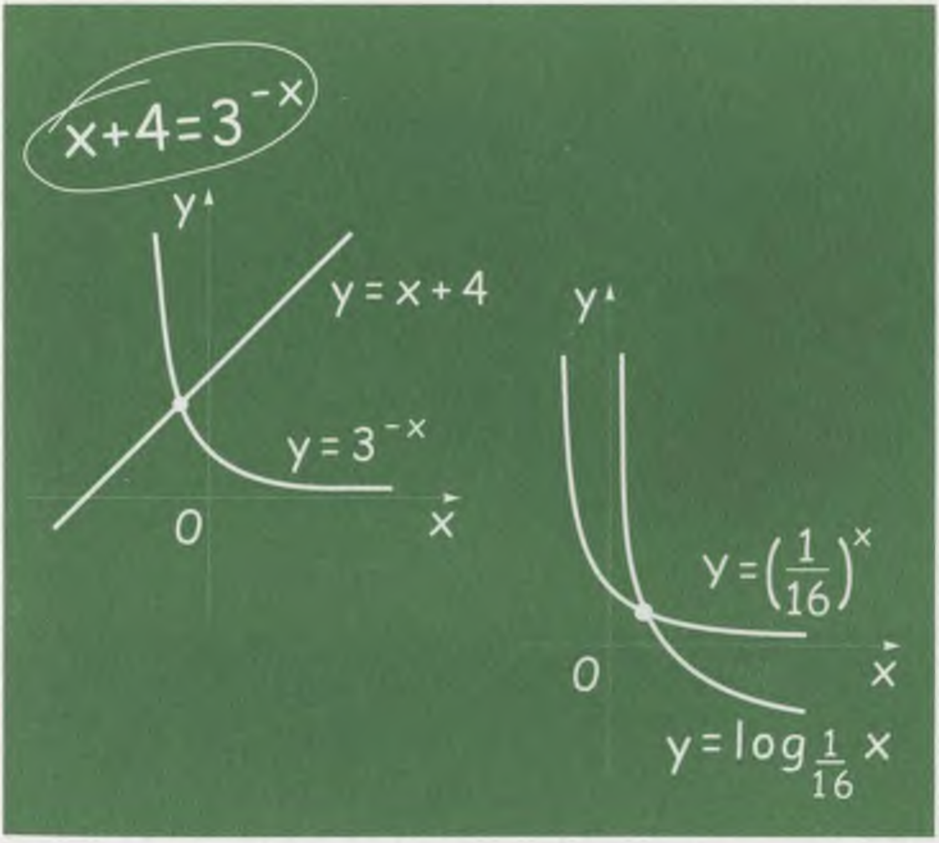
Б.П. Гейдман

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства



Российская академия образования
Открытый лицей
«ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ МНОГОПРЕДМЕТНАЯ ШКОЛА»
при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

Б. П. Гейдман

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Москва, 2003

УДК 37.018.43
ББК 22.141
Г29

Гейдман Б. П.

Г29 Логарифмические и показательные уравнения и неравенства. Учебное пособие для учащихся ОЛ ВЗМШ при МГУ им. Ломоносова. — М.: МЦНМО, 2003. — 48 с.: ил.

ISBN 5-94057-099-2

Пособие предназаначено для учащихся ОЛ ВЗМШ при МГУ им. Ломоносова. Оно содержит теоретический материал, посвященный общим принципам решения логарифмических и показательных уравнений, неравенств и систем уравнений, а также разобранные примеры и задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведено контрольное задание по данной теме.

Настоящее издание дополнено рядом примеров и задач, подобранных Е. А. Бернштейном и Ж. М. Рабботом.

Пособие рекомендовано к переизданию Методической комиссией отделения математики ОЛ ВЗМШ.

Рецензент А. А. Егоров.

ББК 22.141

ISBN 5-94057-099-2

Борис Петрович Гейдман

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

Компьютерная верстка Е. Е. Пушкарь

Подписано в печать 12.05.2003 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 6000 экз.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Оглавление

Введение

Настоящее пособие построено по следующему плану.

В §1 мы напоминаем некоторые основные понятия. §§ 2–4 посвящены логарифмическим и показательным уравнениям и неравенствам, основной прием решения которых состоит в построении цепочки равносильных переходов[1]. После нескольких переходов мы приходим к простейшему уравнению или неравенству, системе или совокупности простейших уравнений и неравенств.

§ 5 содержит задачи для самостоятельного решения, большинство из которых взяты из вариантов вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ разных лет. Также использованы задачи из «Сборника задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов», авторами которого являются Ивлев Б. М., Земляков А. Н. и др. Все задачи этого параграфа снабжены ответами, а к некоторым даны указания или решения.

Пять тестовых заданий, помещенных в тексте, помогут Вам научиться осуществлять равносильные переходы. Ключ к тестам (номера правильных ответов) дан после третьего параграфа.

Шестой параграф содержит задачи контрольного задания.

В качестве справочного материала приводим перечень основных формул по данной теме.

Действия со степенями.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p; \quad (a^p)^q = a^{pq}; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Здесь a и b — любые положительные числа; p и q — любые действительные числа.

Основное логарифмическое тождество.

$$a^{\log_a b} = b, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Действия с логарифмами.

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v; \qquad \log_a u^k = k \log_a u;$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v; \qquad \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$

Здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$; $u > 0$, $v > 0$, k — любое действительное число.

$$\log_{a^k} u = \frac{1}{k} \log_a u, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ u > 0,\ k \neq 0.$$

[1] Под равносильным переходом понимается переход от данного предложения к равносильному (см. §1 настоящего пособия).

§1. Равносильность и следование предложений

1. Если множество решений одного предложения (уравнения, неравенства или системы) A принадлежит множеству решений другого предложения B, то второе предложение называется следствием первого. Это обозначается так: $A \Rightarrow B$, читается: «из A следует B».

Тест 1. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Rightarrow$». Укажите этот пример.

1) $\log_2 x = \log_2(2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad x = 2 - x^2.$

2) $\log_x \dfrac{1}{3} = \log_{2-x^2} \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 2 - x^2.$

3) $\log_x(2 - x^2) < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 - x^2 < x, \\ 2 - x^2 > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

4) $2^{\log_2 x} = 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - x^2.$

5) $\log_2 x < \log_2(2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 - x^2.$

2. Предложения A и B называются равносильными, если множества их решений совпадают. Это обозначается так: «$A \Leftrightarrow B$».

Тест 2. Одна из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений. Укажите эту пару.

1) $\lg x = 0$ и $x = 1$.

2) $x^2 \geqslant 0$ и $2^x > 0$.

3) $\log_2 x > 1$ и $x > 2$.

4) $\lg x = \lg y$ и $x = y$.

5) $2^x + 2^{-x} = 1$ и $\lg x = \lg(-x)$.

Тест 3. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Leftrightarrow$». Укажите этот пример.

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 < 1. \end{cases}$

2) $\log_x(2-x)=2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2-x=x^2, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

3) $(\sin x+\sqrt{2})^x<1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x+\sqrt{2}<1, \\ x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x+\sqrt{2}>1, \\ x<0. \end{cases} \end{array}\right.$

4) $x\log_2 x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \log_2 x=0. \end{array}\right.$

5) $\log_2 x=\log_2(2x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2x-1, \\ x>0. \end{cases}$

§2. Логарифмические и показательные уравнения

При решении показательных и логарифмических уравнений можно пользоваться такими равносильными переходами

$$\begin{cases} a^p=a^q, \\ a>0, \\ a\neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p=q, \\ a>0, \\ a\neq 1. \end{cases} \tag{1}$$

$$\log_a u=\log_a v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u=v, \\ u>0, \\ a>0, \\ a\neq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Равносильность следует из строгой монотонности как показательной (в (1)), так и логарифмической (в (2)) функций.

Замечание. Вместо системы, полученной в (2), можно решать эквивалентную ей систему

$$\begin{cases} u=v, \\ v>0, \\ a>0, \\ a\neq 1. \end{cases}$$

Выбор зависит от того, какое из неравенств, $u > 0$ или $v > 0$, Вам проще решить.

Имеет место равносильный переход, выражающий стандартное определение логарифма:

$$\begin{cases} a^p = b, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p = \log_a b. \qquad (3)$$

Рассмотрим несколько примеров решения показательных и логарифмических уравнений, в которыми Вы встречаетесь на уроках алгебры и начал анализа.

Пример 1. $2^{x^2-3x+4} = 4$.

Решение. $2^{x^2-3x+4} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 4 = 2$.
Здесь мы сделали равносильный переход (1): показательная функция $y = 2^u$ — возрастающая, а потому каждое свое значение она принимает только один раз. Решая уравнение $x^2 - 3x + 4 = 2$, получаем ответ.

Ответ: $\{1; 2\}$.

Пример 2. $3^{x-3} = 7$.

Решение. По определению логарифма имеем:

$$3^{x-3} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = \log_3 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 + \log_3 7.$$

Ответ можно записать по-разному:

$$\{3 + \log_3 7\}$$

или (т.к. $3 = \log_3 27$ и $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$)

$$\{\log_3 189\}.$$

Пример 3. $2^{2x-1} = 3^{2x-1}$.

Решение. Т.к. $3^{2x-1} \neq 0$, то

$$2^{2x-1} = 3^{2x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = 1.$$

Поскольку $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, последнее уравнение равносильно такому:

$$2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Можно было решать это уравнение, «логарифмируя» обе его части, то есть пользуясь равносильным переходом (2). Покажем этот способ решения на следующем примере.

Пример 4. $3^{x+1} = 5^{x-2}$.

Решение. Воспользуемся равносильным переходом (2): логарифмическая функция строго монотонна, поэтому каждое свое значение она принимает ровно один раз.

$$3^{x+1} = 5^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \lg 3^{x+1} = \lg 5^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\lg 3 = (x-2)\lg 5 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x(\lg 3 - \lg 5) = -\lg 3 - 2\lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 3 + 2\lg 5}{\lg 5 - \lg 3}.$$

Ответ можно записать в таком виде: $\left\{\dfrac{\lg 3 + 2\lg 5}{\lg 5 - \lg 3}\right\}$, или так: $\left\{\dfrac{\lg 75}{\lg 5/3}\right\}$, или так: $\left\{\dfrac{1 + 2\log_3 5}{\log_3 5 - 1}\right\}$.

Замечание. С таким же успехом, как по основанию 10, можно было логарифмировать данное уравнение и по любому другому основанию. Несколько компактнее была бы запись при логарифмировании по основанию 3 или по основанию 5 — эти основания уже имеются в условии задачи. Если выбрать, например, основание 3, решение будет выглядеть так:

$$3^{x+1} = 5^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = (x-2)\log_3 5 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x(\log_3 5 - 1) = 1 + 2\log_3 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + 2\log_3 5}{\log_3 5 - 1}.$$

Теперь рассмотрим примеры 5–9, в которых равносильный переход (2) постепенно «набирает силу».

Пример 5. $\log_5(x-2) = 1$.

Решение. $\log_5(x-2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$.

Ответ: $\{7\}$.

Пример 6. $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$.

Решение.

$$\log_7 \log_3 \log_2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 \log_2 x = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \log_2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8.$$

Ответ: $\{8\}$.

Пример 7. $\log_x(x^2-4x+4)=1$.

Решение.

$$\log_x(x^2-4x+4)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-4x+4=x,\\ x>0,\\ x\neq 1,\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-5x+4=0,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4,\\ x=1,\end{array}\right.\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=4.$$

Ответ: $\{4\}$.

Пример 8. $\log_2(x^2-3x+1)=\log_2(2x-3)$.

Решение.

$$\log_2(x^2-3x+1)=\log_2(2x-3) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-3x+1=2x-3,\\ 2x-3>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-5x+4=0,\\ x>\dfrac{3}{2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4,\\ x=1,\end{array}\right.\\ x>\dfrac{3}{2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=4.$$

Ответ: $\{4\}$.

Остановимся подробнее на решении следующего уравнения.

Пример 9. $\log_{2x}(x^2-2x)=\log_{2x}(2x-3)$.

Решение. Логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел, поэтому необходимо выполнение условий $x^2-2x>0$ и $2x-3>0$.

Основание логарифмической функции — положительное, отличное от единицы число, отсюда $2x>0$ и $2x\neq 1$.

В силу строгой монотонности логарифмической функции из уравнения вытекает еще одно ограничение: $x^2-2x=2x-3$.

Учитывая, что из $x^2 - 2x = 2x - 3$ и $2x - 3 > 0$ следует $x^2 - 2x > 0$, приходим к равносильному переходу (2):

$$\log_{2x}(x^2 - 2x) = \log_{2x}(2x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

Замечание 1. Вместо цепочки равносильных переходов часто используют переходы к следствию. При этом возможно появление посторонних корней, которые (если они есть) в конце решения необходимо отбросить, например, с помощью проверки. Проиллюстрируем это на том же примере 9.

$$\log_{2x}(x^2 - 2x) = \log_{2x}(2x - 3) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 2x - 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Проверка. $x = 3$ — является решением данного уравнения, так как при $x = 3$ уравнение обращается в тождество: $\log_6 3 = \log_6 3$.

$x = 1$ — не является решением данного уравнения, так как в этом случае $2x - 3 = -1$, а логарифм отрицательного числа не определен.

Ответ: $\{3\}$.

Обратите внимание, что в цепочке переходов от одного уравнения к другому один раз встретился знак следствия «$\Rightarrow$» (все остальные переходы были равносильны), поэтому получившаяся совокупность уравнений ($x = 3$ или $x = 1$) является следствием данного уравнения.

Замечание 2. При решении последнего примера мы фактически использовали следующий равносильный переход:

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

В примерах 10–12 надо выполнить некоторые действия над логарифмами, входящими в уравнение (см. формулы из справочного материала). При этом приходится следить за равносильностью переходов.

Советуем предварительно выполнить задания теста 4.

Тест 4. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «$\Leftrightarrow$». Укажите этот пример.

1) $3\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b^3 = c.$

2) $-\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \frac{1}{b} = c.$

3) $\frac{1}{3}\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \sqrt[3]{b} = c.$

4) $2\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b^2 = c.$

5) $\frac{1}{2}\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \sqrt{b} = c.$

Пример 10. $\lg x + \lg(x+3) = 1.$

Решение.

$$\lg x + \lg(x+3) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lg((x+3)\cdot x) = 1, \\ x > 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x+3) = 10, \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Поясним равносильность первого перехода. Здесь мы воспользовались формулой $\log_a u + \log_a v = \log_a(uv)$, левая часть которой имеет смысл, когда $u > 0$ и $v > 0$, а правая часть — когда $uv > 0$. Поэтому при использовании этой формулы слева направо расширяется область определения уравнения и для равносильности надо ввести дополнительное условие $u > 0$ или $v > 0$.

Замечание. Советуем запомнить соответствующий равносильный переход:

$$\log_a u + \log_a v = c \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(uv) = c, \\ u > 0. \end{cases} \tag{4}$$

(см. также замечание на стр. 6).

Пример 11. $\log_{125}(\sin 2x - \sin x) + \frac{1}{3} = \log_5(-2\sin x)$.

Решение. Приводим левую часть уравнения к логарифму с основанием 5:

$$\frac{1}{3}\log_5(\sin 2x - \sin x) + \frac{1}{3} = \log_5(-2\sin x) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_5(\sin 2x - \sin x) + 1 = 3\log_5(-2\sin x) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_5(\sin 2x - \sin x) + \log_5 5 = \log_5(-2\sin x)^3 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_5(5(\sin 2x - \sin x)) = \log_5(-8\sin^3 x).$$

Далее, пользуясь равносильным переходом (2), приходим к системе:

$$\begin{cases} 5(\sin 2x - \sin x) = -8\sin^3 x, \\ \sin x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(2\sin x\cos x - \sin x) = -8\sin^3 x, \\ \sin x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(2\cos x - 1) = -8\sin^2 x, \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

(в последнем переходе мы сократили обе части уравнения на неравное нулю (отрицательное!) выражение $\sin x$).

Решим уравнение системы.

$$5(2\cos x - 1) = -8\sin^2 x \quad\Leftrightarrow\quad 10\cos x - 5 + 8(1-\cos^2 x) = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\cos^2 x - 10\cos x - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x = -\frac{1}{4}$$

(второй корень соответствующего квадратного уравнения, $\frac{3}{2}$, не может служить значением косинуса: $\frac{3}{2} > 1$).

Неравенству $\sin x < 0$ удовлетворяют только такие решения уравнения $\cos x = -\frac{1}{4}$:

$$x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{4}$, в ответе это же множество чисел можно записать по-другому.

Ответ: $\left\{\arccos\frac{1}{4} + (2n-1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Пример 12. $\log_4 x^2 + \log_2(x+2) = \log_2 \log_5 5$.

Решение. Воспользуемся тождеством $\log_a b^2 = 2\log_2 |b|$ (сравните с п. 4 теста 4) и заменим выражение $\log_4 x^2$ на $\log_2 |x|$. В результате получим равносильное уравнение:

$$\log_2 |x| + \log_2(x+2) = \log_2 1.$$

При следующем переходе мы опускаем условия $x+2>0$ и $x \neq 0$, так как из получаемого при этом переходе уравнения $|x|(x+2)=1$ следует, что $x \neq 0$ и $x+2>0$.

Итак,

$$|x|(x+2)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+2x-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x=-1\pm\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}-1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1;\ \sqrt{2}-1\}$.

Скажем несколько слов по поводу уравнений, в которых встречается «степенно-показательная» функция $y=(f(x))^{g(x)}$.

Мы будем считать, что эта функция определена, если $f(x)>0$; таким образом, если в уравнении или неравенстве встретилось выражение $(f(x))^{g(x)}$, то неравенство $f(x)>0$ является одним из условий, определяющих ОДЗ (область допустимых значений).

Возможны и другие определения. Единой, общепринятой договоренности в этом случае нет. Если Вам встретилась задача с такой функцией, надо обязательно четко указать, какого определения Вы придерживаетесь. Так, при нашем определении значения $x=0$ и $x=-1$ не являются корнями уравнения $x=x^{x+2}$, так как эти значения не входят в область определения функции $y=x^{x+2}$.

Укажем равносильный переход для показательных уравнений в более общем виде, чем раньше:

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x),\ h(x) \text{ определены.} \end{cases} \end{array} \right. \tag{5}$$

Пример 13. $(2x+3)^x = (4x^2+9+12x)^{\frac{x^3}{(x-3)(2x+2)}}$.

Решение. Заметим, что $4x^2+9+12x = (2x+3)^2$. Таким образом исходное уравнение можно переписать в виде $(2x+3)^x = (2x+3)^{\frac{2x^3}{(x-3)(2x+2)}}$. Воспользуемся равносильным переходом (5):

$$(2x+3)^x = (2x+3)^{\frac{x^3}{(x-3)(x+1)}} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{x^3}{(x-3)(x+1)}, \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3 = 1, \\ x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ясно, что вторая система не имеет решений, поэтому исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x-3)(x+1) = x^2, \end{array} \right. \\ x > -3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ -2x-3 = 0, \end{array} \right. \\ x > -3/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3/2, \end{array} \right. \\ x > -3/2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

§3. Логарифмические и показательные неравенства

Из строгой монотонности логарифмической и показательной функции следует равносильность таких переходов:

$$\begin{cases} a^p > a^q, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > q, \\ a > 1. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} a^p > a^q, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < q, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \log_a u > \log_a v, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > v, \\ v > 0, \\ a > 1. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \log_a u > \log_a v, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < v, \\ u > 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \tag{9}$$

Тест 5. Среди приведенных высказываний найдите истинное:

1) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$

2) $\log_{\sqrt{3}-1} x < 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}-1.$

3) $\log_x\left(\sqrt{5}-1\right) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-1 > x.$

4) $\left(\sqrt{3}-1\right)^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$

5) $\log_{\sqrt{5}-2} x > 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{5}-2.$

Приведем несколько примеров решения показательных и логарифмических неравенств.

Пример 14. $2^{3x} < 2^{x^2+2}$.

Решение. $2^{3x} < 2^{x^2+2} \Leftrightarrow 3x < x^2+2.$
Здесь мы сделали равносильный переход (6): показательная функция $y = 2^t$ — возрастающая. Далее решаем квадратное неравенство

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 15. $\log_{0,5}(x+1) > \log_{0,5}(2-x)$.

Решение. Логарифмическая функция $y = \log_{0,5} t$ — убывающая. Имеет место равносильный переход (9):

$$\log_{0,5}(x+1) > \log_{0,5}(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 < 2-x, \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x > -1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 16. $(1/3)^{2x} < 2$.

Решение. Заменив в правой части 2 на $(1/3)^{\log_{1/3} 2}$ и прологарифмировав неравенство по основанию $1/3$, приходим к неравенству $2x > \log_{1/3} 2$ (равносильный переход (7)).

Ответ: $\left(\frac{1}{2}\log_{1/3} 2; +\infty\right)$.

Пример 17. $\log_{x^2} |3x+1| < \frac{1}{2}$.

Решение. Здесь следует обратить внимание на то, что переменная x входит в основание логарифма. В зависимости от x основание логарифма может быть положительным и меньшим единицы или большим единицы, то есть при одних значениях x возможен переход (8), а при других — переход (9):

$$\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ (3x+1)^2 > x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 > 1, \\ 0 < (3x+1)^2 < x^2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ 0 < x < 1 \end{array}\right. \\ 8x^2 + 6x + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1 \end{array}\right. \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ 8x^2 + 6x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4} < x < 0, \\ 0 < x < 1 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Так же, как и в предыдущем параграфе, приведем общий вид равносильных переходов, используемых при решении показательных и логарифмических неравенств.

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > h(x), \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < h(x), \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10}$$

$$f(x)^{g(x)} \geqslant f(x)^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant h(x), \\ f(x) \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \leqslant h(x), \\ 0 < f(x) \leqslant 1. \end{cases} \end{array}\right. \tag{11}$$

Замечание. Последний равносильный переход можно записать следующим образом:

$$f(x)^{g(x)} \geqslant f(x)^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant h(x), \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \leqslant h(x), \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x),\ h(x) \text{ определены.} \end{cases} \end{array}\right.$$

Он отличается от перехода (11) тем, что случай $f(x) = 1$ рассматривается отдельно, но при решении задач последний переход, очевидно, требует лишних вычислений. Однако иногда полезно применять его для самопроверки.

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \tag{12}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \geqslant \log_{f(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \geqslant g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (13)$$

Теперь с помощью этих равносильных переходов решим еще два примера.

Пример 18. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \leqslant 1.$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \leqslant (4x^2 + 2x + 1)^0.$$

Согласно (11), получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x \leqslant 0, \\ 4x^2 + 2x + 1 \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x \geqslant 0, \\ 0 < 4x^2 + 2x + 1 \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x-1) \leqslant 0, \\ x(2x+1) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x(x-1) \geqslant 0, \\ x(2x+1) \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1/2 \\ x \geqslant 0, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ x \geqslant 1, \end{array}\right. \\ -1/2 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1/2 \leqslant x \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-1/2; 1]$.

Пример 19. $\log_x \left(\dfrac{4x+5}{6-5x}\right) < -1.$

Решение. Поскольку $-1 = \log_x \dfrac{1}{x}$, неравенство можно записать следующим образом:

$$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < \log_x \frac{1}{x}.$$

Пользуясь равносильным переходом (12), получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{4x+5}{6-5x} < \dfrac{1}{x},\\ \dfrac{4x+5}{6-5x} > 0,\\ x > 1\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{4x+5}{6-5x} > \dfrac{1}{x},\\ \dfrac{1}{x} > 0,\\ 0 < x < 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение каждой из получившихся систем не представляет особого труда. Решите их самостоятельно.

Ответ: $(1/2; 1)$.

Ключ к тестам

Номер теста	1	2	3	4	5
Номер правильного ответа	3	4	4	4	2

§4. Некоторые частные приемы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Распространенный способ решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств — замена переменной, сводящая уравнение или неравенство к алгебраическому (без логарифмической и показательной функций).

После решения алгебраического уравнения или неравенства остается решить совокупность или систему простейших показательных или логарифмических уравнений и неравенств.

Пример 20. $x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x - 5} = \dfrac{1}{x}$.

Решение. «Прологарифмируем» уравнение по основанию 2.

$$x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x - 5} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x - 5}) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\log_2^2 x - 3\log_2 x - 5)\log_2 x = -\log_2 x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0, \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0 \end{array}\right.$$

Решением первого уравнения этой совокупности является $x = 1$. После замены $\log_2 x = a$ второе уравнение перепишется в виде

$$a^2 - 3a - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $a = 4$ или $a = 1$, откуда $x = 16$ или $x = 1/2$.

Ответ: $\{1/2;\ 1;\ 16\}$.

Замечание. При решении этого уравнения способом сравнения степеней с одинаковыми основаниями:

$$x^{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 5} = x^{-1}$$

довольно часто теряется решение $x = 1$ (приравниваются только показатели степеней, а случай равенства основания степени единице не рассматривается). При решении этим способом следует использовать равносильный переход (5).

Пример 21. $\sqrt{\log_2(8x^2 + 8x)} = \log_{\sqrt{2}}(x^2 + x)$.

Решение. Данное уравнение принимает простой вид относительно новой переменной $y = \log_2(x^2 + x)$:

$$\sqrt{3 + y} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y \geqslant 0, \\ 3 + y = 4y^2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad y = 1.$$

Итак, $\log_2(x^2 + x) = 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x = 2 \qquad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-2;\ 1\}$.

Пример 22. $\log_{3x} 3 - \log_{3x} x + \log_3^2 x = 1$.

Решение. Приведем все логарифмы к одному основанию. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\log_3 x + 1} - \frac{\log_3 x}{\log_3 x + 1} + \log_3^2 x = 1.$$

Сделаем замену: $\log_3 x = y$. Получим:

$$\frac{1-y}{1+y} + y^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1-y)(1-(1+y)^2)}{1+y} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y(2+y) = 0 \end{array}\right. \\ y \neq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = 0, \\ y = -2. \end{array}\right.$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1, \\ \log_3 x = 0, \\ \log_3 x = -2. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1, \\ x = 1/9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1/9; 1; 3\}$.

Пример 23. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

Решение. Так как $81^x \neq 0$ при любом значении переменной x, то данное уравнение равносильно такому:

$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 2.$$

Положив $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, получим уравнение

$$3y^2 + y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Итак, $\left(\frac{4}{9}\right)^x = -1$ или $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$. Первое уравнение решений не имеет, так как $\left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$ при любом значении x, а решением второго уравнения является $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Замечание. Обратите внимание на то, что уравнение из условия примера 23 является однородным относительно переменных 4^x и 9^x. Напомним, что уравнение $f(x,y) = 0$ называется однородным степени $m \neq 0$, если для любого t выполняется равенство $f(tx,ty) = t^m f(x,y)$. Если $f(x,y)$ является многочленом относительно переменных x и y, то, разделив это уравнение на y^m, получим уравнение относительно одной переменной $\frac{x}{y} = z$.

Пример 24. $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62.$

Решение. Заметим, что $(4+\sqrt{15})^x \cdot (4-\sqrt{15})^x = 1$. Сделав замену $(4+\sqrt{15})^x = y$, получим уравнение $y + \dfrac{1}{y} = 62$, решениями которого являются числа $31 \pm 8\sqrt{15}$. Следовательно, $(4+\sqrt{15})^x = 31+8\sqrt{15}$ или $(4+\sqrt{15})^x = 31-8\sqrt{15}$. Решениями этих уравнений являются соответственно числа 2 и -2, так как $31 \pm 8\sqrt{15} = (4 \pm \sqrt{15})^2$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

Пример 25. $\dfrac{1}{2^x - 1} < \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}.$

Решение. Сделаем замену $2^{x-1=y}$. Тогда

$$\frac{1}{2y-1} < \frac{1}{1-y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-3y}{(2y-1)(1-y)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3} < y < 1. \end{array}\right.$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x-1} < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3} < 2^{x-1} < 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2^{x-1} < 2^{-1} \\ \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) < x-1 < 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ \log_2 4/3 < x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (\log_2 4/3; 1)$.

Пример 26. $\log_2(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}.$

Решение. $\log_2(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)} \quad \Leftrightarrow \quad \log_x 2 + 1 \leqslant \sqrt{\log_x 2 + 3}.$

Сделаем замену $\log_x 2 = y$. Получим:

$$y+1 \leqslant \sqrt{y+3} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+1 < 0, \\ y+3 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y+1 \geqslant 0, \\ y+3 \geqslant (y+1)^2, \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -3 \leqslant y < -1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant y \leqslant 1.$$

Итак, исходное неравенство равносильно

$$-3 \leqslant \log_x 2 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 > x > 0, \\ x^{-3} \geqslant 2, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ x^{-3} \leqslant 2, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \sqrt[3]{1/2}, \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \sqrt[3]{1/2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Следующие уравнения решаются с помощью дополнительных соображений.

Пример 27. $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Воспользуемся тем, что $5^x > 0$ при любом значении переменной x, и перейдем к равносильному уравнению $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Заметим, что $x = 2$ — решение этого уравнения. Покажем, что других решений нет.

Функция $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ убывает как сумма двух убывающих функций, а потому каждое свое значение (в частности, значение 1) она принимает только один раз.

Ответ: $\{2\}$.

Пример 28. $2^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 7 - 4^{1/3 \log_4 27}$.

Решение. Докажем, что $2^{\log_5 x} = x^{\log_5 2}$.

Действительно: $2^{\log_5 x} = 2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{\log_2 5}} = x^{\log_5 2}$.

Учитывая этот результат, получим:

$$2 \cdot 2^{\log_5 x} = 7 - 4^{\log_4 \sqrt[3]{27}} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^{\log_5 x} = 7 - 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^{\log_5 x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5.$$

Ответ: $\{5\}$.

Замечание. Бывает полезна формула $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, которая доказывается так же, как ее частный случай в решении примера 28.

Пример 29. Сколько решений имеет уравнение $e^x = x^2$?

Решение. Уравнение $e^x = x^2$ равносильно уравнению $e^x - x^2 = 0$. Покажем, что это уравнение имеет единственное решение.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x^2$. Обозначим ее производную $f'(x) = e^x - 2x$ через $g(x)$. Эта новая функция имеет единственную критическую точку $x = \ln 2$ ($g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$).

В точке $x = \ln 2$ функция $g(x) = e^x - 2x$ непрерывна и принимает значение $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$. При $x < \ln 2$ значения $g'(x) = e^x - 2$ отрицательны, а потому $g(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; \ln 2)$. При $x > \ln 2$ значения $g'(x)$ положительны — функция $g(x)$ возрастает на промежутке $(\ln 2; +\infty)$.

Следовательно, $g(\ln 2)$ — наименьшее значение функции $g(x)$, поэтому $g(x) \geqslant g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$ (действительно, $2 - 2\ln 2 > 0 \Leftrightarrow e > 2$, что очевидно, так как $e = 2{,}7\ldots > 2$. Приходим к следующему результату: производная $g(x)$ функции $f(x)$ принимает только положительные значения, а значит $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

2. Функция $f(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

$$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0, \text{ а } f(0) = 1.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ существует, по крайней мере, одно значение x_0 такое, что $f(x_0) = 0$. А так как, по доказанному, $f(x)$ — возрастающая функция, то каждое свое значение она принимает только один раз. Это означает, что данное уравнение имеет единственное решение.

Пример 30. $x + 4 = 3^{-x}$.

Решение. Легко подобрать (например, при помощи чертежа — см. рис. 1) корень данного уравнения $x = -1$: $-1 + 4 = 3^1$. Покажем, что других решений нет.

Функция $y = x + 4 - 3^{-x}$ возрастающая, а потому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Следовательно, у исходного уравнения не может быть больше одного решения.

Замечание. Когда мы доказываем, что какое-то уравнение не имеет больше корней, за исключением уже найденного, чаще всего мы опираемся на свойства монотонности правой и левой частей уравнения: если $f(x_0) = g(x_0)$, причем функция $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает в области допустимых значений x, то уравнение $f(x) = g(x)$

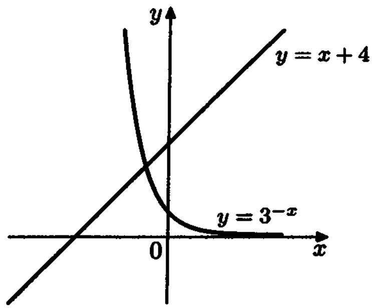


Рис. 1.

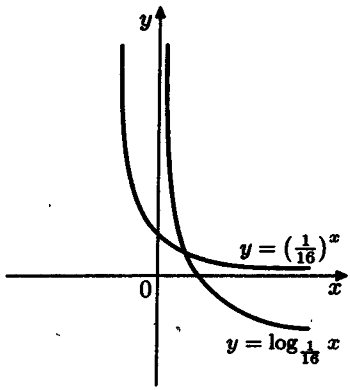


Рис. 2.

не имеет корней, отличных от x_0. В случае же, когда подобное уравнение не выполнено, вывод о числе корней уравнения сделать трудно. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Рассмотрим уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$. Из чертежа (рис. 2) «ясно», что данное уравнение имеет единственный корень, причем, поскольку функция $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $\log_{\frac{1}{16}} x$ взаимно обратны, соответствующая точка пересечения будет лежать на прямой $y = x$. Однако, оказывается, что данное уравнение имеет еще два корня: $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{4}$ (проверьте!). Дело, конечно, в том, что графики были изображены слишком неточно. На самом деле графики пересекаются в трех точках (см. рис. 3), причем третий корень нельзя записать с помощью элементарных функций (это

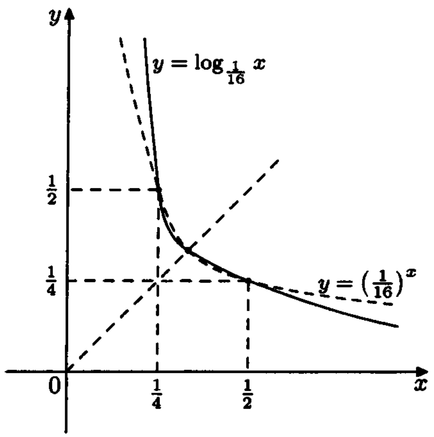


Рис. 3.

общий корень уравнений $x = \log_{\frac{1}{16}} x$ и $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x = x$.) Оказывается, что рассматриваемое уравнение больше трех корней не имеет. Это можно доказать с помощью производной (см. решение задачи 66 из § 5).

§5. Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–18)

Задача 1. $(x + 2^x)3^x = 1$.

Задача 2. $4^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Задача 3. $\log_x 4 = x$.

Задача 4. $3^x \log_2 x = 10$.

Задача 5. $3^{x+2} = \log_2(-x)$.

Задача 6. $\sqrt{x-1} + 2^x = \lg \dfrac{100}{x}$.

Задача 7. $-\sqrt[3]{2-x} + 3 = \lg(4-x)$.

Задача 8. $3^{x+1} = \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$.

Задача 9. $3^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9.$

Задача 10. $\log_2 \dfrac{x+3}{5} + \log_2 \dfrac{5}{x+1} = 1.$

Задача 11. $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 5.$

Задача 12. $\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \dfrac{37}{8}x + \dfrac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$

Задача 13. $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$

Задача 14. $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10+4^{x/2}}{4}.$

Задача 15. $\log_2(x^2+3) + \log_{1/2} 5 = 2\log_{1/4}(x-1) - \log_2(x+1).$

Задача 16. $(x-4)^2 \log_4(x-1) - 2\log_4(x-1)^2 = (x-4)^2 \log_{x-1} 4 - 2\log_{x-1} 16.$

Задача 17. $\sqrt{4 + 2\log_2\left(1 - \dfrac{8}{(2x+1)^2}\right)} = \log_2\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right) + 2\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Задача 18. $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18.$

Решите неравенства (19–41).

Задача 19. $\sqrt{x-1} + 2^x + \log_2 x \geqslant 2.$

Задача 20. $\sqrt{x-1} + 2^x + \log_2 x < 6.$

Задача 21. $\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leqslant 1.$

Задача 22. $2^{x^2} \cdot 3^x < 6.$

Задача 23. $2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \dfrac{x+4}{x+1} \geqslant \log_{x^2-2x-3}(x^2-2x-2)^2.$

Задача 24. $\log_x 2 < \log_{6-x} 2.$

Задача 25. $\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right) > \log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x} + \sqrt{x+1} + 1} + 1.$

Задача 26. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geqslant 0.$

Задача 27. $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{2 - \log_2 x} \leqslant 2.$

Задача 28. $3^{(x+3)^2}+1/9 \leqslant 3^{x^2-2}+27^{2x+3}$.

Задача 29. $\dfrac{1}{2}\log_3 x^2 \geqslant \dfrac{1}{3}\log_3(-x^3)$.

Задача 30. $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

Задача 31. $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x-1}$.

Задача 32. $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1$.

Задача 33. $5^x-3^{x+1} > 2(5^{x-1}-3^{x-2})$.

Задача 34. $\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x-7} \geqslant \sqrt{5^x+7}$.

Задача 35. $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Задача 36. $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x) \geqslant -2$.

Задача 37. $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leqslant 0$.

Задача 38. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)} > 1$.

Задача 39. $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1 > \log_3(3x^2-4x+2)$.

Задача 40. $\sqrt{7-\log_2 x^2}+\log_2 x^4 > 4$.

Задача 41. $\log_3\log_{9/16}(x^2-4x+3) \leqslant 0$.

Решите системы (42–43)

Задача 42. $\begin{cases} 3^{x+1}=\dfrac{49}{3}x^2+3, \\ 3^{x+1}-3 \leqslant x^2(14-3^{x+1})\cdot 3^x. \end{cases}$

Задача 43. $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4. \end{cases}$

Задача 44. При каких значениях x числа

$$\log_2(2x^2+4x),\quad \log_2(8-x^2-19x)\quad \text{и}\quad \log_2\left(x^2-15x+7\frac{1}{2}\right)$$

являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

Задача 45. Найдите все пары чисел $(x; y)$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

Задача 46. Найдите все пары чисел $(x; y)$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leqslant 8. \end{cases}$$

Задача 47. Известно, что $\log_a b = 7$. Найдите $\log_b a^2 b$.

Задача 48. Решите неравенство $f(g(x)) < g(f(x))$, где

$$f(x) = 2^x - 1, \qquad g(x) = 2x + 1.$$

Задача 49. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$$

имеет два различных решения.

Задача 50. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/a}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right) \cdot \log_5(x^2+ax+6) + \log_a 3 \geqslant 0$$

имеет одно решение.

Задача 51. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3) + 2^{-x^2+2x}\log_{1/3}(2|x-a|+2) = 0$$

имеет три решения.

Задача 52. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие равенству

$$(1+(a+2)^2)\log_3(2x-x^2) + (1+(3a-1)^2)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \log_3(2x-x^2) + \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Задача 53. Найти все значения параметра a из интервала $(2;5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[2;3]$, удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Задача 54. Найдите все решения уравнения

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3,$$

принадлежащие отрезку $[3/4; 1]$.

Задача 55. Найдите все решения уравнения

$$\log_2 |\operatorname{tg} x| + \log_4 \frac{\cos x}{2\cos x + \sin x} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[9/4; 3]$.

Задача 56. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \dfrac{y \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $|y| \leqslant 1$.

Задача 57. Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислите

$$\log_{\sqrt{a}/b} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}.$$

Решите неравенство, отыскав предварительно область допустимых значений переменной (58–60).

Задача 58. $\log_2(x^2 + 3) + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 2.$

Задача 59. $\sqrt{\lg \sin x} < x - 13\pi.$

Задача 60. $\dfrac{\lg(|x| + 1)}{\lg(|x| - 1)} + \sqrt{x^2 - 4} > 1.$

Пользуясь ограниченностью функций (на области допустимых значений), решите уравнение или неравенство (61–63).

Задача 61. $\log_2(3 + 2x - x^2) = \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi x}{4}.$

Задача 62. $\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2)\geqslant 1$.

Задача 63. $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1$.

С помощью графиков и производной найдите число корней уравнения в зависимости от значения параметра a (64–66).

Задача 64. $e^x=ax$.

Задача 65. $a^x=x$.

Задача 66. $a^x=\log_a x$.

Задача 67. Выясните, при каких значениях параметра b существует $a>0$ такое, что уравнение $2a\ln x=x^2+b$ имеет единственный корень.

Ответы, указания, решения

1. $\{0\}$. **2.** $\{1/4\}$. **3.** $\{2\}$. **4.** $\{2\}$. **5.** $\{-2\}$. **6.** $\{1\}$. **7.** $\{-6\}$. **8.** $\{-1/2;5/8\}$.
9. $\left\{3^{-\frac{1+\sqrt5}{2}};3^{\frac{\sqrt5-1}{2}};3\right\}$. **10.** $\{1\}$.
11. $\{-1;1\}$.

Указание. $26+15\sqrt3=\left(2+\sqrt3\right)^3$, $7+4\sqrt3=\left(2+\sqrt3\right)^2$, $2-\sqrt3=\dfrac{1}{2+\sqrt3}$.

12. $\{-1\}$. **13.** $\left\{7^{\log_2\frac{\sqrt{41}-5}{2}}\right\}$. **14.** $\{3\}$. **15.** $\{\sqrt2\}$. **16.** $\{5/4;5;6\}$. **17.** $\{3/2\}$.
18. $\{2;9\}$.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2-3\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $\sqrt3\leqslant x<+\infty$.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)+6\left(\sqrt{x}-3\right)$$

или

$$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6\right)=0.$$

Это уравнение равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности

$$\left[\begin{aligned}&\sqrt{x}-3=0\\&9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6=0.\end{aligned}\right.\qquad(14)$$

Решение первого уравнения есть $x = 9$. Это число входит в ОДЗ исходного уравнения и является единственным решением первого уравнения совокупности (14) на множестве $\sqrt{3} \leqslant x < +\infty$.

Решим второе уравнение совокупности. Сделаем замену $y = 3^{\sqrt{x^2-3}}$. Тогда $9^{\sqrt{x^2-3}} = 3^{2\sqrt{x^2-3}} = y^2$. Поскольку уравнение $y^2 - y - 6 = 0$ имеет два корня $y_1 = -2$ и $y_2 = 3$, то второе уравнение совокупности (14) равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\sqrt{x^2-3}} = -2 \\ 3^{\sqrt{x^2-3}} = 3. \end{array}\right.$$

Уравнение $3^{\sqrt{x^2-3}} = -2$ решений не имеет. Уравнение $3^{\sqrt{x^2-3}} = 3$ равносильно на ОДЗ исходного уравнения уравнению

$$\sqrt{x^2-3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Из получившихся чисел только $x = 2$ входит в ОДЗ исходного уравнения и потому является единственным решением второго уравнения совокупности (14). Итак, множество решений исходного уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 9$ и $x_2 = 2$.

19. $[1; +\infty)$.

Решение. Левая часть данного неравенства — возрастающая на области допустимых значений x, т. е. при $x \geqslant 1$, функция (как сумма трех возрастающих функций). Но при $x = 1$ левая часть принимает значение 2. Таким образом, исходное неравенство выполняется на всей области определения.

20. $[1; 2)$.

Указание. Воспользуйтесь идеей решения задачи 19.

21. $(-\infty; -2^{-3/7}] \cup (-2^{-3/4}; 1/2) \cup (1/2; 2^{-3/4}) \cup [2^{-3/7}; +\infty)$.

Указание. Перейдите к логарифмам по основанию 2 и сделайте замену $t = \log_2 |x|$.

22. $(-\log_2 6; 1)$. **23.** $(3; 1 + \sqrt{5}) \cup [10/3; +\infty)$. **24.** $(0; 1) \cup (3; 5)$. **25.** $[-1; 0]$. **26.** $\{5\} \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$. **27.** $(0; 1) \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$. **28.** $(-\infty; -11/6] \cup \{0\}$.
29. $(-\infty; 0)$.
30. $(-1/2; 0)$.

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > -2$, $x \neq 1/2$, $x \neq 0$. Таким образом, эта область состоит из трех промежутков: $-2 < x < -1/2$, $-1/2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$. Рассмотрим данное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

а) Пусть $-2 < x < -1/2$. Тогда, учитывая, что x отрицательно на этом интервале, получаем, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1}{x} + \frac{\log_2(2+x)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6x-(2x+1)}{x(2x+1)} > \frac{\log_2(2+x)}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2(2+x) > \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{15}$$

Легко видеть, что на этом интервале справедливы неравенства

$$\log_2(2+x) < \log_2\frac{3}{2} < 1, \quad \frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2.$$

Значит, неравенство (15), а значит, и исходное неравенство, не имеет решений на интервале $-2 < x < -1/2$.

б) Пусть $-1/2 < x < 0$. Очевидно, что на этом интервале

$$1 + \log_2(2+x) > 1 + \log_2\frac{3}{2} > 0,$$

и, следовательно, правая часть исходного неравенства отрицательна. В то же время для любой точки x из рассматриваемого интервала

$$\frac{6}{2x+1} > 0.$$

Значит, для всех x из интервала $-1/2 < x < 0$ исходное неравенство справедливо.

в) Пусть $x > 0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{16}$$

Очевидно, что на этом множестве справедливы неравенства

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2, \quad 1 < \log_2(2+x).$$

Отсюда следует:

1) неравенство (16) не имеет решений на том множестве, где

$$\log_2(x+2) \geqslant 2,$$

т. е. неравенство (16) не имеет решений на множестве $x \geqslant 2$;

2) неравенство (16) не имеет решений на том множестве, где $\dfrac{4x-1}{2x+1} \leqslant 1$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $x > 0$, получаем, что неравенство (16) не имеет решений на множестве $0 < x \leqslant 1$. Остается найти решения неравенства (16), принадлежащие интервалу $1 < x < 2$. Но на этом интервале

$$\log_2(2+x) > \log_2 3, \quad \frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Покажем теперь, что справедливо числовое неравенство

$$\log_2 3 > 7/5. \tag{17}$$

Действительно, поскольку $3^5 > 2^7$, то $3 > 2^{7/5}$, откуда и очевидна справедливость неравенства (17). Итак, на интервале $1 < x < 2$

$$\log_2(2+x) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x-1}{2x+1}.$$

Значит, неравенство (16) не имеет решений на интервале $1 < x < 2$. Подводя итог, получаем что множество решений исходного неравенства есть интервал $-1/2 < x < 0$.

31. $(0;1/2)$. **32.** $(0;+\infty)$. **33.** $(3;+\infty)$. **34.** $[\log_5 7;2]$. **35.** $[-2;-1)\cup[1;+\infty)$. **36.** $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$.

37. $\{1\}$.

Решение. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех значений x, удовлетворяющих одновременно условиям

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ 8x - 2x^2 - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Разделив третье неравенство на -2, получим, что эти условия можно записать в виде

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x + 3 \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Пусть $x = 1$. Подставляя это значение в исходное неравенство, получаем $\log_5 \dfrac{1}{5} + 1 = -1 + 1 = 0$, т. е. значение $x = 1$ является его решением.

Пусть $x = 3$, тогда левая часть исходного неравенства равна

$$\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 3 - 1 + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3} = \log_5 \frac{3}{5^{2/3}}.$$

Сравним $\frac{3}{5^{2/3}}$ с единицей.

$$\frac{3}{5^{2/3}} \vee 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \vee 5^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 \vee 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad 27 \vee 25.$$

Понятно, что в последнем неравенстве этой цепочки должен стоять знак «$>$», значит и в первом неравенстве также стоит знак «$>$». Поэтому $\log_5 \frac{3}{5^{2/3}} > 0$, и следовательно, значение $x = 3$ не является решением исходного уравнения.

38. $(3; +\infty)$. **39.** $(-1; 1/3] \cup [1; 7/3)$. **40.** $[-2^{7/2}; -2^{3/8}) \cup (2^{3/8}; 2^{7/2}]$. **41.** $(2 - \sqrt{2}; 3/4] \cup [13/4; 2 + \sqrt{2})$. **42.** $\{0\}$. **43.** $(4; 4)$.

44. $\{-8\}$.

Указание. Числа $\log_2(2x^2 + 4x)$, $\log_2(8 - x^2 - 19x)$ и $\log_2\left(x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}\right)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника в следующих случаях:

$$1) \begin{cases} 2x^2 + 4x = 8 - x^2 - 19x, \\ 2\log_2(2x^2 + 4x) > \log_2\left(x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}\right) > 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 + 4x = x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}, \\ 2\log_2(2x^2 + 4x) > \log_2(8 - x^2 - 19x) > 0, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 8 - x^2 - 19x = x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}, \\ 2\log_2(8 - x^2 - 19x) > \log_2(2x^2 + 4x) > 0. \end{cases}$$

45. Любая пара чисел $(x; y)$ таких, что $3/2 < x < 2$, $1 < y < 2$. **46.** $(-1; -3)$, $(3; -3)$; **47.** $\{9/7\}$. **48.** $(-\infty; 0)$. **49.** $(7; 7{,}5) \cup (7{,}5; +\infty)$.

50. $\{2\}$.

Решение. Заметим, что значение параметра a должно удовлетворять условиям $a > 0$, $a \neq 1$. Воспользуемся формулами $\log_{1/a} b = -\frac{\log_3 b}{\log_3 a}$ и $\log_a 3 = \frac{1}{\log_3 a}$. Тогда исходное неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{-\log_3\left(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1\right)\log_5(x^2 + ax + 6) + 1}{\log_3 a} \geqslant 0. \qquad (18)$$

Разберем два случая: $0 < a < 1$ и $a > 1$.

1. При $0 < a < 1$ получаем, что $\log_3 a < 0$, следовательно неравенство (18) равносильно неравенству

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6) \geqslant 1. \qquad (19)$$

Сделаем замену $t = x^2 + ax + 5$. Тогда последнее неравенство можно переписать в виде

$$\log_3(\sqrt{t}+1)\log_5(t+1) \geqslant 1.$$

Функция $f(t) = \log_3(\sqrt{t}+1)\log_5(t+1)$ определена при всех $t \geqslant 0$ и монотонно возрастает на области определения. При этом $f(4) = 1$. Таким образом неравенство (19) можно записать в виде $f(t) \geqslant f(4)$. Последнее, в силу монотонности $f(t)$ равносильно неравенству $t \geqslant 4$. Получаем:

$$x^2 + ax + 5 \geqslant 4.$$

Это неравенство при всех $0 < a < 1$ имеет бесконечно много решений, а значит, среди этих a нет чисел, удовлетворяющих условию задачи.

2. Пусть $a > 1$. Тогда неравенство (18) равносильно неравенству

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6) \leqslant 1.$$

По аналогии с первым случаем получаем, что это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+ax+5 \geqslant 0, \\ x^2+ax+5 \leqslant 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+5 \geqslant 0, \\ x^2+ax+1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Если дискриминант $D = a^2 - 4$ квадратного трехчлена, стоящего в левой части второго неравенства последней системы, отрицателен, то оно, а значит — и вся система, не имеет решений. Следовательно, допустимые значения a должны удовлетворять неравенствам $a^2 - 4 \geqslant 0$ и $a > 1$, т.е. $a \geqslant 2$.

При $a > 2$ корни квадратного трехчлена $x^2 + ax + 1$ существуют и удовлетворяют неравенству $x^2 + ax + 5 \geqslant 0$, следовательно исходное неравенство имеет не менее двух решений.

Если $a = 2$, то неравенство $x^2 + ax + 1 \leqslant 0$ имеет одно решение $x = -1$, которое является решением системы

$$\begin{cases} x^2+ax+5 \geqslant 0, \\ x^2+ax+1 \leqslant 0 \end{cases}$$

при $a = 2$. Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь $a = 2$.

51. $\{1/2; 1; 3/2\}$.

52. Если $a = 1/3$, то $x = 1$; если $a \neq 1/3$, то $x \in \emptyset$.

Решение. При любом значении параметра a все искомые значения x должны удовлетворять неравенствам $2x - x^2 > 0$ и $1 - \dfrac{x^2}{2} > 0$, т. е. $0 < x < \sqrt{2}$. Для любого значения x из этой области выполнены неравенства

$$2x - x^2 = 1 - (1-x)^2 \leqslant 1 \text{ и } 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant 1,$$

и, значит,

$$\log_3(2x - x^2) \leqslant 0, \quad \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \leqslant 0.$$

Если $a \neq 2$ и $a \neq 1/3$, то

$$(1 + (a+2)^2)\log_3(2x - x^2) \leqslant \log_3(2x - x^2),$$

$$(1 + (3a-1)^2)\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right),$$

и исходное неравенство может выполняться только для тех значений x, для которых одновременно

$$\begin{cases} \log_3(2x - x^2) = 0, \\ \log_{11}\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

что равносильно

$$\begin{cases} 2x - x^2 = 1, \\ 1 - \dfrac{x^2}{2} = 1. \end{cases}$$

Последняя система решений не имеет. Следовательно, при $a \neq -2$ и $a \neq 1/3$ нет x, удовлетворяющих данному в условии задачи равенству.

При $a = -2$ исходное равенство принимает вид

$$\log_3(2x - x^2) + 50\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Получившееся уравнение равносильно на множестве $0 < x < \sqrt{2}$ уравнению $\log_{11}\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 0$, не имеющему на этом множестве решений.

При $a = 1/3$ исходное равенство имеет вид

$$\frac{58}{9}\log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Это уравнение равносильно на множестве $0 < x < \sqrt{2}$ уравнению $\log_3(2x - x^2) = 0$, которое равносильно уравнению $2x - x^2 = 1$, имеющему единственный корень $x = 1$. Этот корень удовлетворяет условию $0 < x < \sqrt{2}$, и значит, является решением задачи.

53. $\{9\pi/13; 15\pi/13\}$.

Решение. Из справедливого для всех a и x неравенства $|\sin ax| \leqslant 1$ следует неравенство

$$\log_2(3 - |\sin ax|) \geqslant 1. \tag{20}$$

Кроме того, имеем верное для всех a и x неравенство

$$\cos(\pi x - \pi/6) \leqslant 1. \tag{21}$$

Сравнивая неравенства (20) и (21), заключаем, что данное в условии уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\pi x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1, & (22) \\ |\sin ax| = 1. & (23) \end{cases}$$

Уравнение (22) имеет решения $x = \dfrac{1}{6} + 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, из которых отрезку $[2; 3]$ принадлежит лишь $x_1 = 2 \cdot 1 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{13}{6}$. Таким образом, данное в условии задачи уравнение имеет решение на отрезке $[2; 3]$ в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\left|\sin \frac{13}{6}a\right| = 1. \tag{24}$$

Следовательно, нам надо найти все решения уравнения (24), принадлежащие промежутку $2 < a < 5$. Уравнение (24) равносильно уравнению

$$\sin^2 \frac{13}{6}a = 1.$$

Используя тождество $\sin^2 \dfrac{13}{6}a = \dfrac{1 - \cos\frac{13}{3}a}{2}$, это уравнение можно переписать так:

$$\cos \frac{13}{3}a = -1. \tag{25}$$

Решения уравнения (25) имеют вид

$$\alpha = \frac{3}{13}\pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Найдем теперь все целые числа n, удовлетворяющие неравенствам

$$2 < \frac{3}{13}\pi(2n+1) < 5.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{26}{3\pi} < 2n+1 < \frac{65}{3\pi}. \tag{27}$$

Легко проверить, что $1 < \frac{26}{3\pi} < 3$ и $5 < \frac{65}{3\pi} < 7$. Поэтому неравенству (27) удовлетворяют целые числа n_1 и n_2, для которых

$$2n_1 + 1 = 3, \quad 2n_2 + 1 = 5.$$

т. е. $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. С помощью формулы (26) находим a, удовлетворяющие условию задачи:

$$a_1 = \frac{3}{13}\pi \cdot 3 = \frac{9\pi}{13}, \quad a_2 = \frac{3}{13}\pi \cdot 5 = \frac{15\pi}{13}.$$

54. $\{\pi/4\}$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

Сделав замену $4^{\cos^2 x} = t$, получим квадратное уравнение $\frac{1}{4}t^2 + t - 3 = 0$, корнями которого являются $t_1 = -6$, $t_2 = 2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 4^{\cos^2 x} = -6 \\ 4^{\cos^2 x} = 2. \end{array}\right.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как число -6 не входит в область значений показательной функции. Второе уравнение равносильно уравнению $\cos^2 x = 1/2$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Среди полученных чисел имеется только одно, лежащее на отрезке $[3/4; 1]$, а именно $x = \pi/4$.

55. $\{3\pi/4\}$.

Указание. Задача решается аналогично №54.

56. Система имеет бесконечно много решений $(x; -1)$, где $x = \pi/2+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Из второго уравнения системы выразим y через x. Для краткости обозначим $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$ через a. Тогда второе уравнение системы можно переписать в виде

$$(25-6a)y^2 + (6-2a)y + 1 = 0. \tag{28}$$

Докажем, что для любого решения системы не выполняется равенство $25 - 6a = 0$.

Если это равенство верно, т.е. если $a = 25/6$, то из уравнения (28) следует, что $y = 3/7$. Но тогда, используя первое уравнение системы, получаем, что

$$-\frac{3}{7} \leqslant y\sin x = \log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right| = \log_2\left|\frac{3\sin x}{16}\right| \leqslant \log_2\frac{3}{16} \leqslant -2.$$

Очевидно, что получилось противоречие, которое и означает, что для любого решения системы равенство $25 - 6a = 0$ выполняться не может.

Теперь найдем корни уравнения (28), решая его как квадратное относительно y. Получаем: $y_{1,2} = \dfrac{-(3-a) \pm \sqrt{a^2-16}}{25-6a}$. Так как

$$a^2 - 16 = (4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})^2 - 16 = (4^{\sin^2 x} - 4^{\cos^2 x})^2$$

то

$$y_1 = \frac{2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}, \quad y_2 = \frac{2\cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}$$

Приведенные рассуждения показывают, что исходная система равносильна совокупности двух систем; назовем их I и II соответственно:

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ y = \dfrac{2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ y = \dfrac{2\cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}, \end{cases}$$

Решим систему I. Пользуясь вторым уравнением, находим

$$\frac{1+3y}{y} = 3 + \frac{1}{y} = 3 + \frac{25 - 6(4^{\sin^2} + 4^{\cos^2 x})}{2\cdot 4^{\sin^2} x - 3} = \frac{16 - 6\cdot 4^{\cos^2} x}{2\cdot 4^{\sin^2 x - 1}} = 2\cdot 4^{\cos^2 x}.$$

Здесь мы пользовались тем, что для решений системы выполнено условие $y \neq 0$. Подставляя теперь $2 \cdot 4^{\cos^2 x}$ вместо $\dfrac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения, получаем

$$\log_2 \left|\frac{y \sin x}{1+3y}\right| = \log_2 |\sin x| - \log_2 \left|\frac{1+3y}{y}\right| =$$
$$= \log_2 |\sin x| - \log_2(2 \cdot 4^{\cos^2 x}) = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\cos^2 x.$$

Пользуясь тем, что по условию $|y| \leqslant 1$, а также первым уравнением системы и неравенствами $\log_2 |\sin x| \leqslant 0$ и $\cos^2 x \geqslant 0$ получаем, что

$$-1 \leqslant y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\cos^2 x \leqslant -1.$$

Отсюда видно, что должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} y \sin x = -1, \\ \log_2 |\sin x| = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \sin x = -1, \\ |\sin x| = 1. \end{cases}$$

Если $\sin x = -1$, т. е. если $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $y = 1$. Подставляя найденные значения x и y во второе уравнение системы I получаем неверное равенство $1 = -1$. Если же $\sin x = 1$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $y = -1$. Подставляя найденные значения x и y в оба уравнения системы I, убеждаемся, что они им удовлетворяют. Итак, система I имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = -1. \end{cases}$$

Решим теперь систему II. Пользуясь вторым уравнением системы, находим, что $\dfrac{1+3y}{y} = 2 \cdot 4^{\sin^2 x}$. Подставляя теперь $2 \cdot 4^{\sin^2 x}$ вместо $\dfrac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения, так же как и ранее, находим, что

$$y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\sin^2 x.$$

Воспользуемся теперь условием $|y| \leqslant 1$ и неравенствами $\log_2 |\sin x| \leqslant 0$, $\sin^2 x \geqslant 0$. Как и ранее, получаем, что

$$-1 \leqslant y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\cos^2 x \leqslant -1,$$

откуда следует, что для решений системы II должны выполняться следующие условия

$$\begin{cases} y\sin x = -1, \\ \log_2|\sin x| = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

Но последние два из этих равенств не могут выполняться одновременно. Следовательно, система II решений не имеет.

57. $\{-\sqrt{3}/3\}$.

Решение. Из равенства $\log_b a = \sqrt{3}$ следует, что $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$, $b = b^{\sqrt{3}}$. Так как $\sqrt{a} = a^{1/2}$ и $a = b^{\sqrt{3}}$, то

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b} = \frac{b^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{b} = b^{\frac{\sqrt{3}}{2}-1} = b^{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}.$$

Так как $\sqrt{b} = b^{1/2}$, $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$ и $a = b^{\sqrt{3}}$, то можем записать

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{b^{\sqrt{3}}/2}{b^{1/2}} = b^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)}.$$

Обозначим $A = b^{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}$, можно записать, что

$$b^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)} = A^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Так как $b > 0$, $b \neq 1$, то $A > 0$, $A \neq 1$. Применяя формулу $\log_\alpha \alpha^\beta = \beta$, получаем, что $\log_{\sqrt{a}/b} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \log_A A^{-\sqrt{3}/3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

58. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

59. $\{\pi/2 + 2\pi k | k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 7\}$.

Указание. Область определения неравенства состоит из точек, в которых $\sin x = 1$.

60. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

61. $\{1\}$.

Указание. Докажите, что максимальное значение функции, стоящей в левой части этого уравнений, равно минимальному значению функции, стоящей в правой части.

62. $\{-1\}$. **63.** $\{2\}$.

64. При $a < 0$ — один корень, при $0 \leqslant a < e$ корней нет, при $a = e$ — один корень, при $a > e$ — два корня.

Решение. Требуется (для каждого a) определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = e^x - ax$. Исследуем функцию $f(x)$. $f'(x) = e^x - a$. Если $a \leqslant 0$, то $f'(x) > 0$ для любого x, поэтому f возрастает на всей числовой прямой и принимает каждое значение из множества значений в точности один раз. Если $a < 0$, то $E(f) = \mathbb{R}$;[1] если $a = 0$, то $E(f) = (0; \infty)$. Следовательно, при $a < 0$ уравнение имеет один корень, а при $a = 0$ корней нет. Пусть теперь $a > 0$. Тогда $f'(x) = 0$ при $e^x = a$, т.е. при $x = \ln a$. f возрастает на промежутке $[\ln a; \infty)$, убывает на промежутке $(\infty; \ln a]$; в точке $x = \ln a$ функция имеет минимум, причем $f(\ln a) = a(1 - \ln a)$ (рис. 4, $a = 3$). Множество значений функции f — промежуток $[a(1 - \ln a); \infty)$, и каждое свое значение (кроме $a(1 - \ln a)$) функция f принимает в точности два раза. Таким образом, при $a(1 - \ln a) < 0$, т.е. при $a > e$, уравнение имеет два корня, при $a = e$ — один корень, при $a(1 - \ln a) > 0$, т.е. при $0 < a < e$, корней нет.

65. Нет корней при $a > e^{1/e}$, один корень при $0 < a \leqslant 1$, $a = e^{1/e}$, два корня при $1 < a < e^{1/e}$.

Указание. Функция $f(x) = a^x - x$ убывает при $0 < a < 1$, имеет одну точку экстремума (минимум) при $a > 1$ (эта точка — корень уравнения

$$f'(x) = a^x \ln a - 1 = 0$$

— точка $x_0 = -\log_a(\ln a))$. Значение f в этой точке

$$f(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

обращается в нуль при

$$a^{\frac{1}{\ln a}} = a^{\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{1}{\ln a}} = \frac{1}{\ln a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln a}\ln a = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln a} = e \quad \Leftrightarrow \quad \ln a = \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad a = e^{1/e}.$$

[1]Через $E(f)$ обычно обозначается множество значений функции f.

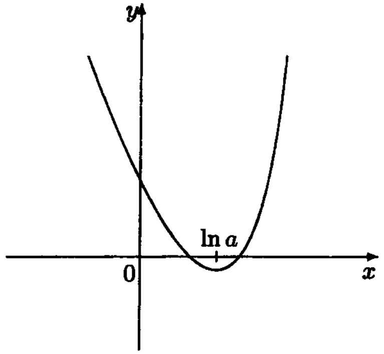


Рис. 4

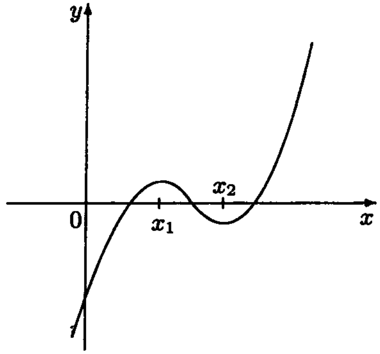


Рис. 5

66. При $0 < a < e^{-e}$ уравнение имеет три корня, при $1 < a < e^{1/e}$ — два корня, при $a = e^{1/e}$ и $e^{-e} \leqslant a < 1$ — один корень, при $a > e^{1/e}$ корней нет.

Решение. I. Пусть $a > 1$. Тогда:

если $a^x > x$, то $x > \log_a x$, поэтому $a^x > \log_a x$;

если $a^x < x$, то $x < \log_a x$, поэтому $a^x < \log_a x$;

если $a^x = x$, то $x = \log_a x$, поэтому $a^x = \log_a x$. Таким образом, число корней уравнения $a^x = \log_a x$ (при $a > 1$) равно числу корней уравнения $a^x = x$ и равно (см. задачу 65): двум при $1 < a < e^{1/e}$, одному при $a = e^{1/e}$, нулю при $a > e^{1/e}$.

II. Пусть $0 < a < 1$. Положим $f(x) = a^x - \log_a x$. Тогда

$$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a} = \frac{xa^x \ln^2 a - 1}{x \ln a}.$$

Так как $\ln a < 0$, знак $f'(x)$ совпадает со знаком функции $g(x) = 1 - - xa^x \ln^2 a$. Исследуем функцию $g(x)$. $g'(x) = -a^x \ln^2 a(1 + x \ln a)$. $g'(x) = 0$ при $x = x_0 = -\frac{1}{\ln a}$, $g'(x) > 0$ при $x > -\frac{1}{\ln a}$, $g'(x) < 0$ при $0 < x < -\frac{1}{\ln a}$ (напомним, что $\ln a < 0$). Далее, $g(0) = 1$ и $g(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Следовательно, $g(x)$ убывает от 1 до $g(x_0)$ на промежутке $[0; x_0]$ и возрастает от $g(x_0)$ до 1 на промежутке $[x_0; \infty)$. Если $g(x_0) < 0$, то функция g обращается в нуль в двух точках x_1 и x_2, принадлежащих соответственно промежуткам $(0; x_0)$ и $[x_0; \infty)$. В каждой из этих точек f' также обращается в нуль и меняет знак с плюса на минус в точке x_1 и с минуса на плюс в точке x_2. Поэтому функция f имеет максимум в точке x_1 и минимум в точке x_2. Если $g(x_0) = 0$, то g, а следовательно, и

f' положительны на промежутках $(0; x_0)$ и $(x_0; \infty)$. Поэтому f возрастает на промежутках $(0; x_0]$ и $[x_0; \infty)$, а значит, и на промежутке $(0; \infty)$. Наконец, если $g(x_0) > 0$, то f возрастает на промежутке $(0; \infty)$.

Найдем при каких a значение g в точке x_0 отрицательно:

$$g(x_0) = 1 + \ln a \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} < 0 \text{ при } \ln a \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} < -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^{-\frac{1}{\ln a}} > -\frac{1}{\ln a} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\ln a} \ln a > \ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\ln a} \ln a > -\ln(-\ln a) \quad \Leftrightarrow \quad -\ln(-\ln a) < -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(-\ln a) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\ln a > e \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln a < -e \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < e^{-e}.$$

Отметим, что любой корень уравнения $a^x = x$ является также корнем уравнений $x = \log_a x$ и $a^x = \log_a x$. При $0 < a < 1$ уравнение $a^x = x$ имеет в точности один корень x_3 (см. задачу 65). Мы проверим, что $x_3 \in (x_1; x_2)$, откуда будет следовать, что $f(x_1) > 0$, а $f(x_2) < 0$, так как f убывает на промежутке $[x_1; x_2]$. Далее, x_3 принадлежит промежутку $(x_1; x_2)$ тогда и только тогда, когда $g(x_3) < 0$. Найдем $g(x_3)$:

$$g(x_3) = 1 - x_3 a^{x_3} \ln^2 a = 1 - x_3^2 \ln^2 a,$$

так как $a^{x_3} = x_3$. Кроме того, $a = x_3^{1/x_3}$, поэтому $\ln a = \dfrac{\ln x_3}{x_3}$, т.е.

$$g(x_3) = 1 - x_3^2 \frac{\ln^2 x_3}{x_3^2} = 1 - \ln^2 x_3.$$

Нужно проверить, что $\ln^2 x_3 > 1$, т.е. $x_3 < \dfrac{1}{e}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^{1/x}$. Сразу отметим, что $\varphi(x_3) = x_3^{1/x_3} = a$ и $\varphi\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{-e}$. На промежутке $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$ функция φ возрастает. В самом деле, $\varphi(x) = x^{1/x} = e^{\ln x / x}$ и

$$\varphi'(x) = e^{\ln x / x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) > 0$$

на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$. Далее, $0 < a < e^{-e}$, т.е. $0 < \varphi(x_3) < \varphi\left(\dfrac{1}{e}\right)$, из этого неравенства в силу возрастания φ следует неравенство $0 < x_3 < \dfrac{1}{e}$.

Множество значений функции f при любом $a \in (0; 1)$ — вся числовая прямая. Так как при $e^{-e} < a < 1$ функция f возрастает, то она принимает каждое свое значение в точности один раз,в том числе и значение 0. При $0 < a < e^{-e}$ функция f возрастает на промежутке $(0; x_1]$, убывает на промежутке $[x_1; x_2]$, возрастает на промежутке $[x_2; \infty)$, причем $f(x_1) > 0$а $f(x_2) < 0$ (рис. 5). Из рисунка видно, что каждое свое значение из промежутка $(f(x_2); f(x_1))$ функция принимает три раза, в том числе она принимает три раза значение 0.

67. $b \in (-\infty; 1]$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 2a\ln x$ имеет минимум при

$$f'(x) = 2x - \frac{2a}{x} = 0,$$

т. е. при $x = \sqrt{a}$. Функция f убывает от ∞ до $f(\sqrt{a}) = a - a\ln a$ на промежутке $(0; \sqrt{a}]$, возрастает от $f(\sqrt{a}) = a - a\ln a$ до ∞ на промежутке $[\sqrt{a}; \infty)$. Следовательно, каждое свое значение (кроме $a - a\ln a$) функция принимает два раза, а значение $a - a\ln a$ — один раз. Таким образом, должно быть выполнено равенство $a - a\ln a = b$ и осталось узнать, при каких b имеет корни уравнение (относительно a) $a - a\ln a = b$. Таким образом, нужно найти множество значений функции $g(a) = a - a\ln a$. Функция g имеет максимум при

$$g'(a) = 1 - a \cdot \frac{1}{a} - \ln a = -\ln a = 0,$$

т. е. при $a = 1$. При этом g возрастает от 0 до 1 на промежутке $(0; 1]$ и убывает от 1 до $-\infty$ на промежутке $[1; \infty)$. Следовательно, $E(g) = (-\infty; 1]$. Отметим, что для $0 < b < 1$ существует два таких значения a, при $b = 1$ и $b < 0$ — одно.

§6. Контрольное задание

Обязательные задачи.

Решите уравнения (1–10):

1. $2^{3x-1} = 5 \cdot 3^{6x-2}$.

2. $\dfrac{1}{x}\log_7\left(\dfrac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x}\right) = 1$.

3. $\log_3(x+6) + \log_3(x-2) = 2$.

4. $\log_{\sqrt{7}}(\sin x - \cos x) + 1 = \log_7(7 + 3\cos 4x)$.

5. $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\lg x} = \sqrt{x}$.

6. $\log_{49}(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}\dfrac{2x+9}{7x+9} = 0$.

7. $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

8. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

9. $(\log_x(9x^2)) \cdot \log_3^2 x = 4$.

10. $\sqrt{\log_{\frac{1}{6}}\left(x^2 + \dfrac{1}{6}x\right)} \cdot \log_{36x^2+6x} 6 = 1$.

Решите системы уравнений (11, 12):

11. $\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x^2}{y} + x\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y^2}{x} + y\right) = 2, \\ \log_3|x+y| = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \lg x + \lg y = \dfrac{5}{4}, \\ \log_x 10 + \log_y 10 = 5. \end{cases}$

Решите неравенства (13–18)

13. $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2+4x}{2x-3} < 1$.

14. $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \dfrac{1}{9}$.

15. $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 > 0$.

16. $\log_x(x-2) \leqslant 0$.

17. $\log_{1+\frac{6}{25}x} x - 2\log_x\left(1 + \dfrac{6}{25}x\right) > 1$.

18. $2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$.

19. Найдите наименьшее значение функции $y(x) = x\ln x - x\ln 5$ на отрезке $[1;5]$.

Дополнительные задачи.

Решите уравнения (20–24):

20. $2^{\log_{\sqrt{3}} x} - 5 \cdot x^{\log_3 2} + 6 = 0.$

21. $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100.$

22. $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$

23. $\lg^2\left(1+\frac{4}{x}\right) + \lg^2\left(1-\frac{4}{x+4}\right) = 2\lg^2\left(\frac{2}{x-1}-1\right).$

24. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x.$

25. Решите систему уравнений $\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{5/2}, \\ \log_4 y \cdot \log_y(y-3x) = 1. \end{cases}$

Решите неравенства (26–31):

26. $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3.$

27. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} < -\log_x 5.$

28. $\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{x-1}{x+1}.$

29. $\log_{(x-3)}(x^2-4x)^2 \leqslant 4.$

30. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25.$

31. $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x.$

32. Сколько решений имеет уравнение $\ln 2x = \frac{x}{2}$?

Решение каждой задачи должно содержать необходимые рассуждения, объясняющие равносильность того или иного перехода.

Критерии оценок.

Обязательные задачи: «3» — решено не менее 10 задач;
«4» — решено не менее 14 задач;
«5» — решено не менее 18 задач;

При выполнении обязательной части задания должно быть решено не менее трех неравенств.

Дополнительные задачи: «4» — решено не менее 5 задач;
«5» — решено не менее 9 задач;

ISBN 5-94057-099-2

9 785940 570998 >