ПИСЬМА Карла ВЕЙЕРШТРАССА к Софье КОВАЛЕВСКОЙ

1871 • 1891

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1973

BRIEFE von Karl WEIERSTRASS an Sofie KOWALEWSKAJA

1871 · 1891

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ



УДК 51(091)

Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. «Наука», 1973. Стр. 312, с илл.

Дается впервые полное собрание писем известного немецкого математика К. Вейерштрасса к знаменитой русской ученой С. В. Ковалевской, полученных из архива Г. Миттаг-Леффлера в Стокгольме.

С. В. Ковалевская под влиянием К. Вейерштрасса занималась как чистой, так и прикладной математикой, в частности задачей о движении гироскопа, о кольце Сатурна и т. д.

В письмах нашли отражение взаимоотношения между известными математиками конца прошлого века.

Рассчитана на математиков и механиков, а также всех, интересующихся историей науки.

Ответственный редактор и составитель

академик П. Я. КОЧИНА-ПОЛУБАРИНОВА

Редакторы:

Л. М. Мархашов

А. Р. Шкирич

П $\frac{0161-0683}{042(02)-73}$ 1103—73

© Издательство «Наука», 1973 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В конце сороковых годов, в связи с приближавшимся столетием со дня рождения С. В. Ковалевской (1950), Академия наук СССР получила от Шведской академии наук фотокопии переписки знаменитой ученой с русскими и иностранными математиками. Письма, обнаруженные после смерти Ковалевской, были сохранены профессором Г. Миттаг-Леффлером, а затем включены в состав его архива в математическом Институте имени Густава Миттаг-Леффлера в Дюрсхольме (Стокгольм). Среди богатейшей коллекции писем этого архива переписка С. Ковалевской с Миттаг-Леффлером (около 420 писем) и другими математиками занимает видное место.

Особенный интерес представляют письма учителя С. Ковалевской великого ученого К. Вейерштрасса. Перевод на русский язык этих писем был сделан в Институте механики, а затем в Институте проблем механики АН СССР. Письма эти в полном объеме публикуются впервые.

К сожалению, К. Вейерштрасс после смерти Ковалевской сжег ее письма, полагая, что личная жизнь каждого не должна интересовать людей. Важны лишь те дела, которые остаются после них. Однако о С. Ковалевской написано так много и верного, и разных домыслов, что было очень важно получить правильно освещающие ее жизнь и научные стремления документы.

Письма Вейерштрасса отчасти заполняют этот пробел. Они представляют большую ценность для истории науки и проливают свет на взаимоотношения двух знаменитых математиков.

В то же время они раскрывают необыкновенную человечность и порядочность К. Вейерштрасса и показывают, что дружба его с такой замечательной женщиной, как С. Ковалевская,—натурой, одаренной во всех отношениях, имела большое значение в жизни Вейерштрасса.

События из жизни Вейерштрасса и Ковалевской, о которых говорится в письмах, освещены в сопроводительной статье П. Я. Кочиной-Полубариновой «Карл Вейерштрасс и его письма Софье Ковалевской»[1].

---

[1] Ряд дополнительных сведений можно найти в статье Курта-Р. Бирмана [19].

Г. Миттаг-Леффлер эти письма распределил на две группы: с 1 по 84 — письма, точно датированные, и с 85 по 99 — письма без указания года. Первое письмо датировано 11 марта 1871 г. Для некоторых писем из последней группы мы установили год, поставили номер с индексом в квадратных скобках и разместили их в соответствующих местах. Второе число — архивный номер.

Вейерштрасс пишет некоторые слова по старой орфографии: thun, theuere и т. п.; мы перешли на современное написание — без h, в таких словах как differenziren и т. п. мы вставили букву «е». Некоторые собственные имена и математические термины Вейерштрасс в разных письмах пишет по-разному, в особенности это относится к буквам *K* и *C*; так, свое собственное имя он пишет то Karl, то Carl; то же относится к слову Coefficient и т. д. Мы оставили это же написание слов.

В работе по подготовке писем к изданию принимали участие очень многие. Разбор фотокопий проведен Н. В. Волженской, расшифровка текста сделана Л. В. Червоненкис. Большая часть писем переведена Е. О. Вильдт и С. Вл. Ковалевской (дочерью Софьи Васильевны). Проверкой переводов, в частности их математического аппарата, занимались Б. Н. Кирнасов и Л. М. Мархашов. Немецкий текст и переводы выверены Бюро переводчиков Интуриста в группе Н. Н. Мартыновой. Большую организационную работу и редактирование провела А. Р. Шкирич.

Всем участвовавшим в работе я выражаю большую благодарность. Особую благодарность приношу профессору доктору Курту-Р. Бирману (Академия Наук ГДР) за постоянный интерес к работе и помощь в расшифровке некоторых слов, имен и за сообщение ценных сведений для указателя имен.

П. Кочина-Полубаринова

VORWORT

Gegen Ende der vierziger Jahre hat die Akademie der Wissenschaften der UdSSR von der Schwedischen Akademie der Wissenschaften Photokopien der Korrespondenz mit russischen und ausländischen Mathematikern der berühmten Wissenschaftlerin S. W. Kowalewskaja, anläßlich ihrer bevorstehenden einhundert jährigen Geburtstages (1950), erhalten. Die nach dem Tode Kowalewskajas aufgefundenen Briefe wurden vom Professor G. Mittag-Leffler aufbewahrt und in sein Archiv beim mathematischen Gustav Mittag-Leffler-Institut in Djursholm (Stockholm) aufgenommen. In der äußerst umfangreichen Korrespondenz dieses Archivs nimmt der Briefwechsel zwischen Kowalewskaja und Mittag-Leffler (ca 420 Briefe) einen bedeutenden Raum ein.

Von besonderem Interesse sind die Briefe von dem Grossen Gelehrte K. Weierstraß, dem Lehrer Kowalewskajas. Die russische Übersetzung wurde im Institut für Mechanik und danach im Institut für Probleme der Mechanik der Akademie der Wissenschaften angefertigt. Nun werden sie erstmalig im vollen Umfang veröffentlicht.

Es bleibt nur zu bedauern, daß Weierstraß die Briefe Kowalewskajas nach ihrem Tode verbrannt hatte, da er meinte, daß das Privatleben eines Menschen von keinem Interesse für die Menschheit sei. Nur die Taten, die der Mensch hinterlaßt, von Bedeutung seien. Aber über die S. Kowalewskaja ist soviel geschrieben worden, Tatsächliches und Erfundenes (das letztere besonders im Ausland), daß es sehr wertvoll wäre, solche Dokumente, wie die Briefe an ihren Lehrer und Freund, die ihr Leben und wissenschaftliche Strebungen richtig beleuchten, zu erhalten.

Die Briefe von Weierstraß an Kowalewskaja schließen diese Lükke nur zum Teil. Sie sind für die Geschichte der Wissenschaft und die der menschlichen Beziehungen der zwei berühmten Mathematiker von großem Wert. Aus diesen Briefen geht hervor, daß Weierstraß tatsächlich ein außerordentlicher Mensch war. Zugleich hatte sein Zusammentreffen mit einer derart hervorragenden Frau, wie Kowalewskaja, die eine in allen Hinsichten begabte Natur war, eine große Bedeutung auch im Leben Weierstraß.

Die Ereignisse aus dem Leben von Weierstraß und Kowalewskaja, um die es sich in den Briefen handelt, sind im Artikel von

P. Ja. Kotschina «K. Weierstraß und seine Briefe an S. Kowalewskaja» beleuchtet. Manche zusätzliche Angaben enthält Kurt-R. Biermann's Artikel [19].

Von Mittag-Leffler sind diese Briefe in zwei Gruppen eingeteilt worden. Die Gruppe 1 umfaßt die Briefe Nr. 1—84, die genau datiert sind, und die Grupe 2 — die Briefe Nr. 85—99 ohne Datumangabe. Der erste Brief ist mit dem 11. März 1871 datiert. Für manche Briefe der Gruppe 2 konnten wir das Jahr feststellen und setzten es in eckige Klammern. Diese Briefe sind an den entsprechenden Stellen eingeordnet, wobei eine doppelte Numerierung vorgenommen wurde die zweite Zahl ist die Archivnummer.

Manche Wörter Weierstraß schrift nach der alten Rechtschreibung, z. B. *thun*, *theuere* u. dgl. In solchen Fällen haben wir die moderne Schreibweise ohne «h» verwendet. Bei solchen Wörtern, wie *differenzieren* u. dgl. haben wir ein «e» eingesetzt. Manche Eigennamen und mathematische Fachbegriffe schreibt Weierstraß in verschiedenen Briefen unterschiedlich. Das betrifft insbesondere die Buchstaben «K» und «C»; so kommt bald *Karl*, bald *Carl* vor; das gilt auch für *Coefficient* u. dgl. Wir ließen solche Wörter so, wie sie bei Weiertraß geschrieben sind.

Mit der Vorbereitung der Briefe beschäftigten sich viele. Die Auswertung der Photokopien erfolgte durch N. Wl. Wolshenskaja, die Entzifferung der Texte durch L. W. Tscherwonenkis. Die Briefe wurden zum größten Teil von E. O. Wildt und S.Wl. Kowalewskaja (die Tochter von S. W. Kowalewskaja) übersetzt. Die Überprüfung der Richtigkeit der Übersetzungen, besonders im mathematischen Teil, nahmen B. N. Kirnasow und L. M. Marchaschow vor. Der deutsche Text und die Übersetzungen wurden auch von den Mitarbeitern der Gruppe von N. N. Martynowa des Dolmetscherbüros bei «Intourist» überprüft. Die Organisations Arbeit und Redigierung leistete A. R. Schkiritsch.

Ich bedanke mich sehr bei allen, die an dieser Arbeit beteiligt waren. Mein besonderer Dank gilt dem Professor Dr. rer. nat. habil. Kurt- R. Biermann — Leiter der Alexander-von-Humboldt- Forschungsstelle der Akademie der Wissenschaften der DDR (Berlin) für sein lebhaftes Interesse das er uns bekundete, insbesondere für die Hilfe beim Enträtseln vieler Wörter und Namen sowie für seine wertvollen Hinweise für das Namenverzeichnis.

P. Kotschina-Polubarinowa

1.

Verehrte Frau!

Gestern abend zu meinem Bedauern verhindert mich bei Ihnen einzufinden, ist es mir zugleich durch einen Zufall unmöglich geworden, Sie davon zu benachrichtigen. Ich hoffe aber, Sie werden mich morgen mit Ihrem Besuche erfreuen.

Mir freundlichstem Gruß
Ihr ergebener Weierstraß

Berlin (Sonnabend) den 11. März [18] 71

2.

Verehrte Frau!

Ich werde morgen nachmittag zu Hause sein und michfreuen, Sie bei mir zu sehen.

Mit freundlichstem Gruß
Weierstraß

3 Juni (Sonnabend) [18] 71

3.

Aus dem beiliegenden Schreiben des Herrn Prof. *Koner* werden Sie, geehrte Frau, ersehen, daß Ihnen die Benutzung der Universitäts-Bibliothek vollig freisteht. Sollte wider Erwarten irgend ein unterer Beamter Ihnen abermals Schwierigkeiten machen, so wollen Sie sich nur auf den Brief berufen.

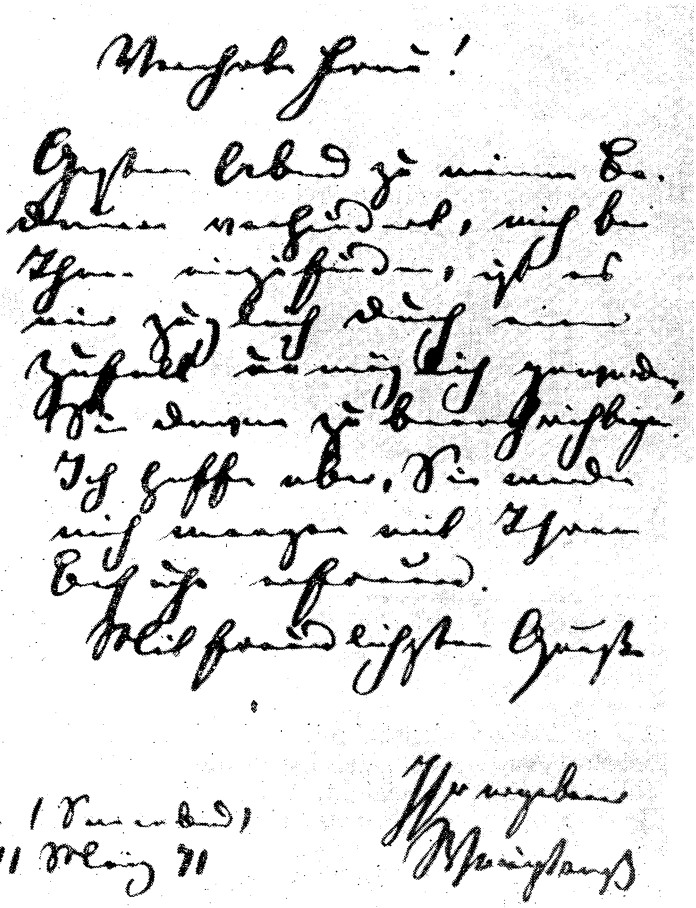
Freundlichst grüßend
Ihr ganz ergebener Weierstraß

6. Nov[ember] [18] 71

4.

Verehrte Frau!

Ich habe neulich in Betreff der Benutzung der Universitäts-Bibliothek Ihnen den Rat gegeben, daß Sie sich an den Bibliotheker, Prof. *Koner*, wenden müssen. Da *ich* nun aber nicht genau weiß,



ФАКСИМИЛЕ ПИСЬМА К. ВЕЙЕРШТРАССА

ob die Bibliothek überhaupt andern als immatrikulierten Studierenden zugänglich ist, so halte ich es für besser, wenn ich an den genannten Herrn schreibe: Dies soll noch heute geschehen.

Die beiden Cautions-Scheine liegen bei.

Gleichzeitig mache ich mir das Vergnügen, Ihnen ein Exemplar der *Schwarzischen* Minimalfläche zu überschicken. Wie ich Ihnen schon bemerkte, werden Sie vielleicht in der Schrift Stoff zu einer Arbeit finden.

Wir haben noch wohl Gelegenheit, darüber uns näher zu besprechen.

Auch in allen übrigen mathematischen Angelegenheiten wollen Sie auch künftig hin, ohne zu fürchten, mich etwa zu belästigen, sich an mich wenden; Sie werden mir stets eine große Freude machen, wenn Sie mir Gelegenheit geben, Sie in Ihren Studien zu fördern. Nachmittags — mit Ausnahme von Mittwoch und Donnerstag — werde ich in diesem Winter stets zu Hause sein.

Mit freundlichstem Gruß
Ihr ergebenster Weierstraß

Berlin 14 Nov. 71

Berlin, 14. Jan. 1872

5. Verehrte Frau!

Zu meinem Bedauern werde ich Sie morgen nicht empfangen können, da ich seit einigen Tagen in Folge einer Erkältung unwohl bin.

Ich übersende Ihnen deshalb über das Thema, welches den Gegenstand unserer nächsten Besprechung bilden sollte, meine Aufzeichnungen, die so vollständig sind, daß Sie auch ohne meinen Beistand damit fertig zu werden im Stande sind. *Diese* Papiere, die ich für meine nächste Vorlesung brauche, wollen Sie jedoch die Gefälligkeit haben, mir am K.[ommenden] Sonntag zurückzuschicken.

Um die allgemeine Formeln in einem einfachen Falle zu rectificieren, wollen Sie bemerken, daß, wenn

$$y = \sqrt{R(x)}$$

und $R(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $(2\rho + 1)$ ist — diese Bedeutung hat nämlich ρ in diesem Falle — die einfachste Funktion $H(xy,\ x'y')$.

die folgende ist, in welcher $P(x)$ einen Teiler ρ-ten Grades von $R(x)$ bezeichnet:

$$H(xy, x'y') = {}^1/_2\left(1 + \frac{P(x)}{P(x')}\frac{y}{y'}\right)\frac{1}{x - x'}$$

Diese wird nämlich, wenn

$$P(x) = (x - a_1)\ (x - a_2)\ldots\ (x - a_\rho)$$

unendlich für die Punkte

$$x = x', \qquad a_1, \ldots, a_\rho$$

$$y = y', \qquad 0, \ldots, 0$$

und zwar für jedes von der 1-sten Ordnung. Ferner fängt ihre Entwicklung nach Potenzen, von $x - x'$ wenn x in der Nähe von x', y in der Nähe von y' angenommen wird, mit

$$-\frac{1}{x - x'}$$

an. Endlich wird $= 0$ für $x = \infty$, $y = \infty$.

Die Gleichung

$$\frac{d}{dx} H(xy, x'y') \ldots$$

ist dann identisch mit der von mir in der Theorie der hyperelliptischen Angewandten, mit deren Hilfe ich die Relationen unter den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung entwickelt habe.

Sobald ich wieder ausgehe, was hoffentlich in einigen Tagen wird geschehen können, werde ich mir erlauben, bei Ihnen anzusprechen, damit wir unsere nächste Zusammenkunft verabreden können.

Mit freundlichstem Gruß
Ihr ergebenster Weierstraß

[5_1] 99[1].

Darf ich Sie, verehrte Frau, bitten, mich morgen Nachmittag mit Ihrem Besuche erfreuen zu wollen? Heute hat sich ein auswärtiger Kollege bei mir angemeldet, den ich empfangen muß.

Ihr ergebenster Weierstraß

19. Jan. (Freitag)
[1872]

[1] Здесь и далее номер в скобках соответствует порядковому номеру письма в настоящем издании.— *Ред.*

6.

Darf ich Sie, verehrte Freundin, wohl bitten, die vorliegende Ausarbeitung des Satzes, über den wir uns gestern unterhielten, und die ich einem Freunde mitteilen möchte, zu diesem Besuche mir auf einem Briefbogen abzuschreiben? Ich hätte zwar selbst wohl Zeit dazu, aber, aufrichtig gestanden, ich schreibe sehr ungern etwas zweimal, und so erlaube ich mir, meine Zuflucht zu Ihnen zu nehmen.

Mit freundlichstem Gruß
Ihr ganz ergebener Weierstraß

25.3.72

7[1].

Meine teuere Sophie!

Ich finde soeben in meinen Papieren noch einige ältere Notizen über den bis jetzt von uns besprochenen einfachsten Fall der Variationsrechnung. Trotz der verschiedenen Bezeichnungsweise werden Sie diese Notizen bei der Ausarbeitung, wie ich glaube, ganz gut benutzen können, weshalb ich sie Ihnen schicke, bevor Sie vermutlich Ihr Tagewerk begonnen haben.

Ich habe mich diese Nacht viel mit Ihnen beschäftigt, wie es ja nicht anders sein konnte,— meine Gedanken haben nach den verschiedensten Richtungen hin und her geschweift, sind aber immer wieder zu einem Punkte zurückgekehrt, über den ich noch heute mit Ihnen sprechen muß. Fürchten Sie nicht, daß ich Dinge berühren werde, über die, wenigstens jetzt, nicht zu reden wir übereingekommen sind. Was ich Ihnen zu sagen habe, hängt vielmehr mit Ihren wissenschaftlichen Bestrebungen eng zusammen — ich bin aber nicht sicher, ob Sie bei der liebenswürdigen Bescheidenheit, mit der Sie über das, was Sie jetzt schon leisten können, beurteilen, auf meinen Plan einzugehen geneigt sein werden. Doch das alles läßt sich mündlich besser besprechen. Gestatten Sie mir also, obwohl erst wenige Stunden seit unserem letzten Zusammensein, das uns einander so nahe gebracht hat, verflossen sind, Sie heute Vormittag abermals auf ein Stündchen zu besuchen und mich auszusprechen.

Herzlichst grüßend
Ihr Weierstraß

26. Okt. 72 (Morgens)

---

[1] Tags zuvor hatte Kowalewskaja von den Schwierigkeiten ihrer fiktiven Ehe erzählt und Weierctraß beschloß seiner Schülerin ein Thema für Dissertation zu anbieten.

8. 4. Nov. 72

Meine teuere Freundin!

Ich überschicke Dir hierbei einen Bogen, den Du gestern vergessen hast mitzunehmen, muß aber, damit Du Deiner Ausarbeitung später nicht noch etwas hinzuzufügen habest, Dich noch auf einige Punkte aufmerksam machen.

Eine der gestern von uns besprochenen Aufgaben der Variationsrechnung kommt es *zunächst* hauptsächlich auf den Nachweis an, daß die gesuchte Kurve in allen Stellen, wo ihre Variation keiner anderen Bedingung unterworfen ist als daß das Integral I dabei unverändert bleibe, der Differenzial-Gleichung

$$H - \lambda \overline{H} = 0$$

genügen muß, wo λ *überall* denselben Wert hat. Für *diesen* Zweck genügt es, von vorherein

$$\xi = k\xi' + k_1\xi'', \qquad \eta = k\eta' + k_1\eta''$$

anzunehmen, in der Art, daß ξ', η', ξ'', η'' stetige Funktionen von t ind, welche an allen Stellen der Kurve, wo deren Variation noch nderen Bedingungen als der oben genannten unterworfen ist, erschwinden. Überdies müssen ξ'', η'' so gewählt werden, daß

$$\int_{t_0}^{t} \overline{H}\,(y_1\xi'' - x_1\eta'')\,dt$$

nicht gleich Null wird. Darauf wird dann in der besprochenen Weise k_1 als Funktion von k so bestimmt, daß die *vollständige* Variation $\Delta\overline{I}$ verschwindet. Das übrige bleibt unverändert so, wie ich es gestern angegeben und in der Notiz angedeutet ist.

Nach Entwicklung der D[ifferenzial] Gl[eichung]

$$H - \lambda \overline{H} = 0$$

verstehe man nunmehr unter ξ, η beliebige Variationen von x, y, welche an den vorhin bezeichneten Stellen verschwinden, so erhält man $w = y_1\xi - x_1\eta$ setzend

$$\Delta I = \Delta\,(I - \lambda\overline{I}) = \int_{t_0}^{t_1} (H - \lambda\overline{H})\,w\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(E_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + E_2 w^2\right) dt$$

+ ähnliche Glieder, in denen unter dem Integralzeichen homogene Funktionen von ξ, η, $d\xi/dt$, $d\eta/dt$ von [höherem]als dem zweiten Grade stehen.

Gibt man darauf den ξ die Gestalt

$$\xi = k\xi_1 + k^2\xi_2 + \ldots \quad \eta = k\eta_1 + k^2\eta_2 + \ldots$$

unter den ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 etc. sich Funktionen vorstellend, welche ebenfalls von den nicht freien Stellen der Kurve verschwinden, und überdies so beschaffen sind, daß $\Delta\bar{I} = 0$ wird, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Gl[eichung]

$$H - \lambda\bar{H} = 0$$

die aufgestellte Formel

$$\Delta I = k^2 \int_{t_0}^{t} \left(E_1 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + E_2 u^2 \right) dt + (k)_3$$

wo

$$u = y_1\xi_1 - x_1\eta_1$$

und ξ_1, η_1 jetzt der aus der Bedingungsgleichung $\Delta\bar{I} = 0$ sich ergebender Gleichung

$$\int_{t_0}^{t} \bar{H} u \, dt \ldots$$

genügen müssen.

So dargestellt ist, wie ich denke, die Sache ganz klar, namentlich durch die Hauptsache, daß λ nicht in verschiedenen Punkten der Kurve verschiedene Werte haben kann, gegen jede Anfechtung gesichert. Die Modifikationen, welche in den Ansdrücken der ersten und zweiten Variatione eintreten muß, wenn auch die nicht freien Stellen der Kurve den ihnen auferlegten Bedingungen gemäß variiert werden, wollen wir später entwickeln.

Über die linearen Differenzial-Gleichungen besitze ich noch zwei vor langer Zeit gemachte Aufzeichnungen, die ich meiner lieben Freundin ebenfalls überschicke. (In dem Hefte Nr. II, IV).

Zur Vergleichung mit dem gestern Dir Vorgetragnen werden sie Dir vielliche nützich sein, doch bitte ich Dich, bei der Ausarbeitung Dich im Weseltlichen so zu fassen wie ich es Dir angedeutet gen auf die Zurückführung der Höheren D. [ifferential] Gleichungen auf die gestern von mir gewählte Form wirst Du hinzufügen müssen.

Noch eine Bitte. Wenn Du oder Fräulein L[ermontoff] noch ermitteln könnt, wie noch der Pensionspreis für eine *einzelne* Dame in dem Pensionat auf der Scharlotten Str[aße] war, so habe die Freund

lichkeit, mich mit zwei Worten davon in Kenntnis zu setzen, da meine Schwester die an sie gerichtete Anfrage gern bald beantworten möchte.

Lebe wohl, mein teueres Herz, bis ich Dich wiedersehe, und laß, wenn Du Dich in meine Formeln vertiefst, Deine Gedanken noch zuweilen herüberschweifen zu Deinem treuen Freunde.

W.

9. 18 Nov. 72

Gestern, teuerste Sonia, hab ich mich in einem Punkte geirrt, was ich auch zu berichtigen beeile, damit Du nicht zu falschen Folgerungen verleitet werdest.

Die Funktion

$$\frac{\theta^2(n_1 - w_1, \ldots)_k}{\theta^2(n_1 - w_1, \ldots)_1}, \qquad (i = 3)$$

ist, wenn n_1, n_2, n_3 als Konstanten betrachtet werden und

$$w_\alpha = I(x, y)_\alpha$$

ist, stets eine rationale Funktion von x, y.

Wird

$$n_\alpha = I(x_0, y_0)_\alpha = \mathring{w}_\alpha$$

gesetzt, so verschwindet $\theta(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)$ an den drei Stellen (x_0, y_0), $(p_1 q_1)$, $(p_2 q_2)$, es muß also auch $\theta(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)$ an drei Stellen Null werden. Von dieser fällt *ein* mit $(x_0 y_0)$ zusammen, wenn θ_n eine ungrade Funktion ist.

[Wenn] dieselbe aber *grade* ist, so findet das nicht mehr statt, und es stellt daher der Quotient $\frac{\theta^2(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)_k}{\theta^2(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)_1}$ *nicht*, wie ich sagte, eine Funktion von x, y, dar, die an zwei Stellen unendlich groß, und an zwei anderen unendlich klein, jedesmal mit der Ordnungszahl 2, wird die Folgerung, daß $\theta(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)_k$ identisch verschwinden, sobald k der Index einer geraden θ-Funktion sei, ist also *unzulässig*; es geschieht dies nur für bestimmte Stellen (x_0, y_0), die aber für verschiedene Indices k auch verschieden sind.

Trotzdem, hoffe ich, wird sich die Aufgabe, um die es sich handelt, lösen lassen. Ich finde, daß z. B. bei unbestimmten u_1, u_2, u_3 eine homogene lineare Gleichung zwischen den

$$\theta_1\theta_{25}, \quad \theta_3\theta_{15}, \quad \theta_5\theta_{13}, \quad \theta_{24}\theta_{01}$$

besteht.

Setzt man eine

$$u_\alpha = I\,(xy)_\alpha + I\,(x_0y_0)_\alpha - I\,(p_1q_1)_\alpha - I\,(p_0\,q_0)_\alpha$$

so verschwindet θ_1 identisch, und man hat also eine Gleichung von der verlangten Form.

Daß alsdann sich z. B. θ_{15}^2 linear durch θ_3^2, θ_5^2, θ_{24}^2 müsse ausdrücken lassen, läßt sich leicht beweisen; es fragt sich nur, ob sich diese Relation aus den Gleichungen, welche bei den bestimmten Argumenten zwischen den Quadraten der θ-Funktionen stattfinden, ableiten läßt. Darauf wirst Du also Dein Augenmerk richten müssen, also überhaupt die Relationen zwischen den Quadraten und Produkten der θ funktionen möglichst vollständig zu entwickeln haben. So einfach, wie ich gestern vermutete, geht die Sache allerdings nicht.

Herzlichsten Gruß!
K. W.

[9_1] 85.

Es gibt die Gleichungen (Revision vorbehalten)

$$C_1^2\theta_0^2 = C_0^2\theta_1^2 + C_{01}^2\,\theta_1^2 + C_{03}^2\theta_3^2 + C_{05}^2\theta_5^2 + C_{135}^2\theta_{000}^2$$
$$C_1^2\theta_2^2 = C_2^2\theta_1^2 - C_{12}^2\,\theta_1^2 + C_{23}^2\theta_3^2 + C_{25}^2\theta_5^2 + C_{135}^2\theta_{046}^2$$
$$C_1^2\theta_4^2 = C_4^2\theta_1^2 - C_{14}^2\,\theta_1^2 - C_{34}^2\theta_3^2 + C_{45}^2\theta_5^2 + C_{135}^2\theta_{026}^2$$
$$C_1^2\theta_6^2 = C_6^2\theta_1^2 - C_{16}^2\theta_1^2 - C_{36}^2\theta_3^2 - C_{56}^2\theta_5^2 - C_{135}^2\theta_{246}$$

in denen

$$C_\lambda = \theta_\lambda\,(0,\ 0,\ 0)$$

Vermehrt in diesen Gleichungen die Argumente u um die halben Perioden $\overset{0}{w}, \overset{2}{w}, \overset{4}{w}, \overset{6}{w}$, und setzt sie dann $= 0$, so ergibt sich

$$C_1^1 = C_0^1 + C_{01}^1 + C_{03}^1 + C_{05}^1 + C_{135}^1$$
$$C_1^1 = C_2^1 + C_{12}^1 + C_{23}^1 + C_{25}^1 + C_{135}^1$$
$$C_1^4 = C_4^4 + C_{14}^4 + C_{34}^4 + C_{45}^4 + C_{135}^4$$
$$C_1^4 = C_6^4 + C_{16}^4 + C_{36}^4 + C_{66}^4 + C_{135}^4$$
$$0 = C_0^2\,C_2^2 - C_{01}^2C_{12}^2 + C_{03}^2C_{23}^2 + C_{05}^2C_{15}^2$$
$$0 = C_0^2C_4^2 - C_{01}^2C_{14}^2 - C_{03}^2C_{34}^2 + C_{05}^2C_{45}^2$$
$$0 = C_0^2C_6^2 - C_{01}^2C_{16}^2 - C_{03}^2C_{36}^2 - C_{05}^2C_{36}^2$$
$$0 = C_2^2C_4^2 + C_{12}^2C_{14}^2 - C_{23}^2C_{34}^2 + C_{25}^2\,C_{15}^2$$
$$0 = C_2^2C_6^2 + C_{12}^2C_{16}^2 - C_{23}^2C_{36}^2 + C_{25}^2C_{56}^2$$
$$0 = C_4^2C_6^2 + C_{14}^2C_{46}^2 + C_{36}^2C_{34}^2 - C_{45}^2C_{56}^2$$

Diese Gleichungen besagen, daß die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ durch die Substitution

$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\, x_1 = C_0^2 y_1 + C_2^2 y_2 + C_4^2 y_3 + C_6^2 y_4$$

$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\, x_2 = C_{01}^2 y_1 - C_{12}^2 y_2 - C_{14}^2 y_3 - C_{16}^2 y_4$$

$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\, x_3 = C_{03}^2 y_1 + C_{23}^2 y_2 - C_{34}^2 y_3 - C_{36}^2 y_4$$

$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\, x_4 = C_{05}^2 y_1 + C_{25}^2 y_2 + C_{45}^2 y_3 - C_{56}^2 y_4$$

in

$$(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$$

übergeht. Daher sind die Quotienten $\frac{C_\lambda^2}{\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}}$ nach bekannten Formeln (Baltzer) durch 6 unabhängige Größen ausgedrückt.

Herzlichsten Gruß, liebste Sonia. Ich habe diese Formeln soeben erst niedergeschrieben — daß es gestern abend nicht mehr ging — wirst Du leicht glauben. Sie werden im wesentlichen richtig sein, doch wirst Du sie sorgfältig revidieren müssen.

Dein K. W.

10.

Meine liebe Sonia!

Findest Du es nicht recht unfreundlich von mir, daß ich Dich «in der großen Verlegenheit, in die Du geraten bist», die Nacht über habe stecken lassen, und nicht gleich nach Empfang deines lieben Briefchens Dir beigesprungen bin?

Indessen wirst Du mich entschuldigen, wenn Du hörst, daß ich in Folge einer Erkältung gestern und vorgestern unwohl gewesen bin, und namentlich gestern nachmittag mich in einer durchaus unmathematischen Stimmung befand.

Heute befinde ich mich wieder wesentlich besser, könnte Dir die gewünschte Auskunft schriftlich geben. Du würdest aber, wie ich jetzt sehe, doch keinen recht ersprießlichen Gebrauch davon machen können; die ganze Untersuchung — ausgehend allerdings von den Relationen unter den θ-Funktionen — muß vielmehr anders durchgeführt werden als dadurch, daß man zwei dieser Funktio-

nen gleich Null setzt und die drei Argumente durch eine math[ematische] Größe ausdrückt — was allerding geht, wie ich Dir zeigen werde — weil alsdann die Gl[eichnug] zwischen x, y von zu hohem Grade wird. Doch möchte ich mich darüber am liebsten mündlich aussprechen. Könntest Du nicht — da ich heute noch nicht ausgehe — gegen Abend, d. h. gleich nach Deinem Diener, auf ein Stündchen zu mir kommen? Da ich heute auch nicht wieder lese, so wird es mich durchaus nicht angreifen, wenn ich Dir den Weg, der mir jetzt der gangbarste scheint — andeute.

Sei also unbesorgt, daß Du mir ungelegen kommen mögest, was bei meiner lieben Freundin überhaupt niemals der Fall sein kann.

Die Relationen zwischen den θ, soweit Du sie entwickelt hast, bitte ich mitzubringen.

Herzlichsten Gruß!
Dein Weierstraß

22. Nov. 72 (Morgens)

11.

Die neulich Dir mitgeteilten Formeln, meine liebe Sonia, sind einfach dadurch zu berichtigen, daß die Coefficienten der Ausdrücke für $x_1 \ldots x_n$ noch durch $\sqrt{C_\eta^4 - C_{135}^4}$ dividiert werden. Dann reichen sie zwar noch nicht aus, alle $\frac{\theta\,(0,\,0,\,0)_\lambda}{\theta\,(0,\,0,\,0)_\eta}$ durch 6 unabhängige Größen auszudrücken, doch läßt sich alles dazu Erforderliche aus den Relationen zwischen den Quadraten und Produkten der θ-Funktionen ableiten. Ich gehe aber darauf jetzt nicht ein, weil ich nicht weiß, was Du für den nächsten Zweck wirklich brauchst.

Wenn Du mich morgen mit Deinem Besuche erfreust, so wolle das über die Variationsrechnung von Dir Ausgearbeitete mitbringen, da wir auf verschiedenes Frühere werden zurückkommen müssen.

Mit freundlichstem, herzlichstem Gruß
Dein K. W.

7. Dez. 72

12.

Das heutige Konzert, liebste Sonia, beginnt um 7 1/2 Uhr. Wenn ich nicht irre, wolltest Du mit Fräulein L.[1] zu uns kommen. Dann

[1] Lermontoff

bitte ich Dich noch vor 7 Uhr einfinden zu wollen, damit wir rechtzeitig abfahren können. Wagen werde ich bestellen.

Ich bitte mir durch die Überbringerin mündlich Antwort zukommen zu lassen.

Freundlichst grüßend
W.

27. Dez. 72.

13.

Meine liebe Sonia!

Heute Abend werde ich einer unvermeidlichen Abhaltung wegen *wahrscheinlich* darauf verzichten müssen, Dich zu sehen. Morgen gedenke ich den ganzen Tag der Arbeit, für die Du Dich ja auch so lebhaft interessierst — Du siehst, ich vermeide das Dir anstößige Wort — zu widmen, bitte Dich aber, Sonntag zur gewöhnlichen Stunde mich mit Deinem Besuche erfreuen zu wollen.

Mit herzlichstem Gruß
der Deinige K. W.

10. Jan. 73.

14.

Teuerste Sonia!

Ich bin gestern mit einem ziemlich heftigen Schnupfen aufgestanden, und habe deshalb nicht zu Dir kommen können. Auch heute darf ich noch nicht ausgehen, und muß Dich deshalb bitten, mir entweder selbst oder, wenn es Dir noch Mühe macht, durch Fräulein L[ermontoff], mit ein Paar Worten schreiben zu wollen, wie sich dein Befinden gestaltet hat. Hoffentlich hast Du gute Fortschritte gemacht, es wird mir die größeste Freude sein, wenn ich von Dir erfahre, daß mich meine Hoffnung nicht täuscht.

Morgen, denke ich, werde ich Dich sehen können, liebes Herz; bis dahin ein freundliches Lebewohl!

Dein K. Weierstraß

5. April 73

15.

Meine liebe Freundin!

Wie glücklich hast Du mich gemacht durch die Mitteilung, daß Du in der Besserung fortschreitest, und sogar schon wieder Neigung verspürst, Dich «mit mathematischen Dingen zu beschäftigen».

Von dem Letzteren möchte ich Dich ja doch dringend abraten (oder soll der Arzt es Dir untersagen?); glaube mir, Teuerste, jede Stunde, die Du in den nächsten Tagen hier und später in Zürich Deiner körperlichen Plage zugutekommen läßest, ist gar wohl angewandt, und wird, wenn Du Dich dann mit frischen Kräften der Arbeit wieder zuwendest, ihre Frucht tragen.

Ich habe heute noch Stubenarrest; es ist aber nur ein gewöhnlicher Schnupfen, der mich plagt und zu einiger Vorsicht nötigt. Ich komme zu Dir, sobald ich das Zimmer verlassen darf — hoffentlich schon morgen, doch mache Dir keine schlimmen Gedanken, wenn ich mich darin irren sollte — ich bin gewiß, daß ich wieder ganz wohlauf sein werde, eher Du abreisest.

Wenn Dir der Arzt erlaubt auszufahren, so nimm Dich vor allen Dingen mit der Kleidung in Acht; das Wetter ist ganz danach angetan, daß man sich leicht erkältet — ich büße jetzt dafür, daß ich am vor[igen] Donnerstag dem Frühling zu sehr vertraute.

Mit herzlichstem Gruß
Dein W. Weierstraß

6. April 73.

16. Berlin, 18. April 73

Meine teuere Freundin!

Du hast mir eine große Freude gemacht durch Deinen lieben Brief, den ich so bald noch nicht erwartet hatte, denn ich befürchtete, die Reise, welche Du noch nicht völlig wieder hergestellt antratest, werde Dich so angreifen, daß Du, in Zürich angekommen, wenigstens eine Woche zu Deiner Erholung bedürfen würdest. Um so glücklicher machte es mich, von Dir zu hören, daß meine Besorgnis unbegründet gewesen ist. Du sagst allerdings nicht ausdrücklich, daß Du dich wieder völlig wohl befindest; aber da Du von täglichen langen Spaziergängen sprichst, welche Dir sogar Freude machen, so muß ich schon annehmen, Du fühlest Dich hinlänglich gekräftigt dazu. Möge nur während Deines dortigen Aufenthalts das Wetter beständig so schön bleiben, wie bei Deiner Ankunft, damit Du Dich recht viel im Freien aufhalten und durch eigene Erfahrung die Wahrheit des Ausspruchs einer unserer medizinischen Autoritäten erproben könnest, daß es — außer Kamillen Thee — nur eine Arznei gebe, von der es feststehe, daß sie wohltätig wirke, nämlich eine reine, milde Luft. Vergiß nicht, was Du mir bei Abschiede versprochen hast.

Du wollest dafür sorgen, daß Du ganz frisch und blühend zurückkommest, und vergegenwärtige Dir zuweilen die Freude, welche

Du mir bereiten wirst, wenn ich beim Wiedersehen mich überzeugen werde, daß meine liebe Sonia getreulich Wort gehalten hat. Hast Du wirklich die Absicht, zum ersten Mai wieder hier zu sein,— d. h. ich meine, läßt sich diese Absicht ausführen — so möchte ich Dir den Rat geben, bis dahin jede ernste Arbeit zu vermeiden — wenn es Dir bei dem bewegten Leben, in das Du hineingeraten bist, überhaupt möglich sein wird, an eine solche zu denken — und Deine Kraft für die regelmäßigen Studien aufzusparen, welche wir nach Deiner Rückkehr wieder aufnehmen werden. Hoffentlich werden wir dann wenigstens soweit gelangen, daß Du in den Sommermonaten das Material zu einer lohnenden Arbeit beschaffst, die Du während des Herbstes wirst ausführen können.

Was mich angent, so ist die von Dir ausgesprochene Befürchtung, ich möchte während der Ferien zu viel arbeiten, schon deshalb unbegründet, weil ich bis jetzt meines noch immer anhaltenden Unwohlseines halber etwas Anstrengendes noch gar nicht habe unternehmen können. Ich bin, seit Du fort bist, noch gar nicht aus dem Hause gewesen, habe mich aber nur mit leichter Lektüre beschäftigen können. Heute, wo das bis jetzt rauhe Wetter milder geworden ist, gedenke ich zum ersten Male wieder auszugehen. Es fehlt mir nichts Ernstliches, aber es drückt mich ein Gefühl von Unbehagen und Unlust, das mich erst verlassen wird, wenn die mir von jeher widerwärtige und unzuträgliche Übergangs-Periode vom Winter zum eigentlichen Frühling überwunden sein wird. Ich habe indessen recht viele Besuche von mathematischen Freunden gehabt, die während der Osterferien sich zahlreich hier eingefunden und fast alle mehrmals mir einige Stunden geschenkt haben. Namentlich mit Heine aus Halle und Baltzer aus Gießen habe ich mich viel unterhalten, mit dem letztern auch über die «Geometrie des endlichen Raumes», für welche meine übrigen mathematischen Freunde — meinen kleinen Liebling, den Du kennst, ausgenommen — wenig Sympathie besitzen. Ich teile Dir dies mit, damit Du nicht etwa glaubst, ich sei eigentlich krank, oder so verstimmt, daß darunter das Interesse für das, was mir sonst am Herzen liegt, gelitten habe.

Du schreibst mir, liebe Sonia, Du habest eigentlich noch manche Fragen an mich zu richten. Dies gibt mir Hoffnung, ich werde von Zürich aus wenigstens noch einen recht ausführlichen Brief von Dir erhalten. Nicht wahr, ich darf doch darauf rechnen! Auch wartest Du hoffentlich nicht so lange damit, daß ich Dir nicht mehr antworten könnte.

Für die freundlichen Grüße, die Du mir gesandt, meinen herzlichsten Dank!

Indem ich Dir, liebes Herz, für diesmal Lebewohl sage, brauche ich wohl nicht ausdrücklich hinzuzufügen, daß ich, wo Du sein mögest, stets mit dem Gefühl herzlichster Zuneigung an Dich denken werde.

Dein treuer Freund Karl Weierstraß

17. Berlin, 25. April [1873]

Meine liebe Freundin!

Du beginnst Deinen letzten Brief mit den Worten, es sei ganz egoistisches Motiv, das Dich antreibe, mir so rasch zu antworten. Darauf könnte ich erwidern, ein Egoismus, der einen Ursprung hat wie der Deinige, sei in meinen Augen ein so liebenswürdiger Fehler, daß ich aufrichtig wünschte, Du möchtest ihn niemals ablegen; und ich brauchte mich durch Die anscheinende Ablehnung jedes Denkes, der in dem Eingange Deines Briefes zu liegen scheint, durchaus nicht abhalten zu lassen, Dir zu sagen, wie sehr ich mich über ihn gefreut habe, und wie wohltätig der herzliche Ton, der durch seine Zeilen klingt, mein noch immer etwas verstimmtes Gemüt berührt hat. Indessen, da ich von meiner teueren Freundin weiß, daß es keine Phrase ist, wenn sie sagt, daß sie besorgt um mich sei und dringend über mein Befinden etwas zu hören wünsche; so nehme ich keinen Anstand, gegen die erste Regel des konventionellen Briefstyls zu sündigen, und zunächst und hauptsächlich von meiner Person zu sprechen.

Mein Befinden ist noch immer nicht so wie es sein sollte, obgleich es auch nicht schlechter geworden ist und ich keinen Arzt brauche. Seit 8 Tagen habe ich wieder angefangen, täglich etwas auszugehen; das Wetter ist aber den ganzen Monat über so rauh gewesen, daß es mir draußen noch nicht behaglich geworden ist und ich mich auf das sorgfältigste vor Erkältung in Acht nehmen muß. Doch hat sich die Befürchtung, die ich anfangs allerdings hatte, daß ein früheres Leiden, welches so störend in mein Leben eingegriffen hat, sich erneuern könnte, als ganz unbegründet erwiesen; und ich darf deshalb auch zuversichtlich erwarten, daß ich mich, sobald es milder sein wird — was doch bald eintreten muß — mich wieder ganz wohl fühlen werde. Ich habe also keinerlei Grund zu fürchten, daß ich den Sommer nicht in gewohnter Tätigkeit werde verbringen können, aber es verdrießt auch ungemein, daß ich die schönen Osterferien, die mir stets so willkommen gewesen sind, diesmal zu der verlorenen Wochen zählen muß. Gearbeitet habe ich sehr wenig und mit geringem Erfolg, wenn ich auch bisweilen den ganzen Tag über mich beschäftigt habe — es wollten weder neue Gedanken kommen noch die alten sich so, wie es mir vorschwebt, in Worte fassen lassen.

Am K[ommenden] Donnerstag beginne ich meine Vorlesungen, die eine, über synthetische Geometrie, die ich übernommen habe, weil an der Universität, wo *Steiner* gewirkt hat, diese Disziplin doch nicht ganz vernachlässigt werden durfte und kein Anderer dazu sich fand, hat nun auch wenig Interesse für mich; in der anderen, über Anwendung der ellipt[ischen] Funktionen, möchte ich gern einige neue Probleme behandeln — doch wird dies von den Umständen abhängen, namentlich davon, ob ich Zuhörer haben werde, die ein hinlängliches Interesse dafür beweisen, in welcher Beziehung, ein Jahrang von Studenten oft merkwürdig verschieden von dem vorhergehendem ist. Daß *Du*, solange Du von mir etwas lernen kannst und willst, meine Schülerin in des Wortes bester Bedeutung bleiben wirst, würde ich nicht ausdrücklich hervorheben, wenn nicht eine Stelle in Deinem Briefe mich darauf brächte.

Du glaubst, wenn nicht die Freundin, so könne doch die Schülerin mir lästig werden — so lautete das häßliche Wort, das Du brauchst. Daß Du von der Freundin wenigstens dies nicht befürchtest, könnte ich, wenn ich boshaft wäre, in einem Sinne deuten, gegen den Du vielleicht lebhaft protestieren würdest — aber, in allem Ernst gesprochen, liebste, teuerste Sonia, sei versichert, ich werde nie vergessen, daß es die Dankbarkeit meiner Schülerin ist, der ich den Besitz — nicht meiner besten, sondern meiner einzigen wirklichen Freundin verdanke. Also, wenn Du die Gesinnung, welche Du mir bisher bewiesen [hast], auch in Zukunft bewahrest, so kannst Du fest da[mit] rechnen, daß ich Dir auch in Deinen wissenschaftlichen Bestrebungen stets treu zur Seite stehen werde.

Habe ich nun genug von mir geredet. Ich sollte denken, bis zu Deiner baldigen Rückkunft werde es ausreichen. Ich schließe also, erstens mit der Bitte, mir durch zwei Zeilen den Zeitpunkt deiner Rückkehr genau anzeigen zu wollen, etwa von Heidelberg aus, wiefern Du Deiner Absicht gemäß dort einen Tag Dich aufhalten wirst, und dann mit der Warnung, ja nicht zu glauben, es sei in Deutschland schon eben so Frühling wie am Züricher See. Wie ich mich darauf freue, Dich bald wieder zu sehen, brauche ich es Dir zu sagen?

Dein K. Weierstraß

18.

Meine liebe Sonia!

In Beziehung zu die gestern besprochene vorbereitende Arbeit, mit der Du Dich heute beschäftigen wolltest, habe ich noch folgendes zu bemerken.

Es ist stets möglich, vier gegebene Halb-Ebenen $\mathfrak{E}$ so auf einen wirklich angenommenen Kreis K abzubilden, daß dem Inneren eines

in $\mathfrak{C}$ gegebenen Kreises $\mathfrak{K}$ die Fläche eines um den Mittelpunkt von K beschriebenen Kreises K_1 entspricht.

Der Radius des letzteren, stets kleiner als der von K, hängt von dem Radius von $\mathfrak{K}$ und dem Abstand des Mittelpunktes dieses von der Kante der Halb-Ebenen ab. Dabei entspricht aber der Mittelpunkt von K_1 nicht dem Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$. Dies ist aber für den beabsichtigten Zweck auch gar nicht nötig. Denn nimmt man den Radius von K gleich 1 an, bestimmt die Lage eines Punktes in K durch Polare Koordinate (ρ, ϑ), so gehört zu jedem Punkte von $\mathfrak{C}$ auch ein solches Größenpaar (ρ, ϑ) und umgekehrt. Und wenn ρ_1 der Radius von K_1 ist, so liegt der betrachtete Punkt im Innern von $\mathfrak{K}$ wenn $\rho < \rho_1$, in dessen Peripherie, wenn $\rho = \rho_1$, und außerhalb (aber in $\mathfrak{C}$), wenn $\rho > \rho_1$, aber $\leqq 1$.

Läßt man nun die Halb-Ebene um ihre Kante rotieren, so sieht man, wie sich, die Lage eines Punktes im Raum durch drei Größen (ρ, ϑ, ψ) bestimmen läßt, von denen ρ zwischen 0 und 1, ϑ, ψ aber zwischen 0 und 2π enthalten sind. Zugleich sind die dem von $\mathfrak{K}$ beschriebenen Ringe angehörigen Punkte dadurch charakterisiert, daß für sie $\rho \leqq \rho_1$ ist. Es kommt nun darauf an, für den reciproken Wert der Distanz zweier Punkte $[(\rho, \vartheta, \psi)$ und $(\rho', \vartheta', \psi')]$ eine Entwicklung zu finden, die für je zwei Punkte, von denen einer innerhalb des Ringkörpers, der andere aber außerhalb desselben liegt, gültig bleibt. Dann werden sich, wenn es sich um die Bestimmung des Potentials des Ringes handelt, in jedem einzelnen Gliede der Reihe die Integrationen in Beziehung auf ϑ, ψ ohne Zweifel ausführen lassen.

Hoffentlich wirst Du nach diesen Andeutungen ohne Aufenthalt arbeiten können, und so die Einsamkeit der nächsten Tage minder schwer empfinden. Übermorgen Vormittag hoffe ich jedenfalls zu Dir kommen zu können, wenn ich nicht von Dir höre, daß Du mich nicht erwarten könntest.

Mit herzlichstem Gruße
der Deinige K. W.

D. 9. Juni (Vormittag).

19.

Teuerste Freundin!

Zu meinem großen Bedauern kann ich mein Versprechen, mich heute persönlich nach Deinem Befinden erkundigen zu wollen, nicht halten. Ich muß, wenn ich nach meiner Vorlesung heimkehre, nach dem Essen sogleich wieder fort, und werde dann bis 10 Uhr beschäftigt sein. Hoffentlich ist es mit Deinem Kopfweh nicht

schlimmer geworden; morgen Nachmittag werde ich unter allen Umständen zu Dir kommen. Ich grüße Dich herzlichst und verbleibe

Dein treuer Freund C. W.

12. Juni 73 (Vormittags)

20. Sassnitz (Insel Rügen)
Hotel zum Fahrenberg, 20. August 73

Meine teuere Freundin!

Dein letzter Brief ist erst jetzt in meine Hände gelangt, nachdem er eine Reihe von Poste Stationen passiert ist. Mein Plan für die diesmaligen Ferien war, zunächst mit meiner jüngeren Schwester ein paar Wochen in einem Seebade in der Nähe von Königsberg zu verleben, und dort mit der Familie Richelot zusammen zu treffen. An demselben Tage aber, wo wir abreisen wollten, erhielt ich über das Umsichgreifen der Cholera in der Provinz Preußen so bedenkliche Nachrichten, daß ich mein Vorhaben aufgeben mußte und am anderen Morgen nach Rügen aufzubrechen mich entschloß.

Das ist auch ausgeführt worden; da ich aber kein Quartier mir vorher bestellen konnte, so haben wir die ersten 8 Tage vagabundierend herumfahren müssen, bis ich hier endlich an einem mir sehr zusagenden Platze mich habe saßhaft machen können. Eine Reihe Briefe ist mir von Ort zu Ort gefolgt, und habe ich gestern 8 Stück auf einmal erhalten. Der Deinige ist selbstverständlich der erste, den ich beantworte. Ich befinde mich hier sehr wohl. Ich schreibe diesen Brief am offenen Fenster meines Zimmers, und wenn ich aufblicke, so habe ich in einer Entfernung von etwa 100 Schritt die wogende See vor mir, einen vollständigen Halbkreis bildend, dessen Durchmesser nicht eine sandige Düne, sondern ein ziemlich hochgelegenes, mit Kornfelder, Wiesen, Bäumen und reinlichen Häusern geschmücktes Ufer ist. Unmittelbar hinter dem Hotel tritt man in einen meilenweit sich erstreckenden Wald voll herrlichen Laubholzes, in dem eine wunderbar erquikende Luft weht. Dazu kommt, da sich im Hause eine ganz gute Gesellschaft zusammengefunden hat, darunter auch mehrere Collegen aus Berlin, Leipzig, Rostock. Ich gedenke bis Ende d[ieses] M[onats] hier zu bleiben; dann habe ich etwa 14 Tage lang in Berlin zu tun, und beabsichtige darauf noch etwa 14 Tage mit meinen beiden Schwestern an den Rhein zu gehen, vielleicht die Naturforscher-Versammlung in Wiesbaden mitzumachen. Vom 1. Oktober an werde ich sicher wieder in Berlin sein, wo am 4-ten bereits die Immatriculationen beginnen. Gearbeitet habe ich noch gar nichts, ausgenommen daß ich an Richelot einen ziemlich ausführlichen Brief mit einer gedrängten Darstellung der Untersuchungen, mit denen ich mich in

den letzten Jahren beschäftigt, geschrieben habe. Leider habe ich darauf eine sehr traurige Antwort erhalten: Richelot, der mir ein so lieber Freund geworden ist, ist schwer erkrankt — chronisch und meint, daß er wohl den letzten Brief an mich schreibe; er geht zwar auf meine Mitteilungen mit lebhaftem Interesse ein, spricht aber hauptsächlich über seine Wünsche in Betreff der Wiederbesetzung seiner Stelle, die er mir dringend ans Herz legt.

Hiermit, liebe Sonia, schließe ich meinen Brief über mich. Hoffentlich bist Du jetzt auch Züricher Atmosphäre entronnen, und atmest die freie Luft der Berge. Ich habe während meines hiesigen Aufenthalts sehr oft an Dich gedacht und mir ausgemalt, wie schön es sein würde, wenn ich einmal mit Dir, meine Herzensfreundin, ein Paar Wochen in einer so herrlichen Natur verleben könnte. Wie schön würden wir hier — Du mit Deiner phantasievollen Seele und ich angeregt und erfrischt durch Deinen Enthusiasmus — träumen und schwärmen über so viele Rätsel, die uns zu lösen bleiben, über endliche und unendliche Räume, über die Stabilität des Weltsystems, und alle die anderen großen Aufgaben der Mathematik und Physik der Zukunft. Aber ich habe schon lange gelernt, mich zu bescheiden wenn nicht jeder schöne Traum sich verwirklicht.

Aufgefallen, liebste Freundin, ist es mir, daß Du in Deinem letzten Briefe über Dein Befinden ganz schweigst. Das könnte mich allerdings insofern beruhigen, als man, wenn man sich ganz wohl fühlt, darüber eben nicht spricht; aber Du weißt, daß ich kein Freund von negativen Beweisen bin, die niemals volle Befriedigung gewähren. Ich bitte also um direkte Angaben.

Was Deine Rückkehr nach Berlin angeht, so bitte ich Dich, darüber keinen Beschluß zu fassen, bis Du von mir sichere Nachrichten über das Erlöschen der Cholera erhältst. Was die Zeitungen darüber melden, ist gar nicht zuverlässig.

Wenn Du meinst, daß Du mich im folgenden Winter nur *sehr* selten sehen würdest, so hast Du mich wohl mißverstanden — jedenfalls werden wir *unsere Sonntage* nicht aufgeben, und auch an den übrigen Tagen werde ich doch manches Stündchen finden, das ich meiner lieben Freundin werde widmen können.

Einer Antwort auf diesen Brief sehe ich mit Ungeduld entgegen. Meine Adresse findest Du eben vollständig angegeben. Doch bitte ich, mir hierher nur in dem Fall zu schreiben, wenn Du Deinen Brief spätestens am 26-sten zur Post geben kannst. Sonst warte lieber noch ein paar Tage, und sende ihn mir nach Berlin (zum 1. Sept.). Sollte während dieser Zeit mein Reiseplan noch eine Abänderung erfahren, so gebe ich Dir Nachricht davon.

Zum Schluß setze ich Dir auch eine Stelle aus Richelot's Briefe her, weil ich rechne, daß sie auch Dich interessieren werde. Sie be-

zieht sich auf meine Mitteilung in Betreff des Ganges, den ich zuletzt in der Theorie der Abelschen Funktionen eingeschlagen habe.

«Gerade daß Sie einen anderen, einen natürlichen Weg einschlagen in der mathematischen Hauptfrage dieses Jahrhunderts als Reimann und Clebsch und Gordan, und daß Sie ihn bis zu einer klar ausgesprochenen Grenze verfolgen, ist es, was für mich von so großer Bedeutung ist.

Noch immer bedauere ich, daß Sie den zweiten Teil ihrer ersten Abhandlung (über die Hyp.[erelliptischen] F[unktionen]), die doch schon das Wesentliche Ihrer Methode enthält, nicht haben erscheinen lassen.

Weder die Arbeiten R[iemann]s, noch weniger das Buch von Cl[ebsch] und G[ordan] hätten Sie davon abhalten sollen. Doch müssen Sie wohl vollwichtige Gründe dazu gehabt haben».

Und nun, liebes Herz, lebe wohl, und erfreue Deinen Freund recht bald durch die besten Nachrichten von Dir. Kannst Du mir nicht sofort ausführlich schreiben, so begnüge ich mich — vorläufig — auch mit wenigen Zeilen von Deiner lieben Hand.

Dein K. W.

Mein Brief ist mit sehr mangelhaftem Schreibmaterial entworfen; entschuldige daher sein nachläßiges Äußere.

[21] 23 Berlin, 8. Okt. 1873

Meine liebe Sonia!

Trotz Deiner Entschuldigung mit Deinem «défaut constitutionel» hätte ich doch große Lust, Dir eine eindringliche Strafrede zu halten. Denn es ist doch gewiß nicht Recht, ganze sechs Wochen lang «Deinen besten Freund» ohne alle Nachricht von Dir zu lassen. Es rettet Dich aber der Umstand, der mich zugleich nötigt, meinen Brief auf wenige Zeilen zu beschränken. Ich habe nämlich heute über acht Tage eine Antrittsrede zu halten, und noch sitze ich in den ersten Anfängen; zudem wird meine Rede, wenn ich überhaupt nicht noch ein anderes Thema wähle, einen *sehr ernsten Inhalt haben* und eins Angriffe von verschiedenen Seiten zuziehen. Es läßt sich dies nicht immer abwenden, ich habe aber jedes einzelne Wort abzuwägen, ob ich es auch werde vertreten können. Es ist also sowohl Zeitmangel als auch noch mehr der Umstand, daß mein Kopf voll ist von abziehenden Gedanken, was mich verhindert Dir mehr zu schreiben.

Daß Du wiederkommen würdest, wußte ich bereits durch einen Brief Deiner Frau Mutter (Antwort auf den meinigen v[om] v[origen] Sommer). Heute war eine Cousine von Julia Lermontoff bei mir, welche Dich hier schon zu treffen hoffte. Was Dein Kommen betrifft, so bitte ich Dich, so sehr ich mich danach sehe, Dein liebes

Gesicht wieder zu sehen, nicht eher zu kommen bis die Cholera hier ganz erlöschen ist. Sie ist jetzt schon so im Abnehmen begriffen, daß ihr Aufhören bis zum 20-sten etwa zu erwarten ist. Wenn Du daher nicht schon ganz bestimmt mit Deiner Freundin eine Verabredung getroffen hast, so bitte ich Dich bis zum angegebenen Termin mit Deiner Abreise zu warten.

Die Cholera ist nicht etwas Angenehmes, mag man der letzte oder der erste sein, der sie bekommt. Der neu an einem Orte angekommene ist immer der gefährdeste. Von mir, um auch das zu erwähnen, wirst Du nachher auch nicht viel haben, da ich in den ersten Tagen nach dem 15-ten mit Besuchen bei Hohen, Höchsten und Allerhöchsten Personen leider sehr in Anspruch genommen sein werde. Nachher wird es sich schon machen.

Hiermit genug. Sorge nur, liebste, teuerste Freundin, daß Du recht wohl ankommst. Die Strafrede werde ich Dir nicht erlassen, Du kannst Dich ja dagegen wehren und mir die Lippen verschließen.

Also auf herzliches, inniges Wiederfinden

Dein C. W.

[22] 21 Berlin, 12 Okt. 73

Liebste Freundin, Du tust mir doch Unrecht, wenn Du glaubst, ich hätte grollend über Dein langes Stillschweigen Deinen Brief aus Lausanne nicht beantwortet. Der Deinige ist nun, da ich einige Tage abwesend war, verspätet zugekommen, und so wird meine Antwort in Lausanne in dem Momente angekommen sein, wo Du abgereist bist; ich hatte Dich allerdings so verstanden, daß Du bis zum 15-ten dort bleiben wolltest. Wahrscheinlich hast Du meinen Brief jetzt erhalten; sollte es nicht sein, so forsche ihm doch nach, da ich ihn nicht gern in fremde Hände gelangen lassen möchte. Für den letzteren Fall wiederhole ich aus ihm zweierlei. Ich habe Dir — so gern ich mich Deiner lieben Nähe bald erfreuen möchte — doch geraten, der Cholera wegen noch bis zum 20-sten etwa dazubleiben. Jetzt kommen hier etwa 8 Fälle täglich vor und es steht also zu hoffen, daß der böse Gast uns bald ganz verlassen wird. Zweitens schrieb ich Dir, daß eine Cousine von Fr[aülein] Lermontoff bei mir war, um sich nach der letzteren, die sie schon hier glaubte, zu erkundigen. Sie vermeinte in Eurer früheren Wohnung Nachrichten von ihr erhalten zu können, und da ist es mir nun sehr unangenehm, daß ich die junge Dame vielleicht irre geführt habe; denn als ich gestern bei 134[B] vorbeiging, war es mir, als ob ich ihr 143[B] angegeben; es sollte mir das wirklich außerordentlich leid tun.

Jetzt noch eine Bitte. Daß Du mir den Tag Deiner Ankunft nicht bestimmt angeben wirst, weiß ich schon. Aber wenn Du willst,

daß wir uns *bald* sehen, so schicke mir doch sofort nach Deiner Ankunft einen kleinen Brief p[er] Stadtpost, damit ich entweder zu Dir komme, sobald ich irgend kann, oder Dir angebe, wann Du mich sicher treffen kannst. Ich werde grade in den Tagen, wo Du vermutlich eintriffts, viel vom Hause abwesend sein und es sollte mir doch leid tun, wenn ich gerade einen günstigen Moment verpaßte, wo ich meine teuerste — mir «so ganz ergebene» (gewöhne Dir doch das häßliche Wort ab) — Freundin nach so langem Entbehren umarmen und die Drohung wahr machen könnte, mit der ich mein letzter Brief schloß. Über das, was ich Dir sonst schrieb, mache Dir keine Gedanken. Mein Redenentwurf ist so scharf ausgefallen, daß es wirklich für den Ort, wo ich sprechen muß, nicht paßt. Ich habe bereits ein anderes Thema gewählt.

Wenn Dein «défaut constitutionel»[1] es Dir nur irgend erlaubt, so schreibe mir von Zürich doch noch einmal — wenn auch nur um mich darüber zu beruhigen, daß Du diesen und hoffentlich auch den früheren Brief richtig empfangen hast.

Lebewohl, liebes Herz, und bleibe wie bisher freundlich gesinnt.

Deinem treuen Freunde (auch wenn er Dir gesteht, daß er seit dem Ende d[es] v[origen] Semesters auch nicht einen einzigen mathematischen Gedanken gehabt und Du ihn sehr ideenlos wiederfinden wirst)

C. W.

[23]22 Berlin, 17. Okt. 73 (Morgens)

Verehrtes Fräulein![2]

Soeben erhalte ich einen Brief von unserer Freundin, datiert Zürich 13. Okt., der also ungewöhnlich lange unterwegs gewesen ist.

Darin schreibt sie mir, daß sie wohl nicht vor dem 1-sten November abreisen werde. Sie muß aber deswegen auch an Sie geschrieben haben, denn es kommt ein Passus vor «da wir bereits eine Wohnung gemietet haben» — wovon Sie nach Ihrer gestrigen Mitteilung nichts wissen. Auch heißt es «Julia wird wohl *etwas* vor mir in Berlin sein». Mein gestriges Telegramm wird indes wohl bald beantwortet werden. Sie haben dann wohl die Güte, mir eine kleine Mitteilung zukommen zu lassen (am raschsten p[er] Standtpost), damit ich wieß, ob ich den empfangenen Brief noch zu beantworten habe. Wenn es mir irgend möglich wird, werde ich mir nicht versagen, Sie noch einmal aufzusuchen, um Näheres zu erfahren.

Mit freundlichstem Gruß
Ihr ergebenster Weierstraß

[1] So nennt Kowalewskaja ihre Abneigung gegen Briefschreiben.
[2] Cousine von J. Lermontoff.

24. Berlin, Freitag 14 Nov. 73
(Morgens)

Liebste Freundin, ich habe mich vorgestern geirrt, wenn ich Dir sagte, daß ich gestern oder heute zu Dir kommen könnte. Ich bin aber *heute* (Freitag) *sicher* von 5 Uhr N[achmittags] an zu Hause. Willst Du mich besuchen und einigen mathematischen Stoff mitbringen? Ich erwarte Dich, wenn Du nicht absagst. Am Sonnabend bin ich wieder in Anpruch genommen, und kann auch in diesem Augenblick noch nicht bestimmen, wie es am Sonntag oder Montag sein wird.

Der Deinige K. W.

25.

Berlin, 19 Nov. 73

Liebe, teuere Sonia!

Ich übersende Dir hierbei noch eine ganze Serie von «Liedern ohne Worte», welche sich sämtlich auf die geradlinig begrenzten Minimalflächen beziehen. Ich habe die einzelnen Blätter gleich gestern Abend zusammengesucht; Sie represäntieren verschiedene Stadien der Untersuchung, so daß das schließlich Bleibende nicht so sehr umfangreich sein wrd. Ich bitte aber, sie genau in der Aufeinanderfolge, in der sie liegen, erhalten zu wollen, zumal da sie ohne mündliche Erläuterung Dir doch wohl unentzifferbar sein werden. Ich wollte sie aber sofort Deinen Händen anvertrauen, damit sie bei mir nicht wieder durcheinander kämen.

Wenn ich Dich diese Woche noch einmal sehen soll, so muß ich schon heute abend — bald nach 6 Uhr — kommen; willst Du mir dann eine Tasse Tee und ein [Ei] Butterbrot geben, so werde ich beides dankbar annehmen (Du wirst aber gut tun, bei deiner Frau Prediger vorher die nötige Bestellung zu machen); ich weiß nicht, ob sich sobald wieder dazu eine Gelegenheit finden möchte, und ich möchte auch Julie gern einmal wieder sprechen.

Damit wir aber die Zeit vorher nützlich anwenden, so würde es mir lieb sein, wenn Du Dich in das gestern Dir Mitgeteilte einigermaßen schon heute einstudiert hättest; wir könnten dann unmittelbar daran anschließen, und vielleicht schon am nächsten Sonntag mit der Entwicklung der linearen Differentialgleichung zu welcher das zu lösende Problem führt, fertig werden. Dann kommt allerdings noch Einiges die Theorie solcher D.[ifferentialgleichungen überhaupt Betreffende zur Sprache, was notwendig ist, um die Natur der unter den Koefficienten der Gl.[eichung] bestehenden transzendenten Relationen in's Licht zu setzen; diese Relationen fehlen bei Riemann ganz, und dies ist einer der Hauptmängel seiner Theorien.

Mit herzlichem Gruß
Der Deinige K. W.

26.

Liebe Sonia, ich schreibe Dir dies im Senatssaal der Universität während eines tiefsinnigen Examens über die Grundbestimmungen der Materie.

Als ich heute von Dir ging, fiel mir sogleich ein, daß wir eine der Relationen unter den λ_r übersehen haben. Da wir nämlich den Coefficienten von t^{n-r} in M gleich Eins angenommen haben, so muß sein

$$\sum_r \lambda_r a_r^k = \begin{cases} 0 \text{ für } & k = 0, 1, 2 \\ 1 \text{ für } & k = 3 \end{cases}$$

Heraus

$$\sum_r \sigma_r a_r^k = 0 \text{ für } \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Es bleibt also, wenn wir setzen

$$\frac{\rho}{L} = 2t^2 - \tau t + \tau_0 + \frac{\tau_1}{t - a_1} + \ldots + \frac{\tau_n}{t - a_n}$$

τ_ν willkürlich, und

$$\tau = a_1 + a_2 + \ldots + [a_n] \qquad \{M = t^{n-4} + a_1 t^{n-5} + \ldots\},$$

oder

$$\tau = \sum_r \lambda_r a_r^4$$

Alles übrige bleibt ungeändert.

Herzlichsten Gruß. W.

Donnerstag, 27.11.73 (Abends)

27. Berlin, 29.11.73 (Nachmittags)

Liebste Sonia, vielleicht denkst Du, wenn Du diesen Brief erhältst, ich sei morgen Nachmittag verhindert, Dich bei mir zu sehen—dem ist aber nicht so, ich sehne mich vielmehr, nach mehreren Tagen unerquicklichster Arbeit, ganz besonders nach meiner lieben Schülerin und Freundin, und schreibe Dir nur, um Dich daran zu erinnern, Du mögest doch sämtliche die Minimalflächen betreffenden Papiere mitbringen damit wir ungehindert fortfahren und, wie

ich hoffe, die Theorie zu Ende führen können. Auch was Du in Betreff der Form $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = 0$ gemacht ist, vergiß nicht mitzubringen.

Mit herzlichstem Gruß
Dein treuer Freund W.

28.

Liebe Sonia, wenn es Dir nicht unbequem ist, so komme morgen etwas früher, etwa gegen halb Drei zu mir — ich bin nämlich genötigt, gegen 6 $^1/_2$ Uhr auszugehen.

In Beziehung auf das bei unserem letzten Zusammensein Besprochene habe ich Dir noch etwas Interessantes mitzuteilen. Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Funktion $\varphi(s)$ lauter imaginäre und *ungleiche* einfache Factoren habe. Das Letztere ist aber nicht notwendig, denn alle Multiplikations — und Divisionsgesetze bleiben bestehen, wenn man ohne über die Beschaffenheit von $\varphi(s)$ irgend eine Annahme zu machen, die Multiplication zweier compl.[exen] Zahlen

$$f(l) = a_0 l_0 + a_1 l_1 + \ldots + a_{2r-1} l_{2r-1}$$

$$g(l) = b_0 l_0 + b_1 l_1 + \ldots + b_{2r-1} l_{2r-1}$$

so erklärt: es ist

$$f(l)\, g(l) = h(l) = h_0 l_0 + h_1 l_1 + \ldots + h_{2r-1} l_{2r-1}$$

wenn $f(s)\, g(s) - h(s)$ durch $\varphi(s)$ theilbar ist.

Wenn nun jede Gleichung $F(x, l) = 0$
oder

$$f_0(l) x^n + f_1(l)\, x^{n-1} + \ldots + f_n(l) = 0$$

lösbar sein soll, so ist notwendig, daß $\varphi(s)$ (als gewöhnliche Funktion von s betrachtet) für keinen reelen Wert von verschwinde — aber es ist auch *nur* diese Bedingung erforderlich. Hat aber $\varphi(s)$ gleiche Factoren — so daß

$$\varphi(s) = (s^2 + k_1 s + l_1)^{\nu_1} \ldots (s^2 + k_\mu s + l_\mu)^{\nu_\mu}$$

wo die k, l reell und $\nu_1 + \nu_2 + \ldots = r$, so modifiziert sich der Satz über die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, und es ist dieselbe nicht mehr gleich n^r, wie in dem Falle, wo $\nu_1, \nu_2, \ldots$ sämtlich $= 1$ sind. Nun, meine Schülerin, denke einmal darüber nach, wie muß $\varphi(s)$ beschaffen sein — d. h. welches Multiplications-Gesetz muß man nehmen, damit die Gleichung n-ten Grades im Allgemeinen n Wurzeln habe?

Einiges Andere hierher Gehörige werden wir morgen noch besprechen.

Mit herzlichem Gruß
Der Deinige W.

Berlin, 6 Dez. 73 (Nachmittag)

29. Berlin, 24. Dez 73 (Morgens)

Liebe Sonia!

Deine Rechnung für das Differential von

$$P = 2\omega I'(s_0) - 2\eta I(s_0)$$

d. h. von derjenigen Periode des Integrals

$$\int \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_0}}{s - s_0} \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

welche der Periode 2ω von $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$ entspricht, ist ganz richtig. In meinen Papieren finde ich: wenn f, g, h aus den Gleichungen

$$dA = (4B^2 - 6AC) f - 6Ag + 4Bh$$

$$4dB = -6Af - 16Bg + 12Ch \qquad -6dC = 4Bf + 12Cg - 12h$$

bestimmt werden (wobei $S = A + 4Bs + 6Cs^2 + 4s^3$ angenommen) so hat man s_0 ebenfalls als veränderlich voraussetzend

$$dI(s_0) = gI(s_0) + fI'(s_0) - \frac{Bf + h + (2g + 3Cf)\, s_0 + 2f s_0^2 + ds_0}{\sqrt{S_0}}$$

$$dI'(s_0) = hI(s_0) - gI'(s_0) - \frac{{}^1/_2 Af + (Bf - h - ds_0)\, s_0 - 2g s_0^2}{\sqrt{S_0}}$$

welche Formeln mit den Deinigen stimmen werden, abgesehen davon, daß Du vielleicht die Ausdrücke f, g, h anders bezeichnet hast.

Das Weitere ergibt sich dann so, wie Du es mir zeigtest.

Nimmt man

$$Q = \int \frac{1}{s - s_0} \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

so erhält man allerdings

$$dQ = \alpha\theta + \beta\omega + \gamma\eta$$

wo α, β, γ linear mit dA, dB, dC, ds_0 zusammengesetzt sind.

Damit wir K[ommenden] Freitag ohne Aufenthalt fortfahren können, so bitte ich, schicke mir doch womöglich noch heute folgende Angaben (p[er] Post):

1) Die Reductionsformel von dem zu bestimmenden Intergal auf die Form

$$\int (\lambda\xi^2 + \mu\xi + \nu + \rho\xi^{-1}) \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

2) Den von Dir gebrauchten Ausdruck von ξ durch s und umgekehrt;

3) Das Resultat dieser Transformation (Nur die Formen).

Mit herzlichem Gruß
Dein K. W.

30.

Teuere Freundin!

Hierbei die soeben mir zugegangene Antwort des Prof. Lipschitz, die ich zu behalten oder vielleicht Fräulein Evreinow mitzuteilen bitte. Sie enthält zwar nichts wesentlich Neues; immerhin mag es aber zur Beruhigung der Angehörigen der Verstorbenen dienen, daß auch nach der Aussage des Prof. Kekulé ein Selbstmord nicht festgestellt ist.

Herzlichsten Gruß!

30. Januar 74 (nachmittags) Weierstraß

31.

Meine teuere Sonia!

Wenn ich Dich diese Woche noch sehen soll, so muß ich diesen Nachmittag Dich besuchen. Ich muß dann aber schon gegen 4 Uhr zu Dir kommen, da ich am Abend noch eine Sitzung habe. Willst Du mich erwarten? Über den Zweck des beikommenden Buches mündlich.

Freundlichsten, herzlichsten Gruß!

26. Febr. 74 (Morgens) Der Deinige W.

32.

Meine liebe Sonia!

Ich habe schon zwei Tage auf ein Briefchen von Dir gewartet, mit der Anzeige, daß Du zu dem gewünschten Resultat gekommen seist, und fürchte jetzt fest, daß abermals eine Hoffnung als illusionisch sich erwiesen habe. Jedenfalls muß ich darüber Gewiß-

heit haben, und bitte Dich, mich heute Nachmittag gegen 5 Uhr erwarten zu wollen, oder falls irgend eine Abhaltung von Deiner oder meiner Seite eintreten sollte, was ich nicht hoffe, mir noch heute ein Paar Worte zukommen zu lassen.

Herzlichsten Gruß!
C. W.

7.3.74 (morgens)

33.

Meine teuere Sonia!

So eben erhalte ich die durch ein Zufall verspätete Einladung, um 5 Uhr zur königlicher Tafel zu erscheinen. Da eine solche Einladung = einem Befehl ist, so muß ich zu meinem großen Bedauern darauf verzichten, meine liebe Freundin, heute bei mir zu sehen, bitte sie aber dringend, mich morgen durch ihren Besuch erfreuen zu wollen.

Mit herzlichem Gruß
Der Deinige C. W.

17.3.74 (2. Uhr N[achmittag])

34. Berlin, 31. März 74

Meine teuere Freundin!

Zu meinem großen Bedauern kann ich morgen einer amtlichen Abhaltung halber nicht zu Dir kommen, werde mich aber dagegen am Donnerstag bei Dir einfinden, falls ich nicht etwa Nachricht von Dir erhalte, daß Du nicht zu Hause sein könnest. Ich bin recht verdrießlich darüber, daß ich auch heute und morgen noch zu den periodischen Funktionen nicht zurückkehren kann, mit denen ich doch in diesen Ferien abschließen mußte.

Herzlich grüßend
Der Deinige C. W.

35. Berlin, 6. Mai 74

Meine liebe Freundin!

Gestern und Vorgestern ist es mir nicht möglich geworden, zu Dir zu kommen; wenn ich Dich heute sehen soll, so muß ich Dich bitten, mich schon gegen 4 1/2 Uhr etwa erwarten zu wollen, da ich gegen 7 Uhr noch zu einer Sitzung muß.

In betreff des am Sonntag besprochenen Gegenstandes kann ich Dir jetzt folgendes mitteilen.

Es sei λ eine reelle Veränderliche und $f(\lambda)$ eine Funktion derselben, welche nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

1) sie soll bei *endlichen* Werten von λ d. h. wenn man diese Größe zwischen zwei beliebigen endlichen Größen λ_1, λ_2 einschließt, nicht unendlich groß werden;

2) sie kann an beliebig vielen, auch an unendlich vielen Stellen unstetig oder unbestimmt sein, aber in der Zeit, daß das Integral $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda$ unter Zugrundelegung der Riemannschen Erklärung einen Sinn hat (S. R[iemann]s Abhandlung über die Fourier'sche Reihe).

3) Wenn λ sich der Grenze $-\infty$, $+\infty$ nähert, so braucht $f(\lambda)$ nicht endlich zu bleiben, muß ebenso beschaffen sein, daß $\frac{\log|f(\lambda)|}{\lambda^2}$ für $\lambda = \pm\infty$ vershwindet (Das ist z. B. der Fall, wenn $f(\lambda)$ unendlich wird wie eine positive Potenz von λ oder wie $e^{\alpha\lambda^\beta}$, wo α, β positive Größen und $\beta < 2$):

Alsdann gilt folgender Satz. Es seien u, v, w complexe Veränderliche, von denen die erste der Bedingungen unterworfen ist, daß ihr reeller Teil stets *positiv* sein soll, so hat das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}\, d\lambda$ bei endlichen Werten von u, v, w stets einen bestimmten *ebenfalls* Endlichen Wert, und ist *eine reguläre Funktion von* u, v, w.

Dieselbe kann also, wenn u', v', w' irgend ein System bestimmter Werte von u, v, w ist, nach ganzen positiven Potenzen von

$$u - u', \qquad v - v', \qquad w - w'$$

in eine Reihe entwickelt werden, welche stets konvergiert, wenn u so nahe bei u' angenommen wird, daß für alle anderen Werte dieser Größe, die denselben Abstand von u' haben, der reelle Teil positiv ist.

Diese Reihe wird ferner erhalten, wenn man

$$f(\lambda)\, e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}$$

nach Potenzen von $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$ entwickelt und darauf *jeden Koeffizienten der so entstehenden Reihe von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *integriert.*

Dieser Satz angewandt auf das Integral

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4t}}\, d\lambda$$

lehrt, daß dasselbe, wenn die Größe t der Bedingung unterworfen wird, daß ihr reeller Teil stets positiv sei (also auch der von $1/t$), während x unbeschränkt veränderlich ist, in eine beständig konvergierende Reihe von der Form

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \{\varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \ldots + \varphi_n(t)x^n + \ldots\}$$

entwickelt werden kann, worin $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$,... reguläre Funktionen von t sind. Es genügt ferner $\varphi(x, t)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2}$ in dem ganzen Bereich (x, t), für welchen die Funktion definiert ist.

Der Beweis des aufgestellten Satzes ist sehr einfach; auch läßt sich ein viel allgemeinerer begründen, der zeigt, wie aus ganz willkürlichen Funktionen einer reellen Veränderlichen λ analytische Funktionen complexer Größen abgeleitet werden können.

Über alles dies und manches daran sich knüpfende mündlich Weiteres und Näheres.

Du siehst, teuerste Sonia, wie Deine — Dir so einfach erscheinende — Bemerkung über die Eigentümlichkeit partieller Differentialgleichungen, daß eine unendliche Reihe, welche einer solche [Diff.] Gl. *formell* genügen kann, ohne doch für irgend welche Wertsysteme ihre Veränderlichen zu konvergieren, für mich der Ausgang von Untersuchungen, die viel Interessantes haben und manche Aufklärung verschaffen, geworden ist. Ich wünsche, daß meine Schülerin auf diese Weise fortfahren möge, Ihrem Lehrer und Freund Ihren Dank zu betätigen.

Mit herzlichstem Gruß
Dein C. W.

36. [9. Mai 74]

Meine liebe Sonia!

Ich konnte diese Tage über nicht zu Dir kommen, teils geschäftlicher Abhaltungen, teils auch eines leichten Unwohlseins wegen, daß es mir ratsam erscheinen ließ, mich des Abends zu Hause zu halten.

Morgen aber erwarte ich Dich zur gewohnten Stunde bei mir zu sehen, und hoffe dann wieder ganz wohlauf zu sein.

Habe ich nicht die neulich zurückerbetenen elliptischen Papiere doch bei Dir liegen lassen? Für diesen Fall bitte ich sie mir mitbringen zu wollen.

Eine kleine Aufgabe. Die p[artielle] D[ifferentialgleichung]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

hat ein particuläres Integral

$$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}}(x - \lambda)$$

wo λ, μ, ν willkürliche Konstanten bezeichnen, und $F(u)$ der Diff. [erential] Gl.[eichung]

$$F''(u) + 1/2\ \mu u\ F'(u) + \mu\nu F(u) = 0$$

genügen muß. Welche ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung? Für $\mu = 1$, $\nu = 1/2$ kann man setzen

$$F(u) = f(\lambda)\, e^{-\frac{u^2}{4}}$$

und erhält aus dem part.[iculären] Integral

$$\varphi = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}}\, e^{-1/4 \frac{(x-\lambda)^2}{t}}$$

das allgemeine

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}}\, e^{-1/4 \frac{(x-\lambda)^2}{t}}\, d\lambda$$

Wenn aber $f(\lambda)$ für unendlich große Werte von λ in stärkerem Maße unendlich wird wie die Funktion $e^{-c\lambda^2}$ bei beliebig kleiner Constante c, so hat der vorstehende Ausdruck kienen Sinn.

Bekommt man vielleicht in diesem Falle durch Anwendung einer allgemeinen Funktion $F(u)$, die der aufgestellten D. Gl. bei anderen Werten der Constanten μ, ν genügt, einen brauchbaren Ausdruck? Oder ist die willkürliche Funktion notwendig an die Beschränkung gebunden, daß $\frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda^2} = 0$ werden muß für $\lambda = \pm\infty$?

Mit herzlichstem Gruß
Dein C. W.

37.

Meine liebe Sonia!

Es tut mir sehr leid, daß ich gestern mein Versprechen nicht habe halten können. Ich habe mich aber so erkältet, daß ich mich gestern niederlegen mußte. Heute fühle ich mich besser, werde aber

doch zu Hause bleiben müssen. Morgen aber hoffe ich meine teuere Freundin sehen zu können.

Mit herzlichstem Gruß
Dein C. W.

B. [15 Mai 74]

38.

Meine liebe Freundin!

Morgen (Mittwoch) habe ich den ganzen Vormittag frei, und bitte Dich deshalb, mich gegen 11 Uhr erwarten zu wollen. Heute bin ich ziemlich in Anspruch genommen, da während der paar Tage, die ich zu Hause zugebracht habe, doch mancherlei Geschäfte unerledigt geblieben sind. Ich hoffe, Du wirst mich morgen wieder ganz wohl finden

19.5.74

Mit herzlichstem Gruß
Der Deinige C. W.

[P. S] Mich vexiert diese Tage ein mathematisches Paradoxe, nach welchem es möglich sein müßte, *jeder* Gleichung 4-ter Dimension zwischen zwei Veränderlichen x, y, dadurch zu *genügen*, daß man setzt

$$x = Funct.\ rat\,(t, \sqrt{R(t)}) \qquad y = Funct.\ rat\,(t, \sqrt{R(t)})$$

wo $R\,(t)$ eine ganze Funktion von t bedeutet. Selbstverständlich kann dies nicht in einer solchen Weise geschehen, daß t und $\sqrt{R\,(t)}$ sich rationell durch x, y ausdrücken lassen (vielmehr gehören zu jedem Wertepaar (x, y) zwei Werte von t), aber es würde doch folgen, daß jedes Integral, für das $\rho = 3$ ist, sich in ein hyperellsiptiches (für welches dann im Allgemeinen $\rho > 3$ sein müßte) transformieren ließen — was mir doch nicht recht glaublich erscheint. Andererseits kann ich jedoch keinen Irrtum in meinen Schlüssen entdecken.

39. B. 21. 5. 74

Meine liebe Sonia!

Mein Unwohlsein hat sich seit vorgestern abend zu einer Halsentzündung, verbunden mit heftigem Fieber und absoluter Schlaflosigkeit, etwickelt.

Acht Tage wird es wohl währen und hat mir der Arzt streng verboten während dieser Zeit irgend einen Besuch anzunehmen.

Dein C. W.

40. Berlin, Sonntag den 29-sten Mai 74.

Meine teuere Freundin!

Seit gestern hat mich das Fieber verlassen, und habe ich die letzte Nacht auch wieder eines erquickenden Schlafs mich erfreut. Der Arzt meint, ich werde mich nun recht bald erholen, wenn ich mich auch augenblicklich noch recht angegriffen fühle. Wie gern ich Dich nun bald sehen möchte, brauch ich Dir nicht zu sagen. Übermorgen (Dienstag) hoffe ich so weit zu sein, daß ich, wenn Du ein Stündchen für mich frei hast — ich weiß nämlich nicht, ob unterdes nicht der erwartete Besuch bei Dir eingetroffen ist — Dich empfangen kann. Bitte aber vorher mit ein paar Worten mich benachrichtigen zu wollen.

Mit herzlichstem Gruße
Der Deinige C. W.

[40_1] 86.

Liebste Sonia, ich bitte heute zu kommen.

Der Deinige C. W.

[40_2] 87.

Liebe Sonia!

Am liebsten wäre es mir, wenn Du morgen Vormittag (um 1 Uhr) kommen könntest. Am Nachmittag soll ich ausfahren.

Der Deinige C. W.

[40_3] 91.

Meine teuere Freundin!

Heute bis gegen 11 Uhr in Akademie und Fakultät beschäftigt, muß ich ob nur zu meinem großen Bedauern sagen, daß soeben mir zugegangene freundliche Einladung Folge zu leisten.

Morgen abend aber bin ich frei und werde nicht unfehlen mich einzufinden.

In allen Fällen mit freundlichstem Gruß

Weierstraß

26. Juni [Morgens]

[40_4] 95. 4. Juli

Meine teuerste Freundin!

Der gestern abend von Dir mitgenommene Bogen ist mir durch einen Zufall verunglückt. Die Sache ist übrigens in Ordnung, und ich kann den Inhalt aus dem Gedächtnis wiederherstellen, Dir zug-

leich andeutend, wie sich die Untersuchung wohl am besten dem Vorhergehenden aufschließen möchte.

«Wenn die vorgelegte Differenzialgleichung nicht die normale Form hat, so kann man ihr dieselbe doch stets dadurch geben, daß man an Stelle der Größen x_1, x_2, ..., x_r ebensoviele lineare Funktionen derselben $(y, y_1, \ldots, y_r)$ als Argumente von φ einführt.

Setzt man nämlich

$$y = b + cx + c_1x_1 + \ldots + c_rx_r$$
$$y_1 = b' + c'x + c_1'x_1 + \ldots + c_r'x_r$$
$$y_r = b^{(2)} + c^{(2)}x + \ldots + c_r^{(r)}x_r$$

wo die b, c Konstanten bezeichnen, welche der Bedingung unterworfen sind, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} c & c_1 & \ldots c_r \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{(r)} & c_1^{(r)} & \ldots c_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein darf, so verwandelt sich der Ausdruck

$$G(x, x_1, \ldots \varphi, \ldots \varphi_{\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_r})$$

in einen anderen von derselben Form

$$\bar{G}\left(y, y_1 \ldots \varphi \ldots \frac{\partial^{\beta+\beta_1+\ldots+\beta_r}\varphi}{\partial y^{\beta}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_r^{\beta_r}}\right)$$

in welchem ebenso wie in G nur Ableitungen von nicht höherer, als der n-ten Ordnung vorkommen, und es läßt sich zeigen, daß derselbe im Allgemeinen, d. h. nur in Wertsystemen der Konstanten c, c_1... ..., c_r ausschließt, die Ableitung

$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial y^n}$$

wirklich enthält.

Davon überzeugt man sich am leichtesten auf folgende Weise. Man hat, wenn man mit

$$\varphi_{\alpha', \alpha_1' \ldots \alpha_r'},\ \varphi_{\alpha,''\alpha_1'' \ldots \alpha_r''} \quad \text{u. so w.}$$

die in G vorkommenden Ableitungen der n-ten Ordnung bezeichnet

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G_0 + G_1\varphi_{\alpha'+1,\ldots,\alpha_1'\ldots\alpha_r'} + G_2\varphi_{\alpha''+1,\alpha_1''\ldots\alpha_r''} + \ldots$$

wo $\bar{G}_0$, $\bar{G}_1 \ldots \bar{G}_r$ nur Ableitungen von niedrigeren als der $(n+1)$ — ten Ordnung enthalten. Nun ist aber

$$\varphi_{\alpha'+1,\,\alpha_1'\ldots\alpha_r'} = c_1^{\alpha'+1} c_r^{\alpha_1'} \ldots c_r^{\alpha_r'} \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \ldots$$

$$\varphi_{\alpha''+1,\,\alpha_1''\ldots\alpha_r''} = c^{\alpha''+1} c_1^{\alpha_1''} \ldots c_r^{\alpha_r''} \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \ldots$$

wo die weggelassenen Glieden nur solche Ableitungen

$$\frac{\partial^{\beta+\beta_1+\ldots+\beta_2}}{\partial y^{\beta} \partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_r^{\beta_r}}$$

enthalten, in denen $\beta + \beta_1 + \ldots + \beta_r = n+1$ aber $\beta < n+1$ ist. Man hat also

$$\frac{\partial G}{\partial x} = (c_1 c^{\alpha'+1} c_1^{\alpha_1'} \ldots c_r^{\alpha_r'} + \ldots + c_2 c^{\alpha''+1} c_1^{\alpha_1''} + c_r^{\alpha_r''} + \ldots) \times$$

$$\times \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \text{etc}$$

nur in den weggelassenen Gliedern, nachdem die in ihnen enthaltenen Ableitungen von φ nach x, $x_1 \ldots x_2$ in Ableitungen nach y, $y_1 \ldots y_r$ verwandelt werden, $\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$ nicht vorkommt.

Ableitung.

Wählt man nun die Konstanten c, $c_1, \ldots c_r$ so, daß der Koeffizient von $\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$ in der vorstehenden Gleichung, als Funktion von x, $x_1, \ldots \varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_r}$ betrachtet, nicht identisch verschwindet — was nur für spezielle Wertsysteme der c, $c_1 \ldots c_r$ erbauten kann — so wird dieselbe auch nicht identisch gleich Null, wenn man auch in ihm an Stelle der Veränderlichen x, $x_1, \ldots x_r$ die y, $y_1, \ldots y_r$ einführt nnd die Ableitungen $\varphi_{\alpha,\alpha_1\ldots\alpha_2}$ in Ableitungen von φ nach y, $y_1, \ldots y_r$ verwandelt; und es kommt also die Ableitung $\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$ wirklich vor; es ist aber

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} + c_1 \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_1} = \cdots + c_r \frac{\partial G}{\partial y_r}$$

und es kann daher $\frac{\partial G}{\partial x}$, auf die angegebene Weise transformiert, die Ableitung $\frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial y^{n+1}}$ also dann enthalten, wenn in $\bar{G}$ die Ableitung $\frac{\partial^n \varphi}{n}$ vorkommt.

Ich glaube, liebe Sonia, ich habe so Deinen Gedankengang, wodurch allerdings Bedenken, welches ich hatte, auf die einfachste Weise gehoben ist, getreulich reproduziert.

Nimmt man insbesondere

$$y = x - a - c_1 (x - a_1) \ldots - c_r (x_r - a_r)$$

$$y_1 = x_1 - a_1$$

$$y_r = x_r - a_r$$

so sieht man, daß bei gehöriger Wahl von $c_1 \ldots c_r$ sich φ stets nach Potenzen von

$$x - a - c_1 (x_1 - a_1) - \ldots - c_r (x_r - a_r),\ x_1 - a_1, \ldots,\ x_r - a_r$$

entwickeln läßt, und daß man diejenigen Funktionen, in welchen

$$\varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ldots \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial x^{n+1}}$$

für $x = a + c_1\ (x_1 - a_1) + \ldots + c_r\ (x_r - a_r)$ übergehen, als Potenzreihen von $x_1 - a_1, \ldots,\ x_r - a_r$ im Allgemeinen willkürlich machen kann.

Es muß dann die Bemerkung über die Notwendigkeit der angegebenen Substitution und das Beispiel $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$ folgen. Dann der Nachweis, daß jede Funktion φ, die keine singuläre Lösung der Differenzial-Gleichung ist, Funktionenelemente hat, die sich in der auseinandergesetzten Weise finden lassen. Endlich das System von D[ifferenzial]-G[leichungen] und ein Beispiel.

Ich werde heute noch einmal zu Dir kommen, um die Einleitung zu dem Ringe fertig zu bringen.

Herzlichst grüßend
der Deinige W.

Ich schicke Dir gleichzeitig auch Deinigescripta zurück, wenn Du vielleicht noch Gebrauch machen kannst.

[40_5] 88.

Teuerste Sonia!

Da ich möglicherweise morgen verhindert sein werde, zu Dir zu kommen, so bitte ich Dich, mich heute Nachmittag erwarten zu wollen.

Herzlichst grüßend
der Deinige C. W.

7. Juli (Morgens) [1874]

[40_6] 94. Berlin, Ostbahnhof
11. August [1874]

Liebe Sonia!

Ich habe mir die Sache, von der wir sprachen, schon überlegt; ich werde morgen an Hübner schreiben, ohne Verweis Deiner Freundin, so daß dieselbe weiß nichts und [meine] Verantwortlichkeit bleibt.

Herzlichsten Gruß, meine teuerste Freundin
C. W.

41. Rüdersdorf, 11. August 74

Meine teuere Sonia!

Du wirst die paar Zeilen, die ich heute auf dem Ostbahnhofe, schrieb, erhalten haben. Ich habe soeben den Brief an Prof. Hübner vollendet, zu dem ich mich entschlossen habe, um, womöglich, die Angelegenheit, welche ich zu meinem größten Bedauern für verfahren halte, wieder in's rechte Geleise zu bringen.

Wie glücklich werde ich sein, wenn mir auch dies gelänge.

Dagegen ist es mir nicht möglich geworden, den versprochenen Brief an L[ermontoff] zu entwerfen, bei diesem kommt es aber in der Tat auf 24 Stunden nicht an, ich schick ihn Dir morgen.

Hoffentlich sehe ich Dich noch am Donnerstag (gegen Abend) und sende Dir einstweilen meinen herzlichsten Gruß.

Der Deinige C. W.

Da mein Brief an H.[übner] bereits abgegangen ist, wenn dieser in Deine Hände kommt, so kannst Du Deiner Freundin immerhin von dem Schritte, den ich ohne ihr Mitwissen getan, Mitteilung machen. Ist er ein verkehrter, was ich, da ich H's Persönlichkeit gar nicht kenne, als möglich zugeben muß, so bin nur ich verantwortlich[1].

[41_1] 90. 14. August [morgens]

Meine teuerste Freundin!

Aus dem beiliegenden, soeben mir zugegangenen Briefe des Prof. Hübner wirst Du ersehen, daß meine Befürchtungen leider nur zu sehr begründet waren. H[übner] sagt gradezu, daß es ihm unmöglich gewesen sei, sich lebhafter für die Angelegenheit von Julie L[ermontoff] zu interessieren, weil man ihn zu spät mit der

---

[1] ‹Mit einer anderen Hand geschrieben:›
Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism By Wiliam Thomson
London 1872

Sachlage bekannt gemacht habe (d. h. weil Hofmann *nur* an Mühler geschrieben habe). *Einen* jetzt noch möglichen Ausweg deutet er an, zu dem ich aber ein Amendement stelle. Julie muß sofort zu Hofmann gehen und demselben mitteilen, daß ich auf eine Privat Anfrage erfahre, es sei ihr eine mündliche Prüfung auferlegt worden. Hofman muß dann sofort an den *Dekan* schreiben und denselben auf das Dringendste ersuchen, morgen [Sonnabend], wo die letzte Fac[ultäts]-Sitzung sein wird, die Sache noch einmal zur Sprache zu bringen. Julie muß dann auch selbst schreiben, den Entwurf zu einem solchem Briefe will ich sogleich machen, und Dir, wenn Du noch herkommst, übergeben.

Ich kann Dir nicht sagen, wie sehr mich die Sache (die so ungeschickt eingeleitete Sache) betrübt. Hoffe nur, daß auch in letzter Stunde ihre eine günstige Wendung sich geben lassen werde.

Der Deinige W]

[41_2] 97. 15. August, Morgen [1874

Liebste Freundin!

Schicke mir doch sofort durch den überbringenden Dienstmann Deine Dissertation (sowie auch ein gestern bei Dir vergessenes Paquet Briefe) pausenlos zu — die Druckerei hat schon danach verlangt, wir müssen als durchaus von diesen Nachmittag die[oben] erforderlichen Abänderungen machen.

Ist Julie wirklich fort!

Mit herzlichstem, freundlichstem Gruß

der Deinige C. W.

Weise gefälligst den Dienstmann an, daß er mir die Sachen in die Universität (Lokal der Universität Hauses bringe).

[41_3] 98.

Meine liebe Sonia!

Auf morgen Nachmittag 5 Uhr habe ich eine Einladung erhalten, die ich nicht füglich ablehnen konnte. Ich würde mich aber sehr freuen, wenn Du Dich so einrichten könntest, daß Du etwa von 12—2 Uhr zu mir kämest.

Wenn Du nicht absagst, nehme ich an, daß Du kommst.

Die zuletzt Dir übergebenen Papiere bitte ich mir zubringen, da wir sie gebrauchen werden.

Mit herzlichstem Gruß

Dein Karl W.

Dien[stag] (Nachm[ittag])

[41$_4$]89.

Liebe Sonia!

Den Schluß des § 2 habe ich abgeändert. Der bekritzelte Bogen muß allerdings abgeschrieben werden. Der Schluß des § III wird vielleicht auch um einige Zeilen zu vermehren sein. Ich komme diesen Nachmittag, um alles einzupacken.

Herzlich grüßend
W.

[41$_5$] 93.

Meine teuere Freundin!

Zu meinem Bedauern kann ich mein Versprechen, heute zu Dir kommen zu wollen, nicht halten, da ich einer Einladung zum Diner beim Kronprinzen folgen muß. Ich komme aber jedenfalls morgen, gegen oder am vormittag oder wahrscheinlicher gegen Abend.

Bist Du mit der begonnenen Ausarbeitung bereits im wesentlichen fertig, so möchte ich Dich bitten, sie mir morgen möglichst früh zu schicken, damit ich sie mit Aufmerksamkeit durchgehen kann. Was ich vorgestern gelesen, hat mir ganz gut gefallen, und ich erkenne [auch] in der Darstellung, doch ein Urteil habe.

Unter diesen Umständen will ich es doch möglich zu machen suchen, heute nach der Akademiensitzung (gegen 7 Uhr) zu Dir zu kommen, um die Sache zu besprechen. Suche also, bitte ich, die betreffenden Papiere zusammen und beschäftige Dich heute nur mit den part[iellen] D[ifferenzial]-Gleichungen.

Herzlichst grüßend
Der Deinige W.

Montag, Vorm[ittag].

[41$_6$] 96.

Liebe Sonia!

Du mußt schon sehen, wie Du Dich in den beiliegenden Blättern zurechtfindest. Deine Formeln und den allgemeinen Gang der Darstellung habe ich beibehalten können, am Ausdruck aber vieles zu ändern gehabt. Die Einführung der Funktion $\theta\ (u_1,\ldots)$, die einige Umstände gemacht haben würde, war, wie Du schon weißt, nicht notwendig. Den Schluß der Ausarbeitung schicke mir doch baldigst zu.

Herzlich grüßend
Dein W.

42. B. 18.8.74

Meine teuere Freundin!

Ich habe gestern vergessen, Dir ausdrücklich zu sagen, daß Du, wenn ich heute Dir oder Julia noch in irgend einer Weise nützlich sein könne, doch zu mir schicken mögest. Indem ich dies nachhole, ûemerke ich zugleich, daß ich von 1 Uhr an den ganzen Tag zu Hause sein werde. Morgen (Mittwoch) komme ich dann (am Nachmittag) zu Dir. Sage Deiner Freundin auch, daß ich vom 4 — ten Oktober an jedenfalls wieder hier sein werde, und daß sie sich in jeder Angelegenheit, in welcher ich etwas für sie tun könne, unbedenklich direkt an mich wenden möge.

Mit herzlichsten Grüßen für Euch beide
Der Deinige C. W.

43. Berlin (W) Potsdamerstr. 40
d. 21-sten Sept, 1874

Meine teuere Sonia!

Gestern von meiner Reise zurückgekehrt, habe ich mich sehr beunruhigt, daß ich noch keinen Brief von Dir vorfand. Ich fürchtete schon, daß Du nach den Anstrengungen des vergangenen Sommers und der Reise krank geworden seist. Glücklicherweise ist dies, wie ich zu meiner größten Freude aus Deinem soeben empfangenen lieben Brief (dessen Datum $\frac{2.\ Sept.}{1.\ Juli}$ (wirklich!) doch jedenfalls ein Irrtum ist) ersehe, nicht der Fall, wenn auch die Deinigen ganz vernünftig gehandelt haben, daß sie Dir für die Zeit Deines Landaufenthaltes alle Deine Bücher «eingesperrt». Ich bitte Dich auch meinerseits recht dringend, liebes Herz, sorgen vor allen Dingen dafür, daß Du Dich erholst — was Du jetzt in Deinem Studium versäumst, wirst Du mit frischer Kraft gar leicht einholen können. Aus eigener Erfahrung weiß ich, wie elend es einen Menschen machen kann, den Kopf voll Probleme zu haben und wegen Mangels an physischer Kraft sie nicht bewältigen zu können. Wenn Du mir die versprochene Photographie schicken wirst, hoffe ich, wird sie dem Bilde gleichen, das aus der Zeit, wo Du vor zwei Jahren aus Diener Heimat wiederkamst, in meiner Erinnerung lebt.

Jetzt zuerst etwas Geschäftliches. Deine Dissertation fand ich bereits fertig vor. Der Druck ist sehr gut geworden, und die Exemplare auf Schreibpapier sehen sehr anständig aus. (Der letzte Korrekturbogen war nicht *mir* zugeschickt worden, wie Du irrtümlich angenommen, sondern ist wahrscheinlich bei Dir abgegeben, als Du bereits fort warst; es ist jedoch kein Nachteil daraus entstanden).

35 Exemplare behalte ich hier, um sie zu verteilen. 25 gebundene und 40 geheftete sind bereits zur Versendung nach Petersburg (an die von Dir zu bestimmende Adresse) verpackt; die für Göttingen bestimmten 250 Exemplare sind schon in Lotze's Händen. Ich habe übrigens gar keine Mühe damit gehabt; Da Lampe hat alles auf's Beste besorgt.

Von meiner dreiwöchentlichen Reise haben meine Schwestern und ich viel Genuß gehabt. Wir sind zunächst den Rhein herauf gereist, von Köln bis Straßburg, haben uns in den Punkten, wo es uns gefiel, einige Tage aufgehalten und zuletzt vier Tage in Baden, sowie vier Tage in Heidelberg zugebracht. Das Wetter hat uns sehr begünstigt; namentlich in Baden und Heidelberg war es ungewöhnlich schön.

Am Rhein habe ich recht in Jugend-Erinnerungen geschwelgt; wie schön würde es sein, wenn es mir vergönnt würde, dieselbe Strecke noch einmal in Begleitung der teueren Freundin, die ein gütiges Geschick mich noch in späten Jahren finden ließ, zu durchreisen. Seltsam war es mir zumute, als ich einen Spazierweg wieder aufsuchte, den ich vielen Jahren mit einem Freunde durchwanderte, der mich damals bestimmte, endlich einen schon längst in's Auge gefaßten Entschluß, «Mathematiker zu werden» zur Tat werden zu lassen. Denn nur auf diesem Wege werde ich eine Zukunft haben — er selbst hoffe als wissenschaftlicher Jurist einen Platz in der Gelehrten Republik sich zu erringen. Nun, ich habe mein Ziel im Auge behalten und bin mit dem Erreichten zufrieden, wenn auch nicht alle Blütenträume reiften; mein damaliger Freund gab später die mit glänzendem Erfolge betretene Wissenschaftliche Laufbahn auf, um im praktischen Staatsdienst rascher vorwärts zu kommen; er bekleidet jetzt eine bedeutende Stelle, ist aber ein so arger Frömmler und politischer Reaktionär geworden, daß zwischen ihm und mir kein Verständnis mehr möglich ist. Wurde er doch gegen meine Schwester Elise förmlich unartig, als diese zufällig von der Notwendigkeit einer unbedingten Aufhebung der Todesstrafe sprach.

In Straßburg habe ich niemanden besucht, aber die Heldentat begangen, die Plattform des Münster — Turmes (375 Stufen) innerhalb 16 Stunden zweimal zu ersteigen. In Heidelberg traf ich Kirchhoff, Königsberger und Bunsen, und bin viel mit denselben zusammengewesen.

Königsberger hat eine allerliebste Frau, die mit untulicher Freundlichkeit und offenem Wesen eine recht gute Bildung verbindet. Ihn selbst habe ich sehr verändert gefunden; doch die wohlverdiente Anerkennung, welche die Erfolge seiner Lehrtätigkeit gefunden, hat sich sein Selbstgefühl mehr als gut gesteigert; zug-

leich spricht sich in seinen Urteilen über andere Mathematiker eine solche Schärfe aus, daß ich mehrmals verstimmt geworden bin. Nur seine eigenen Schüler lobt er, was sagst Du aber dazu, daß er z. B. Krause weit über Jürgens stellt? Gegen mich zeigte er sich allerdings unverändert; wir haben aber nicht grade viel Mathematisches besprochen, unsere Ansichten gehen schon zu weit auseinander. Seine künftige Stellung in Dresden wird äußerlich eine recht glänzende sein; ich fürchte aber, daß sie ihn wissenschaftlich nicht grade fördern werde. Wohlgetan hat es mir übrigens, daß er, was er zu werden versprach, ein Mann ehrenhaftester Gesinnung auch wirklich geworden ist.

Am meisten habe ich mit Kirchhoff verkehrt und hoffe auch von unserem jetzigen Zusammensein dauernden Gewinn zu haben. Ich habe nämlich einen Plan, ihn doch nach Berlin zu bringen — in einer Stellung an der Akademie, die ihm die nötige Muße geben wird, ein vollständiges System der math[ematischen] Physik auszuarbeiten. Dadurch würde der Wissenschaft ein wesentlicher Dienst geleistet werden, und ihm selbst auch; denn die Heidelberger Verhältnisse sagen ihm nicht mehr zu, und ebensowenig die Beschäftigung mit der Experimentalphysik. Über die Bedingungen, unter denen er hierher kommen will, bin ich mit ihm einig geworden; und ich hoffe zuversichtlich, daß sich dieselben werden erfüllen lassen.

Bunsen fand ich sehr verändert und alt geworden. Doch zeigten sich noch immer Spuren seines ausgezeichneten Humors.

Unerhörtes Aufsehen machte es aber in Heidelberg, daß er, der im Rufe stand, allen seinen Studenten die Zigarren im Laboratorium zu rauben, seit 8 Tagen nicht mehr rauchte — nicht etwa deswegen, weil er durch eine nicht ausgerauchte Zigarre ein werthvolles Manuskript verbrannt hat, darüber tröstet er sich mit dem Gedanken, daß die zweite Bearbeitung besser werden solle als die erste, sondern weil er gefunden, daß er nicht rauchend ungestraft Diäthfehler begehen könne.

Am zweiten Abend unseres Dortseins waren wir des Abends im Königsberger'schen Hause. Bunsen, der etwas später erschien, brachte eine Zeitung mit, worin zu lesen stand, daß eine gelehrte Dame zu Moskau, Frau S. v[on] Kowalewsky, von dem Göttinger phil. Fakultät zum Doktor gemacht worden sei, eine Ehre, die außer ihr nur einer einzigen Frau, der berühmten Dorothee Schlözer, widerfahren sei. Das erregte bei der Gesellschaft großes Aufsehen — ich hatte absichtlich noch nichts darüber gesagt. Es war dann natürlich viel von Dir und deinen beiden Studiengenossinnen die Rede, und ich habe manches aus eurem damaligen «Zigeunerleben» erfahren, das mich sehr amüsiert hat.

Ihr seid Gegenstand sehr großer Aufmerksamkeit bei den Heidelbergern gewesen. Eins muß ich Dir erzählen. Bunsen, der glaube ich, nicht wußte, daß Du meine Schülerin geworden, nannte Dich in voller Übereinstimmung mit dem Philosophen, den Du bei mir kennenlerntest, eine «gefährliche Frau». Er begründete dies aber durch folgende Tatsache, von der ich gern wissen möchte, ob sie von ihm ungeschmückt berichtet worden ist. Er habe sich verschworen kein Frauenzimmer, namentlich keine Russin in sein Laboratorium aufzunehmen. Er habe also auch Frl. Lermontoff nicht bei sich wollen arbeiten oder hören lassen. Da seiest Du zu ihm gekommen und habest ihn so allerliebst gebeten, daß er nicht habe widerstehen können und seinem Vorsatze ungetreu geworden sei. Ist dem wirklich so? Dann würde der Philosoph doch nicht ganz unrecht gehabt haben. Bunsen steht allerdings in dem Ruf, daß er bei seinen Erzählungen ein wenig phantasiert. Dichtet er doch auch Romane, wenn er sie auch nicht publiziert.

Hiermit muß ich aber für diesmal schließen, damit dieser Brief noch mit dem Abendzug abgehen könne. Der Deinige ist so unverhältnißmäßig lange unterwegs gewesen, daß ich fast fürchte, der Meinige werde Dich nicht mehr in Palibino antreffen. Bitte antworte mir aber womöglich umgehend. Du glaubst gar nicht, welche Freude mir Deine Briefe machen; ich verspreche Dir auch, ich werde sofort wieder schreiben.

Deinen verehrten Eltern bitte ich mich bestens empfehlen zu wollen; sage ihnen, daß ich die von ihnen getroffenen Maßregeln für die Dauer Deiner Anwesenheit in P[alibino] vollkommen billige.

Gleichwohl soll mein nächster Brief nicht bloß Geplauder, sondern auch Mathematisches, doch zunächst Unschädliches enthalten.

Und nun ein herzliches Lebewohl, meine liebe, teuerste Freundin, die so fern von mir wissen mir noch immer ein fremder Gedanke ist.

Der Deinige C. W.

44. Berlin (W) Potsdamer Str. 40.
Den 16-ten Dezember 1874.

Meine liebe Sonia!

Dein letzter Brief (ohne Datum), der viel zu lange auf sich hat warten lassen, enthält die Bitte, ich solle Dich — als strenger Lehrer — tüchtig ausschelten. Nun einige Veranlassung, mit meiner lieben Freundin unzufrieden zu sein, hätte ich schon. Zunächst muß ich glauben, daß Du, als Du meinen letzten Brief beantwortet,

diesen nicht vor Augen gehabt hast; denn sonst würdest Du doch der am Schlusse desselben ausgesprochenen Bitte nicht so ungenügend entsprochen haben.

Im übrigen habe ich von vornherein [darauf] gerechnet, daß Du in den ersten Monaten. Deines Petersburgen Aufenthaltes nach so langer Entbehrung alles geselligen Verkehrs nicht zu stetiger und ernster Arbeit kommen würdest; und ich bin, wenn Du mir schreibst, daß dem wirklich so sei, nicht einmal sehr unzufrieden damit, teils in der Überzeugung, daß einige Zerstreuungen nach der vorangegangenen langen Arbeit Deinem körperlichen Befinden nicht zum Nachteil gereichen werden, teils in der zuversichtlichen Erwartung, daß Dein ernster Sinn, Deine Begeisterung für ideale Bestrebungen nicht allzulange die Enthaltung von wissenschaftlicher Arbeit Dich werden ertragen lassen.

Überlasse Dich also getrost, solange Du selbst Gefallen daran findest und nicht etwa bloß äußeren Einflüssen nachgibst, den Dir ungewohnten Genüssen des großstädtischen Lebens; ich weiß, *Du* wirst der Wissenschaft nicht untreu werden, und der Schaffensdrang in Dir, mag er auch zeitwiese einer erklärlichen Erschlaffung Platz machen, wird stets um so intensiver wieder aufleben. Freilich, das leugne ich nicht, einer Anregung und Aufmunterung wirst Du nicht selten bedürfen und in dieser Beziehung ist es mir, Deinem treusten Freunde, hocherfreulich gewesen, was Du mir in Deinem vorletzen Briefe über deinen Bruder schreibst *. Ich könnte Dir wirklich nichts Besseres wünschen, als daß Du in deinem nächsten Verwandten zugleich den Genossen Deiner Bestrebungen, einen Freund für das Leben finden mögest.

Aber so bin ich ja ganz von der Absicht, Dich etwas zu schelten, abgekommen; möge es denn für diesmal so sein, zumal da ich hoffe, Du wirst Verständnis für die Strafe haben, die ich Dir für die Kürze und Flüchtigkeit Deines letzten Schreibens dadurch zuteil werden lasse, daß ich Dir diesmal eine recht lange Zuschrift zukommen lasse.

Wenn ich mit meiner Antwort etwas länger gezögert habe, als ich es sonst in meiner Korrespondenz mit Dir pflege, so sollte das nicht etwa eine kleine Rache sein, auch nicht einmal eine Probe, ob Du das mir gegebene Versprechen, an mich schreiben zu wollen, auch wenn ich einmal einen Deiner Briefe nicht rechtzeitig beantwortete, halten würdest. Auch habe ich keine Mangel an Zeit im gehwöhnlichen Sinne gehabt; aber ich empfand, nachdem ich vom 15-ten Oktober wieder ein freier Mann geworden, eine solche Sehn-

---

* Der Bruder von S. Kowalewskaja Fedor Korwin - Krukowsky hat 1874 die Universität in St. Petersburg bezogen.

sucht nach mathematischer Beschäftigung, daß mir die letzten beiden Monate wie im Fluge vergangen sind und ich heute mich zu irren glaubte, als ich, einen notwendig zu beantwortenden Brief in die Hand nehmend, denselben vom 19-ten Oktober datiert fand. Was den Erfolg meiner Arbeit angeht, mit dem ich nicht ganz un zufrieden bin, so will ich Dir einiges davon mitteilen.

Zunächst hatte ich, mit Rücksicht auf meine Vorlesungen, eine Lücke in der Funktionen — Theorie auszufüllen, Du weißt, es war bisher folgende Frage unerledigt. Gibt es, wenn eine unendliche Reihe von Größen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ \infty$$

beliebig angenommen wird, stets eine transzendente ganze Fuktion einer Veränderlichen x von der Beschaffenheit, daß dieselbe für $x = a_1,\ a_2,\ \ldots$ verschwindet — und zwar so, daß die zugehörige Ordnungszahl für jede dieser Größen gleich λ ist, wenn dieselbe λ mal in der Reihe vorkommt — für jeden anderen Wert von x aber nicht?

Notwendig für die Beantwortung dieser Frage in bejahendem Sinne ergibt sich sofort die Bedingung, daß a_n, sobald n eine gewisse Grenze überschreitet, dem absoluten Betrage nach beständig größer sein muß als eine willkürlich gegebene Größe, ich konnte aber bisher nicht beweisen, daß die Erfüllung dieser Bedingung *genügend* sei. Die Frage erledigt sich jetzt durch folgenden Satz:

«Man ordne der gegebene Reihe

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

von der ich zunächst annehme, daß keines ihrer Glieder Null sei, eine Reihe ganzer positiver Zahlen (die Null als solche gerechnet)

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n,\ \ldots$$

dargestellt zu, daß die Summe

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^{\nu_1+1} + \left(\frac{x}{A_2}\right)^{\nu_2+1} + \ldots$$

in der A_n den absoluten Betrag von a_n bedeutet, bei jedem positiven Wert von x einen endlichen Wert habe.

Dies ist stets möglcich, namentlich kann man

$$\nu_1 = 0,\ \nu_2 = 1,\ \nu_3 = 2,\ \ldots,\ \nu_n = n - 1,\ldots$$

nehmen. Ferner setze man

$$E(x)_0 = 1 - x$$
$$E(x)_1 = (1 - x)\, e^{x}$$
$$E(x)_2 = (1 - x)\, e^{x + \frac{x^2}{2}}$$
. . . . . .
$$E(x)_n = (1 - x)\, e^{x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}}$$

so hat das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}\right)_n$$

für jeden endlichen Wert von x eine von der Aufeinanderfolge seinen Faktoren unabhängigen endlichen Wert, und ist der Ausdruck einer analytischen Funktion von x, welche im Endlichen überall den Charakter einer ganzen Funktion besitzt, und für $x = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ in der angegebenen Weise verschwindet».

Der Beweis des Satzes läßt sich elementar führen; Du wirst ihn nicht verfehlen, wenn Du aus Deinem ellipt[ischen] Heft das Kapitel über die Darstellung ganzer trans[zendenter]. Funktionen durch unendliche Produkte zu Hilfe nimmst.

Daran knüpft sich weiter der folgenreiche (in meiner Theorie der Abel'schen F[unktionen] noch als bis jetzt unerwiesen hingestellte) Satz:

Jede eindeutige analytische Funktion von x, die für jeden endlichen Wert dieser Größe den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, läßt sich stets darstellen als Quotient zweier gewöhnlicher, *beständig* konvergierender Potenzreihen, und zwar so, daß Zähler und Nenner für keinen Wert von x gleichzeitig verschwinden.

Weiter schließt sich hieran die Frage nach der allgemeinen analytischen Ausdrucksweise einer eindeutigen Funktion einer Veränderlichen, für die es, als Argument dieser Funktion, eine *endliche* Anzahl von Grenzstellen gibt (in deren Nähe sie unbestimmt wird, wie das bei einer transzendenten ganzen Funktion im Unendlichen der Fall ist).

Die Zusammenstellung aller dieser Sätze hat eine ganz hübsche kleine Abhandlung ergeben, die ich vorgestern in der Akademie gelesen habe, und die im Dezemberheft der Monatsberichte erscheinen wird. Daß ich Dir dieselbe alsbald zuschicken werde, versteht sich von selbst.

Der Gegenstand, womit ich mich noch weiter beschäftigte, wird Dich noch mehr interessieren; leider kann ich in Berziehung auf

denselben nur erst von einer Hoffnung auf Erfolg berichten, und muß ausführlichere Mitteilung überhaupt der mündlichen Besprechung vorbehalten.

Du erinnerst Dich, liebes Herz, daß wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innigere geworden war, so daß ich zuweilen das Bedürfnis empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden, und wir uns auch wohl in wissenschaftlichen Träumen und Phantasien verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben, und den vielen Fragen, mit denen dies Problem zusammenhängt.

Du weißt auch, daß die eigentliche mathematische Aufgabe, um die es sich handelt, folgendermaßen formuliert werden kann: «Er seien zur Bestimmung von n Funktionen einer reellen Größe t gegeben n Diff[erenzial] Gl[eichnungen]

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(x_0, \ldots, x_n) \ldots \frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \ldots, x_n),$$

wo $G_1, \ldots, G_n$ ganze Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten bezeichnen. Es fragt sich, wie müssen diese Funktionen G beschaffen sein und welche Bedingungen die Werte von $x_1, \ldots, x_n$ für $t = 0$ erfüllen, damit $x_1, \ldots, x_n$ *reguläre* Funktionen von t (innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$) werden. Namentlich aber ist zu ermitteln, unter welchen Umständen jede der Größen x beständig zwischen endlichen Grenzen schwankt.

Endlich sollen, wo möglich, Entwicklungen von $x_1, \ldots, x_n$, die ihrem funktionalen Charakter entsprechen, aufgefunden werden».

Ich habe mich nun einige Wochen sehr ernsthaft mit dieser Frage beschäftigt, glaube auch einen Weg gefunden zu haben, der dereinst zum Ziele führen wird — aber es wird noch größerer Anstrengung bedürfen, um ihn überhaupt gangbar zu machen.

Ich will Dir nur eine Andeutung geben, die einzige, die ich ohne zu große Weitläufigkeit aussprechen kann.

Du weißt, wenn die Anfangswerte von $x_1, \ldots, x_n$ gegeben sind, so kann man immer analytische Ausdrücke von $x_1, \ldots, x_n$ als Funktionen von t aufstellen, die den Diff. Gl.[eichungen] genügen, und für ein *beschränktes* Zeitintervall gelten.

Nun scheint es mir, daß sich, wenn die $x_1, \ldots, x_n$ wirklich solche Funktionen sind, wenn sie verlangt werden, stets ganze Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ ermitteln lassen, für welche ähnliche Differenzial-Gleichungen bestehen, die aber so beschaffen sind, daß sich aus ihnen Ausdrücke in t, die für ein *größeres* Zeitintervall gelten, ergeben. Mit diesen neuen Diff. Gleichungen kann man dan weiter ebenso verfahren, und Du begreifst schon,

daß in dem Falle, wo nach Beschaffenheit der urspüngl. D[iff]. Gl[eichungen] und der angenommenen Anfangswerte die Operation ohne Ende sich fortsetzen läßt, daraus über den Geltungsbereich der zu bestimmenden Funktionen sich Aufschlüsse ergeben müssen.

Bei den hauptsächlich in Betracht kommenden wirklichen Aufgaben der Astronomie und math[ematischen] Physik zeigt sich ferner, daß sich die sukzessiven Annäherungen durch Lösung von linearen Differenzial-Gleichungen mit konstanten Koeffiz [ienten] bewirken lassen, wodurch sich die Möglichkeit konvergenter Entwicklungen ergibt. Freilich wird Dir, was ich da sage, nur einen sehr unvollkommenen Begriff von meinen Ideen geben; aber diese sind auch noch keineswegs so reif, daß ich mich mit hinlänglicher Klarheit darüber ausdrücken kann.

Ich habe Dich in dieser Zeit auch deswegen sehr entbehrt, weil ich im Gespräch mit Dir manchen Gedanken leichter zu vollen Entwicklung gebracht hätte, als es mir beim bloßen Nachgrübeln darüber möglich ist. Doch muß ich, so sehr mich der Gegenstand interresiert, vorerst von seiner weiteren Verfolgung Abstand nehmen; denn ich muß durchaus erst die anderen Dinge, die der Ausarbeitung harren, fertig machen; ich werde dann, das sehe ich schon, für mein übriges Leben Arbeit genug haben. Gleichwohl bin ich sehr zufrieden damit, ein paar Wochen dem Nachdenken über das mir so wichtige Problem gewidmet zu haben; ich sehe jetzt wenigstens ein bestimmtes Ziel vor mir.

Hiermit, meine teuere Freundin, schließe ich diesen langen Brief im Senatzimmer während der Wahl eines Vertreters der Universität in unserer Pairskammer.

Ich hätte Dir noch mancherlei zu sagen; es hängt aber ganz von Dir ab, wie bald diesem Briefe ein neuer folgen soll.

In einem folgenden Briefe werde ich Dir noch etwas, über die Integration durch Logarithmen zur besseren Information mitteilen; der Gegenstand ist einfach genug dazu.

Noch Eins. Von mehreren Herrn, an die ich Deine Dissertation gesandt, habe ich beifällige Antworten erhalten, so von Kirchhoff, *Heine*, Schwarz, Schering und vor allem von P. Dubois, der über Dein beigelegtes Handschreiben sehr entzückt ist; Du wirst jedenfalls von ihm nächstens einen sehr liebenswürdigen, vielleicht sogar bewundernden Brief erhalten. Sehr zufrieden mit Deiner Arbeit spricht sich auch *Heine* aus, der ihren eigentlichen Zweck, wie es mir scheint, am besten begriffen hat. Bitte mir den übersandten Brief von *Schwarz* wieder zukommen zu lassen, damit ich demselben antworten kann. Schreibe nur doch auch — außer umfassender Nachrichten von Dir — auch von Julia etwas, über die wir uns, meine Schwestern und ich, als sie hier waren, sehr

gefreut haben: Du kannst Dir nicht vorstellen, wie lebhaft sie war.

Die verlangte Rechnung werde ich Dir das nächste Mal schicken; ich habe sie hier nicht zur Hand, und möchte die Absendung dieses Briefes nicht darum verzögern.

Adieu, mein liebes Herz, und laß Deinen Freund nicht wieder so lange auf ein Lebenszeichen von Dir warten. Du siehst ja auch, er ist ein nachsichtiger Beichtvater, dem das Wohl seines Beichtkinder allerdings sehr am Herzen liegt, aber auch die Schwäche der menschlichen Natur bekannt ist.

Herzlichsten Gruß!

Weierstraß

Ich befinde mich in diesem Winter bis jetzt sehr wohl, und bin in den elliptischen Funktionen weiter wie sonst um diese Zeit. Meine Hand schmerzt mich noch etwas, doch ist dies nicht von Belang, und hindert mich, wie Du siehst, nicht mehr am Schreiben.

45. Berlin, den 1-sten Januar 1875.

Meine liebe Sonia!

Ich danke Dir recht herzlich für das schöne Weihnachtsgeschenk, das Du mir mit Deinem letzten Briefe gemacht hast. Es spricht sich in demselben ein wissenschaftlicher Enthusiasmus aus, der mich entzückt; sowie mich die treue Anhänglichkeit, die Du Deinem Lehrer und Freunde bewahrst, glücklich macht. Aber ich fürchte fast, ich habe zu große Erwartungen in Dir erregt, indem ich, was sonst nicht grade meine Gewohnheit ist, in der Überzeugung, daß ich Dir eine Freude damit machen werde, mich verleiten ließ, von dem zu sprechen, was ich noch zu arbeiten gedenke. Das Ziel, welches ich erreichen möchte, liegt noch in weiter Ferne, in unbestimmten Umrissen von mir; bis jetzt habe ich kaum etwas anderes getan als über die Mittel gesonnen, durch welche ich mir den Weg zu ebnen hoffe. Außerdem ist es, wie Du selbst einsiehst, eine dringende Notwendigkeit, daß ich zunächst meine alten Arbeiten zum Abschluß bringe. Ich darf damit auch aus anderen Gründen nicht zögern. Es wird gegenwärtig,— namentlich seitdem die jungen Mathematiker zu der Einsicht gekommen sind, daß dicke Bücher zu schreiben ([nebenbei] ohne Quellenangabe) das wirksamste Mittel ist, um bei der Menge zu Ansehen und zu guten Stellen zu gelangen — grade auf demjenigen Gebiete der Analysis, dessen gründlicher Durchforschung ich den besten Teil meines Lebens gewidmet habe — gar zu viel Unfug getrieben, und es ist die höchste Zeit, daß dem Unwesen gesteuert werde.

Ich kann Dir nicht sagen, wie unmutig es mich macht, daß grade mein ältester Schüler, auf den ich so viel hielt, so eben erst

sein dickes Buch über die elliptischen Funktionen veröffentlicht hat — in welchem kaum seine Seite zu finden ist, die nicht zu Aufstellungen Veranlaßung gibt, nunmehr auch die Abel'schen Funktionen, für die nichts Selbstständiges geleistet, sich zum Opfer ausersehen hat. Ich bin mir bewußt, kein wissenschaftlicher Pedant zu sein, und erkenne auch in der Mathematik keine allein — seligmachende Kirche an; was ich aber von einer wissenschaftlichen Arbeit verlange, ist Einheit der Methode, konsequente Verfolgung eines bestimmten Plans, gehörige Durcharbeitung des Details und — daßihr der Stempel selbstständiger Forschung aufgeprägt sei. Es ist schlimm genug, daß bei uns wie anders wo die Lehrbücher so oft von Unberufenen geschrieben werden — wobei man den Franzosen wenigstens das Verdienst zuerkennen muß, daß sie durch klare und elegante Darstellung, den Mangel an Tiefe einigermaßen gut machen — die höchsten und schwierigsten Teile der Wissenschaft aber, in denen nur derjenige etwas zu leisten vermag, wer seine ganze Kraft daran setzt, sollten der leichfertingen Buchschreiberei nicht anheimfallen.

Verzeih, liebe Freundin, diese Abschweifung, die Du als Beweis dafür hinnehmen mögest, wie sehr ich mich schon daran gewöhnt hab, Dich zur Vertrauten meiner Gedanken — auch der unerquicklichen — zu machen.

Jetzt will ich zunächst Deine Fragen beantworten. Ich bin ganz damit einverstanden, wenn Du diesen Winter hauptsächlich benutzen willst, die Lücken Deiner Kenntnisse in den mehr elementaren Teilen der Mathematik, namentlich der analyt[ischen] Mechanik und math[ematischen] Physik auszufüllen. Studiere aber neben den Engländern auch Poisson und Cauchy, sowie die (in den Abhandlungen der Berliner Akademie gedruckten) Arbeiten über Elektrodynamik des älteren Neumann; (das Buch des jüngeren (Sohns) über diesen Gegenstand ist etwas schwerfällig geschrieben, enthält aber doch viel Gutes und Brauchbares). Wenn Du unterdes Hamilton's dickleibiges Buch über die Quaternionen erhalten hast, so wird Dich, denke ich, schon das Äußere desselben von einer vollständigen Durcharbeitung abgeschreckt haben; die wäre aber auch meiner Meinung nach eine reine Zeitvergeudung — ich habe immer die armen Studenten bedauert, für die bei Hamiltons Lebzeiten die Quaternions ein obligatorischen Lehrgegenstand waren. Du aber hast einstweilen noch viel Nötigeres und Nützlicheres Dir zu eigen zu machen als eine für gewisse Probleme vielleicht ganz brauchbare, keineswegs aber notwendige spezielle Methode, deren algebraische Grundlage von sehr trivialer Beschaffenheit ist. Daß Dir die Speise nicht munden wird, davon bin ich überzeugt. Wenn es die Zeit Dir erlaubt, so kannst Du auch einmal

die Comptes Rendus der franz[ösischen] Akademie durchfliegen, und dabei den Arbeiten von St Venant in der Elastizitätslehre Beachtung schenken. Du wirst zwar überall (ich meine bei allen der genannten Autoren) in Beziehung auf Strenge der Entwicklungen bedeutenden Anstoß nehmen. Doch laß Dich dadurch nicht aufhalten, es kommt hauptsächlich darauf an, daß Du einen Überblick über das auf dem Gebiete der math[ematischen] Physik bisher Geleistete, sowie über die schwebenden Fragen gewinnest

Dabei kannst Du immerhin einige nicht schwierige Aufgaben behandeln, um Dich in der Darstellung zu üben, wobei, wie ich Dir schon oft gesagt habe, die sorgfältige Durcharbeitung des Einzelnen als etwas Wesentliches zu betrachten sein wird.

Z. B. In einer n-fachen Mannigfaltigkeit, in welcher jeder Punkt durch n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt, und das Quadrat des Abstandes zweier Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ gleich $(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$ ist, soll auf dem (der Oberfläche eines Rotationsellipsoides im Euklidischen Raum entsprechenden) durch die Gleichung $\frac{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} = 1$ definierten Flächengebilde die kürzeste Linie bestummt werden. Oder eine analytische Aufgabe, derentwegen mich kürzlich die Editoren der neuen Ausgabe von Abel's Werken zu Rate zogen.

Abel behauptet:
Wenn $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ irgend welche Funktionen bedeuten, deren Ableitungen *algebraische* Funktionen von x sind, und es besteht zwischen denselben und der Veränderlichen x überhaupt eine algebraische Relation, so läßt sich diese stets auf die Form

$$c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \varphi_0(x) = 0$$

in der Art bringen, daß $\varphi_0(x)$ eine algebr[aische] Funktion und $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Konstanten sind. In Abel's nachgelassenen Papieren findet sich bloß der Anfang einer Herleitung des Satzes. Ich habe zwei Beweise gemacht, einen rein algebraischen, und einen anderen, der auf den ersten Sätzen der Lehre von den Perioden des Integrals beruht. Versuche Dich doch eimal daran. Drückt man die Ableitungen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ durch x und eine algebr[aische] Funktion y dieser Größe rational aus, so ist auch φ_0 eine rationale Funktion von x, y, dies ist ein leicht zu beweisender Zusatz. N. B. Beim Beweise des Satzes, der in Deiner Arbeit über die Reduktion der Integrale 3-ten Ranges auf elliptische, an der Spitze steht, setzt Abel den Angeführten voraus, da er von vornherein eine lineare Relation unter den betreffenden Integralen annimmt.

Kirchhoff kommt wirklich k[ommende] Ostern hierher, als Mitglied der Akademie und Professor für *mathematische Physik.*

Ich darf seine Herberufung zu einem guten Teil mir als Verdienst anrechnen. Ich fand ihn diesen Herbst in Heidelberg manche Vorkommnisse verstimmt, der Experimentalphysik ziemlich entfremdet und gar nicht abgeneigt, Königsberger nach Dresden an das Polytechnikum zu folgen. Dies bestimmte mich, sofort nach meiner Rückkehr die Akademie für seine Herberufung zu interessieren, was mir auch trotz des — aus Motiven nicht sehr lobenswerten Art hervorgehenden Widerstrebens des zunächst Beteiligten und der Gegenbemühungen — ich könnte auch ein anderes Wort brauchen — *in weiblichen* Kreisen, in erwünschtester Weise gelang, so daß die vorgeordnete Behörde, nicht umhin konnte, dem auf das Beste motivierten Antrag der Akademie auf K[irchoff]'s Berufung zuzustimmen. Ich freue mich ser darüber, obwohl man mir auch mehrfach den Vorwurf gemacht hat, ich sei nicht berechtigt gewesen, in dieser Angelegenheit die Initiative zu ergreifen. Dies ficht mich wenig an, weil es mich mehr schmerzt, abermals die Erfahrung gemacht zu haben, daß auch Männer von der höchsten geistigen Begabung als Menschen gar oft die Probe nicht bestehen.

Noch Eins. Ich habe die Befürchtung, daß meine Briefe *zu spät* in Deine Hände gelangen. Mein letzter war vom 16ten Dez. (nach unserer Zeitrechnung) von mir selbst auf die Post gegeben. Nach Deiner Angabe hast Du ihn erst am 23-sten erhalten, während er schon am 19-ten morgens in Petersburg sein sollte. Bitte, gib mir in Deinem nächsten Briefe genau an, wann Du diesen erhältst[1].

Und dann ist es mir sehr auffallend, daß Du von einem Dir zugesandten Schwarz'schen Briefe nichts weißt. Den kannst Du doch nicht vergessen haben; er enthielt zunächst eine Stelle über Deine Dissertation, und dann eine eingehende Kritik des Königsberger'schen Buches.

Es wäre mir sehr unangenehm, wenn dieser Brief verloren gegangen oder in unrechte Hände gekommen wäre.

Hast Du denn nicht den Brief von mir erhalten, in welchem ich Dir mitteilte, daß ich wegen einer Handverstauchung mit viel Mühe schreiben könne, Dir deshalb nichts Mathematisches zu schicken vermöchte, deswegen ich den Brief von S[chwarz] als Entschädigung beilegte? Dieser mein Brief ist vor Julia's Hiersein geschrieben — nicht zu verwechseln mit der kurzen Notiz, worin ich Dir den Tag ihrer Ankunft in P[etersburg] anzeigte; es ist derselbe, von dem ich in meinem letzten Schreiben sagte, daß Du ihn nicht bei der Beantwortung vor Augen gehabt zu haben scheinest. Bitte, kläre mich doch über alles dies auf, und beantworte diesmal meinen Brief, wenn auch nur kurz, lang, wäre freilich besser — umgehend.

---

[1] Er muß Montag den 4-ten früh in P[etersburg] ankommen.

Ich schreibe Dir in diesem Monate jedenfales noch einmal, womöglich mit einer (nicht gedruckten) mathematischen Beilage, die Dich zwar nicht enthusiasmwärmen wird, aber Dir vielleicht doch nützlich sein kann.

Meine Auslagen für Dich betragen für Diplom, Druckkosten, Einband, Porto im ganzen 65 Rbl, nach Abzug der bereits empfangenen 25 Rbl, also 40 Taler. Wenn Du sie mir ohne Umstände — etwa durch Posteinzahlung schicken kannst, so habe ich natürlich nichts dagegen — sonst hat es ja Zeit damit, bis ich sie aus Deiner Hand empfangen werde. Du hast doch die Dissertation (vom 1. Dez. abgegangen) erhalten? Wir feiern heute den ersten Tag des neuen Jahres, wo man allen seinen Freunden Grüsse und Glückwünsche sendet. Ich habe den Tag nicht vorübergehen lassen können, ohne meiner teuersten Freundin, die meine Schülerin und zugleich die Vertraute meiner Gedanken und Bestrebungen ist, den Beweis zu geben, daß ich in innigster Zuneigung ihrer Gedenke und mich stets glücklich schätzen werde, wenn ich trotz der vielen Meilen, die zwischen uns liegen, ihr Führer auf dem Wege, der von dem anderen Menschen so weit abliegt, bleiben kann. Lebe wohl, liebes Herz, und antworte so bald als möglich.

Weierstraß

Von der Dissertation sandte ich Dir zuerst 2 Exempl[are], dann zwei wieder durch Julia.

Auch muß ich Dich sehr bitten, einmal eine Woche zur Vollendung des Ringes [1] zu verwenden. Ich würde Dich damit nicht drängen, wenn nicht einige meine Freunde begierig [wären], grade von dieser Arbeit Kenntnis zu nehmen. Ob sie druckfähig ist, werde ich Dir ganz aufrichtig sagen.

In diesem Briefe, wenn ich nicht irre, zeigte ich Dir auch zwei stehengebliebene gräßliche Druckvehler in Deiner Dissertation an, und bat Dich, dieselben doch einmal genau durchzusehen. Hast mir noch nicht geschrieben, wie Dir Dein Erstgeborenes in dem von Reimer ihm gegebenen Kleide gefällt.

46. Berlin (W) Potsdamer Str. № 40
den 12-ten Januar 1875

Ich bitte die Adresse genau so mir hier zu schreiben; ich bekomme die Antwort dann einen halben Tag früher.

Meine teuere Sonia!

Eingentlich bin ich — aus verschiedenen Gründen — nicht wohl disponiert, Dir heute zu schreiben. Aber ich erinnere mich, daß

[1] Es handelt sich um den Ring von Saturn.

am 15-ten Dein Geburtstag ist, und da darf ich doch nicht unterlassen, meine Glückwünsche mit denen der Deinigen, in deren Kreise Du heute nach 5 Jahren zum ersten Male wieder den Tag feierst, zu vereinigen. Aber, liebste Freundin, zürne mir nicht wenn ich Dir zugleich gestehe, daß ich Egoist genug bin: zu wünschen, es wäre alles noch so wie im vorigen und dem vorhergehenden Jahre, wo — von Julia abgesehen — außer mir niemand hier von dem Tage etwas wußte, und ich Dir keine grössere Freude machen konnte, als wenn ich Dir stundenlang von meinen neuesten Untersuchungen erzählte.

Das Heft, dessen Anfang ich Dir vor zwei Jahren als Geburtstagsgeschenk brachte, ist freilich auch heute noch nicht abgeschlossen — ein zweiter Teil ist längst begonnen — aber ich werde meine Schuld nicht vergessen, und ich verspreche Dir, niemand soll von den darin behandelten Sachen vor Dir etwas erfahren. Auch mußt Du Dich überzeugen, daß die Schwierigkeit des behandelten Gegenstandes mir ein langsames Fortrücken der Arbeit zuläßt; manche Seite hat mir Tage gekostet.

Für die nächste Zeit muß ich mich aber aus den in meinem vorigen Briefe angegebenen Gründen ausschließlich mit den Abel'schen Funktionen — im gewöhnlichen Sinne — beschäftigen und das Ganz meiner auf sie sich beziehenden Untersuchungen übersichtlich zusammenstellen. Ich mache jetzt einen Versuch, dies in einer eigentümlichen Form auszuführen — nämlich in einer Reihe von Briefen an meinen Freund Richelot.

Ich gewinne durch diese Form die Freiheit, mich an vielen Stellen mit der Darlegung des Gedankengangs begnügen zu können, was sehr wohl angeht, da doch die Theorie nicht für Kinder bestimmt ist und man von jedem, der sich damit beschäftigt, erwarten darf, daß er die mehr mechanischen Rechnungen nach gegebenen Andeutungen ausführen kann. Auch kann ich in Briefen an einen Freund ohne Rückhalt die Eigentümlichkeit meiner Methode hervorheben, sowie auf eine Kritik der von Riemann und Clebsch gebrauchten mich einlassen. Ob sich die Sache wird durchführen lassen, weiß ich allerdings noch nicht — eine starke Zusammendrängung des Materials ist aber, wenn ich ein lesbares Opus zustande bringen will, jedenfalls notwendig. Eine Nachschrift meiner letzten Vorlesung über die Theorie — in der doch noch manches übergangen ist — hat 600 Quartseiten. Hätte ich jetzt meine treue Schülerin zur Seite, so könnte sie mir eine wesentliche Unterstützung leihen.

Ich habe Dir von einer mathematischen Beilage zu meinem nächsten Briefe gesprochen. Dieselbe ist auch fertig, nur weiß ich nicht, wie ich sie Dir schicken soll. Für einen Brief ist sie vielleicht zu umfangreich geworden — 5 Bogen — und wenn ich sie als Paket schi-

cke, so wird das erbrochen und das Manuskript wandert erst an die Zensurbehörde. Das würde an und für sich nichts auf sich haben, aber ich fürchte den Zeitverlust. Schreibe mir doch, wie ich es machen soll.

Um Dir aber keine zu großen Erwartungen zu erregen, will ich Dir den Inhalt kurz angeben.

Du schriebst mir vor einiger Zeit, daß Tschebyscheff liebe, Dir Fragen in Betreff der «Integration elliptlischen] Differentiale mittels Logarithmen» vorzulegen. Dies hat mich veranlaßt, meine alte Arbeit über den Gegenstand wieder aufzunehmen, um Dich in Betreff desselben — unter Anwendung der Dir geläufigen Methoden und Bezeichnungen — en fait zu setzen.

T[schebyscheff]'s Arbeiten über den fraglichen Gegenstand beziehen sich auf zwei wesentlich voneinander verschiedene Fragen. In seiner ersten Abhandlung — 1857 — die ich bei Abfassung meiner Notiz allein vor Augen hatte, zeigt er, wie die Untersuchung, ob ein vorgelegtes Integral.

$$\int F\,(x, \sqrt{R\,(x)})\,dx,$$

wo $R\,(x)$ eine g[anze] F[unction] 3-ten oder 4-ten Grades, F aber eine rat(ionale) F[unction] von x und $\sqrt{R\,(x)}$ bedeutet, sich durch einen algebraisch-logarithmischen Ausdruck darstellen lasse, zurückgeführt werden können auf die einfachere Frage nach den Bedingungen, unter denen das Integral

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R\,(x)}}$$

(R vom 4ten Grade vorausgesetzt und unter $\varkappa$ eine Konstante verstanden) in der Form

$$C \log \left(\frac{P\,(x) - \sqrt{R\,(x)}}{P\,(x) + \sqrt{R\,(x)}} \right),$$

wo P eine rat(ionale) F[unction] von x bedeutet, aus gedrückt werden kann. Diese Bedingungen bestehen nach *Abel* darin, daß die Entwicklung von $\sqrt{R(x)}$ in einen Kettenbruch periodisch sein, und, wenn dies eintrifft, $\varkappa$ einen bestimmten, von dem in R vorkommenden Konstanten abzügigen Wert haben muß.

Gegen diese Behandlungsweise der Aufgabe hatte ich — und habe ich noch— zweierlei einzuwenden. Jene Reduktion ⟨undeutlich⟩ ergibt sich ganz von selbst, wenn man die doch gar nicht zu umgehende Aufgabe, ein Integral von der angegebener Form

$$\int F\,(x, \sqrt{R\,(x)})\,dx$$

auf die kleinste Anzahl von Transzendenten (Logarithmen und ellipt [ische] Integrale der 3 Gattung) zurückzuführen, gelöst hat, es bedarf doch dazu keiner neuen Algorithmen. Ferner glaubte ich, daß die Einsicht in die wahre Nature der von Abel behandelten reduzierten Aufgabe — d[as] h[eißt] die Erkenntnis ihres Zusammenhangs mit der Theorie der ellipt[ischen]. Funktionen überhaupt — gefördert werde, wenn ich die Abel'sche Bedingung durch folgende ersetzte:

Durch die Dir bekannte Substitution

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + \frac{1}{2}C$$

$$\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = \frac{\sqrt{A}}{4}R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)}$$

geht

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

über die (Berechnungen sind aus dem «Grünen Buche») und

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_0}}{s - s_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wo $s_0 = \frac{B^2}{A} - C$, $\sqrt{S_0} = \frac{A^2B - 3ABC + 2B^3}{A\sqrt{A}}$

Setzt man also

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}, \qquad \begin{matrix} s = \wp u, \\ s_0 = \wp u_0, \end{matrix} \qquad u_0 = \int_{S_0}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

so hat man

$$\int\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\}du$$

$$\int\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\log\frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma u - \sigma u_0} + \left(\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} - \varkappa + \frac{B}{A}\right)u\right\}$$

Damit nun das in Rede stehende Integral sich logarithmisch ausdrücken lasse, ist notwendig, *daß u_0 ein genauer Teil irgend einer Periode der Funktion $\wp u$ sei.* Und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so läßt sich stets $\varkappa$ so bestimmen, daß das Integral wirklich durch den Logarithmus einer (mittels des Multiplikations Theorems der Funktion $\wp u$ leicht zu bestimmenden rationalen Funktion von s und $\sqrt{S}$ ausgedrückt wird).

Hiergegen hat H[err] T[1] mehrfach, wie ich weiß, eingewandt: Ja, aber wie erfährt man dann, daß unter den transzendenten, Größen u_0, ω, ω' eine Gleichung

$$u_0 = \frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n}$$

in der m, m', n, ganze Zahlen sind, stattfindet? Darauf antworte ich: *Mein* Zweck war nicht, eine Integrationsmethode für den Fall, daß die Koeffizienten von R numerisch vorliegen, zu geben, sondern *alle* Integrale von der betrachteten Form und verlangten Eigenschaft algebraisch anzugeben. Dies geschieht aber folgendermaßen. Es ist für jeden ganzzahligen Wert von $n\wp$ (*nu*) in der Form

$$\frac{M_n(\wp u)}{N_n(\wp u)}$$

ausdrückbar, wo M, N ganze Funktionen vom $\wp u$ sind: ein Kriterium lautet also: Alle Werte, die s_0 haben kann, sind gegeben durch die Gleichungen

$$N_2(s) = 0, \quad N_3(s) = 0, \ldots, N_n(s) = 0, \ldots$$

(Die zugehörigen Werte von $\varkappa$ bestimmen sich dann leicht). Die Untersuchung, ob ein numerisch gegebener Wert von s_0 bei ebenso gegebenen Werten g_2 g_3 einer dieser Gleichungen genüge, läßt sich im allgemeinen nicht durchführen; es muß genügen, daß man, wenn g_2 g_3 gegeben sind, alle Werte von s_0 algebraisch bestimmen kann.

Auch Herr T[schebyscheff] verzichtet auf die Durchführung der eben erwähnten Untersuchung. In einer späteren Arbeit (Bull. de l'Académie de St. Pétersbourg, IV, 1860) hat er sich mit derselben beschäftigt für den Fall, daß die Koeffizienten von R *rationale Zahlen* sind.

Die Betrachtung und Hervorhebung dieses Falls hat eine gewisse Berechtigung, und ich erkenne gern den Scharfsinn, mit dem Herr T[schebyscheff] ihn behandelt hat. Nur muß man, wie ich meine, die Sache dadurch etwas allegemeiner machen, daß man nicht die 5 Koeffizienten von R, sondern die aus ihnen zusammengesetzen 3 Größen s_0, g_2, g_3 als rational ansieht; denn zwischen diesen müssen Gleichungen bestehen, welche bloß ganze Zahlen zu Koeffizienten haben, und eben deswegen hat es einen guten Sinn, zu fragen, wie kann man sich überzeugen, ob eine dieser Gleichungen für gegebene rationale Werte von s_0, g_2, g_3 besteht — wobei die A_2, B_2, C, A', B', selbst nicht rational zu sein brauchen.

[1] Tschebyscheff.

T [schebyscheff] gibt sein Verfahren ohne Beweis, dieser ist aber, wie ich erst gestern gesehen, von Herrn Zolotareff in Clebsch's Annalen Bd. 5 geliefert worden. Die Art und Weise aber, wie ich die T[schebyscheff] ' sche Aufgabe löse, wird Dir aber die Überzeugung geben, daß man den von mir gegebenen Satze: Es muß

$$s_0 = \wp\left(\frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n}, g_2, g_3\right)$$

sein vorausgesetzt, bloß mit Anwendung der Formel für $\wp(2u)$ durch eine endliche Anzahl von Operationen, zum Ziele kommt. Dies Verfahren kann natürlich von dem T[schebyscheff]'s nur durch die Form verschieden sein, und ich lege auf dasselbe auch nur insofern Gewicht, als ich zeigen möchte, daß die allgemeine Theorie der elliptischen Funktionen mit Leichtigkeit Fragen zu lösen lehrt, zu deren Beantwortung sonst ein besonderer Scharfsinn erforderlich ist und Mittel angewandt werden müssen, bei denen es unklar bleibt, worin dann eigentlich ihre Wirksamkeit begründet ist.

Da hast Du denn, liebste Freundin, beinahe eine kleine Abhandlung statt der beabsichtigten Notiz. Du kannst jetzt entscheiden, ob Du die weitere Ausführung haben willst oder nicht. Jedenfalls habe ich sie nur für Dich gemacht: ich liebe es so sehr, meine Gedanken bei Dir Verweilen zu lassen.

Als ein Übungsbuch in der Integralrechnung für deinen Bruder kann ich Dir empfehlen:

Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analyses, Zwei Teile (Leipzig, Teubner).

Kennt er den Traité von Hermite? Wenn nicht, so mache ihn doch darauf aufmerksam.

Nach Heidelberg kommt Fuchs von Göttingen. Ich habe in dieser Angelegenheit viele und recht unangenehme Korrespondenz gehabt, und fürchte, ich werde daran noch mehr haben. Daß mein Brief aus der Mitte des Okt[obers] verloren gegangen ist, nebst der Beilage, ist mir sehr unangenehm; ich weiß aber nicht, wie er wieder zu erlangen ist. Sehr hat mich das Leid betrübt, das die gute Julia[1] betroffen. Meine Schwestern und ich bitten Dich, sie unsere herzliche und aufrichtige Teilnahme ersehen zu wollen. Du aber, meine liebe Freundin, lebe wohl und antworte bald

Deinem Weierstraß

[1] J. Lermontoff's Schwester ist gestorben.

47. Berlin, 18. Febr. 1875

Meine teure Sonia!

Am 5-ten Januar versprachest Du mir, ich solle *in den nächsten Tagen* einen recht ausführlichen Brief von Dir bekommen. Ohne diesen abzuwarten, habe ich am 12-ten Jan. abermals an Dich geschrieben, und unter anderen auch die Frage, die Du in Deinem letzten Briefe an mich richtest, beantwortet und noch heute, am 18-ten Febr. bin ich ohne alle Nachricht von Dir. Es beunruhigt mich dies in hohem Grade: bald fürchte ich, Du seiest krank, bald argwöhne ich, es habe mein letzter Brief das Schicksal eines früheren gehabt und sei nicht in Deine Hände gekommen. Hoffentlich ist das Erstere nicht der Fall, aber auch das Andere würde mir sehr unangenehm sein. Oder hast Du Dich vielleicht so in die Arbeit vertieft, daß Du nicht merkst, wie rasch die Zeit dahingeht? Ich weiß ja, wie leicht das kommt; aber ich bilde mir doch ein, gerade bei der Arbeit müßten doch Deine Gedanken zuweilen auf Deinen Freund sich richten, von dem Du doch weißt, welche Freude es für ihn ist, von Dir und dem, was Dich beschäftigt, zu hören. Doch will ich mich nicht weiter in Vermutungen angehn, und brauche auch recht nicht hinzusetzen, mit welcher Ungeduld ich einen Lebenszeichen von Dir entgegensehe, bestünde es auch nur in wenigen Zeilen. Was ich Dir sonst schreiben hätte, liebes Herz, das nächste Mal.

Der Deinige Weierstraß

48. Berlin 21 April 1875

Meine teure Sonia!

Warum höre ich denn gar nichts von Dir? Ich bin in der größten Besorgnis, daß Du von neuem erkrankt sein möchtest — denn sonst kann ich mir gar nicht erklären, weshalb ich seit Anfang Februar ohne jede Nachricht über Dein Ergehen geblieben bin. Ich bitte Dich auf das dringendste, laß mich nicht länger in dieser peinigenden Ungewißheit. Was mich angeht, so habe ich recht schlechte Osterferien gehabt; nachdem ich bis Mitte März ganz wohl befunden, habe ich von da an mit einer hartnäckigen Indisposition zu kämpfen, die noch zu ordentlicher Beschäftigung ebenso unfähig als ungeneigt macht, was mir grade jetzt sehr in die Quere kommt. Doch hoffe ich, über 8 Tage meine Vorlesungen wieder beginnen zu können. In der Ungewißheit, ob meine Besorgnis um Dein Wohlbefinden begründet sei oder nicht, möchte ich am liebsten erst Deine Antwort erwarten bevor ich über andere Dinge mich mit Dir unterhalte; doch hab ich eins, worüber ich Dir notwendig eine Mitteilung machen muß. Ich hatte im Anfang d[ieses] J[ahres] versäumt, das Abonement auf die Comptes Rendus der Pariser Akademie rechtzeitig zu erneuern,

weshalb ich die ersten Nummern derselben sehr verspätet erhalte. Zu meiner großen Überraschung fand ich — nach Absendung meines letzten Briefes — in Nr 2 und 5 einen Aufsatz von Darboux «Sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes», mit welchem er ein ausführliches Mémoire über denselben Gegenstand der Akademie vorgelegt hat, welches einer Komission zur Beurteilung übergeben worden ist. Unmittelbar darauf, in Nr. 6, hat dann auch noch ein anderer Mathematiker Méray ein Mémoire über dies Thema angekündigt und eine kurze Analyse des Inhalts gegeben. Du siehst also, mein liebes Herz, daß ich recht hatte, wenn ich Dir sagte, daß die von Dir bearbeitete Frage zu denen gehöre, welche gegenwärtig ihrer Erledigung entgegensehe, und ich freue mich sehr, daß es meiner Schülerin gelungen ist, ihren Konkurrenten sowohl der Zeit nach zuvorzukommen, als auch denselben, was die Sache selbst angeht, wenigstens nicht nachzustehn, Darboux spricht von gewissen Ausnahmefällen, die ein größes Interesse darböten; ich möchte fast glauben, daß er auch auf solche Schwierigkeiten gestoßen sei (eine bei der Gl[eichung] $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$), die Dir Anfangs so viel zu schaffen machten und die Du dann so glücklich beseitigt hast, und ich leugne nicht, daß ich mit einer gewissen Schadenfreude es würde angesehen haben, wenn er mit diesen Ausnahmefällen nicht zurecht gekommen wäre. Aber es schien mir doch notwendig zu sein, rechtzeitig den Tatbestand festzustellen, und sowohl Darboux selbst als die Akademie da[von] in Kenntnis zu setzen, daß Du bereits Ende Juli v[origen] J[ahres] der Göttinger phil. Fakultät deine Abhandlung vorgelegt habest und dieselbe bereits im September erschienen sei. Ich habe daher ein Exemplar Deiner Dissertation nebst Diplom an Darboux abgesandt, und ein zweites an Hermite (mehr Exemplare hatte ich nicht), jedoch vorläufig ohne alle Bemerkung. Wir wollen nun abwarten, ob D[arboux] anständig genug ist, Dir ohne weiteres die Priorität zuzugestehen.

Hermite, in der Meinung, die Sendung komme von Dir selbst, hat Borchardt ersucht, Dir freundlichst dafür zu danken, mit dem Bemerken, daß sich Darboux über die Abhandlung mit großem Lobe ihm gegenüber ausgesprochen habe.

Was meinst Du nun? Willst Du eine förmliche Reklamation bei der Pariser Akademie anbringen, oder abwarten, was etwa die Kommission derselben sagen wird? Wahrscheinlich wird dieselbe so wie Dselbst die Sache totschweigen. Ich würde aber Borchardt ersuchen, am Schluße des 80ten Bandes des Journals, bei der Anzeige einiger Druckfehler in Deiner Arbeit ausdrücklich zu bemerken, daß dieselbe bereits im Laufe des Augusts gedruckt sei.

Bei der Gelegenheit ist mir ein komisches Versehen passiert. Auch dem an Hermite abgeschickten Exemplar hatte ich ein Diplom beigelegt, dabei aber mich vergriffen — denn nur so kann ich mir erklären, daß in Hermite's Brief auch ein Dank an «Madame de Lermontoff» für Übersendung ihres Doktor-Diploms enthalten war. Was mag Hermite von der ehrgeizigen Russin gedacht haben, die so beflissen sich zeigte, ihren auf chemischem Gebiete errungenen Ruhm sogar bei den Mathematikern Anerkennung zu verschaffen! Ich habe übrigens das Versehen aufgeklärt. Da ich aber nun einmal von Deiner und Juliens Promotion Gelegenheit habe sprechen müssen, so muß ich Dir doch einige Details mitteilen, die ich in diesen Tagen von *Schering* erfahren. Lutze und die Mathematiker und Physiker der Fakultät sind von Anfang an geneigt gewesen, Dich und Deine Freundin zur Promotion (sei es mit oder ohne Examen) zuzulassen; dagegen haben die Philologen und Historiker prinzipielle Opposition gemacht, namentlich der Historiker *Pauli*, der während eines langen Aufenthalts in England gegen die dortige Frauenemanzipations — Bestrebungen einen gründlichen Widerwillen bekommen hat. Aber — was sagts Du dazu, daß Julia diesen Euren prinzipiellen Gegner völlig bekehrt hat. Schering erzählte mir, daß er Pauli noch auf dem Wege zum Examinationslokal gesprochen habe, und daß derselbe in den stärksten Ausdrücken gegen J's Zulassung geeifert und erklärt habe, er würde unbedingt gegen sie stimmen. Nun aber, was geschah. Hübner's Art zu examinieren — er soll fast gar, nicht streng sein und hat auf alle Zuhörer den Eindruck gemacht als ob er gegen die Examinende eingenommen sei und ihr etwas anhaben wolle (Julia selbst sagte mir, er habe keinewegs leichte Fragen an sie gerichtet). Dieselbe hat aber nach Überwindung der ersten Befangenheit so tapfer Stand gehalten, daß die Herrn sämtlich auf's Höchste erstaunt gewesen sind. Auch von Listing — der sich ja ganz wohlwollend gezeigt, aber ein schrecklicher Pedant ist, aus dessen Munde alles hoch und voll ertönt, hat man angenommen, daß er sehr schwere Fragen stelle — was wahr scheinlich nicht der Fall gewesen — aber auf Herrn Pauli hat das alles einen solchen Eindrück gemacht, daß er nach dem Examen dem Kollegen Hübner über sein Benehmen Vorwürfe gemacht und erklärt hat, einer Dame gegenüber, die so gründliche Studien in ihrem Fache gemacht, heiße er seine Bedenken schweigen und halte sie der akademischen Ehre für völlig würdig. Hübner hat sich aber vier Wochen lang in keiner Gesellschaft sehen lassen können, ohne von den anwesenden Damen Vorwürfe darüber zu hören, daß er sich J. gegenüber so ungerechtfertigt streng gezeigt habe. Julias tapferer Entschluß hat also nicht nur für sie selbst gute Folgen gehabt, sondern hat auch in Göttingen wenigstens das Vorurteil, als ob Frauen ernster wissenschaftlicher

Beschäftligung fern bleiben müßten, mehr und recht zu beseitigen beigetragen und hiermit, teuerste Freundin, sage ich Dir für diesmal, herzlichst Lebewohl und wiederhole dringend die im Anfang ausgesprochene Bitte.

Dein Weierstraß

49. Berlin, 7. Mai 1875

Meine teuerste Sonia!

Dein lange und sehnlichst erwarteter, vorgestern mir zugegangener Brief (ohne Datum) hat mich von einer großen Sorge befreit. Da ich gar kein Lebenszeichen von Dir erhielt, nicht einmal eine Empfangsanzeige von meinem Schreiben vom 15 Februar mit der mathematischen Beilage, über welche Du auch jetzt noch schweigst, so mußte ich annehmen, Du seist abermals erkrankt, und zwar so ernstlich, daß Du nicht einmal imstande seiest, Deinem Freunde ein paar beruhigende Worte zu schreiben. Wenn ich mich nicht so sehr darüber freute, daß meine Besorgnis unbergründet gewesen, so hätte ich große Neigung, Dir dieses Mal zu beweisen, daß ich, wenn es Not tut, meine liebe «kleine Freundin» auch zu schelten imstande bin — wenn auch nicht, Gleiches mit Gleichem zu vergelten. Außerdem aber hast Du ja, mich völlig zu entwaffnen, das beste Mittel ergriffen, statt aller Entschuldigung gibst Du mir die sichere Aussicht auf baldiges Wiedersehen und längeres Zusammensein.

Liebste Sonia, ich gestehe Dir, daß ich zwar keinen Augenblick daran gezweifelt habe, Du werdest das mir gegebene Versprechen halten, wofern es in Deiner Macht stehe, aber sehr im Zweifel darüber gewesen bin, ob die Verhältnisse es Dir erlauben würden. Dies ist auch der Grund gewesen, weswegen ich bis jetzt noch in keinem Briefe davon gesprochen habe, wie sehr ich mich darnach sehne, meine teuere Freundin und Schülerin, die so fern von mir zu wissen, mir noch immer ein fremder Gedanke ist, einige Wochen wieder in meiner Nähe zu haben. Gar zu leicht konnten sich Deiner Herkunft, nachdem Du erst so kurze Zeit wieder in Deiner Heimat Dich befandest, unüberwindliche Hindernisse entgegenstellen; für diesen Fall wollte ich Dich nicht auch noch durch eine Mahnung an Dein Versprechen quälen. Hättest Du mir geschrieben «Lieber Freund, ich *kann* in diesem Jahre nicht kommen», so würde mir dies sehr schmerzlich gewesen sein, aber an dem Ernst Deines Willes hätte ich nicht gezweifelt.

Daß Du erst anfangs Juni kommen willst, ist mir aus einem Grunde lieb. Ich habe mich seit Anfang d[ieses] J[ahres] gar nicht wohl befunden, und deshalb auch außer der wenig bedeutenden Arbeit,

über die Integration von $\int \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{S}}$ durch Logarithmen nichts Gescheutes machen können, teilweise sogar Widerwillen gegen die Arbeit empfunden. Auch jetzt fühle ich mich noch nicht wieder wohl auf; ich lese zwar zwei Privatkollegien, aber dieselben ermüden mich auch viel stärker als sonst. Ich bin deshalb auch gründlich verstimmt, wozu allerdings auch mancherlei sehr unangenehme Erfahrungen, die ich in letzter Zeit habe machen müssen, beigetragen haben.

Doch will ich Dich damit nicht behelligen, gebe mich vielmehr der Hoffnung hin, Dein Hiersein werde das beste Mittel, mich wieder heiterer zu stimmen, werden. Du kommst also in Begleitung einer jungen und «niedlichen» Mathematikerin? Willst Du mir etwa selbst wieder eine Schülerin zuführen, nachdem Du mir ausdrücklich untersagt hast, eine solche anzunehmen? Das würde mich sehr in Verlegenheit setzen, indem ich in der Tat in die Lage gekommen bin, einer deutschen Dame, die gern Unterricht in der Geometrie bei mir haben wollte, dies abzuschlagen.

In Beziehung auf Deine Frage, ob ich im Juni und Juli nicht allzusehr beschäftigt sein werde, kann ich Dir nur antworten, daß äußere (amtliche) Beschäftigungen mich nicht abhalten werden, recht viel bei Dir zu sein. Schlimm ist es allerdings, daß grade die beiden genannten Monate, wie Du ja aus eigener Erfahrung weißt, für den Aufenthalt in Berlin die am wenigsten geeigneten sind. Doch das läßt sich nun einmal nicht ändern. Schreibe mir aber doch, ob Du anfangs August nach Rußland zurückzukehren beabsichtigest oder auch weitere Reisepläne hast. Ich habe mir für die Herbstferien noch nichts vorgenommen, fürchte aber, daß dieses Mal der Arzt ein Wort mitzureden haben werde.

Auch bitte ich Dich, liebe Freundin, mir Deine Wünsche in Betreff einer Wohnung mitteilen zu wollen, ohne zu befürchten, daß Du mich damit belästigest. Jch hätte Dich gar zu gern wieder in meiner Nähe — möglicherweise könntest Du die Wohnung (Potsd. Str. 27.A) wieder haben, da im Juni und Juli wenig Fremde hier sind. Bitte, schreibe mir darüber möglichst bald; Mühe machst Du mir damit gar nicht, ich beauftrage mit dem Aufsuchen der Wohnung eine Person, die Du dafür belohnen kannst. Natürlich mußt Du genau angeben, wieviel Zimmer Du erwünschst.

Wie steht es mit der versprochenen Photographie? Gar zu gern erhielte ich eine solche auch *vor* Deiner Ankunft. Bringe überdies auch einige Exemplare mit für die Göttinger Herren, die gar zu gern wissen möchten, wie denn ein Menschenkind generis feminini, das sich mit partiellen Differentialgleichungen, Saturnusringen und Abelschen Transzendenten beschäftigt, eingentlich aussieht. Daß das Bild, welches man sich von Deiner Persönlichkeit gemacht hat,

der Wirklichkeit nicht ganz entspricht, habe ich aus der betroffenen Mine gesehen, die Schering machte, als ich ihm auf seine Frage, ob ich etwa eine Photographie von Dir besäße die in meinen Händen befindliche (größere) zeigte.

Wilh[elm] Weber war auch hier und hat sich angelegentlich nach Dir erkundigt, *Kirchhoff* hat vor acht Tagen seine hiesigen Vorlesungen begonnen; ich freue mich sehr, ihn hier zu haben. Königsberger scheint bereits daran zu denken, von Dresden möglichst bald wieder fortzukommen. Sein Nachfolger in Heidelberg ist Fuchs. Wer diesem in Göttingen nachfolgen wird, ist noch nicht bekannt — vielleicht der erstere, was sehr komisch sein würde.

Prof. Richelot in Königsberg ist nach schwerer Krankheit gestorben, für die dortige Universität ein harter Verlust. Ich habe in ihm einen sehr lieben Freund scheiden gesehen. Dein ehemaliger Studiengenosse. Dr. Jurgens hat sich kürzlich in Galle als Privatdozent habilitiert. Seine Antrittsvorlesung handelte «über den Begriff der analytischen Funktion nach Weierstraß».

Augenblicklich bin ich mit der Durchsicht einer umfangreichen Dissertation eines meiner Schüler beschäftigt, welche zu den besten gehört, die mir auch vorgelegen haben. Sie beschäftigt sich mit der Integration von $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ für einen *mehrfach* zusammenhängenden Teil der Ebene (x, y) unter vorgeschriebenen Grenzbedingungen und enthält eine Reihe neuer und bedeutender Resultate. Der Verfasser ist ein unscheinbarer, träumerischer und äußerlich sehr ungeschickter Mensch; aber es steckt in ihm, wenn ich mich nicht sehr irre, ein bedeutendes mathematisches Talent. Am Weihnachtsabend wurde er plötzlich verhaftet und zum dreijährigen Dienst als gemeiner Soldat in die Kaserne geführt, «weil er es (was bei uns jeder Studierende tut) vergessen», sich rechtzeitig zum einjährigen Dienst als Freiwilliger zu melden. Glücklicherweise erwies er sich als Soldat so unanstellig, daß man ihn nach 6 Wochen als durchaus unbrauchbar wieder entließ, und er zu seiner Dissertation zurückkehren konnte. Zum Examen meldete er sich dann ohne Zeugnisse und ohne von den zu erfüllenden Formalien irgend etwas zu wissen. Dabei hatte ich ihn als Rektor aus dem Album löschen lassen müssen, weil er weder Collegia angenommen hatte noch in Berlin aufzutreiben war. Hätte ich mich nicht bei der ersten Unterredung überzeugt, daß trotz alledem in dem jungen Menschen etwas Tüchtiges stecke, so würde der Dekan ihn nicht zum Examen zugelassen haben. Übrigens habe ich augenblicklich mehrere recht gute Zuhörer, darunter auch einen Schweden, der mir besonders gefällt, einen Österreicher und, was wunderbar ist, zwei Polen, die wenigstens ausdauernd fleißig sind. Im nächsten Semester will mir Dr. Bruns

(Dorpat, dem Du auch deine Diss. zusenden wolltest) seinen ersten Zuhörer, der recht gut sein soll, zuschicken.

Und hiermit, liebes Herz, sage ich Dir herzlichst und freundlichst Lebewohl. Du mußt mir aber vor deiner Ankunft noch zweimal schreiben, einmal sofort nach Empfang dieser Zeilen und dann unmittelbar vorher.

Ganz der Deinige W.

50. Berlin, 17. Juni 1875

Meine teuerste Sonia!

Ich vermag Dir nicht zu sagen, wie schmerzlich ich mich von der schlimmen Nachricht, die Dein so eben mir zugegangener Brief vom 13-ten d. M. mir bringt, ergriffen fühle. Seit 14 Tagen erwartete ich täglich die Anzeige von Dir zu erhalten, daß Du im Begriff seiest, nach Deutschland abzureisen, und fing schon an unruhig zu werden, als aus dem Anfang des Monats Juni, für den Du Deine Ankunft in Aussicht gestellt hattest, allmählich die Mitte wurde, da ich aber aus Erfahrung weiß, daß Du Dich immer etwas schwer zum Antritt einer längeren Reise entschließest, und da Du in diesem Falle überdies von Deiner Freundin einigermaßen abhängig warst. so war meine Besorgnis nicht allzu groß.

Gleichwohl hätte ich Dir schon geschrieben, wenn ich in Betreff Deines Aufenthaltsortes sicher gewesen wäre. Und nun muß ich hören, daß meine arme Freundin abermals 5 Wochen schwer krank gewesen ist — denn wie bösartig die Masern bisweilen sein können weiß ich — und noch immer leidet. Das schlimmste aber ist, daß nun eine deutsche Reise auf unbestimmte Zeit vertagt ist. Und ich hatte mich so sehr darauf gefreut, Dich wieder einige Wochen in meiner Nähe zu haben und im täglichen Verkehre mit Dir, meiner treuen Schülerin und Freundin, die mir so überaus teuer ist, mich glücklich fühlen zu können. In der Tat, liebes Herz, Du kannst Dir nicht denken, wie sehr ich Dich entbehrt habe.

Im Laufe von vier Jahren war ich gewohnt geworden, in Dir die Vertraute meiner Gedanken und Bestrebungen zu sehen, mit der ich sprechen konnte wie mit einem Freunde, der mir mein ganzes Leben über nahe gestanden. Und niemals habe ich jemanden gefunden, der mir ein solches Verständnis der höchsten Ziele der Wissenschaft, und ein so freudiges Eingehen auf meine Ansichten und Grundsätze entgegengebracht hätte wie Du. O wir hätten uns noch nicht trennen müssen. Du hättest noch ein, zwei Jahre meine mit mir zusammenarbeitende Schülerin bleiben müssen. Doch das war ja nicht möglich.

Ich habe vergangenen Winter und diesen Sommer einige recht gute Zuhörer gehabt, unter denen sich besonders ein junger Schwede auszeichnete. Ich hatte auch angefangen, ihnen in meinem Hause Privatvorträge zu halten— aber es ging nicht recht — schon der Umstand, daß die jungen Leute eifrig alles niederschrieben und, ich ihnen nicht am Gesicht ansehen konnte, ob ich verstanden werde störte mich außerordentlich. Das war bei Dir ganz anders.

Daß die Ärzte Dir jetzt einen längeren Landaufenthalt und Enthaltung von aller anstrangenden Arbeit verschrieben, ist sicher wohlgetan. Ich denke mir, Du gehst etwa gegen Ende d. M. nach Palibino, und wirst mindestens zwei Monate zu Deiner völligen Genesung nötig haben. Würdest Du dann aber nicht im September und Oktober hierher kommen können, so daß Du direkt von hier nach Petersburg zurückkehrtest. Ich würde sehr glücklich sein, wenn sich dies so einrichten ließe.

Was mich angeht, so kann ich vom 1-sten August an bis zum 1. Nov. dieses Jahres über meine Zeit nach Gefallen disponieren. Vielleicht verordnet man Dir auch eine Badekur; ich würde es dann jedenfalls möglich machen, Dir alsbald einen Besuch abzustatten. Überhaupt wirst Du, wenn es Dir möglich wird, noch in diesem Jahre nach Deutschland zu kommen, und mich frühzeitig genug davon benachrichtigst, darauf rechnen können mit mir zusammenzutreffen.

Selbsverständlich erwarte ich darüber zur Zeit von Dir noch keine Entscheidung; die Sorge für völlige Wiederherstellung deiner Gesundheit ist vor der Hand das allein Dringende. Aber eine Bitte habe ich an Dich zu richten, die Du mir nicht versagen darfst. Ich wünsche gar nicht, daß Du mir viel schreibest, so lange es Deinen Augen schaden kann; aber ich bitte Dich recht herzlich, laß mir wenigstens bis zu der Zeit, wo Du Dich wieder ganz wohl befinden wirst, alle 8 Tage *nur drei Zeilen* zukommen, in denen Du mir sagen wirst, wie es Dir geht. Ich würde mich sehr ängstigen, wenn ich längere Zeit ohne Nachricht von Dir bliebe. Nicht wahr, Du gewährst mir diese Bitte, und schreibst mir auch die wenigen Worte, selbst wenn Du inzwischen von mir nicht gehört haben solltest?

Anderes Dir jetzt mitzuteilen wäre nicht am Platze. Doch darf ich Eins nicht verschweigen, weil es Dich sicher interessiert. Es ist gewiß, daß an Stelle des verstorbenen Prof. Richelot Heinr. Weber von Zürich nach Königsberg kommt, und so gut als gewiß, *daß Schwarz die mathematische Professur in Göttingen erhalten wird.* Um die letzte Stelle soll sich noch Königsberger eifrig beworben haben — selbst oder durch andere — warum ist er aber — aus gekränkter Eitelkeit — von Heidelberg, wo er es so gut hatte, weggegangen.

Auch über etwas, das mich betrifft, muß ich Dir eine Mitteilung machen, weil Dir vielleicht in einer Zeitung darüber eine Notiz zukommen könnte. Ich weiß nicht, ob Dir bekannt ist, daß Friedr[ich] Wilhelm IV einen eigentümlichen Orden Pour le mérite für Wissenschaft und Kunst gestiftet hat, der sich von andern dadurch unterscheidet, daß er nur an 20 deutsche Gelehrte (und 10 Künstler) und an ebensoviel Ausländer vergeben wird, und daß jedesmal, wenn ein Ritter stribt, die übrigen 29 dem Könige einen Nachfolger vorschlagen, der dann auch stets bestätigt wird.

Kürzlich ist nun Dein Freund unerwarteterwiese Ritter dieses Ordens geworden, als einziger Repräsentant der mathematischen und astron[omischen] Wissenschaften in dieser Tafelrunde. Da der Orden als ein hoher gilt, der den glücklichen Inhaber z. B. courfähig macht, so veranlaßt eine Verleihung desselben jedesmal eine gewisse Aufregung in der Gelehrten - Republik, und der Empfänger wird beglückwünscht, aber noch mehr beneidet und kritisiert. So ist es auch mir ergangen. Du weißt, daß ich gegen alles dies sehr gleichgültig bin und mich aufrichtig gefreut haben würde, wenn etwa *Kummer* mir vorgezogen wäre,— gleichwhol sage ich ohne Anstand, daß ich in der Lage, bei gewissen Gelegenheiten einen Orden tragen zu müssen, den Stern, welchen vor mir Gauß, Jacobi und Dirichlet getragen haben, lieber anlegen werde als jeden anderen. Außerdem haben sich meine Sitten, seit Du fort bist, überhaupt verschlechtert; ich bin vor[igen] Winter dreimal auf einem Hofball gewesen, in den vier Jahren vorher nicht ein einziges Mal. Und nun ein herzliches Lebewohl, meine geliebte Sonia, von der ich recht bald befriedigende Nachrichten zu erhalten auf das dringendste Wünsche.

Der Deinige. C. W.

Vergiß nicht, wenn Du aufs Land gehst, mir Deine vollständige Adresse in russischer Sprache zu schicken. Am besten wäre es wohl, wenn Du deinem jedesmaligen Briefe das Couvert für die Antwort beilegtest; ich bin doch nicht ganz sicher, daß ich die russischen Hierogliphe ganz richtig nachschreiben werde.

Diese Tage war Herr Tschebyscheff hier; wir haben uns aber verfehlt.

Noch einmal ein herzliches Lebewohl, meine liebe Freundin. Mit Wehmut lese ich so eben Deinen vorletzten Brief nochmals durch; er war in so munterer Stimmung geschrieben, und stellte mir eine so sichere Aussicht, daß ich «nach wenigen Tagen» Dich wiedersehen sollte! Meine Schwester, die wußte, daß Du bald kommen würdest, hat mich gebeten, Dich ihrer herzlichsten Teilnahme zu versichern.

D. W.

Rüdersdorf bei Berlin
51. 23. September 1875

Meine teuerste Sonia!

Soeben erhalte ich vom Hause nachgesandt Deinen Brief vom 17-ten d. M., dessen Inhalt mich aufs tiefste betrübt. Zuerst muß ich Dir aber sagen, da ich Deinen — gegen Mitte Juni — mir zugegangenen Brief, in welchem Du mir Deine Erkrankung an den Masern meldetest, *sofort* beantwortet, mein Schreiben selbst auf die Post getragen und mich überzeugt habe, daß es abgestempelt und zu den nach Rußland bestimmten Sachen gelegt worden ist; er muß also wie schon zwei frühere, and der Grenze oder in Petersburg abhanden gekommen sein.

Das zu erfahren wäre mir unter allen Umständen höchst unangenehm — in diesem Falle doppelt, weil ich doch — trotzdem Du es nicht ausdrücklich sagst — annehmen muß, daß meine teuere Freundin sich über meine anscheinende Teilnahm[s]losigkeit einigermaßen gegrämt hat, und weil mein Brief manches enthielt, was aber nur für Dich bestimmt war. Ich hatte mich so innig darauf gefreut, Dich im Juni wiederzusehen und ein paar Monate in meiner Nähe zu behalten — und Du kannst Dir denken, daß sich die schmerzliche Empfindung, mit der ich meine Hoffnung zerstört sah, in meinem Briefe nicht in kalten Worten ausgesprochen habe, daß ich durchaus keine Nachricht von Dir erhielt, obwohl ich Dich gebeten, mir möglichst bald wenigstens ein paar Zeilen zukommen zu lassen, konnte ich mir allerdings nicht anders als dadurch erklären, daß entweder mein Brief verloren gegangen oder Deine Krankheit fortdauereich hätte deshalb auch schon längst wieder geschrieben, wenn ich Deinen Aufenthaltsort gewußt—Du hättest mir nur gesagt, Du würdest von Petersburg fortgehen, aber nicht wohin — ich vermutete nash einem sog [enannten] klimatischen Kurort. Leider erfahre ich jetzt, daß meine Vermutungen sich beide bestätigt haben — ich fürchte fast, Du bist noch kränker, als Dein Brief mir sagt. Ich kann mich des Gedankens nicht erwehren, daß der Winteraufenthalt in Petersburg, nach so langer Abwesenheit, Dir ernstlich geschadet hat, und will nur hoffen, daß der berühmte Arzt, den Du konsultieren willst, das richtige Heilmittel für Dich findet. Daß man Dir möglichste Schonung und die Enthaltung von geistiger Anstrengung dringend empfehlen wird, halte ich für selbstverständlich. Wenn man aber — wie nicht unwahrscheinlich — den Grund Deines Leidens in zu großer Anstrengung bei Deinem Studium suchen sollte, so würde ich dies nur in sehr bedingtem Maße für begründet halten. Das letzte Jahr in Berlin bist Du trotz angestrengter Beschäftigung und Spannung im Ganzen durchaus wohl gewesen, und ich bin überzeugt, Du würdest, wenn Du nach einigen Wochen der Erholung

zurückgekommen wärest, den vorigen Winter sehr gut überstanden haben.

Jetzt habe ich zunächst die Bitte an Dich, schriebe mir sofort ein paar Zeilen, damit ich über das Schicksal dieses Briefes beruhigt werde (ich würde ihn rekommandieren, wenn ich nicht kürzlich von einem mit den russischen Verhältnissen bekannten Manne gehört hätte, daß ein mit dem Charge versehener Brief fast ausnahmslos erbrechen werde). Sodann hoffe ich, Du wirst mir sofort nach der Konsultation von deren Ergebnis Nachricht geben. Sollte Dir der Artz den Aufenthalt in einem milderen Klima empfehlen, so möchte ich Dich darauf aufmerksam machen, daß ich Meran gar nicht für Dich geeignet halte.

Weder der Aufenthalt in einem engen Tale, aus dem man im Winter nicht hinauskann, noch das Zusammensein mit vielen schwer kranken Leuten würde Dir zusagen. Montreux kennst Du selbst. Vielleicht findest Du noch in Deutschland einen geeigneten Ort, z. B. Wiesbaden oder Soden, wo der Winter sehr milde zu sein pflegt. Unter allen Umständen laß mich wissen, was Du für Entschließungen fassen wirst, Du darfst überzuegt sein, daß Niemand von Deinem Ergehen einen größeren Anteil nehmen kann als ich, und daß Du mir keine größere Freude machen kannst, als wenn Du in allen Deinen Angelegenheiten mich als Deinen bewährten und treuen Freund in Anspruch nimmst.

Wenn Du von mir gehört hast, ich sei im verflossenen Semester unwohl gewessen, so beruht das wohl nur darauf, daß ich einer leichten Erkältung wegen mich einmal einer Einladung zu einem mathem. Commers entzogen habe. Es ist mir im Gegenteil recht wohl ergangen, und befinde ich mich auch in diesem Augenblicke ganz gut. Verreist — im eigentlichen Sinne — bin ich dies Jahr gar nicht gewesen. Seit dem 3-ten August halte ich mich bei meinem Freunde *Borchardt* auf, der drei Meilen von Berlin einen reizenden Landbesitz hat — mehrere Wochen waren auch meine Schwestern hier, sowie 14 Tage Kollege Kirchhoff. Wir leben viel im Freien, arbeiten aber auch täglich einige Stunden (Am 11-ten d. M. habe ich Dir den[von]Borchardt neu herausgegebenen Briefwechsel zwischen Jacobi und Legendre zugesandt — die Jacobischen Briefe von den unendlich vielen Druckfehlern, die sie in der Bertrand'schen Ausgabe entstellten, gereinigt, die Legendre'schen aus Jacobi's Nachlaß zum ersten Male zugänglich gemacht. Hast Du die nach Petersburg adressierte Sendung erhalten?)

Am 1 Oktober gehe ich wieder nach Berlin, um dort den Rest der Ferien zu verbringen.

Deine Frage, wie es Schwarz in Göttingen gehe, kann ich Dir nicht beantworten, weil er noch gar nicht da ist, sondern erst am 1 Ok-

tober dort eintritt, sowie Weber in Königsberg und Frobenius in Zürich. Den letzteren sehe ich sehr ungern dorthingehn; leider hat er sich verlobt — oder ist verlobt worden — mit einer Dame, die durchaus nicht für ihn paßt, deren Zureden ihn aber vermocht hat eine Stellung aufzugeben, wie sie selten einem so jungen Mann geboten worden ist und die ihm für die Zukunft die beste Garantie gab.

Ich werde Dir, meine teuerste Freundin, recht bald wieder schreiben, und sehe mit Ungeduld dem Zeitpunkt entgegen, wo ich mich wieder mit Dir von wissenschaftlichen Dingen werde unterhalten dürfen, was ich jetzt nicht wage. Aber, wann werde ich jetzt die Freude haben, Dich zu sehen — ich habe doch keine falsche Ahnung gehabt, als ich beim Abschiede Dir sagte, ich könne mich der Hoffnung auf ein *baldiges* Wiederzusammensein mit meiner lieben Schülerin und Freundin nicht mit rechtem Vertrauen hingeben.

Mit den aufrichtigsten und innigsten Wünschen für Dein Wohlergehen

Der Deinige K. Weierstraß

52. Berlin, 23. Oktober 1875

Meine liebe Sonia!

Du hast wahrlich recht, wenn Du in Deinem letzten Briefe sagst, dies Jahr scheine bestimmt für Dich ein Leidens — und Trauerjahr zu sein.

Kaum in Deine Heimat und das elterliche Haus zurückgekehrt, trifft Dich der schwere Schlag, das teuere Haupt desselben plötzlich zu verlieren! Wie sehr mich diese Nachricht ergriffen hat, und wie innigen Anteil an deinem Schmerz ich nehme, darüber bedarf es meiner liebsten Freundin gegenüber, die weiß, daß, was immer in Freud' und Leid ihr begegnet, in meiner Seele eine sympatische Sait berührt, nicht vieler Worte; und ebenso wenig wirst Du von mir erwarten, daß ich in einem Augenblicke, wo Deine Seele ganz erfüllt ist von der Liebe, die Dich mit dem Dahingeschiedenen verband, und von der Größe des erlittenen Verlustes jede andere Erwägung zurückritt, um Dich zu trösten und aufzurichten, alles verbringen werde, was sich in einem solchen Falle überhaupt und in dem Deinigen insbesondere Tröstliches und Vernünftiges sagen ließe. Nein, liebes Herz, ich will mich nicht eindrängen in Deinen gerechten Kummer, den Du in Dir und durch eigene Kraft überwinden wirst.

«Nicht in das Grab, nicht übers Grab verschwindet
Ein edler Mensch der Sehnsucht hohen Wert!
Er kehrt in sich zurück und findet staunend
In seinem Busen das Verlorne wieder!»

Aber danken will ich Dir aufrichtig dafür, daß Du in Deinem Briefe mir ausführlich über die näheren Umstände, unter denen der unerwartete Tod Deines verehrten Vaters erfolgte, berichtet hast — im Gegensatz zu der Wortkargheit, mit der Du sonst Persönliches zu berühren liebst. Innig gefreut habe ich mich, von Dir zu erfahren, daß seit Deiner Heimkehr ein so schönes Verhältnis zwischen Dir und Deinem Vater bestanden hat, und Du der Überzeugung gekommen bist, Du seiest wohl stets der Liebling seines Herzens gewesen, wenn auch, wie mir einst selbst gesagt hast, dies in früheren Jahren äußerlich weniger hervorgetreten sein mag.

Ich bin überzeugt, Du wirst Dein ganzes Leben lang mit wehmütiger Freude des letzten Jahres Eures Zusammenseins gedenken, und Dich glücklich preisen, daß es Dir vergönnt gewesen ist, die letzten Tage des Entschlafenen zu verschönen.

Auch meine Shwestern lassen Dich Inrer aufrichtigsten und herzlichsten Teilnahme versichern, so wie ich Dich bitte, dasselbe meinerseits auch Deiner verehrten Frau Mutter aussprechen zu wollen.

Dein mir versprochener Brief ist heute noch nicht in meinen Händen — auch der letzte ist mir sehr verspätet zugekommen. Ich warte mit Ungeduld auf weitere Nachrichten von Dir, ich kann Dir nicht verhehlen, daß mi[ch] das in Deinem letzten Briefe über den Stand Deiner Gesundheit Enthaltene noch keineswegs beruhigt hat. Mir geht es wohl — am K. Montag fange ich meine Vorlesungen an. Weiteres werde ich Dir für diesmal nicht schreiben — nur bitte ich Dich, mir nächstens zu schreiben:

1) ob Du einen vom 1 Oktober datierten Brief[erhalten hast], der ausschließlich Mathematisches enthielt, (er sollte ursprünglich eine Beilage zu meinem *Rüdersdorfen* Briefe sein), ich war aber nicht rechtzeitig damit geworden;

2) ob Du an Dr. Bruns (Observator an der Sternwarte zu Dorpat) ein Exemplar Deiner Dissertation geschickt hastbekommen hat er keins, verlangt aber dringend darauf;

3) ob Du Dich wohl genug fühlst, um weitere mathematische Mitteilungen von mir zu erhalten?

Ich habe einen schönen Satz, der ganz allgemein für die Zurückführbarkeit eines Integrals von beliebigem Range auf eins von niedrigerem Range ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ausspricht.

Mit dem herzlichsten Wunsche, daß Dich diese Zeilen mindestens als eine in der Genesung fortschreitende treffen mögen, sage ich Dir Lebewohl, liebste, beste Freundin!

Der Deinige Weierstraß

Schreibe mir auch mit Bestimmtheit, wohin ich meinen nächsten Brief zu adressieren habe.

53. Seebad. Saßnitz (Insel Rügen)
den 15-ten August 1878.

Meine liebe Freundin!

Es ist mir auch nach dem Empfange Deines—kaum mehr erwarteten— Briefes vom... — ja, das Datum fehlt wieder wie in so manchen früheren — unbegreiflich geblieben, warum Du mich so lange Zeit ohne jede Nachricht von Dir gelassen hast. Das letzte Schreiben, das ich von Dir erhalten, war das, in welchem Du mir den Tod Deines verehrten Vaters anzeigtest. Ich habe dasselbe sofort beantwortet, und dann, obwohl ich nichts weiter von Dir hörte, noch zweimal in längeren Interwallen an Dich geschrieben, auch wiederholt Dir Abhandlungen von mir und meinen Schülern zugesandt — alles vergebens, Du hast kein Lebenszeichen von Dir gegeben, und ich wußte zuletzt nicht einmal mehr, wo meine teuere Freundin und Schülerin, an deren Geschick ich so innigen Anteil genommen, sich aufhalte. Hast Du meine Briefe nicht erhalten? Oder was hat Dich abhalten können, Deinem besten Freunde, wie Du mich so oft genannt hast, volles Vertrauen wie früher zu schenken? Ich stehe da vor einem Rätsel, dessen Lösung nur Du mir geben kannst.

Du versprichst mir einen ausführlichen Brief, in welchem Du mir mitteilen willst, was Du in den letzten 3 Jahren erlebt und getrieben hast, wofern Du aus meiner Antwort ersiehest, daß sich meine Gesinnung gegen Dich nicht geändert habe. Hast Du das auch nur einen Augenblick glauben können, liebe Sonja? Aber ich nehme Dich beim Wort, und erwarte also alsbald einen recht umständlichen Bericht. Ich möchte Dich aber dringend bitten, mich sofort nach Empfang dieses Briefes mich nur durch wenige Zeilen davon in Kenntnis zu setzen, daß er in Deine Hände gekommen ist; ich würde das Gegenteil annehmen müssen, wenn ich nicht innerhalb der nächsten 8 Tage die erwartete Anzeige erhielte.

Mittelbar habe ich nur zweimal von Dir gehört, durch Herrn Mittag-Leffler, der Dich in Petersburg besucht hat, und dann vor kurzem durch Herrn Tschebyscheff. Den letztern habe ich nicht selbst gesprochen — er besucht mich stets zu einer Zeit, wo ich nicht zu Hause bin — aber gegen Borchardt hat er geäußert, Du habest die Beschäftigung mit der Mathematik aufgegeben. Ich freue mich, won Dir selbst die Versicherung des Gegenteils zu hören. Mittag — Leffler ist mir ein sehr lieber Schüler gewesen; er besitzt neben gründlichen Kenntnissen eine ungewöhnliche Auffassungsgabe und einen auf das Ideale gerichteten Sinn; ich bin überzeugt, der Verkehr mit ihm würde anregend und fördernd auf Dich wirken.

Seine Stellung in Helsingfors ist eine wenig angenehme; man geht dort noch weiter wie anderswo, man will sagen eine *finnisch — nationale* Mathematik, und so lange Leffler da ist, erscheinen in

jedem Semester in den dortigen Zeitungen vernichtende Leitartikel gegen Weierstraß'sche Mathematik — denn L.[effler] begeht die Unvorsichtigkeit, meinen Namen in seinen Vorlesungen und Abhandlungen öfter zu nennen als nötig wäre. So schlimm wird es doch bei Euch nicht sein, obwohl, was Du mir über die dortigen mathematischen Kreise mitteilst, auch nicht sehr befriedigend lautet.

Ist denn auch mit Zolotareff nicht gut zu verkehren! Er hat mich einmal besucht, und keinen ungünstigen Eindruck zurückgelassen.

Du möchtest nun gern von mir erfahren, wie es mir seither ergangen, und was ich getrieben habe. Was meine Gesundheit angeht, so bin ich zufrieden. Ernstlich unwohl bin ich in den letzten 3 Jahren nicht gewesen; nur fange ich an zu spüren, daß der zweistündige Vortrag ohne Unterbrechung mich angreift, so daß ich des Nachmittags längere Zeit mich ausruhen muß. Meine Beschäftigungen sind die alten; meine Vorlesungen nehmen mich ganz besonders in Anspruch, namentlich habe ih für die Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen — im letzten Semester vor 102 Zuhörern gehalten — noch manches gearbeitet — ebenso für die Variationsrechnung. Im letzten Semester habe ich auch zum erstenmal über einige Anwendungen der hyper-elliptischen Funktionen gelesen.

Meine eigentlichen Untersuchungen angehend, so haben die über die $2n$-fach periodischen Funktionen, oder besser gesagt, die Systeme von n Funktionen ebenso vieler Argumente, für die ein algebraisches Additions — Theorem besteht, endich einen Abschluß gefunden, der mich befriedigt, so daß ich jetzt mit der Veröffentlichung vorgehen werde. Ich muß dabei freilich ziemlich mit dem Ende anfangen — aus äußeren Gründen, weil man nämlich auch in Frankreich jetzt anfängt, sich mit den periodischen Funktionen mehrerer Veränderlichen zu beschäftigen. Der Beweis dafür, daß alle eindeutigen Funktionen von n Veränderlichen, wenn sie bei endlichen Werten ihrer Argumente wie rationale Funktionen sich verhalten und $2n$ voneinander unabhängigen Periodensysteme besitzen, sich durch θ-Funktionen ausdrücken lassen, hoffe ich noch in diesen Ferien druckfertig machen zu können. Für das Übrige habe ich umfangreiche Ausarbeitungen in meinen Besitze.

Weniger glücklich bin ich gewesen mit den angefangenen Untersuchungen über die Lösung der dynamischen Problemen durch Reihenentwicklungen, welche der Besonderheit der zu integrierenden Differenzialgleichungen entsprechen. Ich komme bis zu einem gewissen Punkt; ich forme, z. B. Differenzialgleichungen für das Problem der n Körper so um, daß sie eine beliebig weit fortzusetzende Integration in Reihenform formell gestatten, aber meine Versuche, die Konvergenz der Entwicklung zu erweisen, scheitern an einem Hindernis, daß ich nicht zu bewältigen imstande bin. Die Glieder

der Reihen haben alle die Gestalt

$$A_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_r}\cos\left[\nu_1\varkappa_1(t-\tau_1)+\nu_2\varkappa_2(t-\tau_2)+\ldots+\nu_r\varkappa_r(t-\tau_r)\right],$$

wo die A, $\varkappa$, τ Konstanten sind. Die Größen $\tau_1, \ldots, \tau_r$ sind, wenn die Ordnung des zu integrierenden Systems von Differenzial Gleichungen $2r$ ist, r der Integrations — Konstanten. In den Koeffizienten $A_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$ kommen dieselben nicht vor, sondern in ν andern, welche mit den $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ durch r Gleichungen zusammenhängen. Diese Koeffizienten erscheinen aber in Bruchform, und es, werden die Nenner unendlich klein, wenn die Summe der absoluten Beträge der ganzen Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_r$, unendlich groß wird. Es muß also gezeigt werden, daß auch die Zähler unendlich klein werden, und ebenso die Brüche selbst, was bei der komplizierten Zusammensetzung der Ausdrücke unmöglich erscheint.

Das Faktum selbst ist mir nicht auffallend, es kommt sehr oft vor, daß eine algebraische Funktion mehrerer Argumente sich *nur* in der Form eines Bruches darstellen läßt, wenn sie auch bei endlichen Werten der Argumente niemals unendlich groß wird. Aber wie gesagt, ich komme über die daraus entspringende Schwierigkeit nicht hinweg.

Für die übersandte Photographie danke ich freundlichst, obwohl sie dem Bilde, das ich in meiner Erinnerung von Dir trage, nicht ganz entspricht. Ich glaube, Du mußt Dich in einer anderen Pose photographieren lassen; in der gewählten ist die Nase viel zu stark ausgefallen, die in Berlin angefertigte Photographie ist mir lieber. Und nun lebe wohl, meine liebe Freundin, laß mich nicht zu lange auf den versprochenen ausführlichen Bericht warten, und sei überzeugt, daß meine Gesinnung gegen Dich unverändert die eines treuen und aufrichtigen Freundes ist.

Sende Deinen Brief nach Berlin unter der alten Adresse, er wird mir sicher hierher gesandt.

Пронумеровано: см. стр. 220!

Dein Weierstraß.

54.

Berlin, W Linkstraße 33
den 28-ten Oktober 1880.

Meine teuere Freundin!

Über unsere Korrespondenz hat von dem Augenblicke an, wo Du vor sechs Jahren Berlin verlassen, ein Unstern gewaltet. Erst ducrh den gestern in meine Hände gelangten kurzen Brief (ohne Datum) habe ich erfahren, daß demselben zwei andere vorangegangen sind. Glücklicherweise sind meine Nachforschungen nach den letzteren von Erfolg gewesen. Ich hatte am 1. Oktober meine bisherige Wohnung gewechselt, da diese noch nicht wieder bezogen ist, und noch nicht alle Briefträger meine jetzige zu kennen scheinen, so leuchtete

mir sofort die Möglichkeit ein, daß die fraglichen Briefe in dem Briefkasten jener stecken könnten. In der Tat war es so. Ich fand Deinen Brief vom 23. September (wohl russ. Datum) und das kurze Billett mit dem von Dir geschickten russ. Kuvert. (Du schreibst von *zwei* ausführlichen Briefen — ist das kein Irrtum, so fehlt allerdings noch einer). Ich beeile mich nun, Dir zu antworten.

Ich hatte allerdings kaum noch gehofft, ein Lebenszeichen von Dir zu vernehmen. Vor zwei oder drei Jahren schriebst Du mir nach einer sehr langen Pause, ich solle in nächster Zeit ausführliche Nachrichten von Dir erhalten — aber ich habe dann weiter nichts von Dir auf direktem Weg gehört. Nur Herr Mittag — Leffler hat mir dann und wann eine Nachricht von Dir gebracht, aus der ich wenigstens die Tatsache entnehmen konnte, daß Dein körperliches Befinden ein befriedigendes sei — das war aber auch alles. So hatte ich mich bereits daran gewöhnt, die Zeit, in der Du mit mir als Schülerin und Freundin verkehrtest, als eine abgeschlossene zu bertrachten, die nur noch der Erinnerung angehörte. Der lange Brief, den ich jetzt von Dir in Händen habe, gibt mir nun allerdings einen Schlüssel zum Verständnis Deines langen Schweigens; gleichwohl bedauere ich auf's tiefste, daß Du Deinem alten Freunde gegenüber nicht schon früher mit rückhaltlosem Vertauen Dich ausgesprochen hast. Ich bedauere dies ganz besonders auch aus dem Grunde, weil auf diese Weise Jahre verloren gegangen sind, in denen ich viel ach hätte Gelegeneit finden können, durch schriftliche Mitteilungen Dich in Deinen Studien zu unterstützen und Deinen Eifer und Deinen Mut zu beleben.

Aber ich liebe es nicht, über Vergangenes viel zu reflektieren — fassen wir darum die Zukunft in's Auge.

Zunächst kannst Du versichert sein, liebe Freundin, daß ich mich herzlich freuen werde, wenn ich Dich nach so langer Trennung eines Tages wiedersehen kann. Ich bin es Dir aber schuldig, bevor Du Dich zu der langen Reise hierher entschließest, Dich von einigen mich betreffenden Umständen in Kenntnis zu setzen, um zu verhüten, daß Du nicht mit Erwartungen hierher kommst, welche zu erfüllen in der nächsten Zeit leider nicht in meiner Macht steht. Du wirst Dich ohne Zweifel wundern, von mir zu hören, daß meine äußeren Verpflichtungen in den letzten Jahren, statt sich, wie es sein müßte, zu verringern, immer mehr gewachsen sind. Für diesen Winter zumal habe ich eine solche Mass Arbeit vor mir, daß ich kaum weiß, wie ich durchkommen werde. Du wirst ohne Zweifel wissen, daß mein Freund Borchardt im vergangenen Sommer nach schweren Leiden gestorben ist. Schon seit dem 1. April hatte ich für ihn die Redaktion des Journals übernommen, und, wie die Verhältnisse einmal liegen, muß ich dieselbe — im Verein mit Kronecker — fort-

führen. Dann hatten wir in der Akademie die Veranstaltung einer Gesammtausgabe der Werke von Jacobi, Dirichlet und Steiner beschlossen. Borchardt hatte Jacobi, ich Steiner übernommen. Nach Borchardts Erkrankung mußte ich die Herausgabe von Jacobi fortführen, da sich eine dazu geeignete Person nicht dazu fand — und ich habe selbst früher nicht geglaubt, daß ein solches Unternehmen so viel zeitraubende Arbeit erfordert. Außerdem bin ich von Borchardt zum Vormund seiner 6 Kinder ernannt; bei den innigen Beziehungen, in denen ich seit 25 Jahren zu Borhardt und seiner Familie gestenden habe, kann ich mich der Pflicht nicht entziehen, Frau Borchardt bei der Verwaltung ihres bedeutenden Vermögens mit Rat und Tat beizustehen, da sie selbst in Geschäften ganz unerfahren ist. Übrigens nehme ich auch keinen Anstand, Dir zu sagen, daß ich zum Teil auch gezwungen bin, Arbeiten wie die vorhin genannten zu übernehmen, um meine Einkünfte zu vermehren. Denn die Besoldung, die ich als Professor beziehe, reicht nicht mehr aus, um die jährlich sich steigernden Ausgaben zu decken.

Ich führe dies alles nur an, teuerste Freundin, um Dir klar zu machen, daß ich diesen Winter über nur wenig Zeit für Dich übrig haben würde, und daß ich es aus diesem Grunde lieber sehen würde, wenn Deine Verhältnisse es Dir erlaubten, erst später—im Frühjahr—hieher zu kommen. Geht das nicht, so wirst Du mir, ich wiederhole dies, zu jeder Zeit willkommen sein, und was ich für Dich tun kann, soll geschehen. Kommst Du aber später, so laß uns doch eine ordentliche mathematische Korrespondenz führen. Das würde ganz gut gehen, denn ich habe gelernt, z. B. während der Fakultätsverhandlungen bei den Doktorprüfungen u.s.w. Briefe zu schreiben. So, z. B. habe ich vor zwei Jahren mit Borchardt über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen eine Reihe Briefe gewechselt, von denen die meinigen fast alle im Senatssaal geschrieben waren.

Über meine mathematischen Beschäftigungen in den letzten Jahren kann ich Dir heute nichts mitteilen. Meine Gesundheit war im verganghenen Frühjahr sehr angegriffen. Ich hatte eine nicht unbedenkliche Lungenentzündung, zu der sich ein Leberleiden (Gallenfieber) gesellte. In Folge daran mußte ich für den Sommer Urlaub uehmen, habe bis zum August auf dem Lande gelebt und bin dann in die Schweiz gegangen, von wo ich Ende v. M. hierher zurückgekehrt bin. Ich glaube, daß ich völlig wiederhergastellt bin, wenn auch die Vorlesungen — ich lese Funktionentheorie vor 150 Zuhörern — auch noch etwas angreifen.

Und hiermit für diesmal ein herzliches Lebewohl, meine teuere Freundin, ich hoffe, Du wirst mich nicht lange auf Antwort warten lassen.

Dein treu ergebener Weierstraß

55.

Meine teuere Freundin!

Auf Deinen letzten, am Dienstag v. M. mir zugegangenen Brief habe ich Dir sofort geantwortet, und wird meine Antwort unmittelbar nach Deiner Abreise von Moskau dort angekommen sein. Ich habe Dir geschrieben, daß ich Deinen ersten Brief erst erhalten habe, nachdem ich durch den obengenannten erfahren, daß ein solcher an mich abgegangen sei — wie das gekommen, werde ich Dir nur mündlich erklären.

Da Du von der langen Reise ermüdet sein wirst, so werde ich Dich diesen Nachmittag (zwischen 3 1/2—4 Uhr) in Deiner Wohnung aufsuchen, und sende Dir bis dahin meinen herzlichsten Gruß und freundlichstes Willkommen!

Dein treu ergebener
Weierstraß

Berlin. 31.Okt. 1880

56.

Berlin, W. Linkstraße
1 Febr. 1881.

Meine teuerste Freundin!

Zu meiner großen Freude habe ich aus Deiner kurzen Benachrichtigung vom 6-ten v. M. ersehen, daß Du die lange Fahrt von hier nach Moskau trotz des Umwegs über Petersburg und der wenig freundlichen Witterung ohne Nachteil für Deine Gesundheit überstanden hast. Auch ist es mir, wie ich nicht leugnen will, eine gewisse Genugtuung, daß Du einige Zeit gebraucht hast, um Dich in Deinem Daheime wieder einzuleben, so daß Deine treue Freundin, der ich darum nicht grolle, gedroht hat, man werde Dich sobald nicht wieder entlassen. Ich finde darin den Beweis, daß Du doch von Deinem hiesigen Aufenthalt nicht ganz unbefriedigt bist, wenn ich auch, was mich angeht, zu meinem aufrichtigen Bedauern nicht die Zeit gehabt habe, so viel für Dich zu tun, als ich gewünscht hätte.

Da ich bis zum 24. v. M. von Dir Papiere über lineare partielle Differenzialgleichungen nicht zurückerhalten, so muß ich schließen, daß Du in Deiner Arbeit bis dahin noch keinen vollständigen Erfolg gehabt hast, was ich, aufrichtig gestanden, auch gar nicht erwartet habe. Ich bin überzeugt, es werden sich noch manche Schwierigkeiten ergeben, die überwunden werden müssen — aber ich halte ebenso fest daran, daß der Gegenstand der gründlichsten Durchforschung wert ist. Laß Dich also nicht entmutigen, wenn das schwierige Problem den ersten Angriffen hartnäckigen Widerstand entgegensetzt.

Ich habe, seit Du fort bist, mich noch angestrengt mit den linearen Differenzialgleichungen, deren Koeffizienten. reellperiodische Funktionen einer Veränderlichen sind, beschäftigt, und glaube jetzt zur Behandlung derselben den richtigen Weg gefunden zu haben. Doch muß ich mich dabei auf eine besondere Gattung solcher Gleichungen beschränken, welche aber grade diejenige ist, die bei Problemen der analytischen Mechanik allein vorkommt. Das Haupttheorem, welches sich mir dargeboten hat, will ich Dir mitteilen.

«Es sei

$$F(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(t)\, x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, 2n)$$

eine homogene ganze Funktion zweiten Grades, der 2n Veränderlichen x_1, ..., x_{2n}; ihre Koeffizienten sollen reelle Funktionen der Veränderlichen t und aus Gliedern von der Form

$$A \cos(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)\, t + B \sin(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)\, t$$

zusammengesetzt sein, wo a_2, a_2,...beliebige reelle Größen und ν_1, ν_2,... ganze (pos[itive] oder neg[ative]). Zahlen bedeuten. Ferner nehme ich an, es seien die Funktionen $F_{\lambda,\mu}(t)$ so beschaffen, daß bei reellen Werten von t, x_1, ..., x_{2n} die Funktion $F(x_1, \ldots, x_{2n})$ ihr Zeichen nicht ändern kann. Dies vorausgesetzt nehme ich nun zwischen x_1, ..., x_{2n} und t die folgenden Differenzialgleichungen an:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} \qquad \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} = -\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha}$$

$$(\alpha = 1, \ldots, n$$

so haben die allgemeinsten, dieser Differenzialgleichungen genügenden Ausdrücke von x_1, ... x_{2n} die Form:

$$x_\lambda = \sum_\rho \{f_{\lambda,\rho}(t)\cos(m_\rho t) + f'_{\lambda,\rho}(t)\sin(m_\rho t)\} \qquad (\lambda = 1, \ldots, 2n),$$

wo die m_ρ, deren Anzahl nicht größer als n ist, reelle, im allgemeinen aus den a_1, a_2, ... nicht zusammensetzbare Konstanten, die $f_{\lambda,\rho}(t)$ und $f'_{\lambda,\rho}(t)$ aber Funktionen von derselben Beschaffenheit und Zusammensetzungsweise wie die $F_{\lambda,\mu}(t)$ sind».

Streng beweisen kann ich dies Teorem bis jetzt nur für den Fall, daß die Zahl der Größen a_1, a_2, ... sich auf Eins reduziert. Der Weg aber, den ich zur wirklichen Entwicklung der Ausdrücke von x_1, ..., x_{2n} verfolge, ist unabhägig von dieser Voraussetzung, und wenn derselbe sich in dem speziellen Fall bewährt, so wird auch der allge-

meine keine Schwierigkeit machen. Könnte ich jetzt einige Wochen ausschließlich diesen Untersuchungen widmen, so würde ich bald zur Gewißheit darüber kommen, ob die Gedanken, von denen ich mich jetzt leiten lasse, richtig sind oder nicht.

Komme ich mit den linearen Differenzialgleichungen von der angegebenen Form zurecht, so glaube ich, daß auch diejenigen Differenzialgleichungen, die z. B. zur Bestimmung der Planetenbahnen dienen sollen, einer rationalen Behandlungsweise sich werden unterwerfen lassen. Daß alle bis jetzt versuchten Wege zur Integration derselben nicht zum Ziele führen können, davon bin ich jetzt mehr wie je überzeugt.

Ich erwarte mit Ungeduld weitere Nachrichten von Dir, liebe Freundin; meine Schwestern lassen Dich, und auch Fräulein Lermontoff herzlich grüßen und hoffen bald, den französischen versprochenen Brief von Dir zu erhalten.

Dein treu ergebener
Weierstraß.

57. Berlin, W. Linkstrasse 33
d. 6. März 1881.

Meine teuere Freundin!

Du bist vor zwei Monaten mit dem Versprechen abgereist, eine recht lebhafte Korrespondenz mit mir unterhalten zu wollen; bis heute habe ich jedoch nur einen kurzen Brief, in welchem Du mir Deine Ankunft in Moskau anzeigtest, von Dir erhalten. Nach früheren Erfahrungen habe ich immer die Furcht, es möchten nicht alle Briefe, die wir einander schreiben, an ihre Adresse gelangen und will daher nicht länger zögern, ein Lebenszeichen von mir zu geben, daß Dich veranlassen möge, mir recht bald ausführliche und hoffentlich erfreuliche Nachrichten von Dir zukommen zu lassen.

Von mir habe ich wenig zu sagen. Ich bin in diesem Jahre recht fleißig gewesen, aber doch nicht mit dem entsprechenden Erfolg. Deine Anwesenheit hat mich veranlaßt, meine alten Untersuchungen über die Integration der dynamischen Differentialgleichungen wieder aufzunehmen; ich habe auch, wie ich Dir bereits schrieb, einige Fortschritte gemacht, aber immer noch sehe ich Schwierigkeiten vor mir, die mir zuweilen unüberwindlich vorkommen. Ich habe diesen Winter im Seminar mich ausführlich über die bisherigen Methoden zur Bestimmung der Planetenbevegungen, unter den in unserem Planetensystem stattfindenden Umständen ausgesprochen, und bin mehr und mehr zu der Überzeugung gekommen, daß zur wahren Lösung der Probleme, um die es sich dabei handelt, ganz andere Wege als die bisher betretenen eingeschlagen werden müssen — aber

ich sehe diese neuen Wege immer noch nur in nebelhafter Form vor mir. Hätte ich jemanden hier, mit dem ich mich täglich über alles das, was ich versuche auszusprechen könnte, so würde mir vielleicht vieles klarer werden.
Für die bevorstehenden Osternferien — ich schließe am 15-ten d. M., habe ich eine andere Arbeit vor. Ich bin von vielen Seiten, und namentlich auch von Frankreich aus, auf das dringendste aufgefordert worden, eine neue Auflage meiner Abhandlung über die eindeutigen Funktionen zu veranstalten. Diesem Verlangen kann ich mich um so weniger entziehen, als ich auch meinen Zuhörern etwas in die Hände geben muß, das sie dafür entschädigt, daß ich meine Vorlesungen jetzt auf eine geringere Stundenzahl zu reduzieren genötigt bin.

Meine Untersuchungen über die eindeutigen Funktionen sind mir auch aus dem Grunde wert geworden, weil sie jüngeren Mathematikern zu Arbeiten auf demselben Felde den Weg gewiesen haben, was ja der schönste Erforlg ist, den ein Lehrer und Schriftsteller sich wünschen kann. Außer Mittag-Leffler hat der Schwiegersohn Hermites, E. Picard, und der Mitherausgeber des Darboux-schen Bulletins J. Tannery im Anschluß an meine Arbeiten ganz interessante Untersuchungen gemacht. Der letztere teilt mir z. B. mit, daß sich die von mir in meiner letzten Abhandlung mit $\psi(x)$ bezeichnete Reihe durch andere ersetzen lassen, welche dieselben Eigenschaften haben, aber viel elementarerer Natur wie die meinige sind.

Setzt man zum B.

$$\Psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \cdots$$

so ist die Summe der n-ten ersten Glieder dieser Reihe

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$$

woraus sich, wenn man $n = \infty$ setzt, ergibt, daß

$$\Psi(x) = 1, \quad \text{wenn} \quad |x| < 1$$
$$\Psi(x) = -1, \quad \text{wenn} \quad |x| > 1$$

Daraus läßt sich alles ableiten, was ich mit Hilfe meiner Funktion $\psi(x)$ beweise.

Daß ich sehr begierig bin, zu erfahren, wie weit Du mit Deiner Arbeit — ich meine die λ-Arbeit — vorangeschritten bist, brauche ich nicht ausdrücklich zu sagen.

Meine Schwestern grüßen freundlichst, lassen Dich aber auch an Dein Versprechen mahnen. Deine schönen Weihnachtsblumen haben

sich den ganzen Januar über erhalten, sind aber auch gut gepflegt worden.

Und nun, lebe wohl, meine liebe teuere Freundin, und erfreue bald mit einer Hoffnung.

Deinen treu ergebenen
Weierstraß

58. Wilhelmshöhe bei Cassel
Donnerstag den 9. Juni 81 (abends)

Meine liebe Freundin!

Um Dir Zeit zu lassen, den lange schon geplanten Brief an einen Deiner aufrichtigsten Verehrer, den glücklichen Bräutigam in Helsingfors[1], in gebührender Ausführlichkeit fertig zu stellen, schreibe ich Dir erst kurz vor meiner Abreise von hier, auf diese Weise allerdings darauf verzichtend, eine Antwort von Deiner lieben Hand zu erhalten.

In Göttingen habe ich mich nur 24 Stunden aufgehalten, die mit Ausnahme der kurzbemessenen für die Nachtruhe ausschließlich der Mathematik gewidmet waren.

Schwarz hatte unendlich viel zu fragen und ich habe mir durch den kurzen Aufenthalt in G. wenigstens ein Dutzend Briefe erspart. Natürlich mußte ich auch auf der Universität seine Modell-Sammlung mir ansehen, die aber in der Tat auch ansehenswert ist. Besonders ein nach Angabe von Beltrami konstruiertes Modell einer Fläche vom konstanten vegativen Krümmungsmaß hat mich sehr interessiert. Auch die beiden Herrn Schering und die liebenswürdige Frau des älteren, so wie die Herrn Hettner und Stern habe ich gesehen und gesprochen. Den letzteren fand ich mit meiner Abhandlung über den Mittag — Leffler'schen Satz beschäftigt, was dem 75-jährigen Herrn hoch anzurechnen ist. Bei dieser Gelegenheit erfuhr ich ein Kuriosum. Herr Betti soll behaupten, der Satz, daß eine transzendente ganze Funktion mit *vorgeschriebenen* Nullstellen, von denen in einem endlichen Bereiche auch nur eine endliche Anzahl enthalten ist, gehöhre eigentlich ihm; denn er hätte, um ihn zu beweisen, nur auf den Gedanken zu kommen gebraucht, die ganze Funktion, welche nur der jeden Linearfaktor beizugebender Exponentialgröße vorkommt, nicht für alle Faktoren von demselben Grade anzunehmen. Wie traurig, daß die richtigen Gedanken sich nicht immer zur richtigen Zeit einstellen.

Alle Mathematiker in G., die ich gesprochen, haben sich angelegentlich nach Dir erkundigt, und lassen sich Dir, wie man in Deutschland sagt „bekannter und unbekannter Weise bestens empfehlen".

Auch hier traf ich einen mathematischen Kollegen, nämlich den Mathematikus des Gymnasiums, dessen Zögling ich gewesen.

[1] Mittag-Leffler.

Da habe ich denn erfahren, welch ein eitel[iches] und vergänglich[es] Ding der Ruhm doch ist; denke Dir, von der 27 Lehrern der Anstalt, deren Stolz ich einst war, weil ich in $5^1/_2$ Jahr den achtjährigen gesetzlichen Kursus absolviert hatte, weiß jetzt, nach 45 Jahren, niemand mehr, daß der Prof. ord. W. von der Hauptlandes — Universität und Mitglied von mehr als einem Dutzend Akademien, anderer hohen Würden nicht zu gedenken, in der guten Stadt Paderburn den Grund zu seiner Gelehrtheit gelegt und als Primus omniam die Schule verslassen hat. Nun, ich tröste mich, der Herr Doktor hat mir versprochen, es soll jetzt alles gehörig in die Chronik der Anstalt verzeichenet werden.

Wie es sich mit Wilhelmshöne erhält, werden Dir meine Schwestern sagen, denen Du mitteilen wollest, daß ich heute an Dich geschrieben. Der Park ist einer der prächtigsten, den ich kenne: in der Nähe des im Zupfstyle erbauten Schlosses etwas im Geschmacke des Jahrhunderts, dann aber in den herrlichsten Naturpark übergehend.

In einigen Tagen bin ich wieder daheim; bis dahein ein herzliches Lebewohl und auch einen freundlichen Gruß an Fuffi

K.W.

59.

Berlin, W. Linkstr. 33.
den 11. April 1882.

Meine teuere Freundin!

Es ist jetzt mehr als ein Vierteljahr verflossen, seit Du Berlin verlassen, und ich habe nicht ein einziges Mal an Dich geschrieben, Du würdest also vollkommen berechtigt sein, Dich über mich zu beschweren, wenn Du nicht selbst oft genug die Erfahrung gemacht hättest, daß man einer Pflicht sich klar bewußt sein und gleichwohl die Erfüllung derselben von Tag zu Tag verschieben kann, ohne daß doch Nachlässigkeit oder Trägheit der eigentliche Grund davon ist. Auch Dein erster Brief aus Paris hat lange auf sich warten lassen, und ich gestehe Dir offen, es wäre mir sehr schwer geworden, ihn sofort zu beantworten. Aus jeder Zeile desselben, und mehr noch aus dem, was zwischen den Zeilen zu lesen war, ging klar genug hervor, daß aus Umständen, über die Du Dich nicht näher aussprechen konntest und wolltest, dir Beunruhigungen und Sorgen erwachsen seien, welche Deinen sehnlichen Wunsch, Dich ungestört Deinen Arbeiten widmen zu können, auf längere Zeit zu vereiteln drohte; Du bist nicht gewöhnt, in solchen Fällen Dich auch Deinen Freunden gegenüber rückhaltlos auszusprechen, und meinst, jeder Mensch muß mit dem, was er zu tragen hat, selbst fertig zu werden suchen — ich sympathisiere darin mit Dir vollständig und konnte

mich darum nicht entschließen, Dich um Aufklärungen und weitere Mitteilungen zu bitten und doch hätte ich, als Dein aufrichtiger Freund und «Beichtvater» kaum schweigend über manches, was Du andeutungsweise berührtest oder ich mir kombinierte, hinweggehen können. Das ist der wahre Grund, warum ich mich so schwer habe entschließen können, an Dich zu schrieben.

Einer Nachlässigkeit wegen habe ich aber in der Tat sehr um Entschuldigung zu bitten. Vor einiger Zeit brachte mir der Briefbube einen Brief von Mittag-Leffler an Dich, den er nicht unterbringen konnte; ich nahm ihn an mir, legte ihn aber, da ich nicht wußte, ob Du Deine Wohnung in Paris beibehalten habest, vorläufig beiseite, und habe so auf denselben vergessen. Das ist mir höchst unangenehm, und ich kann nichts dagegen sagen, wenn Du mich deswegen rechtschaffen ausschiltst. Daß Du, liebste Freundin, seit Deiner Abreise von hier, mit Deiner Arbeit wesentlich weiter gekommen seist, darf ich unter den gegebenen Umständen nicht erwarten, so sehr ich es wünschte. Gleichwohl würde es mir willkommen sein, wenn Du mir mitteiltest, welche Versuche Du etwa noch angestellt habest. Ich habe meine Vorlesung über hyperelliptische Funktionen nach einem neuen Plan zu einem befriedigenden Abschluß gebracht, auch die Freude gehabt, daß mehrere meiner Zuhörer recht darauf eingegangen sind, die große Mehrzahl auch bis zum Schluß wenigstens getreulich ausgehalten hat. Die Herausgabe von Steiner hat mir noch recht viel zu tun gegeben, am schwierigsten war es, die Fülle von Notizen, die mir von den Revisoren der einzelnen Abhandlungen übergeben waren, auf ihre Richtigkeit zu prüfen, und auf ein paar Bogen zusammenzudrängen. Ich bin aber seit einigen Wochen fertig damit; der zweite (und letzte), 47 Bogen starke Band ist anfangs d. M. ausgegeben worden. Ich freue mich sehr, der eingegangenen Verpflichtung mich entledigt zu haben, und zwar, wie ich glaube, zur Zufriedenheit des betr [effenden] Publikums. Die Herausgabe von Jacobi macht mir weniger Mühe, ist mir auch interessanter.

Augenblicklich bin ich damit beschäftigt, in einer nicht gerade umfangreichen Abhandlung einen Überblick darüber zu geben, wie sich die Theorie der allgemeinen Abel'schen Transzendenten gestaltet, wenn man sie auf derselben Grundlage aufbaut wie in der genannten Vorlesung. Ich assoziiere, wenn F eine beliebige n deutige Funktion von x ist, derselben alle Funktionen, die aus y und beliebig vielen eindeutigen Funktionen von x rational zusammengesetzt sind, also in der Form

$$f_0(x) + f_1(x)\, y + \ldots + f_{n-1}(x)\, y^{n-1}$$

dargestellt werden können, in der Art, daß $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{n-1}(x)$ eindeutige Funktionen sind, von denen ich jedoch annehme: daß

jede von ihnen nur eine endliche Anzahl wesentlicher singulärer Stellen besitze. Unter dieser Beschränkung läßt sich die Theorie dieser mehrdeutigen Transzendenten so weit entwickeln, wie ich es für die eindeutigen Funktionen ausgeführt habe; es läßt sich der Begriff der Primfunktionen, und namentlich derer, welche dieselbe Rolle spielen, wie die algebraischen Einheiten in der Zahlentheorie, ganz allgemein feststellen und den Nachweis führen, daß jede Funktion der in Rede stehenden Gattung sich aus Primfunktionen — im allgemeinen aus einer unendlichen Anzahl solcher — zusammensetzten läßt u.s.w. Wenn ferner ein Differenzial

$$F(x, y)\, dx$$

wo F eine der betrachteten Funktionen bedeutet, zu integrieren ist, so kann dies stets geschehen in der Form

$$\int F(x, y)\, dx = F_0(x, y) + \sum_{\nu} C_\nu \log F_\nu(x, y),$$

wo die F_ν wieder Funktionen der Gattung bedeuten, und der Ausdruck auf der Rechten, aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern besteht, je nachdem die Zahl der ∞-Stelle der Funktion $F(x, y)$ eine endliche ist oder nicht. Für den Fall, daß man für $F(x, y)$ eine rationale Funktion von x, y nimmt, kommt man auf die Abelschen Integrale, deren wesentliche Eigenschaften sich nunmehr aus der vorangegangenen allgemeinen Theorie in einfachster Weise ergeben. Ebenso gewinnt man einen leichten Zugang zu den θ-Funktionen. Wie gesagt, werde ich in meiner Abhandlung nur die Grundlage der Theorie geben, ohne in das Detail der Rechnungen einzugehen, das geht ganz gut, und ich denke mir, es wird gerade diese Form der Darstellung manchem Leser willkommen sein. Die Abhandlung wird schon in einigen Wochen erscheinen.

Die Deinem Briefe — in Wechselform beigelegten 100 MK. habe ich verwandt

1) zur Honorierung von Klebsch, 40 *MK*

2) für die Abschrift meiner Vorlesung über Variationsrechnung, 42 *MK*.

3) den Rest bestimmt, um die Frau *Heyden* schadlos zu halten für irgend etwas Verbrauchtes; ich weiß nicht mehr, was es ist.

Das genannte, sehr gut geschriebene Vorlesungsheft, liegt für Dich bereit. Zu meinen großen Verdrusse aber habe ich dabei einmal wieder die Erfahrung gemacht, daß man einem Menschen schaden kann, wenn man vermeint, ihm eine Wohltat zu erweisen. Ich hatte dem Abschreiber, weil die Arbeit so sehr gut ausgefallen war, 10 *MK*. mehr bewilligt, als er sonst zu bekommen pflegte. Dafür

hat er sich dann eine ganze Woche hindurch in Branntwein berauscht und ist dem Delirium tremens verfallen, so daß ich ihm das Heft über Funktionentheorie, das er ebenfalls abschreiben sollte, wieder habe abnehmen lassen müssen.

Von Kronecker ist kürzlich eine große Arbeit: «Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen» erschienen. Sie enthält die Resultate langjähriger Forschungen in conzisester Form, wird aber für Leser, die K[ronecker]'s Vorlesungen nicht gehört haben, recht schwer zu verstehen sein, so daß ich fürchte, sie wird vorderhand mehr bewundert als studiert werden.

Hast Du Notiz genommen von den neusten Arbeiten Poincarés? Der ist jedenfalls ein bedeutendes mathematisches Talent, so wie überhaupt jetzt in Frankreich wieder eine junge Generation von Mathematikern mit dem besten Erfolg bemüht ist, auch auf dem Gebiete der Analysis, deren einziger Vertreter, nachdem Liouville sich von ihr abgewandt hatte, lange Zeit nur Hermite war, Eroberungen zu machen.

Die von Poincaré im Anschluß an Arbeiten von Fuchs, Schwarz und Klein begonnenen Untersuchungen werden jedenfalls zu neuen analytischen Transzendenten führen, wenn er auch vielleicht jetzt noch nicht ganz auf dem richtigen Wege ist es ist nur zu beklagen, daß den jungen französischen Forschern die Akademie ein zu verlockendes Ziel ist,— jede Woche einen Artikel in die Comptes Rendus zu bringen, der wirklich Wert hat, das ist doch unmöglich. Auch der talentvolle Picard zersplittert sich auf diese Weise und Hermite begünstigt allzusehr dies unruhige Jagen nach äußerem Erfolg.

Hiermit, teuerste Freundin, schließe ich meine lange Epistel und brauche Dir wohl nicht die Versicherung zu geben, daß ich mich auf das innigste freuen werde, wenn ich recht bald von Dir eine Antwort und hoffentlich erfreuliche Nachrichten erhalte.

In treuer Ergebenheit der Deinige
K. Weierstraß

60. Berlin, 14.6.82.

Meine teuere Freundin!

Was Du mir in dem ersten Teile Deines lange erwarteten letzten Briefes mitteilst, hat mich sehr betrübt, obgleich nicht gerade überrascht. In der Tat habe ich längst geahnt, was der eigentliche Grund Deines langen Verbleibens in Paris und Deiner absoluten Schweigsamkeit mir gegenüber sei. Die wenigen Stunden, in denen ich Gelegenheit hatte, Herrn K [owalewsky] kennen zu lernen, haben hingereicht, um mir die Überzeugung zu geben, daß Euer Verhältnis einen inneren Riß habe, der es ganz zu zerstören drohe. Er hat weder In-

teresse noch Verständnis für Deine Ideen und Bestrebungen und Du vermagst Dich nicht die Unruhe seines Lebens hinein zu finden. Eure Charaktere sind zu verschieden, als daß Du, was zu einer glücklichen Ehe erforderlich wäre, in ihm einen Halt, eine Stütze für Dich zu gewinnen hoffen dürftest und er in Dir die notwendige Ergänzung seines Wesens finden könnte. Wäre dies anders, so würden, glaube ich, selbst Verirrungen seinerseits eine eheliche Versöhnung nicht hindern.

Wenn ich Deinem Plan, in Stockholm als Privatdozentin aufzutreten, während er in Moskau seines Amtes warten sollte, widersprechen zu müssen geglaubt habe, so geschah dies in der Überzeugung, daß ein solches Verhältnis zwischen Eheleuten ein unnatürliches sei, und ich lasse es mir auch nicht ausreden, daß Du gar nicht auf den Gedanken gekommen wärest, wenn Du Dich Deinem Mann *innerlich* verbunden gefühlt und ihn so geliebt hättest, wie nun einmal ein Mann geliebt sein will. Daß er diesem Plan abgeneigt war, habe ich ihm nicht verdenken können, und vielleicht ist er gerade dadurch gegen Deine mathematischen Bestrebungen noch mehr eingenommen worden. Wie die Sachen jetzt liegen, scheint das bisherige Verhältnis zwischen Euch beiden in der Tat unhaltbar geworden zu sein; möchte es sich doch nur so gestalten, daß Du die für Deine Existenz notwendige Freiheit von Unruhe und Sorgen gewinnest. Aus Deiner jetzigen Einsamkeit mußt Du sobald als möglich heraus, auch die kleine Sonia bei Dir haben — die Sorge um diese und die Beobachtung ihrer Entwicklung wird Dich in wohltätiger Weise beschäftigen und erfreuen.

Ich habe im Vorstehenden meine Ansicht unumwunden, ohne Redensarten ausgesprochen.

Ich danke Dir für das Vertrauen, das Du mir bewiesen, kenne Dich aber zu gut, als daß ich versuchen sollte, Dir irgend einen Rat aufzudrängen, und weiß, daß Du stark genug bist, mit Deinem Schicksal allein fertig zu werden. Wenn Du aber glaubst, daß in irgend einer Weise mein Rat, mein Beistand Dir nützlich werden könne, nun so weißt Du ja, daß Du Dich ohne Scheu an mich wenden kannst.

Daß Du die Bekanntschaft von Hermite gemacht hast, wußte ich bereits von diesem selbst. Er hat mir sehr entzückt darüber geschrieben und alle die Fragen aufgezählt, über die Ihr bei Euerer ersten Unterredung gesprochen habt. Mit den anderen Mathematikern wirst Du nun wohl auch in Verkehr treten müssen, die jüngeren, Appell, Picard, Poincaré werden Dich am meisten interessieren. Poincaré ist nach meiner Ansicht von allen der zur mathematischen Spekulation Berufenste, möge er nur sein ungewöhnliches Talent nicht zu sehr zersplittern und seine Untersuchungen reifen lassen. Die Theoreme über algebraische Gleichungen zwischen zwei Verän-

derlichen und über die linearen Differenzialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten, welche er in den Comptes Rendus gegeben hat, sind wahrhaft imponierend; sie eröffnen der Analysis neue Wege, welche zu unerwarteten Resultaten führen werden.

Gleichwohl bin ich der Überzeugung, daß die neue Behandlungsweise der in Rede stehenden Gleichungen, in ihren Grundgedanken richtig, doch noch von verallgemeinerten höheren Gesichtspunkten aus wird unternommen werden müssen. Gestatte mir, dies etwas genauer auszuführen. Wenn eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben ist, so sagt Poincaré, daß alle diese Gleichung befriedigende Wertsysteme x, y sich darstellen lassen in der Form

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eindeutige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t bezeichnen, deren Bereich ein beschränkter oder unbeschränkter sein kann. Diese Funktionen haben nun die Eigenschaft, daß sie unverändert bleiben, wenn für t gewisse lineare Funktionen derselben Größe gesetzt werden. Die Koeffizienten der letzteren aus den gegebenen Werten der Koeffizienten der Gl[eichung] $f(x, y) = 0$ zu bestimmen, ist jedenfalls eine äußerst schwierige Aufgabe, die im allgemeinen auf transzendente Gleichungen kompliziertester Natur führen wird. Wenn die Koeffizienten von $f(x, y)$ rationale oder algebraische Funktionen von unbestimmten Größen a_n sind, so wird offenbar die vollständige Bestimmung von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ anders und anders sich gestalten, je nachdem jene willkürlichen Konstanten so oder so in der Gleichung vorkommen. Verfolgt man diesen Gedanken, so wird man notwendig zu folgender Aufgabe gelangen:

Es sei gegeben eine algebraische Gleichung zwischen $(n + 1)$ Veränderlichen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit rationalen Zahlkoeffizienten, man soll versuchen, alle diese Gleichungen befriedigendem Wertsystem $(x, x_1, \ldots, x_n)$ in der Form $x = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$, $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n)$, $\ldots$ $\ldots, x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)$ darzustellen, daß φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eindeutige Funktionen der unabhägigen Veränderlichn $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sind. (Das kann z. B. ausgeführt werden, wenn die Gl[eichung] $y^2 = (1 - x^2) \cdot (1 - k^2x^2)$ gegeben ist, indem man dann x, y, k durch die Funktion $\vartheta_\lambda(u, \tau)$ auszudrücken imstande ist). Bei dieser Untersuchung wird man bestrebt sein müssen, unter den algebraischen Gleichungen diejenigen aufzufinden, welche man Muttergleichungen nennen kann, von denen jede einen besonderen Affekt besitzt, und auf die alle übrigen zurückgeführt werden können. Zunächst aber wird es die Aufgabe sein, Funktionen mehrerer Veränderlichen zu bestimmen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie die von Poincaré „fonctions Fuchsiennes“ genannten, von denen die Quoti-

enten der Funktionen

$$\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_n \mid \tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{nn})$$

betrachtet als Funktionen der ϑ und τ angesehen ein Beispiel geben.

Das sind sehr weitgehende Perspektiven, aber man muß sich klar machen, welches die Endziele der von Poincaré so glänzend begonnenen Untersuchungen notwendig sein müssen.

In Betreff der P[oincaré'scher Untersuchungen über lineare Differenzialgleichungen gilt das Vorstehende selbstverständlich im erhöhtem Maße. Was P[oincarè' darüber bis jetzt veröffentlicht hat, das hat, wie ich wahrgenommen, auf einige Herrn, die sich viel mit linearen D[ifferential] Gl[eichungen] beschäftigt, einigermaßen *verblüffend* gewirkt. Für viele wird es so schwer, sich von dem Gedanken zu trennen, daß man, um eine lineare D. Gl. zu integrieren, notwendig die eine Variable durch die andere ausdrücken müsse. Die Abhandlung P's über die Differenzialgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

kenne ich nicht. Wo steht dieselbe?

Was endlich die von P. angekündigte Integration der Differenzialgleichungen der Mechanik angeht, so kann ich darüber folgendes sagen. Ich habe vor zwei Wintern im Seminar etwas über den Gegenstand vorgetragen und unter andern folgenden Satz bewiesen:

«Wenn beliebig viele materielle Punkte nach dem Newton' schen Gesetze — oder irgend einem andern, bei dem an die Stelle von r^2 eine analyt. Funktion von r tritt, die bei reellen und positiven Werten der letzten Größe nur für $r = 0$ unendlich groß wird — aufeinander wirken, und es sind die Anfangsbedingungen der Bewegung so beschaffen, daß niemals zwei Punkte zusammentreffen und auch keine zwei in's Unendliche sich von einander entfernen; so sind die Koordinaten der sich bewegenden Punkte analytische Funktionen der Zeit t eindeutig, definiert nicht nur für alle reellen Werte dieser Größe, sondern auch für alle Komplexe, deren zweite Koordinate ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt».

Der Satz, von dem nach Appell's Mitteilung P[oincaré] ausgeht, ist also nur richtig, wenn die Bedingungen der Stabililität des Weltsystems erfüllt sind. Die Feststellung dieser Bedingungen ist aber vielleicht der schwierigste Teil der ganzen Untersuchung. Wenn z. B. nur zwei Punkte vorhanden sind und zu irgendeiner Zeit die Bewegung eines jeden gegen den anderen gerichtet ist, so sind die Koordinaten nicht Funktionen der Zeit von der angegebenen Beschaffenheit. Wenn P[oincaré] imstande ist, die Koeffizienten der Rei-

he, in welche sich die Koordinaten unter Voraussetzung der Stabilität des Systems entwickeln lassen, wirklich zu bestimmen, so wäre es immerhin möglich, daß dann die Bedingungen, unter denen die Reihe konvergiert, sich feststellen ließen, diese wären dann aber die Stabilitäts-Bedingungen. Aber auch dann glaube ich nicht, daß jene Reihenform den wahren analytischen Charakter der darstellenden Funktionen ausdrücken werde; dem widerspricht schon der einfache Fall, in welchem zwei Punkte vorhanden sind und die Bewegung eines jeden um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt in einer Ellipse erfolgt.

Aber wir wollen abwarten.

In Betreff der von Hermite und Picard an Dich gerichteten Frage will ich Dir für heute folgendes mitteilen.

Es sei $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ nur $2r$-fach periodische Funktion der r Veränderlichen u von derjenigen Beschaffenheit, die ich im 89-ten Bande des math. Journals in dem an Borchardt gerichteten Briefe ausführlich angegeben habe. Ferner seien

$$\begin{array}{l} P_{1,1}\ P_{2,1} \ldots P_{r,1} \\ P_{1,2}\ P_{2,2} \ldots P_{r,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{1,2r}\ P_{2,2r} \ldots P_{r,2r} \end{array}$$

$2r$ *primitive* Systeme zusammengehöriger Perioden dieser Funktion, sodaß man, wenn

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_r$$

ein beliebiges Periodensystem der Funktion ist, wo

$$P_1 = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{1,\nu}, \ \ldots, \ P_r = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{r,\nu}$$

hat. Man kann dann für $u_1, \ldots, u_r$ andere Veränderliche $v_1, \ldots, v_r$, welche lineare Funktionen jener sind, dargestalt einführen, daß für die aus $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ so hervorgehende Funktion von $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r$ die den vorstehenden entsprechenden Perioden-Systeme die nachstehenden sich ergeben:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \ldots & \tau_{1,r} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \ldots & \tau_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{r,1} & \tau_{r,2} & \ldots & \tau_{r,r} \end{array}$$

Wenn nun die Funktion φ eine diejenige ist, zu denen das Jacobische Umkehrungsproblem führt, so besteht zwischen den Größen τ die Gleichung

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha} \begin{pmatrix} \alpha = 1 \ldots r \\ \beta = 1 \ldots r \end{pmatrix},$$

und zugleich ist die quadratische Form

$$i \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta$$

so beschaffen, daß bei reellen Werten von $n_1, \ldots, n_r$ wenn diese nicht sämtlich gleich Null sind, der reelle Bestandteil der Form stets einen *negativen* Wert hat.

Nach einer Bemerkung von Hermite (Note sur le calcul différentiel et le calcul intégral, p. 26) soll *Riemann* bewiesen haben, daß für *jede* $2r$-fach periodische Funktion $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ unter den Größen $\tau_{\alpha,\beta}$ die angegebenen Relationen stattfinden.
In Riemanns Werken findet sich darüber nichts, was darüber in der Theorie der Abel'schen Funktionen steht, bezieht sich nur auf die oben angegebenen periodischen Funktionen, bei denen die $\tau_{\alpha,\beta}$ nur vom $(3r - 3)$ willkürlich anzunehmenden Größen abhängen. In der Tat aber gilt der Satz auch nicht für die allgemeinen $2r$-fach periodischen Funktionen in der vorstehenden Fassung; es bestehen unter den $\tau_{\alpha,\beta}$ allerdings auch in dem allgemeinen Falle $\frac{1}{2} r (r - 1)$ Relationen, diese aber sind durch homogene lineare Gleichungen unter den $\tau_{\alpha,\beta}$ mit ganzzahligen Koeffizienten ausgedrückt.

Indessen kann man stets $2r$ *Voneinander unabhängige*, wenn auch nicht primitive Systeme zusammengehöriger Perioden aufstellen, für welche unter den $\tau_{\alpha,\beta}$ die angegebenen einfachen Relationen $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$ gelten und die aufgestellte q[uadratische] Form die angeführte Eigenschaft besitzt. Mit Hilfe eines Satzes, den ich in dem genannten Briefe ausgesprochen, kann man schließlich folgendes beweisen:

«Jede $2r$-fach periodische Funktion von r Variabeln läßt sich rational ausdrücken durch andere $2r$-fachen periodische Funktionen derselben Veränderlichen, die so beschaffen sind, daß sie $2r$ primitive Periodensysteme besitzen, für welche die daraus gebildeten Größen $\tau_{\alpha,\beta}$ die oben angegebenen Eigenschaften haben».

Oder auch: ist $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ eine beliebige $2r$ fache periodische Funktion der Veränderlichen $u_1, \ldots, u_r$ von der vorausgesetzten Beschaffenheit, so läßt sich stets ein konstantes System

$$\tau_{1,1}, \ldots, \tau_{1,r}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\tau_{r,1}, \ldots, \tau_{r,r}$$

so bestimmen, daß die Gleichungen, $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$ bestehen, ferner die obige q[uadrátische]. Form die angegebene Eigenschaft besitzt, und $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ sich rational durch eine gewisse Anzahl von Funktionen

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_r/\tau_{1,1}, \ldots, \tau_{r,r})$$

ausdrücken läßt, wenn in dieser für $v_1, \ldots, v_r$ bestimmte lineare Funktionen der Größen u setzt.

Über diesen Gegenstand habe ich eine kleine Abhandlung fertig, die einer meiner Zuhöhrer, Herr Molk, ein Franzose ins Französische übersetzen wird.

Für Deine eigenen Arbeiten, teuere Freundin, wünsche ich von Herzen, daß Du Dich ihnen bald mit voller Hingabe mögest widmen können.

Schließlich muß ich Dir doch noch eine sehr interessante und wichtige mathematische Neuigkeit mitteilen. Prof. Lindemann in Freiburg hat soeben bewiesen, daß π *eine transzendente Zahl ist*, und zwar, was *Hermite* sehr interessieren wird, durch eine sehr ingeniöse Verallgemeinerung des Hauptsatzes, wodurch, dieser gezeigt hat, daß eine transendente Zahl ist. Ein einfaches Corellar zu dem verallgemeinerten Satze ist folgendes: Sind zwei reelle oder komplexe Gräßen a, b durch die Gl.

$$b = e^a$$

miteinander verbunden, so können sie niemals beide algebraische Zahlen sein, ausgenommen in dem Falle, daß $a = 0$, $b = 1$.

Nimmt man $a = 1$ so wird $b = e$ nimmt man $a = 2\pi i$, so wird $b = 1$ es folgt also aus demselben Satze, daß weder n, noch π Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind, sein kann.

Eine Arbeit von Lindemann über diesen Gegenstand wird nächstens erscheinen.

Meine Schwestern senden Dir ihre herzlichsten Grüße. Ich hoffe, mich läßt Du nicht allzulange auf Nachrichten von Dir warten — mögen sie möglichst gute sein.

In treuer Ergebenheit
Dein alter Freund Weierstraß.

61. Berlin, 15. Juli 1882.

Meine teuere Freundin!

Indem ich Deinen lieben Brief von 1. d. M. beantworte, will ich zunächst bemerken, daß ich in den ersten Tagen des Augusts Berlin auf 5—6 Wochen verlassen werde, doch weiß ich in diesem Augenblick noch nicht bestimmt, welches mein Ziel sein wird. Ich leide seit einigen Monaten an einem Schmerz in Fuß, der aber nur beim Gehen eintritt, jedoch mich sehr belästigt, weil ich mir nicht mehr als 20—25 Minuten Bewegung machen kann. Es wird wohl nötig sein, daß ich dagegen etwas Ernstliches unternehme, also z. B. nach Gastein in Tirol, Ragaz in der Schweiz oder irgend einem anderen Ort mit warmen Bädern mich begebe. Es ist mir übrigens ziemlich gleich wohin, der Arzt möge bestimmen. Gehe ich nach einem der genannten Orte, so hat es keinen Zweck, meine Schwestern mitzunehmen, ich würde es vorziehen, etwas später — denn eine solche Kur dauert nur 3 Wochen — mit ihnen etwa in Baden — Baden, Berchtesgade, überhaupt an einem hübschen Orte zusammenzutreffen. Was sind denn Deine nächsten Pläne? Ich würde Dir sehr dankbar sein, wenn Du mir umgehend darüber etwas mitzuteilen die Güte hättest.

Wie Frau *Kronecker*, die mit ihrer Tochter jetzt in Ponteresina in der Shweiz ist, an ihren Mann geschrieben hat, hat in dem nahe dabei gelegenen St. Moritz eine Frau Deines Namens für sich und ihr Töchterchen Quartier bestellt. Das bist Du doch nicht? Bei Deiner Abneigung, Dich in Berge einschließen zu lassen, sollte mich das wundern.

In diesen Tagen erwarte ich Mittag-Leffler mit seiner jungen Frau hier; wenigstens hat er mir seinen Besuch versprochen.

Möchtest Du wohl die Güte haben, mir anzugeben, wo die beiden von Dir erwähnten Arbeiten Poincaré's stehen, ich meine die über die Differenzialgleichungen der Mechanik, und die über die Gleichungen $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$ Mir sind sie nicht zu Gesicht gekommen. Die Arbeit von Lindemann über die Zahl π ist sehr merkwürdig aus verschiedenen Gründen; die Resultate sind richtig, waren aber anfangs auf einem *falsch* verstandenen Satz gegründet, und sind auch jetzt von Lindemann nicht streng bewiesen.

Ich bin vermittelst einiger Satze, die in den Kreis der von Hermite in seiner schönen Abh.[andlung] über die exponentialle Funktion entwickelt gehören, aber lange nicht so viel Formel. Apparat erfordern, zu einem ganz strengen und nicht schwierigen Beweis des allgemeinen Lindemannschen Theorems gekommen, nämlich des folgenden:

«Sind z_0, z_1, ..., z_n *von einander verschidene*, N_0, N_1, ..., N_n *beliebige algebraische* Zahlen, so kann die Gleichung

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \ldots + N_n e^{z_n} = 0$$

nur dann bestehen, wenn die N sämtlich gleich Null sind».

Hiermit sage ich Dir für diesmal ein herzliches Lebewohl, und wiederhole meine Bitte um baldige Antwort. Meine Schwestern grüßen freundlichst.

In treuer Ergebenheit Weierstraß

62. Berlin, 26. Juli 1882.

Meine teuere Freundin!

Ich habe vor einiger Zeit an Dich geschrieben und um baldige Antwort gebeten; da dieselbe bis jetzt ausgeblieben ist, so muß ich vermuten, daß mein Brief Dich nicht mehr in Paris getroffen hat. Gleichwohl schreibe ich Dir noch einmal, weil ich gar zu gern, bevor ich abreise, Nachricht von Dir erhalten möchte, und Du doch in jedem Falle wohl Deine Adresse in dem alten Logis hinterlassen haben wirst. Ich weiß nicht, ob ich Dir schon mitteilte, daß ich durch Schmerzen in Fuß sehr am Gehen verhindert werde infolge von Adernerschwellungen; ich soll nun warme Bäder nehmen, etwa in Gastein, Bodenweiler oder Rogaz. Ich werde das jedenfalls tun, obgleich ich in der Wahl des Ortes noch schwanke. Meine Schwestern werden mich, da die genannten Bäder an sich wenig Anziehendes haben, nicht sofort begleiten, ich gedenke aber nach einigen Wochen mit ihnen an einem angenehmen Orte, etwa in Baden — Baden zusammenzutreffen. Am K. Dienstag, I. August, schliesse ich meine Vorlesung und werde mich dann alsbald auf den Weg machen. Diesen erhälst Du, falls Du noch in Paris sein solltest. Donnerstag Vormittag; ich bitte Dich dringend, ihn sofort beantworten zu wollen, wenn Du mir auch weiter nichts schreiben kannst, als daß Du gesund seiest, und was Du in der nächsten Zeit vorhast. Versiegele doch, darauf möchte ich Dich aufmerksam machen, Deine Briefe, die nicht jedermann lesen soll; Dein vorletzter war so schlecht, oder eigentlich gar nicht verschlossen, daß, wer wollte, ihn ohne weiteres öffnen und zumachen konnte. Der Postbote machte mich selbst darauf aufmerksam.

Habe ich Dir geschrieben, daß Schottky eine Professur im Polytechnikum zu Zürich erhalten hat? Ich habe mich sehr darüber gefreut, auch insofern, als ich Kummer gegenüber, der ihn als Lehrer durchaus unbrauchbar erklärte, Recht behalten habe; denn wer vor den Augen des Herrn Kappeler, der Schweizraten Schulrats-Präsidenten, Gnade findet, muß auch didaktisches Talent besitzen. Schottky

hat übrigens in seiner Doktordissertation manches gegeben, was in den Kreis der Poincare''schen Untersuchungen fällt.

Wenn sich Dir jetzt oder später einer meiner Zuhörer, Molk, vorstellen sollte, so bitte ich, ihn freundlich empfangen zu wollen. Er ist Elsasser von Geburt, seine Eltern haben aber für Frankreich optiert. Er hat zuerst in Paris, und nun zwei Jahre hier studiert. Auch will er K. Winter noch wiederkommen, und dann in Frankreich zunächst eine Stelle als Repetiteur oder drgl. zu erhalten suchen Du wirst von ihm manches erfahren können, was Dich interessiert.

Heute erwarte ich Mittag-Leffler mit seiner jungen Frau; ich freue mich sehr, mich mit dem lieben Menschen einige Stunden unterhalten zu können.

Hiermit sage ich Dir für heute Lebewohl, teuerste Freundin. Meine Schwestern lassen Dich herzlich grüßen und verlangen ebenfalls sehr auch Nachrichten von Dir.

Ganz der Deinige
Weierstraß

63. Innsbruck (Tirol) 1882, 3.8.*

Meine teuere Freundin!

Dein letzter Brief enthält wenigstens relativ Erfreuliches; Du hast Deine kleine Sonia wieder bei Dir und das halte ich für sehr gut, und wirst einige Monate ruhig deiner Arbeit oder, was Dir vielleicht ebenso wohltut, Deiner Erholung widmen können. Möge die Zukunft Dir doch recht bald eine vollständige Klärung der, wie es scheint, unheilbar zerrütteten Verhältnisse bringen.

Mittag-Leffler und Frau waren in der vorig. Woche von Mittwoch bis Sonnabend — hier: ich bin viel mit ihnen zusammengewesen. Die junge Frau hat sehr gefallen; auch bewunderte man ihre sehr einfache, und doch äußerst elegante Toilette. M. L. hat eine eigentliche math. Reise gemacht — Straßburg, Heidelberg, Göttingen, Leipzig, Halle, Berlin — von Paris ganz abgesehen, interessant ganz gewiß für ihn — ob aber auch für die junge Frau, das möchte ich doch nicht behaupten.

Wahrscheinlich hat sich Dir Herr Molk bereits vorgestellt, oder wird es doch in den nächsten Tagen, ich habe ihm die für Dich besorgte Nachschrift meiner Variations — rechnung mitgegeben. Auch kann er Dir eine von mir in Betreff der Lindemann'schen Arbeit über π u.s.w. gemachte Notiz mitteilen, die vielleicht Interesse für Dich hat.

---

* Auf dem Brief-Umschlage: Madame Sophie de Kowalewsky St. Mandé (Paris), Grande rue 7.

Ich will jetzt die angeschwollenen Venen meines Fußes durch warme Naturbäder in Ordnung zu bringen suchen. Am 15-ten d. M. werden meine Schwestern nach Baden wieder abreisen — nahe bei Freiburg in Baden — ich komme zur Fortsetzung meiner Kur dann auch hin. Vielleicht gehen wir dann in September noch nach Baden — Baden. Verspürst Du gar keine Lust, dort Deine alte Tante einmal zu besuchen und ihr die kleine Sonia vorzustellen?

Ich werde mich in diesen Tagen mit einer kleinen Arbeit für das neue Schwedishe Journal beschäftigen, was ich M. L. versprochen habe; sonst werde ich wohl nur meiner Gesundheit leben. Schreibe doch, liebste Freundin, alsbald an meine Schwestern, wenn Du es noch nicht getan hast; sie sehnen sich nach Nachrichten von Dir. Von Bodenweiler aus wirst Du dann weiteres von uns hören!

Mit herzlichstem Gruße
Dein treu ergebener
Weierstraß.

64. — Carte postale —

⟨Stempel:⟩
Basel — 5 VIII 33—8

An Frau von Kowalevsky

Berlin W.
Schellingstr. 16III

Meinen allerschönsten Dank für das köstliche Obst, das uns in der Nacht und heute eine wahre Erquickung gewesen ist. Hier «im Süden» ist es lange nicht so gut wie im «nordischen Berlin». Das war ein guter Gedanke und auch gut ausgeführt, mögen ihm noch auf anderem Gebiete gleich gute folgen. Alles übrige schreibt E[lise], ich habe zunächst nur Wünsche für eine glückliche Reise und baldige Wiederkehr zu uns auszusprechen.

Herzlichst grüßend K. W.

65.

27. August 1883.
Grande Rive
près Evian les bains (Savoie)

Meine teuere Freundin!

In der Hoffnung, daß Deine so unliebsam unterbrochene Reise Dich doch wohlbehalten an's Ziel geführt, habe, beginne ich sofort mit dem Wichtigsten.

Ich habe bereits am zweiten Tage meines Hierseins (7.d.M.) an Mittag-Leffler einen 5 Bogen langen Brief geschrieben, von denen vier sich mit Dir beschäftigen. Ich habe ihm zunächst über Deine Arbeit

berichtet, nicht so ausführlich, wie es in Deinem Exposè geschehen, aber doch so, daß er sich ein klares Bild von dem Geleisteten bestrebten machen kann. Dann habe ich mich auch darüber geäußert, in welcher Weise Du meiner Ansicht nach Deine Lehrtätigkeit in Stokholm zu beginnen haben werdest, damit nicht durch einen Mißerfolg Deinen Bestrebungen geschadet werde. Gestern Abend nur habe ich Antwort von ihm erhalten und darauf heute schon wieder ihm geschrieben. Er ist mit mir völlig darin einverstanden, daß Du mit einem Privatissimum im eingentlichsten Sinn beginnen müßtest, höchstens zwei Stunden in der Woche im ersten Semester, damit Du Zeit habest, das Vorzubringende gehörig auszuarbeiten. Zuhörer werde er Dir besorgen. Er meint, Du müßest schon am 15-ten September da sein, macht sogar den Vorschlag, Du mögest gegen den 10-ten mit ihm und seiner Frau in Helsingfors zusammentreffen. Ich habe ihm indessen bemerkt, so rasch werdest Du schwerlich von Odessa vortkommen können, zumal Du die kleine Sonia doch nicht füglich schon jetzt mit nach Stockholm nehmen könntest; auch verschlage es meiner Meinung nach wenig, ob Du das in Aussicht genommene Privatissimum einige Wochen früher oder später beginnest. Jedenfalls bitte ich Dich, ihm nunmehr sofort schreiben zu wollen, ihm auch anzugeben, ob und in welcher Weise er für Dein Unterkommen sorgen solle u. s.w.

Jetzt zu Deinem, in gutem Humor geschriebenen Briefe vom 15-ten von der mir unbekannten und durch den Zusatz «auf dem Wege nach Odessa» doch nur unvollkommen charakterisierten Station. Zunächst muß ich doch die Mathematik und die Mathematiker gegen Deine ungerechten Anschuldigungen sehr ernstlich in Schutz nehmen. Es ist gewiß gut, wenn man in wichtigen Dingen die Gelehrten um Rat fragt, aber es müssen die richtigen sein. Wenn ich, z. B. wissen will, wie ich vom Brandenburger Tor zum Silesischen fahre, so ist mein Gelehrter der Droschkenkutscher, und wenn Du künftig einmal wieder von Berlin nach Odessa fahren willst, so bemühe Dich in das internationale Reisebureau (U[nter] d[en]Linden 68), dort wirst Du den Gelehrten finden, der Dir nicht nur Auskunft, sondern auch ein direktes Billett gibt und die Sorge ums Gepäck von Dir nimmt. Und wenn ich als Advokat die jungen Mathematiker, gegen die Du so undankbar bist, verteidigen sollte, so würde ich noch folgendens anführen. Vielleicht haben sie, etwa durch Deinen Landsmann belehrt, schon Deine schwächsten Seiten gekannt und haben es absichtlich so eingerichtet, daß Dir unterwegs ein Paar Stunden aufgezwungener Muße wurden. Denn, leg'einmal die Hand auf Dein Herz, das Du glücklicherweise nicht an Kronecker verloren hast, und sage mir aufrichtig; würdest Du schon, ohne Aufenthalt in Odessa angekommen, an uns geschrieben haben?

Gewiß hättest Du schon oft den besten Willen dazu gehabt — aber ... Jedenfalls ist für uns der an sich niedrige Zufall ein glücklicher gewesen.

Was Du über Kronecker schreibst, hat mich nicht überrascht. Wenn er, der Mann mit dem durchdringendsten Verstand, durch etwas gereizt ist, so verliert er die Fähigkeit, richtig zu urteilen; er redet nicht nur Unsinn, sondern handelt auch töricht, ich habe davon unglaubliche Beispiele erlebt. Dabei nimmt mit dem Alter seine Eitelkeit immer mehr zu, ich fürchte, er verfällt noch in Steiner's Wahn — alles Gute in der Mathematik stammt unmittelbar oder mittelbar von ihm ab, alles andere taugt nichts. Daß eine Divergenz in unseren wissenschaftlichen Ansichten besteht, weiß ich seit langer Zeit; nur kommt sie nicht immer so drastisch wie in dem von Dir erlebten Falle zu Tage. Unter den älteren Mathematikern gibt es verschiedene Sorten von Menschen, ein trivialer Satz, der aber doch vieles erklärt.

Mein lieber Freund Kummer zum B[eispiel] hat in der Zeit, wo er seine ganze Kraft an die Auffindung der Beweise für die höhere Reziprozitätsgesetze setzte, und nachher, nachdem er sich daran erschöpft, erst recht nicht mehr um das, was auf mathematischem Gebiete geschehen ist, gekümmert; er verhält sich, wenn nicht Ablehnend, doch gleichgültig dazu. Wenn Du ihm sagst, die Euclidische Geometrie füße auf einem undewiesenen Grundsatze, so gibt er Dir das zu; von dieser Einsicht ausgehend aber nunmehr die Frage so zu stellen; wie gestaltet sich denn die Geometrie ohne diesen Grundsatz? Das ist seiner Natur zuwider; die darauf gerichteten Ermühungen und die daran sich reihenden allgemeinen, von dem empirisch Gegebenen oder Angenommenen sich losmachende Untersuchungen sind ihm müßige Spekulationen oder gar ein Gräuel.

Kronecker ist anders, er macht sich mit allem Neuen rasch bekannt, sein leichtes Auffassungsvermögen befähigt ihn dazu, aber es geschieht nicht in eindringender Weise — er besitzt nicht die Gabe sich mit einer guten fremden Arbeit mit dem gleichen wissenschaftlichen Interesse, wie mit einer eigenen Untersuchung sich zu beschäftigen. Dazu kommt ein Mangel, der sich bei vielen höchst verständigen Menschen, namentlich bei denen semitischen Stammes findet, er besitzt nicht ausreichend Phantasie (Intuition — möchte ich lieber sagen) und es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein. Vergleiche sind lehrreich: Der allumfassende, auf das Höchste, das Ideale gerichtete Blick zeichnet Abel vor Jacobi, Riemann vor allen seinen Zeitgenossen (Eisenstein, Rosenhain), Helmholz vor Kirchhof aus (obwohl bei dem letzten kein Tröpfchen semitischen Blutes vorhanden) in ganz eklatanter Weise aus. Ich bedauere nur, daß Kro-

neker Momente hat, wo er alle Vorsicht fahren läßt; er schadet sich selbst dadurch am meisten. Übrigens habe ich, was meine wissenschaftlichen Bestrebungen angeht — von denen ich reden darf in dem Bewußtsein, daß sie, so wenig sie in dem Entwicklungsgang der Wissenschaft bedeuten mögen, stets nur dem Dienste derselben gewidmet gewesen sind, so habe ich längst darauf verzichtet, bei älteren Kollegen denselben Eingang zu verschaffen; es ist die Jugend, an die ich mich gewandt, und bei der ich auch vielfach Verständnis und begeistertes Eingehen gefunden habe.

Meine Schwester werden in einigen Tagen beide an Dich schreiben; Klara befindet sich heute nicht ganz wohl, das alte Übel kehrt noch immer wieder. Vorläufig senden sie Dir ihre herzlichsten Grüße, auch für die kleine Sonia; ich schließe mich an, mit der Bitte, mich doch recht bald wissen zu lassen, wann und was Du an M. L. geschrieben.

Dein treu ergebener
Weierstraß

N. S. Dein Brief vom 15-ten kam geöffnet hier an; es kam wenig darauf an in diesem Falle, doch rate ich Dir, künftig für sicheren Verschluß zu sorgen. Ich mache, wenn es mir darauf ankommt, zwei Couverts und versiegele das innere.

66. Grande Rive 12. Sept. 83

Meine teuere Freundin!

Deinen lieben Brief vom 1-ten d. M. habe ich erst spät erhalten — die Post hier, d. h. in Evian, auf der es unglaublich primitiv hergeht, scheint der Ansicht zu sein, daß Briefe gleich dem Wein und den Cigarren gehörig angelagert sein müssen, wenn man den rechten Genuß davon haben soll. Es soll zwar täglich ein Briefträger hierher kommen, der zieht es aber vor, auf eine gute Gelegenheit zu warten.

Du kennst doch den Monolog Wallensteins:

Wär's möglich? könnt' ich nicht mehr, wie ich wollte?
... Ich müßte Die Tat vollbringen, weil ich sie *gedacht*?

Daran wurde ich erinnert, als ich Deine Frage las: «Was soll ich nun an Mittag-Leffler schreiben?». In der Tat so geht es uns nicht selten; wir tragen jahrelang einen Entschluß mit uns herum, wir glauben, ihn von allen Seiten erwogen zu haben, gegen jedes Hindernis gerüstet zu sein, da tritt der Moment ein, wo er zur Ausführung kommen soll, und nun stellen sich Zweifel ein, ob wir das Richtige gewollt, ob wir das Maß unserer Kräfte richtig erwogen u.s.w. Doch ich will keine allgemeinen Reflexionen anstellen, sondern

lieber Deine Frage ohne Umschweife beantworten. Schreibe an M.-L. Du wollest kommen, sobald Du Deine Verhältnisse in Rußland für eine längere Abwesenheit geordnet habest, und den Versuch, Dir einen bestimmten Lebensberuf zu begründen, in der von ihm vorgeschlagenen oder durch gebilligte Weise beginnen. Vorläufig soll gar nicht die Rede davon sein, daß Du als Angehörige der Universität lehrest; er möge nur einige fähige junge Leute veranlassen, sich von Dir einen Vortrag über irgendeine mathematische Disziplin, in der Du Dich verhältnismäßig am sichersten fühlst, halten zu lassen; von dem Erfolge würden dann Deine weiteren Entschlüsse abhängen. Ich weiß nicht, worüber M.-L. selbst liest sonst würde ich Dir vorschlagen, die Anfangsgründe der Theorie der eindeutigen Funktionen zu wählen.

Du würdest an meinen Abhandlungen darüber einen Anhaltspunkt haben, und könntest dann die sich daran schließenden Arbeiten von M.-L. selbst, von Hermite, Poincaré u.s.w. in Deinen Vortrag verweben, wodurch Du zugleich eine Grundlage für eine spätere Vorlesung über elliptische Funktionen gewinnen würdest. Allerdings darst Du Dir die Sache nicht leicht vorstellen, weil Dir die eigentliche Schulung abgeht — das ist mir aber auch so gegangen, und selbst die Zuhörer halten dem angehenden Docenten Mängel des Vortrags zu Gute, wenn sie sich überzeugen, daß das ihnen Gebotene wirklichen wissenschaftlichen Wert hat.

Ich wiederhole übrigens, was ich Dir schon früher gesagt habe: An und für sich halte ich Dich für fähiger, unter der Voraussetzung, daß Dein Leben nicht von Widerwärtigkeiten oder aufregenden Ereignissen gestört werde, wissenschaftlich zu arbeiten als zu lehren, Du glaubst aber, daß Du mehr arbeiten werdest, wenn eine bestimmte Verpflichtung Dich bindet und wie sich gegenwärtig die Verhältnisse bei Dir gestaltet haben und ich einsehe, daß in Deinem Vaterlande kein Platz für Dich da ist zu einer gedeihlichen und Dich befriedigenden Wirksamkeit; so ist ein großer Teil meiner Bedenken gegen Deinen Plan nach Stockholm überzusiedeln geschwunden.

Ich vermute, daß Dich dieser Brief noch in Odessa treffen werde oder doch Dir nachgeschickt wird. Ich bitte mir oder meinen Schwestern aber umgehend zu schreiben, unter welcher Adresse wir Nachrichten an Dich gelangen lassen können. Ganz fest steht es bei mir noch nicht, wo ich den Winter über mich aufhalten werde; ich glaube aber nicht, daß ich vor dem Frühjahr nach Berlin zurückkommen werde. Selbstverständlich werde ich aber stets bereit sein, wenn Du etwa für Deine Vorlesung einen Rat, eine Auskunft oder was es sonst sein möge, von mir verlangst, Dir zu Diensten zu sein.

An Schwarz habe ich diesen Sommer einen 8 Bogen starken Brief über die Theorie der allgemeinen komplexen Zahlen geschrieben;

er hat denselben mir hierher zur nochmaligen Durchsicht geschickt, weil er ihn in der Göttingen gelehrten Anzeige möchte drucken lassen. Ich habe, nachdem ich ihn durchgelesen, nichts dagegen zu erwidern. Vielleicht findest Du darin auch Einiges, das Dir neu ist.

Meine Schwestern lassen Dich herzlichst grüßen und Dich um baldige Antwort auf ihre Briefe bitten.

Dein treu ergebener
Weierstraß

67. Grande Rive, 13. Okt. 1883.

Meine teuere Freundin!

Deinen vom 3-ten d. M. datierten Brief habe ich erst heute (nach 10 Tagen) erhalten, und bin deshalb nicht sicher, ob diese meine Antwort Dich noch in Moskau erreichen werde.

Zur Sicherheit schicke ich gleichzeitig eine Postkarte an Deine Petersburger Adresse ab, worin ich Dir den Abgang dieses Briefes anzeige.

Ich kann mir recht guf vorstellen, daß Du augenblicklich von äußeren Geschäften, zum Teil nicht erquicklicher Natur, so vollauf in Anspruch genommen bist, daß Dein Kopf für andere Gedanken nich Raum hat. Aber sobald Du einigermaßen zur Ruhe gekommen sein wirst, mußt Du mir doch noch mancherlei nachträglich berichten, namentlich über Deine Teilnahme an dem naturwissenschaftlichen Kongreß. Meine Schwestern sind auch sehr begierig, von Dir Ausführliches zu hören, und werden sich, wenn Du das nächste Mal an mich schreibst, mit einem bloßen Gruße nicht begrüßen.

Über die Hauptangelegenheit, die Dich beschäftigt, kann ich Dir nichts Neues sagen, bis ich weiß, was Mittag — Leffler Dir geschrieben hat. Auch ich erwarte einen Brief von ihm, worin er mir wahrscheinlich auch über Dich etwas sagen wird.

Wir sind noch immer hier, werden aber kaum über 8 Tage noch bleiben. Ich weiß aber noch nicht, wohin wir uns begeben werden — nicht nach Berlin zurück, das steht fest, im übrigen schwanken wir noch zwischen Montreux und Nizza, bez[üglich] Montreux.

Wir befinden uns wohl, ich bin aber entsetzlich faul und arbeitsunlustig, schlaf wie eine Baby. Vielleicht ist auch das einmal gut.

Kronecker scheint mir noch immer nicht verziehen zu haben, daß ich, ohne zuvor um Rat su fragen, um Urlaub eingekommen bin, wenigstens weiß ich dies aus Äußerungen seiner Frau anderen Damen gegenüber. Ich werde ihm aber heute noch, «rund und nett», wie der Berliner sagt, meine Meinung schreiben.

Ich schäme mich, daß ich Dir diesmal gar nichts Mathematisches geschrieben habe — hoffentlich wird das anders werden, und ich

würde Dir dankbar sein, wenn Du mir selbst die Anregung dazu gäbest — gelesen habe ich in drei Monaten gar nichts.

Ich werde, wenn wir von hier abreisen, eine Karte an Deine Petersburger Adresse schicken mit der Angabe meines künftigen Aufenthaltsortes — sorge nur dafür, daß sie Dir nachgeschickt wird, wenn Du Petersburg früher verlassen sollest, was aber wohl nicht der Fall sein wird.

Meine Schwestern grüßen Dich herzlichst; bitte, empfehle uns auch Fräulein Lermontoff freundlichst — vielleicht erinnert sich auch Fufi an die Tante Clara.

Und hiermit ein herzliches Lebewohl. In treuer Ergebenheit
Weierstraß

68. Clarens, Villas des Pierriers 10
d. 27.Dez. 1883

Meine teuere Freundin!

Zunächst muß ich Dir sagen, daß wir seit Deinem Briefe aus, Odessa, der *vor* der Naturforscher-Versammlung geschrieben war, ohne alle Nachricht von Dir geblieben sind. Namentlich haben meine Schwestern den langen Brief, den Du an sie noch aus «Rußland» (Odessa, Moskau, Petersburg?) abgeschickt hast, *nicht* erhalten. Wohin war er adressiert? Sie werden übrigens heute oder morgen selbst an Dich schreiben.

Nun will ich Deinen Brief aus Stockholm (ohne Datum) in gehöriger Ordnung beantworten und muß demgemäß mit mir beginnen.

Es ist wahr, daß mein Befinden seit Beginn des Herbstes kein befriedigendes gewesen ist. Ich habe viel mit einem bösen Husten zu schaffen und kann durchaus nicht Wind und Kälte vertragen. Dabei hatte sich meiner eine außerordentliche Unlust bemächtigt, eine Erschlaffung, die mich zur Arbeit ebenso unfähig als unaufgelegt machte, so daß ich seit drei Monaten kaum etwas anderes getan habe, als Korrekturen besorgen. Erst einigen Wochen verspüre ich wieder Arbeitstrieb und da sucht mich nun ein neues Ungemach heim, eine Anschwellung der Fuß—Venen, die nicht nur schmerzhaft ist, sondern mich auch zum Liegen verurteilt. Das ist um so verdrießlicher, als das Wetter durchgehends prachtvoll ist und der Genuß der freien Luft mir gewiß wohltätig sein würde. Doch was hilft es, Beschwerden, die das Alter mit sich bringt, muß man eben in Geduld zu ertragen suchen. Doch genug damit von meiner Person.

Du hast also den Rubikon überschritten. Ich hatte kaum gedacht, daß Du noch in diesem Winter Dich dazu entschließen würdest, zumal da Du ohne Zweifel in Petersburg und Moskau mancherlei abzumachen hattest. Das Wichtigste ist nun, daß Du gleich mit Deinen

ersten Vorlesungen — ich will nicht sagen Glück/hast, sondern Dir vielmehr eine sichere Grundlage für Deine künftige Stellung schaffest. Daß vorher von Dir so viel gesprochen ist/und wird, ist nicht gut, aber schwedische Art, von welcher der gute Mittag-Leffler selbst nicht frei ist. Was Du mir über die Kleinstädterei von Stockholm schreibst, ist mir vollkommen verständlich, da ich sie selbst habe hinlänglich kennen lernen; wenn ich Dir nicht Wichtigeres zu schreiben hätte, so könnte ich allerlei lustige Geschichten davon erzählen, zum Dank für die reizende Geschichte von Mittag-Lefflers Kartoffelsäcken, über die wir sehr gelacht haben und deren Ausgang Du mir doch berichten mußt.

Daß Du mit einer Vorlesung über partielle Differenzialgleichungen anfangen willst, billige ich aus dem Grunde, weil Du dafür an Deiner Dissertation einen Anhalt hast. Es wird aber nicht so ganz leicht sein, den Zuhörern den eigentlichen Zweck Deiner Untersuchungen klar zu machen, wenn sie nicht mit den Grundlagen der Funktionentheorie in meinem Sinne gehörig vertraut sind. Es handelt sich darum, zu zeigen, wie durch algebraische partielle Differenzialgleichungen analytische Funktionen (analytische Gebilde) bestimmt werden, wobei also zunächst den Hörenden klar geworden sein muß, daß *diese* Aufgabe als gelöst zu betrachten ist, wenn es gelingt, von jeder zu bestimmenden Funktion ein Element herzustellen. Ich glaube aber, Du wirst damit nicht durchkommen, wenn Du nicht die analogen Untersuchungen über gewöhnliche Differenzialgleichungen vorausschickest, deren Resultate leichter verständlich gemacht werden können und zu vielen interessanten Folgerungen Anlaß geben.

Herr M.-Leffler, denke ich, wird das auch einsehen und Dir nicht abraten, weil er selbst über gewöhnl. D. Gleichungen lesen will. Von Wichtigkeit scheint es mir ferner zu sein, daß Du auch die wirkliche Integration einiger partiellen Differenzialgleichungen eingehest — auf die zahlreichen Arbeiten Euler's, Lagrange's, Monge's, Cauchy's und insbesondere Pfaff's und Jacobi's, welche den Zweck haben, die Integration einer partiellen Differenzialgleichung auf die Integration eines Systems gewöhnlicher D. Gleichungen zuzuführen, wirst Du nur hinweisen können, höchstens sie an der linearen partiellen D. Gl. erläutern. Dagegen würde ich Dir sehr anraten, einige partielle Differenzialgleichungen aus dem Gebiete der math[ematischen] Physik ausführlicher behandeln, obwohl deren Integration mit dem ersten Teil Deiner Vorlesung kaum etwas gemein hat. In Riemann's und Dirichtlet's Vorlesungen findest Du Beispiele. Namentlich ist von großem Interesse die Gl.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Wenn man annimmt daß für $t=0$ $\varphi=f(x)$ gegeben sei, so kann $f(x)$ eine ganz willkürliche, nur integrable Funktion sein, und dann wird $\varphi(t, x)$ für jeden *positiven* Wert von t eine *analytische* Funktion von x, läßt sich aber nicht für *negative* Werte vom t definieren, wobei an die Eigentümlaichkeit dieser D[ifferential] gl[eichungen], welche Du in Deiner Dissertation bemerkt hast, erinnert werden kann. Der enorme Unterschied in dem Charakter der beiden äußerlich so verwandten D [ifferential] gleichungen.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

ist sehr frappant und belehrend.

Willst Du gleichzeitig von dem, was Du meine Methode zur Integration partieller linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nennst, einiges beibringen, so wird das ganz gut gehen, wenn Du Dich auf die einfachen Fälle beschränkst, in denen meine Formeln, wie sie in der Dir bekannten Ausarbeitung stehen, *unmittelbar* anwendbar sind. Auch hat ja die strenge Integration z. B. derjenigen D[ifferential] Gleichungen, welche sich auf die Schwingungen des Äthers in einem isophormen Medium beziehen, unstreitig ein großes Interesse. Von Deinen letzten Untersuchungen etwas hineinzuziehen, würde ich Dir nicht raten; denn dabei würdest Du jetzt auch mit zu großen Darstellungs-Schwierigkeiten zu kämpfen haben.

Was nun die Ausarbeitung dieser Untersuchungen angeht, so wirst Du schon entschuldigen, teuere Freundin, wenn ich heute noch nicht darauf eingehe, weil mir der unbequemen Lage wegen das Schreiben schwerfällt. Ich werde aber sicher darauf zurückkommen, und möchte die Absendung dieses Briefes nicht länger verzögern.

Herrn Mittag-Leffler bitte ich freundlichst von mir zu grüßen, ihm auch zu sagen, wie es mir seit dem Herbste ergangen ist, weswegen ich auch lange nicht an ihm geschrieben habe. Von meinem jungen Kollegen Hettner wird ihm in einigen Tagen meine jüngst gedruckte Abhandlung über die Bestimmung von q als Funktion vom k^2 zugeschickt werden; in mehreren Exemplaren, von denen er eins Dir geben möge.

Im Sommer gedenke ich über Variationsrechnung zu lesen. Interessieren wird es Dich auch, daß zu Ostern Fuchs eine ord. Professur an unserer Universität antreten wird — wir haben dann zwei mobile und zwei invalide Ordinarien. Kronecker, der anfangs, wie Du weißt, über meine «Dissertation» außer sich war, ist seitdem außerordentlich liebenswürdig gegen mich geworden — ebenso der Rat im Ministerium, der zuerst meinem Urlaubsgesuch so entschie-

den entgegen war — es ist immer gut, wenn man sich in seinen Entschlüssen durch das Einreden anderer nicht stören läßt.

Und nun ein herzliches Lebewohl, beste Freundin, mit meinen herzlichsten Wünschen, daß das neue Jahr Dir das beste bringen möge, nicht gerade die Bewunderung der Stockholmer Journalisten, aber die Befriedigung, welche allein ernstes Streben und erfolgreiche Arbeit dem Menschen gewährt. Dazu Glück auf!

Dein treuer Freund K. W.

69. Clarens, 15.1.84.

Meine liebe Freundin!

Deinem Wunsche gern entsprechend beantworte ich Deinen so eben mir zugegangenen Brief vom 10 - ten d. sofort, wenn auch nur kurz, da es mir in Folge eines heftigen Schnupfens ganz wüst im Kopf ist.

Ich glaube, Du kannst das Anerbieten von Hermite annehmen, obschon ich gewünscht hätte, daß Dein Exposé etwas ausführlicher ausgefallen wäre. In der Tat wird es dem Leser nicht leicht werden, sich eine klare Vorstellung von dem, was Du eigenthlich gemacht hast, zu bilden. Indessen, wenn Hermite damit zufrieden ist, so können es die übrigen Leser, der Comptes Rendus auch sein. Und vielleicht ist es auch gut, daß durch die vorläufige Veröffentlichung Deiner Resultate der ausführlicheren und ausgehenden Bearbeitung des Gegenstandes nicht zu sehr vorgegriffen wird.

Für die letztere werde ich in nächster Zeit einige Vorschläge machen.

Übrigens scheint es mir, nachdem ich Hermite's Brief gelesen, doch angemessener zu sein, daß Du selbst an ihn schreibest und ihm für sein freundliches Anerbieten dankest.

Das Staatsgeheimnis, daß Du mir durch Mitteilung des Hermite' schen Briefes verraten hast, wird meinen Schlaf nicht stören. Vielleicht hat die sehr kühle und formelle Art, mit der ich vor $1^1/_2$ Jahren für die gnädige Verleihung des Ritterkreuzes der Ehrenlegione gedankt habe — ihre Wirkung nicht verfehlt— oder besser gesagt, eine Wirkung gehabt, die ich nicht gerade beabsichtigte, aber doch voraussehen konnte. Wenn mir die erhöhte Ehre zu Teil werden soll wegen der Verdienste, die ich mir um meine Schülerin erworben, so lasse ich sie mir gern gefallen, aber dann müßte Freund Kr[onecker] doch hors de ligne bleiben, die Dekoration gönne ich ihm hingleich gern, es ist die erste, die er «um den Hals kriegt», wie der technische Ausdruck heißt; aber daß ihn H[ermite] Deinen illustre maitre nennt, das erregt meine Eifersucht und bedürfte eigentlich einer faktischen Berichtigung.

Alles Übrige, das ich Dir zu sagen hätte, verspare ich auf meinen nächsten Brief. Habe ich Dir schon geschrieben, daß Fuchs zu Ostern an unsere Universität kommt? Ich freue mich sehr darüber.

Dein langer Brief an meine Schwestern, die freundlichst grüßen lassen, ist leider verloren schon in Rußland gegangen. Wir sind seit dem 25-sten Oktober hier und haben von Anfang an unsere Briefe sehr pünktlich erhalten. (Die Villas des Pierriers und die Villas Dubochet sind identische Größen).

Bitte, ersetze uns den Verlust doch einigermaßen, wenigstens durch authentische Mitteilungen über das Endschicksal der Kartoffelsäcke.

Mit freundlichstem Gruß
und bester Empfehlung an Mittag-Leffler
Dein treu ergebener Weierstraß

70. Clarens, 27. Febr. 84.

Meine teuere Freundin!

Gestern habe ich den ersten Brief von meiner lieben Schülerin erhalten, den sie als «Privatdozent» an mich geschrieben, nachdem ich bereits durch meine Schwestern und auch durch eine deutsche Zeitung erfahren hatte, daß sie am 1. Febr. ihr Debüt vor c[irka] 20 Zuhörern begonnen. Nun, ich wünsche Dir aus vollem Herzen und in aufrichtigster Gesinnung Glück dazu, daß Du den ersten, schweren Schritt, um zu einer festen, dich befriedigenden Lebensstellung zu gelangen, nach langem Schwanken wirklich gewagt hast, und bin um so glücklicher darüber, als ich von Mittag-Leffler erfahre und noch mehr aus dem, was Du von Deinen ersten Vorlesungen meinen Schwestern schreibst, die Überzeugung gewonnen habe, daß es Dir gelingen werde, die Schwierigkeiten, mit denen Du notwendig in dem ersten Semester zu kämpfen haben wirst, durch die Energie Deines Willens und Deiner Begeisterung für das zu erstrebende Ziel zu überwinden. Nur das eine befürchte ich, daß die Anstrengung Deiner Gesundheit schaden möge — enthalte Dich wenigstens, zwei Stunden hintereinander zu lesen, auf die Dauer tut das niemandem gut, der sich nicht daran begnügt, sei ein für allemal ausgearbeitetes Heft immer wieder abzuleiern. Und dann beschränke Dich, wenigstens in den ersten Semestern, auf *eine* Vorlesung in jedem Halbjahre, damit Du Dich gehörig darauf vorbereiten kannst und überdies, was ich für das wichtigste halte, noch Zeit zu eigenen Arbeiten behältst.

Mittag-Leffler scheint zu hoffen, daß es schon in der nächsten Zeit möglich sein werde, Dir an der neuen Universität zu Stockholm, der ich wünschen möchte, daß sie bald noch einige Fakultäten be-

kommen möge, damit sie den Namen universitas litterarum mit Recht führe, eine feste Stellung zu verschaffen, wie sie die Zeitungen schon im voraus so freundlich gewesen sind, Dir zu redigieren. Ich weiß nicht, ob M.-L. nicht etwas zu sannguinisch in seinen Hoffnungen ist; bei uns würde es geradezu unmöglich sein, die Anstellung eines Privatdozenten als Professur zu beantragen, bevor er einige Semester gelesen hätte. Inde M.-L. wird ja sein Terrain kennen, und ich habe daher, da er für die von ihm zu stellenden Anträge meine Beihilfe in Anspruch genommen hat, dieselbe gern gewährt, und würde mich unendlich freuen, wenn ich etwas dazu tun könnte, daß Du möglichst bald Dein Ziel erreichest, wobei mein Beweggrund nicht bloß der ist, der *Deinen* Ehrgeiz ganz besonders aufacht, sondern noch mehr der Wunsch, den ich von jeher für Dich gehabt habe, daß Du jetzt endlich in festen Verhältnissen und in ehrenvoller Stellung nicht nur die reelle Freiheit, sondern auch die Pflicht haben mögest, Dich ganz dem Dienste der Wissenschaft zu widmen, was sich mit der Erziehung der kleinen Sonia ganz wohl wird vereinigen lassen. Die Bedenken, die ich früher gegen Deine Pläne hatte und die ich Dir nicht verhehlen dürfte, sind geschwunden, seitdem Du ... ganz auf Dich selbst angewiesen bist.

Ich weiß nicht, ob M. L. Dir mitgeteilt hat, was ich über Dich geschrieben habe. Ich wünsche es nicht. Zwar fürchte ich nicht, Du werdest mir vorwerfen, was mir vor nicht langer Zeit in betreff eines Gutachtens über einen jungen Mathematiker vorgehalten worden ist, ich habe ihn zwar *gelobt*, aber nicht *gerühmt* — aber ich gestehe *Dir*, es hat mich doch etwas geniert, über meine *Freundin* referieren zu müssen wie über einen meiner Schüler, den ich dem Minister zur Anstellung zu empfehlen habe.

Den *mich* betreffenden Passus meines Briefes wird Dir M. L. mitgeteilt haben, so daß damit zugleich Dein letzter Brief teilweise beantwortet ist. Mathematisches schreibe ich Dir diesmal nichts, behalte mir aber vor, das nächstemal über die λ-Arbeit Dir noch einiges zu sagen. Dieselbe muß un bald druckfertig gemacht werden, doch wirst Du vor den nächsten Ferien schwerlich Zeit dazu haben. Die Briefe von meinen Schwestern wirst Du unterdes erhalten haben, sie lassen Dich herzlich grüßen. Wir bleiben wahrscheinlich bis zum 20. April hier. Und hiermit Lebewohl und Glück auf!

Dein treu ergebener
Weierstraß

71. Wilhelmshöhe bei Kassel
Hotel Schowbardt, 13. Sept. 84

Meine teuere Freundin, ich bin ganz zerknirscht unter der Last der Vorwürfe, die Dein gestern mir zugegangener Brief (ohne Ort und Datum) unter der Form von Bitten enthält. Gleichwohl hoffe ich, Du wirst zu einer milderen Beurteilung meines Verhaltens gelangen, wenn Du hörst, daß ich mich schon seit 6 Wochen gar nicht gut befinde und überhaupt mich mit gar Nichts, nicht einmal mit Korrekturen habe beschäftigen können. Ich leide an keinem ausgesprochenen Übel, esse, trinke und schlafe, wie es sein muß, aber es hat sich meiner eine furchtbare Müdigkeit bemächtigt, körperlich und geistig, die mich ganz apathisch macht und mit Widerwillen gegen alles Denken und Schreiben erfüllt. Kurz, ich bin, was die Ärzte *gehirnmüde* nennen. Solange ich Vorlesungen halten mußte, merkte ich weniger davon und schob die Unlust zum Arbeiten, die ich schon längere Zeit verspürte, auf die körperliche Anstrengung, die mir das Lesen verursachte, und erst auf der Reise verspürte ich recht, wie angegriffen und ruhebedürftig ich war und noch bin. Doch dieser Zustand wird vorübergehen, seit einigen Tagen ist schon eine wesentliche Besserung eingetreten — ich habe auch schon an Reimer geschrieben, daß er mir alles während meiner Abwesenheit Gedruckte zur Korrektur zuschicken soll — und ich hoffe zuversichtlich, daß ich beim Beginn des neuen Semesters wieder ganz frisch sein werde. Deine «Bitte» oder vielmehr gerechte Forderung werde ich aber schon früher zu erfüllen mich bemühen. Ich möchte Dir folgenden Vorschlag machen. Laß den Druck Deiner Arbeit immerhin beginnen und meine Abhandlung auf die Deinige folgen. Denn hast Du nur die Stelle, wo Du auf der letzten werweisest, ganz unerheblich zu ändern. Unterdessen kannst Du, wenn es nicht geschehen ist, meine Abhandlung in's Französische zu übersetzen, ich rechne darauf, daß es mir möglich sein werde, Dir die Einleitung, die höchstens eine Seite betragen wird und den Zusatz nach Verlauf von 8 Tagen zuschicken zu können.

Was Fräulein Kjelberg angeht, so bin ich gern bereit, ihretwegen an Frobenius zu schreiben und sie ihn bestens zu empfehlen. Er ist allerdings nicht Professor and der Universität, doch wird er Fraulein K[jelberg] über die betr[achteten] Verhältnisse unterrichten können. Ob im übrigen Frl. K. in der Familie von F[robenius] einen Anhalt finden könne, kann ich nicht sagen. Leider kenne ich von den Professoren der Züricher Universität auch nicht einen einzigen — die mir früher bekannt geworden, sind alle fort. Ich möchte aber noch folgendes bemerken. Ich habe vor meiner Abreise noch Gelegenheit gehabt, meinen Kollegen Wagener in betreff der national-ökonomischen Studien in der Schweiz und in Frankreich

zu befragen. Er sagte mir [fehlt der Text] und Genf mit Erfolg bekannt werde und durch gute Lehrer vertreten seien. Dasselbe gilt für Paris, doch seien die dort gehaltenen Vorlesungen mehr für schon fortgeschrittene Zuhörer berechnet.

Wie Du weißt, bin ich mit Elise zunächst nach Augsburg gereist, wo wir mit Cläre, die sich wesentlich erholt hat, zusammentrafen. Wir haben dort mehrere Wochen ein Stammquartier gehabt, von dem aus wir Streifpartien in die Evians'schen Alpen machten. Wir fanden aber alle Sommeraufenthaltsorte — da dieses Jahr der Cholera wegen niemand nach Italien und nur wenige nach der Schweiz gegangen, so überfüllt, daß wir nirgends bleiben vermochten. Seit 3 Wochen sind wir hier, wo einer der herrlichsten Parks von Europa ist, in welchem das Schloß liegt, worin einst König Gérome «immer lustig» war und Napoleon III nach Sedan die Tage seiner Gefangenschaft verlebte. Seit 8 Tagen sind auch Kirchhoffs (er, sie und Eva) und natürlich auch Hansemann hier (der letztere hat gleichzeitig mit mir Deinen Brief empfangen, und ich habe ihn darum beneidet, da Du darin in betreff Deiner persönlichen Angelegenheit viel mitteilsamer gewesen bist als mir gegenüber).

Meine Schwestern grüßen Dich herzlichst, hoffen aber auch, bald einige Zeilen von Dir zu erhalten. (Briefe nach Berlin adressiert kommen uns sicher zu). Wie lange wir noch hier bleiben werden, kann ich noch nicht sagen. Meine Vorlesungen werde ich nicht vor dem 1. November beginen. Und hiermit für diesmal ein herzliches Lebewohl von Deinem treuen Freund W.

Wie geht's Mittag-Leffler? Ich grüße ihn herzlichst.

72. Wilhelmshöhe (bei Kassel)
17.10.84

Meine liebe Freundin, ich beantworte Deinen — erst gestern Abend mir zugegangenen Brief, im Bette liegend, daher mit dem Bleistift.

Ich habe mich, seitdem ich von Berlin fort bin, eigentlich immer unwohl gefühlt, was sich namentlich auch darin zeigte, daß ich in unbechreiblicher Weise träge und arbeitsunlustig war. Als ich Dein Telegramm erhielt, war ich überdies durch Rheumatismus im rechten Arm am Schreiben verhindert. Da Du nun ausdrücklich gesagt hattest, Du wollest eine Nichtbeantwortung des Telegramms als gleichbedeutend mit einer bejahenden Antwort auf Deine Frage betrachten, so zog ich es vor, Dir möglichst bald einen ausführlichen Brief zu schreiben, für den Augenblick aber Deinem ausgesprochenen Wünsche stillschweigend nachzugeben. Aber es stellte sich bald ein schlimmeres Leiden bei mir ein, nämlich eine starke und mit hefti-

gen Schmerzen verbundene Anschwellung der Venen des rechten Beines.

Ich habe mich entschließen müssen, das Bein in eine Gummibandage eingewickelt, ganz still zu liegen, größtenteils im Bette und mich zweimal täglich massiern. Dadurch sind die Schmerzen außerordentlich gemildert worden, wenn ich mich ganz ruhig halte, so verspüre ich kaum etwas, aber ich kann noch nicht auftreten und gehen. Der Arzt gibt mir Hoffnung, daß ich in der nächsten Woche werde reisen können, empfiehlt aber die größte Vorsicht.

Unter diesen Umständen, liebe Freundin, wirst Du mich entschuldigen, wenn ich Dir für heute nur folgendes schreibe: Mehr mit meiner Notiz «Zur Integration der linearen partiellen Diff. Gleichungen», was Du für gut befindest, ich erkläre mich mit allem einverstanden.

Ich wünsche nur, daß am Schluße der allgemeinen Formeln die Integration der Gl[eichung]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dots$$

als Beispiel gegeben werde, mit dem Bemerken, daß das Resultat, in Doppelintegral verwandelt, übereinstimme mit dem vom *Cauchy* (Journ. de l'école polyt. Cah. 20, p. 297—309) und in dem besonderen Falle, wo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi$$

mit dem von Poisson (Mém de l'Académie des Sciences) gegebenen.

Am Schluße der Formeln (4—12) des ersten § würde zweckmäßig die folgende Bemerkung Platz finden.

Bei der Entwicklung dieser Formeln, welche beliebig weit fortgesetzt werden können, ist außer den in Betreff der Funktionen f, φ gemachten Annahmen, vorausgesetzt werden, daß den Funktionen u', v', w' und deren Ableitungen, so weit dieselben in den Formeln vorkommen, in der Fläche σ sich stetig ändern. Die Formeln lassen sich jedoch auch in manchen Fällen umwenden, wo die hinsichtlich der Funktionen φ, u', v', w' gemachten Annahmen in einzelnen Punkten nicht zutreffen.

Bildet man nämlich für verschiedene Funktionen φ, die mit φ_1, φ_2 soweit bezeichnet werden mögen, aber für eine und dieselbe Funktion f die Ausdrücke

$$F_1 = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi_1(u, v, w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

$$F_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und ist $\bar{T}$ irgendein aus partiellen Ableitungen von $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ ... nach x, y, z linear und mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzter Ausdruck, so läßt sich derselbe mittels der aufgestellten Formeln in der Gestalt

$$T = D_t \int_{(t_0 \ldots t)} \Phi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega +$$

$$+ D_t^2 \int \Phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega + \ldots$$

darstellen, wo Φ_1, Φ_2 Ausdrücke sind, welche aus den Funktionen u', v', w', φ_1, τ_2 und deren Ableitungen so zusammengesetzt werden, daß auch in dem Falle, wo die letztere an einzelnen Stellen sich nicht stetig ändern, Φ_1, Φ_2, ... Funktionen von u, v, w sein können, welche der im Vorstehenden hinsichtlich der Funktion φ gemachten Annahme entsprechen. Trifft das zu, so ist die angegebene Darstellung von T zulässig.

Die Richtigkeit dieser Bemerkung würdest Du dann in Deiner Arbeit für den speziellen Fall, um den es sich handelt, zu beweisen haben.

Die am Schluße des § 1 vorkommende Formeln für den Ausdrusk

$$A \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + \ldots\ldots\ldots$$

wird besser in den Anfang vom § 2 gesetzt.

Dieser würde dann so lauten:

Aus Formeln (7, 12) d. v. § ergibt sich:

$$A \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + \ldots\ldots\ldots$$

bis qum Schluße von § 1.

Darauf würde dann folgen:

Es sei die Fläche σ ein Ellipsoid u. s. w. Am Schluße vom § 2 würden dann die eben angegebenen Zitaten zu stehen kommen.

Alles Übrige kann fortbleiben. Schließlich bitte ich Dich, wenn Du in Betreff der Redaktion meines Aufsatzes irgendwo noch Bedenken finden [siehst] sie nach Gutdünken ausführen zu wollen. Deine Hauptsache ist, daß Deine Arbeit nun bald fertig wird. In der sicheren Erwartung, darüber und über manches andere bald von

Dir etwas zu hören, schließe ich mit herzlichstem Gruße, dem auch meine Schwestern, die beide bei mir sind, an Dich zu bestellen mich bitten,

Dein treuer Freund Wstß

73. Berlin, 24. März 1885.

Meine teuere Freundin!

Endlich komme ich dazu, Deinen letzten lieben Brief — der, wie gewöhnlich, ohne Datum ist, eine ganz bequeme Sache übrigens für einen läßigen Briefschreiber, wie ich es nach dem einstimmigen Urteil Europas sein soll — mit Ruhe beantworten zu können. Ich habe nach Deiner Abreise noch zwei Wochen das Zimmer hüten müssen und dann, nachdem ich meine Vorlesungen wieder aufgenommen, mich ganz gehörig anstrengen müssen, um sie zu einem einigermaßen erträglichen Schluße zu führen — am 15-ten d. M., wo ich im ganzen Universitätsgebäude der einzige Lehrer war, aber mir doch noch c. 50 Zuhörer konserviert hatte. Nun war ich aber auch so ermüdet, daß ich eine ganze Woche lang mich ganz der Ruhe hingegeben habe, soweit dies die vielen Besuche, die man in Berlin während der Osternferien regelmäßig empfängt, dies gestatteten.

Wäre das Wetter besser, so würde ich eine kleine Reise machen— aber es schneit und hagelt abwechselnd beim kalten Ostwind, den ich durchaus nicht vertragen kann.

Sehr gefreut hat es mich, von Dir zu vernehmen, daß Deine Gesundheit ausgezeichnet seie, ich fürchtete in der Tat, die Winterreise nach den Anstrengungen und Aufregungen des hiesigen Aufenthalts würde Dir geschadet haben. Zu der großen Anzahl von Zuhörern gratuliere ich Dir von Herzen; freilich wirst Du auch wohl die Erfahrung machen, daß bei vielen der Wille gut, aber das Vermögen schwach ist, sodaß man selbst bei den Ausdauernden nicht sicher sein kann, ob das Interesse an der Sache oder Pflichttreue sie hält. Könnte man immer einen Kreis won höchstens zwölf talentvollen, wohl vorbereiteten und für ihre Wissenschaft begeisterten Zuhörern um sich versammelt haben, so wäre das akademische Lehramt die lohnenste und interessanteste Beschäftigung in der Welt.

Dazu muß freilich noch Eins kommen, dessen ich immer mehr und mehr entbehren muß — ein einträchtiges, auf Übereinstimmung in den Prinzipien und gegenseitiger aufrichtiger Anerkennung beruhendes Zusammenwirken mit den Fachgenossen. Daran ist aber an unserer Universität seit einigen Jahren eine Störung eingetreten, deren Ursachen mir nicht völlig klar sind, so daß ich nur das Eine mit Bestimmtheit aussprechen kann: nicht an mir liegt die Schuld.

Mein Freund Kronecker, mit dem ich früher in Betreff der wichtigsten Fragen in Übereinstimmung war, und auch Fuchs arbeiten mir entgegen, der eine mit Bewußtsein und Absicht, der andere, teils der Autorität des ersten sich unterwerfend, teils aus mangelhafter Kenntnis der Bedeuting der Frage, um die es sich handelt. So kommt es nicht selten vor, daß ich in einer Vorlesung einen Satz aufstelle und zu beweisen vermeine, der in einer anderen Vorlesung als unhaltbar und trügerisch bezeichnet wird. Während ich sage, daß eine sog[enannte] irrationale Zahl eine so reelle Existenz habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt, ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, daß es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen gibt. Während ich klar zu machen[suche], warum Jacobis Ansicht, daß es absurd sei, x als Funktion von u zu betrachten, wenn zwischen beiden Größen die Gleichung

$$u = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}}$$

angenommen wird, eine irrige sei. Die zu einem und demselben Werte von u gehörigen Werte von x bilden eine abzählbare Menge, von der Kantor, wie ich überzeugt bin, in unanfechtbarer Weise bewiesen hat, daß es nicht nur unendlich viele Werte gibt, die nicht nur *nicht* darin enthalten sind, sondern eine Menge von höherer Mächtigkeit bilden — und damit motiviere, daß bei einem analytischen Gebilde zu unterscheiden sei zwischen den Stellen, die dem Gebilde *angehören*, und denen die als Grenzstellen sich ihm zugesellen — ich sage, während ich dergleichen Sachen den Anfängern klar zu machen mich bemühe, läßt Fuchs in den Sitzungsberichten der Akademie eine Abhandlung erscheinen, die dartun soll, daß es auch lineare Differenzialgleichungen gebe, durch welche keine «analytischen» Funktionen definiert werden, nicht achtend, daß er auf diese Weise die überwiegende Mehrzahl derjenigen Funktionen, deren Eigenschaften zu erforschen er selbst mit so gutem Erfolge bemüht gewesen ist, den Stempel der Absurdität aufdrücken würde, wenn er recht behielte.

Du wirst mir Rechte geben, liebe Freundin, daß es für mich nicht sehr ermunternd ist, zu sehen, daß selbst bei so tüchtigen Leuten, wie Fuchs, die liebe Mühe umsonst gewesen ist. Schlimmer ist es aber, wenn Kronecker seine Autorität dafür einsetzt, daß *alle*, die bis jetzt an der Begründung der Funktionentheorie gearbeitet haben, Sünder vor dem Herrn sind. Wenn ein wunderlicher Kauz, wie Christoffel sagt, in 20 bis 30 Jahren wird die jetzige Funktionentheorie zu Grabe getragen und die ganze Analysis in die Theorie der Formen aufgegangen sein, so beantwortet man das mit einem Achselzucken.

Wenn aber Kronecker den Anspruch tut, den ich *wörtlich* wiederhole:

«Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber der mathematischen Welt noch zeigen, daß nicht nur die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann, und sicher diese strengeren. Kann ich es nicht mehr tun, so werden's die tun, die nach mir kommen (Hensel, Molk?) und sie werden auch die Unrichtigkeit *aller* jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die *sogenannte* Analyse arbeitet», so ist ein solcher Ausspruch von einem Manne, dessen hohe Begabung für mathematische Forschung und eminente Leistungen von mir sicher ebenso aufrichtig und freudig bewundert wurden, wie von allen seinen Fachgenossen, nicht nur beschämend für diejenigen, denen zugemutet wird, daß sie als Irrtum anerkennen und abschwören sollen, was den Inhalt ihres unablässigen Denkens und Strebens ausgemacht hat, sondern es ist auch ein direkter Appell an die jüngere Generation, ihre bisherigen Führer zu verlassen und um ihn als Jünger einer neuen Lehre, die freilich erst begründet werden *soll*, sich zu scharen. Wirklich, es ist traurig und erfüllt mich mit bitterem Schmerz, daß das wohlberechtigte Selbstgefühl eines Mannes, dessen Ruhm unbestritten ist, ihn zu Äußerungen zu treiben vermag, bei denen er nicht einmal zu empfinden scheint, wie verletzend sie für andere sind.

Aber genug von diesen Dingen, die ich nur berührt habe, um Dir zu erklären, aus welchen Gründen ich an meiner Lehrtätigkeit, selbst wenn meine Gesundheit es gestatten sollte, sie noch einige Jahre fortzusetzen, künftig hin nicht mehr dieselbe Freude haben kann, wie bisher. Du wirst aber darüber nicht reden — ich möchte nicht, daß andere, die mich[nicht] so genau kennen wie Du, in dem Gesagten den Ausdruck einer Empfindlichkeit sähen, die mir in der Tat fremd ist. Niemand weiß besser als ich selbst, wie weit ich von dem Ziele entfernt geblieben bin, das ich an der Begeisterung der Jugend mir gesteckt hatte, niemand soll mir aber auch das Bewußtsein rauben, daß mein Streben und Wirken nicht ganz umsonst gewesen ist und der Weg, auf dem ich der Wahrheit nachgegangen bin, nicht als ein Irrweg sich erweisen wird.

In Beziehung auf die Angelegenheit der Frau Edgren habe ich zu bemerken, daß Du im Irrtum bist, wenn Du aus meinen Äußerungen entnommen hast, Herr Scherer sei an der Redaktion der Rundschau beteiligt. Er ist ein angelegentlicher Mitarbeiter, der in der Rundschau seine Vorträge in Versammlungen und Vereinen gegen gutes Honorar abdrucken läßt und wird darum kaum geneigt dem Redakteur, Rodenberg, unangenehme Dinge mitzuteilen.

Frau Edgren, die nur mit der «Expedition» des Blattes zu tun gehabt, hätte dem Redakteur und Schef die ganze Korrespondenz

übersenden sollen, ja, sie sollte es noch tun, mit dem Bemerken, sie fühle sich verpflichtet, Herrn Rodenberg von dem Vorgefallenen in Kenntnis zu setzen, da sie annehmen müsse, daß er nicht davon unterrichtet sei. Die Sache selbst ist unerhört und wäre in keiner Weise zu entschuldigen, wenn Rodenberg, selbst daran beteiligt wäre — ich kann dies kaum glauben, denn er hat den Ruf eines anständigen Mannes.

Meine Schwestern, die jetzt beide wieder hier sind, lassen Dich auf das harzlichste Grüßen und bitten Dich, ihnen bald schreiben zu wollen. Auch Herr Hansemann, der eben bei mir war, ließt Dich mahnen. Ich selbst will nur die Hoffnung aussprechen, daß Du mir durch baldige Antwort die Gelegenheit geben mögest, noch in den Osternferien einen Brief mathematischen Inhalts an Dich abgehen zu lassen. Mittag-Leffler bitte ich freundlichst und herzlichst von mir grüßen zu wollen. Wie steht es denn mit der Preisfragen [1] Angelegenheit?

Mit meinen besten Grüßen und Wünschen
Dein treuer Freund K. W.

[73$_1$]92.

Meine liebe Sonia!

Soeben erhalte ich in der Prämienkreis-Angelegenheit noch einen Brief von Fuchs, den ich Dir mitteile. Wenn der darin empfohlene Weg eingeshlagen werden soll, so würde es doch vielleicht zweckmäßiger, wenn Du die Arbeit über den Ring [2] zunächst vollenden könntest, weil über den Inhalt derselben Prof. Weber

[Schluß fehlt]

74. Berlin, 16.5.85

Meine liebe Freundin!

Dein letzter Brief enthält nicht viele gute Nachrichten. Daß Mittag-Leffler gleich in den ersten Jahren seiner Stockholmer Wirksamkeit so viel von körperlichen Leiden heimgesucht wird, ist ungemein beklagenswert, abgesehen selbst von der Teilnahme, die alle, die den vortrefflichen Mann kennen, seiner Person schenken, denn daß dadurch dem Aufblühen der neuen Hochschule, deren Interessen zu vertreten M. L. vorzugsweise berufen ist, wesentlich Abbruch geschieht, ist leider nur zu gewiß. Von Herrn Enneström der mich vor einigen Tagen besuchte, erfahre ich, daß auch Du meh-

[1] Oscar II's Preis für Mathematik.
[2] S. Kowalewskaja seine Arbeit uber die Gestalt des Saturnringes druckfertig machte.

rere Wochen leidend gewesen bist und nicht hast lesen können. Warum hast Du mir das verschwiegen? Überhaupt muß ich Dir sagen, daß Du mit Mitteilungen über Dich und Dein Ergehen gar zu kärglich mich und auch meine Schwestern bedenkst — und Du weißt jedoch, welchen Anteil wir an allem nehmen, das Dich betrifft.

Auch Enneström bestätigt, daß der Zustand Holmgren's für hoffnungslos gilt. Die Sorge, für ihn einen brauchbaren Nachfolger zu finden, wird also bald dringend werden. Sehr zu wünschen wäre es, daß sich in Schweden (oder in Norwegen, Finnland) ein geeigneter Mann finden möge. An einen Franzosen ist gar nicht zu denken, denn der lernt nicht Schwedisch, auch für einen Deutschen würde es schwer werden, in kurzer Zeit die erforderliche Sprachfertigkeit sich anzueignen. An der Universität könnte man ihn immerhin einige Zeit dazu lassen—wie ich höre, hölt ja selbst Gyldené seine erste Vorlesung in deutscher Sprache — aber an dem Polytechnikum würde er doch wohl von Anfang an in schwedischer Sprache vortragen müssen. Aber auch von diesem Hindernisse abgesehen, sind unter unseren jungen Leuten gegenwärtig nur wenige, die ich als *ausgezeichnet* qualifiziert für die fragliche Rolle empfehlen könnte. Am Polytechnikum trägt Holmgren, so viel ich weiß, theoretische Mechanik vor; an der Universität könnte man dafür mathematische Physik im weiteren Umfange substituieren. Vor einem Monate auch würde ich als tüchtigen mathematischen Physiker den Privatdozenten Hertz in Kiel (früher Assistent bei Helmholtz) empfohlen haben. Derselbe ist aber unterdes an das Polytechnikum zu Karlsruhe berufen worden, wo er, der sich auch mit experimentellen Untersuchungen beschäftigt, ein so vorzügliches physikalisches Kabinett hat, daß ich bezweifle, ob er geneigt sein würde, auch unter sehr günstigen äußeren Bedingungen nach Stockholm qu gehen. Doch bitte ich Dich, wenn Du an M. L. schreibst, ihn auf den Genannten aufmerksam zu machen; vielleicht entschließt er sich, auf der Rückreise in Karlsruhe einen Tag sich aufzuhalten, um sich den Mann selbst anzusehen. Eine Abhandlung von demselben: «Über die Berührung fester elastischer Körper» findet sich im 42-sten Bande unseres Journals, eine Reihe anderer in physikalischen Zeitschriften.

Du wolltest mir eine Arbeit, betr. die Verallgemeinerung der Borchardt'schen Aufgabe zuschicken — wie steht es damit?

Wenn Du mir antwortest, so bitte ich, mir auch die Adresse von Mittag-Leffler angeben zu wollen. Wie steht es mit unserer Preisfrage? Hier verlautet, sie sei bereits gestellt — doch beruht dies vielleicht auf unbestimmten Gerüchten darüber.

Daß mein Brief, die Akta betreffend, seine Wirkung nicht verfehlt hat, freut mich um so mehr, als alles, was ich über die Zeitschrift und ihren Redakteur im ersten Teil meines Briefes gesagt habe, mir

wirklich vom Herzen gekommen ist, über Herrn S. mich auszusprechen, ist mir aber nicht ganz leicht geworden.

Freund *K[ronecker]* nimmt es sehr übel, daß er nicht zu Rate gezogen worden ist — ich schließe dies daraus, daß er, obwohl er durch Fuchs von der Sache weiß, mir gegenüber absolut schweigend sich verhält.

Denke Dir, ich bin seit Deiner Abreise in die Theorie der Funktionen mit *reellen* Argumenten geraten. Es haben sich mir dabei einige interessante Resultate ergeben, worüber ich im folgenden Monat veröffentlichen werde, z. B.

1. Die Riemann' sche Definition von

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

welche man als die allgemeinste denkbare angesehen hat, ist *unzulänglich*. Es ergibt sich vielmehr folgendes:

Es sei $f(x)$ eine in dem Interwall

$$a \leqslant x \leqslant b$$

eindeutig definierte Funktion der reellen Veränderlichen. Dabei wird zugelassen, daß es zwischen a, b unendlich viele Werte geben kann, für die $f(x)$ gar nicht definiert ist ebenso, daß Unstetigkeit-Stellen in abzählbarer oder unabzählbarer Menge vorhanden sein dürfen.

Angenommen wird nur, daß in jedem noch so kleinen Teile des Interwalls $a \ldots b$ Stellen vorhanden sind, an denen die Funktion definiert ist, sowie auch, daß der Wert der Funktion eine angebbare Grenze nirgends übersteige. Dem läßt sich stets eine Definition von $\int_0^\alpha f(x)\,dx$ angeben, bei der alle Eigenschaften des Integrals, die aus der Cachy'schen und Riemann'schen Definition sich ergeben, bestehen bleiben. Man kann dies sehr einfach aus dem von Cantor im 4-ten Bande der Acta festgestellten Begriff des *Inhalts* einer beliebigen Punktmenge folgern. Ich bin aber ursprünglich durch andere weitläufigere Betrachtungen darauf geführt worden.

2. Ist $f(x)$ in dem Interwalle $a \ldots b$ durchweg stetig und setzt man $\Pi = \frac{2\pi}{b-a}$ und versteht unter $f_\nu(x)$ eine Fourier'sche Reihe von *endlicher* Gliederzahl:

$$f_\nu(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} (A_\lambda \cos \lambda kx + B_\lambda \sin \lambda kx),$$

wo n eine ganze Zahl ist, die mit ν wächst, so läßt sich $f(x)$ *stets* darstellen in der Form:

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \ldots \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

Dabei konvergiert diese Reihe in dem ganzen Interwalle $a \ldots b$ *absolut* und *gleichmäßig*. Entwickelt man die abgesonderte lineare Funktion von x in eine Fourier'sche Reihe und zieht dann alle Glieder der vorstehenden Reihe, welche dasselbe Vielfache von $k\lambda$ enthalten, in eines zusammen, so erhält man die gewöhnliche Fourier'sche Reihe, *die aber nicht immer konvergiert.*

3. Ist $f(x)$ an beliebigen (auch unzählig vielen) Stellen unbestimmt oder unstetig, so stellt die vorstehende Reihe die Funktion in allen *Stetigkeitspunkten* dar, und konvergiert, falls *Strecken* von Stetigkitspunkten vorhanden sind, in jeder Strecke *absolut* und *gleichmäßig*. In einem Unstetigkeitspunkte schwankt die Summe der n ersten Glieder, wenn n ohne Ende wächst, zwischen endlichen Grenzen.

4. Jede Funktion $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit entspringt aus einer Funktion $f(x, k)$, die inbezug auf x eine *analytische* (ganze transzendente) Funktion ist und überdies einen variabelen (positiven) Parameter enthält, in der Art, daß

$$f(x) = \operatorname*{Lim}_{k=0} f(x, k)$$

ist in jedem Stetigkeitspunkt der Funktion $f(x)$ während, wenn x eine Unstetigkeits — oder Unbestimmts-Stelle ist , $f(x, \kappa)$ beim Unendlichkleinwerden von k zwischen denselben Grenzen schwankt wie

$$^1/_2 [f(x + \kappa) + f(x - \kappa)]$$

Diese Sätze sehen vielleicht nach etwas aus; sie sind aber sehr *trivialer Natur.*

Mit herzlichstem Gruße von meinen Schwestern und mir

Dein treuergebener Weierstraß

Wie ich erfahre, gehörst Du auch zu den Verschworenen, die mich am K. 31. Oktober daran erinnern wollen, daß ich bereits zu denen gehöre, welche der Versteinerung anheimfallen. Ich füge mich in mein Schicksal — wie ich glaube, wird die Büste gut.

Ich möchte Dich noch nachträglich bitten, mir mitteilen zu wollen, welche Pläne Du für Deine Ferien hast. Was mich angeht, so habe ich dieses Jahr gar keine Lust zum Reisen, die sechs Wochen, welche ich v. J. in Wilhelmshöhe größtenteils im Bette liegend habe

zubringen müssen, haben mir die Lust verdorben. Außerdem kann ich noch immer nicht gehen, denn die Anschwellung der Adern im rechten Bein trotz aller Einwicklungen nicht vergehen will. Wenn der Arzt nicht absolut darauf besteht, so bleibe ich zu Hause. Ob ich im k. Winter lesen werde, ist mir zweifelhaft; diesen Sommer geht es bis jetzt gut damit. Ich lese ellipt[ische] Funktionen vor etwa 100 Zuhörern.

D. W.

75. Berlin, 22.9.85

Meine teuere Freundin!

Dieser Brief wird gleichzeitig mit *Mittag-Leffler*, der zu meiner größten Freude den Rückweg über Berlin genommen hat, eintreffen. Ich fürchte, Du wirst mir zürnen, daß ich so sehr lange mit der Antwort auf Deinen letzten freundlichen Brief gezögert habe, —das ist aber mehr Schuld der Umstände, wie meine gewesen — ich stehe zwar in dem Rufe eines faulen Briefschreibers, aber ich kann sagen, ich bin doch besser, als mein Ruf, wenn es sich um wesentliche Dinge handelt, pflege ich nicht, nachlässig zu sein. Nun aber war ich in einer eigentümlichen Lage, in der ich Dich zu einer Reise nach Berlin nicht aufmuntern konnte, so innig ich mich auch gefreut haben würde gerade jetzt Dich wieder zu sehen und mit Dir so vieles, das ich auf dem Herzen habe, durchzusprechen. Um es kurz zu sagen, ich bin zu dem Entschluße gekommen, Berlin zu verlassen und in die Schweiz überzusiedeln. Wahrscheinlich wäre ich schon fort, wenn nicht besendere Umstände eingetreten wären, die mich noch hier halten, ich konnte aber nicht voraussehen, daß sich die Sache so lange hinzögern würde und ich fürhetete, Du würdest hier angekommen von mir wenigetens nichts anderes haben, als daß Du zusehen könntest, wie ich und meine Schwestern mit der Packerei uns abquälten.

Ich tröste mich aber damit, daß Dir bei Deiner Reiseerfahrung auf hundert Meilen mehr oder weniger kaum ankommt und daß es nicht allzulange dauern wird, bis wir einige Wochen ganz ungestört miteinander werden verleben können.

Ich habe bereits Ende Juli dem Minister mein Gesuch um Bewilligung eines Urlaubs auf unbestimmte Zeit — alle Rechte aber vorbehalten — persönlich vorgetragen, mußte aber auch noch zur formellen Erledigung der Sache eine schriftliche Eingabe machen — damit aber habe ich notgedrungen bis jetzt gewartet, weil der Minister verreist war und ich dem vertragenden Rat, dem Herrn, den auch Du kennst, der sich als ein durch aus unzuverläßiger Mensch erweist, die Sache nicht in die Hände geben möchte. So kann es leicht kommen, daß ich noch den Oktober über hier bleiben muß.

Was mich zu dem Entschlusse, ganz fortzugehen, schließlich bewogen hat, kannst Du Dir denken und habe ich auch mit M.-L. darüber gesprochen. Auf ihn verweise ich Dich überhaupt, wir haben gestern viele Atunden lang ausführlich miteinander alles Erforderliche besprochen. Auf die «unsaubere». Geschichte, in der Freund Kr[onecker] eine so jammerolle, d. h. teils lächerliche, teils verächtliche Rolle spielt, gehe ich nicht ein. Was sagst Du aber dazu, daß er, nachdem er sich M.-L. gegenüber in Betreff der 4-ten Frage, von der er doch sicher wußte, wer sie gestellt, so indigniert ausgesprochen und ihm wie uns anderen alle Berechtigung, in algebraischen Dingen eine Meinung zu haben, abgesprochen hatte, sofort zu *Hermite* gereist ist — wahrscheinlich in der Furcht, es könne ihm einmal schaden, wenn er mit demselben zerfallen — und nun da Hermite ihn höflich empfangen, sich einbildete, er habe ihn wieder ganz für sich gewonnen? Aber genug davon.

Ich freue mich, daß Du Deine Kleine jetzt zu Dir nimmst, die Sorge um sie wird sich für Dich selbst wohltätig erweisen. Und daß Du in der Zeit Fr[äulein] Lermontoff zur Seite haben wirst, ist ganz herrlich. Möge nur die Ungunst der Witterung Dir den Winter nicht verderben.

Meine Schwestern lassen freundlichst grüßen und Dich um Nachrichten bitten. Ich habe ihnen übrigens nichts davon gesagt, daß Du auf 14 Tage hierher gekommen wärst, wenn ich Dir zugeredet hätte —sie würden mir es nicht verzeihen, daß ich dies unterlassen.

N. S. Eins möchte ich Dir doch sagen, obwohl ich auch darüber M. L. ausführlich gesprochen habe. In den Programmen der Preisfrage ist *ein* schwacher Punkt, den ich argloser Mensch, was ich sehr bedauere, übersehen habe, gegen den sich aber *unzweifelhaft* der Hauptangriff (der vorbereitet wird) richten wird. Das ist die Bestimmung «Die gekrönte Preisschrift wird) durch die Acta publiziert werden». Dies verstößt gegen den Brauch— es wird fast überall dem Verfasser einer Preisschrift überlassen, in welcher Weise er die Arbeit veröffentlichen will. Jetzt heißt es, man sieht aus dieser Bestimmung, daß die Stellung der Preisfrage keinen anderen Zweck hat als Reklame für die Acta zu machen. Da nun das Unternehmen leider schon (öffentliche und geheime) Gegner genug hat, so muß alles verwunden werden, was auch nur den Schein eines nicht ganz korrekten Verfahrens hat.

Ich habe mit M.-L. besprochen, auf welche Weise noch jetzt der begangene Fehler — denn so muß ich ihn nennen — wieder gut gemacht werden kann. Es hätte heißen müssen etwa: den Verfassern der gekrönten Preisschriften bleibt die freie Verfügung über ihre Arbeiten. Wenn sie für die Veröffentlichung derselben die Acta

Mathematica zu benutzen wünschen, so wird die Redaction Sorge tragen, daß sie unverzüglich gedruckt werden

Läßt sich nachträglich noch eine «Declaration» jener Bestimmung rasch veröffentlichen — was allerdings nicht ohne Erlaubnis des Königs geschehen kann—so würde jener Angriff im voraus abgeschlagen werden. Eine Kritik des *Inhalts* der Frage können wir ruhig abwarten. Was Kr[onecker] gegen Nr. 4 und in einem neuen Briefe at M[ittag]-L[effler] jetzt auch gegen Nr. 1 einwendet, ist durchaus unberechtigt und kompromittiert ihn eigentlich. Denn, wenn ihm jetzt die Ansicht des Vefassers Nr. 1 über die von Dirichlet vielleicht bofolgte Methode ein «Lächeln» abnötigt, da *er* ganz genau weiß, wie Dirichlet verfahren, so hat er ein schweres Unrecht gegen die Wissenschaft begangen, daß er 27 Jahre lang nach D[irichlet] 's Tode der Welt sein besseres Wissen vorenthalten hat und selbst seinem Freunde Kummer für die Gedächtnisrede nur die dürftigen Notizen, aus denen bis jetzt niemand hat etwas machen können, mitgeteilt hat. Aber *es ist nicht wahr*, was er sast, er weiß von der Sache nicht mehr, als er gleich anfangs mitgeteilt hat.

N. S. Zwei kleine Abhandlungen über Funktionen reeller Argumente bringt Dir M[ittag]-L[effler]mit. Zwei andere werden sich noch anschließen. Eine Collektion älterer funktionentheoretischer Abhandlungen von mir wird Ende Oktober erscheinen, ich wage es, damit vor dem Publikum zu erscheinen, obwohl wir jetzt wissen, daß neuen Zehntel der heutigen Funktionenlehre Unsinn ist. Herzlichen Gruß, **ich** schreibe bald wieder.

D. W.

[76] 77. 14 Dez. 1885
Hotel des Alpes Mont Fleuri

Meine teuere Freundin!

Du bist eine arge Sophistin. Also, weil Du eine Schülerin besonderer Art von mir bist, wolltest Du am 31-sten Oktober nicht unter den «großen Haufen» der mich Beglückwünschenden Dich mischen, sondern hast es vorgezogen, fast eine Woche später zu erscheinen. Allerdings eine «egregia» [1] Dich zu nennen, bist Du wohl berechtigt— aber hättest Du Dich nicht dadurch auszeichen können, daß Du *früher* als alle übrigen den alten Freund begrüßtest? Übrigens glaube nicht, daß ich, wie Du vielleicht aus dem Datum dieses Briefes vermuten möchtest, Vergeltung übe und Deinen Brief, das zuletzt angekommene Gratulationsschreiben, auch zuletzt beantworte. Im Gegenteil, vernimm es zu Deiner gerechten Beschämung, es liegen etwa 25 Briefe mir vor, auf die ich nicht summarisch ant-

[1] ausgewählte (lat).

worten kann; einer ist von einem hochgestellten Herrn, der zugleich einer meiner ältesten Freunde ist — nachdem ich gestern diesen beantwortete, kommst Du sofort an die Reihe. Ist das nicht edel gehandelt? Aber nun zur Sache.

Zunächst will ich Dir gern und ohne Rückhalt bekennen, daß die Feier meines 70-sten Geburtstags, wie dieselbe von meinen älteren und jüngeren Zuhörern veranstaltet worden ist, mir wirklich eine große Freude bereitet hat. Ohne offiziellen Anstrich — nur der Kultus-Minister sandte mir ein halb amtliches Glückwunschschreiben — gestaltete sich dieselbe zu einer — wenn auch von Übertreibung nicht ganz freien, doch durch keinen Mißklang getrübten Kundgebung, die erkennen ließ, daß die daran sich Beteiligenden mit dem Herzen dabei waren. Persönlich erschienen waren — außer meinen hiesigen Kollegen — Cantor, Schwarz, Lindemann, Killing, Thomas, P. Dubois, um mir im Namen des Comité's die Ehrengeschenke zu überreichen. Fuchs hielt eine wohlgesetzte Rede von den ängstlichen Blicken seiner Frau bewacht — denn auch eine weibliche Corona fehlt nicht. Dann kommen noch der Rektor der Universität, der Dekan und der Vizekanzler des Ordens pour le mérite; damit war der programmäßig festgesetzte Akt zu Ende und es kam nur «der große Haufen» der Gratulanten.

Die Büste wirst Du im Gipsabzug erhalten haben. Ich bin neugierig auf Dein Urteil darüber; meinen Schwestern gefällt sie nicht übermäßig. Von der Medaille wird Dir und Mittag-Leffler eine Kopie in vergoldeter Bronze zugesandt werden. Das Album für die Photographien (über 500 Stück) ist ein Prachtwerk, das allgemeinen Beifall findet.

Den Herausgebern der Acta habe ich für ihr sinniges Geschenk meinen ganz besonderen Dank abzustatten. Das Lichtbild ist wohl gelungen und der Einband äußerst geschmackvoll. Nur die Dedikation sagt viel zu viel, und wird ebenso wie die Inschrift der Médaille glassiert — nicht gerade im wohlwollenden Sinne.

Abends war das unerläßliche Diner — das hätte einem «eingeweihten» und mit dem gehörigen Humor ausgestatteten Berichterstatter einem willkommenen Stoff geben können. Fuchs, als mein erster Zuhörer, mußte wieder die erste Rede halten, was keine leichte Aufgabe für ihn war. Mich aber hat sie — im Gegensatze zu den übrigen Zuhörern — köstlich amüsiert. Denn es war mir, als hätte Fuchs den *zweiten* Brief Kroneckers an Mittag-Leffler gelesen — was nicht der Fall ist — und als kehrte jeder Satz seiner Rede seine Spitze gegen eine Äußerung K[ronecker]'s. Ohne Zweifel war aber alles «Philosophie des Unbewußten». Dann kam Freund Kr. an die Reihe — der dazu ein Separatrecht zu haben behauptet. Er ist doch ein unbegreiflicher Mensch. Zuerst hatte er, als die Herrn vom Comité

beschlossen, es soll nicht bei dem ursprünglich in's Auge gefaßten Reliefbilde werbleiben, erklärt, er könne sich an einer öffentlichen Feier zu meiner Ehre nicht beteiligen, weil darin eine Kränkung für Kummer läge, an dessen 70-sten Geburtstage nichts Gleiches stattgefunden habe. Dann reiste er fort von Berlin, ohne sich dabei von mir zu verabschieden— ebenso seine Frau — schrieb mir einmal, von Straßburg aus, einen rein geschäftsmäßig gehaltenen Brief, antwortete nicht auf die ihm gegen Ende Oktober zugesandte Einladung des Comité's — erschien aber dann unerwartet am 30-sten Oktober in Berlin, besuchte mich sofort, überhäufte mich mit Liebenswürdigkeiten, erzählte mir von seinem Besuche bei Hermite — nicht aber von der eigentlichen Veranlassung zu demselben, erwähnte auch, daß er in Villars zu seinem großen Leidwesen vernommen, daß Mittag-Leffler soeben den Ort verlassen — er habe zwar mit demselben in der letzten Zeit eine einigermaßen unangenehme Korrespondenz gehabt, das sei aber alles wieder ausgeglichen u. s. w. Von der Wurzel alles Unheils — der Preisfrage und dem Nordstern I-ster Klasse war nicht die Rede. Bei dem Diner nun spendete er mir unendliches Lob und von unserem persönlichen Verhältnis sprach er, so, daß jederman glauben mußte, es sei das allerintimste (seine Frau scheint anderer Ansicht zu sein, sie war die einzige von den Bekannten meiner Schwestern und der Frauen meiner Kollegen, die nicht bei dieser Veranlassung uns besuchte— sie war auch, als ich jetzt von K. mich verabschiedete, nicht sichtbar für mich — ich habe sie überhaupt seit dem 1. Juli nicht gesehen).

Meine Erwiderung auf die beiden Reden war sehr kurz — ich war allzu ermüdet. Dann kam noch eine Flut von Reden — in glänzender Weise sprach Scherer, z[ur] Z[eit] Dekan der phil. Fakultät, und voll Humor mein Bruder, der auseinandersetzte, wie erbärmliche Wissenschaft doch die seinige, die Philologie, im Vergleich mit der Mathematik sei.

Schließlich gingen wir alle noch «zu Bier», wo ich bis Mitternacht, mein Bruder bis zur Morgendämmerung verblieb. Hier kam nun auch die feierliche Versöhnung zwischen P. Dubois und Schwarz zustande — möge sie von Dauer sein. Auch Kr[onecker] forderte Schwarz auf, er möge zu einer «freundschaftlichen Aussprache» ihn besuchen. Doch dies lehnte S[chwarz] ab — die beiden sind unversöhnt voneinander gegangen.

Zwei Tage darauf war der Commers des math. Vereins, wobei die jungen Leute sich prächtig benahmen. Meinem Bruder gefiel die Gesellschaft so wohl, daß er, nachdem alle älteren Herrn gegangen mit Schwarz, der hier ganz an seinem rechten Platz war, bis 5 Uhr Morgens blieb.

So, meine liebe Freundin, nun hast Du einen authentischen Bericht über die «Weierstraß-Feier», worauf Du als Comité-Mit-

glied Anspruch machen darfst. Ich wollte, ich könnte Dir einige Berliner Zeitungen schicken, Du würdest Dich amüsieren über die Legenden, die sich an meine Person geknüpft haben. Ich muß aber noch berichten, daß der poetische Toast auf die Frauen nicht von meinem Bruder, sondern *von mir selbst*[1] — auf Provokation von Kiepert — ausgebracht worden ist.

Seit einigen Tagen bin ich mit meinen Schwestern und dem kleinen Pflegesohn, von dem Dir Mittag-Leffler erzählt haben wird, hier in dem Dir wohl bekannten Hotel. Wir werden aber nicht hier bleiben, sondern wieder eine Villa beziehen. Ich gedenke bis zum Frühjahr am Genfer See zu verbleiben und tüchtig zu arbeiten. Nach Berlin komme ich, wenn überhaupt, nicht vor Ende Oktober d. J. zurück. Nun lebe wohl, beste Freundin, grüße M[ittag]-L[effler] bestens von mir — ich werde auch an ihn nächtens schreiben — und antworte mir recht bald. Meine Schwestern lassen Dich zwar herzlich grüßen, sind aber sehr ungehalten auf Dich, daß Du sie ganz vergessen zu haben scheinst.

[77]76. [31.10.85]

«*Schönheit* ist das Weltgeheimnis das uns lockt in Bild und Wort,
Wollt ihr sie dem Leben rauben, zieht mit ihr die Liebe fort.
Was auch lebet, zuckt vor Abscheu, alles sinkt in Nacht und Graus,
Und des Himmels Lampen löschen mit dem letzten Dichter aus»[2].

Also der Poët. Der Forscher, dem ein güt'ger Gott verlieh
Zu verstehn des Geistes Welten und der Sphären Harmonie,
Sagt uns: *Wahrheit* ist die Sonne, deren Licht das All erhellt,
Und des Wissens Gut das Höchste, was an Schätzen beut die Welt.

Alles Schönste aber das des Menschen sehnend Herz beglückt,
Alles Höchste, das des Menschen Geist dem Erdenstaub entrückt,
Im Gemüthe edler Frauen ist's vereint zu schönem Bund,
Daß uns allen Kund es werde durch der Liebe Zaubermund.

78. (Bitte die Adresse zu beachten)
Vernex. Montreux (Pension Lorins) 26.3.86

Meine teuerste Freundin!

Ich weiß in der Tat nicht, ob Du mir einen Brief schuldest oder ich Dir; ich will das letztere annehmen, indem ich von hier aus so viele Briefe zu schreiben gehabt habe, daß ich die Übersicht über meine Korrespondenz verlor. Allerdings habe ich Dir kaum Wesent-

[1] Sieh [77] 76.
[2] Die erste vier Zeilen gehören dem Poet von Platen.

liches mitzuteilen. Es vergeht mir hier ein Tag wie der andere, in gleichmäßiger Ruhe, welche beinahe etwas Erschlaffendes für Körper und Geist hat. Die Witterung ist bis ganz vor kurzem ungünstig gewesen, ich have mich deshalb nicht viel im Freien aufhalten können. Bekanntschaften habe ich außerhalb des Hotels gar keine im Hotel nur wenige gemacht, komme nur 6 Uhr abends zum Diner in die Gesellschaft und bin deshalb den größten Teil des Tages über auf mein — allerdings sehr behagliches, die schönste Aussicht auf den See und die Savoyer Schneeberge darbietendes — Zimmer angewiesen. Beschäftigt bin ich hinlänglich mit Korrekturen, Briefschreiben, Lesen, ohne eigentlich zu arbeiten; ich hoffe indes, die Lust zu produktiver Tätigkeit soll noch einmal wieder erwachen. Von Berlin höre ich wenig. Fuchs schreibt mir dann und wann, hat aber in seiner Familie fast unaufhörlich Krankheiten gehabt und ist verstimmt. Kirchhof und Auwers sind lakonische Leute, Kronecker schreibt gar nicht an mich — ich freilich auch nicht an ihn.— Selbst Frau Borchardt, die sonst eigentlich eine fanatische Briefschreiberin ist, hat zuerst durch Mariechens Verlobung und Hochzeit und dann durch ihre Korrespondenz mit dem noch immer mit der Hochzeitsreise begeisternden «Kindern» so viel Abhaltungen gehabt, daß sie in ihren Mitteilungen äußerst sparsam gewesen ist. Mit Kr[onecker] bin ich in ein eigentümliches Verhältnis gekommen. Als er von seiner Ferienreise zurückkam, tat er äußerlich sehr zutraulich und gezierte sich als mein intimster Freund, selbst noch, als er mich einige Wochen vor meiner Abreise in die Lage gebracht hatte, ihm in Gegenwart von Fuchs, Netto und Hettner recht tüchtig die Wahrheit sagen zu müssen. Ich hatte nämlich, im Verein mit Fuchs, bei der Akademie den Antrag gestellt, daß die Herausgabe der gesammelten Werke *verstorbener* Akademiker (von Steiner an) auch künftig fortgesetzt werden möge, zunächst also die Arbeiten von Borchard mit der Bezeichnung «Herausgegeben auf Veranlassung der Ak[ademie] der Wiss[enschaften]» ediert werden sollten. Die Akademie hatte dies (in einer Sitzung, der Kr[onecker] zufälling nicht beiwohnte, was vorher niemand wissen konnte) einstimmig angenommen und Hettner mit der Herausgabe betraut. Kr[onecker] nahm dieses mein Vergehen sehr übel; er erklärte, die Akademie setzte sich durch ihren Entschluß zu ihm im Gegensatz, indem er nachgewiesen habe, daß in der ersten Abhandlung Borchardt's (Anwendung des Sturm'schen Satzes auf den Beweis der Realität sämtlicher Wurzeln bei der Bestimmung der sekatoren Störungen der Planeten vorkommenden Gleichung) «alles falsch sei» — er verlangte geradezu, ich soll jene Bezeichnung (Herausgegeben u. s. w.) fortlassen und *mich* als Herausgeber nennen.

Das war mir denn doch zu stark und es ließ meine Erwiderung an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig. Du siehst, liebe Freundin,

seine Prätension, in algebraischer Frage der allein Sachverständige und Entscheidende sein zu wollen, ist bei ihm eine eingewurzelte Krankheit geworden. Im vorliegenden Falle hat er zudem entschiedenes Unrecht, es ist vielmehr seine Ansicht über die Tragweite des Sturm'schen Satzes eine irrige, wie ich in einer bereits an Hettner abgeschickten Note gezeigt habe. Aber ganz abgesehen davon, wie kleinlich ist doch eine solche Opposition, die einem verstorbenen «Freunde und Bruder» wegen einer wissenschaftlichen 0. Differenz nicht die Ehre gönnen möchte, daß seine Erstlingsarbeit, die von Jacobi, Liouville und Dirichlet (die freilich «alle nichts von Algebra verstanden») mit großer Liebe bedacht worden noch einmal gedruckt werden «auf Veranlassung d[er] A[kademie] d[er] W[issenschaften]», deren Mitglied er 27 Jahre gewesen.

Kurz darauf erhielt Kr[onecker] den Band der Acta, worin Mittag-Leffler mir ein Prädikat beilegt, auf das ich allerdings keinen Anspruch habe, und ich erhielt den «Maximilian's Orden für Wissenschaft und Kunst», das war doch zu arg. Ich habe in höflichster Form Abschied von ihm genommen— seine Fani ließ sich verleugnen— aber, nachdem ich fort war von Berlin, soll er sich wenig schmeichelhaft über mich ausgesprochen haben. Ich muß und kann das ertragen, aber ich beklage es auf das tiefste, daß ein Mann von so eminenter geistiger Begabung und so unbestrittenem wissenschaftlichem Verdienst zugleich so kleinlich, eitel und neidisch ist.

Meine Abhandlung über die Lindenmann'sche Theoréme wirst Du — und ebenso M[ittag]-L[effler] wohl erhalten haben, so wie in diesen Tagen die «Abhandlungen v[on] d[er] Funktionslehre». Dagegen sind die Kopien der mir verehrten Medaille, von denen Dir ein Exemplar zugeschickt werden sollte, noch immer nicht fertig geworden. Meine Büste wird auf der bevorstehenden Berliner Kunstausstellung figurieren.

Mittag-Leffler bitte ich herzlichst von mir grüßen zu wollen— hoffentlich geht es ihm und seiner Frau wohl.

Meine Schwestern werden Dir nächstens schreiben — sie sind darin jetzt fauler als ich, sie behaupten den ganzen Tag über beschäftigt zu sein — ich bitte Dich aber, mir schon früher zu schreiben und u[nter] a[nderem] auch zu melden, ob Du Deine kleine Sonia jetzt wirklich bei Dir hast. Vor allen Dingen möchte ich aber wissen, wie es Dir in diesem Semester mit den Vorlesungen ergangen ist und *welche Sommerpläne Du hast.* Wir bleiben jedenfalls bis zum 1 Oktober in der Schweiz und werden wohl in kurzer Zeit nach dem Genfer See übersiedeln.

Kirchhof, dessen Besuch ich während der Osterferien erwartet, wird wohl nicht kommen; er soll sich leider gar nicht gut befinden. Dagegen hat sich Molk, der in Besançon ist, angemeldet. Daß Runge

nach Hannover geht — als Professor am Polytechnikum — und bald heiraten wird, ist Dir wohl bekannt.

Mit herzlichstem Gruß und nochmaliger Bitte um *baldige* Antwort

Dein Weierstraß

79.

Berlin. W. Friedrich-Wilhelm Str. 14
den 22 Mai 1888.

Meine liebe Freundin, ich habe Deinen Brief vom 4-ten d. M. nicht beantwortet, weil ich es nicht *konnte*. Ich bin noch immer nicht genesen und habe erst vor wenigen Tagen den Versuch machen dürfen, mich etwas mit mathematischen Dingen zu beschäftigen. Es war also gar kein Gedanke davon, daß ich Dir in Deiner Not irgendwie beistehen könne. Dein Brief vom 17-ten d. M. beweist mir nun zu meiner großen Freude, daß Du auch ohne meine Hilfe ein gutes Stück vorwärts gekommen bist. Heute möchte ich nun über das mir Mitgeteilte Dir einige Bemerkungen machen, die möglicherweise Dir förderlich sein werden.

Die beiden Gleichungen

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}, \qquad \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}$$

sind richtig, ich halte es aber für gut, daß Du mir etwas ausführlichere Herleitung derselben gebest.

Betrachtet man s_1, $\sqrt{S_1}$ so, wie diese Größen von Dir definiert werden, als Funktionen von x_1, x_2 (siehe das beigelegte Blatt), so hat man

$$\frac{1}{\sqrt{R(x_1)}} = \frac{\frac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\sqrt{S_1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{-\frac{\partial s_2}{\partial x_2}}{\sqrt{S_2}}$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}$$

Setzt man dann in allen Formeln

$$-\sqrt{R(x_1)} \quad \text{für} \quad \sqrt{R(x_2)}$$

so verwandeln sich s_2, $\sqrt{S_2}$ und es ergibt sich die zweite Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}$$

Es handelt sich jetzt noch hauptsächlich darum, x_1, x_2 durch s_1, s_2 auszudrücken. Dies habe ich in der Beilage ausgeführt, soweit es angeht. Dabei stellt sich heraus, daß, wenn man von den Differenzialgleichungen

$$dt_0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} \qquad dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}$$

ausgeht und t_0, als unabhängige Variable betrachtet, wohl $s_1 + s, s_1, s_2$ und auch

$$\sqrt{s_1 - l_1}\sqrt{s_2 - l_1}, \qquad \sqrt{s_1 - l_2}\sqrt{s_2 - l_2}, \qquad \sqrt{s_1 - l_3}\sqrt{s_2 - l_3}$$

eindeutige Funktionen von t_0, t sind, *nicht aber* x_1, x_2 ob die letzteren Größen eindeutige Funktionen von t werden, wenn man $t_0 = 0$ setzt, kann ich aus den von mir entwickelten Ausdrücken nicht beurteilen; ich zweifle aber daran, da (für $\lambda = 1, 2, 3$)

$$(\sqrt{s_1 - l_\lambda} + \sqrt{s_2 - l_\lambda})^2, \qquad (\sqrt{s_1 - l_\lambda} - \sqrt{s_2 - l_\lambda})^2 \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

eindeutige Funktionen von t_0, t sind, so kann man nur behaupten, daß $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}$ sich durch *Quadrate Wurzeln* eindeutiger hyperelliptischen Funktionen von t ausdrücken lassen.

Ist also Dein Beweis, daß x_1, x_2 *unendliche* Funktionen von t seien, *zuverlässig*, so ist nur zweierlei möglich:

Entweder müssen die von mir mit

$$\frac{g_1}{g_0}, \qquad \frac{g_2}{g_0}$$

bezeichneten Ausdrücke sich allgemein auf rationale Funktionen von

$$s_1 + s_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad \sqrt{s_1 - l_1}\sqrt{s_2 - l_1}, \quad \sqrt{s_1 - l_2}\sqrt{s_2 - l_2},$$
$$\sqrt{s_1 - l_3}\sqrt{s_2 - l_3}$$

reduzieren — denn daß dies bei der Annahme $t_0 = 0$ geschehe, kann ich nicht glauben — oder es muß möglich sein, x_1, x_2 durch zwei andere Größen s_1', s_2' so auszudrücken, daß

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{(\alpha s_1' + \beta)\, ds_1'}{\sqrt{R_2(s_1')}} + \frac{(\alpha s_2' + \beta)\, ds_2'}{\sqrt{R_2(s_2')}}$$

$$\frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{(\alpha' s_1' + \beta')\, ds_1'}{\sqrt{R_2(s_1')}} + \frac{(\alpha' s_2' + \beta')\, ds_2'}{\sqrt{R_2(s_2')}}$$

wird, wo R_2 wieder eine ganze Funktion vom 6-ten oder 5-ten Grade, und α, β, α', β' Konstanten bedeuten. Dann können sich nämlich die angegebenen Ausdrücke von x_1, x_2 in andere verwandeln, welche sich rational durch s' zu der Irrationalität $\sqrt{R_2(s')}$ gehörige

Funktionen $al\,(t_0, t)_\alpha$, $al\,(t_0, t)_{\alpha\beta}$ darstellen lassen. Dergleichen kommt vor; es ist mir schon in einem anderen Falle begegnet, wo zwei Differenzialgleichungen

$$dt_0 = P_0 dx_1 + Q_0 dx_2, \qquad dt_1 = P_1 dx_1 + Q_1 dx_2$$

in welchen P_0, Q_0, P_1, Q_1 gegebene Funktionen der Veränderlichen x_1, x_2 und die Bedingung der Integralität erfüllt waren, sich durch eine einfach aussehende Substitution in hyperelliptische umformen ließen.

Vielleicht führt Dich ein glücklicher Blick noch zu einer besseren Substitution als die von Dir angewandte, welche jedenfalls lehrt, daß sich p, q durch hyperelliptische Funktionen, in denen die Argumente lineare Funktionen von t sind, ausdrücken lassen — was doch immerhin ein Resultat ist. Aber Arbeit wird es noch kosten. Auch die Feststellung der unteren Grenzen der Integrale erfordert Sorgfalt. Die Zurückführung der Größen α, β, γ u. s. w. auf hyperelliptische Funktionen wird wohl keine wesentlichen Schwierigkeiten darbieten.

Die angegebenen Ausdrücke von

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right), \quad \wp'\left(\frac{u}{2}\right), \quad \sqrt{\wp u - l_1}, \quad \sqrt{\wp u - l_2}, \quad \sqrt{\wp(u) - l_3}$$

sind, wie ich glaube, neu.

Herr *Kronecker*, der täglich mehr und mehr in Selbstanbetung und souveräner Verachtung der «sogenannten» Analysis und deren Vertreter versinkt, hat nun seinen Groll über das schwere Unrecht, welches ihm dadurch angetan worden ist, daß die «Schwedischen Preisfragen» ohne seine Mitwirkung gestellt worden sind, auch öffentlich Luft gemacht. Er hat dazu rücksichtsvoller oder vorsichtiger Weise eine Zeit gewählt, wo ich in der Akademie nicht anwesend sein konnte. Die Antwort auf seine Notiz vom 12-ten April d.J. soll ihm aber nicht geschenkt werden, sobald die Einlieferungsfrist für die Konkurenzschriften verlaufen sein wird. Wie ich höre, *soll* Hr. Eneström an ihn geschrieben haben, die Kommission werde ihm ohne Zweifel für seine Berichtigung der von ihr begangenen Irrtümer dankbar sein. Wäre dies wirklich von Herrn E. geäußert, so würde ich das sehr bedauern. In der Tat hat Kr. nur in einem unwesentlichen Punkte recht; Dirichlet hat ihm über den Zusammenhang zwischen dem Stabilitätsbeweis für das Planetensystem mit seinen Untersuchungen über die Integration der dynamischen Differenzialgleichungen nichts *mitgeteilt*. In allem übrigen halte ich alles, was ich gesagt habe, unbedingt fest, und werde dies zu begründen. Doch genug davon für jetzt.

Ich hoffe sehr, Du werdest diesmal wenigstens auf kurze Zeit während der Ferien nach Berlin kommen. Ich gedenke bis zum

I Juli hier zu bleiben, von da aber in der Nähe, wahrscheinlich im Harz mich aufzuhalten. Ich hätte Dir noch manches zu sagen — ob dies noch geschehen könne, steht sehr dahin; der verflossene Winter hat mir einen zu argen Stoß gegeben.

Mit den freundlichsten und herzlichsten Grüßen von mir und den Meinigen

Dein treuer Freund Weierstraß

Beilage

Es sei $R(x) = Ax^4 + Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$ eine ganze Funktion 4-ten Grades von x, a — eine der Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$, u — eine unbeschränkte veränderliche Größe und $\varphi(u)$ die einzige elliptische Funktion, welche für x gesetzt, der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du$$

genügt und für $u = 0$ den Wert a annimmt. Dann hat man

$$\varphi(u) = a + \frac{b}{\wp u - c},$$

wo $b = \frac{1}{4} R'(a)$, $c = \frac{1}{24} R'(a)$ und die Invarianten (g_2, g_3) der Funktion $\wp u$ übereinstimmen mit den Invarianten von $R(x)$.

Setzt man nun unter u_1, u_2 zwei voneinander unabhängige Veränderlichen vorstehend

$$s_1 = \wp(u_1), \qquad \sqrt{S_1} = \wp'(u_1), \qquad \left(S_1 = 4s_1^2 - g_2 s_2 - g_3\right)$$
$$s_2 = \wp(u_2), \qquad \sqrt{S_2} = \wp'(u_2), \qquad \left(S_2 = 4s_2^2 - g_2 s_2 - g_3\right)$$
$$x_1 = \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right), \qquad \sqrt{R(x_1)} = \varphi'\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)$$
$$x_2 = \varphi\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right), \qquad \sqrt{R(x_2)} = \varphi'\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)$$

so wird

$$s_1 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2}, \quad s_2 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$

wo

$$R(x_1, x_2) = Ax_1^2x_2^2 + 2B(x_1 + x_2)x_1x_2 + 6Cx_1x_2 + \\ + 2B'(x_1 + x_2) + A' + C(x_1 - x_2)^2$$

und

$$\sqrt{S_1} = \left(\frac{R(x_2)}{(x_2-x_1)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_2)}{(x_2-x_1)^2}\right)\sqrt{R(x_1)} -$$
$$- \left(\frac{R'(x_1)}{(x_1-x_2)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_1)}{(x_1-x_2)^2}\right)\sqrt{R(x_2)}$$

$$\sqrt{S_2} = \left(\frac{R(x_2)}{(x_2-x_1)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_2)}{(x_2-x_1)^2}\right)\sqrt{R(x_1)} -$$
$$- \left(\frac{R(x_1)}{(x_1-x_2)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_1)}{(x_1-x_2)^2}\right)\sqrt{R(x_2)}$$

$$\frac{N}{2}\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = (l_1(l_2-l_3)\xi_1 + l_2(l_3-l_1)\xi_2 + l_3(l_1-l_2)\xi_3)((l_2-l_3)\xi_2\xi_3 +$$
$$+ (l_3-l_1)\xi_3\xi_1 + (l_1-l_2)\xi_1\xi_2) - (l_1(l_2-l_3)\xi_2\xi_3 +$$
$$+ l_2(l_3-l_1)\xi_3\xi_1 + l_3(l_1-l_2)\xi_1\xi_2)((l_2-l_3)\xi_1 +$$
$$+ (l_3-l_1)\xi_2 + (l_1-l_2)\xi_3),$$

wo

$$N = ((l_2-l_3)\xi_1 + (l_3-l_1)\xi_2 + (l_1-l_2)\xi_3)^2$$

Der Ausdruck auf der Rechten d. v. Gl. reduziert sich zunächst auf

$$(l_2-l_3)(l_3-l_1)(l_1-l_2)\{(\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_3 + (\xi_2^2-\xi_3^2)\xi_1 + (\xi_3^2-\xi_1^2)\xi_2\}$$

Aber

$$\xi_1^2-\xi_2^2 = -(l_1-l_2), \quad \xi_2^2-\xi_3^2 = -(l_2-l_3), \quad \xi_3^2-\xi_1^2 = -(l_3-l_1)$$

also ist

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{-2(l_2-l_3)(l_3-l_1)(l_1-l_2)}{(l_2-l_3)\xi_1 + (l_3-l_1)\xi_2 + (l_1-l_2)\xi_3}$$

Hier noch erhält man:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{g_1\{\sqrt{s_1-l_1},\ \sqrt{s_1-l_2},\ \sqrt{s_1-l_3},\ \sqrt{s_2-l_1},\ \sqrt{s_2-l_2},\ \sqrt{s_2-l_3}\}}{g_0\{\sqrt{s_1-l_1},\ \ldots\ .\}_{\xi}}$$

$$\frac{x_1-x_2}{2} = \frac{g_2\{\sqrt{s_1-l_1},\ \ldots\ .\}}{g_0\{\sqrt{s_1-l_1},\ \ldots\ .\}_{\xi}},$$

wo g_0, g_1, g_2 ganze homogene Funktionen 2-ten Grades der Größen.

$$\sqrt{s_1-l_1}, \qquad \sqrt{s_1-l_2}, \qquad \sqrt{s_1-l_3}$$

so wie auch eben solche Funktionen von der Größen $\sqrt{s_2-l_1}$, $\sqrt{s_2-l_2}$, $\sqrt{s_2-l_3}$ sind. Dabei sind in Beziehung auf s_1, s_2 [symmetrische] Vermögen dieser Gleichungen lassen sich von x_1, x_2 durch s_1, s_2 folgendermaßen ausdrücken. Es ist

$$\frac{x_1+x_2}{2} = a + \frac{b}{2}\,\frac{\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)+\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-2C}{\left(\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)-C\right)\left(\wp\left(\frac{u_2+u_1}{2}\right)-C\right)}$$

$$\frac{x_1-x_2}{2} = \frac{b}{2}\,\frac{\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)}{\left(\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)-C\right)\left(\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-C\right)}$$

ferner: wenn $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)=\wp_1$, $\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)=\wp_2$ gesetzt wird,

$$\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)=\frac{2(\wp_1\wp_2-{}^1/_2 g_2)(\wp_1+\wp_2)-g_3}{(\wp_1-\wp_2)^2}$$

$$\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\cdot\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)=\frac{(\wp_1\wp_2+{}^1/_4 g_3)^2+g_3(\wp_1+\wp_2)}{(\wp_1-\wp_2)^2}$$

$$\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)=-\frac{\wp'\left(\frac{u_1}{2}\right)\wp'\left(\frac{u_2}{2}\right)}{(\wp_1-\wp_2)^2}$$

daraus ergibt sich

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{b}{2}\,\frac{g_2\left(\wp\left(\frac{u_1}{2}\right),\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)}{g_0\left(\wp\left(\frac{u_1}{2}\right),\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)}+a$$

$$\frac{x_1-x_2}{2}=\pm\frac{b}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{u_1}{2}\right)\wp'\left(\frac{u_2}{2}\right)}{g_0\left(\wp\left(\frac{u_1}{2}\right),\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)},$$

wo g_0, g_2 ganze, und zwar symmetrische Funktionen von $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)$ $\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)$ bezeichnen. Beide sind in Beziehung auf jede der Größen $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)$, $\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)$ vom 2-ten Grade.

Es bleibt also noch übrig $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)$, $\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)$, $\wp'\left(\frac{u_1}{2}\right)$, $\wp'\left(\frac{u_2}{2}\right)$, $s_1=\wp(u_1)$, $s_2=\wp(u_2)$ auszudrücken.

Aus der Formel für $\sigma_\lambda(u+v), \sigma_\lambda(u-v)$ ergibt sich, wenn man $\frac{u}{2}$ für u, $\frac{v}{2}$ für v setzt

$$\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma^4(u)} = \left(\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_\lambda\right)^2 - ((l_\lambda - l_\mu)(l_\lambda - l_\nu)) = \wp^2\left(\frac{u}{2}\right) -$$
$$- 2l_\lambda \wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_\lambda^2 - l_\mu l_\nu$$
$$\frac{\sigma_\lambda(u) - \sigma_\mu(u)}{\sigma^4(u)} = 2(l_\mu l_\nu)\,\wp\left(\frac{u}{2}\right) - 2(l_\mu - l_\lambda)l_\nu$$

und somit

$$\frac{\sigma_1(u) - \sigma_2(u)}{\sigma_1(u) - \sigma_3(u)} = \frac{l_2 - l_1}{l_3 - l_1} \frac{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_3}{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_2}$$
$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{(l_2 - l_3)\, l_1\sigma_1(u) + (l_3 - l_1)\, l_2\sigma_2(u) + (l_1 - l_2)\, l_3\sigma_3(u)}{(l_2 - l_3)\,\sigma_1(u) + (l_3 - l_1)\,\sigma_2(u) + (l_1 - l_2)\,\sigma_3(u)}$$

setzt man $\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)} = \xi_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ so hat man also

$$\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{l_1(l_2 - l_3)\,\xi_1 + l_2(l_3 - l_1)\,\xi_2 + l_3(l_1 - l_2)\,\xi_3}{(l_2 - l_3)\,\xi_1 + (l_3 - l_1)\,\xi_2 + (l_1 - l_2)\,\xi_3}$$

Hieraus folgt weiter der

$$\frac{d\xi_\lambda}{du} = \xi_\mu \xi_\nu$$

80. Berlin, Friedrich-Wilhelm Str. 14. d. 22. Juni 88.

Meine liebe Freundin, ich habe Deine beide letzten (undatierten) Briefe, deren Inhalt mir viel Freude gemacht hat, nicht sofort beantworten können, teils weil ich mich noch immer schlecht befinde, teils aber auch, weil ich Dir bis jetzt noch nichts Bestimmtes über meine Sommerpläne mitteilen konnte. Zu dem letzteren bin ich jetzt imstande. Ich werde mit den Meinigen am 2 Juli mich nach Wernigerode im Harz, Müllers Hotel a. d. Salzberge begeben. (Der Ort liegt nahe bei der Eisenbahn, mit der die Courrierzüge von Paris nach Hamburg und Berlin gehen; von der Station Kreiensen führt eine Zweigbahn dahin). Ich gedenke dort mindestens zwei Monate zu bleiben.

Ich habe Dir schon neulich geschrieben, daß ich dringend wünsche, in diesem Sommer Dich zu sehen und einige Zeit bei mir zu

haben. Der Zustand meiner Gesundheit, die einen argen Stoß erhalten hat, macht es aber nötig, daß ich einige Wochen lang ganz meiner körperlichen Erholung widme, während dieser Zeit würdest Du von mir als Mathematiker wenig haben. Dagegen würde es mir äußerst erwünscht sein, wenn Du Dich so einrichten könntest, von Anfang August an auf der Rückreise einige Wochen mit uns in dem genannten, durch eine sehr gesunde Luft sich auszeichenden Ort zu verleben. Das Hotel soll gut sein und hat Raum genug, namentlich für eine so wenig anspruchsvolle Dame wie Du bist. Ich hoffe, auch Mittag-Leffler auf der Rückreise bei mir ansprechen wird.

Hoffentlich erreicht Dich dieser Brief, wenn Du schon von London fort sein solltest und erwarte ich *baldige* Antwort von Dir.

In Deiner Arbeit hast Du allerdings seit Deinem etwas verzweiflungsvoll lautenden Briefe vom 7-ten Mai einen erheblichen Schritt vorwärts gemacht.

Es bleibt aber noch vieles auszuführen. Indes hast Du wohl getan, die Arbeit so, wie sie jetzt ist, einzureichen, und Hermite hat Dir wohl geraten. Geh'also frischen Mutes an die weiteren Entwicklungen. Eine nicht gerade angenehme Untersuchung muß durchgeführt werden, wen Du zu *fertigen* Resultaten gelangen willst, nämlich die Untersuchung der Wurzeln der Gl[eichung] $R_1(s) = 0$ Drei von ihnen sind immer reell; soviel ich sehe, können die beiden anderen auch reell und auch beide imaginär sein. Ferner ist festzustellen, wie die reellen Wurzeln aufeinander folgen. Nur wenn dies alles abgemacht ist, wirst Du dazu gelangen, p, q, in den einfachsten *reellen* Formen darzustellen. Was das Weitere angeht, so glaube ich kaum, daß aus den algebraischen von Dir gefundenen Ausdrücken der Größen γ, γ', γ'' sich einfache Darstellungen derselben durch θ Funktionen ergeben werden. Ich würde Dir vorschlagen, einen anderen Weg einzuschlagen.

Es sei $R(x) = A(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n)$ eine ganze Funktion von x mit reellen Koeffizienten. Die Größen $a_0, \ldots, a_n$ mögen so geordnet sein, wie in der Henoch'schen Dissertation (De funktionum Abelianorum periodicis) angegeben werden.

Werden dann zwischen vier Variablen u_1, u_2, x_1, x_2 die D[ifferential]-Gleichungen

$$du_1 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}, \qquad du_2 = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}$$

angenommen und festgesetzt, daß für ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$) die Größen x_1, x_2 solche Werte annehmen, für welche $R(x_1)$, $R(x_2)$ beide positiv sind, und setzt man ferner unter α, β irgend zwei der Zahlen a, b von 4

vorstehenden

$$p_\alpha = \sqrt{E_\varkappa (x_1 - a_\alpha)(x_2 - a_\alpha)},$$

wo

$$E_{2a-1} = (-1)^{a-1}, \qquad E_{2b} = (-1)^b$$
$$(a = 1, 2) \qquad (b = 0, 1, 2)$$

$$p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta \left\{ \frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1 - a_\alpha)(x_2 - a_\beta)(x_1 - x_2)} + \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_3 - a_\alpha)(x_2 - a_\beta)(x_2 - x_1)} \right\}$$

so sind p_α, $p_{\alpha 3}$ eindeutige Funktionen von u_1, u_2 von denen bei reellen Werten der letzteren Größen ebenfalls reelle Werte hat, wofür θ_α reell ist, und ebenso $p_{\alpha\beta}$ wenn a_α, a_β beide reell sind.

Substituiert ferner für u_1, u_2 ganze lineare Funktionen einer Veränderlichen t mit reellen Koeffizienten

$$u_1 = c_1 t + c_1', \qquad u_2 = c_2 t + c_2'$$

so bestehen, wenn α, β, γ irgend drei (voneinander verschiedene) Zahlen aus der Reihe 0 1, 2, 3, 4 sind, unter den 6 Größen

$$p_\alpha, \quad p_\beta, \quad p_\gamma, \quad p_{\alpha\beta}, \quad p_{\beta\alpha}, \quad p_{\alpha\gamma}$$

und der Veränderlichen t die folgende 6 Differenzialgleichungen:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{E_\beta (c_1 - a_\gamma c_2)}{2(a_\gamma - a_\beta)} p_\beta p_{\alpha\beta} - \frac{E_\gamma (c_1 - a_\beta c_2)}{2(a_\gamma - a_\beta)} p_\gamma p_{\alpha\gamma}$$

$$\frac{dp_\beta}{dt} = \frac{E_\gamma (c_1 - a_\alpha c_2)}{2(a_\alpha - a_\gamma)} p_\gamma p_{\beta\gamma} - \frac{E_\alpha (c_1 - a_\gamma c_2)}{2(a_\alpha - a_\gamma)} p_\alpha p_{\alpha\beta}$$

$$\frac{dp_\gamma}{dt} = \frac{E_\alpha (c_1 - a_\beta c_2)}{2(a_\beta - a_\alpha)} p_\alpha p_{\gamma\alpha} - \frac{E_\beta (c_1 - a_\alpha c_2)}{2(a_\beta - a_\alpha)} p_\beta p_{\beta\gamma}$$

$$\frac{dp_{\beta\gamma}}{dt} = \frac{A}{2}(c_1 - a_\alpha c_2) p_\beta p_\gamma - \frac{c_2}{2} E_\alpha p_{\alpha\beta} p_{\gamma\alpha}$$

$$\frac{dp_{\gamma\alpha}}{dt} = \frac{A}{2}(c_1 - a_\beta c_2) p_\gamma p_\alpha - \frac{c_2}{2} E_\beta p_{\beta\gamma} p_{\alpha\beta}$$

$$\frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{A}{2}(c_1 - a_\gamma c_2) p_\alpha p_\beta - \frac{c_2}{2} E_\gamma p_{\gamma\alpha} p_{\beta\gamma}$$

Man hat also hier ein Beispiel von sechs Größen, die von einer Veränderlichen t dargestalt abhängen, daß ihre sämtlichen, nach dieser Veränderlichen gewonnenen Ableitungen ganze Funktionen derselben 6 Größen sind. In dem Falle des von Dir behandelten

Problemes $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ man hat also

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{E_\beta p_\alpha p_{\alpha\beta}}{2(a_\gamma - a_\beta)} - \frac{E_\gamma p_\gamma p_{\gamma\alpha}}{2(a_\gamma - a_\gamma)}; \qquad \frac{dp_{\beta\gamma}}{dt} = 2p_\beta p_\gamma$$

$$\frac{dp_\beta}{dt} = \frac{E_\gamma p_\gamma p_{\beta\gamma}}{2(a_\alpha - a_\gamma)} - \frac{E_\alpha p_\alpha p_{\alpha\beta}}{2(a_\alpha - a_\gamma)}; \qquad \frac{dp_{\gamma\alpha}}{dt} = 2p_\gamma p_\alpha$$

$$\frac{dp_\gamma}{dt} = \frac{E_\alpha p_\alpha p_{\gamma\alpha}}{2(a_\beta - a_\alpha)} - \frac{E_\beta p_\beta p_\gamma}{2(a_\beta - a_\alpha)}; \qquad \frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = 2p_\alpha p_\beta,$$

wo jetzt bei passender Bestimmung von α, β, γ, E_α, E_β. F_γ

$$p_\alpha = \sqrt{E_\alpha (s_1 - l_1)(s_2 - l_2)}, \qquad p_\beta = \sqrt{E_\beta (s_1 - l_2)(s_2 - l_2)},$$
$$p_\gamma = \sqrt{E_\gamma (s_1 - l_3)(s_2 - l_1)}$$

ist. Ich bemerke dabei, daß l_1, l_2, l_3 hier nicht die Wurzeln der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3$, sondern die Wurzeln der Gl[eichung] $S = 4(s - c)^3 - g_2(s - c) - g_3 =$ bedeuten, wo $c = l_1^2/l^2$; es ist $l_1^2 = 2(p^2 + q^2 + r^2 - 2c_0\gamma)$, der Ausdruck auf der Rechten dieser Gl. ist aber nicht notwendig positiv, es würde daher besser für geschrieben. Zi/Z2; es

Dies vorausgeschickt, seien p, q an die Form

$$p = \frac{P}{R_0}, \qquad q = \frac{Q}{R_0}$$

gebracht, wo P, Q, R_0 ganze Funktionen zweiten Grades von p_α, p_β, p_γ bezeichen. Man erhielt also mittels der vorstehenden Formel

$$\frac{dp}{dt} = \frac{P_1}{R_0^2}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{Q_1}{R_0^2},$$

wo P_1, Q_1 ganze Funktionen 4-ten Grades der 6 Größen p_α, $p_{\alpha\beta}$ sind. Es ist aber $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} qr$, also $\frac{2P_1}{R_0} = Qr$ ich vermute deshalb, daß $2P_1$ durch Q teilbar sein wird und der Quotient entweder eine ganze Funktion der 6 Größen p_0, $p_{0\beta}$, möglicherweise aber auch eine solche nur dadurch wird, daß man von den 15 Größen p_0, ..., p_α, p_{01}, ... $p_{\alpha\beta}$, einige hinzunimmt. Ist das richtig, so erhält man

$$r = \frac{R}{R_0},$$

wo R ein als ganze Funktion einer gewissen Anzahl der genannten 16 Größen zusammengesetzter Ausdruck ist.

Aus den gegebenen Differenzialgleichungen erhält man dann

$$\gamma'' = \frac{1}{E_0}\frac{dr}{dt} = \frac{N}{R_0^2} \qquad \gamma' = \frac{1}{E_0}\left(pr - 2\frac{dq}{dt}\right) = \frac{M}{R_0^2}$$

$$\gamma = \frac{p^2+q^2}{E_0} + \frac{r^2}{2E_0} - L_1 = \frac{L}{R_0^2},$$

wo L, M, N ganze Funktionen der genannten Größen vom 4-ten Grade sind.

So denke ich, wirst Du völlig entwickelte Schlußresultate erlangen können. Es wird also darauf ankommen, zunächst p, q auf die angegebene Form zu bringen. Dabei ist ein lästiger Umstand, daß in den Ausdrücken von x_1, x_2 durch $\wp u$, $\wp v$ eine Wurzel der Gl. $R(x) = 0$ vorkommt, während doch für das Endresultat, d. h. wenn x_1, x_2 durch p_α, p_β, p_γ ausgedrückt werden, gleichgültig sein muß, welche Wurzel man wählt. Es muß sich also jede der Größen x_1, x_2 in Form $\frac{x_1'}{x_1}$, $\frac{x_2'}{x_2}$ darstellen lassen, in der Art, daß x_1, x_2, x_1' x_2' ganze lineare Funktionen von p_α, p_β, p_γ werden und die Koeffizienten derselben rational aus den l_1, l_2, l_3 und den Koeffizienten von $R(x)$ zusammengesetzt sind, unter Adjunktum von i. Ist dies in's Reine gestellt, so hat man nur die beiden Fälle qu unterscheiden, ob die l_1, l_2, l_3 alle drei reelle, oder zwei von ihnen conjugierte komplexe Größen sind, das Übrige wird sich dann schon machen.

Weißt Du aber auch schon etwas über die Form der übrigen 6 Größen, welche außer γ, γ', γ'' die Relation des betrachteten Körpers bestimmen?

Das Problem, ganz allgemein zu untersuchen, welche Relation unter den Größen A, B, C, x_0, y_0, z_0 bestehen müssen, daß aus den 2 bekannten Integralen des Rotationsproblems noch ein drittes algebraisches Integral stattfindet, ist interessantgenug; indessen zuerst muß die angefangene Arbeit fertig gemacht werden. Ich bin gern bereit, auch wärend des Juli mit Dir darüber in Korrespondenz zu bleiben.

Meine Schwestern lassen Dich freundlichst grüßen und werden sich herzlich freuen, wenn Du es möglich machen kannst, einige Wochen mit uns zusammen zu leben.

Hiermit schließe ich für diesmal, ich hätte noch manches Dir mitteilen können, zum Teil recht unangenehme Dinge, aber ich will mir damit nicht den heute ausnahmsweise recht guten Tag verderben. Also ein herzliches Lebewohl von Deinem treuen Freunde

Weierstraß

81. N. B. Wernigerode in/Harz
Nicht Weinigerode! Müllers Hotel, 13.7.88
Meine teuere Freundin!

Deinen lieben (wie gewöhnlich undatierten, aber am 11-ten zur Post gegebenen) Brief haben wir soeben, 8 Uhr Vormittag erhalten und beantworte ich denselben, um jeden Verzug zu vermeiden, sofort selbst.

Wir freuen uns alle ungemein, daß Du Dein Versprechen, uns hier zu besuchen, zu halten imstande bist. Hoffentlich wirst Du uns auch gutes Wetter mitbringen, denn bis jetzt ist es ziemlich rauh hier gewesen. Indessen hat der hiesige Aufenthalt doch wohltätig auf mich gewirkt (wir sind seit dem 3-ten hier), und fühle ich mich merklich frischer als in der letzten Zeit in Berlin.

Ich werde darum auch schon vor dem 1-ten August nicht jedes mathem[atische] Gespräch zu vermeiden haben; wenigstens werde ich meine alte liebe Schülerin in strenge Aufsicht nehmen können, damit sie fleißig (d. h. einige Stunden des Tages) arbeite. Denn daß die Arbeit, die Du jetzt unter Händen hast, nicht nur rechtzeitig fertig werde, sondern auch der Form nach allen Ansprüchen völlig genüge, daran ist sehr viel gelegen.

Ein Zimmer in unserem Hotel wird für Dich bereit stehen. Du darfst aber keine großen Ansprüche machen, denn Wernigerode ist kein Badeort, sondern wird nur seiner guten Luft wegen aufgesucht, aber nur im Juli und August. Du wirst übrigens wohl daran tun, hier wieder als «Frau von» aufzutreten; das hat auf die Bedienung wesentlichen Einfluß. Der Pensionspreis ist übrigens, obwohl man ziemlich einfach lebt, nicht gerade billig— 6 Mark für den Tag, also wenn man Trinkgeld (Service), Wäsche u. s. w. hinzurechnet, etwa 8 MK $\approx$ 10 fr. täglich. Gut wirst Du übrigens daran tun, wenn Du Dir Deinen Tee mitbringst, denn der hiesige ist abscheulich, wogegen die Schokolade genießbar ist.

Was den Weg angeht, den Du zu nehmen hast, so mußt Du jedenfalls über Kreiensen. Diese Station wird man wahrscheinlich in Paris kennen, da z. B. auch der Weg nach Hamburg darüber führt. Dort angelangt, wirst Du in wenigen Stunden hier sein. Soviel ich weiß, gibt es einen direkten Schnellzug von Paris, der im Morgengrauen in Kreiensen anlangt. Fährst Du mit demselben, so bist [Du] früh morgens hier. Ich bitte aber, sobald Du übersehen kannst, wann Du in Kr[eiensen] sein wirst, zu telegraphieren (aber daran denkend, daß es hier keinen Nachtdienst gibt), denn von dem Bahnhof bis zu unserem Hotel ist es ziemlich weit und Droschken gibt es nicht, ich muß Dir also einen Hotelwagen schicken.

Deine mathematischen Papiere hast Du doch bei Dir und bringst sie mit?

Mittag-Leffler hat mir bestimmt versprochen, auf der Rückreise einige Tage bei mir zu verweilen. Auch Paul du Bois Reymond, den Du von Heidelberg her kennst, wird gegen den 10. August auf 1—2 Tage kommen. Hettner mit seiner jungen Frau wird den ganzen August in einem benachbarten Dorf sich aufhalten.

Meine Schwestern senden Dir ihre herzlichsten Grüße und freuen sich sehr auf das Zusammensein mit Dir.

Dein treu ergebener K.W.

82. Berlin, W. Friedrich-Wilhelmstr. 14
den 1. Febr. 89.

Meine liebe Sonia, ich erfahre soeben durch einen Brief von Mittag-Leffler, Du seiest noch in Paris und fühlest Dich so angegriffen, daß Du mit dem Gedanken umgehest, Urlaub zu nehmen. Ich hatte geglaubt, Du seiest längst wieder in Stockholm und in voller Tätigkeit; um so betroffener hat mich Mittag-Leffler's Mitteilung gemacht, weshalb ich sofort an Dich schreibe, um von Dir selbst zu erfahren, wie es mit Dir steht.

Ich bitte Dich, sobald Du diesen Brief gelesen, so setze Dich *sofort* hin und antworte mir mit zwei Zeilen, wenn es nicht mehr sein können, dabei *genau* angebend, wo Dich in der nächsten Zeit Briefe sicher treffen können.

Ich hoffe, daß dieser Brief Dir trotz der mangelhaften Wohnungsangabe zukommen werde. Ich habe Dir zu der schönen Weihnachtsbescherung, die Du Dir errungen, nicht sofort meine Glückwünsche dargebracht, einmal, weil ich mir dachte, daß Du sie, umgeben von der Huldigung von ganz Paris — so schreibt Hermite mir — leicht entbehren werdest, und dann auch, weil ich wieder leidend war und vor allem verstimmt aus verschiedenen Gründen. Daß wir, ich und meine Schwestern vor allem, dann auch die Freunde, die Du hier hast, Fuchs, Hettner, Knoblauch, Hensel, P. Dubois und der kürzlich heimgekehrte Hansemann — uns herzlich über Deinen Erfolg gefreut haben, brauche ich nicht zu versichern. Ich ganz besonders empfinde darüber eine wahre Genugtuung — haben doch jetzt kompetente Richter das Verdikt abgegeben, daß es mit meiner «treuen Schülerin», — meiner «Schwäche» — doch nicht «eitel Humbug» ist.

P. Dubois hat in einem Feuilleton-Artikel der Nationalzeitung seinem Enthusiasmus Ausdruck gegeben — ich weiß nicht, ob Dir alles gefallen wird, was er gesagt hat, aber, was er auch versehen haben mag, es ist dafür in der Bellevue-Straße ganz gehörig abgekanzelt worden (Daß in derselben Stelle der Erfolg der «Schwedischen Preisfrage» mit geringer Befriedigung aufgenommen werde und

zu scharfer Kritik Anlaß gegeben hat, wird Dich nicht verwundern. Das Schlimmste dabei ist aber, daß bei dieser Gelegenheit die Namen der Preisrichter dem großen Publikum bekannt geworden sind — natürlich sind das in den Augen der Menge die ersten Mathematiker Europas). Aber sprechen wir von ernsteren Dingen. In erster Linie steht zunächts die Befestigung Deiner Gesundheit. Ich denke mir, Du leidest von der Folge teils der Überarbeitung, teils der Aufregung, in welche Dich der diesmalige Aufenthalt in Paris hat versetzen müssen. Ich möchte Dir aber sehr raten, daß Du, sobald es ohne Gefahr für Dich geschehen kann, nach Stockholm zurückkehren mögest. Es handelt sich jetzt um Deine definitive Anstellung, deren Erreichung, welche Pläne Du auch für die Zukunft haben mögest, für Dich von der größten Wichtigkeit ist. Stehst Du erst in Stockholm fest, so gibt Dir dies nach allen Seiten hin halt, ohne Dich in der Freiheit künftiger Entschließungen zu beschränken. Ich glaube, Du kannst in diesem Punkte dem, was Dir M[ittag]-L[effler] anrät, unbedingt folgen. Solange aber, als Du von Stockholm fern bist, fürchte ich, wird die Sache nicht vom Fleck rücken.

Prächtig wäre es, wenn Du den Rückweg über Berlin nähmest. Feste freilich kann ich Dir nicht in Aussicht stellen, wohl aber, daß treue Herzen sich Deiner aufrichtig erfreuen werden.

Meine Schwestern lassen Dich auf das herzlichste grüßen — auch Fränzchen, der von dem großen, Dir gewordenen Preise hörend, die Bemerkung machte: «Nun wird aber die Tante Sonia ihrer Fuffi wundervolle Spielsachen von Paris mitbringen». Hiermit Lebewohl, liebe Freundin — ich wiederhole meine obige Bitte, und sehe mit Ungeduld baldigen — hoffentlich guten — Nachrichten von Dir entgegen.

D. K. Weierstraß

83. Berlin, 12.6.89

Meine liebe Sonia! Seit Monaten erwarte ich einen Brief, der mir Nachrichten von Dir, von Deinem Befinden, Deinen Plänen, Aussichten, Arbeiten bringe. Aber vergebens, ich wüßte nicht einmal Deinen Aufenthaltsort, wenn ich nicht durch Mittag-Leffler dann und wann etwas von Dir gehört hätte. Ist das recht?

Aber ich will Dir keine Vorwürfe machen — kann ich mir doch denken, in welcher Spannung Du seit Anfang des Jahres gelebt hast, und ich weiß, es ist nicht Deine Art, in kritischen Momenten des Lebens bei anderen — und wären es Deine bewährtesten Freunde — Rat und Beistand zu suchen. Aber als der älteste deiner Freunde nahm ich für mich das Recht in Anspruch, auch unaufgefordert ratend, warnend, aufklärend Deine Schritte zu begleiten, wenn ich der Über-

zeugung bin, daß Du Gefahr laufest, einen Weg zu betreten, der Dich von dem klar Dir vorgeschriebenen Ziele Deines Lebens weitab führen könnte. Du hast jetzt keinen sehnlicheren Wunsch, als Dir eine Stellung in Paris zu erringen. Aber wo soll diese beschaffen sein? Du hast an eine Lehrstelle an einer höheren Töchterschule oder drgl. gedacht. Das konnte doch wohl nur ein vorübergehender Gedanke sein. Eine solche Stellung würde eine Degradente für Dich sein — man würde sagen, Du habest Dich selbst einer Universitäts-Professur nicht gewachsen gefühlt und damit den Beweis geführt, daß zu Lehrer und Vertretern strenger Wissenschaft Frauen doch nicht befähigt seien.

Und doch war es einst Dein Ideal — und ist es hoffentlich auch jetzt noch — durch die Tat zu zeigen, daß ein Vorurteil und Beschränktheit die Frauen von der Beteiligung an den höchsten Bestrebungen der Menschheit bisher fern gehalten haben.

Nun höre ich aber von M.-L., daß Du gegenwärtig mit einem anderen Plane umgehest, nämlich in Paris noch einmal zu doktorieren, um Dir auf diese Weise den Zugang zu einer franz [ösischen] Fakultät zu errichten. Da muß ich Dich doch auf einen Umstand aufmerksam machen, an den Du wohl nicht gedacht hast. Zwar glaube ich zunächst nicht daran, daß es mit der Sache ernst werden könne. Ich bin der Meinung, daß der Rat, den man Dir gegeben, nur als Abschreckungsmittel hat wirken sollen. Auch bin ich überzeugt, daß man, wenn Du Deine Arbeit einreichtest und Dich zu allen Leistungen bereit erklärtest, irgend einen vergessenen Paragraphen auffinden würde, wonach Frauen nicht zur Promotion zugelassen werden können. Frage einmal Hermite auf's Gewissen, wie er darüber denkt. Mich macht aber ein anderer Umstand bedenklich: Wer von irgend einer Fakultät den Doktorgrad erlangt hat, kann dieselbe nicht ärger beleidigen, als wenn er denselben Grad von einer anderen Fakultät derselben Kategorie annimmt — dies nicht tun zu wollen — müssen sogar bei den öffentlichen Promotionen feierlich beschwören.

Promoviertest Du nun in Paris, so müßte dem Herkommen nach die Göttinger Fakultät Dir das verliehene Diplom entziehen. Das würde man vielleicht vermeiden, aber für alle, die sich für Deine Promotion in G[öttingen] interessiert haben, würde die Sache sehr peinlich sein. In Deutschland und wohl auch in Schweden würde jedenfalls ein heilloser Skandal entstehen, und auch Dir wohlgesinnte Personen möchten irre in Dir werden. Und wage das alles? Daß Du in Paris, wo jeder einflußreiche Gelehrte einen Schwarm von Klienten um sich hat, die er berücksichtigen *muß*, zu einer Deiner würdigen Stellung bei einer Fakultät gelangen würdest, daran glaube ich nicht — vielleicht eine Stelle in Besançon oder einer ähnlichen Provinzialstadt, wohin die Pariser nicht wollen, würde man Dir anbieten.

Indessen, wie Du auch über die Sache denken mögest, eins wirst Du doch als entscheidend erkennen; bevor Deine Anstellungsangelegenheit in Stockholm entschieden ist, darfst Du keinen Schritt tun, der darauf hindeutet, Du gedächtest nicht in St [okholm] zu bleiben. Ich hätte darüber noch vieles zu sagen — das bleibt für später.

Auf Deiner Rückreise wirst Du uns, wie ich als sicher annehme, besuchen. Ich bin entweder in Berlin oder doch in einem Orte, dem Du nahe vorbeikommst. Mit meiner Gesundheit geht es gar nicht gut; seit Februar habe ich mich mit nichts Ernstem beschäftigen können. Liege ich ausgestreckt auf dem Sopha, so empfinde ich kaum eine Unbehaglichkeit; aber sitzend oder gehend werde ich alsbald gliederlahm. Auf meine Stimmung hat der Zustand bis jetzt merkwürdigerweise nur wenig Einfluß. Den beiliegenden offenen Brief bitte ich Mittag-L[effler] zu geben, wenn er noch da ist. Sonst habe die Güte, den Inhalt desselben Herrn Poincaré mitzuteilen. Meine Schwestern und Pflegesohn, der sich sehr auf Fuffi freut, lassen herzlich grüßen.

Dein treu ergebener Weierstraß

84. Berlin, 5. 2. 90.

Meine liebste Freundin, ich habe vor Weihnachten an Dich geschrieben, weiß aber nicht, ob Dir mein Brief zugekommen ist, da Du, als er eintraf, von Stockholm abwesend warst.

Kranke Leute sind Egoisten, ich fange also mit mir selbst an, kann Dir aber leider nur berichten, daß ich fortwährend sehr leide und seit Ende November das Haus nicht mehr gelassen habe. Gegen Neujahr trat anscheinend eine wesentliche Besserung ein, dann verdarb die Influenza wieder alles, von der ich jetzt viermal einen Anfall gehabt habe. Der letzte war sehr gefährlicher Natur, eines Abends stellte sich ein Krampf in der Lunge ein, der den Arzt sehr bedenklich machte. Seit zwei Tagen geht es wieder besser; obwohl ich noch stark huste, habe ich doch die letzte Nacht und heute Vormittag eines mehrstündigen ruhigen Schlafes mich erfreut. Ein Glück ist, daß meine Verdauungsorgane vorzüglich fungieren, so daß ich hinreichend Nahrung zu mir nehmen kann, um nicht ganz von Kräften zu kommen.

Meine Schwestern sind auch nicht verschont geblieben; vom Neujahrstag lagen in 4 verschiedenen Stuben fiebernd: ich, Cläre, Elise, die Köchin, Fränzchen, der immer wohl gewesen ist, ebenso wie seine Wärterin, war sehr unglücklich darüber und fragte: «Warum ist denn jetzt eine solche Uneinigkeit im Hause?»

Nunmehr empfang einen herzlichsten Glückwunsch zu der Auszeichnung, welche Dir die Petersburger Akademie hat zukommen

lassen. Sie ist ja wohl verdient, aber ich habe mich doch aufrichtig gefreut, daß gerade von Rußland aus Dir die erste akademische Ehre zuteil geworden ist. In Berlin finden Ernennungen zu *mathematischen* Correspondenten spendenten nicht mehr statt. *Ich* will mich nicht mehr ärgern, K. [ronecker] scheint keinen der jetzigen Mathematiker einer solchen Ehre würdig zu halten, F [uchs] hat keine Initiative. Übrigens habe ich in den letzten 3 Jahren nur an einer Akademiesitzung teilgenommen.

Nun muß ish Dich aber bitten, mir *umgehend* das Heft über Anwendung der ellipt[ischen] Funktionen zurückschicken zu wollen. Der Eigentümer will es benutzen und hat mich diese Tage auf das dringendste gemahnt. Wenn Dir daran liegt, könnte ich es hier abschreiben lassen, ⟨unleserlich⟩ einige von Dir zu bezeichnende Portion[en].

Kannst Du mir über den Erfolg Deines Ruhmes etwas mitteilen? Es würde mich das sehr interessieren. Nun noch etwas über eine Angelegenheit, die auch sehr drückt. Ich hatte versprochen, über die Poincaré'sche Preisschrift ein ausführliches Referat auszuarbeiten, der mir abgedruckt werden sollte. Einen Teil davon hat Mittag-Leffler schon lange in Händen. Bei der Fortsetzung stießich auf Schwierigkeiten; es entstanden mir Zweifel an der Richtigkeit und Genauigkeit mehrerer von P[oincaré] ausgesprochenen Resultate. Dann erkrankte ich und mußte die Arbeit vorläufig ganz zurücklegen.

Ich hatte gehofft, durch Besprechungen mit Phragmen mit der Sache in's Reine zu kommen. Leider mußte ich darauf verzichten, und gegenwärtig ist keine Aussicht vorhanden, daß ich so bald meine Gedanken auf wissenschaftliche Gegenstände werde richten können. Auch ist mir alles, was ich mir zurecht gelegt hatte, wieder entschwunden. Was ist unter diesen Umständen zu tun? Darüber bitte ich Dich mit M. L. besprechen zu wollen. Ich kann nur zwei Vorschläge machen. Entweder M[ittag]-L[effler] teilt den Sachverhalt der Wahrheit gemäß mit, dabei versprechend, daß mein Referat, wenn es nur vergönnt sein werde, es zu vollenden in der Acta mitgeteilt werden solle, oder er läßt mein vorläufiges Votum, das dem Könige vorgelegt worden ist, abdrucken. Was darin steht, kann ich verantworten, dagegen muß ich offen gestehen, daß die enthusiastische Beurteilung der Preisschrift von P., welche Hermite verfaßt, hat Erwartungen erregt, welche die Schrift schließlich doch nicht rechtfertigt. Der Wert der P'schen Untersuchung liegt mehr in den *negativen* als in den *positiven* Resultaten derselben.

Meine Schwestern und Fränzchen lassen Duch, Fuffi und die M[ittag]-L[effler]'sche Familie sowie auch Herrn Phragmen, herzlichst grüßen, ich schließe mich dem an mit der Bitte um *baldige* Antwort.

Dein treu ergebener K. W.

1.

Милостивая государыня!

Я не смог, к сожалению, нанести Вам визит вчера вечером и, в связи с непредвиденными обстоятельствами, был лишен возможности известить Вас об этом. Но надеюсь, что завтра Вы обрадуете меня своим посещением.

С дружеским приветом.
Преданный Вам Вейерштрасс

Берлин
(суббота) 11 марта [18]71.

2.

Милостивая государыня!

Завтра после обеда я буду дома и буду рад видеть Вас у себя.

С дружеским приветом
Вейерштрасс

3 июня (суббота) [18]71.

3.

Из прилагаемого письма господина профессора Конера Вы увидите, милостивая государыня, что Вам предоставлено полное право пользования университетской библиотекой. Если же вдруг кто-либо из младших служащих станет вновь Вам чинить препятствия, то Вам следует только сослаться на это письмо.

С дружеским приветом.
Вполне преданный Вам
Вейерштрасс

6 ноя[бря] [18]71.

4.

Милостивая государыня!

Недавно я посоветовал Вам по вопросу пользования университетской библиотекой обратиться к университетскому библиотекарю профессору *Конеру*. Но так как я точно не знаю, разрешено ли вообще пользование библиотекой кому-либо, кроме матрикулированных студентов, то я считаю, что будет лучше, если я сам напишу вышеупомянутому господину. Это я сделаю сегодня же.

Оба поручительства прилагаются.

Одновременно доставляю себе удовольствие переслать Вам один экземпляр Минимальных поверхностей *Шварца*. Как я уже упоминал, Вы, очевидно, сможете найти в рукописи материал для одного из Ваших исследований. Мы еще будем иметь возможность более подробно поговорить об этом.

Вы и в дальнейшем можете обращаться ко мне по всем интересующим Вас математическим вопросам, не боясь затруднить меня этим. Для меня всегда будет большой радостью иметь возможность помочь Вам в Ваших занятиях. Нынешней зимой, кроме сред и четвергов, все послеобеденное время я буду проводить дома.

С дружеским приветом.

Преданный Вам

Вейерштрасс

Берлин, 14 ноя[бря]71.

5. Берлин, 14 янв[аря]1872

Милостивая государыня!

К сожалению, я не смогу Вас принять завтра, так как в результате простуды я уже несколько дней нездоров. Посылаю Вам поэтому свои наброски на тему, которая должна была послужить предметом нашего обсуждения. Они настолько полны, что Вы будете в состоянии разобраться в них и без моей помощи.

Я просил бы Вас вернуть мне *эти* бумаги к ближайшему четвергу, так как они понадобятся мне для моей следующей лекции.

Чтобы доказать общие формулы для простого случая, заметьте, что если $y = \sqrt{R(x)}$, а $R(x)$ есть целая функция степени $(2\rho + 1)$ — как раз это значение имеет в данном случае ρ — простейшей функцией $H(xy, x'y')$ будет та, в которой $P(x)$ обозначает делитель $R(x)$ степени ρ

$$H(xy, x'y') = {}^1/_2\left(1 + \frac{P(x)}{P(x')}\frac{y}{y'}\right)\frac{1}{x - x'}.$$

Именно она будет бесконечной в точках

$$x = x', \qquad a_1, \ldots, a_\rho,$$
$$y = y', \qquad 0, \ldots, 0,$$

если $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_\rho)$, притом для каждой первого порядка. Далее с $-\frac{1}{x - x'}$ начинается разложение по степеням $x - x'$ в предположении, что x будет находиться вблизи x', y — вблизи y'. Наконец, она будет нулем для значений $x = \infty$, $y = \infty$.

Тогда уравнение $\frac{d}{dx} H(xy, x'y') \ldots$ совпадает с уравнением, примененным мною в теории гиперэллиптических приближений, с помощью которых я определил соотношения между периодами интегралов первого и второго родов.

Как только я снова начну выходить, что, вероятно, произойдет через несколько дней, я позволю себе Вас навестить, чтобы условиться по поводу нашей следующей встречи.

С дружеским приветом.
Преданный Вам
Вейерштрасс

[5$_1$][1]**99**

Могу ли я, милостивая государыня, просить Вас обрадовать меня завтра после обеда Вашим посещением? Сегодня у меня объявился иногородний коллега, которого я должен принять.

Преданный Вам Вейерштрасс

19 января (пятница)
[1872]

6.

Могу я Вас попросить, уважаемый друг, списать мне на лист бумаги к этой встрече доказательство теоремы, о которой мы вчера рассуждали, и которым мне хотелось бы поделиться с одним другом?

У меня самого хватило бы времени на это, но, откровенно говоря, я очень неохотно пишу что-нибудь два раза и поэтому позволяю себе прибегнуть к Вашей помощи.

С дружеским приветом.
Преданный Вам
Вейерштрасс

25.3.72

[1] Здесь и далее номер в скобках соответствует архивному номеру письма.— *Ред.*

7.

Моя дорогая Софья!

Я только что нашел в своих бумагах еще несколько старых заметок насчет простейшего случая вариационного исчисления, который мы обсуждали. Несмотря на иную систему обозначений, Вы, как я думаю, сможете хорошо использовать их для работы. Поэтому я их и посылаю, предполагая, что Вы еще не начали свой трудовой день.

В эту ночь я много думал о Вас, иначе не могло и быть. Мои мысли обращались ко многому, но все время возвращались к одному и тому же предмету, о котором я еще сегодня должен переговорить с Вами. Не бойтесь, что я коснусь вопросов, о которых, по меньшей мере теперь, мы условились не говорить. То, что мне надо Вам сказать, тесно связано, главным образом, с Вашими научными стремлениями, но я не уверен, чтобы при той милой скромности, с которой Вы судите о том, чего Вы уже и теперь достигли, Вы были бы склонны согласиться с моим планом. Но все это лучше обсудить при встрече. Поэтому, хотя после нашего последнего и так сблизившего нас свидания прошло лишь несколько часов, разрешите мне снова прийти к Вам сегодня перед обедом на часок и высказать свои мысли [1].

Сердечно приветствую,

26 окт. 72 (утром) Ваш Вейерштрасс

8. 4 ноября 72

Мой дорогой друг!

Пересылаю Тебе при этом один лист, который Ты забыла вчера взять, но должен обратить Твое внимание на некоторые пункты, чтобы Тебе не пришлось впоследствии кое-что добавлять в своем сочинении.

Одна из обсуждавшихся нами вчера задач вариационного исчисления приводит *прежде всего* к доказательству того, что искомая кривая во всех точках, где ее вариация не подчинена никакому другому условию, а лишь тому, что интеграл I при этом остается неизменным, должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$H - \lambda\overline{H} = 0,$$

где λ имеет *повсюду* одно и то же значение. Для *этой* цели достаточно принять с самого начала

$$\xi = k\xi' + k_1\xi'', \qquad \eta = k\eta' + k_1\eta''$$

[1] Вейерштрасс, которому С. Ковалевская накануне рассказала о тяготившем ее в то время фиктивном браке с В. О. Ковалевским, решил предложить своей ученице готовить диссертацию.— *Ред.*

таким образом, чтобы ξ', η', ξ'', η'' являлись непрерывными функциями от t, которые исчезают во всех точках кривой, где ее вариация подчинена иным, чем вышеупомянутое, условиям. Кроме того, ξ'', η'' должны быть выбраны так, чтобы

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{H}(y_1\xi'' - x_1\eta'')\,dt$$

не обратился в нуль. После этого в обсужденном способе k_1 будет определена как функция k так, что исчезнет *полная* вариация $\Delta\overline{I}$. Остальное остается неизменным, как я это вчера указал и объяснил в заметке.

При развертывании дифференциального уравнения

$$H - \lambda\overline{H} = 0$$

под ξ, η отныне понимаем любые вариации от x, y, которые исчезают в вышеуказанных точках; подставляя $w = y_1\xi - x_1\eta$, получаем

$$\Delta I = \Delta(I - \lambda\overline{I}) = \int_{t}^{t_1} (H - \lambda\overline{H})\,w\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(E_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + E_2 w^2\right) dt$$

$+$ аналогичные члены, в которых под знаком интеграла стоят однородные функции не выше второго порядка от ξ, η, $d\xi/dt$, $d\eta/dt$.

Если зададим затем ξ, η в виде

$$\xi = k\xi_1 + k^2\xi_2 + \ldots, \qquad \eta = k\eta_1 + k^2\eta_2 + \ldots,$$

понимая под ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 и т. д. функции, которые также исчезают в несвободных концах кривой и сверх того обладают тем свойством, что $\Delta\overline{I} = 0$, то получается, принимая во внимание уравнение $H - \lambda\overline{H} = 0$, установленная формула

$$\Delta I = k^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(E_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + E_2 u^2\right) dt + (k)_3,$$

где $u = y_1\xi_1 - x_1\eta_1$, а ξ_1, η_1 должны теперь удовлетворять уравнению

$$\int_{t_0}^{t} \overline{H}u\,dt \ldots,$$

вытекающему из условия $\Delta\overline{I} = 0$.

Как я думаю, представленное таким образом предложение, особенно то, что λ не может иметь различных значений в различных точках кривой, совершенно ясно и не подлежит оспариванию. Мы разовьем потом видоизменения, которые должны появиться в выражениях первой и второй вариаций, если несвободные концы кривой будут изменяться согласно наложенным на них условиям.

По поводу линейных дифференциальных уравнений у меня имеется еще два давно сделанных наброска, которые я также посылаю моему милому другу (в тетради № II, IV). Для сравнения с прочитанным Тебе вчера они будут Тебе, может быть, полезны, однако прошу Тебя при работе с ними в основном придерживаться сделанных мною указаний. Тебе надо будет лишь добавить приведение высших дифференциальных уравнений к выбранному мною вчера виду.

Еще одна просьба. Если Ты или госпожа Л[ермонтова] сможете узнать цену пансиона для одинокой дамы на Шарлоттенштрассе, то будь любезна двумя словами поставить меня в известность об этом, так как моя сестра хотела бы скорее ответить на полученный ею запрос.

Всего хорошего, мое сердце, до новой встречи. И иногда, когда Ты углубляешься в мои формулы, обрати свои мысли к Твоему верному другу.

В.

9. 18 ноя[бря] [18]72 г.

Вчера, дорогая Соня, я ошибся в одном вопросе, что и спешу исправить, чтобы Ты не вовлеклась в ошибочные заключения.

Функция

$$\frac{\theta^2(n_1 - w_1, \ldots,)_k}{\theta^2(n_1 - w_1, \ldots)_1}, \qquad (i = 3)$$

если n_1, n_2, n_3 рассматриваются как постоянные величины, и

$$w_\alpha = I(x, y)_\alpha,$$

является всегда рациональной функцией от x, y.

Если положить

$$n_\alpha = I(x_0, y_0)_\alpha = \mathring{w}_\alpha,$$

то $\theta(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)$ исчезает в трех точках (x_0, y_0), (p_1, q_1), (p_2, q_2); следовательно, также $\theta(\mathring{w}_1 - w_1, \ldots)$ должно обратиться в нуль в трех точках, если θ_n — нечетная функция.

Но если она является четной, то это не имеет места, а поэтому отношение $\frac{\theta^2 (\overset{\circ}{w}_1 - w_1, \ldots)_k}{\theta^2 (\overset{\circ}{w}_1 - w_1, \ldots)_1}$ *не* представляет, как я сказал, функцию от x, y, которая бесконечно велика в *двух* точках, а в двух других бесконечно мала, всякий раз второго порядка. Отсюда следует, что $\theta (\overset{\circ}{w}_1 - w_1, \ldots)_k$ исчезают тождественно, как только k становится индексом четной θ-функции, что недопустимо. Таким образом, это имеет место только для определенных значений (x_0, y_0), которые для разных индексов k также различны.

Несмотря на это, я надеюсь, задача, о которой идет речь, будет решена. Я нахожу, что, например, при однородных u_1, u_2, u_3 существует однородное линейное уравнение между

$$\theta_1\theta_{25}, \qquad \theta_3\theta_{15}, \qquad \theta_5\theta_{13}, \qquad \theta_{24}\theta_{01}.$$

Если положить

$$u_\alpha = I(xy)_\alpha + I(x_0y_0)_\alpha - I(p_1q_1)_\alpha - I(p_0q_0)_\alpha,$$

то θ_1 исчезает тождественно, и мы имеем, таким образом, уравнение требуемой формы.

Что потом, например, θ_{15}^2 линейно относительно θ_3^2, θ_5^2, θ_{24}^2, становится легко доказываемым; спрашивается только, можно ли вывести это соотношение из уравнений, которые имеют место при определенных соотношениях между квадратами θ-функций. Вот на это Ты должна будешь обратить свое внимание и по возможности полнее выяснить соотношение между квадратами и произведениями θ-функций. Во всяком случае, так просто, как я предполагал вчера, это не пойдет.

Сердечнейший привет
К. В.

[9$_1$]85

Имеются уравнения (проверку оставляю за собой)

$$C_1^2\theta_0^2 = C_0^2\theta_1^2 + C_{01}^2\theta_1^2 + C_{03}^2\theta_3^2 + C_{05}^2\theta_5^2 + C_{135}^2\theta_{000}^2,$$

$$C_1^2\theta_2^2 = C_2^2\theta_1^2 - C_{12}^2\theta_1^2 + C_{23}^2\theta_3^2 + C_{25}^2\theta_5^2 - C_{135}^2\theta_{046}^2,$$

$$C_1^2\theta_4^2 = C_4^2\theta_1^2 - C_{14}^2\theta_1^2 - C_{34}^2\theta_3^2 + C_{45}^2\theta_5^2 + C_{135}^2\theta_{026}^2,$$

$$C_1^2\theta_6^2 = C_6^2\theta_1^2 - C_{16}^2\theta_1^2 - C_{36}^2\theta_3^2 - C_{56}^2\theta_5^2 - C_{135}^2\theta_{246}^2,$$

в которых

$$C_\lambda = \theta_\lambda\,(0,\ 0,\ 0).$$

Если умножить в этих уравнениях аргументы u на полупериоды $\overset{0}{w},\ \overset{2}{w},\ \overset{4}{w},\ \overset{6}{w}$ и положить их затем равными нулю, то получится

$$C_1^4 = C_0^4 + C_{01}^4 + C_{03}^4 + C_{05}^4 + C_{135}^4,$$
$$C_1^4 = C_2^4 + C_{12}^4 + C_{23}^4 + C_{25}^4 + C_{135}^4,$$
$$C_1^4 = C_4^4 + C_{14}^4 + C_{34}^4 + C_{45}^4 + C_{135}^4,$$
$$C_1^4 = C_6^4 + C_{16}^4 + C_{36}^4 + C_{56}^4 + C_{135}^4,$$
$$0 = C_0^2C_2^2 - C_{01}^2C_{12}^2 + C_{01}^2C_{23}^2 + C_{05}^2C_{15}^2,$$
$$0 = C_0^2C_4^2 - C_{01}^2C_{14}^2 - C_{03}^2C_{34}^2 + C_{05}^2C_{45}^2,$$
$$0 = C_0^2C_6^2 - C_{01}^2C_{16}^2 - C_{03}^2C_{36}^2 - C_{05}^2C_{36}^2,$$
$$0 = C_2^2C_4^2 + C_{12}^2C_{14}^2 - C_{23}^2C_{34}^2 + C_{25}^2C_{45}^2,$$
$$0 = C_2^2C_6^2 + C_{12}^2C_{16}^2 - C_{23}^2C_{36}^2 + C_{25}^2C_{56}^2,$$
$$0 = C_4^2C_6^2 + C_{14}^2C_{46}^2 + C_{36}^2C_{34}^2 - C_{45}^2C_{56}^2.$$

Эти уравнения приводят к тому, что форма $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ посредством преобразований

$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\,x_1 = C_0^2y_1 + C_2^2y_2 + C_4^2y_3 + C_6^2y_4,$$
$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\,x_2 = C_{01}^2y_1 - C_{12}^2y_2 - C_{14}^2y_3 - C_{16}^2y_4,$$
$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\,x_3 = C_{03}^2y_1 + C_{23}^2y_2 - C_{34}^2y_3 - C_{36}^2y_4,$$
$$\sqrt{C_1^4 - C_{135}^4}\,x_4 = C_{05}^2y_1 + C_{25}^2y_2 + C_{45}^2y_3 - C_{56}^2y_4$$

переходит в форму

$$(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2).$$

Отсюда по известным формулам (Бальтцер) дроби $\dfrac{C_\lambda^2}{\sqrt{C^4 - C_{135}^4}}$ выражаются через 6 независимых величин.

— . —

Сердечный привет, дорогая Соня. Эти формулы я только что записал впервые — то, что вчера вечером больше не получалось. Ты легко проверишь. В существенной своей части они правильны, однако Ты должна их тщательно проверить.

Твой К. В.

10.

Моя дорогая Соня!

Не находишь ли Ты, что с моей стороны было весьма нелюбезно, что «в большом затруднении, в которое Ты попала», я предоставил Тебя на всю ночь себе самой, а не поспешил к тебе на помощь после получения Твоего милого письмеца?

В то же время Ты меня извинишь, когда услышишь, что я вследствие простуды плохо себя чувствовал вчера и позавчера и как раз вчера находился совсем не в математическом настроении.

Сегодня я чувствую себя значительно лучше и могу сообщить Тебе письменно желаемые сведения. Но Тебе, как я теперь вижу, не придется с толком использовать их.

Все исследование, если исходить из соотношений между θ-функциями, должно быть проведено иначе, и это, как я тебе покажу, должно получиться. Потому что если положить две из функций равными нулю, а три аргумента выразить через один, то уравнение между x, y получится слишком высокой степени.

Но мне бы хотелось об этом поговорить лучше лично.

Не могла ли бы Ты, так как я еще сегодня не выхожу, к вечеру, т. е. сразу после Твоего обеда, прийти ко мне на часок?

Так как я и сегодня не читаю лекции, то меня совершенно не утомит, если я укажу Тебе путь, который мне кажется теперь самым подходящим. Поэтому не беспокойся, что можешь прийти некстати, чего вообще с моей милой приятельницей и случиться не может.

Я попрошу принести с собой соотношения между θ в том виде, как они у тебя получились.

Сердечнейший привет!

Твой Вейерштрасс

22 ноября 72 (утром).

11.

Сообщенные Тебе формулы, милая моя Соня, следует обосновать просто тем, что коэффициенты выражений для $x_1, \ldots, x_n$ делятся на $\sqrt{c_1^4 - c_{135}^4}$. Тогда они вначале будут еще недостаточны для выражения всех $\frac{\theta(0,0,0)_\lambda}{\theta(0,0,0)_\eta}$ через 6 независимых величин, однако все для этого необходимое можно вывести из соотношений между квадратами и произведениями θ-функций. Но я сейчас не рассматриваю подробно это, так как не знаю, что Тебе фактически нужно для достижения ближайшей цели.

Если Ты меня обрадуешь завтра своим посещением, то принеси с собой проработанное Тобой по вариационному исчислению, так как нам придется возвращаться к различным уже затронутым вопросам.

С дружеским, сердечнейшим приветом
Твой К. В

7 дек. 72.

12.

Сегодняшний концерт, милейшая Соня, начинается в 7 $^1/_2$ ч. Если я не ошибаюсь, Ты хотела прийти к нам с фрейлейн Л[ермонтовой]. Тогда я попрошу Тебя явиться уже около 7 часов, чтобы мы могли вовремя уехать. Экипаж я закажу.

Я прошу передать ответ мне устно через подательницу сего письма.

Дружески приветствую
В.

27 дек. 72.

13.

Милая моя Соня!

Сегодня вечером, ввиду неотложной задержки, я буду, вероятно, вынужден отказаться видеть Тебя. Завтра я думаю посвятить весь день работе, которой и Ты тоже так живо интересуешься — Ты видишь, я избегаю говорить неприятное для Тебя слово — но прошу Тебя, в воскресенье в обычный час порадовать меня своим посещением.

С сердечнейшим приветом
Твой К. В.

10 января 73.

14.

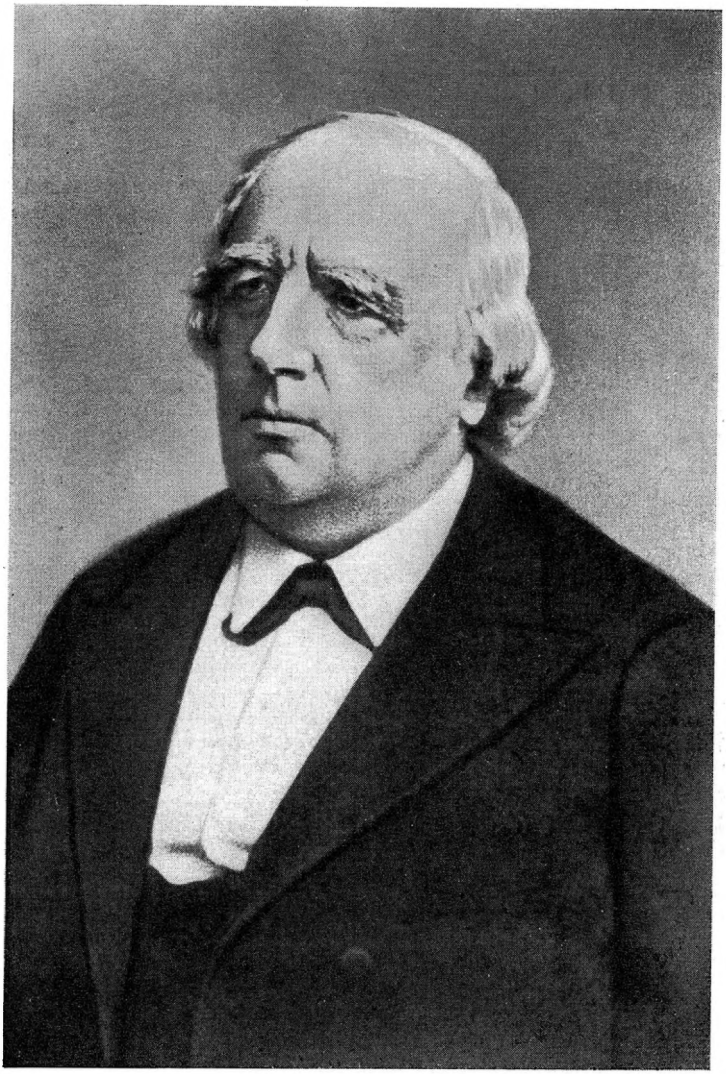
Дорогая Соня!

Я вчера встал с довольно сильным насморком, а потому и не мог прийти к Тебе. И сегодня мне еще нельзя выходить, а поэтому мне приходится Тебя просить двумя словами написать мне или самой, или, если Тебе затруднительно, через фрейлейн Л[ермонтову], каково состояние Твоего здоровья. Надеюсь, у Тебя хорошие успехи; для меня будет величайшей радостью, если я узнаю от Тебя, что не обманываюсь в своих надеждах.

Завтра, я думаю, смогу Тебя увидеть, милое сердце.

С дружеским приветом
Твой К. В.

5 апреля 73.



К. ВЕЙЕРШТРАСС (1885 г.)



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ (1868 г.)

15.

Дорогой мой друг!

Как Ты меня осчастливила сообщением, что двигаешься вперед по пути выздоровления и даже чувствуешь склонность заняться математическими делами. От последнего я Тебя хотел бы даже убедительно отговорить (или врач должен Тебе это запретить?); верь мне, дорогая, каждый час, который Ты в ближайшие дни здесь, а потом в Цюрихе употребишь с пользой, облегчит Твои телесные страдания и принесет плоды, когда Ты снова со свежими силами примешься за работу.

Я еще нахожусь под домашним арестом, но это лишь обыкновенный насморк, который меня мучает и принуждает к некоторой осторожности. Я приду к Тебе, как только мне позволят выходить — надеюсь, уже завтра, только не подумай ничего плохого, если мои надежды не оправдаются, — я уверен, что снова буду совершенно здоров до твоего отъезда.

Если врач позволяет Тебе проехаться, то берегись, особенно в отношении одежды: погода такова, что можно легко простудиться, — я и расплачиваюсь теперь за то, что слишком поверил весне в прошедший четверг.

С сердечнейшим приветом
Твой К. Вейерштрасс

6 апреля 73.

16. Берлин, 18 апреля 73

Мой дорогой друг!

Ты мне доставила большую радость своим милым письмом, которого я не ждал так скоро, так как опасался, что путешествие, которое Ты предприняла, не вполне поправившись, так Тебя изнурит, что по приезде в Цюрих Тебе понадобится, по меньшей мере, неделя для отдыха. Тем более счастлив я, услышав от Тебя, что мое опасение было неосновательным.

Ты говоришь, правда неубедительно, что вполне выздоровела; но так как Ты сообщаешь о ежедневных дальних прогулках, которые Тебя даже радуют, то я должен предположить, что Ты чувствуешь себя достаточно окрепшей для этого. Только бы погода во время Твоего пребывания там оставалась постоянно такой же прекрасной, как при Твоем прибытии, чтобы Ты побольше могла быть на воздухе и на собственном опыте испытала бы справедливость слов одного нашего медицинского светила, что «кроме чая из ромашки, существует только одно лекарство, о котором твердо установлено, что оно действует благотворно, а именно — чистый, мягкий воздух».

Не забывай, Ты мне обещала при прощанье, что позаботишься, чтобы вернуться свежей и цветущей; вообрази себе иногда ту радость, которую Ты мне доставишь, когда я при встрече смогу убедиться, что моя милая Соня честно сдержала слово. Если Ты действительно намерена быть здесь к 1 мая, т. е. я подразумеваю, если возможно выполнение этого намерения, то я хотел бы посоветовать Тебе до этого времени избегать всякой серьезной работы, если только при том оживленном образе жизни, который Ты ведешь в настоящее время, Ты вообще можешь думать о работе. Ты должна сберечь свои силы для регулярных занятий, которые мы возобновим после Твоего возвращения. Надеюсь, мы достигнем, по меньшей мере, того, что Ты соберешь в летние месяцы материал для стоящей работы, которую сможешь выполнить в течение осени.

Что касается меня, то высказанное Тобой опасение, что я слишком много хотел бы работать на каникулах, не обосновано уже потому, что до сих пор я еще не могу предпринимать чтонибудь утомительное из-за все еще продолжающегося недомогания. Я не выходил еще из дому с тех пор, как Ты уехала, и мог заниматься только легким чтением. Сегодня, когда до сих пор суровая погода стала мягче, я думаю выйти в первый раз. У меня нет ничего серьезного, но меня давит чувство недомогания и безрадостности, которое оставит меня только тогда, когда будет окончен, как всегда, противный и нездоровый переходный период от зимы к настоящей весне.

За это время у меня было довольно много гостей — математических друзей; их много приехало сюда на пасхальные каникулы, и почти все не раз дарили мне несколько часов своего внимания. Главным образом, я беседовал с Гейне из Галле и Бальцером из Гиссена, с последним также и о «геометрии конечного пространства», которой мои остальные математические друзья, исключая моего маленького любимца, которого Ты знаешь, мало симпатизируют. Я сообщаю Тебе об этом, чтобы Ты не подумала, что я болен или нахожусь в настолько плохом настроении, что утратил интерес к тому, что обычно близко моему сердцу.

Ты пишешь, милая Соня, что у Тебя есть еще некоторые вопросы ко мне. Это подает мне надежду, что я получу от Тебя из Цюриха еще, по меньшей мере, одно очень обстоятельное письмо. Не правда ли, я могу на это рассчитывать? Надеюсь также, что Ты не будешь его задерживать настолько, что я не смог бы уже ответить.

За любезные приветы, которые Ты мне послала, моя сердечнейшая благодарность.

Говоря Тебе, мое сердце, на этот раз до свиданья, я не должен, пожалуй, назойливо добавлять, что, где бы Ты ни была, я буду думать о Тебе всегда с чувством самого сердечного расположения.

Твой верный друг Карл Вейерштрасс

17. Берлин, 25 апреля 1873 г.

Мой милый друг!

Ты начинаешь свое последнее письмо словами, что отвечаешь мне так скоро, руководствуясь только эгоистическим мотивом. На это я мог бы возразить, что эгоизм, исходящий от Тебя, является в моих глазах таким милым пороком, что я искренне желал бы, чтобы Ты никогда от него не избавлялась. Я не могу удержаться, несмотря на неявный отказ от всякой благодарности, просвечивающий в начале Твоего письма, от того, чтобы не сказать Тебе, как сильно я был обрадован тем сердечным тоном, который звучит в его строках, и как он благотворно повлиял на мое все еще несколько подавленное душевное состояние. Между тем, зная моего дорогого друга, я уверен, что это не только слова, что она озабочена мной и настойчиво желала бы слышать что-нибудь о состоянии моего здоровья; тут я не церемонюсь, что погрешаю против первого правила условий эпистолярного стиля, и пишу вначале и главным образом про свою персону.

Состояние моего здоровья все еще не такое, какое бы должно было быть, хотя и не стало хуже, и врач мне не нужен. Уже 8 дней, как я начал ежедневно выходить; но погода весь месяц была так сурова, что мне на воздухе все еще неприятно, и я тщательно берегусь простуды, но опасение, которое было у меня, правда, вначале, что мой прежний недуг, который так мешал мне в жизни, возобновился, оказалось совершенно неосновательным; поэтому я могу уверенно ждать, что как только станет теплее, а это должно скоро наступить, я буду чувствовать себя здоровым. У меня, таким образом, нет основания бояться, что я не смогу провести лето в обычной деятельности; но очень досадно, что прекрасные пасхальные каникулы, которые я всегда так любил, на этот раз я должен считать потерянной неделей.

Работал я очень мало и с малым успехом, хотя иногда и занимался целый день,— не только новые мысли не хотели являться, но и прежние не выражались словами так, как они представлялись в уме. В ближайший четверг я начинаю свои лекции. Одну — по синтетической геометрии, которую я взял, так как нельзя было допустить, чтобы этим предметом совсем пренебрегли в университете, где работал *Штейнер*. Другого лектора не наш-

лось, для меня же этот предмет представляет мало интереса. В другой лекции — о применении эллиптических функций — я хотел бы рассмотреть некоторые новые проблемы, однако это будет зависеть от обстоятельств, главным образом от того, будут ли у меня слушатели, которые проявят к этому достаточный интерес. В этом отношении один выпуск студентов часто удивительно отличается от предыдущего.

То, что *Ты* останешься моей ученицей в лучшем смысле слова, пока Ты хочешь и можешь чему-нибудь научиться у меня, я бы не подчеркнул специально, если бы одно место в Твоем письме не навело меня на это.

Ты считаешь, что если не в качестве друга, то в качестве ученицы можешь меня обременить,— так звучит употребляемое Тобой скверное слово. То, что Ты не опасаешься, по крайней мере как друг, я мог бы, будь я злым человеком, истолковать в смысле, против которого Ты бы бурно протестовала.

Говоря серьезно, милая, дорогая Соня, будь уверена, я никогда не забуду, что именно я обязан моей ученице тем, что обладаю не только моим лучшим, но и единственным настоящим другом. Поэтому, если Ты сохранишь и в будущем прежнее отношение ко мне, то можешь быть твердо уверена: я также всегда преданно буду поддерживать Тебя в Твоих научных стремлениях.

Ну, о себе хватит. Мне думается, этого будет достаточно до Твоего скорого возвращения. Итак, я заканчиваю, во-первых, просьбой указать мне двумя строками *точно* время Твоего возвращения, хотя бы из Гейдельберга, поскольку согласно Твоему намерению Ты там пробудешь один день. Затем предостерегаю не верить утверждению, что в Германии такая же весна, как на Цюрихском озере. Нужно ли говорить Тебе о том, как я рад вскоре снова увидеть Тебя?

Твой К. Вейерштрасс

18.

Моя милая Соня!

В отношении подготовительной работы, которую мы вчера обсуждали и которой Ты хотела сегодня заняться, я замечу еще следующее.

Всегда можно отобразить данную полуплоскость $\mathfrak{C}$ на произвольно взятый круг K так, чтобы внутренности данного в $\mathfrak{C}$ круга $\mathfrak{K}$ соответствовала внутренность круга K, центр которого совпадает с центром K_1.

Радиус последнего всегда меньше, чем радиус K, и зависит от радиуса $\mathfrak{K}$ и расстояния центра его от границы полуплоскости. Но при этом центр K_1 не соответствует центру $\mathfrak{K}$. Но для наме-

ченной цели в этом совершенно нет необходимости. Так как радиус K принимают равным 1, положение точки в K определяется полярными координатами (ρ, ϑ), то каждой точке из $\mathfrak{C}$ относят также такую пару величин (ρ, ϑ) и обратно. Если ρ_1 есть радиус K_1, то рассматриваемая точка находится внутри $\mathfrak{K}$, если $\rho < \rho_1$, на контуре, если $\rho = \rho_1$, и вне $\mathfrak{K}$ (но в $\mathfrak{C}$), если $\rho > \rho_1$, но $\leqslant 1$.

Если заставить полуплоскость вращаться около ее границы, то видно, как можно определить положение точки в пространстве тремя величинами (ρ, ϑ, ψ), из которых ρ изменяется между 0 и 1, а ϑ, ψ — между 0 и 2π. В то же время точки, принадлежащие замкнутому контуру, описанному в $\mathfrak{K}$, характеризуются тем, что для них $\rho \leqslant \rho_1$. Теперь нужно для обратного значения расстояния между двумя точками $[(\rho, \vartheta, \psi)$ и $(\rho', \vartheta', \psi')]$ найти разложение, остающееся справедливым для каждых двух точек, из которых одна находится внутри круга, а другая вне его. Тогда, если речь идет об определении потенциала кольца, в каждом отдельном члене ряда можно будет, несомненно, выполнить интегрирование по ϑ, ψ.

Надеюсь, по этим заметкам Ты сможешь работать, не прерываясь, и не так сильно будешь ощущать одиночество в последующие дни. Во всяком случае послезавтра до обеда я надеюсь иметь возможность прийти к Тебе, если не услышу от Тебя, что Ты не сможешь меня принять.

С сердечнейшим приветом
Твой К. В.

9 июня (до полудня).

19.

Дорогой друг!

К большому моему сожалению, я не могу сдержать своего обещания — лично справиться сегодня о Твоем здоровье. Как только я вернусь с лекции, мне сразу же после еды надо снова уходить, и я буду занят примерно до 10 часов. Надеюсь, что Твоя головная боль не усилилась; завтра, после обеда, при всех обстоятельствах я приду к Тебе. Сердечно приветствую Тебя и остаюсь

Твой верный друг К. В.

12 июня 73 (до полудня).

20. Засниц (остров Рюген)
Гостиница цум Фаренберг, 20 августа 73.

Мой дорогой друг!

Твое последнее письмо попало в мои руки только теперь, после того как оно прошло целый ряд почтовых станций. План мой на теперешние каникулы был таков: сперва пожить со своей младшей сестрой несколько недель на приморском курорте вблизи Кёнигсберга и встретиться там с семейством Ришело. Но в тот день, когда мы хотели выехать, я получил такие угрожающие известия о распространении холеры в Прусской области, что вынужден был отказаться от своего намерения и следующим утром решил направиться на остров Рюген.

Это и было выполнено; но так как я не мог заранее заказать себе квартиру, то нам пришлось первые 8 дней бродяжничать, пока наконец-то я не осел здесь на очень понравившемся мне месте. Целый ряд писем следовал за мною с места на место, и вчера я получил 8 штук сразу. Твое, разумеется, первое, на которое я отвечаю.

Я чувствую себя здесь очень хорошо. Это письмо я пишу у открытого окна своей комнаты и когда поднимаю взор, то на расстоянии около 100 шагов передо мною волнующееся море, образующее совершенную половину круга, диаметром которого служит не песчаная дюна, а довольно высоколежащий берег, украшенный полями зерновых, лугами, лесами и аккуратными домиками. Непосредственно за гостиницей начинается лес, простирающийся на несколько миль, полный великолепных лиственных деревьев и удивительно освежающего воздуха. К тому же в доме подобралось довольно хорошее общество, здесь несколько коллег из Берлина, Лейпцига, Ростока. Я думаю пробыть здесь до конца этого месяца; потом дней на 14 у меня будут дела в Берлине, а затем предполагаю поехать с обеими своими сестрами еще дней на 14 на Рейн, может быть, присутствовать на собрании естествоиспытателей в Висбадене. С 1 октября я снова наверняка буду в Берлине, ибо с 4-го уже начинается зачисление ⟨в университет⟩. Я еще совсем не работал, исключая то, что написал Ришело довольно подробное письмо со сжатым изложением исследований, которыми я занимался в последние годы. К сожалению, на это я получил очень печальный ответ: Ришело, который стал моим любимым другом, тяжело болен и полагает, что это его последнее ко мне письмо. Правда, он с живым интересом отнесся к моим сообщениям, но, главным образом, говорит о своих пожеланиях в отношении замещения его должности, о чем он убедительно меня просит.

Этим, милая Соня, я заканчиваю свое письмо в отношении себя. Надеюсь, Ты уже избавилась от цюрихской атмосферы и дышишь свежим горным воздухом.

Во время своего пребывания здесь я очень часто думал о Тебе и представлял себе, как прекрасно было бы, если бы я мог пожить несколько недель с Тобой, друг мой сердечный, среди такой восхитительной природы. Как прекрасно было бы нам — Тебе с Твоей душой, полной фантазии, и мне, возбужденному и освеженному Твоим энтузиазмом,— помечтать тут над многими задачами, которые нам предстоит разрешить: о конечных и бесконечных пространствах, об устойчивости мировой системы и о всех других великих задачах математики и физики будущего. Но я давно уже научился смиряться с тем, что не каждый прекрасный сон осуществляется.

Мне бросилось в глаза, милый друг, что в своем последнем письме Ты совершенно умалчиваешь о состоянии своего здоровья. Это могло бы меня в известной степени успокоить, так как тот, кто чувствует себя совсем хорошо, об этом и не говорит. Однако, Ты знаешь, что я не сторонник доказательств от противного, которые никогда не дают полной уверенности. Поэтому я прошу прямых данных.

Что касается Твоего возвращения в Берлин, то прошу не принимать никакого решения, пока не получишь от меня верных известий об окончании холеры. То, что пишут об этом газеты, совершенно ненадежно.

Если ты полагаешь, что следующей зимой будешь меня *очень* редко видеть, то Ты меня превратно поняла. Во всяком случае мы оставим за собой *наши воскресенья*, да и в другие дни я сумею выкроить часочек, который смогу посвятить своему милому другу. С нетерпением жду ответа на это письмо. Адрес мой указан полностью. Но я прошу написать сюда только в том случае, если Ты сможешь сдать свое письмо на почту самое позднее 26-го. Иначе лучше подожди еще несколько дней и пошли его мне в Берлин (к 1 сент.). Если план моей поездки за это время изменится, то я Тебя об этом извещу.

Наконец приведу Тебе одно место из письма Ришело, потому что считаю, что оно и Тебя заинтересует. Оно относится к моему сообщению относительно пути, который я, наконец, избрал в теории функций Абеля.

«Наибольшее значение имеет для меня именно то обстоятельство, что в решении главной математической проблемы этого столетия Вы избираете иной, более естественный путь, чем Риман, Клебш и Гордан, и что Вы ему следуете до ясно выраженного предела. Я все еще сожалею о том, что Вы не издали второй

части Вашего первого исследования (о гиперэллиптических функциях), которое уже содержит сущность Вашего метода. Ни работы Римана, ни тем более книга Клебша и Гордана не должны были бы удержать Вас от этого. Однако для этого у Вас, вероятно, имелись основательные причины».

Итак, сердце мое, будь здорова и поскорее обрадуй своего друга хорошими вестями о себе. Если Ты не сможешь мне сразу написать подробно, то я удовлетворюсь временно несколькими строками, написанными Твоей милой рукой.

Твой К. В.

Мое письмо написано на очень плохой бумаге, а потому извини его небрежный внешний вид.

[21]23. Берлин 8 окт. 1873

Моя милая Соня!

Несмотря на Твое извинение, по поводу твоего «défaut constitutionel»[1], я должен был бы сделать Тебе энергичный выговор. Ведь, разумеется, несправедливо оставлять «своего лучшего друга» в течение 6 недель без всяких известий. Тебя спасает только обстоятельство, которое и меня заставляет одновременно ограничиться в письме несколькими строками: а именно, через неделю в этот день я буду держать вступительную речь, а пишу еще только начало, да и речь моя, если я вообще еще не переменю тему, будет иметь *очень серьезное содержание* и навлечет с разных сторон на меня нападки. Не всегда можно избежать этого, я должен взвешивать каждое слово с тем, чтобы выбрать наиболее подходящее. Таким образом, недостаток времени и в еще большей степени то обстоятельство, что голова моя полна посторонними мыслями, препятствуют мне написать Тебе побольше.

То, что Ты вернешься, я уже знал по письму Твоей уважаемой матушки (ответ на мое от прошлого лета). Сегодня была у меня кузина Лермонтовой, которая уже надеялась застать Тебя здесь. Что касается Твоего приезда, то, как бы я ни хотел увидеть вновь Твое милое лицо, прошу Тебя не приезжать раньше, чем совсем закончится холера. Она теперь уже настолько уменьшилась, что ее полного прекращения можно ожидать приблизительно к 20-му. Если Ты со своей подругой еще не уговорилась окончательно, то прошу Тебя подождать с отъездом до указанного срока.

Холера штука не из приятных, независимо от того, заболеешь ли ты ею первым или последним. Вновь прибывший всегда более других подвержен опасности. Следует лишь упомянуть, что и

---

[1] Конституционный недостаток (франц.)— нелюбовь к писанию писем.

от меня Ты будешь иметь немного, так как в первые дни после 15-го я буду, к сожалению, очень занят посещениями лиц высоких, высших и высочайших. Позднее все уладится.

Этим заканчиваю. Позаботься только, любимый, дорогой друг, чтобы приехать здоровой. Я не избавлю Тебя от выговора, Ты можешь ведь защищаться и не дать возможности мне говорить.

Итак, до сердечного, искреннего свидания

Твой К. В.

[22]21. Берлин 12 окт. 73.

Милый друг, Ты несправедлива ко мне, если думаешь, что, сердясь на Твое долгое молчание, я не ответил на Твое письмо из Лозанны. Твое письмо прибыло с опозданием, так как меня несколько дней не было дома, и мой ответ прибыл в Лозанну в тот момент, когда Ты уже уехала; я понял Тебя так, что Ты пробудешь там до 15-го. Вероятно, Ты уже получила мое письмо; если это не так, то разузнай о нем, так как мне не хотелось бы, чтобы оно попало в чужие руки.

В случае, если это так, я повторю из него две вещи. Я советовал бы Тебе, несмотря на мое желание радоваться тому, что Ты рядом, из-за холеры пробыть там еще до 20-го. Теперь здесь наблюдается приблизительно 8 случаев ежедневно, и надо надеяться, что злая гостья скоро совсем покинет нас. Во-вторых, я Тебе писал, что у меня была кузина мадемуазель Лермонтовой и справлялась о последней, надеялась, что сможет получить известия о ней в Вашей прежней квартире; и мне чрезвычайно неприятно, что я, может быть, ввел в заблуждение эту молодую даму: когда я вчера проходил мимо № 134[б], мне показалось, что я ей указал 143[б], мне это было бы чрезвычайно досадно.

Теперь еще одна просьба. Я уже знаю, что Ты мне не укажешь точного дня Твоего прибытия. Но если Ты хочешь, чтобы мы *вскоре* увиделись, то пришли мне, сразу по приезде, маленькое письмецо по городской почте, чтобы я мог прийти к Тебе, как только смогу, или сообщить Тебе, когда Ты наверняка застанешь меня. Как раз в те дни, когда Ты, вероятно, приедешь, меня часто не будет дома, а мне будет жаль, если я пропущу тот благоприятный момент, когда смогу после такой долгой разлуки обнять своего дорогого друга, мне «вполне преданного» (отучись же от этого некрасивого слова), и на самом деле привести в исполнение угрозу, которой я закончил свое последнее письмо. О том, о чем я Тебе еще писал, не задумывайся. Набросок текста моей речи звучит так резко, что совершенно не подходит для того места, где я должен ее произносить. Я уже выбрал себе другую тему. Если Твой «défaut constitutionel» хоть сколько-нибудь позво-

ляет, то напиши мне из Цюриха еще раз (хотя бы для того, чтобы успокоить меня), что Ты действительно получила как это, так, надеюсь, и прежнее письмо.

Будь здорова, мое сердце, и, как прежде, будь дружески расположена

к Твоему верному другу,

(даже если он Тебе сознается, что с конца прошлого семестра не имел ни одной математической мысли, и Ты его найдешь очень безыдейным).

К. В.

23. Берлин 17 окт. 73 (утром)

Милостивая государыня![1]

Только что получил письмо от нашей приятельницы с датой Цюрих 13 окт., которое, как мы видим, шло необычно долго. В нем она мне пишет, что, вероятно, не выедет до 1 ноября. Она, по всей вероятности, написала и Вам относительно этого, потому что в письме есть такое место: «Мы почти наняли квартиру», о чем Вы, судя по вчерашнему Вашему сообщению, ничего не знаете. Еще сказано: «Юлия будет в Берлине *несколько* раньше меня». На мою вчерашнюю телеграмму будет, вероятно, скоро ответ.

Будьте так добры прислать мне короткое сообщение (скорее всего по городской почте), чтобы знать, надо ли мне еще отвечать на полученное письмо. Если только будет возможно, я не откажусь посетить Вас еще раз, чтобы узнать подробности.

С дружеским приветом
Преданнейший Вам
Вейерштрасс

24. Берлин, пятница, 14 ноя[бря] 73. (утром)

Дорогой друг, я позавчера ошибся, сказав Тебе, что смогу прийти к Тебе вчера или сегодня. Но *сегодня* (пятница) я *определенно* с 5 часов дома, не посетишь ли Ты меня и не принесешь ли с собой некоторый математический материал? Я жду Тебя, если Ты не откажешься. В субботу я снова занят, и в настоящее время еще не могу определить, что будет в воскресенье или понедельник.

Твой К. В.

---

[1] Кузина Ю. В. Лермонтовой.

25. Берлин, 19 ноя[бря] 73.

Милая, дорогая Соня!

Посылаю Тебе еще целую серию «песен без слов», которые все вместе относятся к линейчатым минимальным поверхностям. Я вчера вечером сразу собрал отдельные листы; они представляют различные стадии исследования, так что заключительная часть будет уж не очень объемистой. Но только прошу сохранить их в том порядке, в каком они расположены, тем более, что без устного объяснения они Тебе будут непонятны. Я хотел бы их тотчас же доверить Твоим рукам, чтобы они у меня снова не перепутались.

Если Тебе еще раз нужно увидеть меня на этой неделе, то я должен прийти сегодня вечером (вскоре после 6-ти); если Ты дашь мне чашку чая и кусок хлеба с маслом, то я приму это с благодарностью (но будет хорошо, если Ты наперед сделаешь необходимый заказ у г-жи Предигер). Я не знаю, скоро ли будет опять возможность, но мне хотелось бы поговорить еще раз с Юлией.

Для того чтобы с самого начала с пользой провести время, мне хотелось бы, чтобы Ты уже сегодня проработала до некоторой степени то, что я Тебе сообщил вчера. Тогда мы могли бы непосредственно перейти к дальнейшему, и, может быть, уже в следующее воскресенье закончить изложение [теории] линейного дифференциального уравнения, к которому приводится решаемая задача. Затем последует еще кое-что, относящееся к теории таких дифференциальных уравнений, и необходимое для выяснения характера трансцендентных соотношений между коэффициентами уравнения. Эти соотношения совершенно отсутствуют у Римана, что является одним из главных недостатков его теории.

С сердечным приветом
Твой К. В.

26.

Милая Соня, я пишу Тебе это в зале Совета университета во время глубокомысленного экзамена по строению вещества.

Когда я сегодня шел от Тебя, мне сразу пришло на ум, что мы проглядели одно из соотношений среди λ_r. Если названное соотношение среди коэффициентов при t^{n-r} в M принять равным единице, то должно быть

$$\sum_r \lambda_r a_r^k = \begin{cases} 0 \text{ для } k = 0, 1, 2, \\ 1 \text{ для } k = 3. \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_r \sigma_r a_r^k = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Следовательно, остается, если мы положим

$$\frac{\rho}{L} = 2t^2 - \tau t + \tau_0 + \frac{\tau_1}{t - a_1} + \cdots + \frac{\tau_n}{t - a_n}$$

при τ_ν произвольных

$$\tau = a_1 + a_2 + \cdots + [a_n], \qquad \{M = t^{n-4} + a_1 t^{n-5} + \cdots\}$$

или

$$\tau = \sum_r \lambda_r a_r^4.$$

Все остальное остается неизменным.

Сердечнейший привет. В.

Четверг, 27.11.73 (вечером)

27.

Берлин 29.11.73
(после полудня)

Милейшая Соня, может быть Ты подумаешь, получив это письмо, что я буду завтра занят и не смогу Тебя видеть у себя, но это не так. Напротив, после многих дней безотраднейшей работы, я особенно стремлюсь к моей милой ученице и другу и пишу Тебе только, чтобы об этом напомнить. Ты могла бы принести с собой все бумаги, касающиеся минимальных поверхностей, чтобы мы могли беспрепятственно продолжать и, как я надеюсь, закончить теорию. Не забудь также принести то, что Ты сделала в отношении формы

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = 0.$$

С самым сердечным приветом
Твой верный друг В.

28.

Милая Соня, если Тебе не затруднительно, то приди ко мне завтра немного раньше, примерно около половины третьего (я вынужден уйти около $6^1/_2$ часов).

Относительно того, о чем мы говорили во время нашей последней встречи, я должен сообщить Тебе еще кое-что интересное.

До сих пор мы полагали, что функция $\varphi(s)$ имеет только мнимые и *неравные* простые множители. Однако последнее не необходимо. Все законы умножения и деления остаются в силе, если, не вводя никаких предположений о характере $\varphi(s)$, мы определим умножение двух комплексных чисел

$$f(l) = a_0 l_0 + a_1 l_1 + \cdots + a_{2r-1} l_{2r-1},$$
$$g(l) = b_0 l_0 + b_1 l_1 + \cdots + b_{2r-1} l_{2r-1}$$

следующим образом:

$$f(l)\,g(l) = h(l) = h_0 l_0 + h_1 l_1 + \cdots + h_{2r-1} l_{2r-1},$$

если $f(s)\,g(s) - h(s)$ делится на $\varphi(s)$.

Если теперь надо решить каждое уравнение

$$F(x,\ l) = 0$$

или

$$f_0(l)x^n + f_1(l)x^{n-1} + \ldots + f_n(l) = 0,$$

то необходимо, чтобы $\varphi(s)$ (рассматриваемая как обычная функция от s) не исчезала бы ни для какого действительного значения s. Лишь *это* условие необходимо. Если же $\varphi(s)$ имеет равные множители, так что

$$\varphi(s) = (s^2 + k_1 s + l_1)^{\nu_1} \cdots (s^2 + k_\mu s + l_\mu)^{\nu_\mu},$$

причем k, l действительны, а $\nu_1 + \nu_2 + \ldots = r$, то теорема о числе корней одного уравнения видоизменяется, и оно не равно уже n^r, как в случае, когда ν_1, ν_2 . . . все равны 1.

Теперь, милая моя ученица, подумай как раз над тем, каково должно быть свойство $\varphi(s)$, т. е. какой закон умножения следует принять, чтобы уравнение n-й степени имело в общем случае n корней?

Нечто другое, относящееся к этому, мы завтра еще обсудим.

С сердечным приветом

Твой В.

Берлин, 6 дек. 73 (после полудня).

29. Берлин, 24 дек. 73 (утром)

Милая Соня!

Твое вычисление дифференциала от

$$P = 2\omega I'(s_0) - 2\eta I(s_0),$$

т. е. от того периода интеграла

$$\int \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\,\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

который соответствует периоду 2ω интеграла $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$, совершенно верно. В своих бумагах я нашел: если f, g, h будут определены из уравнений

$$dA = (4B^2 - 6AC)f - 6Ag + 4Bh$$
$$4dB = -6Af - 16\,Bg + 12Ch - 6dC = 4Bf + 12Cg - 12h$$

(причем $S = A + 4Bs + 6Cs^2 + 4s^3$), то, полагая s_0 независимой переменной, получаем

$$dI(s_0) = gI(s_0) + fI'(s_0) - \frac{Bf + h + (2g + 3Cf)\,s_0 + 2fs_0^2 + ds_0}{\sqrt{S_0}}$$
$$dI'(s_0) = hI(s_0) - gI'(s_0) - \frac{{}^1/_2 Af + (Bf - h - ds_0)\,s_0 - 2gs_0^2}{\sqrt{S_0}}.$$

Эти формулы сходятся с Твоими, кроме того, что Ты, возможно, обозначила выражения f, g, h иначе.

Далее получается так, как Ты мне показывала.

Если возьмем

$$Q = \int \frac{1}{s-s_0}\,\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

то получим

$$dQ = \alpha Q + \beta\omega + \gamma\eta,$$

где α, β, γ линейно зависят от dA, dB, dC, ds_0.

Чтобы мы смогли продолжать без задержки в ближайшую пятницу, прошу Тебя, пришли мне по возможности еще сегодня следующие данные (по почте):

1) формулу перехода от определяемого интеграла к виду

$$\int (\lambda\xi^2 + \mu\xi + \nu + \rho\xi^{-1})\,\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}};$$

2) употребленное Тобой выражение ξ через s и обратно;

3) результат этого преобразования (только формулы).

С сердечным приветом

Твой К. В.

30.

Дорогой друг!

При сем только что мной полученный ответ от проф. Липшица, который я прошу или сохранить, или даже, пожалуй, сообщить барышне Евреиновой. Правда, он не содержит ничего существенно нового; но пусть он послужит успокоением для родных умершего, ибо как и по свидетельству проф. Кекуле, факта самоубийства не установлено.

Самый сердечный привет!

Вейерштрасс

30 января 74 (после полудня).

31.

Моя дорогая Соня!

Если Ты хочешь увидеть меня еще на этой неделе, то я хотел бы зайти к Тебе сегодня после обеда. Но мне надо прийти около 4-х часов, так как вечером у меня еще заседание. Будешь ли Ты меня ждать? О цели прилагаемой книги — при встрече.

Самый дружеский, сердечный привет!

Твой В.

26 февр. 74 (утром)

32.

Моя милая Соня!

Я уже два дня ожидаю письмецо от Тебя с известием, что Ты пришла к желаемому результату, и теперь опасаюсь, что снова надежда оказалась иллюзорной.

Во всяком случае, я должен иметь ясность по этому поводу и прошу Тебя ждать меня сегодня после обеда к 5 часам или, если появится какая-нибудь задержка с Твоей или моей стороны, чего я не предполагаю, написать мне еще сегодня пару слов.

Сердечнейший привет!

К. В.

7.3.74 (утром)

33.

Моя дорогая Соня!

Только что получил случайно запоздавшее приглашение явиться в 5 часов к королевскому столу. Такое приглашение равняется приказу, и, к моему большому сожалению, я вынужден отказаться увидеть у себя моего дорогого друга, но убедительно прошу его обрадовать меня своим посещением завтра.

С сердечным приветом

Твой К. В.

17.3.74 (2 часа после полудня).

34. Берлин, 31 марта 74.

Мой дорогой друг!

К моему большому сожалению, я не могу прийти завтра к Тебе из-за служебной задержки. Но зато буду у Тебя в четверг в том случае, если не получу от Тебя известия, что Ты не сможешь быть дома. Мне досадно, потому что ни сегодня, ни завтра я не могу вернуться к периодическим функциям, которые я должен был бы закончить за эти каникулы.

Сердечно кланяюсь
Твой К. В.

35. Берлин, 6 мая 74.

Мой милый друг!

Вчера и позавчера мне было невозможно зайти к Тебе; если Тебе нужно меня увидеть сегодня, то прошу Тебя ждать меня около $4^1/_2$ часов, так как около 7 часов я должен еще быть на одном заседании.

Относительно предмета, обсуждавшегося в воскресенье, я могу Тебе сообщить следующее.

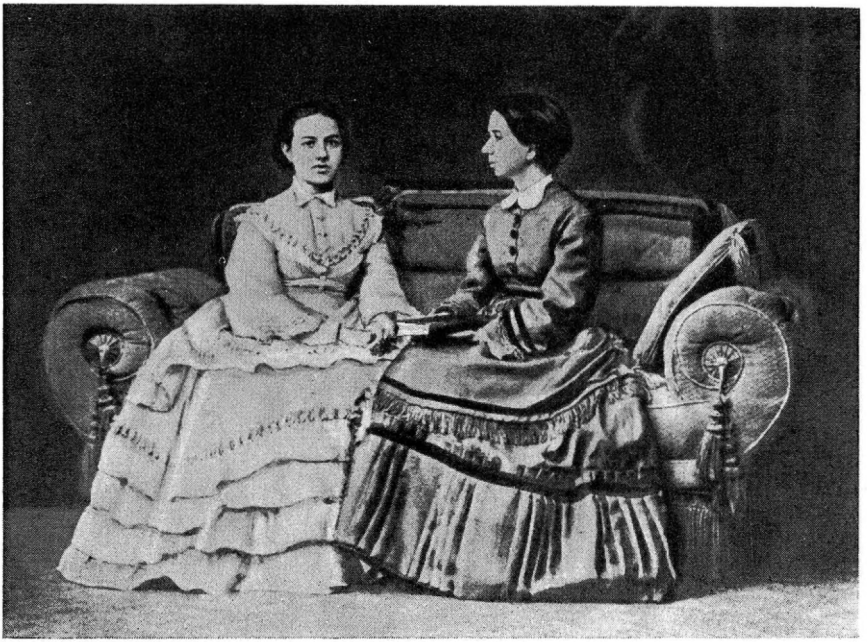
Положим, что λ есть действительная переменная, а $f(\lambda)$ функция от нее, которая подчинена только следующим условиям:

1) она не должна быть бесконечно большой при *конечных* значениях λ, т. е. таких, которые заключены между двумя любыми конечными величинами λ_1, λ_2;

2) она может быть разрывной или неопределенной в любом, а также в бесконечном числе точек, но таким образом, чтобы интеграл $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\,d\lambda$, исходя из определения Римана, имел смысл (см. статью Римана о ряде Фурье);

3) если λ приближается к пределам $-\infty$, $+\infty$, то $f(\lambda)$ не должна оставаться конечной величиной, но должна иметь такой вид, чтобы $\frac{\log|f(\lambda)|}{\lambda^2}$ исчезал для $\lambda = \pm\infty$ (это, например, тот случай, когда $f(\lambda)$ становится бесконечной величиной как положительная степень λ или как $e^{\alpha\lambda^\beta}$, где α, β положительные величины и $\beta < 2$).

Тогда имеет место следующая теорема. Положим, u, v, w комплексные переменные, из которых первая подчинена условию, что ее действительная часть всегда должна быть *положительной*. Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}d\lambda$ при конечных значениях u, v, w всегда имеет определенное, *также* конечное, значение и



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ И Ю. В. ЛЕРМОНТОВА



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ С ДОЧЕРЬЮ СОНЕЙ (ФУФОЙ) (1885 г.)

представляет *регулярную функцию от* u, v, w. Поэтому, если u', v', w' представляют какую-нибудь систему определенных значений u, v, w, то эта функция может быть разложена в ряд по целым положительным степеням $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$. Этот ряд всегда сходится, если u берется настолько близким к u', что для всех других значений этой величины, одинаково отстоящих от u', действительная часть положительна.

Этот ряд получается, кроме того, если [*выражение*]

$$f(\lambda)\, e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}$$

разложить по степеням $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, *а затем каждый коэффициент образованного таким образом ряда проинтегрировать от* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Эта теорема, примененная к интегралу

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4t}}\, d\lambda,$$

показывает, что если величина t (а следовательно, и величина $1/t$) подчинена условию, что ее действительная часть всегда положительна, тогда как x изменяется неограниченно, то этот интеграл может быть разложен в безусловно сходящийся ряд вида

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \{\varphi_0(t) + \varphi_1(t)\, x + \cdots + \varphi_n(t)\, x^n + \cdots\},$$

где $\varphi_0(t)$, $\varphi(t)$, ... регулярные функции от t. Далее, $\varphi(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$$

во всей области (x, t), в которой определена функция.

Доказательство приведенной теоремы очень просто. Можно обосновать и теорему гораздо более общего вида, которая показывает, как из совершенно произвольных функций действительной переменной λ можно построить аналитические функции комплексных величин.

Обо всем этом и некоторых связанных с этим вопросах мы подробнее поговорим при свидании.

Ты видишь, дорогая Соня, что Твое (кажущееся Тебе таким простым) замечание о своеобразии дифференциальных уравнений в частных производных, а именно, что бесконечный ряд *формально* удовлетворяет такому дифференциальному уравнению и тем

не менее не сходится ни при какой системе значений переменных, явилось для меня исходной точкой для интересных и многое разъясняющих исследований. Я желал бы, чтобы моя ученица и впредь таким же образом выражала благодарность своему учителю и другу.

С самым сердечным приветом
Твой К. В.

36. [9 мая 74]

Моя милая Соня!

Я не мог зайти все эти дни к Тебе, отчасти из-за служебных задержек, отчасти из-за легкого недомогания, так что казалось разумнее побыть вечером дома.

Но завтра я Тебя жду в обычный час и надеюсь быть опять совсем здоровым.

Не оставил ли я все же у Тебя заметки по эллиптическим функциям, которые недавно просил вернуть? В таком случае прошу их принести с собой.

Вот Тебе небольшая задача. Дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

имеет частный интеграл

$$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}}(x - \lambda),$$

где λ, μ, ν обозначают произвольные постоянные, а $F(u)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$F''(u) + {}^1/_2\ \mu u F'(u) + \mu\nu F(u) = 0.$$

Каково общее решение этого уравнения?

При $\mu = 1$, $\nu = {}^1/_2$ можно взять

$$F(u) = f(\lambda)\, e^{-\frac{u^2}{4}}.$$

Тогда из частного интеграла

$$\varphi = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}}\, e^{-{}^1/_4 \frac{(x-\lambda)^2}{t}}$$

получается общий интеграл

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-1/4 \frac{(x-\lambda)^2}{t}} d\lambda.$$

Однако, если $f(\lambda)$ при бесконечно больших значениях стремится к бесконечности быстрее, чем $e^{-c\lambda^2}$ при сколь угодно малой константе c, то предыдущее выражение не имеет смысла.

Может быть, можно в этом случае получить более пригодное выражение, применяя общую функцию $F(u)$, удовлетворяющую построенному дифференциальному уравнению при других значениях постоянных μ, ν? Или же произвольная функция связана с ограничением, чтобы при $\lambda = \pm\infty$, $\frac{\log|f(\lambda)|}{\lambda^2} = 0$?

С сердечным приветом
Твой К. В.

37. Б. [15 мая 74]

Моя милая Соня!

Мне очень жаль, что я не смог вчера сдержать своего обещания. Но я так простудился, что вынужден был вчера слечь. Сегодня я чувствую себя лучше, но все-таки должен оставаться дома. Завтра надеюсь увидеть моего дорогого друга.

С сердечным приветом
Твой К. В.

38.

Мой милый друг!

Завтра (среда) у меня свободно все время до обеда, и поэтому прошу Тебя ждать меня около 11 часов. Сегодня я сравнительно занят, так как в те дни, которые я провел дома, многие дела остались неисполненными. Я надеюсь, что завтра Ты найдешь меня совсем здоровым.

19.5.74. С сердечным приветом
Твой К. В.

[P. S.] Меня мучает эти дни математический парадокс, по которому было бы возможным *удовлетворить каждому* уравнению 4-го порядка между двумя переменными x, y, полагая

x — рац. функция $(t, \sqrt{R(t)})$

y — рац. функция $(t, \sqrt{R(t)})$,

где $R(t)$ целая функция от t. Разумеется, это не может произойти таким образом, что t и $R(t)$ могут быть выражены рационально через x, y (скорее каждой паре величин (x, y) отвечают два значения t), но следствием было бы, что каждый интеграл, для которого $\rho = 3$, преобразовался бы в гиперэллиптический (для которого в общем должно было бы быть $\rho > 3$), что является маловероятным. С другой стороны, я не могу найти ошибок в своих заключениях.

39. Б[ерлин] 21.5.74

Моя милая Соня!

Мое нездоровье с вечера позавчерашнего дня перешло в воспаление горла, сопровождаемое сильной лихорадкой и абсолютной бессонницей.

Это продлится, пожалуй, дней восемь, и врач строго запретил мне в течение этого времени принимать кого бы то ни было.

Твой К. В.

40. Берлин. Воскресенье, 29 мая 74.

Мой дорогой друг!

Со вчерашнего дня меня оставила лихорадка, и я наслаждался последней ночью освежающим сном. Врач думает, что я скоро поправлюсь, хотя пока я чувствую себя еще очень слабым. О том, как мне хочется поскорее Тебя увидеть, я могу и не говорить Тебе. Послезавтра (вторник) я надеюсь настолько поправиться, что смогу принять Тебя, если у Тебя найдется свободный часок для меня (я ведь не знаю, приехали ли к Тебе за это время ожидаемые гости). Прошу сперва уведомить меня парой слов.

С сердечным приветом

Твой К. В.

[40_1] 86.

Милейшая Соня, прошу Тебя прийти сегодня

Твой К. В.

[40_2] 87.

Милая Соня!

Мне было бы удобней всего, если бы Ты смогла прийти завтра до обеда (в час дня). После полудня должен я отбыть.

Твой К. В.

[40_3]91.

Дорогой мой друг!

Сегодня почти до 11 занятый в Академии и на факультете, я должен, к моему большому сожалению, последовать только что пришедшему дружескому приглашению.

Завтра вечером я, однако, свободен и незамедлю появиться.

Во всех случаях с дружеским приветом

Вейерштрасс

26 июня (утро)

[40_4]95. 4 июля [1874]

Мой дорогой друг!

Полученный от Тебя вчера вечером лист случайно погиб. Впрочем, все в порядке, и я могу восстановить содержание по памяти, одновременно указывая Тебе, как можно было бы развить исследование (на основании предыдущего) наилучшим образом.

«Если предлагаемое дифференциальное уравнение не имеет нормальной формы, то ее можно придать ему путем введения вместо $x, x_1, \ldots, x_r$ стольких же линейных функций $(y, y_1, \ldots, y_r)$, как аргументов φ.

Именно, если положить

$$y = b + cx + c_1x_1 + \cdots + c_rx_r,$$
$$y_1 = b' + c'x + c_1'x_1 + \cdots + c_r'x_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_r = b^{(r)} + c^{(r)}x + c_1^{(r)}x_1 + \cdots + c_r^{(r)}x_r,$$

где b, c обозначают постоянные, которые удовлетворяют условию, что определитель

$$\begin{vmatrix} c & c_1 & \ldots & c_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^{(r)} & c_1^{(r)} & \ldots & c_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

не должен обращаться в нуль, то выражение

$$G(x, x_1 \ldots \varphi \ldots \varphi_{\alpha,\alpha_1\ldots\alpha_r})$$

преобразуется в другое такой же формы

$$\overline{G}\left(y, y_1, \ldots \varphi \ldots \frac{\partial^{\beta+\beta_1+\cdots+\beta_r}}{\partial y^{\beta}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_r^{\beta_r}}\right)$$

в котором, так же как и в G, встречаются производные порядка не более высокого, чем n, и можно показать, что последнее, вообще говоря, т. е. если исключить специальные системы значений постоянных c, c_1, . . ., c_r, действительно содержит производную $\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$.

Убедиться в этом легче всего следующим образом. Если через

$$\varphi_{\alpha'\alpha_1'\ldots\alpha_r'},\ \varphi_{\alpha''\alpha_1''\ldots\alpha_r''} \text{ и т. д.},$$

обозначить входящие в G производные n-го порядка, то имеем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G_0 + G_1\varphi_{\alpha'+1,\,\alpha_1'\ldots\alpha_r'} + G_2\varphi_{\alpha''+1,\,\alpha_1'\ldots\alpha_r''} + \ldots,$$

где G_0, G_1 . . . G_r содержат лишь производные порядка меньшего, чем $n + 1$.

Но

$$\varphi_{\alpha'+1,\,\alpha_1'\ldots\alpha_r'} = c^{\alpha'+1}c_1^{\alpha_1'}\ldots c_r^{\alpha_r'}\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \ldots,$$

$$\varphi_{\alpha''+1,\,\alpha_1''\ldots\alpha_r''} = c^{\alpha''+1}c_1^{\alpha_1''}\ldots c_r^{\alpha_r''}\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \ldots,$$

где отброшенные члены содержат только такие производные

$$\frac{\partial^{\beta+\beta_1+\cdots+\beta_r}}{\partial y^{\beta}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_r^{\beta_r}},$$

в которых $\beta + \beta_1 + \ldots + \beta_r = n + 1$, но $\beta < n + 1$. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = (G_1c^{\alpha'+1}c_1^{\alpha_r'}\ldots c_2^{\alpha_2'} + G_2c^{\alpha''+1}c_1^{\alpha_1''}\ldots c_r^{\alpha_r''} + \ldots)\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}} + \text{etc},$$

причем в отброшенные члены, после того как содержащиеся в них производные φ по x, x_1, . . ., x_r преобразованы в производные по y, y_1, . . ., y_r, не входят $\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$.

Доказательство.

Если выбрать постоянные c, c_1, . . ., c_r так, чтобы коэффициент $\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$ в указанном уравнении, рассматриваемый как функция от x, x_1, . . ., $\varphi_{\alpha,\alpha_1\ldots\alpha_r}$, не равнялся тождественно нулю — что возможно лишь для специально построенной системы значений c, c_1, . . .

$\ldots, c_r,$ — то он также не будет тождественно равен нулю, если в нем вместо переменных $x, x_1 \ldots x_r$ ввести $y, y_1, \ldots, y_r$ и преобразовать производные $\varphi_{\alpha,\alpha_1\ldots\alpha_r}$ в производные от φ по $y, y_1, \ldots, y_r$; тогда-то, следовательно, и появится производная

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}},$$

но

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c\frac{\partial \overline{G}}{\partial y} + c_1\frac{\partial \overline{G}}{\partial y_1} + \ldots + c_r\frac{\partial \overline{G}}{\partial y_r},$$

отсюда $\frac{\partial G}{\partial x}$, преобразованная указанным образом, может содержать производную $\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial y^{n+1}}$ тогда, когда в $\overline{G}$ входит производная $\frac{\partial^n\varphi}{\partial y^n}$».

Полагаю, дорогая Соня, что я так, как нужно, восстановил ход Твоих мыслей, благодаря чему, во всяком случае, соображения, которые у меня были, я воспроизвел точно и простейшим образом.

Если взять, в частности,

$$y = x - a - c_1(x_1 - a_1). \ldots - c_r(x_r - a_r),$$
$$y_1 = x_1 - a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y_r = x_r - a_r,$$

то видно, что при подходящем выборе $c_1, \ldots, c_r$ φ всегда допускает разложение в ряд

$$x - a - c_1(x_1 - a_1). \ldots - c_r(x_r - a_r),\ x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$$

и те функции, в которые переходят

$$\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^{n+1}}$$

при $x = a + c_1(x_1 - a_1) + \ldots + c_r(x_r - a_r)$, как ряды по $x_1 - a_1, \ldots, x_r - a_r$, вообще говоря, можно сделать произвольными.

Далее должны следовать замечание о необходимости указанной подстановки и пример $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}$. Затем — доказательство того,

что всякая функция φ, которая не является сингулярным решением дифференциального уравнения, имеет функциональные элементы, которые можно найти разъясненным образом. Наконец, система дифференциальных уравнений и пример.

Я приду к Тебе сегодня еще раз, чтобы подготовить введение к кольцу [1].

Сердечно приветствуя
Твой В.

Одновременно отсылаю Тебе также Твои scripta на случай, если, может быть, захочешь их использовать.

[40$_5$] 88.

Дорогая Соня!

Так как завтра, возможно, мне будет затруднительно прийти к Тебе, прошу подождать меня сегодня после полудня

Сердечно приветствуя
Твой К. В.

7 июля (утро) [1874]

[40$_6$]94. Берлин, Восточн. вокзал
11 августа [1874]

Милая Соня!

Я уже обдумал дело, о котором мы говорили: я напишу завтра Гюбнеру, без ссылки на Твою подругу, так что она ничего не узнает и ответственность остается на мне.

Сердечный привет, мой дорогой друг.
К. В.

41. Рюдерсдорф, 11 августа 74.

Моя дорогая Соня!

Ты, вероятно, уже получила несколько строк, которые я написал на Восточном вокзале. Я только что закончил письмо к проф. Гюбнеру, на что я решился, чтобы по мере возможности направить на верные рельсы то дело, которое я, к большому сожалению, считаю безнадежным.

Как счастлив я буду, если мне это удастся.

Зато мне было невозможно сочинить обещанное письмо для Лермонтовой, но в этом случае одни сутки роли не играют. Я пришлю его Тебе завтра.

---

[1] К работе о форме кольца Сатурна.

Надеюсь увидеть Тебя еще в четверг (к вечеру), а пока шлю Тебе мой самый сердечный привет.

Твой К. В.

Так как мое письмо к Г[юбнеру] уже отправлено, то, когда ты получишь это письмо, Ты можешь сообщить своей подруге о том шаге, который я предпринял без ее ведома. Если он неудачен, возможность чего я допускаю, так как личности Г[юбнера] я вовсе не знаю, то в ответе буду только я. [1]

[41$_1$]90. 14 августа (утро) [1874]

Мой дорогой друг!

Из прилагаемого, только что полученного мною письма проф. Гюбнера Ты должна усмотреть, что мои опасения, к сожалению, были весьма обоснованы. Г[юбнер] говорит, что ему невозможно активно вмешаться в дело Юлии Лермонтовой, потому что о ситуации его поставили в известность слишком поздно (это значит, что Гофман написал только Мюлеру). Теперь имеется еще один возможный выход, который я предлагаю. Юлия должна тотчас пойти к Гофману и сообщить ему, что я узнал по частному запросу, что ей требуется сдать лишь устный экзамен. Гофман должен будет тогда тотчас же написать *декану* и настоятельно добиваться, чтобы завтра (в субботу), когда будет последнее факультетское заседание, поставить дело на обсуждение еще раз. Юлия также должна сама написать, набросок моего письма я сразу же сделаю и передам Тебе, если Ты еще придешь.

Не могу передать Тебе, как сильно я удручен этим делом (столь неудачно начатым). Надеюсь лишь, что в последний момент оно примет благоприятный оборот.

Твой В.

[41$_2$]97. 15 августа, утро [1874]

Дорогой друг!

Пошли мне тотчас же через посыльного Твою диссертацию (так же как и забытый у Тебя вчера пакет писем) незамедлительно — типография требует уже, чтобы мы непременно сделали дальнейшие требуемые изменения уже сегодня пополудни.

Юлия действительно уехала!

С сердечным, дружеским приветом

Твой В.

Скажи посыльному, чтобы он доставил мне вещи в Университет [неразборчиво].

[1] Приложен листок с английским текстом, написанный другой рукой: Переиздание материалов по электростатике и магнетизму в издательстве Вильяма Томсона. Лондон, 1872.

[41$_3$] 98.

Моя дорогая Соня!

На завтра в 5 часов пополудни я получил одно приглашение, которое не мог отклонить. Я был бы очень обрадован, если бы Ты смогла устроить так, чтобы прийти ко мне от 12 до 2 часов.

Если Ты не откажешь, буду считать, что придешь.

Переданные Тебе в последний раз бумаги прошу мне вернуть, так как они мне понадобятся.

С сердечным приветом
Твой Карл В.

Вторник (пополудни)

[41$_4$] 89.

Милая Соня!

Заключение § 2 я изменил. Нацарапанную страницу следует, во всяком случае, переписать. Конец § 3, возможно, следует увеличить на несколько строк. Сегодня после полудня приду, чтобы все скомпоновать.

Сердечно приветствуя
В.

[41$_5$] 93.

Мой дорогой друг!

К моему сожалению, не могу сдержать своего обещания прийти к Тебе сегодня, так как должен последовать приглашению на званый обед к кронпринцу. Во всяком случае завтра я приду либо до обеда, либо, что вероятнее, вечером.

Если Ты с начатой работой в основном покончила, то я бы просил Тебя завтра прислать ее как можно раньше, чтобы я смог внимательно ее просмотреть. То, что я просмотрел позавчера, мне вполне понравилось, также в части изложения; у меня, однако, есть одна мысль.

При этих обстоятельствах я хочу все же попытаться прийти к Тебе сегодня после заседания Академии (около 7 часов), чтобы обсудить дела.

Итак, собери, прошу Тебя, соответствующие бумаги и займись сегодня только дифференциальными уравнениями в частных производных.

Сердечно приветствуя
Твой В.

Понедельник (до полудня) [1874]

[41$_6$] 96

Милая Соня!

Уже видно, насколько Ты сориентировалась в прилагаемых листах. Твои формулы и общий ход изложения я сохраняю, в выражениях же многое следует изменить. Введение функций $\theta(u_1, \ldots)$, которое осложнило бы дело, как Ты уже знаешь, не обязательно. Конец разработки пришли мне возможно скорей.

Сердечно приветствуя
Твой В.

42. Б[ерлин] 18.8.74

Мой дорогой друг!

Я забыл вчера Тебе сказать, чтобы Ты послала за мной, если я сегодня еще буду нужен Тебе или Юлии; исправляя это, одновременно сообщаю,что я с часу весь день буду дома. Завтра (среда) я после обеда приду к Тебе.

Скажи также своей подруге, что с 4 октября я буду здесь, и чтобы она обращалась, не задумываясь, прямо ко мне в каждом случае, когда я смогу быть ей хоть чем-нибудь полезен.

С самыми сердечными приветами
к Вам обеим
Твой К. В.

43. Берлин (В) Потсдамштрассе 40
21-го сентября 1874

Моя дорогая Соня!

Вернувшись вчера из своего путешествия, я был очень обеспокоен тем, что не обнаружил от Тебя ни одного письма. Я уже опасался, не заболела ли Ты от напряжения сил прошлого лета и поездки. К счастью, как я заключаю, к моей огромнейшей радости, из только что полученного дорогого Твоего письма (дата которого 2 сент./2 июля (действительно!) является ошибкой), это не так, хотя Твои и поступили совершенно разумно, что «арестовали» все Твои книги на время твоего пребывания в деревне. Со своей стороны я также очень настоятельно прошу Тебя, мое сердце, позаботиться о своем отдыхе. То, что сейчас Ты пропустишь в своих занятиях, Ты легко догонишь потом, окрепнув и набравшись сил. Из собственного опыта я знаю, как может быть несчастен человек, если его голова полна проблем и он не может справиться с ними из-за недостатка физических сил. Когда ты пришлешь мне обещанную фотографию, я надеюсь, она будет походить на тот образ, который живет в моем воспоминании с того времени, как два года тому назад Ты возвратилась с родины.

Теперь сперва немного о деле. Твою диссертацию я нашел уже готовой. Качество печати очень хорошее, а экземпляры на писчей бумаге выглядят очень прилично. (Последний лист для корректуры *мне* не был послан, как Ты ошибочно предполагала, а, вероятно, был передан Тебе, когда Ты уже уехала, но ущерба от этого не получилось.) 35 экземпляров я оставлю здесь, чтобы их распределить, 25 переплетенных и 40 сброшюрованных упакованы для отсылки в Петербург (по указанному Тобой адресу), 250 экземпляров, предназначенные для Гёттингена, уже находятся у Лотце. Впрочем, мне это не доставило никакого труда, так как Лампе исполнил все наилучшим образом.

Мои сестры и я получили большое удовольствие от нашей трехнедельной поездки. Сперва мы поехали вверх по Рейну, от Кёльна до Страсбурга, задерживались по нескольку дней в местах, где нам нравилось, и под конец провели 4 дня в Бадене, а также 4 дня в Гейдельберге. Погода нам очень благоприятствовала, особенно в Бадене и Гейдельберге было необычайно красиво.

На Рейне я отдался своим юношеским воспоминаниям. Как хорошо было бы, если бы мне удалось проехать еще раз тот же путь в сопровождении дорогого друга, которого доброжелательная судьба послала мне в более зрелые годы. Странное чувство овладело мною, когда я снова разыскал дорожку, по которой много лет тому назад проходил с другом, убедившим меня, наконец, осуществить давно задуманное решение стать математиком. Только на этом пути (полагал он) мне суждено будущее; сам же он надеялся добиться положения в научном мире в качестве ученого юриста. Я остался верен своей цели и доволен достигнутыми результатами, несмотря на то, что не все цветы дали зрелые плоды. Мой же друг в дальнейшем отказался от блестяще начатой научной карьеры, чтобы быстрее продвинуться на практической государственной службе. Он занимает теперь значительный пост, но стал таким закоренелым ханжой и политическим реакционером, что между ним и мною невозможно никакое взаимопонимание. А в отношении моей сестры Элизы он был совершенно невежлив, когда она случайно заговорила о необходимости безусловного упразднения смертной казни.

В Страсбурге я ни у кого не был, но совершил геройский поступок, поднявшись в течение 16 часов 2 раза на площадку башни кафедрального собора (375 ступеней).

В Гейдельберге я встретил Кирхгофа, Кёнигсбергера и Бунзена и провел с ними много времени.

У Кёнигсбергера очаровательная жена, которая соединяет неподдельную любезность и приятный нрав с очень хорошим образованием. Он сам очень изменился; вполне им заслуженное

признание, которое явилось следствием его преподавательской деятельности, придало ему самодовольства больше чем надо; в то же время в его суждениях о других математиках звучит такая резкость, что я не раз бывал расстроен. Он хвалит только своих учеников, но что Ты скажешь, например, на то, что он ставит Краузе гораздо выше Юргенса? По отношению ко мне он не переменился, но мы мало обсуждали математические проблемы, наши взгляды расходятся слишком далеко. Его будущая должность в Дрездене внешне выглядит великолепной, но я боюсь, что в науке он на ней не продвинется. Впрочем, мне было приятно, что он стал действительно чрезвычайно честным человеком, каким и обещал быть.

Чаще всего я общался с Кирхгофом и надеюсь, что наша нынешняя встреча мне многое дала.

У меня есть план перевести его в Берлин на должность в Академии, что даст ему необходимый досуг для того, чтобы разработать полную систему математической физики. Этим будет оказана большая услуга науке и ему самому. Ибо Гейдельбергские условия ему больше не подходят, как и занятия экспериментальной физикой. Об условиях, на которых он согласен сюда перейти, мы договорились, и я надеюсь, и уверен, что они будут выполнены.

Бунзена я нашел очень переменившимся и постаревшим. Но следы его восхитительного юмора все-таки не исчезли.

Неслыханную сенсацию производит в Гейдельберге то, что он, о котором ходили слухи, что он похищает сигары у всех своих студентов в лаборатории, не курит уже 8 дней, и не потому, что спалил драгоценный манускрипт от недокуренной сигары,— по этому поводу он утешает себя мыслью, что второй вариант будет лучше первого, а потому, что не куря, может позволить себе безнаказанно нарушать диету.

Во второй вечер нашего пребывания там мы были в доме у Кёнигсбергера. Бунзен, который явился несколько позже, принес с собой газету, где было напечатано, что одной ученой даме из Москвы, госпоже С. фон Ковалевской Гёттингенским философским факультетом присвоена докторская степень, честь, которая была оказана, кроме нее, только одной-единственной женщине, знаменитой Доротее Шлёцер. Это явилось для всех сенсацией — я умышленно ничего об этом не говорил.

Потом, разумеется, говорили много о Тебе и о Твоих обеих сокурсницах [1], я узнал кое-что из вашей тогдашней «цыганской жизни», что меня очень позабавило.

---

[1] Ю. В. Лермонтовой и Ж. Евреиновой.

Вы были предметом очень большого внимания в Гейдельберге. Одно я должен рассказать Тебе. Бунзен, который, как я думаю, не знал, что Ты стала моей ученицей, назвал Тебя «опасной женщиной» с полного согласия философа, с которым Ты познакомилась у меня. Он обосновал это таким фактом, о котором я очень хотел бы знать, передан ли он им в неприукрашенном виде.

Он поклялся не брать в свои лаборатории женщин, особенно русского происхождения. Так, и барышню Лермонтову он не хотел взять к себе работать и даже слышать о ней. Тогда будто бы Ты пришла к нему и стала так нежно его просить, что он не смог устоять и изменил свое решение. Так ли это? В этом случае философ был бы не совсем неправ. О Бунзене идет, во всяком случае, слава, что он в своих рассказах немного фантазирует. Сочиняет же он романы, хотя их и не печатают.

На этом я должен в этот раз закончить, чтобы это письмо могло уйти еще с вечерним поездом. Твое было так несообразно долго в пути, что я сильно опасаюсь, что мое не застанет уже Тебя в Палибине. Но, пожалуйста, ответь мне по возможности срочно. Ты не поверишь, какую радость доставляют мне Твои письма; я тоже обещаю Тебе написать сразу же.

Прошу передать наилучшие пожелания Твоим уважаемым родителям; скажи им, что я совершенно одобряю меры, предпринятые ими на время Твоего пребывания в П[алибине]. При всем том следующее мое письмо будет содержать не одну болтовню, но и кое-что из математики, хотя сперва и безвредное.

Теперь сердечное прощай, мой милый, дорогой друг, мне до сих пор чужда мысль, что Ты так далеко от меня.

Твой К. В.

44. Берлин В. Потсдамштр. 40
16 декабря 1874

Моя милая Соня!

В твоем последнем письме (без числа), которое слишком долго заставило себя ждать, содержится просьба основательно Тебя побранить на правах строгого учителя.

Некоторый повод к недовольству своей дорогой приятельницей у меня уже имеется. Прежде всего, я думаю, что, когда Ты отвечала на мое последнее письмо, Ты не держала его перед глазами, а то Ты бы не ответила так неудовлетворительно на высказанное мною в конце письма предложение.

А, впрочем, я с самого начала рассчитывал на то, что в первые месяцы своего пребывания в Петербурге, после того как Ты так долго была лишена возможности бывать в обществе, Ты не возьмешься за постоянную и серьезную работу.

Ты пишешь, что дело так и обстоит, и я даже не очень недоволен этим, отчасти из-за убеждения, что некоторое развлечение после предыдущей долгой работы не повредит Твоему физическому самочувствию, и отчасти из-за уверенности, что Твой серьезный ум, Твое воодушевление идеальными стремлениями не дадут Тебе на слишком долгое время оторваться от научной работы. Поэтому спокойно предавайся непривычным Тебе наслаждениям столичной жизни, поскольку Ты сама находишь в них удовольствие, а не только следуешь внешним влияниям. Я знаю, что Ты не изменишь науке и что жажда творчества, временно уступившая совершенно понятному утомлению, снова оживет в Тебе с еще большей силой. Я не отрицаю, конечно, что Ты нередко будешь нуждаться в стимулирующем и подбадривающем влиянии. В этом отношении мне было очень радостно, как Твоему верному другу, то, что Ты написала в предпоследнем письме о своем брате [1]. Я, по правде, не мог бы желать Тебе ничего лучшего, как найти в ближайшем родственнике товарища по стремлениям и друга.

Однако ж я совсем удалился от намерения побранить Тебя; пусть уж на этот раз так и будет, тем более я надеюсь, Ты поймешь, что наказание за краткость и поверхностность Твоего последнего письма я воздаю Тебе тем, что в этот раз шлю довольно длинное послание.

Если я задержался с ответом несколько дольше, чем обычно в переписке с Тобой, то это не мелкая месть и не проверка, сдержишь ли Ты свое обещание писать мне, если я когда-нибудь на одно из Твоих писем не отвечу своевременно. У меня не было недостатка во времени в обычном смысле, но после того, как 15 октября я снова стал свободным человеком, я почувствовал такое стремление к математическим занятиям, что последние два месяца пролетели для меня совершенно незаметно, и сегодня я даже не поверил своим глазам, когда, взяв в руки требующее ответа письмо, увидел, что оно датировано 19 октября. Что касается результатов моей работы, которыми я не совсем недоволен, то мне хочется с тобой кое-чем поделиться.

Прежде всего, в связи с моими лекциями, мне пришлось пополнить пробел в теории функций. Ты знаешь, что до сих пор еще не был решен следующий вопрос: если произвольно берется бесконечный ряд величин

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ \infty,$$

---

[1] Федор Васильевич Корвин-Круковский поступил в Петербургский университет в 1874 г.

то, спрашивается, всегда ли будет существовать такая целая трансцендентная функция одной переменной x, что при $x = a_1, a_2, \ldots$ она исчезает, а при любом другом значении x нет? Соответствующее порядковое число для каждой из этих величин равно λ, если оно λ раз содержится в ряду.

Для утвердительного ответа на этот вопрос оказывается необходимым условие, чтобы, как только n превысит определенный предел, a_n по своей абсолютной величине было постоянно больше произвольно заданной величины. Но до сих пор мне не удавалось доказать, что выполнение этого условия *достаточно*. Теперь вопрос решается с помощью следующей теоремы.

«Данному ряду

$$a_1, a_2, \ldots a_n,$$

относительно которого я прежде всего предполагаю, что ни один из его членов не равен нулю, сопоставим ряд целых положительных чисел (считая ноль также положительным числом)

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$$

таким образом, что сумма

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^{\nu_1+1} + \left(\frac{x}{A_2}\right)^{\nu_2+1} + \ldots,$$

в которой A_n обозначает абсолютное значение a_n, имеет при каждом положительном значении x конечную величину. Это всегда возможно; можно взять

$$\nu_1 = 0, \qquad \nu_2 = 1, \qquad \nu_3 = 2, \ldots \qquad \nu_n = n - 1, \ldots$$

Если далее взять

$$E(x)_0 = 1 - x,$$

$$E(x)_1 = (1 - x)\, e^x,$$

$$E(x)_2 = (1 - x)\, e^{x + \frac{x^2}{2}},$$

. . . . . .

$$E(x)_n = (1 - x)\, e^{x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}},$$

тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}\right)_n$$

имеет для каждого конечного значения x конечную величину, не зависящую от порядка его сомножителей, и является выражением некоторой аналитической функции x, которая всюду на конечном интервале имеет характер целой функции и при $x = a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ исчезает указанным образом».

Доказательство теоремы производится совершенно элементарным образом. Ты найдешь его, воспользовавшись из Твоей эллиптической тетради главой об изображении целых трансцендентных функций посредством бесконечных произведений. К этому присоединяется следующая по порядку теорема (которая в моей теории абелевых функций считается еще недоказанной).

Всякая однозначная аналитическая функция x, которая для каждого конечного значения этой величины имеет характер рациональной функции, всегда может быть изображена как частное двух обычных всюду сходящихся степенных рядов, притом таким образом, что ни при каком значении x числитель и знаменатель не исчезают одновременно.

Далее, сюда же присоединяется вопрос об общем аналитическом способе выражения однозначной функции одной переменной, для которой, как для аргумента этой функции, имеется конечное число предельных точек, вблизи которых она становится неопределенной, как это имеет место у трансцендентной целой функции на бесконечности.

Объединение всех этих теорем составило в целом довольно хорошенькую небольшую статью, которую третьего дня я прочитал в Академии и которая появится в декабрьском выпуске Докладов. Разумеется, я сразу вышлю ее Тебе.

Предмет, которым я далее занимался, Тебя еще более заинтересует; к сожалению, в отношении его я пока могу сообщить только, что имею надежды на успехи, а подробное сообщение задержу до личной беседы.

Помнишь ли, мое сердце, что в то время, когда наша дружба становилась более сердечной, так что я иногда испытывал потребность говорить с Тобой о работах, которые я хотел бы выполнить, мы забывались в научных грезах и фантазиях, часто говорили об условиях устойчивости мировой системы и о многих вопросах, с которыми связана эта проблема. Ты знаешь, что собственно математическая задача, о которой идет речь, может быть сформулирована следующим образом.

«Положим, что для определения n функций действительной величины t дано n дифф[еренциальных] ур[авнений]

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \ldots, x_n),$$

где $G_1, \ldots, G_n$ обозначают целые функции $x_1, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами.

Спрашивается, каковы должны быть эти функции G и каким условиям должны удовлетворять значения $x_1, \ldots, x_n$ при $t = 0$ для того, чтобы $x_1, \ldots, x_n$ были *регулярными* функциями t (в пределах $-\infty$, $+\infty$). Собственно говоря, следует определить, при каких условиях каждая из величин постоянно колеблется в конечных пределах. Наконец, следует по возможности найти разложения $x_1, \ldots, x_n$, соответствующие их функциональному характеру».

В течение нескольких недель я серьезно занимался этим вопросом и, кажется, нашел путь, который в свое время приведет к цели; но для того чтобы сделать его доступным, потребуется еще много усилий. Я хочу дать Тебе только одно указание, единственное, которое я могу сделать без излишних подробностей. Ты знаешь, что если даны начальные значения $x_1, \ldots, x_n$, то всегда можно составить аналитические выражения $x_1, \ldots, x_n$ как функции t, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и существуют на *ограниченном* интервале времени. Теперь мне кажется, что, если $x_1, \ldots, x_n$ действительно такие функции, какие требуются, то всегда можно найти целые функции $y_1, \ldots, y_n$ от $x_1, \ldots, x_n$, для которых существуют подобные дифференциальные уравнения, но построенные таким образом, что из них получаются выражения от t, определенные для *большего* интервала времени. С этими новыми дифференциальными уравнениями можно далее поступать точно таким же образом, и Ты, конечно, понимаешь, что в случае, если в зависимости от характера первоначальных дифференциальных уравнений и взятых начальных значений процесс будет продолжаться бесконечно, то из него можно сделать выводы об области существования определяемых функций.

В действительных задачах, главным образом относящихся к астрономии и математической физике, выясняется далее, что последовательные приближения осуществляются путем решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а это приводит к возможности[получения] сходящихся рядов. То, что я говорю, конечно, даст Тебе очень неполное представление о моих идеях; но последние не настолько зрелы, чтобы я мог выразить их с достаточной ясностью.

Все это время мне недоставало Тебя еще потому, что в беседе с Тобой я скорее довел бы некоторые мысли до полного развития, чем это достигается простым размышлением. Тем не менее, несмотря на интерес к этому вопросу, мне пока придется отказаться от его дальнейшего рассмотрения, потому что раньше мне необ-

ходимо закончить другие дела, ожидающие своей разработки. Я уже вижу теперь, что в дальнейшем мне хватит работы на всю жизнь. Все же я очень доволен, что мне удалось посвятить 2 недели размышлениям над столь важным для меня вопросом. По крайней мере, я вижу перед собой определенную цель.

На этом я заканчиваю, мой дорогой друг, это длинное письмо, которое я пишу в сенате во время выборов представителя Университета в нашу палату пэров.

Хотел бы Тебе еще многое сказать; однако от Тебя зависит, насколько скоро вслед за этим письмом последует новое.

В следующем письме для большей информации я сообщу Тебе еще кое-что об интегрировании при помощи логарифмов, предмет этот достаточно прост. Еще одно. От многих господ, которым я послал Твою диссертацию, я получил благоприятные отзывы: от Кирхгофа, *Гейне*, Шварца, Шеринга и прежде всего П. Дюбуа, который был весьма восхищен Твоей рукописью. Ты непременно получишь от него на днях дружелюбное, быть может, даже полное восхищения письмо. Очень благосклонно высказался о Твоей работе также *Гейне*, который подлинную ее цель понял, как мне кажется, наилучшим образом. Перешли мне обратно письмо *Шварца*, чтобы я смог ответить на него. Напиши, кроме подробного сообщения о себе, также что-нибудь о Юлии, которой мы, я и мои сестры, когда они были здесь, очень радовались. Ты не можешь себе представить, какой оживленной она была. Требуемый счет пошлю Тебе в следующий раз. Его нет у меня под рукой, а затягивать из-за него отправление этого письма не хотелось бы.

До свиданья, мое сердце, и не заставляй своего друга опять так долго ждать от Тебя признаков жизни. Ты же видишь, что он снисходительный духовный отец, которого благополучие его духовного дитяти очень волнует и которому знакомы слабости человеческой натуры.

Сердечный привет!

Вейерштрасс

[P. S.] В эту зиму пока чувствую себя хорошо, и в вопросе эллиптических функций продвинулся дальше, чем обычно в это время года. Моя рука еще немного побаливает, однако не сильно и при писании, как видишь, не очень-то мне мешает.

45. Берлин, 1-го января 1875 г.

Моя дорогая Соня!

Сердечно благодарю Тебя за прекрасный рождественский подарок, который Ты мне сделала своим последним письмом. Из него виден научный энтузиазм, который меня восхищает в той же мере, в какой делает счастливым Твоя верная привязанность к своему учителю и другу. Я опасаюсь, однако, что вызвал в Тебе преувеличенные ожидания, так как вопреки своим привычкам и уверенный, что это Тебя порадует, я соблазнился говорить с Тобой о том, над чем еще только предполагаю работать. Цель, которую я хотел бы достигнуть, находится еще вдалеке и рисуется мне в неопределенных очертаниях. До сих пор я еще почти ничего не сделал и размышлял лишь о методах, которыми я надеюсь облегчить свой путь. Кроме того, как Ты сама сознаешь, настоятельно необходимо, чтобы я, в первую очередь, довел до конца свои старые работы. Я не могу медлить с этим и по другим причинам. В настоящее время, именно с тех пор, как молодые математики пришли к убеждению, что писание толстых книг (кстати без указания источников) является наиболее действенным средством, чтобы получить признание масс и добиться хорошего места,— как раз в той области анализа, основательному исследованию которой я посвятил лучшую часть своей жизни,— было сделано слишком много безобразного и настала пора помешать этому.

Не могу Тебе сказать, каким негодованием меня наполняет, что как раз мой самый старый ученик, которым я так дорожил, только что опубликовал свою толстую книгу об эллиптических функциях, в которой едва ли можно найти страницу, которая не давала бы повода к переделыванию, а сейчас выбрал себе в жертву и Абелевы функции, для которых он не сделал ничего самостоятельного.

Я считаю, что не принадлежу к ученым педантам и не признаю даже в математике единой душеспасительной церкви; чего я, однако, требую от научной работы, так это единства метода (от последовательного выполнения определенного плана до надлежащей проработки деталей), придающего ей печать самостоятельного исследования. Плохо уже то, что у нас, как и в других странах, учебные руководства часто пишутся не специалистами, причем за французами можно, по крайней мере, признать ту заслугу, что недостаток глубины они отчасти искупают ясным и изящным изложением. Что же касается наивысших и труднейших частей науки, где нечто способен дать только тот, кто отдает этому все свои силы, то они не должны быть предметом легкомысленного книгописания.

Прости мне, милый друг, это отступление, которое Ты можешь считать доказательством того, насколько я уже привык доверять Тебе мои мысли, даже самые безотрадные.

Теперь я прежде всего отвечу на Твои вопросы. Я совершенно согласен с тем, чтобы эту зиму Ты главным образом использовала для пополнения пробелов своих познаний в наиболее элементарных областях математики, именно в аналитической механике и математической физике. Но, наряду с англичанами, изучай также Пуассона и Коши и (напечатанные в Трудах Берлинской академии) работы старшего Неймана по электродинамике. Книга младшего Неймана (сына) по этому же предмету написана несколько тяжеловесно, но тем не менее содержит много хорошего и полезного. Если Ты за это время получила толстейшую книгу Гамильтона о кватернионах, то, я думаю, уже ее внешний вид отпугнул Тебя от ее обстоятельной проработки. Впрочем, по моему мнению, это было бы напрасной потерей времени, и я всегда жалел бедных студентов, для которых при жизни Гамильтона кватернионы были обязательным предметом. Тебе же необходимо усвоить еще многое, гораздо более нужное и полезное, чем специальный метод, который, быть может, вполне приемлем, но ни в коем случае не необходим для решения некоторых проблем и алгебраические основы которого очень тривиального свойства. Я уверен, что это кушанье не по Твоему вкусу. Если позволит время, Ты можешь еще просмотреть Comptes Rendus Французской академии наук, обратив особое внимание на работы Сен-Венана по теории упругости. Правда, везде (т. е. у всех названных авторов) Тебя неприятно поразит отсутствие точности выводов. Но не отступай из-за этого, ведь главное заключается в том, чтобы Ты получила представление обо всем сделанном до сих пор в области математической физики и о нерешенных вопросах. При этом Ты можешь работать и над некоторыми нетрудными задачами, чтобы напрактиковаться в изложении, причем, как я Тебе часто говорил, тщательная проработка отдельных деталей должна рассматриваться как нечто весьма существенное.

Например. Положим, что в n-мерном пространстве, в котором каждая точка определяется координатами $x_1, \ldots, x_n$, а квадрат расстояния между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ $(y_1, \ldots, y_n)$ равен $(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$, требуется определить кратчайшую линию на поверхности, соответствующей поверхности эллипсоида вращения в эвклидовом пространстве, определяемой уравнением

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} = 1$$

или надо решить аналитическую задачу, относительно которой у меня недавно спрашивали совета издатели нового издания трудов Абеля.

Абель утверждает:

Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ обозначают некоторые функции, производные которых представляют *алгебраические* функции, и если между ними и переменной x вообще существует алгебраическое соотношение, то это соотношение может быть всегда представлено в виде

$$c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \varphi_0(x) = 0$$

таким образом, что $\varphi_0(x)$ будет алгебраической функцией, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — постоянными.

В бумагах, оставшихся после Абеля, находится только начало вывода теоремы. Я дал два доказательства, одно чисто алгебраическое, и другое, основанное на первых теоремах учения о периодах интегралов. Попробуй поработать над этим. Если выразить производные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ рационально через x и алгебраическую функцию y этой величины, то φ_0 также будет рациональной функцией x, y; это легко доказываемое дополнение.

В доказательстве теоремы, которая стоит во главе Твоей работы по приведению интегралов 3-го ранга к эллиптическим, Абель впереди помещает приведенный интеграл, так как он с самого начала предполагает линейное соотношение между данными интегралами.

Кирхгоф действительно к Пасхе приедет сюда как член Академии и профессор *математической физики*. Его приглашение я в значительной степени могу считать моей заслугой. Этой осенью я застал его в Гейдельберге в плохом настроении, вследствие некоторых событий, отчужденным от экспериментальной физики и склонным к тому, чтобы последовать за Кёнигсбергером в Дрезденский политехникум. Это побудило меня тотчас по возвращении заинтересовать Академию в приглашении его сюда, что мне удалось, несмотря на сопротивление — по не совсем похвальным мотивам заинтересованных лиц и противодействие — я мог бы употребить и другое слово — в женских кругах, так что вышестоящее начальство не смогло не присоединиться к прекрасно мотивированному предложению Академии о приглашении К[ирхгофа]. Я очень этому рад, хотя меня несколько раз упрекали в том, что я не вправе был взять на себя инициативу в этом вопросе. Это меня мало трогает, потому что гораздо прискорбнее убедиться в том, что даже люди весьма духовно одаренные часто не выдерживают испытания.

Еще одно. Я опасаюсь, что мои письма *слишком поздно* попадают в Твои руки. Мое последнее письмо от 16 декабря (по нашему стилю) было собственноручно сдано на почту. По твоему свидетельству, Ты его получила лишь 23-го, тогда как оно должно было быть в Петербурге уже 19-го утром. Пожалуйста, укажи мне в своем следующем письме точно, когда Ты получила это[1] .

Затем мне бросилось в глаза, что Ты ничего не знаешь об одном письме, посланном Тебе от Шварца. Ведь Ты не могла о нем забыть; в нем было, во-первых, место о твоей диссертации, а затем подробная критика книги Кёнигсбергера.

Мне было бы очень неприятно, если бы это письмо затерялось или попало не в те руки.

Разве Ты не получила то мое письмо, в котором я сообщал Тебе, что, вследствие растяжения руки, могу писать лишь с большим трудом и поэтому не мог послать Тебе ничего математического, а вложил письмо Ш[варца] в качестве вознаграждения. Это мое письмо написано до того, как Юлия была здесь — не надо путать его с той короткой запиской, в которой я уведомлял Тебя о дне ее приезда в П[етербург]; это то же письмо, о котором я говорил в моем последнем послании, что оно во время Твоего ответа, по-видимому, не было у Тебя перед глазами. Пожалуйста, выясни мне все это и отвечай на этот раз поскорее, хотя бы вкратце, но лучше, конечно, подробно. Я во всяком случае напишу Тебе в этом месяце еще раз и по возможности приложу и (ненапечатанную) математическую работу, которая, хотя и не наполнит Тебя энтузиазмом, но все же может быть Тебе полезной.

Мои расходы на Тебя составляют: расходы на диплом, печатание, переплет — в общем 65 рублей, а за вычетом полученных уже 25 рублей, следовательно, 40 талеров. Если ты можешь их послать без особых хлопот, например, по почте, то я, конечно, ничего не имею против, вообще же это не к спеху и я могу подождать, пока не получу их из Твоих собственных рук. Ведь, наверное, Ты получила диссертацию (отосланную 1-го декабря)?

Мы празднуем сегодня первый день Нового Года, когда принято посылать приветы и пожелания счастья всем своим друзьям. Я не мог провести этот день без того, чтобы не доказать моему самому дорогому другу, моей ученице и одновременно поверенной моих мыслей и стремлений, что я вспоминаю о ней с искренним расположением и всегда буду чувствовать себя счастливым, если, несмотря на разделяющее нас расстояние, я останусь ее руководителем на пути, так далеко отклоняющемся от пути дру-

[1] Оно должно прийти в Петербург утром 4-го.

гих людей. До свидания, моя дорогая, и отвечай как можно скорее.

Вейерштрасс

[P. S.] Из диссертации я послал Тебе сначала 2 экземпляра, а затем еще два через Юлию.

Я очень попрошу Тебя также как-нибудь употребить одну неделю на окончание кольца [1]. Я бы не торопил Тебя с этим, если бы некоторые мои друзья не стремились ознакомиться как раз с этой работой. А готова ли она уже для печати, я скажу Тебе совершенно откровенно.

Если не ошибаюсь, в этом письме я указал Тебе также на две оставшиеся ужасные опечатки в Твоей диссертации и просил Тебя еще раз хорошенько просмотреть ее. Ты также ничего не написала мне, как Тебе нравится Твое первое создание в данном ему Реймером одеянии.

46. Берлин (В) Потсдамерштр. 40
12 января 1875

Прошу Тебя писать мой адрес точно так; я получаю тогда ответ на полдня раньше.

Моя дорогая Соня!

Собственно говоря,— по различным причинам — я не очень расположен писать Тебе сегодня. Но я помню, что 15[января] день Твоего рождения и не мог не присоединить свои пожелания счастья к пожеланиям Твоих близких, в кругу которых Ты сегодня, впервые после 5 лет, опять празднуешь этот день. Но, милый друг, не сердись на меня за признание в том, что я достаточно эгоистичен и желал бы, чтобы все оставалось так же, как в прошлом и позапрошлом году, когда — за исключением Юлии — никто здесь ничего не знал об этом дне, кроме меня, и я не мог доставить Тебе большей радости, чем часами рассказывать Тебе о моих новейших исследованиях. Тетрадь, начало которой два года тому назад я принес Тебе в виде подарка ко дню рождения, и сегодня еще не закончена,— вторая часть уже давно начата — но я не забуду своего долга и обещаю Тебе, что никто раньше Тебя ничего не узнает о рассматриваемых там вопросах. Ты убедишься в том, что трудность рассматриваемого предмета допускает лишь медленное продвижение этой работы. Некоторые страницы стоили мне [нескольких] дней.

Однако в ближайшее время по причинам, изложенным в предыдущем письме, я должен буду исключительно заняться абеле-

[1] Работа о кольце Сатурна.

выми функциями — в обычном смысле — и обозримо сопоставить все мои исследования по этому вопросу. Я попытаюсь теперь выполнить это в оригинальной форме, а именно в виде ряда писем к моему другу Ришело. Благодаря такой форме я получаю свободу во многих местах ограничиваться лишь изложением хода моих мыслей, что очень удобно, так как теория предназначена не для детей, и от каждого занимающегося ею можно ожидать, что по данным указаниям он сможет произвести вычисления, имеющие скорее механический характер. Кроме того, в письмах к другу я могу без стеснения отметить своеобразие моего метода и пуститься в критику методов Римана и Клебша. Я, правда, еще не знаю, удастся ли мне выполнить это. Но, во всяком случае, сильное сжатие материала необходимо, если я хочу дать удобочитаемое сочинение. Конспект моей последней лекции по этой теории, в котором многое выпущено, содержит 600 страниц in quarto. Если бы сейчас рядом со мной была моя милая ученица, она могла бы оказать мне существенную помощь.

Я говорил Тебе о математическом приложении к следующему моему письму. Оно готово, только я не знаю, как Тебе его послать. Для письма оно, пожалуй, слишком объемисто — 5 листов, а если я его пошлю в виде пакета, то его вскроют и рукопись пойдет сначала в цензуру. Это само по себе было бы неважно, но я боюсь потери времени. Напиши же мне, как мне поступить.

Чтобы не возбуждать в Тебе слишком больших надежд, я хочу вкратце изложить Тебе содержание.

Ты мне писала некоторое время тому назад, что Чебышев любит задавать Тебе вопросы, касающиеся интегрирования эллиптических дифференциалов при помощи логарифмов. Это побудило меня снова заняться своей старой работой по этому предмету, чтобы изложить Тебе его, применяя знакомый Тебе метод и обозначения.

Работы Чебышева по этому предмету относятся, главным образом, к двум из четырех различных вопросов. В своем первом сочинении от 1857 г., которое я только и имел перед глазами во время составления своей заметки, он показывает, каким образом исследование вопроса о том, можно ли данный интеграл

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx,$$

где $R(x)$ есть целая функция 3 или 4 степени, а F обозначает рациональную функцию от x и $\sqrt{R(x)}$, представить алгебраически-логарифмическим выражением, свести к более простому вопросу

об условиях, при которых интеграл

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

(где R предполагается величиной 4-ой степени, а под $\varkappa$ подразумевается постоянная) может быть выражен в виде

$$C \log \left(\frac{P(x) - \sqrt{R(x)}}{P(x) + \sqrt{R(x)}} \right),$$

где P обозначает рациональную функцию x. Согласно *Абелю*, эти условия заключаются в том, что разложение $\sqrt{R(x)}$ в непрерывную дробь должно быть периодическим и в этом случае $\varkappa$ должно иметь определенное значение, зависящее от постоянных, входящих в R.

Против такого решения задачи я имел и имею два возражения. Указанное приведение получается само собой, если решить не слишком актуальную задачу приведения интеграла данного вида

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx$$

к наименьшему числу трансцендент (логарифмов и эллиптических интегралов 3-го рода). Для этого не требуется новых алгоритмов. Далее, я полагал, что понимание существа рассматриваемой Абелем редукционной задачи, т. е. выяснение ее связи с теорией эллиптических функций вообще, облегчится, если я условие Абеля заменю следующим.

Путем известной Тебе подстановки

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + \frac{1}{2}C$$

$$\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -\frac{\sqrt{A}}{4}R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)}$$

получим

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

(обозначения взяты из «зеленой книги») и

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_0}}{s - s_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

где $s_0 = \frac{B^2}{A} - C$, $\sqrt{S_0} = \frac{A^2B - 3ABC + 2B^3}{A\sqrt{A}}$.

Следовательно, если взять:

$$du = -\frac{dr}{\sqrt{S}}, \qquad \begin{matrix} s = \gamma u,, \\ s_0 = \gamma u_0, \end{matrix} \qquad u_0 = \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

то получается:

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\gamma' u + \gamma' u_0}{\gamma u - \gamma u_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A} \right) \right\} du$$

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \log \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma u - \sigma u_0} + \left(\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} - \varkappa + \frac{B}{A} \right) u \right\}.$$

Для того чтобы рассматриваемый интеграл мог быть выражен логарифмически, необходимо, *чтобы* u_0 *было точной частью какого-либо периода функции* γu. Если это условие выполнено, то $\varkappa$ всегда может быть определено таким образом, чтобы интеграл действительно выражался логарифмом рациональной функции s и $\sqrt{S}$ (легко определяемой с помощью теоремы умножения функции γu).

Господин Чебышев, насколько мне известно, неоднократно возражал на это: «Да, но каким же образом можно узнать, что между трансцендентными величинами u_0, ω, ω' имеет место уравнение:

$$u_0 = \frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n},$$

в котором m, m', n целые числа?» На это я отвечаю следующее. Я не ставил себе целью дать метод интегрирования для случая, когда коэффициенты R представляют *числовые* величины, но хотел алгебраически выразить *все* интегралы рассматриваемого вида и требуемых свойств. Это производится следующим образом: для каждого значения, представляющего целое число, γ (n u) может быть выражено в виде

$$\frac{M_n(\gamma u)}{N_n(\gamma u)},$$

где M, N целые функции γu. Следовательно, мой критерий гласит: Все значения, какие может иметь s_0, заданы уравнениями:

$$N_2(s) = 0, \qquad N_3(s) = 0, \qquad N_n(s) = 0 \ldots$$

(тогда легко определить соответствующие значения $\varkappa$).

Исследование того, удовлетворяет ли одному из этих уравнений численно заданное значение s_0 при данных значениях

g_2, g_3, не может быть проведено в общем виде. Достаточно уже того, что при заданных g_2, g_3 можно алгебраически определить все значения s_0.

Господин Ч[ебышев] также не производит вышеупомянутого исследования. В более поздней работе (Бюллетень С.-Петербургской Академии, IV, 1860 г.) он рассматривал эту задачу для случая, когда коэффициенты R — *рациональные числа.*

Рассмотрение и выделение этого случая имеет известное оправдание, и я с удовольствием признаю остроумие, с которым это делает г-н Ч[ебышев]. Однако, как я полагаю, посредством этого следует сделать нечто более общее, потому что считать рациональными следует не 5 коэффициентов R, а составленные из них 3 величины s_0, g_2, g_3, так как между ними должны существовать уравнения, имеющие коэффициентами только целые числа. Именно поэтому вполне разумно спросить: каким образом можно убедиться в том, существует ли хоть одно из этих уравнений для данных рациональных значений s_0, g_2, g_3, причем сами A_2, B_2, C, A', B' могут не быть рациональными.

Ч[ебышев] дает свой метод без доказательства. Последнее, как я увидел только вчера, было достигнуто г. Золотаревым в Анналах Клебша, том 5. Однако способ, которым я разрешаю задачу Ч[ебышева], убедит Тебя в том, что, предполагая данное мной утверждение, именно

$$s_0 = \gamma\left(\frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n},\ g_2,\ g_3\right),$$

но с применением формулы для $\gamma\,(2u)$, к поставленной цели можно прийти конечным числом действий. Этот способ, естественно, отличается от способа Ч[ебышева] только своей формой, и я придаю ему значение только потому, что хочу показать, что общая теория эллиптических функций учит с легкостью решать вопросы, ответ на которые обычно требует особой проницательности и применения средств, относительно которых остается непонятным, на чем собственно основано их действие.

Ты получила теперь, дорогой друг, почти небольшую статью вместо предполагаемой заметки. Ты можешь теперь решить, хочешь ли Ты получить дальнейшие рассуждения или нет. Во всяком случае я воспроизвел их лишь для Тебя; я так люблю развивать свои мысли перед Тобой.

В качестве книги для упражнений в интегральном исчислении для Твоего брата я могу рекомендовать Тебе: Шлемильх, Упражнения в высшем анализе, две части (Лейпциг, Тейбнер).

Знает ли он трактат Эрмита? Если нет, то обрати же его внимание на него.

В Гейдельберг поедет Фукс из Гёттингена. Я имел по этому поводу много довольно неприятной переписки и боюсь, что будет еще больше. Что мое письмо от середины октября потерялось, вместе с приложением, мне очень неприятно, но я не знаю, каким образом его можно вернуть. Меня очень удручило горе [1], постигшее милую Юлию. Моя сестра и я просим Тебя передать ей наше сердечное и искреннее сочувствие. Ты же, дорогой друг, будь здорова и отвечай скорее

твоему Вейерштрассу.

47. Берлин, 18 февр[аля] 1875 г.

Моя дорогая Соня!

5-го января Ты мне обещала, что *в ближайшие дни* я получу от Тебя подробное письмо. Не дожидаясь его, я 12-го января еще раз написал Тебе и, в частности, ответил на Твой вопрос, который Ты поставила мне в своем последнем письме, но еще и сегодня, 18 февраля, у меня нет от Тебя никаких известий. Это меня в сильнейшей степени беспокоит, я то боюсь, что Ты больна, то подозреваю, что мое последнее письмо постигла судьба одного из предыдущих и оно не попало в Твои руки.

Надо надеяться, что первого не случилось, но и второе было бы мне очень неприятным. Или же Ты настолько углубилась в работу, что не замечаешь, как быстро проходит время. Я ведь знаю, как легко это приходит, но все же полагаю, что именно во время работы Твои мысли должны бы иногда обращаться к Твоему другу, о котором Ты знаешь, какую радость доставляет ему услышать о Тебе и о том, чем Ты занимаешься. Но я не хочу дальше заниматься предположениями и мне нет необходимости добавлять, с каким нетерпением я жду от Тебя признаков жизни, выражающихся хотя бы в нескольких строчках. О том, что еще я хотел бы Тебе написать, моя дорогая, в следующий раз.

Твой Вейерштрасс

48. Берлин, 21 апреля 1875 г.

Моя дорогая Соня!

Почему же о Тебе ничего не слышно? Я очень беспокоюсь, не заболела ли Ты снова. Иначе я никак не могу объяснить себе, почему с начала февраля я не имею никаких вестей о том, как Ты живешь. Я убедительно прошу Тебя, не оставляй меня даль-

[1] У Юлии Лермонтовой умерла сестра.

ше в этой мучительной неизвестности. Что касается меня, то мои пасхальные каникулы были довольно плохими; до середины марта я чувствовал себя вполне хорошо, но с тех пор мне пришлось бороться с упорным недомоганием, делающим меня как неспособным, так и нерасположенным к постоянным занятиям, что как раз сейчас мне очень некстати. Я надеюсь все же, что дней через 8 снова смогу начать свои лекции. Пока неизвестно, обоснована или нет моя озабоченность твоим здоровьем, мне бы лучше всего подождать Твоего ответа, а затем уже побеседовать с Тобой о других вещах.

Однако есть одна вещь, которую я должен сообщить Тебе. В начале этого года я запоздал своевременно возобновить абонемент на Comptes Rendus Парижской Академии, вследствие чего я получил их первые выпуски с большим запозданием... К моему большому удивлению, я (после отправления последнего письма) нашел в 2 и 5 выпусках статью Дарбу «О существовании интеграла в уравнениях с частными производными, содержащими некоторое число функций и независимых переменных». По этому же вопросу он представил в Академию обстоятельный доклад, который был передан на рассмотрение одной комиссии. Непосредственно после этого, в № 6, еще и другой математик, Мере, обещал доклад на ту же тему и дал краткий анализ его содержания. Таким образом, Ты видишь, моя дорогая, что я был прав, говоря, что разрабатываемый Тобой вопрос относится к тем, которые теперь ждут своего решения, и я очень рад, что моей ученице удалось предупредить своих конкурентов во времени и, по меньшей мере, не отстать от них в разработке самого вопроса.

Дарбу говорит о нескольких исключительных случаях, представляющих большой интерес; я почти уверен, что он также натолкнулся на трудности (как в уравнении $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$), которые вначале доставили Тебе столько хлопот и которые Ты потом так удачно преодолела. Я не отрицаю, что испытал бы некоторое злорадное чувство, если бы ему не удалось справиться с этими исключительными случаями. Но мне казалось все же необходимым своевременно установить фактическую сторону и поставить в известность как самого Дарбу, так и Академию, что Ты в конце июля прошлого года представила свою статью Гёттингенскому философскому факультету и что последняя появилась уже в сентябре. Ввиду этого я послал один экземпляр Твоей диссертации вместе с дипломом Дарбу, а второй — Эрмиту (больше экземпляров у меня не было), но пока без всяких замечаний. Теперь будем ждать, достаточно ли порядочен Д[арбу], чтобы без дальнейшего согласиться на Твой приоритет.

Эрмит, полагая, что посылка исходит от Тебя лично, очень просил Борхардта дружески поблагодарить Тебя, отметив при этом, что Дарбу с большой похвалой отозвался об этой статье.

Как ты думаешь? Сделать ли Тебе официальное заявление Парижской Академии или подождать, что скажет об этом комиссия? Вероятно, она, как и сам Д[арбу], замолчит это дело. Я бы просил, однако, Борхардта в заключение 80-го тома журнала при перечислении некоторых опечаток в Твоей работе категорически отметить, что она уже печаталась в течение августа.

Со мной случайно произошла комичная ошибка. К экземпляру, отосланному Эрмиту, я приложил также диплом, и ошибся при этом, ибо только так смог себе объяснить в письме Эрмита «также благодарность госпоже Лермонтовой» за присылку ее докторского диплома. Что мог подумать Э[рмит] о тщеславной русской, которая демонстрирует такое старание добиться признания славы, приобретенной ею в области химии, даже у математика. Впрочем, ошибку эту я разъяснил. Поскольку уж я имею случай говорить о присуждении степени Тебе и Юлии, то должен сообщить Тебе еще некоторые детали, которые я узнал на днях от *Шеринга*. Лотце, а также математики и физики факультета были склонны вначале допустить Тебя и Твою подругу до защиты (будь то с экзаменами или без них). Против этого восстали филологи и историки, создав принципиальную оппозицию, особенно историк *Паули*, который за время длительного пребывания в Англии приобрел основательное отвращение к тамошнему движению за женскую эмансипацию. Но что Ты скажешь на то, что Юлия полностью обратила в свою веру этого принципиального своего противника. Шеринг рассказал мне, что еще по дороге на экзамен он разговаривал с Паули и тот в самых сильных выражениях возражал против ее допущения, говоря, что непременно будет голосовать против. Но что, однако, случилось. Гюбнеровский способ экзаменовать,— обычно не слишком строгий,— на всех слушателей произвел впечатление, будто он питает антипатию к экзаменующейся и что-то против нее имеет (Юлия сама говорила мне, что он задавал ей отнюдь не легкие вопросы). Она же, однако, после преодоления первого замешательства так отважно держалась, что все без исключения господа были изумлены в высшей степени. Даже Листинг — страшный педант, любящий во всем точность и полноту, проявил себя вполне благосклонным и не задавал против ожидания очень трудных вопросов. А на господина Паули все это произвело такое впечатление, что после экзамена он бросил упрек своему коллеге Гюбнеру за его поведение и пояснил, что в отношении дамы, столь основательно изучившей свой предмет, следует попридержать свои сомнения

и считать ее полностью достойной академического звания. Гюбнер же в течение четырех недель не мог показаться ни в одном обществе без того, чтобы не услышать упреков от присутствующих дам по поводу своей необоснованной строгости по отношению к Ю[лии]. Храброе решение Юлии имело, таким образом, хорошие последствия не только для нее самой, но и сильно содействовало устранению господствовавшего в Гёттингене предрассудка, будто женщины не могут заниматься серьезной научной работой.

С тем шлю Тебе, дорогой друг, на сей раз сердечное до свидания и повторяю настоятельно просьбу, высказанную вначале.

Твой Вейерштрасс

49. Берлин, 7 мая 1875 г.

Моя дорогая Соня!

Твое долго и нетерпеливо ожидаемое письмо (без даты), которое я получил позавчера, избавило меня от большой тревоги. Так как я не получал от Тебя никаких признаков жизни, даже сообщения о получении моего письма от 15 февраля с математическим приложением, о котором Ты и теперь еще молчишь, то я должен был предположить, что Ты снова заболела и настолько серьезно, что даже не в состоянии написать Твоему другу хотя бы несколько успокаивающих слов. Не обрадуйся я так сильно тому, что мои опасения оказались неосновательными, я бы не избежал искушения доказать Тебе на этот раз, что при необходимости я сумею, если не отплатить по заслугам, то хотя бы выбранить мою милую «маленькую подругу». Кроме того, Ты, чтобы совершенно обезоружить меня, использовала наилучшее средство. Вместо всякого извинения, Ты подаешь мне твердую перспективу на скорое свидание и продолжительное пребывание вместе. Милая Соня, признаюсь Тебе, что, хотя я ни минуты не сомневался в том, что Ты сдержишь данное обещание, насколько это будет в Твоих силах, однако сильно опасался, позволят ли Тебе обстоятельства сделать это. Это и было причиной, почему я до сих пор ни в одном письме не говорил, как я мечтаю снова на несколько недель иметь вблизи себя моего дорогого друга и ученицу, сознание разлуки с которой мне все еще чуждо. После того как Ты еще так недавно снова очутилась на родине, Твои родные легко могли бы воспрепятствовать Твоему возвращению сюда. Поэтому я не хотел мучить Тебя напоминанием о Твоем обещании. Если бы Ты написала мне: «милый друг, в этом году я *не могу* приехать», это доставило бы мне большое огорчение, но я не сомневался бы в серьезности Твоего желания.

То, что Ты хочешь приехать в начале июня, приятно для меня по одной причине. С начала этого года я себя неважно чувствовал и поэтому, за исключением незначительной работы об интегрировании $\int \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{S}}$ в логарифмах, не сделал ничего путного, отчасти даже ощущал отвращение к работе. Еще и до сих пор я не чувствую себя вполне хорошо; я читаю, правда, две частные лекции, но последние также утомляют меня гораздо больше, чем обычно. Я поэтому порядком не в духе, чему способствуют, правда, и различного рода неприятности, которые я пережил в последнее время. Но я не хочу огорчать Тебя этим и больше отдаюсь надежде, что Твое пребывание здесь будет наилучшим средством снова настроить меня веселее.

Итак, Ты приезжаешь в сопровождении молодой и «хорошенькой» математички. Не хочешь ли Ты сама привести мне ученицу после того, как решительно запретила мне брать таковую. Это поставило бы меня в неловкое положение, так как мне действительно пришлось отказать немецкой даме, которая хотела изучать у меня геометрию.

Относительно Твоего вопроса, не буду ли я в июне и июле слишком занят, я могу Тебе только ответить, что внешние (служебные) занятия не помешают мне бывать у Тебя довольно часто. Правда, плохо то, что как раз оба названные месяца, как Ты знаешь по собственному опыту, менее всего подходящи для пребывания в Берлине. Но тут уж ничего не поделаешь. Но напиши же мне, собираешься ли Ты в начале августа вернуться в Россию и располагаешь ли планами дальнейших путешествий? Я еще ничего не предпринимал относительно осенних каникул, но боюсь, что на этот раз врач скажет свое слово.

Прошу Тебя также, дорогой друг, сообщить мне свои пожелания в отношении квартиры, не опасаясь, что Ты этим меня обременишь. Я бы очень хотел, чтобы ты снова была поблизости — быть может, Ты опять могла бы получить прежнюю квартиру (Потсдамштр. 27А), так как в июне и июле здесь мало бывает приезжих. Пожалуйста, напиши мне об этом по возможности скорее; Ты этим совсем не доставишь мне хлопот, я поручу поиски квартиры одному человеку, которого Ты сможешь за это вознаградить. Ты, конечно, должна точно сообщить, сколько Ты желаешь комнат.

Как обстоит дело с обещанной фотографией? Я бы очень хотел получить таковую еще *до* Твоего приезда. Привези также несколько экземпляров для господ из Гёттингена, которые очень хотели бы знать, как, собственно, выглядит человеческое дитя generis

feminini[1], занимающееся уравнениями в частных производных, кольцами Сатурна и трансцендентами Абеля. Что то представление, которое здесь существует о Твоей личности, не вполне соответствует действительности, это я увидел по выражению лица Шеринга, когда я, на его вопрос, нет ли у меня Твоей фотографии, показал ему ту, которая находится у меня (большего формата).

Вильг[ельм] Вебер также был здесь и подробно расспрашивал о Тебе. *Кирхгоф* начал восемь дней тому назад свои здешние лекции; меня очень радует то, что он теперь здесь. Кёнигсбергер, повидимому, уже думает о том, чтобы по возможности скорее уехать из Дрездена. Его преемником в Гейдельберге является Фукс. А кто будет преемником последнего в Гёттингене, еще неизвестно — может быть, первый, что было бы довольно забавно.

Профессор Ришело скончался в Кёнигсберге после тяжелой болезни, это большая потеря для тамошнего университета. Я потерял в нем очень дорогого друга. Твой прежний товарищ по учению д-р Юргенс недавно обосновался в Галле в качестве приват-доцента. Его вступительная лекция была «О понятии аналитической функции по Вейерштрассу».

В настоящее время я занят просмотром объемистой диссертации одного из моих учеников, одной из лучших, которые были мне представлены. Она касается интегрирования [уравнения]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

для многосвязной части плоскости (x, y) при предписанных граничных условиях и содержит ряд новых и значительных результатов. Автор представляет собой невзрачного мечтателя, очень неловкого в своих внешних проявлениях; но если я не очень ошибаюсь, то он обладает значительным математическим талантом. В сочельник его внезапно арестовали и отвели в казармы для отбывания трехлетней службы простым солдатом, «потому что он забыл» (что у нас делает каждый студент) своевременно явиться на одногодичную службу в качестве вольноопределяющегося. К счастью, он оказался таким неподходящим солдатом, что его освободили через 6 недель как абсолютно негодного, и он смог вернуться к своей диссертации. Затем он пришел на экзамен без свидетельства и ничего не зная о формальностях, которые надо выполнить. При этом я, как ректор, должен был позволить вычеркнуть его из журнала, потому что он лекций не слушал и не был даже в Берлине. Если бы я при первой беседе не убедился в том, что несмотря на все в этом человеке есть что-то дельное, то декан совсем не допустил

[1] Женского рода (лат.).

бы его к экзамену. Вообще же у меня сейчас много довольно хороших слушателей, и среди них один швед [Миттаг-Леффлер], который мне особенно нравится, один австриец и, что удивительно, два поляка, которые по крайней мере очень прилежны. В следующем семестре д-р Брунс (из Дерпта, которому Ты тоже хотела послать свою диссертацию) хочет прислать мне своего первого слушателя, должно быть довольно хорошего.

На том, сердце мое, говорю Тебе сердечное и дружеское до свидания. Ты должна, однако, до приезда написать еще два раза: одно письмо точас по получении этих строк и затем одно непосредственно перед приездом.

Всецело Твой В.

50. Берлин, 17 июня 1875

Моя дорогая Соня!

Не могу Тебе выразить, как я был огорчен плохим известием, которое принесло мне Твое только что полученное мной письмо от 13-го этого месяца. Последние 14 дней я ежедневно ожидал получить от Тебя известие, что Ты собираешься ехать в Германию, и начинал уже беспокоиться по мере того, как начало месяца июня, на которое Ты назначила свой приезд, постепенно переходило в середину его; но так как я знаю по опыту, что Ты всегда довольно трудно решаешься на длительное путешествие, и так как Ты в этом случае, кроме того, до известной степени зависела от твоей подруги, то я не слишком беспокоился.

Я все же написал бы уже Тебе, если бы был вполне уверен в отношении Твоего местопребывания. А теперь мне приходится услышать, что моя бедная приятельница снова в течение 5 недель была тяжело больна — ведь насколько коварной иногда бывает корь, я знаю — и все еще хворает. Но самое плохое в этом то, что теперь путешествие в Германию отложено на неопределенное время. А я так радовался тому, что Ты опять несколько недель будешь вблизи от меня и что я снова, при ежедневных свиданиях с Тобой, моей верной ученицей и другом, которая мне так дорога, смогу чувствовать себя счастливым. Право же, сердце мое, Ты не можешь себе представить, как мне недостает Тебя.

В течение 4 лет я привык видеть в Тебе поверенную моих мыслей и стремлений, с которой я мог говорить, как с другом, близким мне в течение всей моей жизни. Я никогда не находил никого, кто выражал бы такое понимание высочайших целей науки, кто так радостно отзывался бы на все мои взгляды и принципы, как Ты. О! Мы не должны были бы еще разлучаться. Тебе бы следовало еще один-два года оставаться моей ученицей, работающей вместе со мной. Но это оказалось невозможным,

Прошлую зиму и это лето у меня было несколько довольно хороших слушателей, среди которых особенно выделялся один молодой швед. Я начал также читать им частные лекции у себя дома, но это не очень удалось. Уже то обстоятельство, что эти молодые люди усердно все записывали и я не мог видеть по их лицам, понимают ли они меня, чрезвычайно мне мешало. С Тобой это было совсем иначе.

Что врачи теперь прописали Тебе длительное пребывание в деревне и воздержание от всяких утомлений, конечно, хорошо. Я предполагаю, что Ты к концу месяца поедешь в Палибино и что Тебе понадобятся, по крайней мере, два месяца для Твоего полного выздоровления. Но не могла бы Ты затем приехать сюда в сентябре и октябре, так, чтобы вернуться в Петербург прямо отсюда? Я был бы очень счастлив, если бы это получилось.

Что касается меня, то я могу с 1-го августа до 1-го ноября свободно располагать своим временем. Быть может, Тебе предпишут лечение на курорте; я мог бы в таком случае вскоре навестить Тебя. Вообще Ты можешь вполне рассчитывать на нашу встречу, если Тебе удастся еще в этом году приехать в Германию и если Ты меня заблаговременно об этом уведомишь. Само собой разумеется, что я сейчас еще не ожидаю от Тебя никаких решений; самое необходимое в данный момент — это забота о Твоем полном выздоровлении. Но у меня есть к Тебе одна просьба, в которой Ты не должна мне отказать.

Я вовсе не хочу, чтобы Ты мне много писала, пока это может повредить Твоим глазам. Но я сердечно прошу Тебя, чтобы по крайней мере до того времени, когда Ты совсем поправишься, я каждые 8 дней получал *только 3 строчки*, в которых Ты сообщала бы мне о своем состоянии. Я буду очень волноваться, долгое время не получая от Тебя известий. Не правда ли, Ты исполнишь эту просьбу и будешь писать мне эти несколько слов, даже если в промежутках между своими письмами Ты ничего не получишь от меня.

Сообщать Тебе сейчас о других вещах было бы неуместным. Но я не должен умолчать об одном, что Тебя, наверное, заинтересует. Уже известно, что вместо умершего профессора Ришело в Кёнигсберг приедет из Цюриха Генрих Вебер, и *почти решено, что Шварц получит профессуру математики в Гёттингене*. Говорят, что получить это место очень старался Кёнигсбергер, действуя сам или через других, но почему же он ушел из Гейдельберга, где ему было так хорошо, не из оскорбленного ли самолюбия.

Я должен сообщить Тебе кое-что, касающееся меня самого, потому что Ты, может быть, найдешь сведения об этом в какой-нибудь газете. Не знаю, известно ли Тебе, что король Фридрих

Вильгельм IV учредил особый орден Pour le mérite [1] в области науки и искусств, который отличается от других орденов тем, что выдается только 20 немецким ученым (и 10 деятелям искусства) и такому же числу иностранцев, и что каждый раз, когда один из кавалеров ордена умирает, остальные 29 предлагают королю преемника, который затем всегда утверждается. Недавно Твой друг совершенно неожиданным образом стал кавалером этого ордена, как единственный представитель математических и астрономических наук в кругу ученых. Так как орден принадлежит к одному из высших знаков отличия, открывающих, например, счастливцу доступ ко двору, то дарование его всегда вызывает некоторое волнение в республике ученых, и обладатель ордена становится предметом поздравлений, а еще больше — зависти и критики. То же самое произошло и со мной. Ты знаешь, что ко всему этому я очень равнодушен и искренне радовался бы, если бы мне предпочли *Куммера*. Тем не менее я без церемонии сознаюсь, что если я по своему положению *должен* в некоторых обстоятельствах носить орден, то я охотнее надену эту звезду, которую до меня носили Гаусс, Якоби и Дирихле, чем всякий другой. Кроме того, со времени Твоего отъезда мое поведение вообще испортилось. Прошлой зимой я был на трех придворных балах, тогда как за 4 предшествующих года — ни разу.

А теперь сердечное до свидания, моя любимая Соня, от которой я настоятельно желаю возможно скорее получить успокоительные известия.

Твой К. В.

Не забудь, если Ты поедешь в деревню, прислать мне свой подробный адрес на русском языке. Лучше всего, если бы Ты в каждое свое письмо вкладывала конверт для ответа; я не вполне уверен, что смогу точно копировать русские иероглифы.

Эти дни здесь был г-н Чебышев, но мы с ним разминулись.

Еще раз сердечное до свидания, мой дорогой друг. С грустью б еще раз прочел Твое предпоследнее письмо, оно было написано в таком веселом настроении и давало мне такую уверенность, что я через «немного дней» снова Тебя увижу! Моя сестра, знавшая, что Ты скоро должна была приехать, просила меня передать Тебе ее искреннее сочувствие.

К. В.

[1] За заслуги (франц.).

51. Рюдерсдорф, под Берлином
23 сентября 1875

Моя дорогая Соня!

Я только что получил Твое пересланное мне из дома письмо от 17 этого месяца, содержание которого меня глубоко огорчило. Но сначала я должен Тебе сказать, что я *тотчас же* ответил на Твое письмо, полученное мною в середине июня, в котором Ты извещала меня о Твоем заболевании корью; я сам отнес его на почту и убедился в том, что его заштемпелевали и положили к вещам, предназначенным для отправки в Россию; оно, вероятно, пропало, как уже два прежних, на границе или в Петербурге. Узнать об этом при всех обстоятельствах было бы мне в высшей степени неприятно — в этом случае вдвойне, так как я должен предположить, хотя Ты это мне прямо не говоришь, что моя дорогая подруга несколько огорчилась моим кажущимся безучастием и еще потому, что мое письмо содержало некоторые вещи, предназначенные только для Тебя. Я так искренне радовался тому, что снова увижу тебя в июне и что Ты будешь поблизости от меня несколько месяцев, и Ты понимаешь, что горестное сознание увидеть свою надежду разрушенной я выразил не просто холодными словами. То, что я совсем не получал от Тебя никаких известий, несмотря на то, что просил Тебя скорее прислать мне хоть несколько строчек, я, конечно, не мог объяснить не чем иным, как тем, что или мое письмо пропало или же Твоя болезнь все продолжается. Я бы давно, конечно, написал Тебе, если бы знал, где Ты находишься: Ты сказала мне только, что уедешь из Петербурга, но не сообщила куда, и я предполагал, что Ты поедешь на так называемый климатический курорт. К сожалению, я теперь узнаю, что оба мои предположения оправдались — я боюсь, что Ты более серьезно больна, чем говорит мне Твое письмо. Я не могу также избавиться от мысли, что пребывание в Петербурге зимой после такого длительного отсутствия Тебе серьезно повредило, и надеюсь лишь, что знаменитый врач, с которым Ты хочешь посоветоваться, найдет для Тебя верное лекарство. Я считаю само собой разумеющимся, что Тебе будут настоятельно рекомендовать возможный покой и воздержание от умственных напряжений. Но если, что не исключено, будут искать причину Твоей болезни в слишком большом напряжении при Твоих занятиях, то я считал бы последнее предположение обоснованным лишь весьма условно. Последний год пребывания в Берлине Ты, несмотря на усиленные и напряженные занятия, чувствовала себя в общем вполне хорошо, и я уверен, что если бы Ты, отдохнув несколько недель, вернулась сюда, то совсем хорошо перенесла бы прошлую зиму.

Теперь у меня к Тебе, прежде всего, одна просьба, напиши мне тотчас же несколько строчек, чтобы я успокоился насчет судьбы этого письма (я послал бы его заказным, если бы не услышал недавно от одного человека, знакомого с русскими условиями, что заказные письма почти без исключения вскрываются). Затем я надеюсь, что Ты меня тотчас же известишь о результатах консультации, как только она состоится. Если врач посоветует Тебе пребывание в более мягком климате, то я хотел бы обратить Твое внимание на то, что я совсем не считаю Меран подходящим для Тебя.

Ни пребывание в узкой долине, из которой зимой не выберешься, ни совместное пребывание со многими тяжелыми больными Тебе не подходит. Монтрё Ты знаешь сама. Быть может, Ты сможешь найти подходящее место еще в Германии, например, Висбаден или Соден, где зима обычно бывает очень мягкой. Во всяком случае дай мне знать, какое Ты примешь решение. Можешь быть убеждена, что никто не примет большего участия в Твоем благополучии, чем я, и что Ты не сможешь доставить мне большей радости, чем обращаясь ко мне, Твоему верному другу, со всеми своими делами.

Если Ты слышала обо мне, что я в прошлом семестре был нездоров, то это, вероятно, только потому, что я, вследствие легкой простуды, не принял приглашения на одно математическое пиршество. Я, напротив, чувствовал себя довольно хорошо, так же как и сейчас. В этом году я никуда не уезжал в собственном смысле слова. Начиная с 3 августа, я нахожусь у моего друга, *Борхардта*, имеющего в 3-х милях от Берлина прелестное поместье, несколько недель здесь были также мои сестры, а в течение 14 дней и коллега Кирхгоф. Мы много бываем на воздухе, но также и работаем ежедневно по нескольку часов (11-го этого месяца я послал Тебе вновь изданную Борхардтом переписку между Якоби и Лежандром), мы освободили письма Якоби от бесчисленных опечаток, искажавших их в издании Бертрана, и сделали впервые доступными письма Лежандра из архива Якоби.

Получила ли Ты посылку, адресованную Тебе в Петербург? 1-го октября я снова поеду в Берлин, чтобы провести там остаток своих каникул.

На Твой вопрос о том, как дела у *Шварца* в Гёттингене, я не могу Тебе ответить, потому что его еще там нет, и он приедет туда только 1 октября, как и Вебер в Кёнигсберг, а Фробениус в Цюрих. К отъезду туда последнего я отношусь с большим неудовольствием; к сожалению, он обручился — или его обручили — с одной совершенно ему неподходящей дамой, и ее уговоры заставили его бросить такое место, которое лишь редко предла-

гается столь молодому человеку и которое давало ему наилучшие гарантии на будущее.

Я очень скоро снова напишу Тебе, мой дорогой друг, и с нетерпением ожидаю того момента, когда мне опять можно будет беседовать с Тобой о научных проблемах, на что я сейчас не решаюсь. Но когда же я теперь буду иметь радость увидеть Тебя — у меня ведь не было ложного предчувствия, когда я сказал Тебе при прощании, что я не могу вполне довериться надежде на *скорое* свидание с моей дорогой ученицей и другом.

С искренними и сердечными пожеланиями Твоего благополучия

Твой К. Вейерштрасс

52. Берлин, 23 октября 1875

Моя дорогая Соня!

Ты, действительно, была права, написав мне в последнем своем письме, что этот год, по-видимому, уготован быть для Тебя годом страданий и скорби.

Едва Ты вернулась на свою родину и в родительский дом, как Тебя поразил тяжелый удар и Ты внезапно потеряла дорогого родителя! Как сильно меня тронуло это известие и какое искреннее участие я принимаю в Твоем горе, Ты, дорогой друг, поймешь и без лишних слов, потому что знаешь — и радость Твоя, и горе всегда затрагивают в моей душе сочувствующую струну; Тебе также не придется ждать, что в такой момент, когда вся Твоя душа исполнена любовью, связывающей Тебя с усопшим, и когда перед величиной этой потери отступают на задний план все другие соображения, чтоб утешить Тебя и ободрить, я стану высказывать Тебе утешения и призывы к благоразумию, которые можно сказать в таких случаях вообще и в Твоем особенно. Нет, сердце мое, я не буду стараться проникнуть в Твое горе, которое Ты сможешь победить и собственными силами.

«Большой благородный человек не умирает от состояния глубокой тоски. Пусть даже ценой больших мук, но он находит в самом себе силы пережить утрату».

Но я приношу Тебе искреннюю благодарность за то, что Ты в своем письме подробно сообщила мне все обстоятельства внезапной смерти своего уважаемого отца — в противоположность той скупости выражений, с которой Ты обычно касаешься чисто личного. Искренне порадовало меня узнать от Тебя, что с самого Твоего возвращения домой между Тобой и Твоим отцом были такие прекрасные отношения, что Ты пришла к убеждению, будто всегда была любимицей его сердца, хотя, как Ты мне однажды говорила, в прежние годы это проявлялось мало.

Я убежден в том, что Ты всю свою жизнь будешь вспоминать

с радостью, смешанной с грустью, об этом последнем годе вашей совместной жизни и считать себя счастливой, что Тебе выпало на долю украсить последние дни усопшего.

Мои сестры также просят передать Тебе их искреннее сочувствие, а я прошу Тебя передать таковое и от меня Твоей уважаемой матушке.

Обещанное Тобой письмо еще не пришло ко мне — последнее также пришло с большим опозданием. Я с нетерпением ожидаю дальнейших известий от Тебя; не могу скрыть, что содержащееся в нем сообщение о Твоем здоровье совсем меня не успокоило. Я чувствую себя хорошо: в ближайший понедельник я начинаю свои лекции. Больше не пишу Тебе на этот раз, но прошу Тебя в ближайшее время сообщить мне:

1) получила ли Ты письмо от 1-го октября, содержавшее исключительно математические сообщения: оно сначала должно было составить приложение к моему *Рюдерсдорфскому* письму; но я не мог своевременно закончить его;

2) послала ли Ты один экземпляр своей диссертации д-ру Брунсу (наблюдатель Дерптской обсерватории) — он не получал его и очень просит [прислать] его;

3) чувствуешь ли Ты себя достаточно хорошо, чтобы получать от меня дальнейшие математические сообщения? У меня есть прекрасная теорема о сведении интеграла любого ранга к интегралу низшего ранга, которая в достаточно общем виде составляет необходимый и достаточный критерий.

С сердечным пожеланием, чтобы эти строки Ты получила, по крайней мере, будучи на полном пути к выздоровлению, я прощаюсь с Тобой, мой лучший, дорогой друг!

Твой К. Вейерштрасс

Напиши также точнее, куда мне адресовать следующее мое письмо.

53. Курорт Засснитц (остров Рюген)

Мой милый друг! 15-го августа 1878 г.

Даже по получении Твоего, почти уже нежданного письма от..., впрочем, число опять не поставлено, как и в некоторых прежних письмах, мне все же непонятно, почему Ты так долго оставляла меня без всяких сведений о себе.

В последнем полученном мной письме Ты сообщала о смерти своего дорогого отца. Я тотчас же ответил на него и, хотя после этого ничего более не слыхал о Тебе, писал Тебе еще два раза через большие промежутки времени и несколько раз посылал Тебе свои статьи и статьи моих учеников, но все безрезультатно, Ты

не подавала о себе никаких признаков жизни. Под конец я уже не знал местопребывания моего дорогого друга и ученицы, в судьбе которой я принимал такое близкое участие. Может быть, Ты не получала моих писем? Иначе, что же удерживало Тебя дарить полным доверием, как прежде, Твоего лучшего друга, как Ты меня часто называла. Я стою перед загадкой, решение которой можешь мне дать только Ты.

Ты обещала написать мне подробное письмо, в котором хочешь сообщить обо всем, что Ты пережила и делала за последние 3 года, если только увидишь из моего ответа, что мое отношение к Тебе не изменилось. Могла ли ты хотя бы на мгновение поверить этому, милая Соня?

Но я ловлю Тебя на слове и ожидаю в скором времени очень обстоятельного сообщения. Настоятельно прошу тебя немедленно по получении этого письма известить меня, хотя бы в нескольких строках, что оно попало в Твои руки. Если в течение ближайших 8 дней я не получу ожидаемого ответа, то мне придется предположить обратное.

За это время я только два раза слышал о Тебе от других лиц, именно от г. Миттаг-Леффлера, который посетил Тебя в Петербурге, а затем недавно от г[осподина] Чебышева. С последним мне не пришлось говорить лично; он всегда посещает меня, когда меня нет дома, но он говорил Борхардту, что Ты бросила занятия математикой. Я буду рад услышать от Тебя уверения в противном. Миттаг-Леффлер был для меня очень приятным учеником; наряду с основательными знаниями он обладает удивительными способностями к усвоению предмета и умом, направленным к идеалу; я уверен, что общение с ним оказало бы на Тебя стимулирующее действие.

Положение, которое он занимает в Гельсингфорсе, мало благоприятно. Там идут дальше, чем где бы то ни было, в создании *национально-финской* математики, и т. к. за время пребывания там Леффлера в местных газетах в каждом семестре появляются передовые против математики Вейерштрасса, Л[еффлер] допускает неосторожность, упоминая мое имя в своих лекциях и статьях чаще, чем это необходимо. У вас, вероятно, дело обстоит не так плохо, хотя и не совсем удовлетворительно, как видно из твоих сообщений о ваших математических кругах.

Разве и с Золотаревым нехорошо общаться? Он у меня однажды был и не произвел неблагоприятного впечатления.

Ты, вероятно, хочешь знать, как мне за это время жилось и что я делал. Что касается моего здоровья, то я им доволен. За последние 3 года я не испытал серьезных недомоганий. Но я начинаю чувствовать, что двухчасовая лекция без перерыва меня утомляет,

так что после обеда мне приходится отдыхать более долгое время. Мои занятия остаются прежними. Особенно много времени у меня отнимают лекции. В частности, я еще кое-что проработал по введению в теорию аналитических функций — в последнем семестре читал перед 102 слушателями — и также по вариационному исчислению. В последнем семестре я впервые читал о некоторых применениях гиперэллиптических функций.

Что касается моих собственных исследований, то работы по $2n$ периодическим функциям или, правильнее говоря, системам n функций такого же числа аргументов, для которых существует алгебраическая теорема сложения, наконец, пришли к удовлетворяющему меня заключению. Таким образом, я могу приступить к их напечатанию. При этом мне придется начать несколько с конца — по внешним причинам, потому что теперь и во Франции начинают заниматься периодическими функциями нескольких переменных. Надеюсь еще во время настоящих каникул подготовить к печати доказательство того, что все однозначные функции n переменных, которые при конечных значениях их аргументов ведут себя как рациональные функции и обладают системой $2n$ взаимно независимых периодов, могут быть выражены через θ функции. В отношении остальных исследований у меня имеются обширные проработанные материалы.

Я был менее счастлив в начатых мною исследованиях решения динамической задачи путем разложения в ряды, соответствующие особенностям рассматриваемых дифференциальных уравнений. Я дохожу до известного пункта: например, я так преобразую дифференциальные уравнения для задачи n тел, чтобы они допускали решения в виде формальных рядов. Однако мои попытки доказать сходимость рядов разбиваются в прах об одно препятствие, которое я не в состоянии преодолеть. Все члены рядов имеют вид:

$$A_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r} \cos [\nu_1 \varkappa_1 (t - \tau_1) + \nu_2 \varkappa_2 (t - \tau_2) + \ldots + \nu_r \varkappa_r (t - \tau_r)],$$

где A, $\varkappa$, τ постоянные. Если порядок интегрируемой системы дифференциальных уравнений есть $2r$, то величины $\tau_1, \ldots, \tau_r$ будут представлять r постоянных интегрирования. Эти постоянные не встречаются в коэффициентах $A_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$, но встречаются r остальных, которые связаны с $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ уравнениями. Однако коэффициенты $A_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$ появляются в виде рациональных дробей, причем знаменатели становятся бесконечно малыми, если сумма абсолютных значений целых чисел $\nu_1, \ldots, \nu_r$ бесконечно велика. Следовательно, надо доказать, что числители тоже становятся бесконечно малыми, а также и сами дроби, что представляется невозможным при сложном строении выражений.

Самый факт не вызывает у меня удивления. Очень часто случается, что алгебраическая функция нескольких аргументов может быть изображена *только* в виде дроби, если даже она никогда не становится бесконечно большой при конечных значениях аргументов. Но, как уже сказано выше, я не могу преодолеть вызываемых этим трудностей.

Очень благодарен за присланную фотографию, хотя я не нахожу достаточного сходства с образом, сохранившимся в моей памяти. Ты должна фотографироваться в другой позе. В этом положении слишком выделяется нос. Мне больше нравится фотография, сделанная в Берлине. Всего хорошего, дорогой друг, не заставляй меня слишком долго ждать обещанного подробного письма. Будь уверена, что мое отношение к Тебе неизменно остается отношением верного и откровенного друга.

Письмо адресуй в Берлин по старому адресу, оно мне будет обязательно переправлено сюда.

Твой Вейерштрасс

[P. S.] Затронутой Тобой проблемы я в этот раз рассматривать не могу, так как предварительно должен ознакомиться с соответствующей литературой. Пожалуйста, укажи мне литературу, при условии, что не все написано только на русском языке.

54. Берлин (W), Линкштрассе 33 28-го октября 1880 г.

Мой дорогой друг!

С того момента, как Ты шесть лет тому назад покинула Берлин, наша переписка стала проходить под несчастной звездой. И только из короткого письма (без даты), полученного мною вчера, я узнал, что ему предшествовали два других. К счастью, мои розыски увенчались успехом. 1-го октября я переменил квартиру, в ней пока еще не живут, и не все письмоносцы, по-видимому, знают мой новый адрес. Поэтому я подумал, что письма могут лежать в почтовом ящике старой квартиры. Так это и было. Я нашел Твое письмо от 23-го сентября (русск. стиль) и короткую записку с посланным Тобой русским конвертом. (Если Ты не ошибаешься, что послала мне *два* подробных письма, то недостает еще одного.) Спешу ответить Тебе.

Я уже почти потерял надежду получить от Тебя какие-либо признаки жизни. Два или три года тому назад ты писала мне после очень долгого перерыва, что в ближайшее время я должен получить от Тебя подробные сообщения. Но после этого я ничего больше не слышал от Тебя непосредственно. Только от г. Миттаг-Леффлера я иногда получал сведения о Тебе, из которых я, по крайней мере, узнавал, что Твое физическое состояние удовлетвори-

тельно, и это было все. Я уже привык смотреть на то время, когда Ты находилась со мной как ученица и друг, как на законченный период времени, остающийся только в памяти.

Длинное письмо, полученное мною от Тебя, дает мне, во всяком случае, ключ к разгадке Твоего долгого молчания. Тем не менее я глубоко сожалею, что Ты раньше с полным доверием не высказалась перед Твоим старым другом. Я особенно сожалею об этом по той причине, что из-за этого были потеряны годы, в течение которых я, вероятно, имел бы возможность своими письменными сообщениями поддерживать Тебя в занятиях и подкреплять Твои старания и Твое мужество. Но я не люблю много размышлять о прошлом. Поэтому будем смотреть в будущее.

Прежде всего, милый друг, Ты можешь быть уверена в том, что я буду сердечно рад снова увидеться с Тобой после столь долгой разлуки. Однако прежде чем Ты решишься на долгое путешествие сюда, я должен ознакомить Тебя с некоторыми касающимися меня обстоятельствами во избежание того, чтобы Ты прибыла сюда полная ожиданий, оправдать которые в ближайшее время я не в силах. Ты, без сомнения, удивишься, услышав, что за последние годы мои внешние обязанности не уменьшались, а все более возрастали. Этой зимой мне предстоит такая масса работы, что я не знаю, как с ней справлюсь. Ты, без сомнения, знаешь, что мой друг Борхардт умер прошлым летом после тяжелой болезни. Уже с 1-го апреля я принял от него редактирование журнала и в существующих условиях мне — вместе с Кронекером — приходится продолжать его. Затем мы решили в Академии приступить к изданию полных собраний трудов Якоби, Дирихле и Штейнера. Борхардт взял Якоби, я—Штейнера; после того как Борхардт заболел, мне пришлось продолжать издание трудов Якоби, так как для этого не нашлось подходящего лица. Я раньше не предполагал, сколько времени и труда потребует такое предприятие. Кроме того, Борхардт назначил меня опекуном его шести детей. При тех тесных отношениях, в которых я в течение 25 лет находился с Борхардтом и его семьей, я не мог отказаться и делом и советом помочь г-же Борхардт в управлении ее значительным состоянием, так как она совершенно неопытна в таких делах. Кроме того, я без стеснения скажу Тебе, что я отчасти вынужден брать на себя работы, вроде вышеназванных, чтобы увеличить свои доходы. Жалование, которое я получаю как профессор, недостаточно, чтобы покрыть из года в год возрастающие расходы.

Я привожу все это, дорогой друг, только для того, чтобы разъяснить Тебе, что этой зимой у меня будет мало свободного времени для Тебя и что я поэтому предпочел бы, чтобы Ты, если позволят обстоятельства, приехала сюда несколько позднее, а именно

весной. Если это невозможно, то повторяю, что Ты во всякое время будешь для меня желанной гостьей, и все, что я *могу* сделать для Тебя, будет выполнено. Если же Ты приедешь позже, то нам надо начать регулярную математическую переписку. Это пойдет хорошо, так как я научился писать письма во время факультетских совещаний, испытаний на степень доктора и т. д. Так, например, два года тому назад я обменялся с Борхардтом рядом писем о среднем арифметико-геометрическом из четырех элементов, причем мои письма были почти все написаны в зале Сената.

О моих математических занятиях за последние годы я Тебе сегодня ничего не смогу сообщить. Здоровье мое прошедшей весной было очень неважным. У меня было серьезное воспаление легких, и, кроме того, еще болезнь печени (желчная лихорадка). Поэтому я должен был взять на лето отпуск и жил до августа за городом, а затем поехал в Швейцарию, откуда возвратился сюда в конце прошлого месяца. Думаю, что я совершенно восстановил свое здоровье, правда, лекции меня еще несколько утомляют (я читаю теорию функций 150 слушателям).

На этом заканчиваю. Шлю Тебе сердечный привет, мой дорогой друг, надеюсь, Ты не заставишь меня долго ждать ответа.

Искренне преданный Тебе
Вейерштрасс

55.

Мой дорогой друг!

Я тотчас же ответил Тебе на последнее письмо, полученное мной во вторник прошлого месяца. Мой ответ, по-видимому, пришел в Москву сразу же после Твоего отъезда. Я писал, что получил Твое первое письмо только после того, как узнал из упомянутого выше письма, что Ты мне его отправила. Как это произошло, объясню Тебе только лично.

Так как Ты будешь утомлена длительным путешествием, я навещу Тебя сегодня после обеда (от $3^1/_2$ до 4 час.) у Тебя дома, а пока шлю сердечный привет и лучшие пожелания по случаю приезда!

Искренне преданный Тебе Вейерштрасс

Берлин, 31 октября 1880

56.

Берлин (В), Линкштрассе
1-го февраля 1881.

Мой самый дорогой друг!

К моей великой радости, из Твоего короткого письма от 6-го прошлого месяца я узнал, что Ты проделала длинный путь отсюда

в Москву через Петербург без ущерба для своего здоровья, несмотря на неблагоприятную погоду. Не буду скрывать, я узнал с некоторым удовлетворением о том, что Тебе потребовалось некоторое время для того, чтобы вновь привыкнуть к своему образу жизни, и не сержусь на Твою приятельницу, которая грозилась, что Тебя не скоро снова отпустят. Я вижу в этом доказательство того, что Ты не совсем неудовлетворена своим пребыванием здесь, хотя я, к сожалению, не имел возможности уделить Тебе такое количество времени, как я этого желал.

Так как до 24 числа прошлого месяца Ты не возвратила мне рукописей о линейных дифференциальных уравнениях в частных производных, то я должен заключить, что Ты еще не достигла полного успеха в работе, чего я, откровенно говоря, и не ожидал. Я уверен, что Тебе встретятся еще многие трудности, которые придется преодолеть. Но я глубоко убежден, что этот вопрос заслуживает основательного изучения. Не смущайся, если эта трудная задача на первых порах оказывает Тебе упорное сопротивление.

Со времени Твоего отъезда я упорно работал над линейными дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых представляют периодические функции действительной переменной величины, и полагаю, что мне удалось найти правильный путь к изучению этого вопроса. Однако мне приходится при этом ограничиться особым видом этих уравнений, именно тем, который встречается только в задачах по аналитической механике.

Хочу сообщить Тебе главную теорему, представляющуюся мне в таком виде.

«Пусть

$$F(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\lambda, \mu} F_{\lambda, \mu}(t)\, x_\lambda x_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, 2n)$$

однородная целая функция второй степени $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_{2n}$, ее коэффициенты должны быть действительными функциями переменной t и состоять из членов вида:

$$A\cos\,(\nu_1 a_1 + a_2\nu_2 + \ldots)\, t + B\sin\,(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)\, t,$$

где $a_1, a_2 \ldots$ обозначают некоторые действительные числа, а $\nu_1, \nu_2 \ldots$ целые (положительные или отрицательные) числа. Далее, я предполагаю, что функции $F_{\lambda, \mu}(t)$ построены таким образом, что при действительных значениях t, $x_1, \ldots, x_{2n}$ функция $F(x_1, \ldots, x_{2n})$ не может переменить свой знак. При таком предположении я беру

следующие дифференциальные уравнения, связывающие x_1, x_2, ..., x_{2n}, t

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} \qquad \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} = -\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Тогда наиболее общие выражения x_1, ..., x_n, удовлетворяющие этим дифференциальным уравнениям, имеют вид:

$$x_\lambda = \sum_\rho \{f_{\lambda,\rho}(t)\cos(m_\rho t) + f'_{\lambda\rho}(t)\sin(m_\rho t)\}, \quad (\lambda = 2, \ldots, 2n),$$

где величины m_ρ, число которых не больше n, действительные постоянные, в общем не составляемые из a_1, a_2.., а $f_{\lambda\rho}(t)$ и $f'_{\lambda\rho}(t)$ — функции того же характера и вида, как и функции $F_{\lambda\mu}(t)$».

Точно доказать эту теорему я до сих пор могу только для случая, когда число величин a_1, a_2, ... приводится к единице. Однако путь, к которому я следую для действительного вывода выражений x_1, x_2, ..., x_n, не зависит от этого предположения, и если он окажется правильным для частного случая, тогда общий случай также не представит затруднений. Если бы теперь удалось посвятить этим исследованиям несколько недель, то я скоро убедился бы, правильны ли мои мысли, которым я теперь следую, или нет.

Если мне удастся справиться с линейными дифференциальными уравнениями указанного вида, то я думаю, что и дифференциальные уравнения, служащие, например, для определения путей планет, подчинятся рациональному способу решения. Я более чем уверен в том, что все испробованные до сих пор способы их интегрирования не могут привести к цели.

С нетерпением жду дальнейших вестей от Тебя, дорогой друг. Тебе сердечный привет от моих сестер и фрейлейн Лермонтовой. Они надеются вскоре получить от Тебя обещанное письмо на французском языке.

Искренне Тебе преданный
Вейерштрасс

57.

Берлин, Линкштрассе 33
6-го марта 1881 г.

Мой дорогой друг!

Два месяца тому назад, уезжая, Ты обещала поддерживать со мной живую переписку. Однако до сегодняшнего дня я получил только коротенькое письмо, в котором Ты мне сообщила о своем прибытии в Москву. По прежнему опыту я всегда опасаюсь, что не все письма, которые мы друг другу пишем, попадают по адре-

су. Поэтому я не хочу больше откладывать и подаю о себе признак жизни, который заставит Тебя вскоре прислать мне подробные и, надеюсь, обрадующие меня сообщения.

О себе я могу сказать немного. В этом году я был весьма прилежным, но без соответствующего результата. Твое присутствие побудило меня возобновить мои старые исследования интегрирования динамических дифференциальных уравнений. Как я уже писал Тебе, я сделал некоторые успехи, но передо мной все еще стоят трудности, которые иногда кажутся непреодолимыми. Этой зимой на семинаре я подробно рассмотрел существующие методы определения движений планет в условиях нашей планетной системы и все более приходил к выводу, что для правильного разрешения связанной с этим проблемы надо идти совершенно иными путями, чем до сих пор, но эти новые пути представляются мне только в тумане. Если бы я имел здесь кого-нибудь, с кем можно было бы ежедневно говорить о моих попытках, то, пожалуй, многое стало бы мне более ясным.

Во время предстоящих пасхальных каникул (у меня они начнутся 15-го сего месяца) я буду делать другую работу. Многие побуждают меня самым настойчивым образом, в частности, из Франции, срочно выпустить новым изданием мою работу по однозначным функциям. Я не могу уклониться от этого еще и потому, что мне нужно дать своим слушателям в руки что-то, что компенсировало бы им то, что я теперь вынужден сократить число часов лекций.

Мои исследования однозначных функций дороги мне еще потому, что они указали молодым математикам путь к работам в той же области, что является наилучшим успехом, какого может себе пожелать учитель и писатель. Кроме Миттаг-Леффлера, очень интересные исследования, примыкающие к моим работам, произвели еще зять Эрмита, Э. Пикар, и создатель бюллетеня Дарбу Ж. Таннери. Последний сообщил мне, например, что ряд, который в моем последнем исследовании обозначен $\psi(x)$, может быть заменен другими рядами, обладающими теми же свойствами, но более элементарного характера, чем мои.

Если, например, взять

$$\Psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \dots$$

то сумма n первых членов этого ряда:

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}},$$

откуда, если $n = \infty$, получаем:

$$\Psi(x) = 1, \text{ при } |x| < 1$$

$$\Psi(x) = -1, \text{ при } |x| > 1.$$

Отсюда можно вывести все, что было доказано мною с помощью моей функции $\psi(x)$.

Мне нечего уверять Тебя, что я жажду знать, насколько Ты продвинулась в своей работе,— я имею в виду работу над λ.

Дружеский привет Тебе от моих сестер. Они просят напомнить Тебе о Твоем обещании. Твои прекрасные рождественские цветы простояли весь январь, правда, за ними был хороший уход.

Всего хорошего, мой милый, дорогой друг, и порадуй вскоре известием

Твоего искренне преданного
Вейерштрасса

58.

Вильгельмсхёэ близ Касселя
четверг, 9-го июня 1881, вечером

Мой милый друг!

Пишу Тебе незадолго до моего отъезда отсюда и совершенно не жду ответа от моего милого друга, оставляя Тебе время для давно намеченного Тобой письма к одному из Твоих самых искренних почитателей — к счастливому жениху в Гельсингфорс [1].

В Геттингене я пробыл всего лишь 24 часа, которые все, за исключением кратковременного ночного отдыха, были посвящены математике.

У Шварца было огромное количество вопросов. Я своим коротким пребыванием в Гёттингене сэкономил время минимум на дюжину писем. Конечно, я должен был также осмотреть коллекцию моделей в университете, которая действительно заслуживает этого. В частности, меня особенно заинтересовала модель поверхности с постоянной отрицательной кривизной, сконструированная по данным Бельтрами. Я также виделся и беседовал с обоими гг. Шерингами и любезной супругой старшего из них, а также с гг. Геттнером и Штерном. Последний, несмотря на свои 75 лет, был занят моей работой о теореме Миттаг-Леффлера. В связи с этим я узнал один курьез: г. Бетти будто бы утверждает, что теорема о том, что существует целая трансцендентная функция с *предписанными* нулями, которых в конечной области имеется конечное число, в сущности, принадлежит ему, так как ему якобы пришла

[1] Миттаг-Леффлеру.

в голову мысль при ее доказательстве предполагать, что каждый линейный множитель целой функции встречается только в произведении с показательной функцией, но не одного и того же порядка для всех множителей.

Как печально, что хорошие мысли не всегда приходят вовремя.

Все математики, с которыми мне пришлось говорить в Гёттингене, справлялись о Тебе и просили передать привет, как говорят у нас в Германии, «любыми путями».

И здесь я также встретил коллегу по математике, а именно математика гимназии, в которой я воспитывался.

Я узнал, какая непостоянная и тленная вещь слава. Представь себе, из 27 преподавателей гимназии, гордостью которой я когда-то был, так как окончил полный курс за $5^1/_2$ лет вместо 8, никто уже не знает — прошло около 45 лет, что ординарный профессор государственного университета Вейерштрасс и член более двенадцати академий, не говоря уже о других его званиях, заложил фундамент своей научной деятельности в добром городке Падерборн и окончил школу в качестве Primus omnium [1].

Утешаю себя тем, что г. доктор пообещал мне отметить это в хронике училища.

Как обстоят дела в Вильгельмсхёэ, Тебе скажут мои сестры. Передай им, пожалуйства, что я Тебе сегодня написал. Парк здесь один из лучших, которые я знаю, он расположен вблизи замка, построенного в допотопном стиле и относящегося к середине прошлого века. Затем он переходит в прекрасный дикий массив.

Я вернусь через несколько дней. Пока шлю Тебе сердечный привет. Передай дружеский привет Фуфе.

К. В.

59. Берлин, В, Линкштрассе 33
11 апреля 1882.

Мой дорогой друг!

Прошло уже более четверти года со времени Твоего отъезда из Берлина, и я ни разу не написал Тебе. Ты имела бы полное право жаловаться на меня, если бы сама не знала по опыту, что можно ясно сознавать свой долг и тем не менее откладывать его исполнение со дня на день, но отнюдь не из-за невнимания или лени. Твое первое письмо из Парижа, также заставило себя долго ждать, и, откровенно сознаюсь Тебе, мне было очень трудно не-

[1] Первый из всех (лат.).

медленно ответить на него. Из каждой строки Твоего письма и еще больше из того, что читалось между ними, было достаточно ясно, что по причинам, о которых Ты не хотела и не могла высказаться подробнее, Тебя захватили волнения и заботы, грозившие надолго помешать Твоему горячему желанию спокойно отдаться своим работам. Ты не привыкла откровенно высказываться своим друзьям в подобных случаях и полагаешь, что каждый человек должен стараться самостоятельно справиться с тем, что ему приходится нести. Я вполне сочувствую Тебе в этом отношении и поэтому не мог решиться просить у Тебя разъяснений и более подробных сообщений. И все же я, как Твой искренний друг и духовный отец, едва ли мог бы молчаливо пройти мимо того, о чем Ты сообщаешь намеками и что мне удалось понять. В этом заключается действительная причина того, почему мне трудно было решиться написать Тебе.

Правда, за одну свою небрежность я должен просить у Тебя прощение. Несколько времени тому назад почтальон принес мне письмо Миттаг-Леффлера, адресованное Тебе, которое он не мог вручить. Я взял его, отложил пока в сторону, так как не знал, оставила ли Ты за собой квартиру в Париже, а потом забыл о нем. Мне это очень неприятно, и я не смогу найти себе оправдание, если Ты меня как следует побранишь.

Не думаю, милый друг, чтобы Ты после своего отъезда отсюда сделала большие успехи в своей работе при сложившихся обстоятельствах, как бы я этого ни желал. Мне тем не менее очень хотелось бы узнать, какие попытки Ты еще предпринимала. Я довел до удовлетворительного конца мои лекции о гиперэллиптических функциях по новому плану и был очень рад, что многие мои слушатели с интересом отнеслись к ним, а большинство прилежно выдержали их до конца. Издание трудов Штейнера доставило мне много работы. Труднее всего было выверить и сократить до 2 листов массу примечаний, переданных мне редакторами отдельных статей. Но несколько недель тому назад я закончил эту работу. Второй (и последний) том в 47 печатных листов вышел в начале этого месяца. Я очень рад, что выполнил взятое на себя обязательство, и надеюсь, к удовольствию соответствующих кругов читателей. Издание трудов Якоби доставляет мне меньше труда и интереснее.

В настоящее время я занят тем, чтобы в неслишком обширной статье дать обзор построения теории абелевых трансцендент, основанного на тех же положениях, что и упомянутые лекции. Если y есть произвольная n-значная функция x, то я ассоциирую с ней все функции, целым рациональным образом составленные из y и из любого числа однозначных функций x и, следовательно, мо-

гущие быть представленными в виде:

$$f_0(x) + f_1(x)\,y + \ldots + f_{n-1}(x)\,y^{n-1}$$

таким образом, что $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ представляют однозначные функции, относительно которых я все же предполагаю, что каждая из них имеет только конечное число существенно особых точек. При таком ограничении теория этих многозначных трансцендентных функций может быть развита так, как я это сделал для однозначных функций. Можно в общем виде установить понятие примитивных функций [1], то есть таких, которые играют ту же роль, что и алгебраические единицы в теории чисел, и доказать, что каждая функция рассматриваемого вида может быть составлена из примитивных функций, вообще говоря, из бесконечного числа таких функций и т. д. Если далее требуется интегрировать дифференциал $F(x, y)\,dx$, где F обозначает одну из рассматриваемых функций, то это всегда можно произвести в виде

$$\int F(x, y)\,dx = F_0(x,\ y) + \sum_{\nu} C_\nu \log F_\nu(x, y),$$

где величины F_ν опять обозначают функции этого вида, а выражение в правой части состоит из конечного или бесконечного числа членов, в зависимости от того, будет ли число особых точек функции $F(x, y)$ конечным или нет. В том случае, когда в качестве $F(x, y)$ берется рациональная функция x, y, мы приходим к абелеву интегралу, существенные свойства которого простейшим образом вытекают из предыдущей общей теории. Таким же образом легко получаются и θ-функции. Как уже сказано выше, я в своей статье дам только основу теории, не входя в детали вычислений. Это получается очень хорошо, и я думаю, что именно такая форма изложения удовлетворит читателей.

Статья выйдет через несколько недель.

100 марок разными купюрами, вложенные в Твоем письме, я потратил:

1) на оплату гонорара Клебшу—40 марок;

2) за переписывание моей лекции о вариационном исчислении — 42 марки;

3) остальное я предназначил для госпожи Хейден, в качестве возмещения за услуги, сейчас уже не помню точно какие.

Упомянутая выше, очень хорошо написанная тетрадь с лекциями приготовлена для Тебя. Но, к моему огорчению, я при этом вновь убедился, что желая сделать человеку добро, можно ему

[1] В оригинале — Primfunktionen.

повредить. Я заплатил переписчику, работой которого я остался очень доволен, на 10 марок больше положенного. Он же целую неделю предавался алкоголю и дошел до белой горячки, так что мне пришлось удержать с него эту сумму при переписке тетради по теории функций, которая была также поручена ему.

Кронекер недавно издал большой труд: «Основы арифметической теории алгебраических величин». Она в сжатом виде содержит результаты многолетних исследований, но с большим трудом будет понята читателями, не слышавшими лекций Кронекера. Поэтому я опасаюсь, что пока ею будут больше восхищаться, чем изучать.

Обратила ли Ты внимание на последние работы Пуанкаре? Это, во всяком случае, крупный математический талант. Вообще теперь во Франции молодое поколение математиков с большим успехом стремится к новым достижениям и в области анализа, единственным представителем которого после отхода Лиувилля долгое время оставался Эрмит.

Исследования, начатые Пуанкаре, в связи с работами Фукса, Шварца и Клейна, во всяком случае приведут к новым аналитическим трансцендентам, даже если он еще и не находится на верном пути. Только очень жаль, что Академия является слишком манящей целью для молодых французских исследователей. Каждую неделю представлять в Comptes Rendus статью, действительно ценную, это все-таки невозможно. Даже талантливый Пикар расточает свой талант таким образом, а Эрмит слишком поощряет эту беспокойную погоню за внешним успехом.

Этим, мой самый дорогой друг, я кончаю свое длинное послание и Тебя, надеюсь, не требуется уверять, что я буду искренне рад, если вскоре получу от Тебя ответ и, надеюсь, радостные известия.

Искренне Тебе преданный
Твой Вейерштрасс

60. Берлин, 14.6.82.

Мой дорогой друг!

Меня очень огорчило, хотя и не удивило все, что Ты сообщаешь в первой части своего долгожданного письма. В действительности я уже давно догадался о настоящей причине Твоего продолжительного пребывания в Париже и Твоего абсолютного молчания. Достаточно было нескольких часов, в течение которых мне пришлось познакомиться с г. К[овалевским], чтобы убедить меня в том, что в ваших отношениях появилась внутренняя трещина, угрожающая их полным разрывом. У него нет ни интереса, ни понимания Твоих идей и стремлений, а Ты не можешь сжиться с бес-

покойным течением его жизни. Ваши характеры слишком различны, чтобы Ты могла надеяться найти в нем то, что необходимо для счастливого брака, именно опору и поддержку, а он — получить в Твоем лице дополнение к собственному существу. В противном случае даже некоторые заблуждения с его стороны не помешали бы Вашему примирению. Если я считал своим долгом возражать против Твоего плана — занять в Стокгольме место приват-доцента, в то время как он будет работать в своей должности в Москве, то это произошло в убеждении, что подобные отношения между супругами не естественны. Во всяком случае меня нельзя разубедить в том, что подобный план никогда не пришел бы Тебе в голову, если бы Ты чувствовала себя *внутренне* связанной со своим мужем и любила бы его так, как хочет быть любимым каждый муж. Я не могу упрекать его в том, что он отклонил Твой план и, может быть, поэтому он еще больше вооружился против Твоих математических стремлений. При теперешнем положении вещей ваши прежние взаимоотношения, по-видимому, стали невозможными. Я хотел бы только, чтобы все разрешилось так, чтобы Ты обрела свободу от волнений и забот, необходимую для Твоего существования. Ты должна как можно скорее выйти из своего теперешнего одиночества и иметь возле себя маленькую Соню. Забота о ней и наблюдение за ее развитием благотворным образом займут Твое время и будут Тебя радовать.

Выше я откровенно, без лишних фраз, высказал свою точку зрения.

Благодарю за проявленное ко мне доверие. Я слишком хорошо знаю Тебя, чтобы навязывать какой-нибудь совет, и убежден, что Ты достаточно сильна, чтобы самостоятельно справиться с своей судьбой. Если же Ты считаешь, что мой совет и моя поддержка могут быть так или иначе Тебе полезны, то Ты знаешь, что можешь обратиться ко мне без всякого стеснения.

О Твоем знакомстве с Эрмитом я уже узнал от него самого. Он написал мне с большим восторгом об этом и перечислил все вопросы, которых вы коснулись в вашей первой беседе. Тебе, вероятно, теперь также придется войти в сношения с другими математиками, из которых Тебя наиболее заинтересуют младшие: Аппель, Пикар, Пуанкаре. Пуанкаре, по моему мнению, наиболее способный из всех к математическим рассуждениям. Только бы он не рассеял свой исключительный талант и дал созреть своим исследованиям. Теоремы об алгебраических уравнениях с двумя переменными и линейных дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами, которые он дал в Comptes Rendus, действительно производят впечатление. Они открывают анализу новые пути, которые приведут к неожиданным результатам.

Тем не менее я убежден, что новый способ исследования этих уравнений, в основе своей правильный, должен применяться с обобщенных и более высоких точек зрения. Позволь мне изложить это несколько подробнее. Если дано алгебраическое уравнение $f(x, y) = 0$, то, по словам Пуанкаре, все удовлетворяющие этому уравнению системы значений x, y могут быть получены в следующем виде:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ обозначают однозначные функции независимой переменной t, область изменения которой может быть ограниченной или неограниченной. Эти функции обладают свойством оставаться неизменными, если для t взяты определенные линейные функции той же переменной. Определение коэффициентов последних из данных значений для коэффициентов уравнений $f(x, y) = 0$ во всяком случае представляет очень трудную задачу, которая, в общем, приведет к трансцендентным уравнениям очень сложного характера. Если коэффициенты для $f(x, y)$ представляют рациональные или алгебраические функции неопределенных величин a_n, то очевидно, что полное определение $\varphi(t)$, $\psi(t)$ будет различным и производится различным образом, в зависимости от того, в каком виде эти произвольные постоянные находились бы в уравнении. Следуя этому ходу мыслей, обязательно приходим к следующей задаче.

Положим, что дано алгебраическое уравнение между $n + 1$ переменными x, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с рациональными числовыми коэффициентами. Требуется представить все системы значений $(x, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие этому уравнению в виде $x = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$, $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)$, и таким образом, чтобы $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ были однозначными функциями независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$. (Это можно, например, сделать в случае, если дано уравнение $y^2 = (1 - x)^2 (1 - k^2x^2)$, тогда величины x, y, k можно выразить через функции $\vartheta_\lambda(u, \tau)$. В этом исследовании надо стараться найти среди алгебраических уравнений такие, которые можно назвать основными уравнениями, из которых каждое обладает особым свойством и к нему могут быть приведены все остальные уравнения. Но в первую очередь задача заключается в том, чтобы определить функции нескольких переменных, сходные по своим свойствам с теми, которые Пуанкаре называет «фуксовыми функциями» и примером которых является отношение функций $\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_n/\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{nn})$, рассматриваемых как функции v и τ.

Это дает очень широкие перспективы. Однако следует выяснить

конечную цель этих исследований, столь блестяще начатых Пуанкаре.

Что касается исследований Пуанкаре о линейных дифференциальных уравнениях, то все вышесказанное относится сюда еще в большей степени. То, что было до сих пор напечатано Пуанкаре по этому вопросу, насколько мне известно, вызвало некоторое *недоумение* у некоторых господ, много занимающихся линейными дифференциальными уравнениями. Для многих очень трудно отказаться от мысли, что для интегрирования линейного дифференциального уравнения необходимо одну переменную выразить через другую переменную.

Статья П[уанкаре] о дифференциальных уравнениях

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

мне неизвестна. Где она помещена?

Что же касается предложенного Пуанкаре интегрирования дифференциальных уравнений в механике, то я могу сказать следующее: две зимы тому назад я на семинаре кое-что высказал по этому предмету и, между прочим, доказал следующую теорему:

«Если любое число материальных точек взаимодействует по закону Ньютона или по какому-либо иному закону, когда вместо r^2 имеется аналитическая функция r, которая при действительных и положительных значениях последней величины становится бесконечно большой только при $r = 0$, и начальные условия движения таковы, что две точки никогда не сходятся и никогда не удаляются друг от друга в бесконечность, то координаты движущихся точек представляют собой аналитические функции времени t, определяемые однозначно не только для всех действительных значений этой величины, но и для всех комплексных значений, вторая координата которых по своей абсолютной величине остается ниже определенного предела».

Следовательно, теорема, из которой, по сообщению Аппеля, исходит П[уанкаре], правильна только в том случае, если выполнены условия устойчивости мировой системы. Однако установление этих условий, может быть, самая трудная часть всего исследования. Если, например, имеются только 2 точки и в течение какого-либо времени их движение направлено друг к другу, то координаты не будут функциями времени указанного свойства. Если Пуанкаре в состоянии действительно определить коэффициенты ряда, в который раскладываются координаты при условии устойчивости системы, то можно установить условия, при которых ряд сходится, и это были бы условия устойчивости.

Но и в этом случае я сомневаюсь, чтобы эта форма ряда выражала действительный аналитический характер определяемых функций. Этому уже противоречит простой факт, когда имеются 2 точки, и движение каждой из них происходит по эллипсу вокруг общего центра тяжести. Однако нам следует еще подождать.

По поводу вопроса, заданного Тебе Эрмитом и Пикаром, я пока сообщу Тебе следующее.

Положим, что $\varphi_1(u_1, \ldots, u_r)$ есть $2r$ периодическая функция r переменных u с теми же свойствами, которые я подробно указал в 89 томе математического журнала, в письме к Борхардту. Далее положим, что

$$\begin{matrix} P_{1,1} & P_{2,1} \ldots & P_{r,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} \ldots & P_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1,2r} & P_{2,2r} \ldots & P_{r,2r} \end{matrix}$$

представляют *примитивную* систему $2r$ связанных периодов этой функции, так что, если $P_1, P_2, \ldots, P_r$ есть произвольная система периодов функции, где

$$P_1 = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{1,\nu}, \ldots, P_r = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{r,\nu}$$

то для $u_1, \ldots, u_r$ можно ввести другие переменные $v_1, \ldots, v_r$, которые являются их линейными функциями, так, чтобы для происходящей из $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ функции переменных $v_1, \ldots, v_r$ получилась следующая система периодов, соответствующая предыдущей основной системе:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 1 \\ \tau_{1,1} & \tau_{1,2} \ldots & \tau_{1,r} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} \ldots & \tau_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{r,1} & \tau_{r,2} \ldots & \tau_{r,r} \end{matrix}$$

Если функция φ одна из тех, к которым приводит задача обращения Якоби, то между величинами τ существуют соотношения:

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha} \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, r \\ \beta = 1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

и одновременно квадратичная форма.

$$i \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta$$

такова, что при действительных значениях n_1, n_2, ..., n_r, когда они не все равны нулю, действительная часть формы всегда имеет *отрицательное* значение. Согласно замечанию Эрмита (заметка о дифференциальном и интегральном исчислении, стр. 26), *Риман* доказал, что *каждой* $2r$-кратной периодической функции $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ соответствуют указанные соотношения между величинами $\tau_{\alpha,\beta}$.

В сочинениях Римана об этом ничего нет. То, что говорится об этом в теории абелевых функций, относится только к вышеуказанным периодическим функциям, для которых $\tau_{\alpha,\beta}$ зависят только от $(3r - 3)$ произвольных параметров. В действительности же теорема не проходит для общих $2r$-кратных периодических функций в вышеуказанном смысле. Во всяком случае, между величинами $\tau_{\alpha,\beta}$ и в общем случае существует $^1/_2\ r(r-1)$ соотношений, но они выражены однородными линейными уравнениями между $\tau_{\alpha,\beta}$ с целочисленными коэффициентами. Между тем всегда можно построить $2r$ *независимых*, хотя и не примитивных систем соответствующих периодов, для которых среди $\tau_{\alpha,\beta}$ действительны указанные простые соотношения $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$, а построенная квадратичная форма обладает указанным свойством. При помощи теоремы, которую я рассмотрел в упомянутом письме, можно в заключение доказать следующее.

«Каждая $2r$-кратная периодическая функция r переменных может быть рационально выражена через другие $2r$-кратные периодические функции тех же переменных, построенные таким образом, что они имеют систему $2r$ основных периодов, для которых образовавшиеся из них величины $\tau_{\alpha,\beta}$ обладают вышеуказанными свойствами».

Или иначе, если $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ есть любая $2r$-кратно периодическая функция переменных $u_1, \ldots, u_r$ заданного свойства, то всегда можно так построить системы постоянных

$$\tau_{1,1}, \ldots, \tau_{1,r},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\tau_{r,1}, \ldots, \tau_{r,r},$$

что соотношения $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$ остаются в силе, к[вадратичная] форма обладает указанным выше свойством и $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ рационально выражается через некоторое число функций:

$$\psi(v_1, \ldots, v_r/\tau_{1,1}, \tau_{1,2}, \ldots, \tau_{r,r}),$$

если в них вместо v_1, ..., v_r подставлены определенные линейные функции величин u.

По этому вопросу у меня готова небольшая статья, которую один из моих слушателей, француз г. Мольк, переведет на французский язык.

От души желаю Тебе, дорогой друг, чтобы Ты вскоре могла посвятить себя в полной мере работе.

В заключение я должен сообщить Тебе очень интересную и значительную математическую новость. Профессор Линдеман в Фрейбурге только что доказал, *что* π *есть трансцендентное число*, путем (что очень заинтересует Эрмита) оригинального обобщения основной теоремы, посредством которой Эрмит доказал, что e есть трансцендентное число. Простым следствием общей теоремы является следующее утверждение: если две действительные или комплексные величины a, b связаны между собой уравнением $b = e^a$, то они обе никогда не могут быть алгебраическими числами, за исключением случая, когда $a = 0$, $b = 1$.

Если мы примем $a = 1$, то $b = e$, если $a = 2\pi i$, то $b = 1$.

Таким образом, из этого утверждения следует также, что ни e, ни π не могут быть корнями алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются рациональными числами.

Вскоре выйдет работа Линдемана по этому вопросу. Сердечный привет Тебе от моих сестер. Надеюсь, что я вскоре получу известия от Тебя, и надеюсь, что они будут благоприятными.

Искренне преданный Тебе
Твой старый друг Вейерштрасс

61. Берлин 15 июля 1882

Дорогой мой друг!

Отвечая на Твое милое письмо от 1-го сего месяца, хочу, прежде всего, заметить, что в первых числах августа я покину Берлин на 5—6 недель. Однако не знаю пока достаточно определенно, какова будет моя цель. В течение нескольких месяцев меня мучит боль в ноге, которая появляется, правда, лишь при ходьбе, но все же сильно меня беспокоит, поэтому я могу двигаться не более 20—25 минут.

Пожалуй, будет необходимо предпринять в связи с этим что-нибудь серьезное, например, отправиться в Гастейн в Тироле, Рагац в Швейцарии или какое-либо другое место с теплыми купаньями. Куда именно — может определить врач, мне же это все равно. Если я поеду в одно из упомянутых мест, брать с собой туда сестер было бы нецелесообразно. Я предпочел бы встретиться с ними позднее — ведь лечение длится лишь три недели — в

Баден-Бадене, Берхтесгадене, вообще в более красивом месте. Каковы, однако, Твои ближайшие планы? Я был бы Тебе очень благодарен, если бы Ты была добра срочно сообщить мне что-нибудь об этом. Как писала мужу фрау Кронекер, которая вместе со своей дочерью находится теперь в Понтерезине в Швейцарии, на близлежащей улице Моритц женщина с Твоим именем заказала квартиру для себя и своей дочурки. Но это, видимо, не Ты? При Твоей антипатии к горам меня это удивило бы.

Жду здесь на днях Миттаг-Леффлера с его молодой женой. Во всяком случае он мне обещал свой визит.

Не будешь ли добра указать мне, где содержатся обе интересующие Тебя работы Пуанкаре. Я имею в виду работы о дифференциальных уравнениях механики и об уравнениях

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Я их не встречал. Работа Линдемана о числе π примечательна с различных точек зрения. Результаты правильны, однако вначале они были основаны на *ложно* понятой теореме и не доказаны Линдеманом достаточно строго и теперь. Используя некоторые предложения, относящиеся к области, развиваемой Эрмитом в его красивой работе о экспотенциальных функциях, но еще не требующие такого большого формального аппарата, я пришел к вполне строгому и несложному доказательству общих линдемановских теорем, именно к следующему.

«Если z_0, z_1, ..., z_n *отличны друг от друга*, а N_0, N_1, ..., N_n — *произвольные алгебраические* числа, то уравнение

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

может существовать лишь тогда, когда все N равны нулю».

С тем говорю Тебе на сей раз сердечное до свидания и повторяю свою просьбу о скором ответе. Мои сестры сердечно приветствуют Тебя.

С верной преданностью Вейерштрасс

62. Берлин, 26 июля 1882.

Мой дорогой друг!

Несколько времени тому назад я написал Тебе и просил скорее ответить. Так как я до сих пор не получил ответа, то предполагаю, что мое письмо не застало Тебя в Париже. Поэтому пишу Тебе еще раз, очень хотел бы получить известие от Тебя до своего отъезда, и чтобы Ты во всяком случае оставила свой адрес на старой квартире. Не помню, сообщал ли я Тебе, что мне при ходьбе очень ме-

шает боль в ноге, вследствие расширения вен. Мне нужно принимать горячие ванны, напр. в Гастейне, Боденвейлере или Рагаце. Я буду это делать, правда, еще не выбрал место. Мои сестры не поедут со мной сразу, так как указанные курорты мало привлекательны. Я думаю встретиться с ними через несколько недель в приятном месте, напр. в Баден-Бадене. В ближайший вторник, 1-го августа, я кончаю свои лекции и сразу же отправлюсь в путь. Это письмо Ты получишь в четверг утром, если еще находишься в Париже. Прошу Тебя тотчас же ответить на него и, если Ты не сможешь написать подробно, то хоть сообщить о своем здоровье и о Твоих ближайших намерениях. Прошу Тебя, запечатывай свои письма, чтобы их не мог каждый читать. Твое предпоследнее письмо было заклеено так плохо, по существу даже совсем открыто, что его можно было просто вынимать и снова вкладывать. На это обратил мое внимание почтальон.

Писал ли я Тебе, что Шотки получил профессорскую кафедру в политехникуме в Париже? Я очень радовался этому, также и в том отношении, что я оказался правым, в то время как Куммер считал его совсем неподходящим для педагогической работы. Ведь чтобы заслужить благосклонность г. Каппелера, Швейцарского президента совета училища, нужно обладать дидактическим талантом.

Впрочем Шотки в своей докторской диссертации привел многое, что относится к области исследований Пуанкаре.

Если Тебе сейчас или позднее представится один из моих слушателей—Мольк, прошу, прими его любезно. Он эльзасец по происхождению, но его родители выбрали французское подданство. Он учился сперва в Париже, а теперь два года здесь. Он хочет приехать и в следующую зиму, а затем подыскать себе во Франции на первых порах место репетитора и т. п. Ты от него многое узнаешь, что Тебя интересует.

Сегодня жду Миттаг-Леффлера с его молодой женой. Предвкушаю удовольствие провести несколько часов с этим милым человеком.

На этом сегодня кончаю, дорогой друг. Сердечный привет Тебе от моих сестер. Они также ждут писем от Тебя.

Полностью Твой Вейерштрасс

63. Инсбрук (Тироль), 1882, 3.8[1].

Мой дорогой друг!

В Твоем последнем письме мало отрадного. Хорошо, что Твоя маленькая Соня опять у Тебя и что Ты несколько месяцев спокой-

[1] На конверте адрес Ковалевской: С. Манде (Париж), Гранд рю 7.

но посвятишь работе или отдыху, что будет благоприятно для Тебя. Надеюсь, что будущее внесет полную ясность в Твои, по-видимому, полностью нарушенные отношения.

Миттаг-Леффлер с женой были здесь на прошлой неделе — со среды до субботы. Я провел с ними много времени. Его молодая жена всем очень понравилась. Все также восхищались ее простым и вместе с тем элегантным туалетом. Миттаг-Леффлер, по существу, сделал математическое турне — Страсбург — Гейдельберг — Гёттинген — Лейпциг — Галле — Берлин, не говоря уже о Париже. Оно было интересным для него, но боюсь утверждать, что оно было также интересным для его молодой жены.

По всей вероятности, г. Мольк уже представился Тебе, если еще нет, то он будет у Тебя в ближайшие дни. Я дал ему переписанную для Тебя мою работу по вариационному исчислению. Он же может Тебе сообщить о моей заметке, касающейся работы Линдемана о π и т. д., которая возможно Тебя заинтересует.

Я теперь попытаюсь подлечить расширенные вены ноги посредством купаний в теплых источниках. 15-го с. м. мои сестры вновь поедут в Баден (близ Фрейбурга). Я тоже туда поеду для продолжения моего лечения. После этого мы, возможно, в сентябре, поедем в Баден-Баден. Не хочешь ли Ты навестить там свою старую тетю и показать ей маленькую Соню?

В ближайшие дни я займусь небольшой работой для нового шведского журнала, которую я обещал Миттаг-Леффлеру. В остальном буду лечиться. Напиши, милый друг, скорее моим сестрам, если Ты еще не сделала этого. Они жаждут получить весточку от Тебя. Дальнейшие известия о нас Ты получишь из Боденвейлера.

С сердечным приветом
Искренне Тебе преданный
Вейерштрасс

64. 〈Открытое письмо〉

〈Штемпель:〉
Базель — 5 VIII — 33—8

Г-же фон Ковалевской

Берлин В.
Шеллингштрассе 16^{III}

Величайшая благодарность за превосходный плод, который для нас за ужином и сегодня был настоящим наслаждением. Здесь «на юге» далеко не так хорошо, как в «северном Берлине». Это была хорошая идея и так же хорошо исполненная, ей надо еще в другой области так же хорошо следовать. Все остальное пишет

Э[лиза], мне только хочется прежде всего высказаться за счастливую поездку и скорое возвращение к нам.

Сердечно приветствующий К. В.

65.

27 августа 1883.
Гранд Рив близ Эвиан ле Бен
(Савойя)

Мой дорогой друг!

В надежде на то, что Твоя так неблагоприятно прерванная поездка все же привела Тебя к цели, начну с самого важного.

Уже на второй день моего пребывания здесь (7 с. м.) я написал Миттаг-Леффлеру длинное письмо на 5 листах, 4 из которых посвящены Тебе. Сперва я написал ему о Твоей работе, не так подробно, как в твоем реферате, но все же достаточно, чтобы он мог получить ясное представление о сделанном. Далее я высказал свое мнение, каким образом Ты должна будешь начать свою педагогическую деятельность в Стокгольме, чтобы не потерпеть неудачи. Только вчера вечером я получил ответ от него, а сегодня уже ему ответил. Он согласен со мной в том, что Ты должна начать с частных лекций, не более двух часов в неделю в первом семестре, чтобы иметь время для тщательной подготовки к лекциям. Слушателей он Тебе найдет. Он считает, что Ты должна быть там уже 15-го сентября, и даже предлагает, чтобы Ты встретилась с ним и его женой в Гельсингфорсе около 10-го. Я ему написал, что Ты едва ли сможешь так скоро выбраться из Одессы, тем более, что Ты не сможешь взять с собой в Стокгольм маленькую Соню. Кроме того, я считаю неважным, начнешь ли Ты свои лекции на несколько недель раньше или позднее. Во всяком случае прошу Тебя написать ему тотчас же, нужно ли ему предпринимать что-либо в отношении Твоего устройства и т. п.

Перехожу к Твоему письму от 15-го, написанному с хорошим юмором с неизвестной станции, относительно которой мало что говорит приписка «на пути в Одессу». Прежде всего я должен выступить в защиту математики и математиков против Твоих несправедливых обвинений. Хорошо, конечно, в серьезных вещах обращаться за советом к ученым людям, но надо их правильно выбирать. Если я, напр., хочу узнать, как проехать от Бранденбургских ворот к Силезским, то в этом случае ученым будет извозчик. Если же Ты в будущем еще раз захочешь поехать из Берлина в Одессу, то обратись в Международное бюро путешествий (Унтер ден Линден 68), там Ты найдешь ученого, который Тебе не только даст нужные сведения, но и билет прямого сообщения, а также возьмет на себя заботу о Твоем багаже. И если уж мне как адвокату нуж-

но защищать молодых математиков, к которым Ты относишься с такой неблагодарностью, то следует привести следующее. Возможно, они уже знали Твои слабые стороны от Твоего соотечественника, и нарочно устроили так, чтобы у Тебя было дорогой несколько часов вынужденного безделия. Скажи мне, положа руку на сердце, которое, к счастью, не досталось Кронекеру, написала бы Ты нам, если бы приехала в Одессу без задержки?

Конечно, Ты наверное, имела не раз самые хорошие намерения, однако... Во всяком случае для нас исход был благополучный, хотя сам по себе случай неприятный.

То, что Ты пишешь о Кронекере, меня не удивило. Если его, человека проникновенного ума, что-либо раздражает, он теряет способность правильно рассуждать. Он тогда не только говорит глупости, но и поступает неправильно, я в этом убедился, имея самые невероятные примеры. При этом с возрастом его тщеславие все более увеличивается. Я боюсь, что он будет, так же как и Штейнер, считать, что все хорошее в математике сделано им прямо или косвенно, а все остальное ничего не стоит. О том, что наши научные взгляды расходятся, мне давно известно, только это не проявляется так резко, как в случае, который произошел с Тобой. В среде старых математиков имеются люди различного сорта,—тривиальное положение, которое, однако, многое объясняет.

Мой дорогой друг Куммер, например, и в то время когда он все свои силы тратил на нахождение доказательств более высоких законов взаимности, и затем, когда он их истощил, не заботился о том, что происходило в среде математиков. Он относится к этому если не отрицательно, то во всяком случае безразлично. Если Ты его спросишь, не основывается ли эвклидова геометрия на недоказанном положении, то он с этим согласится. Но если, исходя из этого, задать вопрос, какова будет геометрия без этого положения, то это будет противоречить его природе, и основанные на этом общие или эмпирические исследования он будет считать никчемными исследованиями, даже вызывающими отвращение. Кронекер — другой, он быстро знакомится со всем новым. Его способность к быстрому восприятию способствует этому, но он это делает не проникновенно, он не может относиться к хорошей чужой работе с тем же интересом, как к своей собственной. Кроме того, он обладает недостатком, присущим многим очень умным людям, в особенности семитского происхождения, а именно он не обладает достаточной фантазией (я бы сказал интуицией), и вполне правильно мнение, что математик, который не является немного поэтом, никогда не станет настоящим математиком. В этом отношении очень поучительны сравнения. Всеохватывающий взор, направленный к возвышенному, к идеалу, ярко отличает

Абеля от Якоби, Римана от всех его современников (Эйзенштейн, Розенхайн), Гельмгольца от Кирхгофа (хотя в последнем нет ни капли семитской крови). Я лишь сожалею, что Кронекер в некоторые моменты теряет всякую предосторожность и тем самым наносит самый большой вред себе самому. Что касается моих научных стремлений, о которых я имею право сказать, что как бы мало ни было их значение для хода развития науки, они всегда были посвящены служению ей. Но я давно отказался от того, чтобы искать того же отношения у моих старших коллег. Я обращался к молодежи и у нее находил понимание и воодушевляющее меня сочувствие.

Мои сестры обе напишут Тебе на этих днях. Клара сейчас чувствует себя не вполне хорошо, прежний недуг все еще возвращается к ней. Они шлют сердечные приветы Тебе и маленькой Соне. Я присоединяюсь к ним и прошу Тебя сообщить мне, когда и о чем Ты писала Миттаг-Леффлеру.

Искренне Тебе преданный
Вейерштрасс

Твое письмо от 15-го пришло распечатанным. В данном случае это не имело значения, но в будущем советую Тебе заботиться о том, чтобы письма были хорошо запечатаны. Я, в случае необходимости, беру два конверта и запечатываю внутренний.

66. Гранд Рив 12 сент. 1883.

Мой дорогой друг!

Твое милое письмо от 1-го с. м. я получил с опозданием: здешняя почта, в Эвиане, весьма примитивная, по-видимому, придерживается того мнения, что письма следует выдерживать подобно вину и сигарам, чтобы получить потом настоящее удовольствие. Хотя почтальон должен приходить сюда каждый день, он предпочитает выжидать подходящего случая.

Ты ведь знаешь монолог Валленштейна:

Ужель в своих я действиях не волен?
⟨Назад вернуться не могу?⟩ Поступок
Ужель свершить я должен потому,
Что *думал* я о нем ... [1]

Я вспомнил о нем, когда прочитал Твой вопрос, что написать Миттаг-Леффлеру? Так бывает у нас нередко—мы вынашиваем какое-либо решение годами, думаем, что взвесили его со всех сторон, предусмотрели все возможные препятствия, затем наступает

[1] Из трагедии Шиллера «Смерть Валленштейна», действие 1, явление 4. Примечание перев.

момент его осуществления, и вот возникают сомнения в правильности решения, в том, это ли то, чего мы хотели, достаточно ли мы взвесили свои силы и т. п. Не хочу, однако, предаваться общим рассуждениям, лучше постараюсь ответить прямо на Твой вопрос. Напиши Миттаг-Леффлеру, что Ты приедешь, как только Твои дела в России устроятся так, что будут допускать Твое длительное отсутствие, и попытаешься начать работу, как было предложено им. Пока же не должно быть и речи о том, чтобы Ты была штатным преподавателем университета. Пусть он только найдет несколько способных молодых людей, которым ты могла бы прочитать лекцию по какой-нибудь математической дисциплине, в которой Ты наиболее сильна. От достигнутого успеха зависели бы Твои дальнейшие решения.

Я не знаю, что читает сам М.-Л. Иначе я посоветовал бы Тебе выбрать начала теории однозначных функций.

Ты могла бы воспользоваться при этом моими работами, а также работами самого Миттаг-Леффлера, Пуанкаре и др., причем Ты вместе с тем создала бы основу для дальнейшей лекции об эллиптических функциях. Во всяком случае, Твоя задача будет нелегкой, так как у Тебя нет необходимого навыка. Со мной было так же, но слушатели зачтут даже начинающему доценту недостатки его лекции в актив, если убедятся в том, что преподнесенное им действительно имеет научную ценность.

Впрочем я еще раз повторяю то, что Тебе уже говорил. Я считаю Тебя (более) способной к научной, чем к педагогической работе при условии, чтобы Твою жизнь не нарушали невзгоды или волнующие события. Ты же считаешь, что будешь больше работать, если будешь связана определенными обязанностями. При сложившихся обстоятельствах я вижу, что на родине для Тебя нет места для плодотворной и удовлетворяющей Тебя деятельности. Поэтому у меня в большей части исчезли сомнения относительно Твоего плана переселиться в Стокгольм.

Я полагаю, что это письмо еще застанет Тебя в Одессе или будет выслано Тебе вслед. Прошу Тебя тут же сообщить мне или моим сестрам, в какой адрес Тебе направлять корреспонденцию. Я еще твердо не знаю, где проведу зиму, но не думаю возвратиться в Берлин раньше весны. Само собой разумеется, я всегда готов помочь Тебе советом, справкой и т. п., которые могут оказаться полезными Тебе для лекций.

Шварцу я этим летом послал письмо на 8 листах по теории общих комплексных чисел. Он направил мне его обратно для повторного просмотра, так как хочет напечатать его в Гёттингене в Ученых записках. Я его прочитал и не имею ничего против этого. Возможно, Ты найдешь там кое-что новое для себя.

Сердечный привет Тебе от моих сестер. Они просят поскорее ответить на их письма.

Искренне Тебе преданный
Вейерштрасс

67. Гранд Рив 13 окт[ября] 1883.

Мой дорогой друг!

Твое письмо от 3-го с. м. я получил только сегодня (т. е. через 10 дней), а потому не уверен, что мой ответ застанет Тебя еще в Москве.

Для большей уверенности я одновременно посылаю открытку по Твоему петербургскому адресу, в которой сообщаю об отправлении этого письма.

Хорошо себе представляю, что Ты в настоящее время так занята внешними делами, отчасти неприятными, что Твоя голова полностью занята ими. Но как только Ты немного успокоишься, Ты должна будешь мне еще кое о чем сообщить дополнительно, в частности о Твоем участии в конгрессе по естественным наукам. Мои сестры также горят желанием узнать от Тебя подробности и в Твоем следующем письме ко мне не удовлетворятся одним только приветом.

О главном, что Тебя интересует, не могу сообщить ничего нового, кроме того, что я знаю, что Миттаг-Леффлер написал Тебе. Я также жду письма от него, в котором он, вероятно, напишет и о Тебе.

Мы все еще здесь, но пробудем здесь, вероятно, не более 8 дней. Однако я еще не знаю, куда мы поедем, во всяком случае не в Берлин, это определенно, а в остальном не знаем, ехать ли нам в Монтре или в Ниццу.

Чувствуем себя хорошо, но я ужасно разленился и не имею энтузиазма к работе. Сплю как дитя. Возможно, это даже и хорошо.

Кронекер, по-видимому, все еще не простил мне то, что я взял отпуск, не посоветовавшись предварительно с ним. По крайней мере, я сужу об этом по разговорам его жены с другими дамами. Я еще сегодня напишу ему о своем мнении, изложив его коротко и ясно (рунд унд нетт, как говорят берлинцы).

Мне стыдно, что на этот раз я Тебе не сообщил ничего математического. Надеюсь, что в будущем это будет иначе. Я был бы благодарен, если бы Ты сама дала мне повод к этому, я три месяца ничего не читал.

Когда мы отсюда уедем, я пошлю открытку по Твоему петербургскому адресу с указанием своего будущего местопребывания.

Позаботься только о том, чтобы ее Тебе переслали, если Ты раньше уедешь из Петербурга, чего, вероятно, не случится.

Сердечный привет Тебе от моих сестер. Пожалуйста, передай от нас привет также мадемуазель Лермонтовой — возможно и Фуфи также помнит тетю Клару.

Шлю сердечный привет.
Искренне преданный Вейерштрасс

68. Кларенс, Вилла де Пьерье
27 декабрь 1883.

Мой дорогой друг!

Прежде всего должен Тебе сообщить, что мы не имеем никаких известий от Тебя после Твоего письма из Одессы, написанного еще *до* собрания естествоиспытателей. В частности, мои сестры еще не получили длинного письма, отправленного Тобой из «России» (из Одессы, Москвы, Петербурга?). Куда оно было адресовано? Они, впрочем, сами напишут Тебе сегодня или завтра.

Теперь хочу ответить Тебе по порядку на письмо из Стокгольма (без даты), а потому должен начать с себя.

Это правда, что мое состояние, начиная с осени, не было удовлетворительным. Я очень страдаю от сильного кашля, а потому совершенно не переношу ветра и холода. Кроме того, мной овладела апатия, безразличие, которое сделало меня неспособным к работе. Поэтому я три месяца почти ничем другим не занимался, кроме корректуры. Только последние несколько недель я вновь чувствую желание работать, но вот новая неприятность — опухоль ног, которая не только болезненна, но и требует лежания. Это тем более неприятно, что стоит прекрасная погода, и пребывание на свежем воздухе, наверное, имело бы на меня благотворное влияние. Но что поделаешь, нужно терпеливо переносить недомогания, которые приходят с возрастом. Но довольно о себе.

Итак, Ты перешла Рубикон. Я не думал, что Ты решишься на это этой же зимой, тем более, что Тебе предстояло, несомненно, кое-что сделать в Петербурге и Москве. Важно, что Тебе сразу с твоими первыми лекциями, я не хочу сказать посчастливилось, но что Ты создала надежную основу для Твоей будущей работы. То, что о Тебе предварительно так много говорили и продолжают говорить, нехорошо, это свойственно шведам. Этого не лишен даже наш добрый Миттаг-Леффлер. Ты мне пишешь о мелкобуржуазных обычаях в Стокгольме. Это мне хорошо понятно, так как я с ними сам имел возможность ознакомиться. Если бы у меня не было ничего более важного сообщить Тебе, я мог бы Тебе

рассказать несколько забавных историй об этом, в благодарность за превосходную историю Миттаг-Леффлера о мешках с картофелем, над которой мы много смеялись и конец которой Ты еще должна будешь мне сообщить.

То, что Ты хочешь начать с лекции о дифференциальных уравнениях в частных производных, я одобряю по той причине, что Ты для этого можешь взять за основу свою диссертацию. Однако Тебе будет не легко объяснить слушателям настоящую цель Твоих исследований, если они не знакомы с основами теории функций в моем истолковании. Речь идет о том, чтобы показать, как посредством алгебраических дифференциальных уравнений в частных производных определять аналитические функции (аналитические образы), причем прежде всего должно стать ясным, что эту задачу можно считать решенной, если удастся вывести элементы для каждой определяющей функции. Я думаю, однако, что это Тебе не удастся, если Ты предварительно не остановишься на аналогичных исследованиях обыкновенных дифференциальных уравнений, результаты которых более понятны и могут привести ко многим интересным выводам.

Я полагаю, г. М[иттаг]-Леффлер с этим также согласится и не отсоветует Тебе этого, так как он сам намерен читать об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Далее мне кажется важным, чтобы Ты остановилась также на фактическом интегрировании некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. О многочисленных работах Эйлера, Лагранжа, Монжа, Коши и, в частности, о работах Пфаффа и Якоби, в которых интегрирование дифференциального уравнения в частных производных сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно лишь упомянуть, а в крайнем случае рассмотреть на примере линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Но я бы посоветовал Тебе подробнее заняться некоторыми дифференциальными уравнениями в частных производных из области математической физики, несмотря на то, что их интегрирование едва ли имеет что-либо общее с первой частью Твоего курса. Ты найдешь примеры в курсах лекций Римана и Дирихле. Большой интерес представляет уравнение $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$. Если предположить, что при $t = 0$ задано $\varphi(t, x)$, то $f(x)$ может быть совершенно произвольной, только интегрируемой функцией, и тогда при каждом положительном значении x, $\varphi(t, x)$ будет аналитической функцией x, но ее нельзя будет определить при отрицательных значениях t, причем следует напомнить об особенностях таких дифференциальных уравнений в частных производных, на которые Ты указывала в своей диссер-

тации. Большое различие в характере обоих, внешне столь близких дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

очень удивительно и поучительно.

Если ты одновременно захочешь включить что-либо из того, что Ты называешь моим методом интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, то это Тебе вполне удастся, если Ты ограничишься простыми случаями, в которых непосредственно применимы мои формулы в известной Тебе разработке. Кроме того, большой интерес представляет и строгое интегрирование, например, таких дифференциальных уравнений, которые относятся к колебаниям эфира в изоформной среде. Приводить что-либо из Твоих последних исследований я бы не советовал, так как Ты и теперь встретила бы большие трудности при изложении.

Что касается разработки этих исследований, то извини, дорогой друг, я на них сегодня останавливаться не буду, так как мне тяжело писать из-за неудобного положения. Но я к этому еще вернусь и не хочу более задерживать отправление этого письма.

Прошу, передай дружеский привет г. Миттаг-Леффлеру и расскажи ему о том, как у меня идут дела с осени, вследствие чего я ему долго не писал. Мой молодой коллега Хеттнер пошлет ему через несколько дней мою только что напечатанную работу об определении q как функции k^2 в нескольких экземплярах. Один из них предназначен для Тебя.

Летом я предполагаю прочитать лекцию о вариационном исчислении. Тебе будет интересно узнать, что Фукс к пасхе будет ординарным профессором нашего университета. Тогда мы будем иметь двух нормальных и двух нетрудоспособных ординарных. Кронекер, который вначале, как Тебе известно, был вне себя от моей «диссертации», теперь стал очень любезным по отношению ко мне, точно так же и совет министерства, который вначале возражал против моего ходатайства об отпуске. Всегда хорошо не давать вмешиваться другим в свои решения.

Сердечный привет, дорогой друг, желаю от всего сердца самого хорошего в новом году — не восхищений со стороны стокгольмских журналистов, но удовлетворения, которое обеспечивает серьезное стремление и успешную работу человека. Желаю счастья.

Твой верный друг К. В.

69. Кларенс 15.1.84.

Мой дорогой друг!

Выполняя Твое желание, тотчас же отвечаю на только что полученное Твое письмо от 10 с. м., правда, кратко, так как у меня из-за сильного насморка сумбур в голове.

Я думаю, Ты можешь принять предложение Эрмита, но я хотел бы, чтобы Твой реферат был бы несколько более подробным. Читателю ведь действительно будет не легко получить ясное представление о том, что Ты, в сущности, сделала. Впрочем, если Эрмит этим удовлетворился, то, по-видимому, будут удовлетворены и другие читатели Comptes rendus. Возможно, это хорошо, и предварительное опубликование полученных Тобой результатов в таком кратком изложении не слишком помешает более подробному освещению вопроса.

Относительно последнего я в ближайшем будущем сделаю некоторые предложения.

В остальном, после того как я прочитал письмо Эрмита, я считаю, было бы более приятным, если бы Ты сама ему написала и поблагодарила за его дружеское предложение.

Государственная тайна, которую Ты разгласила, сообщив мне о письме Эрмита, не нарушит моего сна. Возможно, это отчасти объясняется или, вернее говоря, является результатом сдержанной и холодной благодарности с моей стороны за награждение меня $1^1/_2$ года тому назад рыцарским крестом Почетного легиона. Это было сделано мной не преднамеренно, но этого можно было ожидать. Если этой чести я удостоен за свою ученицу, то я с этим согласен, но тогда друг Кр[онекер] должен был бы остаться за бортом. Я же очень желаю ему этой награды, это первая награда, которую он получит, как говорят, «на шею». Но то, что Эрмит называет его Твоим знаменитым учителем, вызывает с моей стороны ревность и требовало бы по существу внесения фактической поправки.

Все остальное, о чем я хотел бы сообщить Тебе, я оставлю до следующего письма. Писал ли я Тебе, что Фукс с пасхи будет в нашем университете? Я очень радуюсь этому.

Твое длинное письмо к моим сестрам, которые Тебя дружески приветствуют, затерялось, вероятно, еще в России. Мы с 25 октября здесь и с самого начала очень аккуратно получаем все письма. (Вилла Пьерье и Дюбоше — одно и то же.)

Пожалуйста, возмести чем-нибудь потерю, по крайней мере аутентичным сообщением об окончательной судьбе мешков с картофелем.

С дружеским приветом
и наилучшим пожеланием Миттаг-Леффлеру.
Твой преданный Вейерштрасс

70. Кларенс 27 февр[аля] 1884.

Мой дорогой друг!

Вчера я получил первое письмо от моей дорогой ученицы, которое она написала мне в качестве «приват-доцента» уже после того, как я узнал от моих сестер и из одной немецкой газеты, что она приступила к своей деятельности с 1 февраля, имея около 20 слушателей. От всего сердца и от всей души желаю Тебе счастья в том, чтобы Ты после первого же тяжелого шага заняла прочное, удовлетворяющее Тебя положение в жизни, на которое Ты отважилась после долгих колебаний. Я счастлив по поводу того, о чем узнал от Миттаг-Леффлера, а еще больше из Твоего письма моим сестрам, в котором Ты пишешь о своих первых лекциях. Я убежден, что Тебе удастся, благодаря Твоей энергии и Твоему энтузиазму, преодолеть неизбежные трудности, с которыми Ты встретишься в первом семестре, и достигнуть намеченной цели. Я опасаюсь лишь одного, что напряженная работа причинит вред Твоему здоровью — по крайней мере воздерживайся читать два часа подряд — это при длительной практике причинит вред всякому, кто не удовлетворяется постоянным считыванием того, что раз и навсегда записано у него в тетрадке. Ограничивайся, по крайней мере в первых семестрах, *одной* лекцией в каждом полугодии, чтобы Ты могла основательно подготовиться к ней и, что особенно важно, чтобы у Тебя оставалось время для собственных работ.

Миттаг-Леффлер, по-видимому, надеется, что уже в ближайшем будущем можно будет Тебе получить постоянное место в новом университете в Стокгольме, как об этом заранее, в благоприятной форме, уже сообщалось в газетах. Я желаю этому университету скоро получить еще несколько факультетов, чтобы он по праву мог носить название universitas litterarum. Я думаю, что Миттаг-Леффлер подошел к этому как сангвиник. У нас было бы невозможно пригласить приват-доцента на должность профессора до того, как он прочтет лекции в течение нескольких семестров. Но Миттаг-Леффлер, вероятно, знает, каковы там условия. Так как он при своем ходатайстве обращался к моей помощи, которую я ему охотно предоставил, я был бы бесконечно рад, если бы смог что-либо сделать для того, чтобы Ты возможно скорее достигла намеченной цели. При этом мной руководит не желание удовлетворить *Твоему* честолюбию, а скорее мое давнишнее желание, чтобы у Тебя наконец было прочное положение, и чтобы Твое почетное положение не только давало Тебе реальную свободу, но и обязывало Тебя полностью отдаться служению науке, что, вероятно, будет вполне совместимо с воспитанием маленькой Сони. Сомнения, которые у меня были ранее в отношении Твоих планов, исчезли с тех пор, как Ты полностью предоставлена сама себе.

Не знаю, сказал ли Тебе Миттаг-Леффлер, что я о Тебе писал ему, я бы не хотел этого. Правда, я не боюсь, что Ты меня будешь упрекать в том, в чем меня уже недавно упрекнули по поводу отзыва об одном молодом математике. Я его *хвалил*, но не восхвалял, но признаюсь Тебе, мне было несколько неловко давать отзыв о моем друге как о своей ученице, которую я рекомендую министру для предоставления должности.

Миттаг-Леффлер покажет Тебе то место письма, которое касается меня, вместе с тем отчасти будет ответом на Твое последнее письмо. О математике на этот раз Тебе ничего не пишу. В следующий раз напишу о работе над λ. Она будет скоро готова к печати, но у Тебя едва ли будет время [ознакомиться с ней] до следующих каникул! Письмо от моих сестер Ты, наверное, уже получила, они шлют Тебе сердечный привет. Мы пробудем здесь, вероятно, до 20 апреля.

Всего хорошего, желаю удачи!
Твой искренне преданный
Вейерштрасс

71.

Вильгельмсхёэ близ Касселя
Отель Шовбардт, 12 сент[ября] [18]84

Мой дорогой друг, очень сокрушаюсь под тяжестью тех упреков, которые Ты мне делаешь в форме просьб в письме, полученном мной вчера (без указания места и даты). Правда, я надеюсь, что Ты будешь судить более мягко, если узнаешь, что я вот уже 6 недель как плохо себя чувствую и не могу ничем заниматься, даже не делаю корректур. Я не страдаю какой-либо определенной болезнью, пью и сплю как должно быть, но мной овладела ужасная усталость, физическая и душевная, которая делает меня абсолютно апатичным и внушает мне отвращение ко всякой умственной и письменной работе. Короче говоря, я страдаю тем, что врачи называют *усталостью мозга*. Пока я читал лекции, я замечал ее в меньшей степени и объяснял нежелание работать, которое я ощущаю уже в течение некоторого времени, физическим утомлением от чтения лекций. И только в дороге я почувствовал по-настоящему, как я был утомлен и как сильно я нуждался и еще нуждаюсь в отдыхе. Но это состояние пройдет, в последние дни уже наступило значительное улучшение. Я уже написал Реймеру, чтобы он прислал мне для корректуры все напечатанное в мое отсутствие. Надеюсь, что я к началу будущего семестра буду опять отдохнувшим. Постараюсь еще до этого удовлетворить Твою «просьбу»

или вернее Твое требование. Хочу сделать Тебе следующее предложение. Пусть начнут печатать Твою работу, а мою вслед за Твоей. Тогда Тебе придется лишь несколько изменить то место, где Ты на нее ссылаешься. Между тем Ты можешь перевести мою работу на французский, если Ты это еще не сделала, я рассчитываю, что смогу через 8 дней выслать Тебе вводную часть, которая будет не более одной страницы, а также дополнение.

Что касается фрейлейн Чельберг, то я охотно готов написать по поводу нее Фробениусу и дать ей самую лучшую рекомендацию. Хотя он не профессор университета, но он все же сможет сообщить фрейлейн Ч. о ходе дел. Может ли фрейлейн Ч. получить поддержку со стороны семьи Ф., мне неизвестно. К сожалению, я никого не знаю из профессоров Цюрихского университета; тех, кого я знал прежде, уже нет там. Хочу заметить еще следующее. Перед отъездом мне представился случай поговорить с моим коллегой Вагенером о национально-экономических исследованиях в Швейцарии и во Франции. Он сказал мне, что [нет текста] и Женева пользуются хорошей известностью и что там имеются хорошие педагоги. То же самое можно сказать о Париже, но что лекции, которые там читаются, рассчитаны на уже более подготовленных слушателей.

Как Тебе известно, мы с Элизой сперва поехали в Аугсбург, где встретились с Кларой, которая хорошо отдохнула. В течение нескольких недель там была наша штаб-квартира, откуда мы совершали экскурсии в эвианские Альпы. Все летние курорты настолько переполнены, так как в этом году из-за холеры никто не поехал в Италию и лишь немногие поехали в Швейцарию, что нам негде было остановиться. В течение трех недель мы здесь, где находится один из прекраснейших парков Европы, в котором расположен замок, где некогда бывал «всегда веселый» король Жером и где находился в заключении Наполеон III после Седана. Вот уже 8 дней здесь находится семейство Кирхгоф (он, она и Ева) и, конечно, Ханземанн (последний получил письмо от Тебя одновременно со мной, и я позавидовал ему, потому что о своих личных делах Ты написала ему более откровенно, чем мне).

Сердечный привет Тебе от моих сестер; они надеются вскоре получить несколько строк от Тебя. (Письма, адресованные в Берлин, обязательно до нас доходят).

Как долго мы еще пробудем здесь, пока не знаю. Я не начну свои лекции до ноября. На этом на сей раз кончаю. Сердечный привет Тебе от Твоего верного друга В.

Как поживает Миттаг-Леффлер? Сердечный привет ему от меня.

72. Вильгельмсхёэ (близ Касселя)
17.10.84

Мой дорогой друг, отвечаю на Твое только вчера вечером полученное мной письмо. Лежу в постели, а потому пишу карандашом.

С тех пор как я покинул Берлин, я, в сущности, все время чувствую некоторое недомогание, которое сказывается в том, что я апатичен и не имею желания работать. Когда я получил Твою телеграмму, мне помешал ответить Тебе, кроме всего, ревматизм правой руки, не дававший мне возможности писать. Но так как Ты подчеркнула, что отсутствие ответа Ты будешь рассматривать как утвердительный ответ на Твой вопрос, я предпочел по возможности скорей написать Тебе подробное письмо, дабы молча исполнить пока явное Твое пожелание. Но вскоре у меня обнаружилось более серьезное заболевание, а именно сильное расширение вен правой ноги, вызывающее сильные боли.

Мне пришлось согласиться на помещение ноги в резиновый бандаж и на неподвижное лежание в постели, при массаже два раза в день. Это значительно ослабило боль. При спокойном лежании я почти ее не ощущаю, но наступать на ногу и ходить я еще не могу. Врач подает мне надежду, что я смогу на следующей неделе поехать, но рекомендует соблюдать самые большие предосторожности.

В этих условиях, дорогой друг, Ты простишь мне, если я Тебе сегодня сообщу лишь следующее.

Своей заметкой «К интегрированию линейных дифференциальных уравнений в частных производных», которую Ты расцениваешь положительно, я еще раз подтверждаю свое согласие со всем.

Хочу лишь, чтобы в конце общих формул в качестве примера было приведено интегрирование уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = A\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \ldots$$

с указанием, что результат, преобразованный в двойной интеграл, должен соответствовать приведенному Коши (Journ. de l'école Polyt., Cahier № 20, стр. 297—309), а в частном случае, когда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\,\Delta\varphi,$$

результату, приведенному Пуассоном (Мем. Академии Наук).

В конце формул (4—12) первого § целесообразно сделать следующее замечание.

При выводе этих формул, который можно продолжать произвольно долго, кроме предположений относительно функций f, φ следует предположить, что функции u', v', w' и их производные, поскольку они встречаются в формулах, постоянно изменяются

в области σ. Эти формулы, однако, в некоторых случаях могут применяться также, если предположения, касающиеся функций φ, u', v', w' будут выполняться не для всех точек.

Если, напр., образовать для различных функций φ, которые можно обозначить через φ_1, φ_2, но при одной и той же функции f выражения

$$F_1 = D_t \int \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$
$$F_2 = \ldots . \qquad (t_0 \ldots t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и если T — состоящее из частных производных $F_1, F_2, \ldots$ по x, y, z линейное с постоянными коэффициентами выражение, то, пользуясь выведенными формулами, его можно будет представить следующим образом:

$$T = D_t \int \Phi_1(u, v, w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega + \qquad (t_0 \ldots t)$$
$$+ D_t^2 \int \Phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega + \ldots$$

где Φ_1, Φ_2 — выражения, составленные из функций u', v', w', φ_1, φ_2 и их производных таким образом, что даже в случаях, когда последние изменяются не непрерывно, Φ_1, Φ_2, ... могут быть функциями u, v, w, которые соответствуют изложенному выше в отношении функции φ. Если это будет так, то допустимо данное представление T.

В своей работе Ты тогда должна будешь доказать правильность этого замечания для частного случая, о котором идет речь.

Формулу, приведенную в конце § 1 $A \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + \ldots$, лучше поместить в начале § 2.

Тогда это имело бы следующий вид.

Из формул (7,12) предыдущего § получаем:

$$A \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + \ldots$$

до конца § 1.

Тогда это примет такой вид.

Пусть поверхность σ будет эллипсоидом и т. д. Тогда приведенное выше нужно было бы поместить в конце § 2.

Все остальное можно не давать.

В заключение прошу Тебя, если у Тебя будут какие-либо сомнения при редактировании моей статьи, то поступай по своему

усмотрению. Твоей главной задачей должно быть быстрое окончание Твоей работы. Я твердо уверен в этом и надеюсь вскоре услышать от Тебя об этом и о многом другом. В заключение шлю самые сердечные приветы от меня и моих сестер, они обе сейчас у меня.

Твой верный друг В[ейерштрасс]

73. Берлин, 24 марта 1885

Мой дорогой друг,

Наконец я имею возможность спокойно ответить на Твое последнее милое письмо, которое, как обычно, не датировано, что, впрочем, очень удобно для ленивого корреспондента, каким являюсь я по единодушному мнению Европы. После Твоего отъезда мне пришлось еще две недели сидеть в комнате, а затем, после того как я опять начал читать лекции, сильно напрягаться, чтобы доводить их до конца. 15-го с. м. я был единственным педагогом во всем здании университета, но у меня все же было около 50 слушателей. Я настолько устал, что целую неделю посвятил отдыху, насколько мне разрешали многочисленные визиты, которые регулярно приходится принимать в Берлине в дни пасхальных каникул.

Если бы погода была лучше, я предпринял бы небольшую поездку. Но идет то снег, то град, при холодном восточном ветре, которого я совершенно не переношу.

Меня очень обрадовало, когда я узнал от Тебя, что состояние Твоего здоровья хорошее, я за него опасался. Поездка зимой после напряженной работы и переживаний, которые были у Тебя во время пребывания здесь, могли повлиять на Твое здоровье.

От души поздравляю Тебя с большим числом слушателей. Конечно, Ты узнаешь на опыте, что многие из них обладают доброй волей, но слабыми возможностями, так что даже относительно наиболее упорных нельзя сказать с уверенностью, удерживает ли их интерес к делу или верность долгу. Если бы можно было объединить вокруг себя кружок не более чем из двенадцати талантливых и хорошо подготовленных слушателей, одушевленных преданностью науке, тогда академическое преподавание было бы наиболее ценным и интересным занятием в мире.

Но к этому надо добавить еще нечто, именно то, чего мне не хватает все больше и больше,— дружественное сотрудничество с коллегами, основанное на согласии в принципах и искреннем взаимном признании. В нашем университете это в течение ряда лет нарушено, причины мне не вполне ясны. Одно лишь могу с уверенностью сказать, не я этому причиной.

Мой друг Кронекер, с которым у нас прежде было единодушие по важнейшим вопросам, а также и Фукс противодействуют мне: один сознательно и намеренно, другой — отчасти покоряясь авторитету первого, а отчасти недостаточно представляя себе значимость вопроса, о котором идет речь. Нередко бывает так, что я на лекции доказываю какое-нибудь положение, которое на другой лекции признается неправильным и не выдерживающим критики. В то время как я утверждаю, что так называемое иррациональное число имеет такое же реальное существование, как и что-либо иное в области мышления, Кронекер принимает теперь за аксиому, что только целые числа между собой связаны уравнениями. Тогда как я стремлюсь выяснить, почему ошибочно мнение Якоби, что абсурдно рассматривать x как функцию u, если между обеими величинами принято уравнение:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}},$$

и значения u, относящиеся к одному и тому же значению x, образуют *счетное множество*, относительно которого Кантор, как я убедился, бесспорно доказал, что существует бесконечное число значений, которые не только *не* содержатся в нем, но и образуют множество большей мощности, этим я мотивирую, что в аналитическом построении следует делать различие между точками, *относящимися* к построению, и теми, которые примыкают к нему как граничные. В то время как я стараюсь пояснить подобные вещи начинающим студентам, Фукс помещает в протоколах заседаний Академии статью, которая должна доказать существование линейных дифференциальных уравнений, не определяющих «аналитические» функции, не замечая, что если бы он был прав, то он этим наложил бы штамп абсурдности на преобладающее большинство тех функций, исследование свойств которых он сам производил с таким успехом.

Ты согласишься со мной, милый друг, что меня не очень ободряет, если я вижу, что даже у таких способных людей, как Фукс, все старания оказались напрасными. Еще хуже, однако, когда Кронекер использует весь свой авторитет, чтобы доказать, что *все* те, кто до сих пор работал по вопросу обоснования теории функций, являются грешниками перед Господом. Если такой чудак, как Кристоффель, говорит, что через 20—30 лет современная теория функций будет похоронена и весь анализ растворится в теории формул, то в ответ можно только пожать плечами.[1] Но если Кронекер *буквально* заявляет: «Если у меня останется достаточно лет жизни и сил, то я сам покажу математическому миру, что не только геометрия, но и арифметика может показать анализу пути

[1] Ср. замечание Клейна.

и безусловно наиболее точные. Если это мне не удастся, то это сделают те, кто придет после меня (Хензель, Мольк?), и они осознают неправильность *всех* тех заключений, на основе которых работает теперь *так называемый* анализ», то подобные высказывания со стороны человека, высокие способности которого к математическому исследованию и выдающиеся достижения искренне и радостно признаны не только мной, но и всеми его коллегами, не только оскорбляет тех, кто обвиняется в ошибочном признании и должен отречься от того, что являлось содержанием их упорной работы, мысли и усилий, но составляет и непосредственный призыв к более молодому поколению бросить своих прежних вождей и примкнуть к нему, как апостолу нового учения, которое правда еще *должно быть* доказано. Очень печально и горько, что вполне законное самолюбие человека, слава которого бесспорна, доводит его до высказываний, при которых он даже не чувствует, насколько они оскорбительны для других.

Но довольно об этих вещах, которых я коснулся, чтобы объяснить Тебе, по каким причинам я в будущем более не буду находить такую же радость в моей педагогической деятельности, как раньше, даже если мое здоровье позволит продолжать ее еще несколько лет. Но об этом никому ничего не говори, так как я не хочу, чтобы другие, знающие меня не так хорошо, как Ты, увидели в сказанном выше выражение обидчивости, которая в действительности мне чужда. Никто лучше меня не знает, насколько я далек от той светлой и возвышенной цели, которую поставил перед собой еще в молодости, но никто не может отнять у меня сознание того, что мои стремления и моя деятельность были не совсем напрасными и что путь, которым я шел к истине, не был ложным.

Что касается дела госпожи Эдгрен, я должен заметить, что Ты ошибаешься, если Ты из моих слов сделала вывод, что г. Шерер принимает участие в редактировании Обозрения.

Он является внештатным сотрудником Обозрения, который иногда печатает свои доклады, прочитанные на собраниях и в обществах, получая высокий гонорар, и поэтому едва ли будет склонен сообщать неприятные вещи редактору — Роденбергу.

Госпожа Эдгрен, которая ведала только «рассылкой» журнала, якобы переслала редактору и шефу всю корреспонденцию, заметив, что она считает себя обязанной довести до сведения г. Роденберга о случившемся, так как считала, что ему об этом неизвестно. Это неслыханное дело, и было бы совершенно непростительным, если бы Роденберг лично принимал в этом участие, но я не могу этому поверить, так как он пользуется репутацией порядочного человека.

Сердечный привет Тебе от моих сестер. Они обе здесь и просят Тебя вскоре написать им. Г. Ханземан, который был у меня сейчас, также шлет тебе привет. Надеюсь, что Ты скоро ответишь мне, и тем самым дашь мне возможность написать Тебе во время пасхальных каникул письмо математического содержания. Передай искренний и сердечный привет от меня Миттаг-Леффлеру. Как обстоят дела с вопросами премии?[1]

Шлю Тебе наилучшие пожелания и приветы.

Твой преданный друг К. В.

[73$_1$] 92.

Моя милая Соня!

Только что я получил по делу о премиях еще одно письмо от Фукса, о котором сообщаю Тебе. Если будет выбран рекомендованный там путь, то, может быть, было бы целесообразней, чтобы Ты сперва полностью закончила работу о кольце [2], потому что о содержании ее проф. Вебер

⟨нет конца⟩

74. Берлин, 16.5.85

Мой дорогой друг!

Твое последнее письмо содержит немного хороших сообщений. Очень плохо, что Миттаг-Леффлер в первые годы своей деятельности в Стокгольме так много страдает от физических недугов. Я хочу сказать не о том сочувствии, которое высказывают этому прекрасному человеку все, кто его знает, но о том, что это мешает расцвету новой высшей школы, интересы которой он главным образом отстаивает. От г. Эннестрема, посетившего меня несколько дней тому назад, я узнал, что и Ты была нездорова несколько недель и не могла читать лекций. Почему Ты об этом умолчала? Вообще, должен Тебе сказать, Ты очень скупо сообщаешь о себе в своих письмах мне и моим сестрам, но Ты ведь знаешь, какое участие мы всегда принимаем в том, что касается Тебя.

Эннестрем также считает состояние Хольмгрена безнадежным. Поэтому вскоре встанет вопрос о том, чтобы найти достойного его продолжателя. Очень желательно, чтобы такой человек нашелся в Швеции (в Норвегии или в Финляндии). О французе нечего и думать, так как он не сможет изучить шведский язык. Для немца тоже было бы тяжело в короткий срок приобрести необходимую

[1] О премии по математике имени короля Оскара II.

[2] Речь идет о подготовке к печати сделанной ранее работы С. В. Ковалевской «Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о кольце Сатурна».—*Ред.*

беглость в языке. Все же его можно было бы оставить на некоторое время при университете — насколько мне известно, даже Гюльден свою первую лекцию читал на немецком языке, — но в политехническом училище он должен был бы с самого начала читать лекции на шведском языке. Но даже если пренебречь этим препятствием, среди нашей молодежи в данное время очень мало людей, которые были бы во всех *отношениях* подготовлены для такой роли. В политехникуме, насколько мне известно, Хольмгрен читает теоретическую механику. В университете можно было бы вместо этого читать в большем объеме математическую физику. Месяц тому назад я мог бы рекомендовать в качестве хорошего физика-математика приват-доцента Герца в Киле (бывшего ассистента Гельмгольца). Он, однако, приглашен в политехникум в Карлсруэ, где имеет прекрасный физический кабинет. Поэтому я не думаю, чтобы он был склонен, даже при весьма благоприятных внешних условиях, поехать в Стокгольм, так как он занимается также экспериментальными исследованиями. Все же прошу Тебя, когда Ты будешь писать Миттаг-Леффлеру, указать на него, может быть, он решит задержаться на обратном пути на один день в Карлсруэ, чтобы лично познакомиться с ним. Одна из его работ опубликована в 42 томе нашего журнала, а именно «О касании твердых упругих тел». Ряд других его работ — в других физических журналах.

Ты хотела прислать мне одну работу, касающуюся обобщения задачи Борхардта, как обстоят дела в этом отношении?

Когда будешь отвечать мне, пожалуйста, напиши адрес Миттаг-Леффлера. Как обстоит дело с нашей премией? Здесь говорят, что она уже присуждена. Но, возможно, это основано на неопределенных слухах.

Я радуюсь, что мое письмо, касающееся Acta, возымело действие. Я рад еще больше от того, что все, что я написал о журнале и его редакции в первой части моего письма, исходило действительно от самого сердца, но высказать свое мнение о г-не Ш. мне было совсем не легко.

Друг К[ронекер] очень обижен, что с ним не посоветовались. Я об этом сужу потому, что со мной он абсолютно не говорит об этом, хотя знает обо всем от Фукса.

После Твоего отъезда, представь себе, я стал заниматься теорией функций с *действительными* аргументами. При этом я пришел к некоторым интересным результатам, которые частично опубликую в следующем месяце, напр.:

1. Определение Римана, $\int_a^b f(x)\,dx$,

которое считалось наиболее общим, является *недостаточным*. Получается следующее.

Пусть $f(x)$ будет однозначно определенной функцией действительной переменной в интервале

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

При этом допускается, что между a, b может иметься бесконечно много значений, для которых $f(x)$ совсем не определена, а также, что возможно счетное или несчетное количество точек разрыва непрерывности.

Предполагается лишь, что в каждой, сколь угодно малой части интервала $a \ldots b$ имеются точки, в которых функция определена и что значение функции нигде не превышает определенного предела. Тогда всегда можно дать определение $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$, при котором все свойства интеграла, вытекающие из определения Коши и Римана, будут сохраняться. Это можно вывести очень просто из введенного Кантором в 4-м томе Acta понятия *меры* произвольного множества точек. Я пришел к этому первоначально посредством других рассуждений.

2. Если в интервале $a \ldots b$, $f(x)$ всюду непрерывна и если принять $\Pi = \frac{2\pi}{b-a}$ и понимать под $f_\nu(x)$ ряд Фурье с *конечным* числом членов:

$$f_\nu(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} (A'_\lambda \cos \lambda k x + B_\lambda \sin \lambda k x),$$

где n целое число, которое возрастает вместе с ν, тогда $f(x)$ всегда можно представить в следующей форме:

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x),$$

причем этот ряд будет сходиться во всем интервале $a, \ldots b$ *абсолютно* и *равномерно*. Если разложить в ряд выделенную линейную функцию от x и затем свести все члены предыдущего ряда, содержащего то же кратное $k\lambda$, в один ряд, то получим обыкновенный ряд Фурье, *который, однако, не всегда будет сходиться.*

3. Если $f(x)$ будет неопределенно или непостоянно в произвольном (а также бесконечно большом) числе точек, то приведенный выше ряд будет представлять собой функцию во всех *точках непрерывности* и будет сходиться, *абсолютно* и *равномерно*, на

каждом отрезке, если будут иметься *отрезки* точек непрерывности. В точке разрыва непрерывности сумма n первых членов колеблется, если n бесконечно возрастает, между конечными границами.

4. Каждая функция $f(x)$, обладающая указанными свойствами, получается из функции $f(x, k)$, которая относительно x является *аналитической* (целой, трансцендентной) функцией и, кроме того, содержит переменный (положительный) параметр, так что в каждой точке непрерывности функции $f(x)$

$$f(x) = \operatorname{Lim}_{k=0} f(x, k),$$

в то время как, если x является точкой разрыва или неопределенности, $f(x, k)$ колеблется в тех же пределах, что и

$$^1/_2 [f(x + k) + f(x - k)]$$

при бесконечной малости k.

Эти положения, возможно, и похожи на что-то, но они весьма *тривиальны*.

Сердечный привет от моих сестер и меня.

Искренне Тебе преданный Вейерштрасс

Как я узнал, Ты тоже относишься к тем заговорщикам, которые хотят мне напомнить 31 октября, что я уже отношусь к тем, которые должны быть увековечены в камне. Подчиняюсь своей судьбе, мне кажется бюст будет хорошим.

Прошу Тебя еще дополнительно сообщить мне, какие у Тебя планы на каникулы. Что касается меня, то в этом году я не имею желания путешествовать. Те шесть недель, которые я в прошлом году вынужден был провести в Вильгельмсхёэ, большей частью лежа в постели, отбили у меня это желание. Кроме того, я все еще не могу ходить, так как расширение вен правой ноги не проходит, несмотря на принятые меры. Если врач не будет настаивать, я останусь дома. Не знаю, буду ли я читать лекции будущей зимой, нынче, летом, в этом отношении все шло хорошо. Я читаю лекции по эллипт[ическим] функциям примерно для 100 слушателей.

Т[вой] В.

75. Берлин, 22.9.85.

Мой дорогой друг!

Это письмо придет одновременно с *Миттаг-Леффлером*, который, к моей величайшей радости, на обратном пути будет в Берлине. Я опасаюсь, что Ты будешь на меня сердиться за то, что я задержал ответ на Твое последнее дружеское письмо, в этом, однако, больше виноваты обстоятельства, чем я. Хотя я имею

репутацию человека, ленивого в отношении написания писем, но я не так ленив, как думают, в особенности, когда речь идет о важных вещах. Обстоятельства сложились так, что я не мог воодушевлять Тебя на поездку в Берлин как бы я ни желал Тебя вновь увидеть, чтобы поговорить о многом, что у меня на сердце. Короче говоря, я пришел к заключению уехать из Берлина и переселиться в Швейцарию. Я бы, вероятно, уже уехал, если бы не некоторые особые обстоятельства, которые меня здесь удержали. Я не мог предполагать, что эти дела так затянутся, и опасался, что Ты приедешь и только увидишь, как я и сестры с большими муками занимаемся упаковкой вещей.

Я утешаюсь тем, что для Тебя в Твоей поездке сто с лишним миль едва ли будут иметь значение и что мы скоро проведем вместе несколько недель, когда нам не будут мешать.

В конце июля я уже изложил министру свою просьбу о разрешении мне отпуска на неопределенное время, с сохранением всех прав, но для оформления этого мне еще нужно подать письменное заявление. Это, однако, мной еще не сделано до сих пор ввиду того, что министр был в отъезде и я не хотел передавать это дело в руки человека, которого Ты также знаешь и на которого нельзя положиться. Поэтому возможно, что мне придется пробыть здесь еще весь октябрь.

Причины, заставившие меня, наконец, решиться на отъезд, Ты можешь себе представить. Я говорил о них с Миттаг-Леффлером. Я вообще обращаю на него Твое внимание. Мы обсуждали с ним все это вчера в течение нескольких часов. На «грязной» истории, в которой друг К[ронекер] сыграл такую нечестную, частью смешную, частью достойную презрения роль, я останавливаться не буду. Как Тебе нравится, что после того, как он так возмущался перед Миттаг-Леффлером по поводу 4-го вопроса (а он ведь наверняка знал, кто его поставил) и явно отказал ему, как и прочим, вправе иметь мнение по алгебраическим вопросам, он тотчас же поехал к Эрмиту, по-видимому, из боязни, что тот сможет ему когда-либо навредить, если он с ним разойдется. Так как Эрмит встретил его учтиво, он решил, что он полностью привлек его на свою сторону. Но довольно об этом.

Я радуюсь, что Ты берешь свою малышку к себе, забота о ней благоприятно скажется на Тебе. А то, что около Тебя в это время будет фрейлейн Лермонтова — просто превосходно. Только бы плохая погода не испортила Тебе зиму.

Привет Тебе от моих сестер, они ждут от Тебя вестей. Я им, впрочем, ничего не сказал, что Ты бы приехала сюда на 14 дней, если бы я уговорил Тебя. Они не простили бы мне, что я этого не сделал.

N. B. Хочу Тебе еще сказать следующее, хотя я об этом подробно говорил с М.- Л. В программах конкурса имеется *одно* слабое место, которое я, как человек простодушный (о чем я очень сожалею), упустил из виду и на которое, *несомненно*, будет направлена главная атака (которая подготавливается), а именно там сказано, что «работа, получившая премию, будет опубликована в *Acta*». Это противоречит обычному правилу. Почти всегда автору премированной работы предоставляется право решать, каким образом он хочет опубликовать работу. Из сказанного же следует, что объявление конкурса не преследовало другой цели, как сделать рекламу для Acta. Так как это предприятие, к сожалению, имеет уже достаточно (явных и тайных) противников, следует избегать всего того, что может показаться не вполне корректным.

Я поговорил с М.- Л. о том, каким образом можно было бы еще теперь устранить допущенную ошибку (именно так я должен это назвать). Следовало бы, очевидно, указать, что автор премированной работы сохраняет за собой право распорядиться ею по своему усмотрению. Если же он пожелает опубликовать ее в Acta Methematica, то редакция позаботится о том, чтобы она была напечатана незамедлительно.

Если еще удастся дополнительно быстро напечатать «пояснение» условий конкурса (что, однако, не может быть сделано без разрешения короля), то можно было бы заранее отбить такое нападение. Критику *содержания* можно ждать не боясь. То, что указывает Кр[онекер] против № 4, а в новом письме к М.- Л. также и против № 1, совершенно несправедливо и по существу компрометирует его. Теперь взгляд на автора [задачи] № 1 по сравнению с методом Дирихле вызывает усмешку, но он ведь точно знает, что сделал Дирихле, и поступил неправильно по отношению к науке в том отношении, что в течение 27 лет после смерти Дирихле скрывал от всех его лучшие произведения и даже своему другу Куммеру дал лишь небольшие заметки для его речи в память Дирихле, из которых пока никто ничего не мог извлечь. Он говорит, что знает об этом деле не больше того, что сказал в начале, но *это неправда*.

N. B. Две небольших статьи о функциях действительных аргументов Тебе привезет М.-Л. Будут еще две. В конце октября будет опубликована целая коллекция моих старых работ по теории функций. Я отваживаюсь выступить с ней перед публикой, хотя мы теперь знаем, что новое содержание современной теории функций является бессмыслицей. Сердечный привет, вскоре напишу Тебе еще.

Т[вой] В.

[76]77. 14 дек. 1885.

Мой дорогой друг!

Ты ярая софистка. Являясь моей ученицей особого рода, Ты не пожелала 31-го октября смешаться со «всей толпой», а предпочла дать о себе знать на неделю позднее. Пожалуй, Ты вправе называться «egregia» [1], но не лучше ли было бы приветствовать старого друга *раньше* всех? Во всяком случае не думай, что в возмездие за это я отвечаю на Твое поздравительное письмо, пришедшее после других, в последнюю очередь. Напротив — пусть Тебе будет стыдно — передо мной лежат около 25 писем, на которые я не могу ответить кратко. Одно из них получено от одного высокопоставленного г-на, который вместе с тем является одним из моих самых старых друзей. Ответив ему вчера, я тотчас же отвечаю Тебе. Это ли не благородный поступок? А теперь к делу.

Прежде всего должен Тебе откровенно признаться, что празднование моего 70-летнего юбилея, организованное моими старыми и молодыми слушателями, действительно явилось большой для меня радостью. Без официальной окраски — только министр культуры прислал мне полуофициальное поздравление — оно выразилось в не вполне свободную от преувеличения, ничем не омраченную демонстрацию чувств всех ее участников. Кроме моих здешних коллег, для передачи мне почетных подарков от имени Комитета лично присутствовали Кантор, Шварц, Линдеман, Киллинг, Томе, П. Дюбуа. Фукс произнес хорошо составленную речь, охраняемый боязливыми взорами своей жены, так что и женщина украшала празднество. Затем выступали ректор университета, декан и вице-канцлер ордена за заслуги. На этом закончилась официальная чать, и осталось только «целая толпа» поздравляющих.

Ты, вероятно, уже получила гипсовую копию бюста. Мне интересно узнать Твое мнение о нем. Моим сестрам он не слишком нравится. Тебе и Миттаг-Леффлеру будет прислана копия медали из позолоченной бронзы. Альбом для фотографий (свыше 500 штук) прекрасен, он нравится всем.

Издателям Acta я должен принести особую благодарность за их содержательный подарок. Фотография очень удачна, и переплет сделан с большим вкусом. Только в посвящении сказано слишком много и так же, как в надписи на медали, приглажено в не совсем доброжелательном смысле.

Вечером был обычный в таких случаях dîner, который дал бы богатый материал корреспонденту, «посвященному» [в курс дел] и обладающему юмором. Фукс, как мой первый слушатель, опять

---

[1] избранная (лат.).

должен был первым выступить с речью, что было для него нелегкой задачей. Но меня это сильно забавляло — в противоположность другим слушателям. Мне представлялось, как будто Фукс читал *второе* письмо Кронекера к Миттаг-Леффлеру — чего в действительности не было — и как каждая фраза его речи обращалась против одного высказывания К[ронекера]. Несомненно, все это было «философией неизвестного». Затем выступал Кр[онекер], который, как он утверждал, имел на это особое право. Он все же непонятный человек. Первоначально он сказал, что не может принять участие в официальном торжестве в связи с моим юбилеем (когда господа из комитета считали необходимым внести изменения в первоначальный проект бюста), так как это было бы обидным для Куммера, к 70-летию которого ничего подобного не устраивалось. Затем он уехал из Берлина, не простившись со мной, точно так же, как и его жена; из Страсбурга он мне написал чисто деловое письмо и не ответил на посланное ему в конце октября приглашение от комитета. А затем неожиданно появился 30-го октября в Берлине, тотчас же навестил меня, был чрезвычайно любезен, рассказал о своем посещении Эрмита. Однако он умолчал о причинах, побудивших его посетить последнего. Упомянул, что он в Вилларе, к великому сожалению, узнал, что Миттаг-Леффлер только что уехал оттуда и что он с ним в последнее время имел неприятную переписку, но что это все улеглось и т. п. О корне всех зол — конкурсе и Северной звезде 1-й степени — не было и речи. Во время ужина он меня бесконечно расхваливал, а о наших с ним отношениях говорил так, что со стороны они могли показаться самыми тесными (жена его, по-видимому, другого мнения, она единственная из знакомых моих сестер и жен моих коллег, которая по этому поводу не посетила нас. Когда я прощался с К[ронекером], я ее не видел, я ее вообще не видел с 1-го июля).

Мое ответное слово на обе речи было очень кратким, я был слишком утомлен. Затем последовал еще целый поток речей: блестяще говорил Шерер — декан философского факультета, с большим юмором говорил мой брат, доказывавший, как жалка его наука — филология по сравнению с математикой.

Под конец мы все пошли еще «к пиву», где я оставался до полуночи, а мой брат — до рассвета. Здесь состоялось торжественное примирение между П. Дюбуа и Шварцем — пусть бы оно было длительным. Кр[онекер] пригласил Шварца посетить его для «дружеского собеседования», но Ш[варц] отклонил это — оба они непримиримы.

Через два дня после этого была пирушка членов математического общества, причем молодые люди держали себя великолепно. Моему брату так понравилось это общество, что он оставался там

до 5 часов утра (все пожилые люди ушли), вместе со Шварцем, который здесь был на своем месте.

Итак, мой дорогой друг, теперь Ты имеешь точный отчет о «юбилее Вейерштрасса», на который Ты можешь претендовать как член комитета. Я хотел и мог бы прислать Тебе некоторые берлинские газеты. Ты бы посмеялась над легендами, связанными с моей личностью. Я должен еще сообщить Тебе, что поэтический тост за женщин был произнесен не моим братом, а *мной самим* [1] — я был спровоцирован Кипертом.

Вот уже несколько дней я нахожусь здесь с сестрами и с маленьким приемным сыном, о котором Тебе расскажет Миттаг-Леффлер, в хорошо Тебе известном отеле. Мы, однако, не останемся здесь, а опять переедем в какую-нибудь виллу. Я предполагаю остаться до весны на Женевском озере и основательно поработать. В Берлин, если вообще-то я вернусь, то не ранее конца октября. Ну, будь здорова, дорогой друг, передавай от меня наилучшие пожелания Миттаг-Леффлеру. Я скоро напишу и ему. Ответь мне поскорей. Мои сестры, хотя и шлют Тебе сердечный привет, но очень сердятся на Тебя за то, что Ты, по-видимому, их совсем забыла.

[77]76. [31.10.85]

«*Красота* есть тайна мира, что в искусстве вновь живет,
Изгони ее из жизни — с ней любовь навек умрет.
Вздрогнет все от отвращенья, ночь людей повергнет в страх
И с поэтов смертью сразу все погаснет в небесах» [2].

Так сказал поэт. Ученых же бог вещий одарил
Пониманьем духа мира и гармонии светил:
Истина есть солнце, светом озаряющее все,
Благо высшее познанья им приносит бытие.

Все прекрасное, что людям сердце может обновить,
Все высокое, что в думах — прах наносный удалить,
В душах благородных женщин сплетено в букет один —
То любви уста вещают нам с несказанных глубин.

---

[1] См. письмо [77] 76.

[2] Первая строфа стихотворения принадлежит поэту фон-Платтену, что сообщено Д. Я. Броуном. Остальные принадлежат К. Вейерштрассу. Перев. П. Я. Кочиной.

78. (Просьба обращать внимание на адрес)
Вернекс, Монтрё (пансион Лорен)
26.3.86

Мой самый дорогой друг!

Я действительно не знаю, кто из нас находится в долгу по письмам — Ты или я. Я принимаю последнее, так как мне отсюда пришлось написать так много писем, что я потерял представление о своей корреспонденции. Во всяком случае, у меня едва ли найдется сообщить Тебе что-либо важное. Здесь день за днем проходит одинаково в спокойной последовательности, в чем есть что-то расслабляющее. Погода еще недавно была плохой, что мешало моему длительному пребыванию на воздухе. Знакомств вне отеля я не завел, да и в отеле их немного: только в 6 часов вечера спускаюсь к ужину в обществе, а большую часть дня провожу в своей комнате, правда очень уютной, с видом на озеро и на снеговые горы Савойи. Пока занимаюсь корректурами, пишу письма, читаю, т. е. в сущности не работаю; все же надеюсь, что желание продуктивно работать еще когда-нибудь появится. О Берлине сведений имею мало. Фукс пишет мне иногда, но у него в семье почти беспрестанно больные, а потому скверное настроение. Кирхгоф и Ауверс люди лаконичные. Кронекер совсем мне не пишет, правда, и я также не пишу ему. Госпожа Борхардт, обычно фанатик-письмописец, отвлеклась сперва помолвкой Марихен, затем ее свадьбой и наконец перепиской с «детьми», совершавшими свадебное путешествие, в такой степени, что стала очень экономной в письмах ко мне.

Мои отношения с К[ронекером] стали своеобразными. Когда он возвратился из своей поездки во время отпуска, он внешне выглядел очень доверчивым ко мне, держался как самый интимный друг, даже тогда, когда вынудил меня за несколько недель до моего отъезда, в присутствии Фукса, Нетто и Хеттнера высказать ему всю правду. Я ведь вместе с Фуксом поднял вопрос в Академии, чтобы можно было продолжать и впредь издание собраний сочинений умерших академиков, начиная со Штейнера, а прежде всего, следовательно, работ Борхардта с указанием, что они издаются по постановлению Академии Наук. Это было единогласно принято на одном из заседаний Академии (на котором К[ронекер] случайно отсутствовал, о чем раньше никто не мог знать), а издание было поручено Хеттнеру. К[ронекеру] очень не понравилось такое мое поведение, он сказал, что решение Академии направлено против него, так как он доказал, что в первой работе Борхардта (применение положения Штурма к доказательству действительности всех корней, встречающихся в уравнении при определении возмущений планет) «все неправильно». Он прямо требовал опустить

указанное выше «издается по постановлению» и назначить *меня* издателем.

Это было для меня уж слишком, и мое возражение было достаточно вразумительным. Ты видишь, дорогой друг, что его претензии быть единственным экспертом и решающим человеком по вопросам алгебры стали укоренившейся болезнью. В данном случае он, к тому же, совершенно неправ; скорее, его точка зрения об области действительности теоремы Штурма неправильна, как это мной уже было доказано в одной заметке, отправленной Хеттнеру. Но совершенно независимо от этого, как мелочна такая оппозиция, которая из-за научных разногласий не желает умершему «другу и брату», чтобы его первая научная работа, к которой с такой любовью относились Якоби, Лиувилль и Дирихле (которые правда «ничего не понимали в алгебре»), была еще раз напечатана «по постановлению Академии Наук», членом которой он был в течение 27 лет.

Вскоре после этого К[ронекер] получил том Acta, в котором Миттаг-Леффлер превозносит меня, на что я, впрочем, совсем не претендую, и указывает, что я получил «орден Максимилиана за науки и искусство»,— это было уже слишком. Я вежливо простился с ним (его Фанни просила передать, что ее нет дома). Но после того как я уехал из Берлина, он будто бы лестно обо мне отзывался. Я должен и могу это переносить, но я глубоко сожалею, что такой духовно одаренный человек, с такими неоспоримыми научными заслугами вместе с тем настолько мелочно тщеславен и завистлив.

Мою работу о теореме Линдемана Ты — а также и М[иттаг]-Л[еффлер] — вероятно, уже получили, на днях получите «Работы по теории функций». А вот копии присужденной мне медали, из которых одна должна быть прислана Тебе, еще до сих пор не готовы. Мой бюст будет демонстрироваться на предстоящей художественной выставке в Берлине.

Прошу передать самый сердечный привет Миттаг-Леффлеру — надеюсь, что он и его супруга чувствуют себя хорошо.

Мои сестры собираются написать Тебе в ближайшем будущем. Они теперь, в этом отношении, ленивее меня, утверждая, что весь день заняты. Но я прошу Тебя написать мне скорее и, в частности, сообщить, действительно ли маленькая Соня теперь у Тебя. Но прежде всего я хочу знать, как у Тебя прошли лекции в этом семестре и *какие у Тебя планы на лето*. Мы пробудем в Швейцарии во всяком случае до 1-го октября, но, вероятно, скоро переедем на Женевское озеро.

Кирхгоф, которого я ждал на пасхальных каникулах, по-видимому, не приедет. Он, к сожалению, нездоров, зато у меня был

Мольк, который находится в Безансоне. Ты, вероятно, знаешь, что Рунге едет в Ганновер, где он займет должность профессора в политехническом училище и вскоре женится.

С сердечным приветом и еще раз просьбой о *скором* ответе

Твой Вейерштрасс

79. Берлин, Фридрих-Вильгельмштр. 14
22 мая 1888

Мой дорогой друг, я не ответил на Твое письмо от 4-го сего месяца, потому что *не мог*. Я все еще нездоров, и только несколько дней тому назад мне было разрешено попробовать заняться математическими вещами. Поэтому не могло быть и мысли о том, чтобы я мог как-либо помочь Тебе. Твое письмо от 17-го с. м., к моей радости, доказывает, что Ты преуспела значительно и без моей помощи. Сегодня я хочу лишь сделать некоторые замечания относительно того, о чем Ты мне написала, которые возможно будут Тебе полезны.

Оба уравнения

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}, \qquad \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}$$

правильны, но было бы хорошо, если бы Ты мне написала более подробный вывод этих уравнений.

Если мы рассмотрим $[s_1, \sqrt{S_1}]$, то эти величины Тобой определяются как функции $x_1\ x_2$ (см. прилагаемый лист), тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{S_1(x_1)}} = \frac{\frac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\sqrt{S_1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{R(x_2)}} = -\frac{\frac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\sqrt{S_2}},$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}$$

Если затем ввести во все формулы $[-\sqrt{R(x_2)}]$ вместо $[\sqrt{R(x_2)}]$, то $[s_2, \sqrt{S_2}]$ поменяются, и мы получим второе уравнение

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}.$$

Теперь речь идет главным образом о том, чтобы выразить x_1, x_2 через s_1, s_2. Это сделано мной в приложении. При этом оказывается что если исходить из дифференциальных уравнений

$$dt_0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}, \qquad dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}$$

и рассматривать t_0, t как независимые переменные, то $s_1 + s$, s_1, s_2, а также и

$$\sqrt{s_1 - l_1}\,\sqrt{s_2 - l_2}, \quad \sqrt{s_1 - l_2}, \sqrt{s_2 - l_2}, \quad \sqrt{s_1 - l_3}\quad \sqrt{s_2 - l_3}$$

будут однозначными функциями t_0, t, а не x_1, x_2. Будут ли последние величины становиться однозначными функциями t, если принять $t_0 = 0$, я не могу судить по выведенным мной выражениям. Я в этом сомневаюсь, так как

$$(\sqrt{s_1 - l_\lambda} + \sqrt{s_2 - l_\lambda})^2, \qquad (\sqrt{s_1 - l_\lambda} - \sqrt{s_2 - l_\lambda})^2$$
$$(\lambda = 1, 2, 3)$$

являются однозначными функциями t_0, t. Поэтому есть основание утверждать, что $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{x_1 - x_2}{2}$ можно выразить посредством *квадрата корней* однозначных гиперэллиптических функций.

Следовательно, если Твое доказательство того, что x_1, x_2 являются *бесконечными* функциями t, *надежно*, то возможны лишь два варианта.

Либо мы должны свести обозначенные мной через

$$\frac{g_1}{g_0}, \qquad \frac{g_2}{g_0}$$

выражения вообще к рациональным функциям от

$$s_1 + s_2, \quad s_1, s_2, \quad \sqrt{s_1 - l_1}\sqrt{s_2 - l_1}, \quad \sqrt{s_1 - l_2}\sqrt{s_2 - l_2},$$
$$\sqrt{s_1 - l_3}\sqrt{s_2 - l_3},$$

так как я не верю в то, что это возможно при предположении $t_0 = 0$. Либо должна быть возможность выразить x_1, x_2 посредством двух других величин s'_1, s'_2 так, чтобы было

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{(\alpha s'_1 + \beta)\,ds'_1}{\sqrt{R_2(s'_1)}} + \frac{(\alpha s'_2 + \beta)\,ds'_2}{\sqrt{R_2(s'_2)}},$$

$$\frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{(\alpha s'_1 + \beta')ds'_1}{\sqrt{R_2(s'_1)}} + \frac{(\alpha s'_2 + \beta')\,ds'_2}{\sqrt{R_2(s'_2)}},$$

где R_2 опять будет целой функцией 6-й или 5-й степени, а α, β, α', β' будут константами. Тогда, конечно, указанные выражения x_1, x_2 можно будет преобразовать в другие, которые можно рационально выразить через функции $al\,(t_0, t)_\alpha$ $al\,(t_0, t)_{\alpha\beta}$, имеющие

отношение к иррациональности $\sqrt{R_2(s')}$. То же самое случится; это у меня уже встречалось в ином случае, когда два дифференциальных уравнения

$$dt_0 = P_0\,dx_1 + Q_0 dx_2, \qquad dt_1 = P_1 dx_1 + Q_1 dx_2,$$

в которых P_0, Q_0, P_1, Q_1 являются заданными функциями переменных $x_1 x_2$ и условие интегрируемости выполнено, можно преобразовать к гиперэллиптическому виду путем легко усматриваемой подстановки.

Может быть Тебе удастся сделать более удачную подстановку, чем та, которая была сделана Тобой и которая, во всяком случае, показывает, что p, q можно выразить через гиперэллиптические функции, в которых аргументы являются линейными функциями t, что все же является достижением. Но работы еще потребуется много. Определение нижних пределов интегралов также требует тщательности. Сведение величин α, β, γ и т. д. к гиперэллиптическим функциям, по-видимому, не представит особых трудностей.

Указанные выражения

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right), \quad \wp'\left(\frac{u}{2}\right), \quad \sqrt{\wp' u - l_1}, \quad \sqrt{\wp' u - l_2}, \quad \sqrt{\wp' u - l_3},$$

как я полагаю, являются *новыми*.

Господин Кронекер, который с каждым днем все более погружается в самообожание и высокомерное презрение к «так называемому» анализу и его представителям, теперь публично высказал свою злобу в связи с несправедливостью по поводу того, что вопросы о «шведских премиях» решались без его участия. Для этого он, намеренно или из осторожности, выбрал такое время, когда я не мог быть в Академии. Ответ на его заметку от 12-го апреля с. г. не будет ему дан, поскольку срок подачи работ на конкурс истечет. Как я слышал, г. Энестрем должен написать, что комиссия ему, несомненно, будет благодарна за исправление допущенных ею ошибок. Если это действительно было высказано г. Э[нестремом], то я об этом очень сожалею. В действительности К[ронекер] прав только по одному несущественному пункту. Дирихле ничего *не сообщил* ему о связи между доказательством устойчивости для системы планет и его исследованиями об интегрировании динамических дифференциальных уравнений. Все остальное, сказанное мной, я считаю справедливым и смогу это обосновать. Но довольно об этом.

Очень надеюсь на то, что Ты на этот раз во время каникул, по крайней мере ненадолго, приедешь в Берлин. Думаю остаться здесь до 1-го июля, а затем буду недалеко, вероятно, в Гарце.

Я хотел бы Тебе еще многое сказать. Будет ли это возможно — еще неизвестно. Истекшая зима очень сильно подорвала мои силы.

С дружеским и сердечным приветом от меня и от моих.

Твой верный друг Вейерштрасс

⟨*Приложение.*⟩

Пусть $R(x) = Ax^4 + Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$ целая функция 4-й степени от x, a — один из корней уравнения $R(x) = 0$, u — неограниченная переменная величина, $\varphi(y)$ единственная эллиптическая функция, которая, будучи подставлена вместо x, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du$$

и при $u = 0$ принимает значение a. Тогда получаем

$$\varphi(u) = a + \frac{b}{\wp u - c},$$

где $b = {}^1/_4 R'(a)$, $c = {}^1/_{24} R'(a)$ и инварианты (g_2, g_3) функции $\wp u$ совпадают с инвариантами $R(x)$.

Если мы введем две независимые друг от друга переменные u_1, u_2 [и положим]

$$\begin{aligned} s_1 &= \wp(u_1), \qquad \sqrt{S_1} = \wp'(u_2), \qquad \left(S_1 = 4s_1^2 - g_2 s_2 - g_3\right) \\ s_2 &= \wp(u_2), \qquad \sqrt{S_2} = \wp'(u_2), \qquad \left(S_2 = 4s_2^2 - g_2 s_2 - g_3\right) \end{aligned}$$

$$x_1 = \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right), \qquad \sqrt{R(x_1)} = \varphi'\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right),$$

$$x_2 = \varphi\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right), \qquad \sqrt{R(x_2)} = \varphi'\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right),$$

то

$$s_1 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$

$$s_2 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$

где

$$R(x_1, x_2) = Ax_1^2x_2^2 + 2B(x_1 + x_2)x_1x_2 + 6Cx_1x_2 + 2B'(x_1 + x_2) + A' + C(x_1 - x_2)^2,$$

и

$$\sqrt{S_1} = \left(\frac{R(x_2)}{(x_2-x_1)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_2)}{(x_2-x_1)^2}\right)\sqrt{R(x_1)} -$$
$$-\left(\frac{R(x_1)}{(x_1-x_2)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_1)}{(x_1-x_2)^2}\right)\sqrt{R(x_2)},$$
$$\sqrt{S_2} = \left(\frac{R(x_2)}{(x_2-x_1)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_2)}{(x_2-x_1)^2}\right)\sqrt{R(x_1)} +$$
$$+\left(\frac{R(x_1)}{(x_1-x_2)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_1)}{(x_1-x_2)^2}\right)\sqrt{R(x_2)},$$
$$\frac{N}{2}\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = (l_1(l_2-l_3)\xi_1 + l_2(l_3-l_1)\xi_2 + l_3(l_1-l_2)\xi_3)\times$$
$$\times((l_2-l_3)\xi_2\xi_3 + (l_3-l_1)\xi_3\xi_1 + (l_1-l_2)\xi_1\xi_2) -$$
$$-(l_1(l_2-l_3)\xi_2\xi_3 + l_2(l_3-l_1)\xi_3\xi_1 + l_3(l_1-l_2)\xi_1\xi_2)\times$$
$$\times((l_2-l_3)\xi_1 + (l_3-l_1)\xi_2 + (l_1-l_2)\xi_3),$$

причем $N = ((l_2-l_3)\xi_1 + (l_3-l_1)\xi_2 + (l_1-l_2)\xi_3)^2$.

Выражение в правой части [полученного] уравнения прежде всего сводится к

$$(l_2-l_3)(l_3-l_1)(l_1-l_2)\{(\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_3 + (\xi_2^2-\xi_3^2)\xi_1 + (\xi_3^2-\xi_1^2)\xi_2\}.$$

Но

$$\xi_1^2-\xi_2^2 = -(l_1-l_2), \qquad \xi_2^2-\xi_3^2 = -(l_2-l_3).$$
$$\xi_3^2-\xi_1^2 = -(l_3-l_1),$$

так что

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{-2(l_2-l_3)(l_3-l_1)(l_1-l_2)}{(l_2-l_3)\xi_1 + (l_3-l_1)\xi_2 + (l_1-l_2)\xi_3}.$$

Здесь получаем:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{g_1\{\sqrt{s_1-l_1}\sqrt{s_1-l_2}, \sqrt{s_1-l_1}, \sqrt{s_2-l_1}, \sqrt{s_2-l_2}\sqrt{s_2-l_3}\}}{g_0\{\sqrt{s_1-l_1}, \ldots\}},$$
$$\frac{x_1-x_2}{2} = \frac{g_2\{\sqrt{s_1-l_1}, \ldots\}}{g_0\{\sqrt{s_1-l_1}, \ldots\}},$$

где g_0, g_1, g_2 целые однородные функции 2-й степени величин

$$\sqrt{s_1-l_1}, \qquad \sqrt{s_1-l_2}, \qquad \sqrt{s_1-l_3},$$

так же как и величин

$$\sqrt{s_2-l_1}, \qquad \sqrt{s_2-l_2}, \qquad \sqrt{s_2-l_3}.$$

При этом в отношении s_1, s_2 симметричное поведение этих уравнений позволяют выразить x_1, x_2 через s_1, s_2 следующим образом. Мы имеем

$$\frac{x_1+x_2}{2} = a + \frac{b}{2}\,\frac{\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)+\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-2C}{\left(\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)-C\right)\left(\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)-C\right)},$$

$$\frac{x_2-x_1}{2} = \frac{b}{2}\,\frac{\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)}{\left(\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)-C\right)\left(\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-C\right)}.$$

Далее: если принять $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)={}_1\wp, \wp\left(\frac{u_2}{2}\right)=\wp_2$, то

$$\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right) = \frac{2\left(\wp_1\wp_2-\frac{1}{2}\,g_2\right)(\wp_1+\wp_2)-g_3}{(\wp_1-\wp_2)^2},$$

$$\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right) = \frac{(\wp_1\wp_2+{}^1/_4\,g_2)^2+g_3(\wp_1+\wp_2)}{(\wp_1-\wp_2)^2},$$

$$\wp\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-\wp\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right) = -\frac{\wp'\left(\frac{u_1}{2}\right)\wp'\left(\frac{u_2}{2}\right)}{(\wp_1-\wp_2)^2},$$

отсюда получится

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{b}{2}\,\frac{g_1\left(\wp\left(\frac{u_1}{2}\right),\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)}{g_0\left(\wp\left(\frac{u_1}{2}\right),\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)}+a,$$

$$\frac{x_1-x_2}{2} = \pm\frac{b}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{u_1}{2}\right)\wp'\left(\frac{u_2}{2}\right)}{g_0\left(\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)},$$

где g_0, g_2 целые, симметричные функции $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right)$, $\wp\left(\frac{u_2}{2}\right)$. Обе они по отношению к каждой из величин $\wp\left(\frac{u_1}{2}\right), \wp\left(\frac{u_2}{2}\right)$ будут 2-й степени.

Следовательно, остается только выразить

$$\wp\left(\frac{u_1}{2}\right),\ \wp\left(\frac{u_2}{2}\right),\ \wp'\left(\frac{u_1}{2}\right),\ \wp'\left(\frac{u_2}{2}\right),\ s_1=\wp(u_1),\ s_2=\wp(u_2).$$

Из формулы для $\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v)$ получаем, если заменить u на $u/2$ и v на $v/2$

$$\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma^4(u)} = \left(\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_\lambda\right)^2 - (l_\lambda - l_\mu)(l_\lambda - l_\nu) =$$

$$= \wp^2\left(\frac{u}{2}\right) - 2l_\lambda\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_\lambda^2 - l_\mu l_\nu,$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u) - \sigma_\mu(u)}{\sigma^4(u)} = 2(l_\mu - l_\nu)\,\wp\left(\frac{u}{2}\right) - 2(l_\mu - l_\lambda)\,l_\nu$$

и тем самым

$$\frac{\sigma_1(u) - \sigma_2(u)}{\sigma_1(u) - \sigma_3(u)} = \frac{l_2 - l_1}{l_3 - l_1}\,\frac{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_3}{\wp\left(\frac{u}{2}\right) - l_2},$$

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{(l_2 - l_3)\,l_1\sigma(u) + (l_3 - l_1)\,l_2\sigma_2(u) + (l_1 - l_2)\,l_3\sigma_3(u)}{(l_2 - l_3)\,\sigma_1(u) + (l_3 - l_1)\,\sigma_2(u) + (l_1 - l_2)\,\sigma_3(u)},$$

если мы примем $\frac{\sigma_\lambda(u)}{\sigma(u)} = \xi_\lambda\,(\lambda = 1, 2, 3)$, то получим

$$\wp' = \frac{l_1(l_2 - l_3)\,\xi_1 + l_2(l_3 - l_1)\,\xi_2 + l_3(l_1 - l_2)\,\xi_3}{(l_2 - l_3)\,\xi_1 + (l_3 - l_1)\,\xi_2 + (l_1 - l_2)\,\xi_3}.$$

Отсюда далее следует

$$\frac{d\xi_\lambda}{du} = \xi_\mu\xi_\nu.$$

80. Берлин, Фридрих-Вильгельмштр., 14
22 июня 88.

Мой дорогой друг, я не мог ответить тотчас же на Твои два последних письма (без даты), содержание которых принесло мне большую радость, отчасти потому, что я все еще себя плохо чувствую, а отчасти потому, что я Тебе еще до сих пор не мог сообщить ничего определенного о моих планах на лето. Теперь я могу Тебе написать об этом. Я поеду со своими 2-го июля в Вернигероде в Гарце, отель Мюллера, у Зальцберга. (Это место находится вблизи железной дороги, по которой проходят курьерские поезда из Парижа в Гамбург и Берлин. Со станции Крейензен туда идет железнодорожная ветка.) Думаю пробыть там не менее двух месяцев.

Я уже писал, что мне очень хочется увидеть Тебя этим летом и чтобы Ты некоторое время побыла у меня. Состояние моего здоровья, которое сильно подорвано, требует, чтобы я несколько недель целиком посвятил физическому отдыху. В это время Ты мало получила бы от меня как от математика. Мне было бы крайне желательно, чтобы Ты устроила свои дела так, чтобы в начале августа на обратном пути провести с нами несколько недель в указанном выше месте, отличающемся очень здоровым воздухом. Отель считается хорошим, достаточно поместительным, особенно для такой нетребовательной дамы, как Ты. Надеюсь, что и Миттаг-Леффлер на обратном пути будет у меня.

Надеюсь, что это письмо придет к Тебе, когда Ты уже уедешь из Лондона. Жду *скорого* ответа от Тебя.

После Твоего, полного сомнений, письма от 7 -го мая Ты сделала большой шаг вперед в своей работе.

Но остается сделать еще многое. Ты сделала хорошо, что подала работу в том виде, как она сейчас есть, и Эрмит дал Тебе хороший совет. Приступай со свежими силами к дальнейшим исследованиям. Тебе придется выполнить не совсем приятную работу, если Ты хочешь получить *готовые* результаты, и я имею в виду исследование корней уравнения $R_1(s) = 0$. Три из них всегда действительны, два других, насколько мне кажется, могут быть действительными или мнимыми. Далее требуется определить последовательность действительных корней. Только выполнив все это, Ты сможешь выразить p, q в самой простой *действительной* форме. Что касается дальнейшего, то я считаю едва ли возможным представить выведенные Тобой алгебраические выражения величин γ, γ', γ'' при помощи θ-функций. Я предложил бы Тебе пойти по другому пути.

Пусть $R(x) = A(x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_n)$ будет целой функцией x с действительными коэффициентами. Пусть величины $a_0, \ldots, a_n$ будут так расположены, как в диссертации Хеноха (De functionum Abelianorum periodicis).

Тогда, если предположить, что между четырьмя переменными u_1, u_2, x_1, x_2 приняты уравнения

$$du_1 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}},$$

$$du_2 = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}$$

и установлено, что при ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$) величины x_1, x_2 принимают такие значения, для которых $R(x_1)$, $R(x_2)$ оба положительны, и если далее принять за α, β каких-либо два числа a, b из 4 при-

веденных

$$p_\alpha = \sqrt{e_\alpha (x_1 - a_\alpha)(x_2 - a_\alpha)},$$

$$e_{2a-1} = -1)^{a-1}, \qquad e_{2b} = (-1)^b,$$

$$(a = 1, 2) \qquad (b = 0, 1, 2)$$

где

$$p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta \left\{ \frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1 - a_\alpha)(x_2 - a_\beta)(x_1 - x_2)} + \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2 - a_\alpha)(x_2 - a_\beta)(x_2 - x_1)} \right\},$$

то p_α, $p_{\alpha\beta}$ будут однозначными функциями u_1, u_2, принимающими при действительных значениях последних величин также действительные значения, причем Q_α, а также и $p_{\alpha\beta}$ действительны, если a_α и a_β действительны.

Если мы далее подставим вместо u_1, u_2 целые линейные функции переменной t с действительными коэффициентами

$$u_1 = c_1 t + c_1', \qquad u_2 = c_2 t + c_2',$$

то если α, β, γ три каких-либо независящих друг от друга, отличных числа из ряда 0, 1, 2, 3, 4, то 6 величин

$$p_\alpha, \; p_\beta, \; p_\gamma, \; p_{\alpha\beta}, \; p_{\beta\alpha}, \; p_{\alpha\gamma}$$

и переменная t будут связаны между собой шестью следующими дифференциальными уравнениями [неразборчиво]

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{e_\beta (c_1 - a_\gamma c_2)}{2(a_\gamma - a_\beta)} p_\beta p_{\alpha\beta} - \frac{e_\gamma (c_1 - a_\beta c_2)}{2(a_\gamma - a_\beta)} p_\gamma p_{\gamma\alpha},$$

$$\frac{dp_\beta}{dt} = \frac{e_\gamma (c_1 - a_\alpha c_2)}{2(a_\alpha - a_\gamma)} p_\gamma p_{\beta\gamma} - \frac{e_\alpha (c_1 - a_\gamma c_2)}{2(a_\alpha - a_\gamma)} p_\alpha p_{\alpha\beta},$$

$$\frac{dp_\gamma}{dt} = \frac{e_\alpha (c_1 - a_\beta c_2)}{2(a_\beta - a_\alpha)} p_\alpha p_{\gamma\alpha} - \frac{e_\beta (c_1 - a_\alpha c_2)}{2(a_\beta - a_\alpha)} p_\beta p_{\beta\gamma},$$

$$\frac{dp_{\beta\gamma}}{dt} = \frac{A}{2}(c_1 - a_\alpha c_2) p_\beta p_\gamma - \frac{c_2}{2} e_\alpha p_{\alpha\beta} p_{\gamma\alpha},$$

$$\frac{dp_{\gamma\alpha}}{dt} = \frac{A}{2}(c_1 - a_\beta c_2) p_\gamma p_\alpha - \frac{c_2}{2} e_\beta p_{\beta\gamma} p_{\alpha\beta},$$

$$\frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{A}{2}(c_1 - a_\gamma c_2) p_\alpha p_\gamma - \frac{c_2}{2} e_\gamma p_{\gamma\alpha} p_{\beta\gamma}.$$

Здесь мы имеем, следовательно, пример шести величин, которые зависят от переменной t так, что все полученные для этой пере-

менной производные являются целыми функциями этих же 6 величин.

Таким образом, в рассматриваемой Тобой задаче $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ получим

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{e_\beta p_\beta p_{\alpha\beta}}{2(a_\gamma - a_\beta)} - \frac{e_\gamma p_\gamma p_{\gamma\alpha}}{2(a_\gamma - a_\beta)}; \qquad \frac{dp_{\beta\gamma}}{dt} = 2p_\beta p_\gamma,$$

$$\frac{dp_\beta}{dt} = \frac{e_\gamma p_\gamma p_{\beta\gamma}}{2(a_\alpha - a_\gamma)} - \frac{e_\alpha p_\alpha p_{\alpha\beta}}{2(a_\alpha - a_\gamma)}; \qquad \frac{dp_{\gamma\alpha}}{dt} = 2p_\gamma p_\alpha,$$

$$\frac{dp_\gamma}{dt} = \frac{e_\alpha p_\alpha p_{\gamma\alpha}}{2(a_\beta - a_\alpha)} - \frac{e_\beta p_\beta p_\gamma}{2(a_\beta - a_\alpha)}; \qquad \frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = 2p_\alpha p_\beta,$$

где при соответствующем определении α, β, γ, e_α, e_β, e_γ

$$p_\alpha = \sqrt{e_\alpha (s_1 - l_1)(s_2 - l_1)}, \qquad p_\beta = \sqrt{e_\beta (s_1 - l_2)(s_2 - l_1)},$$

$$p_\gamma = \sqrt{e_\gamma (s_1 - l_3)(s_2 - l_1)}.$$

Считаю необходимым заметить, что здесь l_1, l_2, l_3 обозначают не корни уравнения $4s^3 - g_2 s - g_3$, а корни уравнения $S = 4(s-c)^3 - g_2(s-c) - g_3 = 0$, где $c = l_1^2/l^2$. Здесь $l_1^2 = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2c_0\gamma$, выражение в правой части этого уравнения не обязательно должно быть положительным, просто так удобнее писать.

Пусть требуется при таких предпосылках привести p, q к виду $p = \frac{P}{R_0}$, $q = \frac{Q}{R_0}$, где P, Q, R_0 целые функции второй степени от p_α, p_β, p_γ. Таким образом, по приведенной выше формуле получаем:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{P_1}{R_0^2}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{Q_1}{R_0^2},$$

где P_1, Q_1 целые функции 4-й степени 6 величин p_α $p_{\alpha\beta}$.

Но $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} qr$ и, следовательно, $\frac{2P_1}{R_0} = Qr$, поэтому я предполагаю, что $2P_1$ делится на Q и что частное либо является целой функцией 6 величин p_α, $p_{\alpha\beta}$, либо становится таким только, если прибавить к нему еще некоторые из 15 величин $p_0, \ldots, p_\alpha, p_{01}, \ldots, p_{\alpha\beta}$. Если это правильно, то мы получим

$$r = \frac{R}{R_0},$$

где R сложное выражение некоторого числа из 16 упомянутых величин в виде целой функции.

Затем из указанных дифференциальных уравнений получаем

$$\gamma'' = \frac{1}{e_0}\frac{dr}{dt} = \frac{N}{R_0^2}, \qquad \gamma' = \frac{1}{e_0}\left(pr - 2\frac{dq}{dt}\right) = \frac{M}{R_0^2},$$

$$\gamma = \frac{p^2+q^2}{e_0} + \frac{r^2}{2e_0} - l_1 = \frac{L}{R_0^2},$$

где L, M, N — целые функции указанных величин 4-й степени.

Я думаю, что Ты сможешь таким образом вывести окончательные результаты. Следовательно, сперва нужно привести p, q к указанному виду. При этом неблагоприятным обстоятельством является то, что в выражениях x_1, x_2 через $\wp u$, $\wp v$ встречается корень уравнения $R(u) = 0$, в то время как для окончательного результата, т. е. когда x_1, x_2 выражают через p_α, p_β, p_γ, должно быть безразлично, какой взят корень. Таким образом, требуется, чтобы каждую из величин x_1, x_2 можно было представить в форме $\frac{x_1'}{x_1}$, $\frac{x_2'}{x_2}$, чтобы x_1, x_2, x_1', x_1' становились целыми линейными функциями p_α, p_β, p_γ, а коэффициенты их составлялись рационально из l_1, l_2 l_3 и из коэффициентов $R(x)$ с добавлением i.

Если это установлено, то следует различать только два случая, когда все три величины l_1, l_2, l_3 действительны и когда две из них являются сопряженными комплексными величинами. Остальное получится само собой.

Знаешь ли Ты что-либо о форме остальных 6 величин, которые, кроме γ, γ', γ'', определяют взаимоположение рассматриваемого тела?

Исследование задачи о существовании взаимосвязи между величинами A, B, C, x_0, y_0, z_0 и определение по 2 известным интегралам третьего алгебраического интеграла само по себе достаточно интересно, однако прежде нужно закончить начатую работу. Я охотно буду продолжать переписку с Тобой по этому вопросу также и в июле.

Сердечный привет Тебе от моих сестер. Они будут искренне рады, если Ты найдешь возможным провести с ними несколько недель.

На этом на этот раз заканчиваю. Я должен был бы Тебе сообщить еще много, отчасти довольно неприятных вещей, но не хочу портить Тебе сегодняшний, исключительно хороший день. Итак, сердечный привет от Твоего верного друга

Вейерштрасс

81. N. B. Вернигероде в Гарце
Не Вайнигероде! Отель Мюллера 13.7.88

Мой дорогой друг!

Твое милое письмо (опять, как обычно, без даты, но сданное на почту 11-го) мы получили только что, в 8 час. утра. Во избежание задержки отвечаю на него тотчас же, сам.

Мы все очень рады, что Ты можешь выполнить свое обещание навестить нас здесь. Надеюсь, Ты привезешь нам с собой хорошую погоду, так как до сих пор погода здесь довольно плохая. Пребывание здесь благоприятно повлияло на меня (мы здесь с 3-го), и я чувствую себя несколько бодрее, чем в последнее время в Берлине. Поэтому уже нет необходимости избегать всякого математического разговора до 1-го августа. По крайней мере, я возьму под строгое наблюдение свою любимую ученицу, с тем чтобы она прилежно работала (т. е. несколько часов в день). Не только для того, чтобы работа (которая у Тебя уже в руках) была закончена своевременно, но и чтобы она удовлетворяла всем требованиям по своей форме, от чего зависит очень многое.

Комната для Тебя будет приготовлена в нашем отеле. Ты, однако, не должна предъявлять больших требований, так как Вернигероде не курорт, его посещают только вследствие его хорошего воздуха и только в июле и августе. Тебе, впрочем, будет целесообразно опять назвать свою фамилию с приставкой «фон», это значительно повлияет на обслуживание. Стоимость пансиона, впрочем, не низкая, несмотря на довольно скромный образ жизни,— 6 марок в сутки. Таким образом, если прибавить чаевые, стирку белья и т. п., это составит около 8 марок — 10 франков в сутки. Ты хорошо сделаешь, если возьмешь с собой чаю, так как здешний чай отвратителен, а шоколод вполне приемлем.

Что касается пути, то Тебе во всяком случае придется ехать через Крейенсен. Эта станция, по всей вероятности, известна в Париже, так как через нее же проходит дорога в Гамбург. После прибытия туда Ты через несколько часов будешь здесь. Насколько мне известно, из Парижа идет прямой скорый поезд, который приходит в Крейенсен рано утром. Если Ты поедешь с ним, Ты прибудешь сюда рано утром. Прошу Тебя, как только Ты выяснишь, когда Ты будешь в Кр[ейенсене],— телеграфируй мне (но имей в виду, что здесь нет ночной службы), так как от вокзала до нашего отеля довольно далеко и извозчиков нет, поэтому я должен послать за Тобой экипаж из отеля.

Твои работы по математике, вероятно, с тобой, и Ты их привезешь?

Миттаг-Леффлер твердо обещал провести у меня несколько дней на обратном пути. Поль дю Буа-Реймон, которого Ты знаешь

по Гейдельбургу, также проведет у меня 1—2 дня, около 10 августа. Хеттнер будет со своей молодой женой весь август в одной из соседних деревень.

Сердечный привет Тебе от моих сестер, они радуются встрече с Тобой.

Искренне Тебе преданный К. В.

82. Берлин, В. Фридрих-Вильгельмштр., 14
1-го февраля 89 г.

Моя дорогая Соня, только что я узнал из письма Миттаг-Леффлера, что Ты еще в Париже и чувствуешь себя настолько утомленной, что мечтаешь взять отпуск. Я думал, что Ты давно уже в Стокгольме, где полностью развернула свою деятельность. Поэтому сообщение Миттаг-Леффлера меня так удивило, что я решил тотчас же написать Тебе, чтобы узнать, как обстоят дела.

Прошу Тебя, как только Ты прочитаешь это письмо, *тотчас* же сядь и ответь мне в двух строках, если не можешь больше, и *точно* укажи, куда Тебе в ближайшем времени адресовать письма.

Надеюсь, что это письмо попадет к Тебе, несмотря на неточный адрес. Я не поздравил Тебя с победой, которую Ты одержала на рождестве, во-первых, потому, что думал, что Ты, окруженная поклонением всего Парижа, как мне писал Эрмит, не нуждаешься в этом, во-вторых, потому, что я был опять болен и, по различным причинам, расстроен. Нечего говорить о том, что мы, т. е. прежде всего мои сестры и я, а затем и Твои друзья, находящиеся здесь — Фукс, Хеттнер, Кноблаух, Гензель, П. Дюбуа и недавно возвратившийся Ханземан,— сердечно радовались Твоему успеху. Я испытывал особое удовлетворение от того, что, как это констатировали компетентные судьи, моя «верная ученица» — «моя слабость» не является пустым хвастовством.

П. Дюбуа выразил свой энтузиазм в статье-фельетоне, опубликованной в газете Националцейтунг. Не знаю, все ли Тебе понравится, что он написал, но что бы там ни было, его за это основательно ругали на улице Бель-Вю. (Ты не удивишься, что в этом месте успех «шведского конкурса» был воспринят с малым удовлетворением и послужил поводом к резкой критике. Но самое плохое в том, что при этом имена членов жюри конкурса стали известны широкой публике — конечно, они в глазах толпы являются лучшими математиками Европы.) Теперь поговорим о более серьезных вещах. Прежде всего необходимо укрепить Твое здоровье. Я думаю, Ты страдаешь частью от чрезмерной работы, частью от волнений, которые Тебе пришлось пережить в это Твое пребывание в Париже. Я Тебе очень советую, когда Ты сможешь, не под-

вергая себя опасности, вернуться в Стокгольм. Теперь речь идет о получении Тобой определенной должности, что для Тебя очень важно, какие бы планы у Тебя ни были на будущее. Если Ты утвердишься в Стокгольме, то это Тебе даст опору во всех направлениях, не ограничивая свободу Твоих решений в будущем. Я думаю, что Ты в этом отношении можешь, безусловно, следовать советам М.- Л. До тех же пор, пока Ты будешь вдали от Стокгольма, это дело, я опасаюсь, не сдвинется с места.

Было бы прекрасно, если бы Ты на обратном пути побывала в Берлине. Празднеств я Тебе не обещаю, но Ты этим бы принесла радость верным Тебе сердцам.

Привет Тебе от моих сестер. Френцхен, услышав, что Ты получила большую премию, заметил: «Теперь тетя Соня привезет своей Фуфе прекрасные игрушки из Парижа».

Будь здорова, дорогой друг,— повторяю свою приведенную выше просьбу — и с нетерпением жду вскоре, надеюсь, добрых вестей от Тебя.

Т[вой] К. Вейерштрасс

83. Берлин, 12.6.89.

Моя дорогая Соня! Уже несколько месяцев я жду письма с вестями от Тебя о Твоем состоянии, Твоих планах, перспективах, работах. Но напрасно. Я даже не знал бы твоего местопребывания, если бы время от времени не узнавал кое-что о Тебе от Миттаг-Леффлера. Разве это справедливо?

Но я не хочу упрекать Тебя — я представляю себе, с каким напряжением Ты жила с начала года. Знаю, что не в Твоем характере в критические минуты жизни искать совета и поддержки у других, хотя бы они были самыми лучшими друзьями. Но как самый старый из Твоих друзей, я считаю себя вправе и без Твоей просьбы советовать Тебе, предупреждать и объяснять Твои поступки, если я убежден, что Тебе угрожает опасность оказаться на пути, который может отвести Тебя в сторону от ясно намеченной цели Твоей жизни. У Тебя сейчас нет более сильного желания, как получить работу в Париже. Но где ее взять? Ты имела в виду должность педагога в высшей женской школе или что-либо подобное. Но это могло быть лишь временным желанием. Такая должность означала бы деградацию для Тебя (сказали бы, что Ты сама почувствовала себя недостаточно подготовленной для университетской профессуры, и тем самым доказала бы, что женщины непригодны как преподаватели и представители точных наук).

И все же когда-то (я думаю, что это так и сейчас) Твоим идеалом было доказать на деле несправедливость отстранения женщин от участия в высших стремлениях человека.

Я узнал от М[иттаг]-Л[еффлера], что Ты в настоящее время наметила себе другой план, а именно: Ты хочешь еще раз защитить докторскую диссертацию — в Париже — с тем, чтобы таким образом открыть себе доступ на французский факультет. Я должен Тебе в связи с этим указать на одно обстоятельство, о котором Ты, вероятно, не подумала. Правда, я не думаю, чтобы это было серьезным. Я полагаю, что этот совет Тебе дан только для того, чтобы отпугнуть Тебя. И я уверен также, что если Ты подашь свою работу для защиты, то найдется какой-либо забытый параграф, согласно которому женщины не допускаются к защите. Спроси Эрмита, что он думает по этому поводу. У меня вызывает сомнение другое обстоятельство: тот, кому присвоено звание доктора на каком-либо факультете, не может причинить этому факультету большей обиды, чем приняв ту же степень от другого факультета той же категории. При публичной защите берется даже клятва не делать этого.

Поэтому если бы Ты защитила в Париже, то при возвращении на Гёттингенский факультет Тебя лишили бы присужденного диплома. Этого, может быть, можно было бы избежать, но для всех, которые интересовались Твоей защитой в Г[ёттингене], это было бы очень неприятно. Во всяком случае как в Германии, так и в Швеции произошел бы страшный скандал, и даже хорошо к Тебе относящиеся люди отвернулись бы от Тебя. И Ты отважишься на все это? Я не верю в то, что в Париже, где каждый влиятельный ученый окружен большой клиентурой, с которой он *должен* считаться, Ты займешь достойное Тебя положение на каком-либо факультете. Возможно, что Тебе предложат место в Безансоне или другом каком-либо провинциальном городе, куда неохотно едут парижане. Какое бы Ты решение ни приняла, одно должно быть для Тебя ясным. Прежде чем выяснится возможность получения места в Стокгольме, Ты не должна предпринимать никаких шагов, которые указывали бы на то, что Ты не имеешь в виду оставаться в Стокгольме. Мне многое еще хотелось бы сказать Тебе по этому поводу, но об этом после.

Как я с уверенностью предполагаю, Ты навестишь нас при своем возвращении. Я буду либо в Берлине, либо в каком-либо месте, вблизи которого Ты будешь проезжать. С моим здоровьем дело обстоит неважно. С февраля я не могу ничем серьезным заниматься. Когда я лежу вытянувшись на софе, я не чувствую никакого недомогания, но когда я начинаю сидеть или ходить, мои конечности сразу начинают отказывать. На мое настроение это состояние пока, как это ни странно, мало повлияло. Прилагаемое незапечатанное письмо прошу передать Миттаг-Леффлеру, если он еще там. В противном случае, пожалуйста, передай содержание

этого письма г. Пуанкаре. Сердечный привет от моих сестер и от приемного сына, который очень рад Фуфе.

Искренне Тебе преданный Вейерштрасс

84. Берлин, 5.2.90.

Мой самый любимый друг! Я писал Тебе перед Рождеством, но не знаю, получила ли Ты мое письмо, так как оно должно было дойти в то время, когда Тебя не было в Стокгольме.

Больные люди — эгоисты, поэтому начну с себя самого. К сожалению, могу лишь сообщить Тебе, что я постоянно очень болею и с конца ноября ни разу не выходил из дому. К новому году как будто наступило значительное улучшение. Затем инфлюенца вновь испортила все. Я страдал ею четыре раза. В последний раз она была очень опасной. Как-то вечером были спазмы в легком, которые вызвали большую тревогу у врача. Последние два дня мне опять стало легче, хотя я еще сильно кашляю, но в прошлую ночь и сегодня утром я спокойно спал в течение нескольких часов. Счастье, что мои органы пищеварения работают безупречно, так что я могу принимать достаточно пищи, чтобы полностью не терять сил.

Мои сестры также были нездоровы. Начиная с нового года в четырех различных комнатах с жаром лежали: я, Клара, Элиза, кухарка, Френцхен, который всегда был здоровым, точно так же, как его няня, которая была очень несчастна и все спрашивала: «Почему теперь такой развал в доме?»

Теперь прими сердечное поздравление в связи с наградой, присужденной Тебе Петербургской академией. Она вполне заслужена. Я искренне радовался, что первая академическая почесть Тебе была оказана именно в России. В Берлине больше не присуждают *математикам* звание корреспондента.

Я больше не хочу досадовать. К[ронекер], по-видимому, не считает достойным такой чести ни одного из современных математиков, Ф[укс] не имеет никакой инициативы. Впрочем, я за последние три года принимал участие только в одном заседании Академии.

Прошу Тебя, верни мне *срочно* тетрадь с работой о применении эллиптических функций. Владелец хочет воспользоваться ею и на этих днях напомнил мне об этом. Если Тебе нужно, я могу здесь заказать, чтобы для Тебя переписали части, согласно сделанным Тобой пометкам.

Не можешь ли Ты сообщить мне что-либо о Твоем успехе? Меня это очень интересует. Теперь еще об одном обстоятельстве,

которое очень угнетает меня. Я обещал написать подробный реферат о премированной работе Пуанкаре, который должен был быть напечатан. Часть его уже давно находится у Миттаг-Леффлера. При продолжении этой работы я столкнулся с трудностями. У меня возникли сомнения в правильности и точности некоторых полученных Пуанкаре результатов. Затем я заболел и должен был временно совершенно отложить работу.

Я надеялся внести ясность в это дело путем обсуждений с Фрагменом. К сожалению, я должен был от этого отказаться, и в настоящее время у меня нет никаких перспектив на то, чтобы я мог скоро направить свои мысли на научные вопросы. Кроме того, я уже снова все забыл, что наметил. Что в таких условиях можно сделать? Прошу Тебя, поговори об этом с Миттаг-Леффлером. Я могу лишь сделать два предложения. Либо М.- Л. доложит о действительном положении дел, обещая, что мой реферат, если его удастся закончить, будет напечатан в Acta. Либо он даст напечатать мою предварительную аннотацию, которая была представлена королю. За написанное там я принимаю на себя ответственность. Однако нужно открыто признать, что восторженное обсуждение Эрмитом премированной работы П[уанкаре] вызвало ожидания, которых эта работа в конечном счете не оправдывает. Достоинство исследований П[уанкаре] состоит больше в их *отрицательных*, а не в *положительных* результатах.

Сердечный привет Тебе, Фуфе и семье М.- Л., а также г. Фрагмену от моих сестер и Френцхена. В заключение прошу скорого ответа.

Искренне Тебе преданный К. В.

П. Я. КОЧИНА-ПОЛУБАРИНОВА

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС И ЕГО ПИСЬМА СОФЬЕ КОВАЛЕВСКОЙ

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс принадлежал к великанам мысли, оставившим глубокий след в математике. Его имя знакомо всем, кто занимался теорией функций комплексного переменного; ему принадлежит логическое обоснование математического анализа, опирающееся на построенную им теорию действительных чисел, большое значение имеет разработанная им теория аналитических функций.

Тем, кто прослушал университетский курс математики, приходят на память: теорема Больцано — Вейерштрасса, теория эллиптических функций Вейерштрасса; в вариационном исчислении — исследование достаточных условий экстремума интеграла (последующее развитие функционального анализа позволило расширить представления Вейерштрасса в этой области); в дифференциальной геометрии — геодезические линии и минимальные поверхности; в линейной алгебре — теория элементарных делителей; применение рядов в теории аналитических функций (в 1841 г. 26-летний Вейерштрасс открыл теорему, которая теперь называется теоремой Лорана и которую последний опубликовал в 1843 г.); теория аналитического продолжения; пример непрерывной функции, нигде не имеющей производной, и т. д.

О жизни и деятельности Вейерштрасса написано, пожалуй, больше, чем о многих других крупных математиках, но все же имеются пробелы и в его биографии.

Вскоре после смерти Вейерштрасса была напечатана речь его ученика Э. Лампе [3], где содержатся основные биографические данные. Ряд статей посвятил Вейерштрассу Миттаг-Леффлер ([4] — [7]), опубликована речь Киллинга, прочитанная в Мюнстере [10]. В книге Ф. Клейна [12] шестая глава посвящена теории функций комплексного переменного Римана и Вейершпрасса, в ней также приводятся краткие биографические данные. Пуанкаре в «Акта математика» [8] дал обзор работ Вейерштрасса. Некоторые сведения о Вейерштрассе имеются в других книгах, как, например, в книге Ирис Рунге о ее отце Карле Рунге [11].

В год смерти Вейерштрасса были напечатаны речь М. Тихомандрицкого [13] и статья Д. Гильберта [9].

Когда Г. Миттаг-Леффлер попытался восполнить пробел в сведениях о Вейерштрассе у его брата Петера, профессора филологии, то это ему не совсем удалось: он получил переписку Петера с членами семьи, но о самом Вейерштрассе там говорилось мало [5].

В распоряжении Академии наук СССР имеется большой материал, относящийся к биографии Вейерштрасса: это полученные из архива Миттаг-Леффлера в Стокгольме фотокопии писем К. Вейерштрасса к С. Ковалевской и переписка ее с Миттаг-Леффлером и некоторыми математиками. Письма Вейерштрасса были частично опубликованы Миттаг-Леффлером [7]. Выдержки из некоторых писем использованы доктором Куртом-Р. Бирманом [19] и мною [14], [15].

Проведенная Берлинской академией наук сессия памяти Вейерштрасса (19—23 октября 1965 г.) и собрание, посвященное Вейерштрассу, университета в Мюнстере (2—3 ноября 1965 г.) дают новые материалы, освещающие жизнь и деятельность ученого [20]. Также следует особенно отметить статьи д-ра К.- Р. Бирмана ([17], [18], [19]).

* * *

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс родился 31 октября 1815 года в Остенфельде (Вестфалия, область Мюнстер), умер 19 февраля 1897 г. в Берлине, на 82 году жизни.

Мать Карла, Теодора Вейерштрасс умерла в 1827 г., оставив детей: Карла — двенадцати лет, Петера — семи лет, Клару — четырех лет и Элизу, которой исполнился год.

Отец, Вильгельм Вейерштрасс, в 19 лет был школьным учителем, затем работал чиновником, потом стал секретарем бургомистра в Остенфельде и в конце концов переселился в Падерборн, где состоял служащим таможни. Он был человеком образованным, знал физику и филологические науки, дал детям хорошее знание языков.

Так как в Остенфельде не было подходящей школы для мальчика, то Карла отправили в город Падерборн, недалеко от Мюнстера (главного города Вестфалии), где он учился в гимназии с 1829 по 1834 г.

В гимназии господствовали особые порядки поощрения учеников путем воздействия на их честолюбие: если ученик имел высшие оценки по трем предметам, то в его честь музыкальная капелла исполняла какое-нибудь музыкальное произведение, за каждую следующую высокую оценку — новую вещь. В честь Карла музы-

ка обычно играла четыре раза, так как у него бывало шесть высших отметок, один раз даже семь: всегда по немецкому языку, математика же чередовалась с другими предметами. Только с чистописанием Карл был не в ладах.

Когда Карлу было пятнадцать лет, он вел книги у одной торговки ветчиной и маслом — обычно это рассматривают как первую его встречу с математикой в жизни. Известно, что Карл и один из его товарищей по школе занимались самостоятельно математикой. Говорят, что товарищ был подавлен превосходством Карла и бросил математику, переключившись на другой интересовавший его предмет.

Вейерштрасс поступил в шестой класс гимназии, имевшей восемь классов, он учился в пятом и четвертом, третий же класс пропустил, перейдя сразу во второй. Первый класс он окончил в 1834 г., 19 лет.

В Западной Прусии университеты были в Мюнстере (он назывался академией) и в Бонне. Последний считался одним из лучших в Пруссии, в нем готовили высокопоставленных прусских чиновников. В 1834 г. Вейерштрасс поступил в Боннский университет на юридический факультет.

В старости Вейерштрасс любил вспоминать студенческие годы. Как ревностный член корпорации «Саксония» (получивший звание фуксмайора — Fuchsmajor) он не пропускал ни одной пирушки. Искусный в фехтовании, он ни разу не был ранен на дуэли, что с гордостью отмечал его брат.

Юридические науки не заинтересовали Вейерштрасса, и, по-видимому, он не сдавал никаких экзаменов. Однако однажды он очень успешно выступил в качестве оппонента на защите диссертации своего друга.

В то же время известно, что Вейерштрасс занимался математикой самостоятельно. «Небесная механика» Лапласа и «Fundamenta nova» Якоби были его настольными книгами. В течение одного семестра он слушал лекции Плюкера, который с 1836 г. занял кафедру математики и астрономии в Боннском университете после смерти Мюнхова. Были у Карла каким-то образом попавшие к нему лекции К. Гудермана по теории эллиптических функций. Кристоф Гудерман был профессором в Мюнстере.

В 1838 г. Вейерштрасс вернулся домой без свидетельства об окончании университета. Теперь 23-летний юноша решил ускоренным образом получить математическое образование и диплом школьного учителя. Он поехал в Мюнстер и имматрикулировался там в Академии с лета по осень 1839 г. Он прослушал лишь один курс лекций, объявленный Гудерманом: этот курс привлек 13 человек, но вскоре остался лишь один слушатель — Вейерштрасс.

В 1841 г. Вейерштрасс сдал в Мюнстере экзамен pro facultatae docendi. Предварительно ему были предложены для проработки три темы, из которых он выбрал одну и занимался ею с 1840 г. Лампе говорит, что уже тогда Вейерштрасс был готовым математиком, уже тогда им были заложены основы теории степенных рядов и аналитических функций, которая составила основное содержание дальнейшей работы ученого. Эти исследования были опубликованы лишь в 1894 г., когда начали издавать собрание сочинений Вейерштрасса.

В 1841—1842 г. Вейерштрасс провел в Мюнстере пробный год для получения звания учителя гимназии. Между прочим, в заявлении по поводу экзамена он написал, что в течение полугода (с осени 1838 по весну 1839 г.) он «старадал телесно и духовно». По-видимому, его студенческая жизнь не была столь простой и безоблачной, какой потом представлялась в его воспоминаниях. Возможно, были какие-то душевные переживания.

Вероятно, юридический факультет был случайным (известно, что он был выбран по воле отца).

После пробного года в Мюнстере, с осени 1842 г., в возрасте 27 лет, Вейерштрасс начал свою служебную жизнь в качестве учителя католической прогимназии в Дейч-Кроне и работал там шесть лет.

К пребыванию в Дейч-Кроне относится воспоминание Вейерштрасса о том, как он «помогал» цензору местной газеты: он пропустил «Песни свободы» Георга Гервега, считавшегося «певцом зари германской революции 1848 года», поэта, находившегося в то время в зените славы, но не пользовавшегося любовью двора. Вейерштрасс добавлял с улыбкой, что досталось цензору, а не ему.

В 1848 г. Вейерштрасс стал преподавателем католической гимназии в городе Браунсберге, в 62 километрах от Кёнигсберга. Интересно, что первые годы жизни и деятельности Вейерштрасса связаны с городами, где было сильно развито католичество. Его отец перешел из протестантского вероисповедания в католическое, и все дети были католиками, «хотя и без фанатизма» [6]. В Браунсберге Вейерштрасс работал восемь лет, пробыв, таким образом, учителем в общей сложности 14 лет.

Эти годы Вейерштрасс усиленно занимался математикой. Директор гимназии в Браунсберге с уважением относился к его занятиям. Однажды Вейерштрасс утром не явился на урок и его ученики подняли шум в классе. Тогда директор сам пошел на квартиру к Вейерштрассу и обнаружил, что он всю ночь занимался математикой и, не замечая, что наступило утро, сидел с лампой, продолжая свои размышления.

В результате появилась статья Вейерштрасса по теории функций Абеля, напечатанная в журнале Крелля, с датой 11 сентября 1853 г. (Вейерштрассу было 38 лет). Статья помечена Вестернкоттеном — городом, где жил в то время отец, к которому сын приехал на каникулы. По-видимому, это была первая статья Вейерштрасса в большом математическом журнале. Ф. Клейн указал, что самые ранние исследования Вейерштрасса были опубликованы в еженедельниках прогимназии в Дейч-Кроне (1843) и гимназии в Браунсберге (1849).

Статья произвела большое впечатление в математических кругах и была признана лучшей работой в этой области после исследований Якоби. В 1854 г. Вейерштрассу была присуждена степень доктора honoris causa Кёнигсбергским университетом, где Ришело работал по теории эллиптических функций. Ришело сам посетил в Браунсберге Вейерштрасса, а затем в Браунсберг приехал из Берлина Борхардт (ставший после Крелля редактором «Журнала чистой и прикладной математики»), чтобы приветствовать новое математическое светило. Между Борхардтом и Вейерштрассом установилась тесная дружба, продолжавшаяся 26 лет, до смерти Борхардта в 1880 г., Борхардт и С. В. Ковалевская — единственные люди (кроме брата и сестер), с которыми Вейерштрасс был на «ты» [19]).

В 1856 г. Вейерштрасс приехал в Берлин, взяв отпуск без сохранения содержания, что раньше делал иногда для посещения Кёнигсберга. В то время освободилась кафедра чистой математики в Промышленном институте Берлина и Вейерштрассу предложили занять ее. Министр торговли утвердил назначение Вейерштрасса, и 16 июня 1856 г. новый профессор был торжественно представлен собранию преподавателей. В том же году, 11 ноября, Вейерштрасс приказом министра просвещения был утвержден экстраординарным профессором Берлинского университета. Около этого же времени, 19 ноября, он был избран в Академию наук.

Таким образом, закончилась первая половина жизни Вейерштрасса, и он сразу получил признание и все почести, которые только могли выпасть на долю ученого. Вместе с тем закончились его переезды из одного города в другой: Остенфельде, Падерборн, Бонн, Мюнстер в западной части Германии, где он провел первые 27 лет жизни, Дейч-Кроне и Браунсберг — в восточной. Он поселился в Берлине, когда ему был 41 год, и провел в нем остальные 40 лет жизни, выезжая лишь на дачу или курорт (один раз он пробыл сутки в Гёттингене и говорил, что эта поездка сэкономила ему писание десятка писем). Жил он в обществе двух сестер, Клары и Элизы. Его отец провел у него последние годы жизни.

«Математики — самоистязатели»,— писала Клара Вейерштрасс Софье Васильевне (22 марта 1882 г.). Когда ее брат одержим математикой, то «за едой он указательным пальцем правой руки пишет формулы на поверхности другой руки» [7].

Но иногда Вейерштрасс отвлекался от математики на другие занятия. Так, не будучи музыкальным (в отличие от сестры и, в особенности, брата) он в возрасте 35—36 лет пытался изучать музыку,— по мнению Элизы, без особого успеха. Он любил стихи, сам писал их и цитировал в письмах к Ковалевской. Случалось, что Вейерштрасс ездил в театр с Соней Ковалевской и Юлией Лермонтовой, или с Соней и Густавом Ханземаном, по энергичному приглашению последнего (Г. Ханземан был физик, очень общительный и сердечный человек). Вейерштрасс считал своим долгом делать визиты, когда получал приглашения высокопоставленных лиц, в том числе кронпринца, который был либерально настроенным человеком.

Вейерштрасс отличался большой добротой. Недаром его друг Борхардт завещал ему опекунство над своими шестью детьми. После смерти Борхардта он помогал его вдове разбираться в наследственных делах.

С 1886 г. в письмах Вейерштрасса начинает фигурировать маленький Френцхен — его приемный сын.

Но вернемся к деятельности Вейерштрасса в Берлине. В день Лейбница, 9 июля 1857 г., он произнес вступительную речь в Академии наук и был принят в круг самых крупных ученых. Куммер, Вейерштрасс, Борхардт и Кронекер составили, по выражению Лампе [3], «сиятельный круглый стол».

Через несколько лет Вейерштрасс освободился от кафедры в Промышленном институте и сосредоточил всю свою работу в университете. В начале 1864 г. он получил ординарную кафедру по математике — это была учрежденная специально для него кафедра, которой он заведовал до самой смерти.

Обзор истории научной деятельности Вейерштрасса заставляет задуматься над тем, почему он не был привлечен к научной работе по окончании экзаменов в Мюнстере. Ведь Гудерман очень высоко оценил в своем отзыве способности своего ученика, написав, что Вейерштрасс «своей работой вступил на правах равных в ряд увенчанных славой исследователей», и выразил надежду, что он сможет выступить в роли академического доцента [17].

Интересные исследования д-ра К.-Р. Бирмана ([17], [19]) показывают следующее. Председатель экзаменационной комиссии Дилленберг отменил высокую оценку Гудермана, а последний почему-то не счел возможным сообщить ее своему ученику. Это имело серьезные последствия для всей карьеры Вейерштрасса,

который ознакомился с заключением Гудермана лишь в 1853 г., после его смерти. Впоследствии Вейерштрасс говорил Г. А. Шварцу, что если бы он знал раньше о такой высокой оценке, то постарался бы раньше опубликовать свои работы в широкой печати и стал бы добиваться места в университете. Не зная мнения своего первого и единственного учителя, Вейерштрасс провел в изоляции от научного мира свои лучшие творческие годы.

В работах [17] — [19] говорится, что в математических кругах Германии в пятидесятых годах получилась довольно сложная обстановка в связи с объявившимися вакансиями в некоторых университетах и открывшейся возможностью перемещений видных математиков из одних городов в другие, причем число претендентов было больше, чем число возможностей. Поэтому для Вейерштрасса важное значение имела поддержка, оказанная ему такими крупными деятелями, как Крелль, основатель и редактор «Журнала чистой и прикладной математики», и Александр фон Гумбольдт, оказавший покровительство многим талантам, а также Дирихле, давший отзыв об исследованиях Вейерштрасса.

В 1870 г. в размеренную жизнь Вейерштрасса влилась живая струя: у него появилась ученица, Соня Ковалевская, прочно захватившая сердце старого ученого.

3-го октября 20-летняя Ковалевская пришла на квартиру к 55-летнему Вейерштрассу. Она сказала, что хочет слушать его лекции — перед тем она прослушала курс лекций в Гейдельберге у Кенигсбергера, ученика Вейерштрасса.

Вейерштрасс, получив от Кенигсбергера хорошую характеристику Ковалевской, сказал в шутку, что он охотно пополнил бы ею (придав слушательнице соответствующий — очевидно, больший единицы — коэффициент) свою аудиторию, пострадавшую из-за войны Пруссии с Францией: вместо прошлогодних 50 слушателей у него теперь было всего 20. Однако совет университета не разрешил этого, и Вейерштрасс стал заниматься с Ковалевской частным образом. По воскресеньям и еще раз в неделю она приходила к учителю, раз в неделю он бывал у нее (Ковалевская жила в Берлине с Юлией Лермонтовой).

Чтобы дать некоторое представление о характере отношений, установившихся между Вейерштрассом и Ковалевской, я процитирую только одну выдержку из письма учителя от 20 августа 1873 года, написанного на острове Рюгене, где он отдыхал, в то время как Соня была в Швейцарии. Описав красоты моря и острова, он выражает сожаление, что его ученицы нет с ним: «Как прекрасно мы оба — Ты с твоей полной фантазии душой и я, возбужденный и освеженный Твоим энтузиазмом, могли бы мечтать и думать здесь о многих задачах, которые нам предстоит решать —

о конечных и бесконечных пространствах, об устойчивости мировых систем и о всех других великих задачах математики и физики будущего. Но я уже давно научился смиряться с тем, что не всякий прекрасный сон осуществляется» [14].

Ученики Вейерштрасса вспоминали, каким он был для них другом и советчиком — по отношению к Ковалевской эти качества проявились наивысшим образом. Учитель называл ее своим единственным настоящим другом и делился с нею своими раздумьями и сомнениями.

Вейерштрасс пользовался огромным уважением и среди коллег благодаря своему открытому характеру и благожелательному отношению к людям. В 1873 г. ему предложили пост ректора университета, который он занимал в течение года.

Особенностью курсов, которые читал Вейерштрасс, было то, что они составляли единый цикл, на котором строилось все здание его математики, снизу доверху, начиная от понятия о числе, кончая теорией абелевых функций, шаг за шагом, в течение нескольких семестров.

Пуанкаре ввел деление математиков на логиков и геометров. Вейерштрасса, а также Ковалевскую он отнес к первым. Вейерштрасс считал, что теория функций должна развиваться логически, не опираясь на наглядные представления. Делать выводы из рассмотрения геометрических фигур было запрещено. Сущность математического познания — в абсолютной полноте его обоснования. Он воздавал должное гению Римана, но сам не мог применять его теории.

Все известные авторы: Лампе, Миттаг-Леффлер, И. Рунге говорят, что Вейерштрасс был прекрасным учителем, другом и советчиком тех, кто у него работал. Особняком стоит высказывание Феликса Клейна о том, что быть учеником Вейерштрасса было трудно, так как он скорее подавлял своим авторитетом, чем поощрял к самостоятельному мышлению. Возможно, что так он действовал на какую-то часть слушателей, не уверенных в своих силах. В этой связи характерен случай со школьным товарищем Вейерштрасса, о котором сказано выше.

Клейн говорит, что Вейерштрасс пользовался абсолютным и непререкаемым авторитетом и что он, Клейн, из духа противоречия не слушал его лекций, но потом жалел об этом. И. Рунге объясняет «дух противоречия» тем, что Клейн по природе был геометром.

Число слушателей Вейерштрасса менялось от 50 до 250 человек. С течением времени большая аудитория стала его тяготить. Когда С. В. Ковалевская начала в 1886 г. читать свой курс в Стокгольме, он ей писал (24 марта 1886 г.):

«От души поздравляю Тебя с большим числом слушателей. Конечно, Ты узнаешь на опыте, что многие из них обладают доброй волей, но слабыми возможностями... Если бы можно было объединить вокруг себя кружок не более чем из 12 талантливых и хорошо подготовленных слушателей, одушевленных преданностью науке, тогда академическое преподавание было бы самым ценным и интересным занятием в мире».

Вейерштрасс был удостоен многих почестей. Он был членом академий наук Берлина, Гёттингена, Парижа, Баварской Академии наук, Российской Академии наук, Лондонского королевского общества. Он был носителем французского ордена Pour le mérite, который до него был присужден из математиков только французам Коши, Дирихле и Понселе, а из немецких — Гауссу и Якоби.

В 1885 г., когда отмечалось 70-летие Вейерштрасса, он был на вершине своей славы. Наиболее известный портрет Вейерштрасса относится к этому времени.

Ученики Вейерштрасса в своих воспоминаниях говорят, что его внешность была импозантна: с великолепной выразительной головой, с красивыми седыми волосами он внушал студентам уважение уже одним своим видом. При этом одни считают, что Вейерштрасс внешностью похож на ученого, другие, как Миттаг-Леффлер, что не похож, а имеет вид настоящего вестфальца, и говорил он с вестфальским акцентом. Вероятно, то, что у него были голубые глаза и в молодости светлые волосы, типично для вестфальца. На портрете Вейерштрасса мы видим лицо умное, полное достоинства.

С. В. Ковалевская, будучи членом Комитета по организации чествования учителя, не приехала, однако, на празднование, и Вейерштрасс 14 декабря 1885 г. описывает ей, как оно проходило: «Должен Тебе откровенно признаться, что празднование моего 70-летнего юбилея, организованное моими старыми и молодыми слушателями, действительно было большой радостью для меня. Оно не имело официальной окраски — только министр культуры прислал мне полуофициальное поздравление — и, хотя и не было вполне свободно от преувеличений, тем не менее явилось ничем не омраченной демонстрацией чувств всех его участников. Кроме моих здешних коллег, лично присутствовали: Кантор, Шварц, Линдеманн, Киллинг, Томе, П. Дюбуа для передачи мне почетных подарков от имени Комитета» [1].

На юбилее Вейерштрасса отсутствовала не только Ковалевская, по разным причинам не было и других наиболее близких ему иностранных друзей и почитателей: Эрмита, Пуанкаре, Миттаг-Леф-

[1] Комитет по организации чествования Вейерштрасса.

флера. Вейерштрасс с уважением относился к Эрмиту, главе французских математиков того времени; Эрмит же говорил: «Вейерштрасс — учитель нас всех». Пуанкаре привлек внимание Вейерштрасса своими первыми работами, высоко им оцененными. Про Миттаг-Леффлера учитель писал Ковалевской, что это способный математик «с душой, направленной к идеалу». Шведский астроном и математик Гуго Гюльден недаром в шутку окрестил эту пятерку математиков — Вейерштрасс, Эрмит, Пуанкаре, Ковалевская, Миттаг-Леффлер — «лигой взаимного восхищения».

После радостно прошедшего юбилея грустные мысли, которые некоторое время тому назад начали овладевать Вейерштрассом, вновь приходят к нему. Заставляют задуматься болезни. Когда Вейерштрассу было еще только 35 лет, у него появились головокружения, после которых он вынужден был долгое время оставаться в постели и очень медленно поправлялся. При таком состоянии, повторявшемся у него на протяжении 12 лет, он впадал в полную апатию. Врачи называли это «утомлением мозга». Позднее появилось расширение вен, ноги распухали и болели. Читая лекции, он сидел, а кто-нибудь из студентов выписывал формулы на доске. Последние годы жизни Вейерштрасс провел в кресле на колесах.

Уже давно Вейерштрасс стал думать о том, чтобы выйти в отставку и поселиться где-нибудь в Швейцарии: ведь по мнению его врача «кроме чая из ромашки—единственное лекарство, о котором твердо известно, что оно приносит пользу,—есть свежий, мягкий воздух».

Но не только мысли о болезнях удручали Вейерштрасса. После смерти Борхардта он лишился самого близкого друга — сверстника и испытывал чувство одиночества в университете.

Много огорчений принес Вейерштрассу разрыв с Кронекером после многолетней дружбы. Кронекер предложил в математике направление, основанное на теории рациональных чисел и оставлявшее в стороне числа иррациональные, причем тогда вейерштрассово обоснование теории функций признавалось неудовлетворительным. Вейерштрасс очень страдал, по словам Ф. Клейна, особенно вследствие полемических приемов Кронекера. Можно только сожалеть вместе с Клейном о том, что Вейерштрасс принимал все это так близко к сердцу. Клейн добавляет, что «философия Кронекера, находящая постоянных сторонников даже среди серьезных математиков, не могла основательно поколебать вейерштрассовской теории функций, ... она не приобрела широкого влияния и никогда не была действительно плодотворной сама по себе».

В письмах Вейерштрасса нашли отражение события, связанные с премией по математике имени короля Швеции Оскара II.

Эта премия была учреждена в 1885 г., выдать же ее предстояло в 1889 г., к 60-летию короля. Жюри было выбрано в составе Вейерштрасса, Эрмита и Миттаг-Леффлера.

Была объявлена премия за лучший мемуар по одному из вопросов: 1) из области задачи об n телах, 2) за развитие мемуара Фукса, опубликованного в 76-м томе журнала Борхардта, 3) за развитие исследований Брио и Буке по дифференциальным уравнениям, 4) за обобщение функций, которые Пуанкаре назвал фуксовыми.

Первой премии были удостоены мемуары: Пуанкаре — о задаче трех тел и Аппеля — по теории абелевых функций. Они были опубликованы в 13-м томе Acta Mathematica.

Л. Кронекер обиделся на то, что его не выбрали в состав жюри, и Миттаг-Леффлеру пришлось объяснять ему, что основную роль в избрании Вейерштрасса играл его возраст. Кронекер был раздражен против пунктов 1) и 4), которые предложил Вейерштрасс. Поэтому у Вейерштрасса было много неприятных переживаний в связи с премией Оскара II.

В письме Ковалевской от 24.3.86 г. Вейерштрасс говорит: «Чего мне не хватает все больше и больше, так это дружественного сотрудничества с коллегами, основанного на согласии в принципах и искреннем взаимном признании». Однако письмо он заканчивает бодро, выражая скромное удовлетворение трудом своей жизни: «Никто лучше меня не знает, насколько я остался далеким от цели, которую поставил себе в своем воодушевлении молодости, но никто не может у меня отнять сознание того, что мои стремления и моя деятельность были не совсем напрасными и что путь, которым я шел к истине, не был ложным путем».

Меньше чем через пять лет после этого письма, в феврале 1891 г., Вейерштрасса постигло большое горе: умерла его любимая ученица. Когда было получено известие об этом, сестры Вейерштрасса в течение нескольких дней опасались за жизнь брата, который перед этим долго болел.

В 1896 г. скончалась сестра Вейерштрасса Клара, с которой, как и с другой сестрой, Элизой, и с братом он был в большой дружбе.

День 80-летия Вейерштрасса в 1895 г. отмечался совсем иначе, чем его предыдущая юбилейная дата. Собравшимся около него ученикам и товарищам нельзя было, по предписанию врача, беседовать с ним больше двух часов. Брат Петер был болен и находился в другом городе. Он ограничился присылкой телеграммы в стихах, которая была зачитана всем собравшимся.

Через год с четвертью Вейерштрасс тихо скончался.

Своими лекциями и беседами Вейерштрасс оказал большое влияние на развитие математической науки. Много лет продол-

жалось издание его трудов. Семь томов напечатано на протяжении 34 лет, с 1894 по 1927 г. [1].

Исследования Вейерштрасса, изложенные в этих трудах и связанные с работами его ученицы, нашли отражение в его письмах к С. Ковалевской.

Пояснения к математической части многих писем можно найти в комментариях к собранию научных работ С. В. Ковалевской [2].

* * *

Остановимся кратко на основных моментах жизни С. В. Ковалевской, к которым относится ее переписка с Вейерштрассом.

Первое письмо датировано 11 марта 1871 г.

В письмах Вейерштрасса не отражены поездки Ковалевской в Париж, первая из которых продолжалась с 5 апреля по 12 мая (при этом Софья Васильевна пробыла с Владимиром Онуфриевичем Ковалевским больше месяца в Парижской Коммуне) и вторая — после разгрома Парижской Коммуны.

Дальнейшие пять писем, с 3 июня 1871 г. по конец октября 1872 г., содержат деловые вопросы: об организации возможности для Ковалевской пользоваться библиотекой Берлинского университета, просьбу написать доказательство обсуждавшейся ранее теоремы. К одному из писем была приложена статья Г. Шварца (не сохранившаяся) о минимальных поверхностях. Другое письмо свидетельствует о том, что Софья Васильевна занималась θ-функциями.

Письмо от 26 октября 1872 г.— особое письмо, оно указывает на важный перелом в отношениях между учителем и ученицей. Накануне Соня рассказала ему о своем фиктивном браке с Владимиром Онуфриевичем и о тех переживаниях, которые возникли у нее вследствие ложности создавшегося положения. Хорошие отношения, существовавшие между фиктивными супругами, Владимиром Онуфриевичем и Софьей Васильевной, по ряду причин были нарушены. Только после года разлуки, весной 1873 г., супруги встретились, произошло их примирение, и их фиктивный брак стал фактическим. В одном из последних — «примирительных» писем Ковалевская весело высмеивает Владимира Онуфриевича по поводу того, что он ревнует ее «к занятиям, к учителям и т. п.».

В конце же октября 1872 г. Соню смущали вопросы ее знакомых о муже, о котором она уже несколько месяцев ничего не знала. Она находилась в подавленном настроении и однажды рассказала Вейерштрассу о себе. Задумавшись над ее судьбой, Вейерштрасс в письме от 26 октября предложил встретиться и обсудить возникший у него план. Это был, как известно, увенчавшийся успехом план написания Софьей Васильевной диссертации. С этого

времени учитель и ученица переходят на «ты», и он начинает называть ее уменьшительным именем «Соня». С этого же времени Вейерштрасс приобретает право называть себя «духовным отцом» Сони, т. е. ее исповедником, которому она открывает свое сердце — правда, время от времени, и не всегда в самые трудные моменты своей жизни, а лишь после того, как острота переживаний уже несколько спадает.

Вейерштрасс вместе с сестрами, Кларой и Элизой, принимает самое теплое участие не только в Соне, но и ее подруге Юлии Всеволодовне Лермонтовой, которая последовала настойчивому совету Сони и с ее помощью добилась разрешения слушать лекции и проводить лабораторные занятия у Бунзена. На рождественских каникулах 1872 г. Вейерштрасс пригласил Соню и Юлию на концерт, вместе с сестрами он устроил елку для молодых женщин.

1873—74 гг. проходят в усиленной подготовке трех работ для диссертации Софьи Васильевны. Отношения Вейерштрасса к любимой ученице становятся все более глубокими. Он начинает посвящать Соню в свои думы, свои интересы. В письме от 25.IV.73 г. он называет ее своей ученицей в лучшем смысле этого слова, единственным, настоящим другом.

В апреле 1873 г. Соня и Вейерштрасс одновременно были больны и обменялись рядом писем. Затем Соня для восстановления сил поехала в Швейцарию, к своей сестре Анне Васильевне, которая с мужем (Жакларом) и только что родившимся (18 марта, в день Парижской Коммуны) сыном после разгрома Парижской Коммуны жила в эмиграции в Цюрихе. Этим же летом Софья Васильевна провела несколько недель в Палибине у своих родных, но осенью опять вернулась в Швейцарию. Здесь она встречалась с Г. Шварцем, на которого произвела большое впечатление живостью своего ума. Она возымела желание остаться поработать у Шварца, однако потом от исполнения этого намерения отказалась. От Шварца она узнала, что Вейерштрасс назначен ректором Берлинского университета, и в письме к нему выразила опасение, что занятия с нею в дальнейшем будут обременительны для него. В ответ на это письмо от 20.VIII.73 г. Вейерштрасс говорит, что для Сони у него всегда найдется время. С возвращением в Берлин он просит повременить из-за холеры.

В 1874 г. Соня работает над диссертацией, причем Вейерштрасс внимательно просматривает ее статьи, выправляет ошибки, хлопочет о напечатании статей в журналах. Как известно, Вейерштрасс поставил вопрос перед Геттингенским университетом о присуждении Ковалевской ученой степени доктора философии без экзаме-

нов, что и было удовлетворено, и Ковалевская получила эту степень summa cum laude (с отличием).

Ковалевская представила к защите три работы, каждая из которых была бы достаточна для получения искомой степени. Первая из них: «К теории уравнений в частных производных», представляет особенно важное исследование. Полученный результат носит теперь название теоремы Коши — Ковалевской. Кроме того, в этой работе Ковалевская установила, что для уравнения теплопроводности можно искать решение в виде формального ряда по степеням независимой переменной t, который, однако, не будет сходиться ни при каких значениях t.

Вторая работа Ковалевской относилась к вопросу о форме кольца Сатурна. Лаплас рассмотрел эту задачу в первом приближении и получил, что поперечное сечение кольца имеет форму эллипса. Ковалевская уточнила решение и получила форму яйцевидного овала. Третья работа касается вопроса о приведении абелевых интегралов к более простому виду.

Интересно, что одновременно Вейерштрасс хлопотал перед химиками о Юлии Лермонтовой, об ее экзаменах, которые она сдала очень хорошо, и о защите ею диссертации.

Осенью Соня уехала на родину. Вейерштрасс с сестрами совершил трехдневное путешествие по Рейну. По возвращении в Берлин 21.IX.74, он пишет ей подробное письмо, где сообщает и о том, что напечатана ее статья об уравнениях с частными производными (часть экземпляров статьи учитель оставляет себе, часть отправляет автору, 250 экземпляров — в Геттинген), и о том, что в Гейдельберге он слышал разговоры о Соне и Юлии среди математиков и химиков: появление новых женщин-докторов после Доротеи Шлецер — первой женщины — доктора наук в Геттингене — вызвало сенсацию в научной среде Германии.

Соня, захваченная светской жизнью и личными переживаниями, редко писала своему старому другу. Круг ее интересов велик: она составляет для газеты научные обзоры и театральные рецензии, делает попытки писать литературные очерки (известно, что она написала повесть из жизни немецких ученых «Приват-доцент», но рукопись этой повести не обнаружена). Однако математикой в это время Софья Васильевна не занимается. Некоторое время Вейерштрасс продолжает писать ей длинные письма, в которых сообщает о своих работах, о сопоставлении своего подхода к задаче о приведении абелевых интегралов с подходом Чебышева, советует заниматься математической физикой и рекомендует изучать работы Сен-Венана; он посылает Соне новое издание переписки Якоби с Лежандром. Узнав, что появилась статья Дарбу по вопросам теории уравнений в частных производных, близким

к рассмотренным Ковалевской, Вейерштрасс проявляет беспокойство о сохранении приоритета своей ученицы.

Длинное письмо Софья Васильевна написала лишь в октябре 1875 г., в связи с кончиной своего отца; она подробно описала обстоятельства его смерти и рассказала о полном примирении, которое произошло в последнее время между отцом и когда-то вышедшими из-под его власти дочерьми.

Затем проходят три года, в течение которых Ковалевская не написала своему учителю ни одного письма. В августе 1878 г. она, неожиданно уже для Вейерштрасса, обращается к нему за каким-то советом из области математики.

Он отвечает ей 15.8.78 г. с острова Рюгена. Пишет о своей работе над периодическими функциями нескольких аргументов и над теорией дифференциальных уравнений; упрекает Соню за ее молчание. На протяжении трех лет он слышал о ней только два раза: от Миттаг-Леффлера и от Чебышева, причем оба они утверждали, что Ковалевская отошла от математики.

Так на самом деле и было, когда Софья Васильевна вместе с Владимиром Онуфриевичем были увлечены способами приобретения средств к обеспеченному существованию, для того чтобы потом свободно отдаться занятиям наукой. Супруги оказались неумелыми дельцами и в конце коцов пришли к полному разорению. На издательские дела, на приобретение домов, которые не давали дохода, были потрачены все средства, в том числе приданое Софьи Васильевны, деньги, занятые у Лермонтовой и других друзей.

Но осенью 1878 г., как мы видели, Софья Васильевна начала проявлять некоторый интерес к математике. В это время она ожидала ребенка и меньше времени стала уделять светской жизни. Правда, когда 17 октября у нее родилась дочка, названная Софьей и называемая в семье Фуфой (у Вейерштрасса — Фуфи), то Софья Васильевна выражала свою радость по поводу того, что не истощила сил математикой (что могло бы повредить ребенку), но это было временным настроением. Едва Фуфе исполнился год, как Софья Васильевна проявила опять интерес к своей любимой науке, побуждаемая к этому Чебышевым. Дело в том, что в самом конце 1879 г. состоялся VI съезд естествоиспытателей и врачей в Петербурге, и Чебышев предложил Ковалевской сделать доклад. Софья Васильевна в одну ночь подготовила свое сообщение об абелевых интегралах и с успехом выступила на съезде.

Весной 1880 г. супруги Ковалевские ликвидировали свои дела с домами и переехали в Москву. Здесь Владимир Онуфриевич с января 1881 г. должен был начать чтение лекций в Московском университете в качестве доцента. Софья Васильевна начала гото-

виться к магистерским экзаменам, однако, по велению министра просвещения, допущена к ним не была.

Чтобы получить средства к существованию семьи, Владимир Онуфриевич в Москве вступил в Товарищество нефтяного производства Рагозиных. В октябре 1880 г. он собрался поехать за границу по делам этого товарищества. Софья Васильевна решила на это время также съездить в Берлин к Вейерштрассу, оставив дочку на попечении бонны и Юлии Всеволодовны. Осенью она посылает письмо своему учителю и, не дожидаясь ответа, едет к нему. Вейерштрасс 28.X.80 г. пишет своей ученице длинное письмо, в котором говорит, что за последние годы нагрузки его возросли: умер его друг Борхардт и теперь к Вейерштрассу и Кронекеру перешло редактирование журнала Крелля; Вейерштрасс занят изданием полных собраний трудов Якоби, Дирихле и Штейнера; после смерти Борхардта у него появилось много новых обязанностей. Между тем Вейерштрасс чувствует себя неважно, лекции его утомляют; он перенес воспаление легких и заболевание печени. Для него лучше, чтобы Соня приехала к нему весной. Впрочем, если нужно, он всегда готов принять ее как желанную гостью.

Софья Васильевна не дождалась этого письма, 31.X.80 г. она уже была в Берлине. В начале января она возвратилась в Петербург, так как в это время туда должен был приехать Владимир Онуфриевич. Однако он вернулся лишь в конце февраля и к лекциям приступил уже в следующем семестре.

Ковалевская теперь была углублена в математику и полна интереса к новой захватившей ее задаче о преломлении света в кристаллах.

Весной 1881 г. Софья Васильевна поспешно уехала в Берлин с дочкой и бонной, а Владимир Онуфриевич, проводив их, отправился к брату в Одессу.

В начале 1882 г. Софья Васильевна встретилась с мужем в Париже, куда он приехал по делам Рагозиных. Вейерштрасс поощрял поездку Ковалевской в Париж, где она познакомилась с лучшими математиками Франции во главе с Шарлем Эрмитом.

В письме от 11.IV.82 г. Вейерштрасс говорит, что прошло больше четверти года со времени отъезда Сони, а он еще не написал ей. Он понял, что у его ученицы есть волнения и заботы, мешающие ей полностью отдаться занятиям. А 14.VI.82 г. он пишет, что догадывается о полном разладе между супругами Ковалевскими: «У него нет ни интереса, ни понимания Твоих идей, а Ты не можешь сжиться с беспокойным течением его жизни». Нужно, чтобы Соня обрела свободу от волнений и забот, необходимую для ее существования. Вейерштрасс выступает в этом письме как друг и советчик.

27.IV.1883 г. Владимир Онуфриевич покончил с собой, подавленный расстройством своих дел и угрозой суда по делу Рагозиных. Софья Васильевна тяжело пережила известие о его трагической гибели, заболела, отказалась от пищи, впала в беспамятство. Очнувшись, попросила лист бумаги и стала набрасывать математические выкладки. В Берлин она приехала похудевшая и измученная, пробыла там недолго и уехала в Россию во второй половине августа. Она проявила огромную энергию, чтобы добиться реабилитации Владимира Онуфриевича.

С 30.VII по 9.IX 1883 г. в Одессе проходил VII съезд Российского общества естествоиспытателей и врачей. На нем Ковалевская сделала доклад о своей новой работе «Преломление света в кристаллах».

Софья Васильевна получила приглашение профессора Миттаг-Леффлера принять должность приват-доцента во вновь открытом университете (Высшей школе) Стокгольма. Познакомилась она с Миттаг-Леффлером 10 февраля 1876 г., когда последний приехал в Петербург и навестил Ковалевскую по поручению Вейерштрасса.

Софья Васильевна приняла приглашение и 16 ноября 1883 г. выехала из Петербурга в Стокгольм. Теперь начался новый период в ее жизни, внешне — очень удачный, так как она заняла почетное для женщины место профессора, а затем и прославилась на весь мир, получив премию Бордена в Парижской Академии наук за задачу о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Награда была вручена 24 декабря 1888 г.

Поздравляя свою ученицу с получением премии, Вейерштрасс радуется тому, что теперь уже не будут называть Соню «слабостью старости Вейерштрасса» и признают ее заслуги.

Однако Ковалевская, несмотря на окружавший ее успех, не была счастлива. Ей хотелось или вернуться в Россию, или работать во Франции, куда ее влекла возможность быть с Максимом Ковалевским, ее однофамильцем, жившим во Франции, с которым ее связывала дружба. Впрочем, отношения с ним у Софьи Васильевны были сложными, неизвестно, чем бы они кончились, если бы она прожила дольше. Вейерштрасс опять выступает в качестве ее друга и советчика по вопросу об устройстве ее во Франции: он не видит хороших возможностей для нее в этой стране.

Что касается России, то там у славной дочери великой страны совсем не было никаких перспектив занять достойное положение, ее не хотели допустить даже к преподаванию на Высших женских курсах, так как она имела репутацию нигилистки. Петербургская Академия наук избрала ее своим членом-корреспондентом, но это была лишь честь, оказавшаяся на деле пустой формальностью: ей не разрешили даже посетить собрание академии!

Все же избрание в члены-корреспонденты было почетным, и Вейерштрасс в письме от 2.II. 1890 (одном из своих последних писем) поздравляет ее, добавляя: «Я искренне радовался тому, что первая академическая почесть Тебе была оказана в России».

Недолго была Ковалевская членом-корреспондентом. В начале 1891 г. она вернулась в Швецию после каникул и сильно простудилась. Почувствовав, что болезнь ее серьезна, она стала беспокоиться о Вейерштрассе, который тоже был болен. Софья Васильевна продиктовала записку, которая была послана их общему другу Ханземану, с просьбой подготовить Вейерштрасса.

10 февраля Софья Васильевна скончалась. Среди других венков на ее гроб был возложен венок из белых лилий с надписью «Соне от Вейерштрасса».

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ПИСЕМ ВЕЙЕРШТРАССА

Среди писем Вейерштрасса имеются письма с математическими вопросами и выкладками. Их можно разбить на группы по периодам жизни и математической деятельности Ковалевской. По большей части они связаны с теми исследованиями, которые проводила Ковалевская.

К первому периоду—периоду занятий с Вейерштрассом, относятся письма 1872—1874 гг.

Второй период — пребывание Ковалевской в России, к нему относятся три «математических» письма — от конца 1874 г., в 1875 и 1878 гг.

Следующий период — возвращение Ковалевской к математике — 1881—82 г., когда она часть времени проводила в Париже.

И, наконец, Стокгольмский период, с конца 1883 по 1888 г.; сюда входит период, когда Ковалевская занималась задачей о вращении.

5 (14.1.1872) — Вейерштрасс сообщает, что нездоров, и посылает свои наброски — выкладки, относящиеся к области гиперэллиптических интегралов. В это время Соня занималась задачей о приведении абелевых интегралов 3-го ранга к эллиптическим.

8 (4.11.72) — выкладки к общей задаче вариационного исчисления.

9 (18.11.72) — Вейерштрасс заметил у себя ошибку в вопросе о θ-функциях, которые он рассматривал с Соней накануне, и посылает ей свои выкладки.

$[9_1]$ **85** (без даты) — относится к этому же вопросу.

10 (22.11.72) — замечает, что некоторые исследования с θ-функциями нужно провести иначе, чем раньше, и просит Соню принести ее выкладки.

11 (7.12.72) — содержит замечание по поводу θ-функций.

18 (19.6.73) — относится к конформному отображению областей, ограниченных окружностями, и к задаче о потенциале кольца.

26 (27.1.73) — страничка выкладок, написанная в зале сената университета во время экзаменов.

27 (29.11.73). Просит Соню принести записки о минимальных поверхностях и то, что она сделала относительно одной формы.

28 (6.12.73) — речь идет о построенной Вейерштрассом теории обобщенных комплексных чисел и законе умножения для них.

29 (24.12.73) — Вейерштрасс подтверждает правильность выкладок Сони с эллиптическими интегралами, приводит свои выкладки и просит Соню прислать дальнейшие.

35 (6.5.74) — содержит добавление Вейерштрасса относительно параболических уравнений, условий для начальной функции, при которых существует решение в форме интеграла по бесконечной области и возможности разложения этого интеграла в ряд по степеням переменной x. Хвалит Ковалевскую за обнаруженное ею свойство: ряд может формально удовлетворять уравнению в частных производных и не сходиться ни для какой системы значений переменных.

36 (без даты). В нем Вейерштрасс предлагает Соне исследовать то, что теперь называют автомодельными решениями уравнения теплопроводности. В частном случае такого решения из него составляется известное решение задачи с начальным условием для бесконечной прямой. Ставится вопрос: что можно сделать с более общим автомодельным решением.

38 (19.5.74) — Вейерштрасса мучает парадокс, который у него получается в теории гиперэллиптических функций.

$38_1/95$ (4.7.74). Сообщает, что вчера у него пропал лист ее вычислений и он восстанавливает его по памяти, причем несколько улучшает вывод. Речь идет о приведении уравнений в частных производных к нормальному виду, которое применяет Ковалевская в статье «К теории дифференциальных уравнений в частных производных» [2].

44 (15.12.74). Излагает дополнение к своей теореме о представлении целой трансцендентной функции по ее нулям в виде бесконечного произведения и предлагает Соне — которая находится в России — проверить доказательство, воспользовавшись изложенным в ее «эллиптической» тетради.

Предлагает также поразмыслить над отысканием решений автомодельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений путем разложения в ряды по степеням времени и продолжения этих решений.

45 (11.75). Рекомендует своей ученице заняться математической физикой. Предлагает задачу о кратчайших линиях на поверхности n-мерного эллипсоида вращения, а также задачу Абеля, имеющую связь с задачей Ковалевской об абелевых интегралах 3-го ранга.

53 (15.8.78). Вейерштрасс говорит о своих поисках решения динамической задачи — системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которого ему не удается доказать сходимость.

56 (1.2.81). Сообщает, что работал над линейными уравнениями с периодическими коэффициентами. Для системы уравнений Гамильтона получил ряды, сходимость которых смог доказать только в случае одного параметра.

57 (6.3.81). Сообщает о том, что Таннери, следуя Вейерштрассу, нашел пример ряда, сумма которого разрывна при $x = 0$.

59. (11.4.82). Дает обобщение абелева интеграла на случай неоднозначной — алгебраической подынтегральной функции и вводит понятие первоначальной функции (Primfunction).

60 (14.6.82). Пишет Ковалевской, которая в это время находилась в Париже, о том, что он хочет обобщить теорему Пуанкаре о предоставлении в параметрическом виде двух переменных, удовлетворяющих алгебраическому уравнению (униформизация) на случай алгебраических уравнений с n переменными. В связи с письмом Эрмита и Пикара, адресованным Ковалевской, указывает, что для периодической функции с несколькими переменными система периодов может быть приведена к простейшему виду посредством линейной подстановки. С удовольствием сообщает о найденном Линдеманом доказательстве трансцендентности числа π и других чисел. Спрашивает, где напечатана работа Пуанкаре о системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

68 (27.12.83). В это время Ковалевская находится в Стокгольме. Вейерштрасс обращает ее внимание на различие между параболическими и волновыми уравнениями: если решение первого аналитично для положительных значений времени, то оно не определено для отрицательных. Дает совет применить его метод интегрирования линейных уравнений с постоянными коэффициентами к задаче о колебаниях эфира. Ковалевская применила этот метод к задаче о распространении света в кристаллических средах. Подробности об этой задаче есть в книге [2].

72 (17.10.84). Просит Ковалевскую отредактировать его статью об интегрировании линейных уравнений — вероятно, эта статья

помещена Ковалевской в ее работе «О преломлении света в кристаллических средах» [2].

73 (24.3.85) — Приводит свои возражения против теории Кронекера построения математики с помощью только рациональных чисел, изгнав иррациональные.

74 (16.5.85). Вейерштрасс говорит о своем обобщении определения интеграла Римана, опираясь на понятие меры Кантора. Для непрерывной в конечном интервале функции, выделяя в ней линейную часть, дает представление в виде сходящегося тригонометрического ряда,— в то время как обычное разложение в ряд Фурье может оказаться расходящимся.

79 (22.5.88). Говорится о преобразованиях подынтегральной функции в гиперэллиптическом интеграле. Вейерштрасс дает ряд советов по поводу преобразования интегралов — речь идет о вычислениях Ковалевской к ее задаче о вращении (см. [2]).

В примечании приводятся формулы, связанные с задачей о вращении.

80 (22.6.88). Приводится ряд формул к задаче о вращении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karl Weierstraß*. Mathematische Werke. Hrsg. von Georg Hettner und (bzw.) Johannes Knoblauch und (bzw.) Rudolf Rothe.
   Bd. 1. Abhandlungen I. Berlin, 1894.
   Bd. 2. Abhandlungen II. Berlin, 1895.
   Bd. 3. Abhandlungen III. Berlin, 1903.
   Bd. 4. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Berlin, 1902.
   Bd. 5. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Berlin, 1915.
   Bd. 6. Vorlesungen über die Anwendungen der elliptischen Functionen. Berlin, 1915.
   Bd. 7. Vorlesungen über die Variationsrechnung. Berlin, 1927.
2. *С. В. Ковалевская*. Научные работы. Редакция и комментарии П. Я. Полубариновой-Кочиной. Изд-во АН СССР, 1948.
3. *E. Lampe*. Zum Gedächtnisse von Karl Weierstraß.— Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin, **16**, N 5, 1898.
4. *G. Mittag-Leffler*. Weierstraß.— Acta Math., **21**, 1897.
5. *G. Mittag-Leffler*. Die erste 40 Jahre des Lebens von Weierstraß.—Acta Math., 39, 1923.
6. *G. Mittag-Leffler*. Zur Biographie von Weierstraß. — Acta Math., 35, 1912.
7. *G. Mittag-Leffler*. Weierstraß et Sonja Kowalevsky. — Acta Math., 39, 1923.
8. *H. Poincaré*. L'oeuvre mathématique de Weierstraß.— Acta Math., **22**, 1898—1899.
9. *D. Hilbert*. Zum Gedächtnis an Karl Weierstraß.— Nachr. d. Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1897.
10. *W. Killing*. Karl Weierstraß. Natur und Offenbarung, **43**, 1897.
11. *I. Runge*. Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk. Göttingen, 1949.
12. *F. Klein*. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert. Bd. 1. Berlin.

12а. *Ф. Клейн*. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937.

13. *М. Тихомандрицкий*. Карл Вейерштрасс. Сообщ. Харьк. матем. об-ва, 2-я серия, **6**, 1897.
14. *П. Я. Полубаринова-Кочина*. Из переписки с С. В. Ковалевской.— УМН, **7**, вып. 4 (50), 1952.
15. *П. Я. Полубаринова-Кочина*. К биографии С. В. Ковалевской (по материалам ее переписки).— Историко-мат. исследования, вып. 7, 1954.
16. *П. Я. Полубаринова-Кочина*. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (к 150-летию со дня рождения).— УМН, **21**, вып. 3(129), 1966.
17. *K.-R. Biermann*. Die Berufung von Weierstraß nach Berlin. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß — Wissenschaft. Abh. 33, d. Arb. Gem. f. Forsch. d. Land. Nordrhein-Westf., 1965.
18. *K.-R. Biermann*. Dirichlet über Weierstraß.— Praxis der Mathematik, 15 Dec. 1965.
19. *K.-R. Biermann*. Karl Weierstraß. Ausgewählte Aspekte einer Biographie.— J. für die reine und angewandte Math., Bd. 223, 1966.
20. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß. hrsg. v. H. Behnke und K. Kopfermann, Köln und Opladen, 1966.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель (*Abel*) *Нильс-Генрик* (1802—1829), норвежский математик 27, 58, 59, 63, 71, 72, 91, 105, 167, 196, 198, 202, 210, 228, 242, 289, 298, 304

Аппель (*Appell*) *Поль-Эмиль* (1855—1930), французский математик и механик, автор пятитомного курса теоретической механики 94, 96, 231, 233, 295

Ауверс (*Auwers*) *Артур* (1838—1915), астроном 132, 133, 266

Бальцер (*Baltzer*), немецкий математик 22, 162

Бельтрами (*Beltrami*) *Эудженио* (1835—1900), итальянский математик 89, 162

Бертран (*Bertrand*) *Жозеф-Луи-Франсуа* (1822—1900), французский математик 77, 215

Бетти (*Betti*) *Эуген* (1823—1892), итальянский математик 89, 226

Борден (*Bordin*) *Шарль-Лоран* (?—1835), французский нотариус, завещавший в 1835 г. ренту в 15 000 франков на премии за научные работы, которые должны были распределяться между пятью академиями, из которых состоял Французский институт 301

Борхардт (*Borchardt*) *Карл-Вильгельм* (1817—1880), немецкий математик 68, 69, 77, 80, 84, 132, 207, 215, 218, 221, 258, 266, 289, 290, 294

Брунс (*Bruns*) *Генрих-Эрнст* (1848—1919), немецкий математик и астроном, работал в Пулковской и Юрьевской обсерваториях 72, 79, 211, 217

Бунзен (*Bunsen*) *Роберт-Вильгельм* (1811—1899), немецкий химик, профессор 49—51, 188—190

Вагенер (*Wagener*) *Герман* (1815—1889), немецкий публицист 71, 216

Вебер (*Weber*) *Вильгельм* (1804—1891), немецкий физик 72, 115, 210, 251

Вебер (*Weber*) *Генрих* (1842—1913), немецкий математик 74, 78, 122, 212, 216, 257

Вейерштрасс (*Weierstrass*) *Карл-Теодор-Вильгельм* (1815—1897), знаменитый немецкий математик 285—289, 291, 292, 294—296, 299, 300, 302—305

Вейерштрасс Теодора (1791—1827), урожденная *Фондерфорст* (*Vonderforst*), мать К. Вейерштрасса 286

Вейерштрасс Вильгельм (1790—1869), отец К. Вейерштрасса 286

Вейерштрасс Клара (1823—1896), сестра К. Вейерштрасса 101, 106, 109, 116, 149, 238, 242, 245, 251, 283, 286, 289, 290, 295, 297

Вейерштрасс Петер (1820—1901), брат К. Вейерштрасса 131, 264, 286, 295

Вейерштрасс Элиза (1826—1898), сестра К. Вейерштрасса 103, 116, 149, 188, 240, 251, 283, 286, 289, 290, 295, 297

Гамильтон (*Hamilton*) *Уильям Роуан* (1828—1865), ирландский математик и астроном 57, 197

Ганземан (*Hansemann*) *Густав* (1829—1902), немецкий физик 116, 122, 251, 257, 290

Гаусс (*Gauss*) *Карл-Фридрих* (1777—1855), немецкий математик и астроном 75, 213, 293

Гейне (*Heine*) *Эдуард* (1821—1881), немецкий математик 22, 56, 162, 195

Гельмгольц (*Helmholtz*) *Герман* (1821—1894), немецкий естествоиспытатель, физиолог, физик и математик 105, 123, 242, 258

Герц (*Hertz*) *Рудольф* (1857—1894), немецкий физик 123, 258

Гильберт (*Hilbert*) *Давид* (1837—1912), немецкий математик 286

Гордан (*Gordan*) *Пауль* (1875—1910), немецкий математик 27, 28, 167, 168

Гофман (*Hofmann*) *Август-Вильгельм* (1818—1892), немецкий химик 46, 185

Гудерман (*Gudermann*) *Кристоф* (1793—1852), немецкий математик 287, 290, 291

Гумбольдт (*von Humboldt*) *Александр* (1769—1859), немецкий естествоиспытатель и географ 291

Гурвиц (*Hurwitz*) *Адольф* (1859—1919), немецкий математик

Гюбнер (*Hübner*), *Ганс* (1837—1884), немецкий химик 45, 69, 184, 185, 207

Гюльден (*Gylden*) *Юхан Аугуст Гуго* (1841—1896), шведский астроном 123, 258, 294

Дарбу (*Darboux*) *Гастон* (1842—1917), французский математик 68, 88, 205, 225

Дирихле (*Dirichlet*) *Петер-Густав-Лежен* (1805—1859), немецкий математик 75, 84, 128, 133, 136, 213, 221, 262, 267, 270, 291, 293

Дюбуа-Реймон (*Du Bois-Reymond*) *Поль* (1831—1889), немецкий математик 56, 129, 146, 195, 263, 279, 280, 293

Дюбуа-Реймон Эмиль (1818—1896), физиолог 56, 195

Евреинова (*Evreinow*) *Жанна* (1844—1919), первая в России женщина-юрист, приятельница сестры С. В. Ковалевской 35, 175

Жаклар (*Jaclard*) *Анна Васильевна*, урожденная Корвин-Круковская (1843—1887), писательница, сестра С. В. Ковалевской 297

Жаклар Виктор (1843 — после 1903), деятель Парижской коммуны, муж А. В. Жаклар 297

Золотарев (*Zolotareff*) *Егор Иванович* (1847—1878), русский математик 66, 80, 204, 218

Кантор (*Cantor*) *Георг* (1845—1918), немецкий математик, создатель теории множеств 120, 124, 129, 255, 259, 263

Каппелер (*Kappeler*), президент Швейцарского совета училищ 101, 238

Кекуле (*Kekule*), профессор медицины 35, 175

Кёнигсбергер (*Königsberger*) *Лео* (1837—1921), немецкий математик 49, 50, 59, 72, 74, 188, 189, 198, 210, 212, 291

Киллинг (*Killing*) *Вильгельм* (1847—1923), немецкий математик (129, 263, 293

Киперт (*Kiepert*) *Людвиг* (1846—1934), немецкий математик 131, 265

Кирхгоф (*Kirchhoff*) *Густав-Роберт* (1824—1887), немецкий физик и механик 49, 50, 56, 59, 72, 77, 105, 116, 132, 133, 188, 189, 195, 198, 210, 215, 242, 251, 266, 267

Клебш (*Clebsch*) *Альфред* (1833—1872), немецкий математик 27, 28, 62, 66, 99, 167, 168, 201, 204, 229

Клейн (*Klein*) *Феликс* (1849—1925), немецкий математик 93, 230, 285, 289, 292, 294

Кноблаух (*Knoblauch*) *Иоганнес* (1855—1915), немецкий математик 146, 280

Ковалевская (*Kowalewskaja*) *Софья Васильевна* (1850—1891), русский математик 286, 289—294, 296, 298, 299, 301—304

Ковалевская Софья Владимировна (1878—1952), дочь С. В. и В. О. Ковалевских (в письмах — Фуфа), врач 90, 103, 104, 106, 109, 114, 127, 133, 147, 149, 150, 227, 240, 242, 245, 249, 267, 281, 284, 303, 304

Ковалевский Владимир Онуфриевич (1842—1883), основатель эволюционной палеонтологии, муж С. В. Ковалевской 92, 230, 296, 299, 300, 301

Ковалевский Максим Максимович (1851—1916), историк права 301

Конер (*Koner*) *Вильгельм* (1817—1887), географ, заведующий биб-

лиотекой Берлинского университета 9, 11, 151, 152

Корвин-Круковская А. В. (*Korvin-Krukowskaja*), см. Жаклар

Корвин-Круковская Елизавета Федоровна (1820—1879), урожденная Шуберт, мать С. В. Ковалевской 286

Корвин-Круковский Василий Васильевич (1801—1875), генерал-лейтенант-от-артиллерии, отец С. В. Ковалевской 216

Корвин-Круковский Федор Васильевич (1855—1920), брат С. В. Ковалевской 52, 191

Коши (*Cauchy*) *Огюстен* (1789—1857), французский математик 110, 117, 124, 246, 252, 259, 293, 298

Краузе (*Krause*) *Иоганн-Мартин* (1851—1920), немецкий математик 50, 189

Кремль (*Crelle*) *Август-Леопольд* (1780—1855), немецкий инженер и математик, основатель журнала «Journal für die reine und angewandte Mathematik» 291, 300

Кристоффель (*Crhistoffel*) *Эрвин-Бруно* (1829—1900), немецкий математик 120, 255

Кронекер(*Kronecker*) *Леопольд* (1823—1891), немецкий математик, редактор журнала Кремля 84, 93, 104, 108, 111, 112, 120, 121, 124, 128, 130,132,133,136,150,221,230,241, 244, 247, 248, 255, 258, 262, 264, 266, 270, 283, 290, 294, 295, 300

Куммер (*Kummer*) *Эрнст-Эдуард* (1810—1893), немецкий математик 75, 105, 128, 130, 213, 241, 262, 264, 290

Лагранж (*Lagrange*) *Жозеф-Луи* (1736—1813), французский математик и механик 110, 245

Лампе (*Lampe*) *Эмиль* (1840—1918), немецкий математик 49, 188, 285, 288, 292

Лаплас (*Laplace*) *Пьер-Симон* (1749—1827), французский математик и астроном 287, 298

Лежандр (*Legendre*) *Адриен-Мари* (1752—1833), французский математик 77, 215, 298

Лермонтова (*Lermontoff*) *Юлия Всеволодовна* (1847—1919), доктор философии Гёттингенского ун-та (1874), первая русская женщина-химик 28—31, 45, 48, 51, 56, 61, 168, 169, 170, 171, 185, 187, 190—192, 200

Леффлер (*Leffler*) *Анна Шарлотта* (1849—1892), по первому мужу Эдгрен, по второму ди Каянелло, писательница, сестра Г. Миттаг-Леффлера 121, 256

Линдеман (*Lindemann*) *Фердинанд* (1852—1939), немецкий математик, дал доказательство трансцендентности числа π 99, 100, 102, 129, 133, 236, 237, 239, 263, 267, 293

Липман (*Lippmann*)*Габриель* (1845—1921), французский физик

Липшиц (*Lipschitz*),медик, профессор 35, 175

Листинг (*Listing*) *Иоган-Бенедикт* (1808—1882), немецкий математик и физик 69, 207

Лиувилль (*Liouville*) *Жозеф* (1809—1882), французский математик 93, 133, 230, 267

Лотце (*Lotze*) *Рудольф-Герман* (1817—1881), немецкий философ 49, 69, 188, 207

Мере (*Méray*) *Шарль* (1835—1911), французский математик 68, 69, 206, 207

Миттаг-Леффлер (*Mittag-Leffler*) *Магнус-Густав* (*Ёста*) (1846—1927), шведский математик, член шведской Академии и с 1926 г. почетный член Академии наук СССР 72, 80, 83, 88, 89, 91, 100, 102, 103, 106—108, 110, 111, 113, 114, 116, 122, 123, 126, 130, 134, 141, 146—149, 211, 218, 225, 226, 228, 237—240, 242—245, 247—251, 257, 258, 260—264, 280—282, 284, 286, 292—295, 299, 301

Миттаг-Леффлер Сигне, жена Г. Миттаг-Леффлера 102, 238

Молк (*Molk*) *Жюль* (1857—1914),

французский математик и механик 99, 100, 102, 121, 133, 236, 238, 239, 256, 268
Монж (*Monge*) Гаспар (1746—1818), французский математик 110, 246
Мюлер (*Mühler*) *Генрих* (1813—1874), прусский министр просвещения 46, 185

Нейман (*Neumann*) *Франц* (1798—1895), немецкий математик 58, 197
Нейман Карл (1832—1925), немецкий математик 58, 197
Нетто (*Netto*) *Эуген* (1846—1919), немецкий математик 132, 266

Оскар II (1829—1907), король Швеции (1872—1907) и Норвегии (1872—1905), с 1899 г. почетный член Петербургской Академии наук 122, 257, 294

Паули (*Pauli*) *Рейнгольд* (1823—1882), историк 69, 207
Пикар (*Picard*) *Шарль-Эмиль* (1856—1941), французский математик 88, 93, 94, 97, 225, 230, 231, 234
Платен (*von Platen*) *Август* (1796—1835), немецкий поэт 131, 265
Пуанкаре (*Poincaré*) *Жюль-Анри* (1854—1912), французский математик 93—100, 107, 149, 150, 230, 232, 233, 237, 243, 283—285, 293
Пуассон (*Poisson*) *Сименен-Дени* (1781—1840), французский математик 58, 117, 196, 252
Пфафф (*Pfaff*) *Иоганн-Фридрих* (1765—1825), немецкий математик 110, 246

Реймер (*Reimer*) *Георг-Андрэ* (1818—1899), книгоиздатель 115, 250
Риман (*Riemann*) *Бернгард* (1826—1866), немецкий математик 27, 28, 31, 37, 62, 98, 105, 124, 167, 168, 171, 176, 201, 235, 242, 258, 285, 292, 305
Ришело (*Richelot*) *Фридрих-Юлиус* (1808—1875), немецкий математик 26, 27, 62, 72, 74, 106, 167, 201, 210, 212, 229
Розенхайн (*Rosenhain*) (1816—1887), немецкий математик 133, 268, 285, 292
Рюдберг (*Rydberg*) *Виктор* (1828—1895), шведский поэт и историк культуры 121, 122, 256
Сен-Венан (*Saint-Venant*) *Адемар-Жан-Клод* (1797—1886), французский механик 57, 197

Таннери (*Tannery*) *Жюль* (1848—1910), французский математик 88, 225
Томе (*Thomé*) *Вильгельм-Людвиг* (1841—1910), немецкий математик 129, 263, 293

Фрагмен (*Phragmén*) *Ларс-Эдвард* (1863—1937), шведский математик, секретарь редакции журнала Acta Mathematika 150, 284
Френцхен (*Frenzchen*), приемный сын К. Вейерштрасса 147, 149, 281, 283, 284
Фридрих-Вильгельм (1831—1888), немецкий кайзер и король Пруссии (1888 г., правил 99 дней), Фридрих III 47, 186
Фробениус (*Frobenius*) *Георг* (1849—1917), немецкий математик 78, 115, 215, 251
Фукс (*Fuchs*) *Иммануель-Лазарус* (1833—1902), немецкий математик 66, 72, 93, 95, 111, 113, 120, 122, 124, 129, 130, 132, 146, 150, 204, 205, 210, 230, 232, 247, 248, 255, 257, 258, 263, 264, 266, 280, 283

Ханземан, см. *Ганземан*
Хензель (*Hensel*) *Курт* (1861—1941), немецкий математик, издатель журнала Крелля (1901—1936) 121, 146, 256, 280
Хенох (*Henoch*) 141, 275
Хеттнер (*Hettner*) *Георг* (1854—1914), немецкий математик 89, 111, 132, 133, 146, 226, 247, 266, 267, 280
Хольмгрен (*Holmgren*) *Яльмар* (1822—1881), шведский математик и механик 123, 257, 258

Чебышев (*Tschebyscheff*) *Пафнутий Львович* (1821—1894), русский математик и механик 63, 65, 66, 75, 80, 201, 203, 204, 213, 218
Чельберг (*Kjelberg*) *Юлия* (1854—?), шведская знакомая С. В. Ковалевской 115, 251

Шварц (*Schwarz*) *Карл Герман Аманду́с* (1843—1921), немецкий математик 11, 56, 60, 74, 77, 89, 93, 107, 129, 131, 152, 195, 199, 212, 215, 226, 230, 243, 263, 264, 291, 293, 296, 297
Шерер (*Scherer*) *Вильгельм* (1841—1886), германист 121, 130, 256, 264
Шеринг (*Schering*) *Эрнст* (1833—1897), немецкий математик 56, 68, 72, 89, 195, 207, 210, 226.
Шлемильх (*Schlömilch*) *Оскар* (1823—1901), немецкий математик 66, 204
Шлецер (*Schlözer*) *Доротея* (1770—1825), в 17 лет получила в Гёттингене ученую степень доктора за работу по истории русских финансов 50, 189, 238, 298
Шоттки (*Schottky*) *Фридрих* (1851—1935), немецкий математик 101, 238
Штейнер (*Steiner*) *Якоб* (1796—1863), немецкий математик 24, 84, 91, 105, 132, 163, 221, 228, 241, 266
Штерн (*Stern*) *Мориц* (1807—?), немецкий математик 89, 226
Штурм (*Sturm*) *Жак-Шарль-Франсуа* (1803—1855), французский математик 133, 267

Эдгрен, см. *Леффлер*
Эйзенштейн (*Eisenstein*) *Фердинанд* (1823—1852), немецкий математик 105, 242
Энестрем (*Enestrom*) *Густав* (1852—1923), шведский историк математики 122, 136, 257, 270
Эрмит (*Hermite*) *Шарль* (1822—1901), французский математик, с 1896 г. почетный член Петербургской Академии наук 66, 68, 88, 93, 94, 97, 99, 100, 112, 127, 130, 141, 146, 148, 150, 204, 206, 207, 225, 230, 231, 234, 236, 248, 261, 264, 275, 280, 282, 284, 293, 294, 295, 300, 304

Юргенс (*Jürgens*) *Энно* (1849—1907), немецкий математик 50, 72, 189, 210

Якоби (*Jacobi*) *Карл-Густав* (1804—1851), немецкий математик, один из создателей теории эллиптических функций 75, 77, 84, 91, 98, 105, 110, 120, 133, 213, 215, 221, 223, 234, 242, 246, 255, 267, 287, 289, 293, 298

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

Vorwort 7

Briefe von K. Weierstraβ 9

Письма К. Вейерштрасса 151

П. Я. Кочина-Полубаринова. Карл Вейерштрасс и его письма Софье Ковалевской . . 285

Литература 306

Именной указатель 307

Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской

Утверждено к печати Институтом проблем механики

Редактор издательства **Л. М. Бекасова**
Художник **С. А. Данилов**
Технический редактор **С. Г. Тихомирова**

Сдано в набор 29/VI 1973 г. Подписано к печати 22/X 1973 г.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага № 1. Усл. печ. л 18,3 Уч.-изд. л. 18,8
Тираж 2300 Т-14291 Тип. зак. 2621. *Цена 1 р. 36 к.*

Издательство «Наука». 103717 ГСП,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Druckfehlerverzeichnis

Стр. Seite	Строка Zeile	Напечатано Es heisst	Следует читать Es soll heissen
15	6 сн.	gen auf	habe. Nur
21	18 св.	W. Weierstrass	K. Weierstrass
35	8 св.	Formen	Formeln
38	13 св.	complexer	complexen
51	19 св.	fast	fest
59	19 св.	bestummt	bestimmt
60	13 св.	ser	sehr
104	16 св.	vortkommen	fortkommen
105	21 св.	Eblehend	ablehend
108	18 сн.	begrüßen	begnügen
127	4 сн.	Atunden	Stunden