\alpha') - h_2(\eta\beta') \ \right| \le d_{1/3}(\eta\alpha',\eta\beta')$$

и кроме того $d_{1/3}(\alpha,\beta) = d_{1/3}(0\eta\alpha',0\eta\beta') = \frac{1}{3}d(\eta\alpha',\eta\beta')$.

Тогда

$$\left|\ h(\alpha)-h(\beta)\ \right|=\left|\ h(\gamma\alpha')-h(\gamma\beta')\ \right|=\left|\ h(0\eta\alpha')-h(0\eta\beta')\ \right|=$$

$$=\frac{1}{3}\left|\ h(\eta\alpha')-h(\eta\beta')\ \right|.$$

Объединяя неравенства, получим

$$,\frac{1}{3}d_{1/3}(\alpha,\beta)\le\left|\ h_2(\alpha)-h_2(\beta)\ \right|\le d_{1/3}(\alpha,\beta).$$

Для $\gamma = 1\eta$ *доказать самостоятельно* [20].

Теорема 4.1.8 доказана.

З а д а н и е. Доказать (используя неравенство(∗)), что отображение h_2: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to h_2(\mathcal{A}^{(\omega)})$ является гомеоморфизмом.

Определим для всякого $\alpha\in\mathcal{A}^{(*)}$ множество

$$[\alpha] = \{\chi\in\mathcal{A}^{(\omega)}: \chi = \alpha\chi'\}.$$

Теорема 4.1.9. Пусть $\left\{r_\alpha\right\}_{\alpha\in\mathcal{A}^{(*)}}$ — семейство положительных действительных чисел, таких, что 1) $r_\alpha > r_\beta$, если $\alpha \prec \beta$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_{\alpha\rangle n} = 0$ для всякого $\alpha\in\mathcal{A}^{(\omega)}$. Тогда существует метрика d на $\mathcal{A}^{(\omega)}$, такая, что для всякого $\alpha \in\mathcal{A}^{(\omega)}$ будем иметь $\delta[\alpha] = r_\alpha$.

Доказательство. Положим $d(\alpha,\beta) = 0$, если $\alpha = \beta$. Если $\alpha \ne \beta$, тогда $d(\alpha,\beta) = r_\gamma$, где γ — наибольший общий префикс строк α и β. По определению $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$ и кроме того $d(\alpha,\beta) \ge 0$ для всех $\alpha,\beta\in\mathcal{A}^{(\omega)}$. Проверим неравенство треугольника. Пусть $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{A}^{(\omega)}$, при этом все они различны. Наибольший общий префикс строк α и β обозначим λ, строк β и γ — μ и строк α и γ — ν. Тогда

$$d(\alpha,\gamma) = r_\nu \le \max\ \{r_\lambda,r_\mu\}= \max\ \{d(\alpha,\beta),d(\beta,\gamma)\}.$$

Другие случаи рассмотреть самостоятельно.

Если $\sigma,\tau \in [\alpha]$, то $d(\sigma,\tau) \le r_\alpha$. Но $\alpha 0\alpha'$, $\alpha 1\beta' \in [\alpha]$, поэтому $\delta[\alpha] = r_\alpha$.

Теорема 4.1.9 доказана.

Замечание. Таким образом, $(\mathcal{A}^{(\omega)}, d)$ — ультраметрическое пространство.

Пусть $(s_1,s_2,\dots s_n)$ — семейство вещественных чисел, таких, что

$$0< s_i <1 \text{ для } i = 1,2\dots n.$$

Рассмотрим алфавит $\mathcal{A} = \{ s_1,s_2,\dots s_n \}$, пусть $\mathcal{A}^{(\omega)}$ — пространство бесконечных строк с таким алфавитом.

Для каждого $s_i \in \mathcal{A}$ зададим отображение φ_i: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to \mathcal{A}^{(\omega)}$, которое назовем правым сдвигом, определив его следующим образом:

$$\varphi_i (u) = s_i u$$

для всякого $u \in \mathcal{A}^{(\omega)}$.

Построим семейство положительных вещественных чисел $\left\{ r_\alpha \right\}_{\alpha\in\mathcal{A}^{(*)}}$ следующим образом: $r_o = 1$ (o — пустая строка), $r_{us_i} = r_u s_i$ для всякого $u \in \mathcal{A}^{(*)}$ и всякого $s_i \in \mathcal{A}$. Имеем: 1) если $u \prec v$, то $v = uw$, поэтому если $|w| = n$, то $v = us_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_n}$. Тогда $r_v = r_u\, s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_n}$, что означает $r_v < r_u$; 2) из пункта 1 следует, что для всякого $u \in \mathcal{A}^{(\omega)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} r_{u\rangle n} = 0$, так как $r_{\alpha\rangle n} \le s^n$, где $s = \max \{ s_1,s_2,\dots,s_n\}$.

Таким образом, условие 1 теоремы 4.1.9 выполнены, следовательно, на $\mathcal{A}^{(\omega)}$ существует метрика d с указанными в теореме свойствами.

Покажем, что каждое отображение φ_i: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to \mathcal{A}^{(\omega)}$ является подобием с коэффициентом s_i. Пусть $u,v \in \mathcal{A}^{(\omega)}$ и $w \in \mathcal{A}^{(*)}$ — их наибольший общий префикс. Очевидно имеем

$$d(\varphi_i(u),\varphi_i(v)) = d(s_i u, s_i v) = r_{s_i w} = s_i d(u,v).$$

Таким образом, мы получили метрическое пространство ($\mathcal{A}^{(\omega)}$, d) и семейство $\{\varphi_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ подобий с коэффициентами $\{ s_i \}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$.

Метрическое пространство ($\mathcal{A}^{(\omega)}$, d) — полное (*почему?*), поэтому сжимающее отображение F: $\mathcal{K}(\mathcal{A}^{(\omega)}) \to \mathcal{K}(\mathcal{A}^{(\omega)})$, где $F = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$, имеет единственную неподвижную точку, то есть существует компакт $A \subset \mathcal{A}^{(\omega)}$, такой, что

$$A = \varphi_1(A)\cup\varphi_2(A)\cup\ldots\cup\varphi_n(A).$$

Задание. Найти самоподобное множество в метрическом пространстве ($\mathcal{A}^{(\omega)}$, d) для СИФ $F = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$.

Метрическое пространство ($\mathcal{A}^{(\omega)}$, d) с семейством подобий $\{\varphi_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ называется модельным пространством строк.

Используя это модельное пространство, получим полезную теорему.

Теорема 4.1.10. Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство, $\{f_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ — система итерированных функций с коэффициентами подобия $\{ s_1,s_2,\ldots s_n \} = \mathcal{A}$ и ($\mathcal{A}^{(\omega)}$,d) — метрическое пространство (построенное выше). Тогда существует единственное непрерывное отображение h: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to X$, такое, что

$$h(s_i u) = f_i(h(u))$$

для всякого $u \in\mathcal{A}^{(\omega)}$ и всякого s_i. Причем $h(\mathcal{A}^{(\omega)})$ совпадает с самоподобным множеством, определяемым системой итерированных функций $\{f_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$.

Доказательство. Определим по индукции последовательность отображений g_k: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to X$ следующим образом.

Возьмем произвольную точку $a \in X$ и положим $g_0(u) = a$ для всех $u \in \mathcal{A}^{(\omega)}$. Очевидно, что отображение g_0 непрерывно. Если отображение g_k определено и непрерывно, то для всяких $u \in \mathcal{A}^{(\omega)}$ и $s_i \in \mathcal{A}$ положим $g_{k+1}(s_i u) = f_i(g_k(u))$. *Непрерывность отображения gk+1 проверить самостоятельно*.

Таким образом, мы получили последовательность непрерывных отображений g_k: $\mathcal{A}^{(\omega)} \to X$.

Так как метрическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)},d)$ — компакт, то определим метрику D на $C^0(\mathcal{A}^{(\omega)}, X)$ следующим образом: $D(f,g) = \max\limits_{u \in \mathcal{A}^{(\omega)}} \rho(f(u), g(u))$. Метрическое пространство $(C^0(\mathcal{A}^{(\omega)},X),D)$ является полным. Пусть $s = \max \{ s_1,s_2,\ldots s_n \}$, тогда $s < 1$. Легко доказать, что $D(g_{k+1},g_k) \le s^k D(g_1,g_0)$ (*самостоятельно*). Поэтому

$$D(g_m,g_k) \le (s^k/1-s)\ D(g_1,g_0),\ m \ge k.$$

Таким образом, последовательность $\{g_k\}_{k \in N}$ — последовательность Коши в $C^0(\mathcal{A}^{(\omega)},X)$, и поэтому сходится к некоторому отображению в $C^0(\mathcal{A}^{(\omega)},X)$, которое мы обозначим $h \in C^0(\mathcal{A}^{(\omega)},X)$. Причем коммутативна диаграмма (*почему?*)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{(\omega)} & \xrightarrow{s_i} & \mathcal{A}^{(\omega)} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{f_i} & X \end{array}.$$

Очевидно, что $\mathcal{A}^{(\omega)} = s_1\mathcal{A}^{(\omega)} \cup s_2\mathcal{A}^{(\omega)} \cup \ldots \cup s_n\mathcal{A}^{(\omega)}$. Тогда получим

$$g_{k+1}\left(\mathcal{A}^{(\omega)}\right)=\bigcup_{s\in\mathcal{A}} f_s\left(g_k\left(\mathcal{A}^{(\omega)}\right)\right).$$

Так как метрическое пространство $(\mathcal{A}^{(\omega)},d)$ — компакт, то последовательность $g_k(\mathcal{A}^{(\omega)})$ сходится к $h(\mathcal{A}^{(\omega)})$. Тогда из соотношения $g_{k+1}\left(\mathcal{A}^{(\omega)}\right)=\bigcup_{s\in\mathcal{A}} f_s\left(g_k\left(\mathcal{A}^{(\omega)}\right)\right)$ следует, что

$$h(\mathcal{A}^{(\omega)}) = f_1(h(\mathcal{A}^{(\omega)}))\cup f_2(h(\mathcal{A}^{(\omega)}))\cup\ldots\cup f_n(h(\mathcal{A}^{(\omega)})).$$

Поэтому $h(\mathcal{A}^{(\omega)}) \subset X$ — самоподобное множество для СИФ $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$.

Докажем единственность отображения $h\colon \mathcal{A}^{(\omega)} \to X$. Пусть таких отображений два — h_1, h_2. Тогда $D(h_1,h_2) \le s\, D(h_1,h_2)$, где $s = \max\,\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$. Но тогда $h_1 = h_2$.

Теорема 4.1.10 доказана.

Пример. Рассмотрим алфавит $\mathcal{A} = \{0,1\}$ и пространство бесконечных строк $\mathcal{A}^{(\omega)}$. Выше мы определили модельное отображение $h_2\colon \mathcal{A}^{(\omega)} \to R$. Для которого $h_2(0\alpha) = f_1\,(h_2(\alpha))$ и $h_2(1\alpha) = f_2(h_2(\alpha))$, где $f_1\colon R\to R$ и $f_2\colon R\to R$ такие, что для всякого $x \in R, f_1\,(x) = x/3$ и $f_2(x) = x/3+2/3$. Как было показано, $h_2(\mathcal{A}^{(\omega)}) \subset R$ является самоподобным множеством для СИФ (f_1,f_2) — множеством Кантора.

Замечание. Пусть на полном метрическом пространстве R^n задана СИФ $F = (f_1, f_2,\ldots, f_n)$. Возьмем алфавит $\{1,2,\ldots,n\}$ и обозначим $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}^{\infty}$ (*сравнить* с $\mathcal{A}^{(\omega)}$). Наделим множество Ω топологией произведения, тогда топологическое пространство Ω будет компактным.

Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — сжимающие отображения, то отображение $F: \mathcal{K}(R^n) \to \mathcal{K}(R^n)$ также сжимающее, в этом случае СИФ называется гиперболическим.

Если $\omega \in \Omega$, то $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \ldots$, где $\omega_i \in \{1,2,...,n\}$. Возьмем $\omega \in \Omega$ и $x \in X$. Рассмотрим $\pi(\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ ... \circ f_{\omega_k}(x)$ и обозначим $x_k = f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ ... \circ f_{\sigma_k}(x)$. Так как $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — сжимающие отображения, то последовательность $\{x_k\}$ — последовательность Коши, следовательно, является сходящейся.

Рассмотрим $y_k = f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ ... \circ f_{\sigma_k}(y)$ $(y \neq x)$, тогда последовательность $\{y_k\}$ является сходящейся. Кроме того, последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — эквивалентны, следовательно, имеют общий предел, т. е. $\pi(\omega)$ не зависит от x. В этом случае СИФ $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ называется точечно-расслоеным.

Мы получили сюръективное отображение $\pi : \Omega \to A$, где A — аттрактор СИФ $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. (*Почему?*)

Отображение $\pi : \Omega \to A$ называется кодовым отображением.

Введем отображения $s_n : \Omega \to \Omega$, где $s_n(\omega) = n\omega$, которое называется отображением обратного сдвига.

Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{s_n} & \Omega \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ R^n & \xrightarrow{f_n} & R^n \end{array}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Коблиц Н.* P-адические числа, p-адический анализ и дзета-функция. М.: Мир, 1982.

2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1972.

3. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1.

4. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Дрофа, 2001.

5. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

6. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

7. *Махоркин В.В.* Дифференциальное исчисление функций нескольких вещественных переменных. Калининград: Изд-во КГУ, 2002.

8. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

9. *Александров П.С., Колмогоров А.Н.* Введение в теорию функций действительного переменного. М.; Л.: РТТЛ, 1938.

10. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. Волгоград: Платон, 1997.

11. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: УРСС, 2004.

12. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.

13. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.

14. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006.

15. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.

16. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

17. *Williams R.F.* Composition of contractions // Bol. Soc. Brasil. Mat. Vol. 2. 1971. P. 55—59.

18. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965.

* Всю литературу можно найти в библиотеке БФУ им. И. Канта.

19. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

20. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

21. *Edgar G.A.* Measure, Topology and Fractal Geometry. N.-Y.: Springer-Verlag, 1990.

22. *Hutchinson J.E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. № 30. P. 713—747.

23. *Sagan H.* Space-Filling Curve. N.-Y.: Springer-Verlag, 1994.

24. *Махоркин В.В.* Топологии Уитни. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006.

25. *Лузин Н.Н.* Теория функций действительного переменного. М.: Просвещение, 1956.

26. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

27. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.

28. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. М.: РХД, 2005.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава 1. Основные топологические и метрические понятия 4

§ 1. Метрические пространства 4

§ 2. Топологии и метрики 23

§ 3. Некоторые типы метрических и топологических пространств 32

Глава 2. Примеры фракталов 55

§ 1. Канторово множество 55

§ 2. Ковер Серпинского 75

§ 3. Пространство-заполняющие кривые 80

Глава 3. Числовые характеристики фракталов 93

§ 1. Метрики Хаусдорфа 93

§ 2. Топологические размерности 114

§ 3. Размерность Хаусдорфа 126

Глава 4. Пространства строк: 137

§ 1. Основные понятия 137

Список рекомендуемой литературы 153

Учебное издание

Махоркин Александр Васильевич
Махоркин Валериан Васильевич

МАТЕМАТИКА ФРАКТАЛОВ

Учебное пособие

Редактор *М. В. Королева*. Корректор *М. В. Бурлетова*
Оригинал-макет подготовила *О. М. Хрусталева*

Подписано в печать 10.12.2011 г.
Бумага для множительных аппаратов. Формат 60×90 $^1/_{16}$.
Гарнитура «Таймс». Ризограф. Усл. печ. л. 9,9. Уч.-изд. л.7,1 .
Тираж 60 экз. Заказ 305.

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14