Charles Hermite

1822 – 1901.

ШАРЛЬ ЭРМИТ

КУРС АНАЛИЗА

ПЕРЕВОД
В. М. ОЗЕРЕЦКОГО
с 4-го французского издания
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
проф. *Н. М. ГЮНТЕРА*

ОНТИ • ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1936 МОСКВА

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
DE M. HERMITE

RÉDIGÉ EN 1882 PAR M. ANDOYER, ÉLÈVE À L'ÉCOLE NORMALE

QUATRIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

8, RUE DE LA SORBONNE, 8

1891

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эрмит является одним из знаменитейших математиков XIX столетия как по своему творчеству, так и по своей педагогической деятельности. В конце 1860 г. он читал курс Анализа в Политехнической школе. Тогда же был напечатан первый том этого курса, заключающий основы дифференциального и интегрального исчислений; вторая же часть курса, заключающая учение об определенных интегралах, теорию функций комплексного переменного, теорию эллиптических функций и учение об интегрировании дифференциальных уравнений, напечатана не была, имеется лишь в литографированном виде и составляет библиографическую редкость.

В Политехнической школе Эрмит читал курс Анализа в продолжение двух или четырех лет, главная же педагогическая деятельность его (свыше сорока лет) протекает в Парижском университете (Сорбонна).

Долгие годы Эрмит читал здесь этот знаменитый курс, хотя и названный им Cours d'Analyse, но в сущности представляющий курс Теории функций, развитой на основах учений Вейерштрасса, с присущею Эрмиту ясностью и оригинальностью изложения.

Курс этот издан не был, но сохранился в литографированном виде, составленном Андуайе; самое имя составителя ручается за точность изложения содержания; впрочем последнее, четвертое издание, было просмотрено самим Эрмитом.

А. Н. Коркин был по своим воззрениям противником Вейерштрасса, но он высоко ставил курс Эрмита, рекомендовал его изучение магистрантам и всем своим ученикам.

Можно лишь приветствовать издание этого курса, который не должен служить учебником при первоначальном изучении Анализа, а должен служить пособием для тех, кто желает глубже изучить этот предмет и вникнуть в дальнейшее развитие этого предмета за последние сорок или пятьдесят лет.

Академик *А. Крылов.*

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ.

Определение площади, ограниченной отрезком, и длины дуги плоской кривой. Площади эллипса, гиперболы, уникурсальных кривых, циклоиды.

При применении интегрального исчисления к геометрии занимаются прежде всего квадратурой площадей и спрямлением плоских кривых. Первая, возникающая при рассмотрении этих вопросов задача заключается в точном определении того, что надо понимать под площадью, ограниченной отрезком кривой, и под длиной дуги. Эти величины в течение долгого времени рассматривались, как первоначальные понятия, не приводимые к другим, более простым.

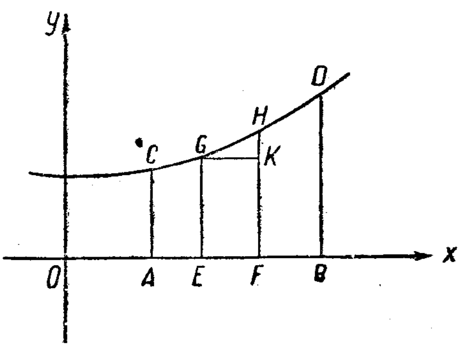

Рис. 1.

Пусть $y = f(x)$ кривая (рис. 1), отнесенная к прямоугольным координатам, AC и BD — две ординаты, соответствующие абсциссам $OA = x_0$ и $OB = X$. Дадим сначала определение площади $ABCD$.

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ возрастающие значения x, заключенные между x_0 и X; указанную площадь мы определим, как предел суммы:

$$(x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

к которому она стремится, когда разности $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots X - x_{n-1}$ становятся меньше любой заданной величины.

Полагая $y_i = f(x_i)$ и $x_n = X$, напишем это выражение в более сжатом виде:

$$\sum (x_{i+1} - x_i) y_i. \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1).$$

Заметим также, что, положив $OE = x_i$, $OF = x_{i+1}$ и построив ординаты EG, FH, мы можем заключить, что каждый член $(x_{i+1} - x_i) y_i$ выражает площадь прямоугольника $EFGK$, в котором GK параллельна оси OX; следовательно, предел суммы этих прямоугольников будет геометрическим определением площади, ограниченной отрезком кривой.

Рассмотрим теперь многоугольник, вписанный в кривую CD, вершины которого имеют координатами x_i, y_i; длина дуги CD определится как предел суммы:

$$\sum [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2},$$

которая равна периметру многоугольника, к которому она стремится, когда все разности $x_{i+1} - x_i$ неограниченно уменьшаются.

Эти два определения приводят к одному и тому же вопросу анализа, который в первом случае представляется в более простом виде, и цель которого — доказать существование единственного предела, определяемого суммой

$$S = \sum (x_{i+1} - x_i) y_i.$$

Вот его решение, которое дал Коши в своей 21-й лекции Курса анализа Политехнической школы.

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна, понимая непрерывность в том смысле, что при возрастании переменной от $x = x_0$ до $x = X$, $f(x)$ принимает последовательно все значения, заключенные между $f(x_0)$ и $f(X)$. Обозначив некоторое такое значение через Y, можем положить:

$$Y = f(\xi),$$

где ξ — абсцисса, заключенная между x_0 и X, что позволяет написать:

$$\xi = x_0 + \theta (X - x_0),$$

где θ — положительное число, меньшее единицы.

Имея это, замечаем, что мы получим нижний и верхний пределы для S, если заменим ординаты y_i наименьшей и наибольшей между ними. Пусть также Y есть некоторая величина, промежуточная между минимальным и максимальным значением этих ординат; имеем

$$S = Y \sum (x_{i+1} - x_i) = Y (X - x_0)$$

или, на основании сказанного,

$$S = f[x_0 + \theta (X - x_0)] (X - x_0).$$

Установив это, разделим каждый из интервалов $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, и т. д. на другие меньшие, и обозначим через S_1 новую сумму, которая получится в результате этих преобразований. Каждое из слагаемых $(x_1 - x_0) f(x_0)$, $(x_2 - x_1) f(x_1)$ и т. д. следует заменить частичными суммами, величинами которых, как только что было установлено, будут, если θ_0, $\theta_1 \ldots$ числа меньшие единицы:

$$\begin{array}{l} (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] \\ (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

следовательно, можем написать:

$$S_1 = \sum (x_{i+1} - x_i) f[x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i)].$$

Это выражение дает возможность легко определить разность $S_1 - S$; полагая:

$$f[x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i)] = f(x_i) + \varepsilon_i,$$

получаем

$$S_1 = S + \sum (x_{i+1} - x_i)\,\varepsilon_i,$$

откуда следует, считая η заключенным между наименьшим и наибольшим значениями ε_i,

$$S_1 - S = (X - x_0)\,\eta.$$

Таким образом, мы видим, что разность $S_1 - S$ можно сделать меньше любой заданной величины, так как значения $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}$, а, следовательно и η, при достаточном уменьшении разностей $x_{i+1} - x_i$ могут быть сделаны сколь угодно малыми.

В заключение Коши добавляет, что каков бы ни был способ разделения интервала $X - x_0$, мы достигнем того же самого предела, заставляя безгранично уменьшаться части этого деления. Пусть, в самом деле, S и S_1 — суммы, соответствующие двум различным законам убывания; доказываем, что разность $S - S_1$ имеет пределом нуль, рассматривая третий способ разделения, в который входят все значения, заключенные между x_0 и X, которые фигурируют в первом и втором способе. Обозначив через S_2 сумму, соответствующую этому третьему способу и, пользуясь доказанным, видим, что разности $S - S_2$ и $S_1 - S_2$, а вместе с ними и разность $S - S_1$, могут быть сделаны меньше любой заданной величины.

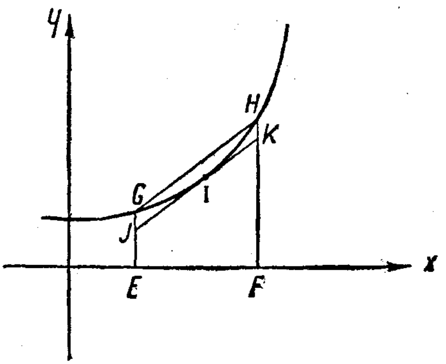

Рис. 2.

Геометрическое понятие площади, ограниченной кривой, которое мы только что получили, и аналитическое понятие, соответствующее определенному интегралу, дают нам, как простое следствие, определение с этой точки зрения длины дуги. Действительно, периметр вписанного многоугольника, выраженный суммой

$$S = \sum \left[(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2\right]^{1/2},$$

может быть написан в виде:

$$S = \sum \left[1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right]^{1/2} (x_{i+1} - x_i);$$

достаточно заметить, что при бесконечном убывании $x_{i+1} - x_i$ величина $\left[1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right]^{1/2}$ становится в пределе равной значению $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ при $x = x_i$. Мы получаем таким образом выражение площади, ограниченной кривой $y = \sqrt{1 + f'^2(x)}$, так что площадь и дуга будут представлены аналогичными формулами. Выберем между всеми способами убывания разностей $x_{i+1}-x_i$ наиболее простой. Положим их равными одному и тому же, бесконечно малому количеству dx; тогда мы сможем написать, вводя знак $\int$ вместо $\sum$:

$$S=\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

$$S=\int_{x_0}^{X} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

К данному определению дуги я добавлю еще следующее замечание.

Рассмотрим некоторую сторону GH многоугольника (рис. 2), вписанного в дугу S, и касательную к кривой в точке I, взятой произвольно между G и H. Отрезок этой касательной JK, заключенный между ординатами GE и HF, имеет ту же самую проекцию на ось абсцисс, как и хорда GH; таким образом, обозначая через φ и ψ углы хорды и касательной с осью, имеем соотношение:

$$GH\cos\varphi=JK\cos\psi.$$

Отношение $\frac{GH}{IK}$ имеет пределом единицу, разность $\varphi-\psi$ бесконечно мала; по теореме о замене в пределах сумм одних бесконечно малых другими, мы можем заменить стороны вписанного многоугольника рядом отрезков JK, не прилегающих друг к другу. Это замечание нам будет полезно в дальнейшем.

Первое приложение формулы квадратур будет иметь своим предметом вычисление площадей, ограниченных кривыми второго порядка. Будем исходить из общего выражения ординаты:

$$y=\alpha x+\beta+\sqrt{ax^2+2bx+c},$$

которое прежде всего дает

$$S=\frac{1}{2}\alpha x^2+\beta x+\gamma+\int\sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx,$$

где γ — произвольная постоянная. Положим $R=ax^2+2bx+c$.

Вычисление интеграла $\int\sqrt{R}\,dx$ производится следующим образом.

Замечаю, что можем написать:

$$aR=(ax+b)^2-b^2+ac;$$

применяя затем тождество:

$$D_x[(ax+b)\sqrt{R}]=a\sqrt{R}+\frac{(ax+b)^2}{\sqrt{R}}=\frac{aR+(ax+b)^2}{\sqrt{R}}$$

или

$$D_x[(ax+b)\sqrt{R}]=\frac{2aR+b^2-ac}{\sqrt{R}},$$

получаем

$$(ax+b)\sqrt{R}=2a\int\sqrt{R}\,dx+(b^2-ac)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Предлагаемый интеграл приведен к алгебраическому выражению и к уже известной величине $\int\frac{dx}{R}$; это дает:

$$\int\sqrt{R}\,dx=\frac{ax+b}{2a}\sqrt{R}-\frac{b^2-ac}{2a\sqrt{a}}\ln(ax+b+\sqrt{aR}).$$

В случае эллипса, в котором $a<0$, логарифм становится мнимым; приведем интеграл к виду, явно вещественному.

Пусть, выделяя часть вещественную и часть мнимую, имеем:

$$ax+b+\sqrt{aR}=p+iq,$$

вследствие этого

$$ax+b-\sqrt{aR}=p-iq.$$

Значит:

$$(ax+b)^2-aR=p^2+q^2$$

или

$$b^2-ac=p^2+q^2.$$

Положим теперь, замечая, что b^2-ac положительно:

$$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{b^2-ac}}=\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$$

$$\sin\theta=\frac{q}{\sqrt{b^2-ac}}=\frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{b^2-ac}};$$

получаем

$$\frac{1}{i}\ln(ax+b+\sqrt{aR})=\theta.$$

Можно поступать еще иным способом, изменяя переменную и исходя от R, разложенного на множители первой степени:

$$R=a(x-g)(x-h).$$

Предположим $g>h$; полагаем

$$x=g\sin^2\varphi+h\cos^2\varphi;$$

это дает

$$dx=2(g-h)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{2d\varphi}{\sqrt{-a}}$$

и следовательно:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\varphi.$$

Углы θ и φ, которые мы последовательно ввели, удовлетворяют двум уравнениям:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{a^2(g-h)^2}};$$

имея:

$$a^2(g-h)^2 = 4(b^2 - ac),$$

выводим:

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin\theta,$$

откуда:

$$2\varphi = \theta,$$

как и следовало ожидать.

Рассмотрим в частности эллипс, отнесенный к своим осям:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Выражение площади, ограниченной его дугой, будет:

$$S = \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + ab\varphi.$$

Зависимость угла φ от абсциссы дана соотношением:

$$x = a(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi).$$

Таким образом, мы видим, что при возрастании φ от нуля до $\frac{\pi}{2}$, x изменяется от $-a$ до $+a$, и так как первое алгебраическое слагаемое исчезает на этих двух границах, формула дает для площади полуэллипса:

$$S = \frac{\pi ab}{2}.$$

Квадратуру эллипса мы можем получить другим способом, выражая координаты его точек формулами:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t.$$

Вообще, рассмотрим некоторую кривую, определяемую уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; интеграл $\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$ даст площадь $MNAB$ при условии, что при возрастании t от α до β, выражения x и y дают все точки дуги от M до N (рис. 3).

Рассмотрим теперь, сохраняя ту же вспомогательную переменную, некоторую замкнутую кривую, которая в данном случае будет описана полностью; исходим от точки P в направлении PNM таким образом, что внешнее пространство находится всегда справа; пусть t возрастает от t_0 до t_1; предположим дальше, что кривая непрерывна и что одной и той же абсциссе соответствуют только две ординаты. Пусть M и N (рис. 4) предельные точки, ординаты которых — касательные. Рассмотрим последовательно дуги PN, NM, MP и предположим, что первая будет описана при возрастании t от t_0 до α, вторая — от α до β и третья — от β до t_1.

Имеем:

$$PQNB = \int_{t_0}^{\alpha} \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$NBMA = \int_{\beta}^{\alpha} \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$MAPQ = \int_{\beta}^{t_1} \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

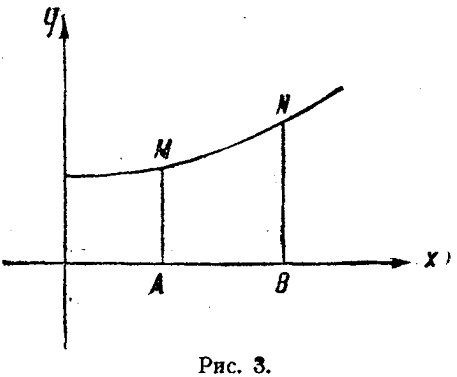

Рис. 3.

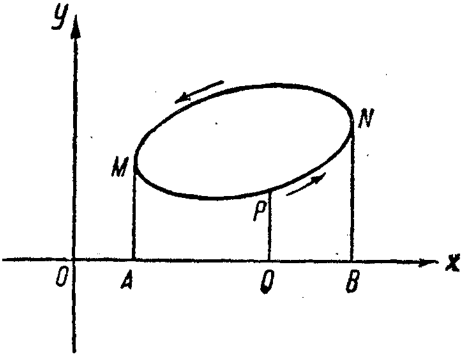

Рис. 4.

Пусть S — площадь, ограниченная замкнутой кривой; получаем

$$-S = PQNB - NBMA + MAPQ = \int_{t_0}^{\alpha} \psi\varphi'dt - \int_{\beta}^{\alpha} \psi\varphi'dt + \int_{\beta}^{t_1} \psi\varphi'dt,$$

или

$$-S = \int_{t_0}^{\alpha} \psi\varphi'dt + \int_{\alpha}^{\beta} \psi\varphi'dt + \int_{\beta}^{t_1} \psi\varphi'dt$$

и окончательно:

$$-S = \int_{t_0}^{t_1} \psi\varphi'dt.$$

Интеграл $\int_{t_0}^{t_1} \psi\varphi'dt$ с измененным знаком дает площадь, заключенную внутри кривой. Очевидно, что площадь дается интегралом без изменения его знака, когда контур описывается таким образом, чтобы внешнее пространство находилось слева.

Применим этот результат к эллипсу, пользуясь формулами:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Если заставить t возрастать от 0 до 2π, то кривая окажется полностью описанной один раз и внешнее пространство будет все время справа от направления описывающей точки.

Таким образом, обозначая через S площадь эллипса, будем иметь:

$$S = -\int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} ab\sin^2 t\,dt.$$

Применим теперь к интегралу $\int \sin^2 t\,dt$ общий метод, применяемый к $\int \cos^m x \sin^n x\,dx$. Преобразуем степени или произведения степеней косинуса и синуса x в линейные выражения через косинусы и синусы кратных дуг. Здесь мы получаем непосредственно:

$$\int \sin^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C,$$

откуда

$$S = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi ab.$$

Следующее замечание, как мы сейчас увидим, упростит вычисление. Возьмем снова формулу:

$$S = -\int_{t_0}^{t} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

имеем очевидно:

$$\varphi(t)\,\psi(t) = \int [\varphi(t)\,\psi'(t) + \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt,$$

и так как функции имеют одно и то же значение на границах t_0 и t_1, мы можем написать:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t)\,\psi'(t) + \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt,$$

что сразу дает:

$$2S = \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt.$$

В случае, когда $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$, эта формула приводит к выражению

$$2S = \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = 2\pi ab.$$

Если мы рассматриваем вообще уникурсальную кривую, имея $x = \frac{B}{A}$, $y = \frac{C}{D}$, A, B, C целые полиномы от t, то мы получаем:

$$2S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{B(AC' - CA')}{A^3} - \frac{C(AB' - BA')}{A^3}\right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{BC' - CB'}{A^2}\, dt.$$

Упрощение заключается в том, что интегрируемая рациональная дробь имеет в знаменателе A^2 вместо A^3, входящего в первую формулу.

Рассмотрим далее гиперболу:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Для площади, ограниченной дугой, взятой от точки $x = a$, т. е. вершины кривой, получим

$$S = \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a};$$

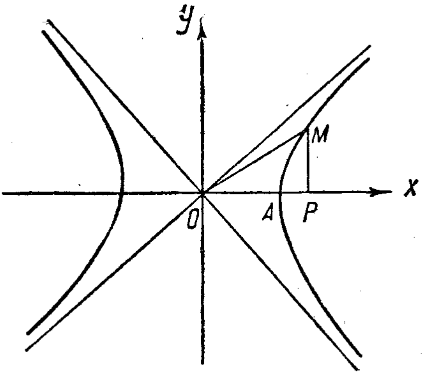

Рис. 5.

в случае равносторонней гиперболы, полагая $b = a$, имеем:

$$S = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Алгебраическая часть этого выражения равна площади треугольника OMP (рис. 5); отсюда заключаем, что трансцендентная часть представляет сектор OMA. Положив для большей простоты $a = 1$ и обозначив этот сектор через u, мы можем написать:

$$2u = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + y).$$

Отсюда получаем

$$x + y = e^{2u}$$

и, по уравнению: $x^2 - y^2 = 1$,

$$x - y = e^{-2u}.$$

Эти формулы нам дают:

$$x = \frac{e^{2u} + e^{-2u}}{2}$$

$$y = \frac{e^{2u} - e^{-2u}}{2};$$

x и y выражаются, следовательно, функциями от e^{2u}, тогда как $\sin x$ и $\cos x$ выражаются функцией от $e^{x\sqrt{-1}}$. Это аналитическое соотношение можно было ожидать, так как площадь гиперболы становится площадью круга, если ввести множитель $\sqrt{-1}$. По этой причине x и y называют гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом от $2u$. Полезно остановиться несколько на геометрических следствиях этого аналитического соотношения.

Имеем два гиперболических сектора u и u'; получаем следующие уравнения:

$$x + y = e^{2u} \qquad x - y = e^{-2u}$$
$$x' + y' = e^{2u'} \qquad x' - y' = e^{-2u'}$$

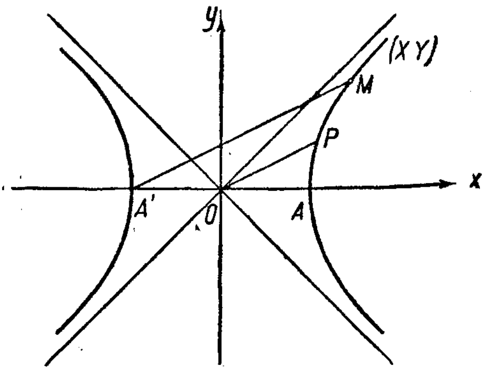

Рис. 6.

Находим теперь координаты X, Y такой точки гиперболы, соответствующий сектор которой равен $u + u'$. Это условие нам дает:

$$X + Y = e^{2(u+u')}$$
$$X - Y = e^{-2(u+u')};$$

отсюда заключаем:

$$X + Y = (x + y)(x' + y')$$
$$X - Y = (x - y)(x' - y'),$$

откуда:

$$X = xx' + yy'$$
$$Y = xy' + yx',$$

т. е. формулы, аналогичные формулам для $\cos(a + b)$ и $\sin(a + b)$.

Мы имеем к тому же легко доказываемое тождество:

$$Y(x + x') = (y + y')(1 + X),$$

из которого видно, что мы получим точку (X, Y), если рассечем гиперболу прямой, проходящей через вторую вершину A' и параллельной прямой OP (рис. 6), соединяющей точку O с серединой P хорды MM'.

Это построение аналогично такому же, которое мы можем получить для решения соответствующей задачи в круге.

Как пример на применение формулы, установленной для уникурсальных кривых, возьмем лемнискату, выраженную ур-нием 4-й степени

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Можно убедиться, что лемниската уникурсальна, заметив, что она имеет с окружностями

$$x^2+y^2=t(x+y)$$

только одну переменную точку пересечения. Это видно из уравнения:

$$t^2(x+y)^2=x^2-y^2,$$

которое по сокращении на множитель $(x+y)$, дает пучок прямых, проходящих через начало:

$$t^2(x+y)=x-y.$$

Координаты указанной точки пересечения с окружностью даются рациональными выражениями:

$$x=\frac{t+t^3}{1+t^4}, \qquad y=\frac{t-t^3}{1+t^4}.$$

Установив это, рассмотрим вместо площадки S сегмент $S-\frac{1}{2}xy=$ $=\frac{1}{2}\int(ydx-xdy)$; полагая, как мы делали это выше: $x=\frac{B}{A}$, $y=\frac{C}{A}$, мы придем к интегралу:

$$\frac{1}{2}\int\frac{B'C-BC'}{A^2}\,dt.$$

Здесь мы должны взять:

$$A=1+t^4, \quad B=t+t^3, \quad C=t-t^3.$$

Итак:

$$\frac{B}{C}=\frac{1+t^2}{1-t^2};$$

затем:

$$\frac{B'C-BC'}{C^2}=\frac{4t}{(1-t^2)^2}$$

и следовательно:

$$\frac{1}{2}\int\frac{B'C-BC'}{A^2}\,dt=\int\frac{2t^3dt}{(1+t^4)^2}=C-\frac{1}{2(1+t^4)}.$$

В этом выражении переменную t можно выразить через координаты x и y, пользуясь соотношением $t^2=\frac{x-y}{x+y}$; таким образом, мы получаем:

$$S-\frac{1}{2}xy=C-\frac{(x+y)^2}{4(x^2+y^2)}.$$

Рассмотрим, наконец, циклоиду, определяемую уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t), \end{aligned}\right\}$$

где a есть радиус образующего круга.

Часть циклоиды, заключенная между двумя последовательными точками пересечения с Ox, имеет площадь, выраженную интегралом:

$$\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt.$$

Имеем:

$$\int (1-\cos t)^2\,dt = \int dt - 2\int \cos t\,dt + \int \cos^2 t\,dt.$$

Применяя к последнему члену метод, указанный выше, мы приходим к выражению:

$$t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

или

$$\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Вся площадь, ограниченная циклоидой, равна $3\pi a^2$, или, как это показал впервые Галилей, равна утроенной площади образующего круга.

Квадратура кривых третьего порядка приводит к спрямлению конических сечений или, точнее говоря, к интегралам, которыми определяются дуги эллипса и которые поэтому были названы эллиптическими интегралами.

Это легко доказать; примем за начало некоторую точку кривой и проведем через эту точку секущую $y = tx$. Она пересечет кривую в двух точках, отличных от начала, абсциссы которых даются уравнениями:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

где A есть величина 3-й степени от t, B — второй и C — первой. Следовательно $B^2 - 4AC$ — 4-ой степени.

Вследствие этого $\int y\,dx$ выражается рационально функцией от t и радикала $\sqrt{B^2 - 4AC}$, содержащего полином четвертой степени. Мы увидим ниже, что эти интегралы связаны также со спрямлением дуг кривых второго порядка.

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ.

Выражение площади, ограниченной кривой третьего порядка, через эллиптические интегралы. — Подстановка, уничтожающая нечетные степени в полиноме четвертой степени. — Площадь эллипса в полярных координатах и замечание относительно замены переменных в определенных интегралах.

Плоские кривые третьего порядка делятся на два класса, различие между которыми одинаково важно как с точки зрения геометрии, так и с точки зрения анализа.

Когда кривая третьего порядка $f(x, y)=0$ имеет двойную точку, т. е. когда три уравнения $f(x, y)=0$, $f_x'(x, y)=0$, $f_y'(x, y)=0$ имеют общее решение, то, приняв эту точку за начало координат, получаем уравнение кривой относительно новых осей, которое будет содержать только члены 3-ей и 2-ой степени. Следовательно, полагая $y=tx$, мы можем выразить рационально координаты x и y некоторой точки кривой через функцию новой переменной t.

Мы видели, что в общем случае координаты некоторой точки кривой 3-го порядка выражаются рационально через функцию переменной t и квадратного корня, содержащего полином 4-ой степени $R(t)$. Что же происходит в случае двойной точки, координаты которой выражаются рационально функцией новой переменной? Укажем вкратце путь для исследования этого вопроса.

Пусть a и b — абсцисса и ордината некоторой точки кривой; полагаем: $y-b=(x-a)t$. Имеем для определения x уравнение:

$$Ax^2+Bx+C=0$$

и обозначаем через $R(t)$ выражение B^2-4AC, стоящее под знаком радикала.

Мы должны бы образовать дискриминант полинома $R(t)$, содержащий a, как произвольный параметр; т. е. вычислять инварианты I и J второго и третьего порядков, чтобы получить этот дискриминант I^3-27J^2. Затем следовало бы выявить, как множитель, дискриминант кубической формы $f(x, y)$, т. е. выражение S^3-T^2, где S и T — инварианты этой формы. Таким прямым вычислением мы доказали бы, что если кривая 3-го порядка имеет двойную точку, полином $R(t)$ допускает двойной корень, так что под знаком радикала остается только полином 2-ой степени. Устанавливая этот результат, мы применим более простой метод. Имея уникурсальную кривую, полагаем:

$$x=\frac{G}{K}; \quad y=\frac{H}{K},$$

где G, H, K — целые полиномы третьей степени относительно переменной u.

Имея это, по общему методу, полагаем:

$$y - b = (x - a)t.$$

Чтобы получить затем x и y, как функции от t, ищем u как функцию от этой переменной, применяя соотношение:

$$H - bK = t(G - aK).$$

Это уравнение 3-ей степени относительно u; и если u_0 обозначает значение u, соответствующее точке (a, b) кривой, то ясно, что уравнение допускает корень u_0; сокращая же множитель $u - u_0$, получаем уравнение второй степени:

$$Lu^2 + Mu + N = 0,$$

в котором L, M, N — величины первой степени относительно t. Это нам указывает, что переменная u выражается рационально функцией от t и радикала $\sqrt{M^2 - 4LN}$, который заключает полином только 2-ой степени от t. То же самое имеем для координат x и y, откуда вытекает, что радикал $\sqrt{R(t)}$ приводится от четвертой степени ко второй. Это обстоятельство, являясь следствием единственного условия, указывает, что полином $R(t)$ имеет один двойной корень, т. е. что дискриминант был равен нулю.

Чтобы получить затем координаты x и y в виде рациональных функций одной вспомогательной переменной u, достаточно сделать рациональным радикал, содержащий трехчлен второй степени, что может быть достигнуто подстановкой вида $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Вообще, когда мы имеем выражение $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ и хотим выразить рационально x и y в виде функции от вспомогательной переменной, мы не прибегаем более к помощи остроумного анализа Диофанта, который применялся в течение долгого времени в интегральном исчислении. Мы придерживаемся геометрической точки зрения и приходим, таким образом, к новым методам, более плодотворным: замечаем, что уравнение $y = ax^2 + bx + c$ определяет коническое сечение и находим все его точки пересечения секущими, выходящими из одной определенной точки.

Возвращаемся к координатам x и y точек некоторой кривой 3-его порядка, которая может быть выражена рационально функцией от $\sqrt{R(t)}$ и t, причем $R(t)$ — полином четвертой степени.

Выполнив замену $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, видим, что мы будем опять иметь x и y, выраженными рационально функцией новой переменной z и квадратного корня полинома четвертой степени от z. В этом начало важного вопроса.

Обозначим через x независимую переменную и рассмотрим радикал $\sqrt{R(x)}$, в котором $R(x)$ — полином четвертой степени. В рациональную функцию от x и $\sqrt{R(x)}$ мы можем ввести три абсолютно произвольных постоянных, пользуясь преобразованием:

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}.$$

Этим пользуются для упрощения рациональных функций от x и $\sqrt{R(x)}$, понимая под этим приведение их к частному виду, который называется каноническим, т. е. выражение их рациональной функцией от t и от радикала $\sqrt{at^4+bt^2+c}$. Приведение к каноническому виду имеет большое значение при спрямлении кривых 2-го порядка и в теории эллиптических функций.

Пусть:

$$R(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

и положим:

$$x=\frac{p+qt}{1+t}.$$

Мы придерживаемся вместе с Лежандром общей точки зрения относительно вещественных величин, т. е. мы полагаем коэфициенты при $R(x)$ существенно вещественными и имеем в виду получить для p и q вещественные значения.

Четырем корням $R(x)$ соответствуют четыре корня преобразованного полинома; но эти последние четыре значения должны быть попарно равны, и противоположны по знаку; замечая, что $t=\frac{x-p}{q-x}$ будем иметь условия:

$$\frac{a-p}{q-a}=-\frac{b-p}{q-b}; \quad \frac{c-p}{q-c}=-\frac{d-p}{q-d};$$

или:

$$\frac{a-p}{q-a}+\frac{b-p}{q-b}=0; \quad \frac{c-p}{q-c}+\frac{d-p}{q-d}=0.$$

Прибавим единицу к каждой из дробей, входящей в эти равенства; получаем следующие выражения:

$$(q-p)\left(\frac{1}{q-a}+\frac{1}{q-b}\right)=2$$

$$(q-p)\left(\frac{1}{q-c}+\frac{1}{q-d}\right)=2,$$

откуда выводим соотношения:

$$\frac{1}{q-a}+\frac{1}{q-b}=\frac{1}{q-c}+\frac{1}{q-d}=\frac{2}{q-p}.$$

Имея это, предположим сначала, что величины a, b, c, d вещественны и расположим их в порядке возрастания; сама форма уравнения:

$$\frac{1}{q-a}+\frac{1}{q-b}-\frac{1}{q-c}-\frac{1}{q-d}=0,$$

которая приводится к уравнению 2-ой степени, указывает на существование одного корня, заключенного между a и b, и другого — между c и d. Точно также замечаем, что в случае, когда a и b вещественны, c и d мнимые сопряженные, мы будем иметь снова один вещественный корень, заключенный между a и b, откуда следует, что второй корень уравнения обязательно вещественный. Наконец, предположим, что a и b, также, как и c и d будут мнимыми сопряженными и положим на время:

$$f(q)=\frac{1}{q-a}+\frac{1}{q-b}-\frac{1}{q-c}-\frac{1}{q-d};$$

для весьма большого q, имеем:

$$f(q)=\frac{a+b-c-d}{q^2}$$

далее находим:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\frac{a+b-c-d}{\left(\frac{a+b}{2}-c\right)\left(\frac{a+b}{2}-d\right)}$$

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right)=-\frac{a+b-c-d}{\left(\frac{c+d}{2}-a\right)\left(\frac{c+d}{2}-b\right)}.$$

Знаменатели этих дробей будут положительными, как произведения мнимых сопряженных количеств, и, таким образом, самые дроби обратны по знаку той, которую мы получим, полагая q равным бесконечности: это указывает снова на существование двух вещественных корней, которые находятся вне интервала, ограниченного числами $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{c+d}{2}$.

Итак, мы доказали, что приведение к каноническому виду может быть всегда достигнуто путем вещественной подстановки.

Опустим пока случай, когда $a+b-c-d=0$; в этом случае мы придем к исходному результату, просто полагая

$$x=t+\frac{a+b}{2}.$$

Определение площадей в полярных координатах.

Площадь сектора кривой, заключенного между лучами, соответствующими углам ω_0 и ω_1, дается формулой:

$$U=\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\rho^2\,d\omega.$$

Мы применим ее, рассматривая эллипс:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1,$$

уравнение которого в полярных координатах:

$$\rho^2 = \frac{1}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Это приводит к интегралу:

$$\int \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Вычислим его, применяя общий метод сведения дифференциала вида: $f(\sin\omega, \cos\omega)\,d\omega$ к дифференциалу рациональной функции; для этого полагаем $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = t$, что дает

$$\sin\omega = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\omega = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Но этот прием, на вид очень простой, часто бывает очень трудным для применения; в таких случаях следует искать более удобный путь.

Так предложенный дифференциал можно сделать рациональным подстановкой $\operatorname{tg}\omega = t$ всякий раз, когда функция $f(\sin\omega, \cos\omega)$, которую мы предполагаем рациональной относительно $\sin\omega$ и $\cos\omega$, не меняется при замене ω на $\omega + \pi$. В самом деле:

$$\sin\omega = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

и, следовательно, $f(\sin\omega, \cos\omega)$ принимает вид:

$$A + \frac{B}{\sqrt{1+t^2}},$$

где A и B — рациональные функции от t.

При замене ω на $\omega + \pi$, t сохраняет то же значение, тогда как $\sin\omega$, $\cos\omega$ и, следовательно, $\sqrt{1+t^2}$ меняют знак. Имеем:

$$f[\sin(\omega+\pi), \cos(\omega+\pi)] = A - \frac{B}{\sqrt{1+t^2}}$$

и условие:

$$f(\sin\omega, \cos\omega) = f(-\sin\omega, -\cos\omega),$$

указывающее, что $B = 0$, дает, что $f(\sin\omega, \cos\omega) = A$, т. е. рациональная функция от t.

В настоящем случае, например, положив $\operatorname{tg}\omega = t$ имеем для преобразованного интеграла:

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

Предположим теперь, что речь идет о вычислении всей площади U эллипса; она выражается формулой:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+2B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega},$$

и так как дифференциал не меняется при замене ω на $\omega+\pi$, мы можем взять пределами $\omega=0$, $\omega=\pi$, удвоив интеграл, что дает:

$$U=\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+2B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}.$$

Я задержусь на момент, чтобы отметить следующее обстоятельство: положив $\operatorname{tg}\omega=t$ для пределов $\omega=0$ и $\omega=\pi$ находим одинаковые значения $t=0$ и, повидимому, в результате получаем интеграл, равный нулю. Легко объяснить этот парадокс, заметив, что, когда ω проходит через значение $\frac{\pi}{2}$, t переходит от $+\infty$ до $-\infty$, т. е. претерпевает разрыв. Следовательно, нужно разбивать интеграл на два другие и писать:

$$\int_0^{\pi}f(\omega)\,d\omega=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\omega)\,d\omega+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\omega)\,d\omega;$$

замечая же, что функция $f(\omega)$ не изменяется при замене ω на $\omega+\pi$, имеем:

$$\int_0^{\pi}f(\omega)\,d\omega=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\omega)\,d\omega+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(\omega)\,d\omega=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}f(\omega)\,d\omega=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}.$$

В этом случае переменная t не претерпевает больше разрыва, когда ω возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, и мы получаем:

$$U=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{A+2Bt+Ct^2}.$$

Если кривая — эллипс, имеем: $AC-B^2>0$ и, следовательно, применяя обычный способ, находим:

$$U=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

Это выражение площади эллипса замечательно тем, что позволяет выразить радикал $\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$ посредством определенного интеграла, в который A, B, C входят рационально. Действительно, имеем:

$$\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+2B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}.$$

Существуют другие примеры, подобные данному, и мы приведем в частности формулу:

$$\frac{\pi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A+iB\cos\omega+iC\sin\omega},$$

где $i=\sqrt{-1}$. Это равенство было исходной точкой важного мемуара Якоби, в котором знаменитый геометр получает, путем в высшей степени изящного анализа, свойства полиномов Лежандра и функций Лапласа.

Парадокс, с которым мы только что встретились, случается часто при менее простых обстоятельствах.

Выполним в интеграле

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

подстановку $y=f(x)$, полагая, что y исчезает на границах $x=a$, $x=b$. Преобразованное выражение с первого взгляда кажется равным нулю, однако это не так, если даже предположить, что y остается непрерывным, когда x меняется от a до b.

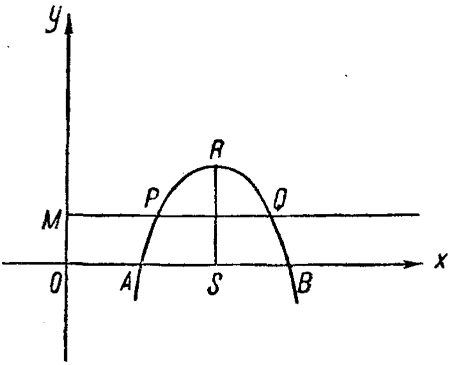

Рис. 7.

Рассмотрим кривую $y=f(x)$, обозначенную через ARB, причем $OA=a$ и $OB=b$ (рис. 7). Мы видим, беря ординату за независимую переменную, что каждому значению y соответствуют два значения x; положим, что этих значений не более двух.

Достаточно обратиться к чертежу, чтобы устранить затруднения; так как RS максимальная ордината, мы должны вычислять интеграл: 1) в пределах $y=0$, $y=RS$, беря для x наименьшее из двух значений, соответствующих одному и тому же значению y; 2) в пределах $y=RS$, $y=0$, принимая для x наибольшее из этих двух значений, и брать сумму двух найденных интегралов. Поясним это на примере.

При изучении полиномов Лежандра рассматривается определенный интеграл:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^m\,dx}{(a-x)^{m+1}},$$

в котором $a>1$.

Делаем подстановку:

$$\frac{1-x^2}{a-x}=2y.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x=y-\sqrt{y^2-2ay+1} \\ x=y+\sqrt{y^2-2ay+1} \end{cases}.$$

Maximum получается, когда эти выражения станут равными, т. е. когда:

$$y^2-2ay+1=0.$$

Получаем для y значение:

$$a-\sqrt{a^2-1},$$

так как соответствующее значение x должно заключаться между -1 и $+1$ и мы положили $a>1$.

Имея это, применим соотношения:

$$\frac{dx}{a-x}=\frac{dy}{y-x},$$

$$\left(\frac{1-x^2}{a-x}\right)^m=(2y)^m,$$

и принимая сначала:

$$y-x=\sqrt{y^2-2ay+1},$$

приходим к интегралу:

$$\int_0^{a-\sqrt{a^2-1}}\frac{(2y)^m\,dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}}.$$

Мы должны затем применить второе значение x и положить, следовательно:

$$y-x=-\sqrt{y^2-2ay+1}.$$

Этот второй интеграл:

$$-\int_{a-\sqrt{a^2-1}}^{0}\frac{(2y)^m\,dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}},$$

превращается в первый, если переставим пределы, изменяя его знак.

Приходим к следующему результату:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^m\,dx}{(a-x)^{m+1}}=2^{m+1}\int_0^{a-\sqrt{a^2-1}}\frac{y^m dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}},$$

из которого получаются интересные следствия.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ.

Спрямление параболы, эллипса и гиперболы. — Теоремы Фаньяно, Грэвса и Шаля о дугах эллипса со спрямляемой разностью. — Приведение к каноническому виду интегралов $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}}$; примеры приведения их к интегралам от рациональных функций; теорема Ландена.

Обозначим через S дугу некоторой кривой, имеющей координатами x и y; имеем формулу:

$$S=\int\sqrt{dx^2+dy^2},$$

которую мы применим сперва к кривым второго порядка, исходя из общего выражения

$$y=\alpha x+\beta+\sqrt{ax^2+2bx+c},$$

примененного выше.

Полагая снова $R=ax^2+2bx+c$, получаем:

$$S=\int\left[\alpha^2+a+1+\frac{b^2-ac}{R}+\frac{2\alpha(ax+b)}{\sqrt{R}}\right]^{\frac{1}{2}}dx,$$

которое мы можем упростить посредством подстановки, делающей радикал $\sqrt{R}$ рациональным относительно новой переменной. Этот более простой вид обнаруживается непосредственно, когда $\alpha=0$; тогда имеем:

$$S=\int\sqrt{\frac{R(a+1)+b^2-ac}{R}}\,dx=\int\frac{R(a+1)+b^2-ac}{\sqrt{R^2(a+1)+R(b^2-ac)}}\,dx.$$

Полином, стоящий под радикалом, 4-ой степени, и мы видим, что интегралы, которые дают дуги конических сечений и площади кривых 3-го порядка, того же самого рода. Отметим все же частные случаи, круга и параболы, которые соответствуют значениям $a=-1$ и $a=0$. Первый приводит к выражению:

$$S=\int\frac{b^2+c}{\sqrt{(-x^2+2bx+c)(b^2+c)}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}\right)^2}},$$

откуда:

$$S=\sqrt{b^2+c}\arcsin\frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}.$$

Во втором случае интеграл:

$$S=\int\sqrt{1+\frac{b^2}{2bx+c}}\,dx$$

легко взять, приняв ординату параболы $y=\sqrt{2bx+c}$ за независимую переменную. Находим таким образом:

$$S=\frac{1}{b}\int\sqrt{y^2+b^2}\,dy,$$

и путем простого вычисления:

$$S=\frac{y\sqrt{y^2+b^2}}{2b}+\frac{b}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+b^2}}{b}.$$

Перейдем теперь к спрямлению эллипса.

Придавая уравнению кривой вид:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

получаем для ее дуги интеграл:

$$S=\frac{1}{a}\int\frac{a^4-c^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^4-c^2x^2)}}\,dx,$$

в котором $c^2=a^2-b^2$. Именно поэтому такой интеграл получил в первых работах Лежандра название эллиптического интеграла, применяемое с тех пор ко всем выражениям вида:

$$\int f(x, \sqrt{R})\,dx;$$

в которых $f(x, \sqrt{R})$ вообще рациональная функция переменной x и квадратного корня полинома R 4-ой степени.

Положим, выражая дугу эллипса, $x=a\sin\varphi$, $k=\frac{c}{a}$; приняв за начало конец малой оси, получаем:

$$S=a\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi;$$

Лежандр вводит обозначение

$$E(k, \varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

и называет угол φ амплитудой интеграла, постоянную k — модулем, $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительным модулем, а под полной функцией понимает интеграл:

$$E'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

который выражает четверть дуги эллипса. Лежандр дает еще название функций первого и второго рода интегралам:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

обозначая первый через $F(k, \varphi)$ и называя полной функцией значение соответствующее амплитуде $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом получаем:

$$F'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Мы рассмотрим вскоре эти понятия с более общей точки зрения, а в настоящее время указываем только на их происхождение. Воспользуемся ими показав, как выражение дуги гиперболы приводится к функциям первого и второго рода.

Формула $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, если исходить от уравнения $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, дает сначала для дуги гиперболы выражение, которое Лежандр обозначает через

$$\Upsilon = \frac{1}{a}\int \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{\sqrt{(x^2-a^2)\left[(a^2+b^2)x^2 - a^4\right]}}\, dx$$

и которое имеет вид аналогичный полученному для дуги эллипса. Необходимо обратить внимание на то, что абсцисса не будет больше заключаться между $-a$ и $+a$; она должна изменяться теперь в другом интервале, неограниченно возрастая от $x = a$, что наводит на замену $x = \frac{a}{\xi}$. Пусть для сокращения $c^2 = a^2 + b^2$; преобразовав к этой новой переменной, которая заключена между -1 и $+1$, имеем:

$$\Upsilon = -\int \frac{c^2 - a^2\xi^2}{\xi^2\sqrt{(1-\xi^2)(c^2-a^2\xi^2)}}\, d\xi,$$

откуда выводим:

$$\Upsilon = \frac{a\sqrt{(1-\xi^2)(c^2-a^2\xi^2)}}{\xi} + a^3\int \frac{1-\xi^2}{\sqrt{(1-\xi^2)(c^2-a^2\xi^2)}}\, d\xi.$$

Ограничиваясь указанием этого результата, который проверяется дифференцированием, я изложу сейчас способы приведения к интегралам первого и второго рода, следуя методу, аналогичному* методу Лежандра. Я замечаю сначала, что, приняв ординату за независимую переменную, имеем:

$$\Upsilon = \frac{1}{b}\int\sqrt{\frac{c^2y^2+b^4}{y^2+b^2}}\,dy,$$

что наводит на замену

$$cy = b^2\operatorname{tg}\varphi \text{ или } y = b\operatorname{tg}\theta.$$

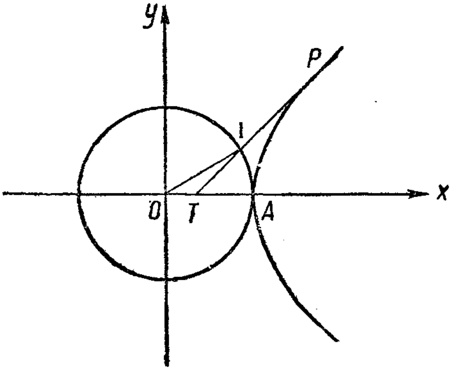

Рис. 8.

Эннепер дал следующее изящное построение угла φ. Пусть (рис. 8) P точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, и PT — касательная к кривой в этой точке. Рассмотрим окружность $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат O. Пусть I — точка пересечения ее с касательной; соединяя ее с центром, получим, что угол OIT будет углом φ (Elliptischen Functionen, Theorie und Geschichte, стр. 446).[1]

Преобразуя относительно переменных φ и θ, имеем:

$$\Upsilon = \int_0^{\varphi}\frac{b^2 d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},$$

$$\Upsilon = \int_0^{\theta}\frac{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta.$$

Далее поступаем следующим образом:

Рассматривая первое выражение, исходим вначале от тождества:

$$D_\varphi\left[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\right] = \frac{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi} + \\ + \frac{(b^2-c^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},$$

или, после несложного преобразования:

$$D_\varphi\left[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\right] = \frac{b^2}{\cos^2\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}} + \\ + \frac{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi-b^2}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},$$

[1] Формула (20) на стр. 467 не точна.

что дает по интегрировании:

$$\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin\varphi+c^2\cos^2\varphi}=\Upsilon+$$
$$+\int_0^\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi-\int_0^\varphi\frac{b^2d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}.$$

В первом интеграле второй части узнаем дугу эллипса данного уравнением: $x=b\cos\varphi$, $y=c\sin\varphi$, а во втором — функцию первого рода.

Рассматриваем затем аналогичное соотношение:

$$D\theta\,[\operatorname{tg}\theta\sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}}{\cos^2\theta}+$$
$$+\frac{(c^2-b^2)\sin^2\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}=\frac{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}+$$
$$+\frac{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta-b^2}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}};$$

из него вытекает:

$$\operatorname{tg}\theta\sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}=\Upsilon+\int_0^\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta-$$
$$-b^2\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}.$$

Очевидно, достаточно изменить θ на $\frac{\pi}{2}-\theta$, чтобы получить во второй части те же интегралы, которые встретились с переменной φ.

Следствием этих двух выражений дуги гиперболы является следующее замечание.

Полагая последовательно: $cy=b^2\operatorname{tg}\varphi$, $y=h\operatorname{tg}\theta$, получаем углы φ и θ, связанные соотношением: $b\operatorname{tg}\varphi=c\operatorname{tg}\theta$ или же: $b\cos\theta\sin\varphi=$ $=c\sin\theta\cos\varphi$. Отсюда выводим, дифференцируя:

$$d\theta\,(c\cos\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi)=d\varphi\,(b\cos\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi),$$

а также выражения

$$\cos\theta=\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},\qquad\sin\theta=\frac{b\sin\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},$$

дающие

$$c\cos\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}.$$

Затем, заменяя (так как это допустимо) b на c, θ на φ:

$$b\cos\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta},$$

приходим к уравнению:

$$d\theta\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}=d\varphi\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

или

$$\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}.$$

Так как θ и φ обращаются в нуль одновременно, имеем:

$$\int\limits_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}=\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}};$$

отсюда получаем, сравнивая оба выражения для Υ, следующее уравнение:

$$\operatorname{tg}\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}-\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}=$$
$$=\int\limits_0^\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta-\int\limits_0^\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

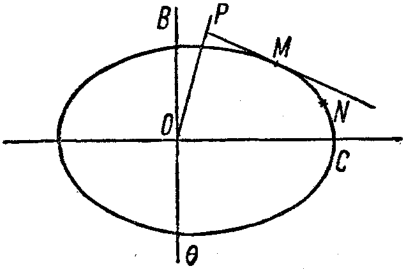

Рис. 9.

Имея это, рассмотрим эллипс, полагая:

$$x=b\cos\xi;\qquad y=b\sin\xi.$$

Пусть M и N две точки (рис. 9) кривой, заданные значениями: $\xi=\theta$ и $\xi=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

Дуги BM и CN равны интегралам:

$$\int\limits_0^\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta\quad\text{и}\quad\int\limits_0^\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi;$$

таким образом, полученное соотношение, принимает вид:

$$BM-CN=\operatorname{tg}\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}-\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}$$

и после несложного преобразования второй части:

$$BM-CN=\frac{(b^2-c^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}$$

Проведя касательную к эллипсу в точке M и беря проекцию P центра на эту касательную, легко убедиться, что абсолютное значение полученной правой части есть отрезок MP.

Этот результат был открыт знаменитым итальянским геометром Фаньяно-ди-Фаньани [1], имя которого должно упоминаться с восхищением, так как он первый открыл путь к теории эллиптических функций. Дадим теперь более общие теоремы, которые выявят, что имеется нового и характерного в природе дуг эллипса.

[1] Fagnano. Produzioni matematiche, 1750.

Первая из них была открыта Грэвсом, английским епископом в Лимерике, следующие были даны Шалем.

1. Рассмотрим два софокусных эллипса; если из некоторой точки M одного из них проведем к другому касательные MA, MB (рис. 10), то дуга, заключенная между точками касания, уменьшенная на сумму $AM + BM$, есть величина постоянная.

2. Построим аналогичный чертеж, помещая точку M на гиперболе, софокусной с эллипсом и пересекающей его в точке N; тогда разность дуг NA и NB будет равна разности касательных MA и MB (рис. 11a).

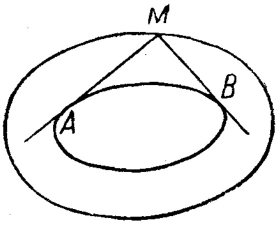

Рис. 10.

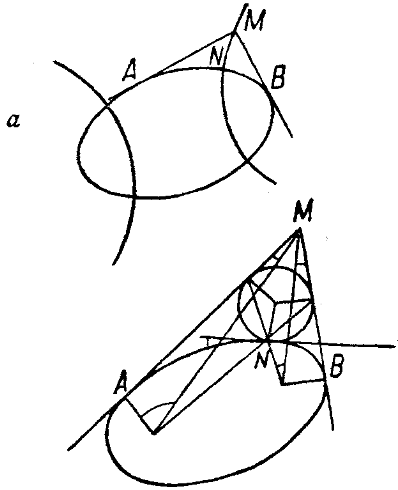

Рис. 11.

3. Пусть, наконец, две касательных MA и MB проведены к эллипсу через некоторую точку M (рис. 11b); если построить окружность, касательную к этим двум прямым и к кривой в точке N, то разность дуг NA и NB будет снова равна $MA - MB$.

Дадим доказательство второй теоремы по Шалю.

Рассмотрим на эллипсе две касательные в бесконечно близких точках A и A'; пусть M и M' точки, в которых они пересекают гиперболу, и R — точка их встречи (рис. 12).

Мы знаем, что, проектируя на $A'M'$ точки M и A в точки P и Q, имеем до бесконечно малых второго порядка:

$$RQ = RA \text{ и } QP = AM.$$

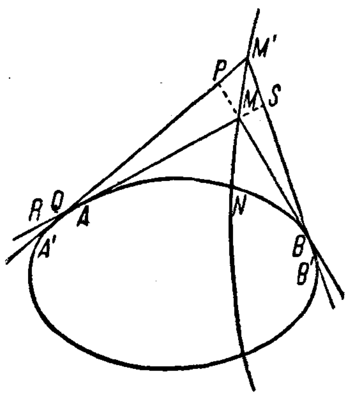

Рис. 12.

Первое соотношение указывает сначала, что хорда дуги AA' и, следовательно, сама дуга равна до бесконечно малых второго порядка: $A'R + RQ = A'Q$. Имея это, я рассматриваю, как функции одной и той же переменной, дугу эллипса $NA = s$ и отрезок касательной $AM = t$, так что, увеличивая эту переменную на ее дифференциал, переходим от точки A к точке A', что дает $NA' = s + ds$, $A'M' = t + dt$.

Имея же $A'M' = A'Q + QP + PM'$, выводим, пользуясь нашим вторым соотношением: $QP = AM = t$, что

$$dt = ds + PM'.$$

Пусть теперь MB и $M'B'$ другие касательные, проведенные к эллипсу через точки M и M'; обозначая через B и B' точки касания и через S проекцию M на $M'B'$, получаем:

$$NB = s_1; \qquad BM = t_1$$

и точно так же:

$$dt_1 = ds_1 + SM'.$$

Но по свойству софокусной гиперболы, углы касательной MM' с касательными $M'A'$, $M'B'$ равны; отсюда $PM' = SM'$, и, следовательно:

$$dt - dt_1 = ds - ds_1,$$

откуда заключаем:

$$t - t_1 = s - s_1 = \text{const}$$

и можно добавить, что постоянная равна нулю, так как две дуги и два отрезка касательной исчезают одновременно, когда сближаются точки M и N.

Эти результаты позволяют видеть, насколько по своей природе дуги эллипса отличаются от дуг окружности; невозможно также обобщать, как это казалось бы естественным, круговые функции, рассматривая абсциссу и ординату некоторой точки эллипса, как функции дуги, считаемой от некоторого определенного начала до этой точки.

Следовательно, не соотношение:

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = \xi$$

приводит к выражению, аналогичному $x = \sin\xi$; функция, определенная таким образом, крайне сложна и без всякой связи с синусом, который получаем, полагая:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \xi.$$

Полная аналогия осуществляется, если приравнять переменной ξ функцию первого рода:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{или} \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

положив $x = \sin\varphi$; таким образом, путем интегрального исчисления, а не геометрически, мы приходим к новым трансцендентным функциям, которые заняли под именем эллиптических функций такое большое место в современной науке.

Изучение функции, определенной равенством

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\xi,$$

есть основной предмет теории эллиптических функций.

Прежде чем заняться изучением ее, мы изложим принципы анализа, на которых оно строится и которые будут главным предметом этого курса. Этому мы предпошлем несколько легких и элементарных вопросов алгебры и интегрального исчисления, которыми мы сейчас и займемся.

Вот, во-первых простая форма, к которой приводится всякая рациональная функция $f(x, \sqrt{R})$ от x и от квадратного корня полинома R четвертой или же какой-либо другой степени. Мы можем сначала написать:

$$f(x, \sqrt{R})=\frac{A+B\sqrt{R}}{C+D\sqrt{R}},$$

обозначая через A, B, C, D полиномы, так как всякая рациональная функция двух количеств есть частное целых функций этих количеств. Умножая теперь числитель и знаменатель на $C-D\sqrt{R}$, мы получим выражение $M+N\sqrt{R}$, или иначе $M+\frac{N}{\sqrt{R}}$, в котором M и N будут рациональными функциями. Это и есть результат, к которому мы стремились; из него вытекает важное следствие: интеграл

$$\int f(x, \sqrt{R})\,dx,$$

если отбросить член $\int M dx$, приводится к $\int \frac{N dx}{\sqrt{R}}$, который представляет существеннейшую часть его; этим выражением мы сейчас займемся, полагая теперь, что R полином четвертой степени с вещественными коэфициентами. Заменим сначала переменную, применив подстановку, данную во второй лекции

$$x=\frac{p+qt}{1+t},$$

посредством которой получаем:

$$R=\frac{A+Bt^2+Ct^4}{(1+t)^4};$$

интеграл $\int \frac{N dx}{\sqrt{R}}$ превращается, таким образом, в $\int \frac{P dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}$.

где P — рациональная функция, которую я представляю снова в виде частного двух целых полиномов $\frac{F(t)}{F_1(t)}$. Имея это и написав:

$$P=\frac{F(t)F_1(-t)}{F_1(t)F_1(-t)},$$

замечаю, что знаменатель содержит только четные степени и что, объединяя в числителе четные и нечетные степени переменной, мы получим такое выражение:

$$P=\varphi(t^2)+t\psi(t^2).$$

Отсюда выводим:

$$\int\frac{Pdt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}=\int\frac{\varphi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}+\int\frac{t\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}.$$

Затем, путем замены $t^2=u$:

$$\int\frac{\varphi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{Au+Bu^2+Cu^3}}$$

$$\int\frac{t\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{A+Bu+Cu^2}}.$$

Требуется рассмотреть только первое количество, второе же находится известными уже методами.

Мы получим пример на сказанное, положив: $x^2=u$ в интегралах:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

которые принимают вид:

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2u)}},\quad \frac{1}{2}\int\frac{(1-k^2u)\,du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2u)}}.$$

Полином 3-ей степени, входящий под знак квадратного корня, приводится к частному виду, которому дают название канонического; важный пункт, который мы сейчас будем трактовать, заключается в приведении к этому каноническому виду корня, содержащегося под знаком интеграла

$$\int\frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{Au+Bu^2+Cu^3}}.$$

Положим, во-первых, что корни уравнения $A+Bu+Cu^2=0$ вещественны; я различаю по знакам корней три вида полинома $Au+Bu^2+Cu^3$, представляя их следующим образом:

$$Au(1-au)(1-bu),$$
$$Au(1-au)(1+bu),$$
$$Au(1+au)(1+bu),$$

обозначив через a и b две положительные величины. Они примут вид, если заменить u на $\frac{u}{a}$ и положить $\frac{b}{a}=m$:

$$\frac{A}{a}u(1-u)(1-mu),$$

$$\frac{A}{a}u(1-u)(1+mu)$$

$$\frac{A}{a}u(1+u)(1+mu).$$

Первый немедленно дает канонический вид, так как мы можем принять $b<a$ и положить, следовательно, $m=k^2$.

Второй приводится к этому же подстановкой $u=1-z$. Это дает в действительности

$$\frac{A}{a}z(1-z)\left[1-\frac{m}{1+m}z\right],$$

и мы можем положить $\frac{m}{1+m}=k^2$.

Для третьего берем $u=\frac{z}{1-z}$, что приводит к соотношению:

$$\frac{du}{\sqrt{u(1+u)(1+mu)}}=\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)[1-(1-m)z]}},$$

и так как ничто не мешает допустить, что $b<a$, то будем иметь $m<1$ что и позволяет положить $1-m=k^2$.

Важно также заметить, что коэфициент A может быть отрицательным; в этом случае мы применяем подстановку $z=\frac{\zeta}{\zeta-1}$, откуда заключаем:

$$\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}=-\frac{d\zeta}{\sqrt{-\zeta(1-\zeta)(1-k'^2\zeta)}}.$$

Следовательно, преобразованное выражение содержит корень

$$\sqrt{-A\zeta(1-\zeta)(1-k'^2\zeta)},$$

который является вещественным.

Предположим теперь, что корни уравнения $A+Bu+Cu^2=0$ мнимы; исходя из предположения, что $z=\frac{4u}{(1+u)^2}$, получаем соотношение:

$$\frac{2du}{\sqrt{u+(2-4k^2)u^2+u^3}}=\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}},$$

в котором корни трехчлена $1+(2-4k^2)u+u^2$ мнимы, если предположить, что $k^2<1$. Замечаю далее, что при значении u:

$$u=\frac{2-z+\sqrt{1-z}}{z},$$

получаем выражение

$$\varphi(u)=f(z)+f_1(z)\sqrt{1-z},$$

в котором функции $f(z)$ и $f_1(z)$ рациональны; отсюда заключаем:

$$\int\frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{u+(2-4k^2)u^2+u^3}}=\int\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}+\int\frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{z(1-k^2z)}}.$$

Следовательно, снова выполнено приведение к канонической форме интеграла первого члена, так как выражение

$$\int\frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{z(1-k^2z)}}$$

находится в явном виде.

Изменяя u на nu, легко убедиться, что, введя другой постоянный множитель $\frac{A}{n}$, мы можем распорядиться k^2 так, чтобы было:

$$Au+An(2-4k^2)u^2+An^2u^3=Au+Bu^2+Cu^3.$$

Действительно, получаем:

$$n=\sqrt{\frac{C}{A}} \quad \text{и} \quad k^2=\frac{2\sqrt{AC}-B}{4\sqrt{AC}};$$

последняя величина положительна и меньше единицы при условии, что $B^2<4AC$.

Подстановка $z=\frac{4u}{(1+u)^2}$, которую мы только что применили, приводит к замечанию, что так как корни уравнения второй степени с u обратны, одновременно:

$$u=\frac{2-z+\sqrt{1-z}}{z}$$

и

$$\frac{1}{u}=\frac{2-z-\sqrt{1-z}}{z}.$$

Предположим, что имеем $\varphi(u)=-\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$; выражение $\varphi(u)$ через z, меняя знак вместе с радикалом $\sqrt{1-z}$, приводится к виду:

$$\varphi(u)=f_1(z)\sqrt{1-z},$$

и мы видим, что интеграл

$$\int \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{u+(2-4k^2)\,u^2+u^3}}$$

находится в конечном виде.

Для того, чтобы освоиться с методом подстановок в эллиптических интегралах, я приведу еще другие примеры, в которых интегралы приводятся путем замены переменных к интегралам от простых рациональных функций.

Пусть:

$$R(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2).$$

Я рассматриваю сначала выражение:

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

в котором $f(x^2)$ такая рациональная функция, что

$$f(x^2)=-f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right).$$

Я полагаю теперь

$$y=\frac{\sqrt{R(x)}}{x},$$

что дает уравнение

$$k^2x^4-(1+k^2+y^2)\,x^2+1=0,$$

решение которого

$$x^2=\frac{1+k^2+y^2+\sqrt{R_1(y)}}{2k^2},$$

если положить:

$$R_1(y)=(1+k^2+y^2)^2-4k^2.$$

Мы взяли для x^2 один из двух корней уравнения, написанного выше; произведение их равно $\frac{1}{k^2}$, и другой корень, следовательно,

$$\frac{1}{k^2x^2}=\frac{1+k^2+y^2-\sqrt{R_1(y)}}{2k^2}.$$

Пусть:

$$f(x^2)=G+H\sqrt{R_1(y)},$$

где G и H — рациональные функции от y; будем иметь:

$$f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)=G-H\sqrt{R_1(y)},$$

и из условия $f(x^2)+f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)=0$ заключаем, что $G=0$; таким образом, имеем просто:

$$f(x^2)=H\sqrt{R_1(y)}.$$

Дифференцируя теперь уравнение

$$k^2x^4-(1+k^2+y^2)x^2+1=0,$$

находим:

$$dx\,[2k^2x^3-(1+k^2+y^2)x]-yx^2dy=0,$$
$$dx\,[2k^2x^2-(1+k^2+y^2)]=xy\,dy,$$
$$dx\sqrt{R_1(y)}=dy\sqrt{R(x)},$$

и окончательно:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}.$$

Искомый интеграл превращается в $\int H dy$, что мы и высказали заранее.

Вот еще два других аналогичных приведенному примера.

Дифференциал $\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ приведется всегда к другому рациональному дифференциалу, если

$$f(x^2)=-f\left(\frac{1-k^2x^2}{k^2-k^2x^2}\right)$$

или

$$f(x^2)=-f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

Положим в первом случае:

$$y=\frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

а во-втором:

$$y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Пусть для сокращения:

$$R_2(y)=(1+y^2)^2-4k^2y^2$$
$$R_3(y)=(1+k^2y^2)^2-4y^2.$$

Эти подстановки дают следующие соотношения, которые принадлежат к преобразованию второго порядка эллиптических функций, а именно:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R_2(y)}}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R_3(y)}}.$$

Следующая еще формула имеет большое значение в этой теории; положив:

$$y=\frac{(1+k)x}{1+kx^2},$$

получаем:

$$\sqrt{1-y^2}=\frac{\sqrt{R(x)}}{1+kx^2}$$

$$\sqrt{1-l^2y^2}=\frac{1-kx^2}{1+kx^2},$$

полагая $l=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. В результате, написав, чтобы выявить модуль, $R(x, k)$ вместо $R(x)$, получаем:

$$\sqrt{R(y,l)}=\frac{(1-kx^2)\sqrt{R(x,k)}}{(1+kx)^2},$$

откуда легко заключить, что

$$\frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}}=\frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{R(y,k)}};$$

затем, замечая, что y обращается в нуль одновременно с x, что

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}}=(1+k)\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}}.$$

Добавлю, что, обозначая через $V=1+kx^2$ знаменатель в формуле подстановки, мы получим между интегралами второго рода следующее соотношение:

$$(1+k)\int_0^y \frac{l^2y^2dy}{\sqrt{R(y,l)}}=2\int_0^x \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{R(x,k)}}+2k\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}}-$$
$$-\frac{V'\sqrt{R(x,k')}}{V}.$$

Чтобы доказать это, заменим в первом члене $\frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}}$ через $\frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{R(x,l)}}$, l через $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$; находим дифференцируя:

$$\frac{4ky^2}{\sqrt{R(x,k)}}=\frac{2k^2x^2+2k}{\sqrt{R(x,k)}}-\frac{2k\left[1-(2+k+2k^2)\,x^2+3k^2x^4+k^3x^6\right]}{(1+kx^2)^2\sqrt{R(x,k)}}.$$

Подставим еще вместо y его значение $\frac{(1+k)\,x}{1+kx^2}$, замечая, что можно написать:

$$1-(2+k+2k^2)\,x^2+3k^2x^4+k^3x^6=(1+kx^2)^3-2\,(1+k)^2x^2;$$

получаем, уничтожив знаменатель, тождественное соотношение.

Мы встретим вскоре этот результат в более общем виде; в данный же момент я ограничусь выводом теоремы, которая известна под именем теоремы Ландена и которая выражает дугу гиперболы через две дуги эллипса и одно алгебраическое выражение.

Я замечаю для этого, что, обозначая через $E(x, k)$ дугу эллипса, представленную интегралом

$$\int_0^x \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{R(x, k)}},$$

получаем следующее равенство:

$$\int_0^x \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{R(x, k)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}} - E(x, k)$$

и, следовательно:

$$\int_0^y \frac{l^2y^2dy}{\sqrt{R(y, l)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y, l)}} - E(y, l).$$

Подставляя в предыдущее соотношение и пользуясь условием:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y, l)}} = (1+k)\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}},$$

таким образом найдем:

$$(1+k)E(y, l) = 2E(x, k) - k'^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}} + \frac{V'\sqrt{R(x, k)}}{V}.$$

Отсюда видно, что интеграл первого рода может выражаться через две дуги эллипса формулой:

$$k'^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}} = 2E(x, k) - (1+k)E(y, l) + \frac{V'\sqrt{R(x, k)}}{V}.$$

Имея это, возвращаюсь к выражению дуги гиперболы, данному Лежандром:

$$Y = b^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}} - \int_0^\varphi \sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi + \\ + \operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}.$$

Беру:

$$\sin\varphi = x \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} = k;$$

таким образом, получаем:

$$\frac{b}{c} = k', \quad \sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi} = c\sqrt{1-k^2x^2}$$

и следовательно:

$$\frac{Y}{c}=k'^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}}-E(x, k)+\frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теорема Ландена получается при замене в этой формуле интеграла первого рода только что полученным выражением; если мы предположим для большей простоты, что $c=1$, то получим:

$$Y=E(x, k)-(1+k)E(y, l)+\frac{x(1+2k-kx^2)\sqrt{R(x, k)}}{(1-x^2)(1+kx^2)}.$$ [1]

---

[1] См. в Бюллетенях французского математического общества две прекрасных работы Raffy и Goursat: Sur les transformations invariantes des differentielles elliptiques. t. XX; Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques. t. XV.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Гиперэллиптические интегралы, приведение их к интегралам первого, второго и третьего рода. — Приложение к спрямлению уникурсальных кривых.

Мы уже видели, что выражение $\int f(x, \sqrt{R})\,dx$, где R есть полином какой-либо степени от x и $f(x, \sqrt{R})$ рациональная функция от переменной x и $\sqrt{R}$, приводится к интегралу $\int \frac{N dx}{\sqrt{R}}$, в котором N рациональная функция. Цель настоящей лекции — установить, что последний интеграл, который называется *гиперэллиптическим интегралом*, выражается с одной стороны, посредством алгебраического члена и, с другой стороны, посредством суммы конечного числа специальных интегралов, которые являются в нем существенными элементами. Это дает, следовательно, для этих более сложных выражений, тот же самый результат, как и для интегралов от рациональных функций, которые также содержат две части, — одну рациональную, другую трансцендентную вида:

$$A \ln (x-a) + B \ln (x-b) + \ldots$$

Пусть $N = \frac{\Pi}{\Phi}$, где Π и Φ целые полиномы: я делаю существенное предположение, что R не имеет кратных множителей, и выделяю в знаменателе Φ множители, простые для R и те, которые принадлежат этому полиному. Обозначим первые через A^{a+1}, B^{b+1}, ..., указывая их кратность, так что A, B, ... будут иметь только простые делители и будут простыми попарно; обозначив подобным образом другие через S^s, T^t и т. д., придем к следующему разложению:

$$\frac{\Pi}{\Phi} = \frac{G}{A^{a+1}} + \frac{H}{B^{b+1}} + \ldots + \frac{P}{S^s} + \frac{Q}{T^t} + \ldots,$$

в котором числители G, H, ... дробей правой части — целые полиномы. Установив это, я замечаю, что A, имея только простые множители, будет простым со своей производной A' и, по предположению, таковым он является равно и с R, следовательно, возможно определить два таких целых полинома M и N, что будем иметь:

$$G = MA - aNRA'.$$

Пусть далее:

$$D_x(N\sqrt{R})=\frac{N_1}{\sqrt{R}},$$

где N_1 обозначает так же целый полином: мы будем иметь соотношение

$$\int\frac{Gdx}{A^{a+1}\sqrt{R}}=\frac{N\sqrt{R}}{A^a}+\int\frac{(M-N_1)\,dx}{A^a\sqrt{R}},$$

в котором должно предположить, что показатель степени a отличен от нуля, и которое доказывается непосредственно дифференцированием.

Это есть формула приведения, последовательное применение которой, пока показатель степени при A не станет равным единице, сводит постепенно интеграл $\int\frac{Gdx}{A^{a+1}\sqrt{R}}$ к алгебраическому выражению и к интегралу:

$$\int\frac{G_1dx}{A\sqrt{R}},$$

в котором G_1, как и G, целый полином.

Таким же образом приводятся части рассматриваемого интеграла, соответствующие другим дробям $\frac{H}{B^{b+1}}$, и т. д.; члены же вида

$$\int\frac{Pdx}{S^s\sqrt{R}},$$

как сейчас увидим, требуют изменения приема.

Я полагаю сначала:

$$R=SU$$

и замечаю, что так как R не имеет кратных множителей, полиномы S и US' взаимно простые; следовательно можно написать:

$$P=MS-\left(s-\frac{1}{2}\right)NUS'.$$

Берем также

$$D_x(N\sqrt{U})=\frac{N_1}{\sqrt{U}},$$

и получаем следующую новую формулу приведения:

$$\int\frac{Pdx}{S^s\sqrt{R}}=\frac{N\sqrt{R}}{S^s}+\int\frac{M-N_1}{S^{s-1}\sqrt{R}}dx,$$

которая доказывается также дифференцированием. Заметим, что она не допускает исключения, как предыдущая, и может быть применена ко всякому целому показателю степени S, так что различные интегралы

$\int \frac{P dx}{S^s \sqrt{R}}$ будут приведены к алгебраическому выражению и к интегралу $\int \frac{P_1 dx}{\sqrt{R}}$, в котором P_1 целый полином.

Собирая предыдущие результаты, приходим к следующему заключению.

Пусть: $F = AB\ldots$ произведение тех взаимно простых множителей $\Phi(x)$, которые не принадлежат R; мы можем написать:

$$\Phi = FF_1.$$

Положив

$$F_1 = A^a B^b \ldots S^s T^t, \ldots,$$

имеем следующее выражение:

$$\int \frac{J dx}{\Phi \sqrt{R}} = \int \frac{J dx}{F \sqrt{R}} + \frac{J_1 \sqrt{R}}{F_1},$$

в котором J и J_1 целые полиномы.

Выражение $\int \frac{J dx}{F \sqrt{R}}$, к которому мы свели данное нам, мы и приведем к новым аналитическим элементам, соответствующим логарифмическим членам в интегралах рациональных функций. Но прежде мы сделаем одно замечание.

Пусть E — целая часть $\frac{J}{F}$; интеграл $\int \frac{E dx}{\sqrt{R}}$ наводит на новое и важное приведение.

Положим для этого:

$$\int \frac{E dx}{\sqrt{R}} = K\sqrt{R} + \int \frac{L dx}{\sqrt{R}},$$

где K и L полиномы, и определим первый таким образом, чтобы степень L была бы возможно малой. Деля на $\sqrt{R}$ обе части этого соотношения, что дает

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \int \frac{E dx}{\sqrt{R}} = K + \frac{1}{\sqrt{R}} \int \frac{L dx}{\sqrt{R}},$$

заключаем, что следует брать за K целую часть разложения левой части по убывающим степеням переменной x. Положим теперь, что l степень L и r степень R; наивысший показатель степени переменной в выражении $\frac{1}{\sqrt{R}} \int \frac{L dx}{\sqrt{R}}$ равен $l - \frac{r}{2} + 1 - \frac{r}{2}$; этот показатель, согласно выбору K, имеет высшим пределом -1, следовательно, $l + 1 - r = -1$ или: $l = r - 2$.

В результате, положив:

$$\frac{J}{F} = E + \frac{I}{F}$$

так, чтобы степень I была ниже степени F, получаем следующее выражение

$$\int \frac{Jdx}{F\sqrt{R}} = K\sqrt{R} + \int \frac{Ldx}{\sqrt{R}} + \int \frac{Idx}{F\sqrt{R}}.$$

Отсюда заключаем, возвращаясь к рассматриваемому интегралу, что

$$\int \frac{\Pi dx}{\Phi\sqrt{R}} = \frac{\Theta\sqrt{R}}{F_1} + \int \frac{Ldx}{\sqrt{R}} + \int \frac{Idx}{F\sqrt{R}},$$

обозначив для сокращения $J_1 + KF_1$ через Θ.

Полученный результат приводит к интересному вопросу: непосредственно найти полиномы I, L, Θ, пользуясь методом неопределенных коэфициентов и дифференцируя выше написанное уравнение. Не останавливаясь на этом вопросе, переходим немедленно к указанию тех следствий сказанного, которые особенно важны.

Первое следствие вытекает из работ Абеля и Лиувилля об интегралах от алгебраических дифференциалов в случае, когда их значение алгебраическое. Всякий раз, когда возможно выразить интеграл

$$\int \frac{\Pi dx}{\Phi\sqrt{R}}$$

в алгебраическом конечном виде, значением его будет величина $\frac{\Theta\sqrt{R}}{F}$, и мы получим его, пользуясь предыдущим уравнением, считая в нем полиномы I и L тождественно равными нулю.

Второе заключается в понятии об интегралах первого, второго и третьего рода. Оно основывается на следующем замечании: интеграл

$$\int f(x, \sqrt{R})\, dx,$$

где R степени $2n$ может быть приведен подстановкой к другому такого же вида:

$$\int f(s, \sqrt{S})\, ds,$$

в котором S нечетной степени $2n-1$.

Пусть, в самом деле

$$R = (x-a)(x-b)\ldots(x-c);$$

положим:

$$\frac{x-b}{x-a} = s,$$

откуда:

$$x = \frac{as-b}{s-1}.$$

Заметим дальше, что $x-a=\dfrac{a-b}{s-1}$ и множители $x-b \ldots x-c$, число которых $2n-1$, биномы первой степени, деленные на $s-1$; следовательно, мы можем написать:

$$R=\frac{S}{(s-1)^{2n}}, \quad \sqrt{R}=\frac{\sqrt{S}}{(s-1)^{n}},$$

обозначая через S полином, степень которого $2n-1$.

Доказав это, я беру опять общее соотношение:

$$\int \frac{\Pi dx}{\Phi \sqrt{R}}=\frac{\Theta \sqrt{R}}{F_1}+\int \frac{L dx}{\sqrt{R}}+\int \frac{I dx}{F \sqrt{R}},$$

допуская, что R будет нечетной степени $2n-1$.

Член $\int \dfrac{L dx}{\sqrt{R}}$, в котором L степени $2n-3$, приводит к интегралам, или функциям первого и второго рода.

Выражения

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \ldots \int \frac{x^{n-3} dx}{\sqrt{R}},$$

разложение которых по нисходящим степеням переменной x имеет первым членом степень с отрицательным показателем, мы назовем интегралами первого рода.

Выражения же

$$\int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{R}}, \ldots \int \frac{x^{2n-3} dx}{\sqrt{R}},$$

в которых то же разложение начинается со степени с положительным показателем, назовем интегралами второго рода.

И наконец, второй член $\int \dfrac{I dx}{F \sqrt{R}}$ при разложении рациональной функции $\dfrac{I}{F}$ на простые дроби, приводит нас к интегралам третьего рода $\int \dfrac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; постоянная a называется параметром.

Положим в частности, $R=x(1-x)(1-k^2x)$; в этом случае получим один интеграл первого рода $\int \dfrac{dx}{\sqrt{R}}$ и один второго рода $\int \dfrac{x dx}{\sqrt{R}}$; после простого изменения x на x^2 они принимают канонический вид, который мы указывали раньше:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

и

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

В этом случае эллиптических интегралов рассмотренная задача приводит к результатам, интересным и для алгебры и для интегрального исчисления. Вот некоторые из них.

Пусть

$$R(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2);$$

легко видеть, что согласно изложенному выше, имеем:

$$\int \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = P\sqrt{R(x)} + A_n \int \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{R(x)}} - B_n \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где P целый полином от x, A_n и B_n постоянные, которые определяются следующим образом.

Разложим в ряды по возрастающим степеням переменной выражения:

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{R(x)}};$$

коэфициенты при x^{2n+1} в первом и во втором ряду будут соответственно равны A_n и B_n.

Коэфициенты рядов удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(2n+1)A_n - 2n(1+k^2)A_{n-1} + (2n-1)k^2A_{n-2} = 0,$$
$$(2n+1)B_n - 2n(1+k^2)B_{n-1} + (2n-1)k^2B_{n-2} = 0;$$

таким образом, исходя от двух первых коэфициентов каждого ряда, мы можем получить постепенно все остальные.

Легко вывести равенство:

$$B_nA_{n-1} - A_nB_{n-1} = \frac{k^{2n}}{2n+1},$$

которое приводит к нахождению непрерывной дроби, подходящими дробями которой будут частные $\frac{B_n}{A_n}$.

Пусть

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad J = \int_0^1 \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где K — полная функция первого рода, J — полная функция второго рода, как их ввел Вейерштрасс. Имеем следующую дробь:

$$\frac{J}{K} = \cfrac{k^2}{2(1+k^2) - \cfrac{9k^2}{4(1+k^2) - \cfrac{25k^2}{6(1+k^2)\dots}}}$$

последовательными подходящими которой будут величины $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$ и т. д.

Мы могли, впрочем, видеть à priori, как непосредственное следствие уравнения:

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = P\sqrt{R(x)} + A_n\int_0^x \frac{k^2dx}{\sqrt{R(x)}} - B_n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

что $\frac{J}{K}$ выражается с точностью до порядка $n+1$ относительно k^2 через частное $\frac{B_n}{A_n}$.

Действительно, получаем, полагая $x=1$:

$$\int_0^1 \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}} = A_nJ - B_nK,$$

откуда:

$$\frac{J}{K} - \frac{B_n}{A_n} = \frac{1}{A_nK}\int_0^1 \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}},$$

и доказываем, таким образом, что разложение в ряд второй части по возрастающим степеням k^2 начинается с члена $(k^2)^{n+1}$.

Что же касается полинома P, то для получения его мы применим метод, предложенный Чебышевым.

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}}\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}} = P + \frac{A_n}{\sqrt{R(x)}}\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}} - \frac{B_n}{\sqrt{R(x)}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}};$$

разложим первый член в ряд, расположенный по убывающим степеням x. Целая часть этого ряда будет полиномом P; для доказательства достаточно показать, что разложения двух последних членов второй части не могут привести к выражениям, заключающим положительные степени переменной; а это очевидно, так как разложение радикала $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$, действительно начинается с $\frac{1}{x^2}$.

Нахождение дуги уникурсальной кривой

$$x = \frac{V}{U}, \qquad y = \frac{W}{U},$$

где U, V, W целые полиномы от t, которая дана интегралом:

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R(t)}}{U^2}\,dt,$$

где для сокращения:

$$R = (UV' - VU')^2 + (UW' - WU')^2,$$

дает применение указанному общему методу приведения гиперэллиптических интегралов.

Заметим сначала, что имеем:

$$R=(V'U-U'V)^2+(W'U-U'W)^2=AU'+BU$$

$$\frac{1}{2}R'=(V'U-U'V)(V''U-U''V)+(W'U-U'W)(W''U-U''W)=$$
$$=AU''+CU,$$

положив:

$$\begin{aligned} A&=(V^2+W^2)U'-(VV'+WW^2)U\\ B&=(V'^2+W'^2)U-(VV'+WW')U'\\ C&=(V'V''+W'W'')U-(VV''+WW'')U'. \end{aligned}$$

Отметив это, я рассматриваю разложение $\dfrac{U'}{U}$ в непрерывную дробь и выделяю предпоследнюю из подходящих дробей $\dfrac{N}{P}$, что даст соотношение:

$$\frac{U'}{U}-\frac{N}{P}=\frac{E}{PU},\ \text{т. е.: } PU'-NU=E \text{ и } E \text{ равно } \pm 1.$$

Это условие указывает, что прибавляя $\dfrac{E\sqrt{R}}{U^2}$ к двум частям следующего тождества

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right]=\frac{P'U-PU'}{U^2}\sqrt{R}+\frac{PR'}{2U\sqrt{R}},$$

мы обращаем его

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right]+\frac{E\sqrt{R}}{U^2}=\frac{P'-N}{U}\sqrt{R}+\frac{PR'}{2U\sqrt{R}}.$$

Заметим далее, что мы получаем, пользуясь значениями R и $\dfrac{1}{2}R'$ и полагая $P'-N=M$:

$$MR+\frac{1}{2}PR'=M(AU'+BU)+P(AU''+CU)=$$
$$=[MU'+PU'']A+[MB+PC]U,$$

и что, дифференцируя уравнение $PU'-NU=1$, имеем:

$$MU'+PU''=N'U;$$

таким образом в правой части равенства первый член содержит, как и второй, множитель U. Отсюда вытекает, что мы можем написать:

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right]+\frac{E\sqrt{R}}{U^2}=\frac{N'A+MB+PC}{\sqrt{R}},$$

и, следовательно, имеем для дуги уникурсальной кривой следующее выражение:

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R}}{U^2} dt = -\frac{EP\sqrt{R}}{U} + \int \frac{N'A + MB + PC}{\sqrt{R}} dt,$$

в которое не входит вовсе интегралов третьего рода, вида

$$\int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{R}}.$$

Но это заключение не верно, когда полином $R(t)$ имеет равные корни, как показывает следующее замечание, которым я обязан сообщению Раффи.

Предположим, что U и U' не будут взаимно простыми, E не будет постоянной, а общим наибольшим делителем U и U'.

Найдем:

$$D_t\left(\frac{P\sqrt{R}}{U}\right) + \frac{\dot{E}\sqrt{R}}{U^2} = \frac{AE'}{U\sqrt{R}} + \frac{N'A + MB + PC}{\sqrt{R}}.$$

Так как E не постоянная, то мы уже не можем найти интеграла

$$\int \frac{\sqrt{R}}{U^2} dt.$$

Не трудно, впрочем, обнаружить, что когда уникурсальная кривая имеет кратные асимптотические направления, ее дуга может выражаться через интегралы третьего рода.

Именно это и имеет место для всех кривых Серре, дуги которых выражаются дугами окружности (Cours de Calcul Diff. et Intégral, т. II, ch. 4).

Если возьмем:

$$x + iy = \frac{(t - i\alpha^2)^3}{(t + i\alpha)(t + i)^2}, \qquad x - iy = \frac{(t + i\alpha)^3}{(t - i\alpha^2)(t - i)^2}, \qquad \alpha^3 = 1,$$

то будем иметь:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{3}\, dt}{1 + t^2}$$

Но я утверждаю, кроме того, что интеграл:

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R(t)}}{U^2} dt,$$

в котором мы предполагали:

$$R(t) = (V'^2 + W'^2)U^2 - 2(W' + WW')UU' + (V^2 + W^2)U'^2,$$

логарифмически бесконечен во всех точках, отвечающих простым корням U, если они будут двойными корнями для $V^2 + W^2$.

Пусть t_1 один из них; будем иметь:

$$U = (t - t_1) U_1$$
$$V^2 + W^2 = (t - t_1)^2 Q$$
$$2(VV' + WW') = (t - t_1)[2Q + (t - t_1) Q'] = (t - t_1) Q_1$$

и получим

$$R(t) = (t - t_1)^2 [(V'^2 + W'^2) U_1^2 - Q_1 U' + QU'^2],$$

откуда

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R}(t)}{U^2} dt = \int \frac{\sqrt{(V'^2 + W'^2) U_1^2 - Q_1 U^2 + QU'^2}}{VW(t - t_1) U_1^2} dt,$$

что и показывает, что при $t = t_1$ интеграл логарифмически бесконечен.

Это имеет место для круга

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Здесь:

$$U = 1 + t^2 \qquad V = 1 - t^2 \qquad W = 2t.$$

Имеем:

$$V^2 + W^2 = (1 + t^2)^2.$$

Находим действительно:

$$d\sigma = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

хотя U имеет два различных корня.

Когда $V^2 + W^2$ имеет общие корни с U, кривая проходит через круговые точки на бесконечности. Следовательно, из теоремы надо исключить уникурсальные кривые, проходящие через круговые точки на бесконечности.

Я прибавлю, что интеграл, дающий дугу, логарифмически бесконечен в точках, отвечающих простым корням, общим U и $V^2 + W^2$, которые очевидно будут двойными корнями $R(t)$; в заключение, следует исключить случай, когда U постоянно, как показывает пример параболы $y^2 = 2px$, дуга которой выражается логарифмом.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Определение объема цилиндра, ограниченного плоскостью прямого сечения и некоторой поверхностью, и площади кривой поверхности. Аналитическое понятие двойного интеграла $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$, соответствующего замкнутой кривой $F(x, y) = 0$. — Объем эллипсоида; объемы тел вращения и площадь поверхностей вращения. — Приложения. — Двойные интегралы, взятые между постоянными пределами, приближенное вычисление их; двойные интегралы вида $\int dx \int Df(x, y)\, dy$; простые интегралы по кривой. — Объемы, площади кривых поверхностей, двойные интегралы.

Определение объемов, ограниченных некоторыми поверхностями, и площадей кривых поверхностей, — вопросы, которые возникают, когда выяснено, как вычисляются площади и спрямляются дуги плоских кривых. Они дают начало новым и крайне важным аналитическим понятиям, к которым мы естественно приходим, устанавливая точное и строгое понятие объема. Чтобы установить это понятие, поставим самые простые условия; рассмотрим прямой цилиндр $F(x, y) = 0$ и дадим определение объема части цилиндра, заключенной между плоскостью xy и поверхностью, заданной уравнением: $z = f(x, y)$.

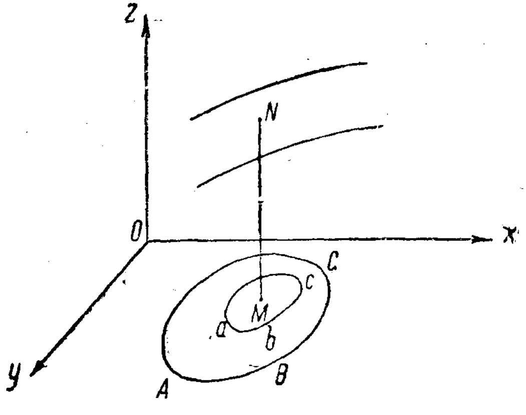

Рис. 13.

Разбиваем любым способом основание ABC на участки вроде abc, площади которых обозначаем через $s, s', s'', \ldots$; таким образом, площадь, ограниченная кривой, будет (рис. 13)

$$S = s + s' + s'' + \ldots.$$

Берем затем произвольную точку M внутри каждого из этих участков и строим соответствующую ординату MN поверхности $z = f(x, y)$.

Имея это и обозначая ординаты, соответствующие площадкам $s, s', s'', \ldots$ через $z, z', z'', \ldots$, получаем объем цилиндра V в виде суммы:

$$sz + s'z' + s''z'' + \ldots = \sum sz,$$

в которой площадки $s, s', s'', \ldots$ бесконечно убывают.

Отметим полную аналогию этого определения с определением площади плоской кривой $y=f(x)$, которое приводит к понятию об интеграле $\int f(x)\,dx$. Мы должны снова, как мы это сделали, говоря о площади, доказать путем вычисления существование определенного и единственного предела для количества $\sum sz$; это и приведет нас к новому аналитическому понятию двойного интеграла.

Допустим, что функция $f(x, y)$ для части поверхности $z=f(x, y)$, заключенной внутри цилиндра, однозначна и подчинена следующему условию.

Взяв на поверхности две какие-либо точки, соответствующие ординатам z_0 и z, и которые проектируются в точках A и B на плоскость xy, рассматриваем кривую пересечения поверхности с плоскостью, определенной этими ординатами, след которой прямая AB.

Уравнение секущей плоскости будет вида $y=ax+b$ и соотношение $z=f(x, ax+b)$ дает проекцию этого сечения на плоскость zx. Имея это, полагаем, как условие непрерывности, что ордината z кривой проходит через все значения, заключенные между z_0 и z.

Пусть ζ такое значение; мы можем написать:

$$\zeta=f(\xi, \eta),$$

где ξ и η обозначают координаты некоторой точки прямой AB.

Положив это, замечаем, что мы получим два предела, между которыми заключается сумма $\sum sz$, если мы заменим ординаты z последовательно наибольшей и наименьшей из них; отсюда следует, что если величина ζ заключена между этими — минимальной и максимальной — ординатами, то

$$\sum sz=\sum s\zeta=S\zeta$$

и вследствие сказанного:

$$\sum sz=Sf(\xi, \eta).$$

Предположим теперь, что каждая из площадок s, s', s'', ... разбивается на меньшие площадки, и сравним новую сумму, которая получается в результате такого деления из предыдущей. Каждая часть s дает частную сумму, которую мы можем, как мы это видели, выразить через $s\zeta$, где ζ обозначает ординату поверхности, соответствующей некоторой точке, взятой внутри s. Таким образом, наша вторая сумма равна:

$$s\zeta+s'\zeta'+s''\zeta''+\ldots.$$

Отнимая ее от первой, получаем для разности выражение:

$$s(z-\zeta)+s'(z'-\zeta')+s''(z''-\zeta'')+\ldots,$$

т. е. произведение S на среднее между числами

$$z-\zeta,\ z'-\zeta',\ z''-\zeta'',\ \ldots \text{ и т. д.}$$

Но эти количества сколь угодно малы, когда площадки $s, s', s'', \ldots$ достаточно малы, так как они равны разностям между ординатами двух точек внутри каждой из площадок, а эти точки бесконечно сближаются.

Итак, доказано, что деление по определенному способу основания цилиндра на беспредельно убывающие части приводит к сумме, имеющей предел, который и берется за определение объёма цилиндра; остается только показать, что все способы деления дают один и тот же предел. Чтобы сравнить результаты двух различных способов деления основания ABC, рассмотрим третий способ, который получим, соединяя площадки, достаточно малые для того, чтобы содержаться сразу в площадках первого и второго способов. Мы только-что видели, что изменение суммы при переходе от первого разложения к третьему, так же как от второго к третьему, может быть сделано меньше любого данного количества; следовательно, доказано, что и требовалось, что два первых способа приводят к одному и тому же пределу.

Дав определение объема, переходим к площадям кривых поверхностей, которые в течение долгого времени рассматривали следующим образом[1].

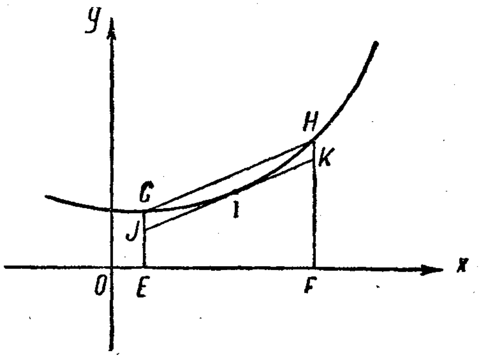

Рис. 14.

„Пусть дана часть кривой поверхности, ограниченной контуром C; мы назовем площадью этой поверхности предел S, к которому стремится площадь поверхности вписанного многогранника, грани которого треугольны, ограниченной многоугольным контуром, имеющим пределом кривую C''. Неудобства, связанные с этим определением, были отмечены Геттингенским профессором Шварцем. Сообщение, которое было прислано мне по этому поводу знаменитым геометром, может быть с величайшей пользой прочитано во втором издании этого курса на стр. 35. Мы откажемся от многогранной поверхности, хотя она аналогична многоугольнику, вписанному в дугу кривой, при помощи которого определяется длина этой дуги.

Мы будем следовать другой аналогии, к которой приводит замечание, сделанное на стр. 8, по которому мы можем заменять стороны GH многоугольника (рис. 14) рядом не прилегающих друг к другу отрезков JK: эти отрезки будут частями, заключенными между ординатами GE и HF, касательной к кривой в некоторой точке I ее дуги GH.

Пусть $z=f(x, y)$ — уравнение поверхности и ABC — проекция на плоскость xy кривой, ограничивающей часть этой поверхности. За геометрические элементы, аналогичные отрезкам касательных, о которых мы только-что говорили, мы возьмем следующие площадки.

Пусть abc — замкнутый контур, начерченный каким-либо образом внутри ABC; строим прямой цилиндр, имеющий основанием площадку abc, и затем проводим плоскость, касательную в некоторой точке поверхности, которая проектируется внутри abc. Эта плоскость пересекает ци-

[1] I. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, 2-e Édition, tome second, p. 293.

линдр по кривой ghk; получаем плоский элемент, который соответствует abc. Обозначая через θ угол, образованный касательной плоскостью с плоскостью xy, и через x, y, z — координаты точки касания, имеем, как известно:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

или

$$\cos\theta = \frac{1}{\varphi(x, y)},$$

положив для сокращения

$$\varphi(x, y) = \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}.$$

Пусть s площадь abc, t площадь ghk; соотношение

$$s = t\cos\theta$$

даст нам:

$$t = s\varphi(x, y).$$

Имея это, предположим, что площадка ABC разделена на части, площади которых s, s', s'' ..., и обозначим соответствующие плоские элементы через t, t', t'', ... Площадь кривой поверхности определится, как предел суммы $t+t'+t''+\ldots$ при бесконечном убывании s, s', s'' .... Эта сумма, если положим временно $z=\varphi(x, y)$, представится на основании предыдущей формулы выражением: $\sum sz$; мы видим, что определение площади таким образом сведено к определению объема, и нам остается только обнаружить, что сумма плоских элементов имеет определенный предел, независящий от способа определения площадки abc.

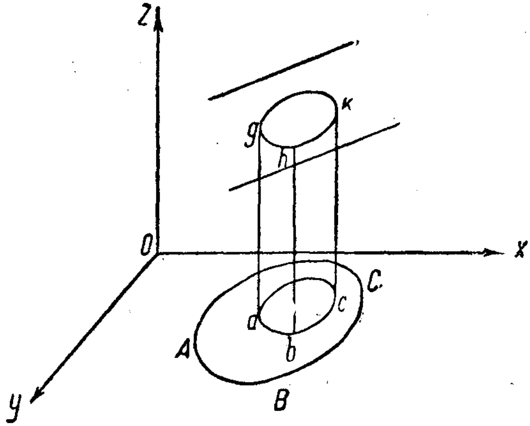

Рис. 15.

Сумма $\sum sz$, появившаяся, когда мы искали определение объема, является новым элементом счисления, аналогичным определенным интегралам, которыми выражаются площади плоских кривых, но более сложным по природе. Мы выведем из него аналитическое понятие двойных интегралов и покажем, как они получаются посредством двух последовательных интегрирований.

Пусть $F(x, y)=0$ уравнение основания цилиндра, объем которого дается выражением:

$$V = \sum sz$$

и $z=f(x, y)$ уравнение поверхности, которая его ограничивает.

Допустим, что кривая $F(x, y)=0$ (рис. 16) будет такой кривой, любой абсциссе которой $x=OA$ соответствует не более двух ординат $y=AB$, $y'=AC$. Имея это, рассмотрим две параллельные прямые AC и $A'C'$ на расстоянии $AA'=dx$; среди всех способов деления на площадки основания цилиндра мы выберем за элементарные площадки прямоугольники, получаемые проведением перпендикуляров к этим прямым на равных расстояниях dy, начиная от точки B до точки, ближайшей к C; заметим, что таким образом мы можем прибавить к площади основания и исключить из нее часть прямоугольника $dxdy$. Предположим также, что ординаты, соответствующие ординатам поверхности, проводятся в одной из вершин этих прямоугольников; эти ординаты таким образом равны величинам:

$$f(x, y), \quad f(x, y+dy), \quad f(x, y+2dy), \ldots$$

Будем иметь для частной суммы количеств sz следующее выражение:

$$dx \sum f(x, y+idy)\, dy, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots)$$

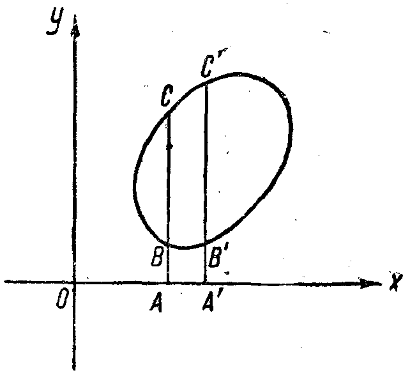

Рис. 16.

и, следовательно, при бесконечно малом dy, определенный интеграл:

$$dx \int_{AB}^{AC} f(x, y)\, dy,$$

в котором переменная x рассматривается, как постоянная.

Предположим, что, решая уравнение $F(x, y)=0$, получаем $y=\varphi(x)$, $y_1=\psi(x)$ и пусть:

$$\Theta(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Сумма всех элементов sz будет новым интегралом:

$$\int_a^b \Theta(x)\, dx,$$

где через a и b обозначены крайние значения x, т. е. абсциссы точек в которых касательная к кривой параллельна оси ординат. Бесконечно малые величины, прибавленные или отброшенные нами, имеют, очевидно, высшим пределом прямоугольную полосу, полученную помещением бок-о-бок прямоугольников $dxdy$ на отрезке, равном двойной проекции кривой на ось Ox и образуют сумму, которой можно пренебречь. Мы можем, следовательно, написать:

$$V=\int_a^b \Theta(x)\, dx=\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy;$$

это выражение назовем двойным интегралом функции двух переменных $f(x, y)$, взятым на площадке, ограниченной кривой $F(x, y) = 0$.

С этим новым элементом счисления, который играет самостоятельную роль в анализе, имея с простыми определенными интегралами существенные сходства и различия, крайне важно ознакомиться. Аналогии вытекают из сходства между определениями площади плоских кривых и объема цилиндров. Различия проистекают главным образом от той роли, которую играет в вычислении двойного интеграла условие: $F(x, y) = 0$, служащее для ограничения переменных. Таким образом, имеем, как прямое следствие определения, формулы:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0) f(\xi),$$

где величина ξ заключена между x и X и

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = Sf(\xi, \eta),$$

где S обозначает площадь основания цилиндра и где ξ и η — координаты точки, расположенной внутри кривой $F(x, y) = 0$. Чтобы сократить запись, часто пишут таким образом, как мы это сделали выше:

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy$$

вместо вполне ясного выражения:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy,$$

ограничиваясь добавлением, что двойной интеграл относится к данной замкнутой кривой. Я прибавлю, что в частном случае линейной функции:

$$f(x, y) = A + Bx + Cy,$$

ординаты ξ и η имеют значение, о котором мы должны упомянуть. В этом случае объем равен:

$$V = A\iint dx\,dy + B\iint x\,dx\,dy + C\iint y\,dx\,dy,$$

мы видели, что первый интеграл $\iint dx\,dy$ есть площадь S, два других дают следующие соотношения:

$$\iint x\,dx\,dy = S\xi, \qquad \iint y\,dx\,dy = S\eta,$$

в которых ξ и η — координаты центра тяжести площади основания. Таким образом, имеем следующее выражение:

$$V = S(A + B\xi + C\eta)$$

или

$$V = S\zeta,$$

вводя ординату ζ плоскости, служащей границей объема цилиндра.

Геометрические приложения, которыми мы в дальнейшем займемся, дадут нам примеры на вычисление двойных интегралов; сделаем предварительно замечание относительно определения объема, ограниченного замкнутою поверхностью $F(x, y, z) = 0$. Предположим, что всякой системе переменных x и y соответствуют только два значения z; имея это, рассмотрим цилиндр, описанный около этой поверхности параллельно оси Oz; разность двух его объемов, отвечающих наибольшему и наименьшему значениям z, даст искомый результат. След описанного цилиндра на плоскости xy получаем, как известно, исключая z из уравнений:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

надо затем определить крайние значения x, дающие точки, в которых касательная к этому следу параллельна оси Oy. Достигаем этого простым способом, заметив, что в соответствующих точках поверхности, касательная плоскость перпендикулярна к оси Ox; это даст следующие три уравнения:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Получаем, следовательно, исключая y и z, уравнение для x, определяющее искомые величины.

Это исследование разности объемов двух цилиндров не всегда необходимо; мы увидим это при первом же приложении к эллипсоиду с тремя неравными осями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Можно ограничиться действительно вычислением части эллипсоида, находящейся в угле с положительными координатами, которая равняется восьмой части всего объема. След поверхности на плоскость xy — эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Функции, которые были обозначены через $y = \varphi(x)$, $y_1 = \psi(x)$, теперь: $y = 0$ и ордината эллипса: $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Таким образом, получим для количества, обозначенного через $\Theta(x)$ интеграл:

$$\Theta(x) = \int_0^{y_1} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy,$$

или же:

$$\Theta(x) = \frac{c}{b}\int_0^{y_1} \sqrt{y_1^2 - y^2}\, dy.$$

Следовательно, получаем непосредственно:

$$\Theta(x)=\frac{\pi}{4}\,\frac{cy_1^2}{b};$$

остается проинтегрировать это выражение между крайними значениями переменной $x=0$, $x=a$, что дает:

$$\int_0^a \Theta(x)=\frac{\pi bc}{4}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{\pi abc}{6}$$

и значит для объема эллипсоида имеем:

$$V=\frac{4\pi abc}{3}.$$

К совершенно похожим вычислениям приводят и следующие предложения.

Предложим себе сначала получить объем V некоторого тела вращения, образуемого вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси абсцисс и заключенного между плоскостями $x=a$, $x=b$, перпендикулярными к этой оси.

Имеем уравнение поверхности вращения:

$$\sqrt{y^2+z^2}=f(x),$$

или:

$$y^2+z^2-f^2(x)=0.$$

Рассмотрим часть, расположенную над плоскостью xy, объем которой $\frac{V}{2}$; отметим, что след поверхности на эту плоскость дается уравнением:

$$y^2-f^2(x)=0;$$

таким образом, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ теперь равны: $-f(x)$ и $+f(x)$. Общая формула при замене для сокращения $f(x)$ на f принимает вид:

$$\frac{V}{2}=\int_a^b dx\int_{-f}^{+f}\sqrt{f^2-y^2}\,dy;$$

и так как имеем:

$$\int_{-f}^{+f}\sqrt{f^2-y^2}\,dy=\frac{\pi f^2}{2},$$

заключаем непосредственно, что

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Найдем далее площадь поверхности вращения; для этого вычислим выражение $1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$ или, написанное в более простом виде, $1+p^2+q^2$. Имеем сперва:

$$p=\frac{ff'}{z}, \quad q=-\frac{y}{z}.$$

Следовательно:

$$1+p^2+q^2=\frac{z^2+y^2+f^2f'^2}{z^2}=\frac{(1+f'^2)f^2}{z^2}.$$

Часть поверхности S, расположенная над плоскостью xy, имеет, следовательно, значение:

$$\frac{S}{2}=\int_a^b dx\int_{-f}^{+f}\sqrt{1+f'^2}\frac{fdy}{\sqrt{f^2-y^2}}$$

и формула:

$$\int_{-f}^{+f}\frac{dy}{\sqrt{f^2-y^2}}=\pi$$

дает непосредственно искомый результат:

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{1+f'^2}fdx.$$

Заметим, что, вводя дугу σ меридиональной кривой $y=f(x)$, мы можем переписать S в более простом виде:

$$S=2\pi\int_a^b yd\sigma.$$

Пусть, например, имеем эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

уже полученная нами формула:

$$d\sigma=\frac{b\sqrt{a^4-c^2x^2}}{a^2y}dx$$

дает:

$$yd\sigma=\frac{b\sqrt{a^4-c^2x^2}}{a^2}dx.$$

Допустим, во-первых, что $a>b$, т. е. что эллипсоид образован эллипсом, вращающимся вокруг своей большой оси; постоянная c будет вещественной и меньше a; мы пришли таким образом к вычислению площади эллипса; пишем:

$$S=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2-x^2}\,dx,$$

что дает непосредственно:

$$S=\frac{\pi bx}{a^2}\sqrt{a^4-c^2x^2}+\frac{2\pi a^2b}{c}\arcsin\frac{cx}{a^2},$$

считая начало площади от края малой оси. Если допустим затем, что эллипсоид получен вращением около его малой оси, полагая $b^2-a^2=c$ получим следующее новое выражение:

$$S=\frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{a^4+c^2x^2}\,dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2+x^2}\,dx.$$

Оно встречалось нам при спрямлении дуги гиперболы; поверхность удлиненного эллипсоида, считая снова от $x=0$, вычисляется по формуле:

$$S=\frac{\pi bx}{a^2}\sqrt{a^4+c^2x^2}+$$
$$+\frac{\pi a^2b}{c}\ln\frac{cx+\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2}.$$

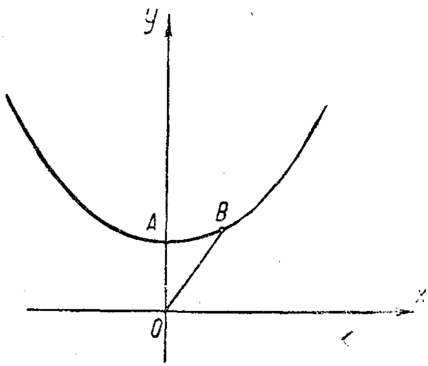

Рис. 17.

Предложим себе наконец, как последнее геометрическое приложение, найти объем, заключенный между поверхностью двуполого гиперболоида

$$yz+y^2-x^2-a^2=0$$

и тремя плоскостями

$$y=0,\quad z=0,\quad y=2x.$$

Построим верхнюю ветвь гиперболы $y^2-x^2-a^2=0$ (рис. 17), след поверхности на плоскости xy и прямую $y=2x$. Пусть A—вершина кривой, B—точка, в которой она встречает эту прямую: переменные x и y окажутся подчиненными условию,—представлять точки сектора AOB. Требуется, следовательно, проинтегрировать по y функцию $z=\frac{a^2+x^2-y^2}{y}$, принимая за низший предел ординату прямой OB: $y=2x$ и за высший—ординату гиперболы AB: $y_1=\sqrt{x^2+a^2}$. Получаем, таким образом, выражение

$$\Theta(x)=\int\limits_y^{y_1}\frac{a^2+x^2-y^2}{y}\,dy=(x^2+a^2)\ln\frac{y_1}{y}-\frac{1}{2}(y_1^2-y^2),$$

т. е.

$$\Theta(x) = (x^2 + a^2) \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2x} + \frac{1}{2}(3x^2 - a^2),$$

которое должно быть затем проинтегрировано, начиная от $x = 0$, до абсциссы точки B, $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Заменим множитель $x^2 + a^2$ через $D_x\left(\frac{x^3}{3} + a^2 x\right)$; интегрирование по частям легко дает следующее выражение:

$$\int \Theta(x)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + a^2 x\right) \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2x} + \frac{x(3x^2 - a^2)}{2} + \frac{2}{3} \int \frac{a^4 dx}{x^2 + a^2}.$$

Заметим теперь, что произведение $x \ln x$ уничтожается при $x = 0$; следовательно, логарифмический член и алгебраическая часть исчезают как на нижней границе, так и на верхней при $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$; значит, получается очень простой результат:

$$\int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \Theta(x)\, dx = \frac{2}{3} \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \frac{a^4 dx}{x^2 + a^2};$$

имея это, достаточно положить в интеграле правой части $x = a\xi$ и отметить, что $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, чтобы получить искомое значение:

$$V = \frac{2a^3}{3} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{\pi a^3}{9}.$$

Начав изучение двойных интегралов с разбора геометрических приложений, будем продолжать изучение их с точки зрения анализа.

Обратим, во-первых, внимание на весьма важный частный случай, в котором их природа приближается к природе простых. Предположим, что пределы интегрирования, относительно переменной y будут независимы от x, и представим затем двойной интеграл в виде

$$J = \int\limits_a^{a'} dx \int\limits_b^{b'} f(x, y)\, dy;$$

заметим, что он выражается вполне точно через функцию $\Phi(x, y)$, удовлетворяющую условию:

$$f(x, y) = D^2_{xy} \Phi(x, y).$$

Имеем, в самом деле, выражение:

$$J = \Phi(a', b') + \Phi(a, b) - \Phi(a', b) - \Phi(a, b'),$$

члены которого суть значения, которые принимает функция $\Phi(x, y)$ в вершинах прямоугольника, по которому выполнено двойное интегрирование.

Обозначим координаты точек A, B, C, D (рис. 18) через (a, b), (a', b), (a', b'), (a, b') и пусть для краткости: $A = \Phi(a, b)$, $B = \Phi(a', b)$ и т. д.; предыдущее соотношение перепишется следующим образом:

$$J = (A) - (B) + (C) - (D).$$

Заметим, что различные знаки относятся к вершинам прямоугольника, когда последний описан, начиная от вершины A, так, что неограниченное пространство находится справа. Так же в совершенно частном случае, когда предполагается, что

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y),$$

ясно, что мы имеем

$$\int_b^{b'} f(x, y)\,dy = \varphi(x)\int_b^{b'} \psi(y)\,dy;$$

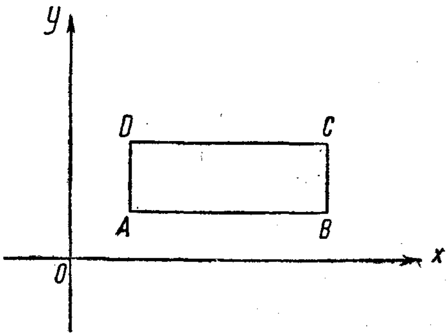

Рис. 18.

следовательно, двойной интеграл есть произведение двух простых интегралов

$$J = \int_a^{a'} \varphi(x)\,dx \times \int_b^{b'} \psi(y)\,dy.$$

Пусть еще, например,

$$f(x, y) = [\varphi(x) - \varphi(y)]\,[\psi(x) - \psi(y)];$$

получаем соотношение:

$$\int_a^{a'}\int_a^{a'} [\varphi(x) - \varphi(y)]\,[\psi(x) - \psi(y)]\,dxdy =$$

$$= 2\left[(a' - a)\int_a^{a'} \varphi(x)\psi(x)\,dx - \int_a^{a'} \varphi(x)\,dx \int_a^{a'} \psi(x)\,dx\right],$$

которое приводит к важному следствию.

Положим, что a' больше a и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одновременно возрастают или убывают, когда переменная проходит интервал, заключенный между a и a'. В первом случае например, разности $\varphi(x) - \varphi(y)$ и $\psi(x) - \psi(y)$ будут положительны при $x > y$, отрицательными при $x < y$ и сохраняют, следовательно, тот же знак. То же самое будет во втором случае; двойной интеграл, следовательно, всегда положителен, и мы получаем соотношение:

$$(a'-a)\int_a^{a'}\varphi(x)\psi(x)\,dx > \int_a^{a'}\varphi(x)\,dx\int_a^{a'}\psi(x)\,dx.$$

Допустим затем, что одна из функций будет возрастать вместе с переменной в указанном интервале, а другая убывать; разности $\varphi(x)-\varphi(y)$, $\psi(x)-\psi(y)$ будут иметь разные знаки, двойной интеграл будет отрицателен, и мы получаем

$$(a'-a)\int_a^{a'}\varphi(x)\psi(x)\,dx < \int_a^{a'}\varphi(x)\,dx\int_a^{a'}\psi(x)\,dx.$$

Этими замечательными теоремами относительно определенных интегралов мы обязаны Чебышеву; столь простое доказательство, которое мы только что изложили, было дано Франклином в статье Американского Математического журнала (American Journal of Mathematics) том VII, стр. 77, к которой мы и отсылаем для изучения их многочисленных и важных применений, сделанных знаменитым автором, в частности к эллиптическим интегралам.

Перейдем теперь к вопросу о приближенном вычислении двойного интеграла

$$J=\int_a^{a+h}dx\int_a^{b+k}f(x,\ y)\,dy$$

посредством разложения его в ряд по возрастающим степеням h и k в случае, когда он не может быть получен вполне точно.

Допустим, что функция $f(x,\ y)$ может быть разложена в сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням $x-a$ и $y-b$, по формуле Тэйлора для случая двух переменных; положим:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+\frac{x-a}{1}\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial a}+\frac{y-b}{1}\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial b}+\ldots;$$

общий член этого ряда равен:

$$\frac{(x-a)^m}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\cdot\frac{(y-b)^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\cdot\frac{\partial^{m+n}f}{\partial a^m\partial b^n}.$$

Таким образом, приходим к сумме интегралов вида:

$$\int_a^{a+h}dx\int_a^{b+k}\frac{(x-a)^m}{1\,.\,2\,\ldots\,m}\,\frac{(y-b)^n}{1\,.\,2\ldots\,n}\,\frac{d^{m+n}f}{da^m db^n}\,dy,$$

которые легко вычисляются, так как двойной знак интегрирования относится к произведению функции x на функцию y. Получаем формулу:

$$J=\Sigma\frac{h^{m+1}k^{m+1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(m+1)\cdot 1\,.\,2\,\ldots\,(n+1)}\,\frac{d^{m+n}f(a,\ b)}{da^m db^n},$$

в которой целые числа m и n принимают все значения от нуля до бесконечности.

Ограничиваясь только тремя первыми членами, имеем:

$$J = hk \cdot f(a,\ b) + \frac{h^2k}{2}\frac{df}{da} + \frac{hk^2}{2}\frac{df}{db} =$$

$$= hk\left[f(a,\ b) + \frac{h}{2}\frac{df}{da} + \frac{k}{2}\frac{df}{db}\right];$$

мы можем, значит, отметить, что двойной интеграл J равен с точностью до членов четвертого порядка относительно h и k, количеству

$$hkf\left(a + \frac{h}{2},\quad b + \frac{k}{2}\right).$$

Этот результат применяется во многих обстоятельствах.

Если количества h и k слишком велики, чтобы разложение было достаточно быстро сходящимся, разбиваем интеграл на несколько других и применяем формулу к каждому из них; последнее геометрически сводится к делению целого прямоугольника, по которому берется двойной интеграл, на несколько других меньших прямоугольников.

Эти приемы приближенного вычисления двойных интегралов, которыми пользуются на практике, аналогичны приемам, которые применяются при вычислении простых интегралов, но близость, которую мы хотим установить между этими двумя видами выражений, будет вытекать более полно из следующего замечания.

Вспомним для этого приближенную формулу, данную Гауссом для простого интеграла:

$$J = \int\limits_a^{a+h} f(x)\,dx.$$

Пусть:

$$F(t) = \frac{D^\mu\,[t^\mu(t-1)^\mu]}{1 \cdot 2\ \dots\ \mu}$$

обозначим через $t_1,\ t_2,\ \dots\ t_\mu$ корни уравнения $F(t) = 0$, которые все вещественны и заключаются между нулем и единицей; пусть также:

$$T_i = \frac{1}{(t_i - t_i^2)\,F'^2(t_i)};$$

имеем:

$$J = h\,[T_1 f(a + ht_1) + T_2 f(a + ht_2) + \ \dots\ + T_\mu f(a + ht_\mu)]$$

или, короче:

$$J = h\Sigma\,[T_i f(a + ht_i)].$$

Рассмотрим затем двойные интегралы, положив:

$$J = \int\limits_a^{a+h} dx \int\limits_b^{b+k} f(x,\ y)\,dy;$$

мы установим аналогичную формулу:

$$J = hk\Sigma\,[T_i T_j f(a + ht_i,\ b + kt_j)] \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2, \ldots \mu \\ j = 1,\ 2, \ldots \mu \end{pmatrix}.$$

Развертывая, в самом деле, это выражение по возрастающим степеням h и k, находим для коэфициента $h^{m+1}k^{n+1}$ значение:

$$\frac{1}{1.\ 2 \ldots m.\ 1.\ 2 \ldots n}\ \frac{d^{m+n}f(a,\ b)}{da^m db^n}\,\Sigma\,[T_i T_j t_i^m t_j^n].$$

Имеем следующее соотношение, на котором основана формула Гаусса и которое я привожу здесь без доказательства:

$$\sum_1^\mu [T_i t_i^m] = \frac{1}{m+1},$$

где m целое и одно из чисел последовательности 0, 1, 2, ... $2\mu - 1$.

Перемножив члены этого уравнения на соответствующие члены ему подобного

$$\sum_1^\mu [T_j t_j^n] = \frac{1}{n+1}$$

получим

$$\sum [T_i T_j t_i^m t_j^n] = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2, \ldots \mu \\ j = 1,\ 2, \ldots \mu \end{pmatrix}.$$

Мы видим, следовательно, что в рассматриваемом разложении коэфициент при $h^{m+1}k^{n+1}$ просто равен:

$$\frac{1}{1.\ 2 \ldots m+1 \cdot 1 \cdot 2. \ldots n+1}\ \frac{d^{m+n}f(a,\ b)}{da^m db^n},$$

когда m и n находятся в последовательности 0, 1, 2, ... $2\mu - 1$.

Но мы получили прежде для двойного интеграла ряд:

$$J = \sum \frac{h^{m+1}k^{n+1}}{1.\ 2. \ldots m+1 \cdot 1.\ 2 \ldots n+1}\ \frac{d^{m+n}(a,\ b)}{da^m db^n}.$$

Следовательно, приближенная формула, которая является развитием формулы Гаусса, представляет этот интеграл с точностью до членов порядка $2\mu + 1$ относительно h и k; эта формула дает точное значение, если функция $f(x,\ y)$ целый полином от x и y степени не выше 2μ относительно каждой из переменных.

Пусть, например, $\mu = 1$; находим, как сказано выше:

$$J = hkf\left(a + \frac{h}{2},\quad b + \frac{k}{2}\right).$$

Положим потом $\mu=2$, что дает $F(t)=6t^2-6t+1$, откуда

$$t_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6},\quad t_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6},$$

и затем

$$T_1=\frac{1}{2},\quad T_2=\frac{1}{2};$$

получим следующее весьма простое выражение

$$J=\frac{hk}{4}\left[f\left(a+\frac{3+\sqrt{3}}{6}h,\quad b+\frac{3+\sqrt{3}}{3}k\right)+\right.$$
$$+f\left(a+\frac{3-\sqrt{3}}{6}h,\quad b+\frac{3+\sqrt{3}}{2}k\right)+$$
$$+f\left(a+\frac{3-\sqrt{3}}{6}h,\quad b+\frac{3-\sqrt{3}}{6}k\right)+$$
$$\left.+f\left(a+\frac{3+\sqrt{3}}{6}h,\quad b+\frac{3-\sqrt{3}}{6}k\right)\right].$$

Укажем, наконец, один результат, относящийся к приближенному вычислению интегралов вида:

$$J=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}\frac{f(x,\ y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

где предположено $f(x,\ y)=\sum A_{m,n}x^m y^n$, и который вытекает из хорошо известной формулы для простого интеграла:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Пусть $x=\cos\varphi$, $y=\cos\psi$ и положим для краткости:

$$f(\cos\varphi,\ \cos\psi)=F(\varphi,\ \psi),$$

что дает:

$$J=\int_0^\pi d\varphi\int_0^\pi F(\varphi,\ \psi)\,d\psi.$$

Сумма:

$$\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2\sum F\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\mu},\ \frac{(2j-1)\pi}{2\mu}\right],$$

где целые числа i и j принимают значения $1,\ 2,\ \ldots\ \mu$, представляет интеграл J, если пренебречь, как и выше, членами порядка $2\mu+1$ относительно x и y в функции $f(x,\ y)$.

Возвратимся теперь к общим соображениям и рассмотрим случай, когда под знаком интеграла стоит частная производная по одной из переменных. Займемся, во-первых, следующим выражением:

$$J=\int dx\int D_y f(x,\ y)\,dy;$$

двойной интеграл, берется как всегда по площади, ограниченной замкнутой кривой $F(x,\ y)=0$.

Следуя правилам, установленным выше, мы решим уравнение кривой относительно y и предположим, что получим две функции от x, а именно:

$$y_0=\varphi(x);\quad y_1=\psi(x).$$

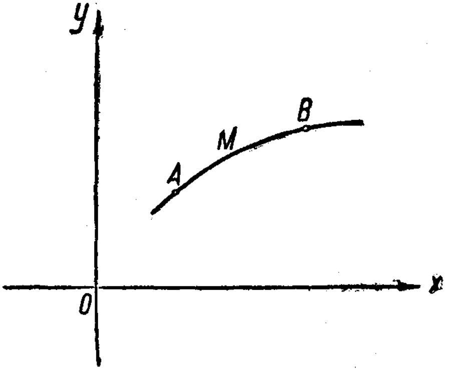

Рис. 19.

Получим, следовательно, выражение:

$$J=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_y f(x,\ y)\,dy,$$

которое после интегрирования по y принимает следующий вид:

$$J=\int\limits_a^b f(x, y_1)\,dx-\int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx.$$

Мы видим, таким образом, что значение двойного интеграла выражается через простые интегралы от двух других функций; это обстоятельство даст нам новое аналитическое понятие, которые мы установим, следуя соображениям, использованным К. Нейманом в его сочинении, озаглавленном: Теория Абелевых функций по Риману (Theorie des fonctions abéliennes d'après Riemann).

Назовем вообще криволинейным интегралом выражение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(x,\ y)\,dt.$$

в котором $f(x,\ y)$ обозначает некоторую функцию от x и y, когда эти последние даны, как функции переменной t формулами: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

Предположим, что мы провели кривую, заданную уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и пусть AMB (рис. 19) дуга, полученная при возрастании t от t_0 до t_1.

Мы видим, что интеграл есть сумма значений функции $f(x,\ y)\,dt$, где x и y — координаты последовательности точек этой дуги кривой, получаемых, когда мы заставляем возрастать t от t_0 до t_1, давая приращение, равное dt. Она связана, следовательно, с дугой AMB, что оправдывает название криволинейного, данное интегралу, и способ, которым его обозначают:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x, y)\, dt = (AMB).$$

Сделаем относительно этой формулы первое, очень простое, но очень важное замечание.

Имеем очевидно:

$$\int_{t_1}^{t_0} f(x, y)\, dt = (BMA);$$

расположение букв указывает направление, в котором рассматривается дуга кривой.

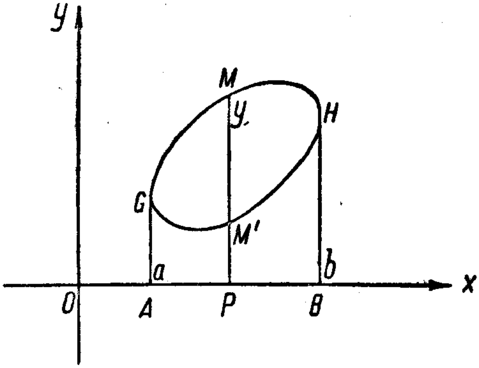

Рис. 20.

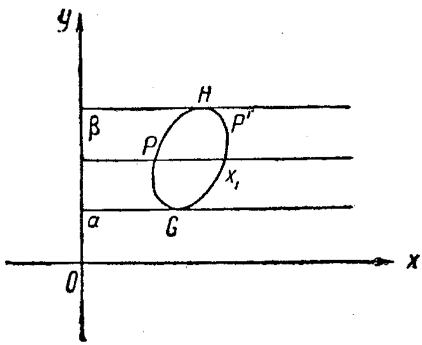

Рис. 21.

Кроме того:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x, y)\, dt + \int_{t_1}^{t_0} f(x, y)\, dt = 0,$$

и соотношение, которое отсюда вытекает, а именно:

$$(AMB) + (BMA) = 0,$$

указывает, что криволинейные интегралы, взятые по одному и тому же пути следования, последовательно в одном направлении, а затем в обратном, равны и обратны по знаку.

Применим эти понятия к интегралу, предложенному выше:

$$J = \int_a^b f(x, y_1)\, dx - \int_a^b f(x, y_0)\, dx.$$

Уравнение $F(x, y) = 0$ представляет кривую $GMHMG'$ (рис. 20). Имеем, очевидно:

$$J = (GMH) - (GM'H),$$

или, применяя предыдущее замечание:

$$J=(GMH)+(HM'G).$$

Следовательно, J есть просто криволинейный интеграл, взятый по всему контуру кривой $F(x, y)=0$, описанному полностью один раз и таким образом, что внешнее пространство находится слева. Имеем, следовательно, для выражения J криволинейный интеграл, который берется по целому контуру кривой $F(x, y)=0$. Преимущество, которое дает нам это новое понятие криволинейного интеграла, заключается, следовательно, в том, что двойной интеграл выражается одним членом вместо двух.

Рассмотрим теперь случай, когда функция, стоящая под знаком интеграла, равна частной производной от x. Тогда искомый объем дается выражением:

$$J=\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_0}^{x_1} D_x f(x, y)\, dx,$$

где $y=\alpha$, $y=\beta$ касательные к основанию цилиндра $F(x, y)=0$, параллельные Ox, и где через x_0 и x_1 обозначены функции от y, которые дают два значения абсциссы для одного и того же значения ординаты. Условившись в этом, рассмотрим рис. 21; он нам указывает непосредственно, что мы имеем:

$$J=\int_{\alpha}^{\beta} f(x_1, y)\, dy-\int_{\alpha}^{\beta} f(x_0, y)\, dy=(GP'H)-(GPH)=(GP'H)+(HPG).$$

Но теперь основание цилиндра описано таким образом, что внешнее пространство будет справа, тогда как в предыдущем случае, когда функция под знаком интеграла была вида $D_y f(x, y)$, внешнее пространство находилось слева.

Эти крайне простые соображения будут вскоре иметь важные приложения.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Геометрическое представление мнимой переменной; ее значение при изучении функций. — Теорема об изменении аргумента бинома первой степени и полинома, когда переменная описывает замкнутый контур. — Краткое исследование квадратного корня полинома. — Однозначные и неоднозначные функции. — Изучение функции $\ln(z-a)$.

Прежде чем приступить к понятию об интегралах с мнимыми пределами, напомним вкратце некоторые выводы, к которым приводит теория мнимых величин в алгебре.

Эти результаты являются следствием геометрического представления величины $z=x+iy$ точкой плоскости, абсцисса которой есть x и ордината y относительно прямоугольных осей. Мы видим, таким образом, что некоторой последовательности таких величин соответствует последовательность точек; таким образом некоторый закон последовательности мнимых количеств переменной будет представлен кривой. Пусть $u=f(z)$ и предположим, что, беря $z=x+iy$, имеем: $u=X+iY$; применим тот же способ представления u, какой был применен к независимой переменной; некоторому геометрическому месту, линии, определяющей закон последовательности значений z, будет соответствовать другая линия, дающая закон последовательности значений функции. Эта вторая кривая названа Гауссом отображением первой.

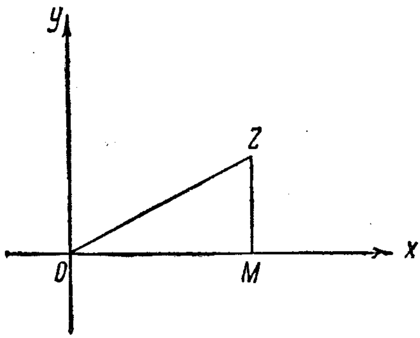

Рис. 22.

Можно также, изображая величины $z=x+iy$, применять вместо прямоугольных координат полярные ρ и ω, полагая $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, где ρ, будучи расстоянием Oz, принимается всегда положительным, и ω — угол zOx. Назовем ρ модулем, угол ω аргументом z, и переходя к u положим подобным образом:

$$X=R\cos\varphi, \quad Y=R\sin\varphi.$$

Установив это, наша цель теперь — показать, каким образом зависимость этих аналитических элементов или этих двух кривых, построенных с помощью величин z и u, сказывается на характерных и наиболее важных свойствах функции.

Мы начнем это изучение с наиболее простого случая, рассматривая бином:

$$u = z - a,$$

в котором $a = \alpha + \beta i$, следовательно:

$$u = (x - \alpha) + i(y - \beta)$$

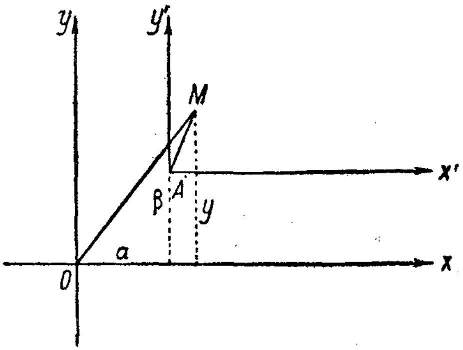

Рис. 23.

или

$$x' + iy',$$

полагая $x - \alpha = x',\ y - \beta = y'$.

Пусть A и M точки, изображающие величины a и z (рис. 23). Проведем через A две прямые Ax', Ay', параллельные осям Ox и Oy. Предыдущие формулы показывают нам, что точка M представляет $z - a$, если взять за оси две прямые Ax', Ay', полагая:

$$u = R(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

имеем, следовательно:

$$MA = R; \quad MAx' = \varphi.$$

Имея это, допустим, во-первых, что точка M описывает окружность с центром в O; модуль ρ величины z — постоянный; заставим возрастать непрерывно аргумент ω от начального значения ω_0 до значения $\omega_0 + 2\pi$.

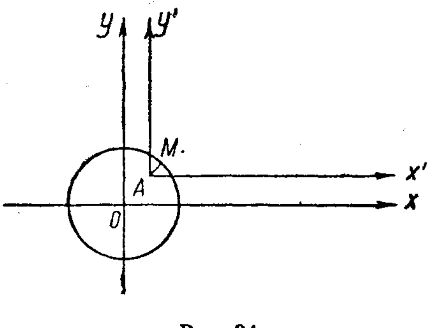

Рис. 24.

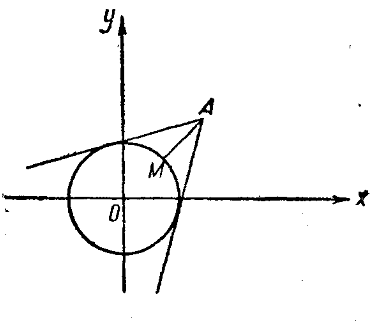

Рис. 25.

Чертеж указывает непосредственно (рис. 24), что если точка A внутри окружности, аргумент φ величины u увеличивается на 2π вместе с ω; если точка A находится вне окружности (рис. 25), описанной точкой M, то когда ω возрастает от ω_0 до $\omega_0 + 2\pi$, угол φ изменяется, последовательно убывая и возрастая, но остается заключенным между двумя постоянными пределами, и в конце принимает свое первоначальное значение.

Эти результаты могут быть получены также вычислением, исходя от выражения $\operatorname{tg}\varphi$ как функции ω, но геометрия позволяет распространить их на общий случай, когда точка M, изображающая переменную z, описывает вместо окружности некоторую замкнутую кривую.

Таким образом, рис. 26 показывает, что когда точка A внутри этой кривой, аргумент: $\varphi = MAx'$ становится равным $\varphi + 2\pi$, когда кривая пройдена полностью и только один раз, имея внешнее пространство справа.

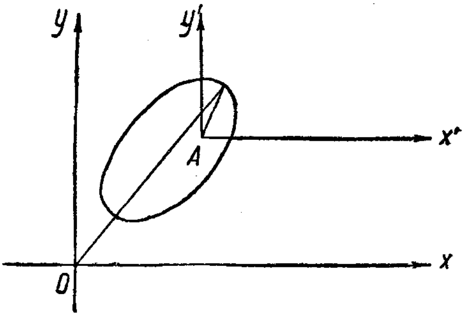

Рис. 26.

Рис. 27 позволяет видеть, что в случае внешней точки этот угол снова принимает свое первоначальное значение.

Рассмотрим теперь модуль и аргумент произведения некоторого числа двухчленных множителей:

$$u = (z - a)(z - b) \ldots (z - l)$$

и предположим, что мнимая переменная $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ описывает некоторый замкнутый контур S.

Положив:

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z - b = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z - l = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$

и

$$u = R(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

получим:

$$R = rr_1 \ldots r_n$$
$$\Phi = \varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_n + 2k\pi.$$

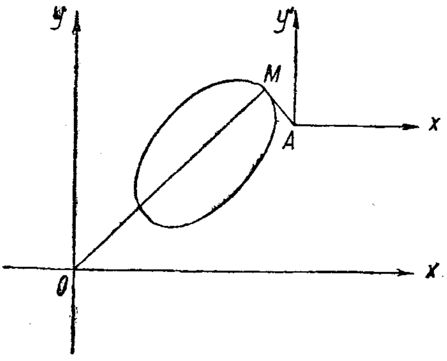

Рис. 27.

Имея это, положим, что переменная z, отправляясь от некоторой точки контура, возвратится в нее, описав контур полностью один раз; те аргументы φ, непрерывные функции от ω, которые соответствуют постоянным $a, b, \ldots l$, заключенным внутри S, увеличатся на 2π, и, наоборот, те, которые соответствуют количествам, находящимся снаружи контура, примут снова исходные значения; имеем следовательно, теорему:

Когда переменная z описывает замкнутый контур, аргумент целого полинома:

$$u = (z - a)(z - b) \ldots (z - l)$$

изменяется на целое кратное $2\mu\pi$ окружности, где μ — число корней уравнения $u = 0$, содержащихся внутри этого контура.

Этот изящный вывод был дан Коши. Следуя тем же путям, которым привел к этому знаменитого геометра, мы вскоре встретим снова этот результат также, как и знаменитую теорему, с помощью которой определяется число тех корней алгебраических уравнений, которые находятся внутри уникурсальной кривой.

Попробуем теперь применить этот вывод к изучению иррациональной функции, данной уравнением:

$$u^2 = F(z) = (z-a)(z-b)\dots(z-l).$$

Пусть, как и раньше, S — кривая, описанная переменной z, и положим:

$$F(z) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

Корень $u = +\sqrt{R(z)}$ получается непосредственно в виде

$$\sqrt{R}\left(\cos\frac{1}{2}\Phi + i\sin\frac{1}{2}\Phi\right),$$

и уравнения:

$$X = \sqrt{R}\cos\frac{1}{2}\Phi, \quad Y = \sqrt{R}\sin\frac{1}{2}\Phi,$$

позволяют нам построить отображение этой кривой.

Предположим, что в начальной точке имеем: $\Phi = \Phi_0$; когда кривая описана полностью и один раз, аргумент Φ, изменяясь непрерывно, достигает, как мы это видели, значения $\Phi + 2\mu\pi$. Очевидно, если μ — нечетное число, координаты X и Y не принимают первоначальных значений, так что геометрическое место точек u не есть замкнутая кривая, и наоборот, она оказывается, замкнутой кривой, если μ — четное число.

То, что было выше доказано о корне $u = \sqrt{F(z)}$, одинаково применимо и ко второму корню $u = -\sqrt{F(z)}$, и если построим одновременно две кривые, изображающие закон изменения этих величин, то найдем, что в первом случае точка отправления одной из них совпадает с точкой прибытия другой; получаем, строя двойную систему точек не две отдельные кривые, из которых и одна и другая будут прерывны и оборвутся внезапно, а единственную замкнутую кривую. Во втором случае, наоборот, каждый из корней принимает снова свое первоначальное значение, что при построении даст в результате две различных замкнутых кривых. Имеем, следовательно, теорему:

Если независимая переменная описывает замкнутый контур, то собрание корней уравнения $u^2 = F(z)$ изображается одной кривой или двумя различными замкнутыми кривыми, в зависимости от того, нечетное или четное число корней уравнения $F(z) = 0$ заключено внутри этого контура.

Изложенное выше дает нам важное понятие о функциях однозначных и не однозначных.

Будем называть неоднозначными те функции от z, которые отличаются от рациональных функций своим поразительным свойством приводить то к замкнутым, то к разрывным кривым, несмотря на замкнутость пути, описанного независимой переменной от некоторой точки.

Однозначными функциями будем называть те, которые изображаются всегда замкнутыми кривыми, каков бы ни был замкнутый контур, описанный переменной.

Вообще, функция не однозначна, так как существуют точки, играющие аналогичную роль с точками a, b, c, ... l, рассмотренными нами в последнем приведенном примере. Они назывались часто критическими точками. Риман называет их точками разветвления. Легко понять причину этого названия; действительно, когда кривая, описанная переменной, проходит через одну из этих точек, два значения u, которые соответствуют одному и тому же значению z, становятся вообще равными, так что, когда z проходит через такую точку, мы можем, не нарушая закона непрерывности, заставить следовать ее двумя различными путями, соответствующими двум различным корням u, только-что совпадавшим.

Как пример этого, рассмотрим функцию u, данную уравнением:

$$e^u = z - a,$$

т. е. логарифм

$$z - a.$$

Пусть

$$z - a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и

$$u = X + iY.$$

Имеем:

$$e^{X+iY} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

откуда, обозначая через k целое число:

$$X = \ln R; \quad Y = \varphi + 2k\pi.$$

Положим, что точка z описывает замкнутую кривую, например, круг с центром в начале; таким образом имеем: $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, где ρ постоянная, ω переменная, возрастающая от ω_0 до $\omega_0 + 2\pi$.

Из этих предположений вытекает, что абсцисса X остается постоянно заключенной между двумя пределами, которые соответствуют minimum'у и maximum'у R и что эта величина принимает первоначальное значение, когда ω увеличивается на 2π. Что же касается ординаты Y, то она допускает множество значений; рассмотрим то из них, которое соответствует, например $k = 0$. В этом случае, если точка была взята внутри круга, описанного z, φ увеличивается на 2π одновременно с ω; отсюда следует, что, если начальное значение ω_0 угла ω соответствует minimum'у R, ω изменяется от ω_0 до $\omega_0 + 2\pi$ и для изображения изменений в значениях u, мы получим дугу кривой MPN и MN равно 2π (рис. 28).

Заставим теперь ω сначала возрастать от $\omega_0 + 2\pi$ до $\omega_0 + 4\pi$ и т. д., потом убывать от ω_0 до $\omega_0 - 2\pi$, $\omega_0 - 4\pi$ и т. д.; для изображения достаточно будет переносить дугу MPN параллельно Oy на расстояние 2π, 4π и т. д. в прямом направлении и обратном. Геометрическое место, которое составляется последовательностью равных дуг, имеет вид синусоиды. Очевидно, что, исходя из другого определения u, мы получаем снова ту же фигуру; так что совокупность этих различных определений приводит к одной непрерывной кривой. Все они происходят от одной и их очевидно невозможно отделить одну от других.

Мы имеем совершенно обратное, когда точка a находится вне круга, описанного точкой z. В этом случае, при возрастании ω на 2π, φ и следовательно Y, принимает снова свое первоначальное значение; имеем, следовательно, для каждого определения u замкнутую кривую MN и, полное геометрическое место составляется из бесконечного числа таких колец, как MN, перенесенных параллельно Oy на расстояния 2π, 4π и т. д. в обоих направлениях. Здесь различные решения u могут быть вполне изолированы и разнятся друг от друга (рис. 29).

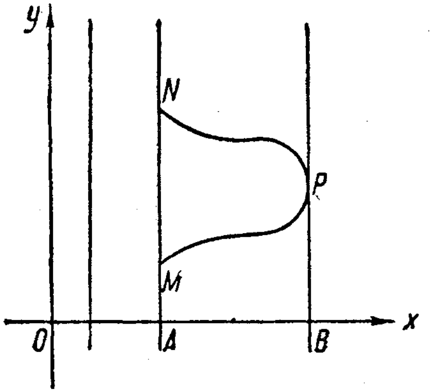

Рис. 28.

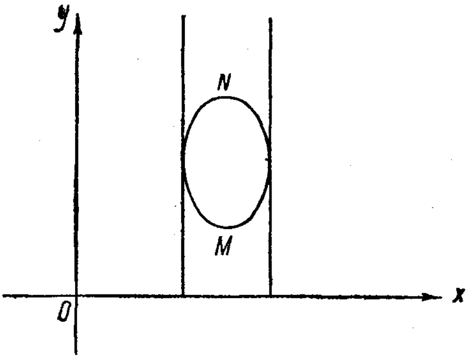

Рис. 29.

Кривые, которые мы только что получили в предположении, что ρ постоянно, обладают замечательным свойством: спрямление их зависит от эллиптического интеграла первого рода.

В самом деле, пусть:

$$z = \rho(\cos\omega + \sin\omega), \qquad a = \alpha + i\beta, \qquad u = X + iY,$$
$$z_0 = \rho(\cos\omega - i\sin\omega), \qquad a_0 = \alpha - i\beta, \qquad u_0 = X - iY.$$

Обозначим через σ дугу рассматриваемой кривой и через s дугу кривой, описанной точкой z; соотношения:

$$du = \frac{dz}{z - a}; \quad du_0 = \frac{dz_0}{z_0 - a_0}$$

дают при перемножении:

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2}{(z - a)(z_0 - a_0)},$$

так как

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 = du\,du_0 \quad \text{и} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Итак, имеем, полагая ρ постоянным:

$$ds^2 = \rho^2 d\omega^2$$

и, следовательно:

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2 d\omega^2}{(\rho\cos\omega - \alpha)^2 + (\rho\sin\omega - \beta)^2}.$$

Имея это, берем такой угол ω_0, что

$$\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega = \cos(\omega + \omega_0)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

и пусть для упрощения:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2};$$

предыдущее выражение принимает вид:

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2 d\omega^2}{\rho^2 + \gamma^2 - 2\rho\gamma\cos(\omega + \omega_0)}.$$

Положив теперь:

$$\omega + \omega_0 = 2\varphi,$$

найдем:

$$d\sigma = \frac{2\rho\, d\varphi}{\sqrt{(\rho - \gamma)^2\cos^2\varphi + (\rho + \gamma)^2\sin^2\varphi}},$$

откуда:

$$\sigma = 2\rho\int\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

где

$$a = \rho - \gamma, \quad b = \rho + \gamma.$$

Получаем, как мы заметили, эллиптический интеграл первого рода, который выражен в нормальном, полученном выше, виде.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ.

Интегралы с вещественными пределами от мнимых функций. — Выражения Дарбу и Вейерштрасса для интеграла

$$\int_a^b F(x)\,[\varphi(x) + i\psi(x)]\,dx,$$

когда $F(x)$ сохраняет постоянный знак в пределах интегрирования. — Определение Коши интеграла, взятого в некоторых границах, вещественных или мнимых; выражения, вытекающие из этого определения.

В этой лекции мы займемся определенными интегралами с мнимыми пределами. Чтобы получить определение их, пойдем тем же путем, как и Коши, который первый ввел это понятие в анализ. Этот вопрос является крайне важным, что ясно из следующего замечания.

Известно, что интеграл $\int f(x)\,dx$ может быть получен в точном виде только в редких случаях и, следовательно, он представляет новую трансцендентную функцию, изучением которой следует заниматься как только будет установлено, что интеграл не может быть выражен известными в анализе функциями. Но алгебра нам показала, насколько неизбежно рассмотрение мнимых величин при изучении рассматриваемых в ней выражений; мы видим, таким образом, как важно так распространить определение интеграла, чтобы оно не было приспособлено к единственному случаю вещественных значений для пределов; этой задаче и посвящено важное открытие Коши.

Прежде чем изложить его, мы напомним вкратце понятие определенного интеграла, которое нами было установлено вначале, при рассмотрении площадей, ограниченных плоскими кривыми. В это понятие включаем предположения, что в выражении

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

функция $f(x)$ непрерывна, по крайней мере в пределах интеграла; что эта функция вещественна и сохраняет постоянный знак между a и b, например знак $+$, и что нижний предел a меньше верхнего предела b. Тогда главное свойство интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

заключается в том, что он равен сумме значений, которые принимает его дифференциал $f(x)\,dx$, когда переменная возрастает, получая приращение, равное dx, от нижнего предела a до высшего b.

Теперь, сохраняя это основное свойство, мы избавимся последовательно от ограничений, о которых мы только-что упоминали, и которые связаны с понятием определенного интеграла в его первоначальном виде.

Во-первых, отметим, что условие непрерывности между пределами интегрирования не является необходимым.

В самом деле, имея две различные кривые: $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ рассмотрим смежные площадки:

$$AMNB=\int_{OA}^{OB} f_1(x)\,dx, \qquad BPQC=\int_{OB}^{OC} f_2(x)\,dx.$$

Площадь, образованная совокупностью их, может быть обозначена через

$$\int_{OA}^{OC} f(x)\,dx,$$

если положить, что $f(x)=f_1(x)$ при x от $x=OA$ до $x=OB$ и затем $f(x)=f_2(x)$ при x от $x=OB$ до $x=OC$; в этом случае интеграл

$$\int_{OA}^{OC} f(x)\,dx$$

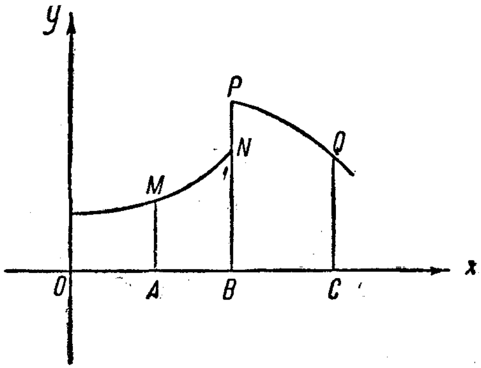

Рис. 30.

также равен сумме значений $f(x)\,dx$, тогда x возрастает, получая приращение dx. Понятие определенного интеграла, таким образом, распространяется и на функции, которые имеют не бесконечный разрыв между пределами интегрирования, и очевидно, что мы можем допустить некоторое число их.

Второе ограничение в понятии определенного интеграла относится к случаю, когда функция $f(x)$ вместо того, чтобы быть постоянно положительной в пределах x_0 и x, представляет несколько чередований в знаках таким образом, что $f(x)$, например, имеет знак $+$ от x_0 до x_1, знак $-$ от x_1 до x_2, и знак $+$ от x_2 до x.

Условимся тогда полагать:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x} f(x)\,dx,$$

и, очевидно, что при таком распространении первого обозначения, интеграл останется всегда суммой значений его дифференциала, когда x возрастает от низшего до высшего предела, получая приращение dx.

С другой стороны, мы допускали, что этот высший предел x превышает нижний предел; рассмотрение суммы элементов позволяет опустить еще и это ограничение; выводим непосредственно соотношение:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx,$$

которое распространяет понятие определенного интеграла на случай $x < x_0$.

Наконец, полагаем $f(x)$ мнимой и приводим к виду $\varphi(x) + i\psi(x)$, где функции φ и ψ вещественны; согласно известным условиям о действии над мнимыми величинами, принимаем равенство:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + i\int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$$

и это определение оправдывается немедленно, потому что интеграл и здесь, очевидно, равен сумме значений, которые принимает его дифференциал.

Исходя из этого, обобщим теоремы о вещественных функциях, которыми постоянно пользуются в интегральном исчислении.

Рассмотрим, во-первых равенство:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)f(\xi),$$

в котором $f(x)$ вещественная функция и ξ заключено между a и b. Наиболее естественное расширение, которое представляется непосредственно, будет состоять в предположении:

$$\int_{a}^{b} [\varphi(x) + i\psi(x)]\,dx = (b-a)[\varphi(\xi) + i\psi(\xi')],$$

в котором ξ и ξ' — числа, заключенные между a и b. Но Дарбу в мемуаре, помещенном в „Journal de M. Résal“ (1876), познакомил нас по этому поводу с другим крайне важным результатом, который мы докажем аналитически, а не геометрическим путем, как это сделал знаменитый геометр.

Исходим от элементарного замечания, что модуль суммы мнимых количеств меньше, чем сумма модулей этих количеств, так что, обозначая через θ число, заключенное между 0 и 1, можем написать:

$$\operatorname{Mod}(a + a' + \ldots) = \theta(\operatorname{mod} a + \operatorname{mod} a' + \ldots).$$

Мы знаем, как доказывается эта формула шаг за шагом после того, как установлено посредством геометрического представления мнимых чисел, что модуль суммы двух слагаемых меньше суммы модулей этих слагаемых. Напомнив это, предположим, что

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \quad \text{и} \quad J = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим этот интеграл, как сумму значений, которые принимает его дифференциал, когда x дают приращения, равные dx. После того, что мы только что установили, будем иметь:

$$\operatorname{Mod} J = \theta \operatorname{mod} \Sigma f(x)\, dx.$$

Затем, как следствие того же определения определенного интеграла:

$$\operatorname{Mod} J = \theta \int_a^b \operatorname{mod} f(x)\, dx.$$

Заключаем отсюда, обозначая через ξ число, взятое между a и b, и применяя теорему, установленную для вещественных функций:

$$\operatorname{Mod} J = \theta\, (b - a)\, \operatorname{mod} f(\xi).$$

Два количества J и $\theta\, (b-a) f(\xi)$ имеют, следовательно, одинаковый модуль, и мы можем написать:

$$J = \theta\, e^{i\omega} f(\xi)\, (b - a)$$

или еще:

$$J = \lambda f(\xi)\, (b - a),$$

если обозначим, как это сделал Дарбу, через λ множитель, модуль которого меньше единицы.

Допустим теперь, что под знаком интеграла имеем произведение двух вещественных функций $f(x)$ и $F(x)$, причем вторая постоянно положительна в пределах от a до b. Если обозначим снова через ξ количество, заключенное между этими пределами, имеем, как известно:

$$\int_a^b F(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b F(x)\, dx:$$

напомню вкратце, как доказывается это равенство. Исходим от замечания, что дробь:

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots}{A + B + C + \ldots},$$

в которой A, B, $C \ldots$ считаются положительными, а α, β, $\gamma \ldots$ некоторые вещественные количества, есть среднее значение между этими последними количествами. Имея это, берем для A, B, $C \ldots$ последовательность значений $F(x)\, dx$, отвечающих значениям x от a до b, отличающимся на dx, и для α, β, $\gamma \ldots$ значения, соответствующие $f(x)$. Рассматриваемая дробь, таким образом, принимает вид:

$$\frac{\int_a^b F(x) f(x)\, dx}{\int_a^b F(x)\, dx},$$

и мы получаем искомое соотношение, приравнивая ее выражению $f(\xi)$, которое есть среднее между всеми значениями, принимаемыми функцией $f(x)$.

Дарбу обобщил также и эту формулу, полагая $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$. Вот, как мы приходим аналитически к выводу, из которого этот ученый геометр вывел важные следствия.

Пусть:

$$J=\int_a^b f(x)\,F(x)\,dx;$$

имеем как раньше:

$$\operatorname{Mod} J=\theta\int_a^b \operatorname{mod} f(x)\,F(x)\,dx,$$

откуда, замечая, что модуль $F(x)$ есть $F(x)$, и применяя формулу, которая применима к вещественным количествам:

$$\operatorname{Mod} J=\theta \operatorname{mod} f(\xi)\int_a^b F(x)\,dx.$$

Выводим отсюда, как только что:

$$J=\lambda f(\xi)\int_a^b F(x)\,dx;$$

буквы λ и ξ сохраняют то же значение, как и выше.

Дарбу показал, как следствие этого результата, что ряд Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^n(a)+$$

$$+\int_a^x \frac{(x-z)^n f^{n+1}(z)}{1\cdot 2\ldots n}\,dz,$$

выведенный в предположении, что x и a вещественные, может быть распространен на мнимые значения этих количеств.

Замечу для этого, что всякий определенный интеграл

$$J=\int_a^b \varphi(z)\,dz,$$

пределы которого обязательно вещественны, принимает после подстановки $z=a(1-t)+bt$ новый вид:

$$J=(b-a)\int_0^1 \varphi\,[a(1-t)+bt]\,dt,$$

в котором уже можно приписывать a и b мнимые значения. Это не есть еще наиболее общее, в аналитическом смысле, определение, которое дал Коши, и к которому мы придем, — определение интегралов, взятых между мнимыми пределами —, но и с этой ограниченной точки зрения оно уже приводит к важным следствиям; я дам пример этого, применяя предыдущую формулу к остаточному члену ряда Тейлора.

Заметим сперва, что мы можем написать:

$$J = \lambda (b - a)\, \varphi [a(1-\theta) + b\theta],$$

если обозначим через θ значение t, заключенное между нулем и единицей, или проще:

$$J = \lambda (b - a)\, \varphi (\zeta),$$

где ζ аффикс точки прямой, соединяющей a и b. Имея это, полагаем:

$$\varphi (z) = \frac{(x - z)^n f^{n+1}(z)}{1 \cdot 2 \ldots n}, \quad \text{и} \quad b = x;$$

получаем, таким образом:

$$\varphi [a(1-t) + tx] = \frac{(x-a)^n (1-t)^n f^{n+1} [a(1-t) + tx]}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

что дает:

$$J = (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n f^{n+1} [a(1-t) + tx]}{1 \cdot 2 \ldots n}\, dt;$$

отсюда выводим первый вид остаточного члена:

$$J = \frac{\lambda (x-a)^{n+1} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\zeta)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Второй получаем, заметив, что множитель $(1-t)^n$ имеет всегда тот же самый знак между пределами интеграла, так что вследствие:

$$\int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}$$

формула Дарбу, доказанная выше, дает:

$$J = \frac{\lambda (x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}.$$

Эти два выражения отличаются только множителем λ от тех, которые были получены для вещественных функций вещественных переменных. (См. прекрасный мемуар Дарбу о разложении в ряд функций одной переменной, Journal de M. Résal, 1876).

К ряду Тейлора мы придем еще другим путем, исходя от соотношения, в котором мы можем считать x и a мнимыми:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \int_0^1 f'[a(1-t) + tx]\, dt,$$

и которое проверяется непосредственно, дифференцируя n раз обе его части по a.

Для этого будем исходить от формулы:

$$(UV)^n = UV^n + \frac{n}{1} U' V^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} U'' V^{n-2} + \dots,$$

что дает при делении на $1 \cdot 2 \dots n$, если положить $U = f(a)$, $V = \frac{1}{x-a}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left[\frac{f(a)}{x-a}\right]^n = \frac{f(a)}{(x-a)^{n+1}} + \frac{f'(a)}{(x-a)^n} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{f''(a)}{(x-a)^{n-1}} + \\ + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{f^n(a)}{x-a}.$$

Получаем, таким образом, соотношение:

$$\frac{f(t)}{(x-a)^{n+1}} - \frac{f(a)}{(x-a)^{n+1}} - \frac{f'(a)}{(x-a)^n} - \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{f''(a)}{(x-a)^{n-1}} - \dots \\ - \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{f^n(a)}{x-a} = - \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \int_0^1 (1-t)^n f^{n+1}[a(1-t) + tx]\, dt,$$

и так как вторая часть есть $\frac{J}{(x-a)^{n+1}}$, находим, уничтожая знаменатель, ряд Тейлора с выражением остаточного члена через тот же интеграл, как перед этим.

Мы еще выведем другое выражение, данное Вейерштрассом, для интеграла $\int_a^b F(x) f(x)\, dx$, полагая неизменно, что $F(x)$ положительна между пределами интегрирования и

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x).$$

Я буду исходить от формул статики, которые дают координаты ξ, η точки приложения равнодействующей некоторой системы параллельных сил одного направления, расположенных в одной плоскости; обозначаю их через $p, p', p'', \dots$. Если (x, y), (x', y'), (x'', y''), ... координаты их точек приложения, мы будем иметь:

$$\xi = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \quad \eta = \frac{\Sigma py}{\Sigma p},$$

и мы знаем как следствие сложения сил, что эта точка ξ, η расположена внутри некоторого выпуклого контура, содержащего все точки (x, y), (x', y') и т. д.

Полагаем теперь: $z = x + iy$ и $\mu = \xi + i\eta$; мы можем написать:

$$\mu = \frac{\Sigma pz}{\Sigma p}.$$

Пусть затем $z = f(x)$ и возьмем за $p, p', p'', \dots$ последовательность значений $F(x)$, отвечающих значениям x между a и b, отличающимся на dx; предыдущая формула принимает вид:

$$\mu=\frac{\int\limits_a^b F(x) f(x)\, dx}{\int\limits_a^b F(x)\, dx}$$

откуда мы получаем:

$$\int\limits_a^b F(x) f(x)\, dx=\mu \int\limits_a^b F(x)\, dx.$$

Это и есть вывод Вейерштрасса; здесь множитель μ представляет аффикс точки, взятой внутри выпуклого контура, который содержит изображения взятых различных точек, т. е. геометрическое место значений функции $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$, когда x изменяется от a до b. Отсюда получаем, что, когда это геометрическое место есть выпуклая кривая, мы можем принять его за контур, заключающий в себе точку μ.

В некоторых случаях, теорема Вейерштрасса совпадает с теоремой Дарбу. Предположим, например, что $f(x)=\rho(\cos x+i \sin x)$; тогда множитель $\lambda f(\xi)$ Дарбу есть аффикс точки, расположенной внутри круга с радиусом ρ и центром в начале и, очевидно, он же является множителем μ Вейерштрасса. Но нужно многое, чтобы эти две формулы приводили к одному и тому же результату.

Пусть, например, $f(x)=a+ib+\rho(\cos x+i \sin x)$. Ясно тогда, что множитель $\lambda f(\xi)$ есть аффикс некоторой точки, расположенной внутри круга, имеющего центр в начале, с радиусом, равным maximum'у модуля $f(x)$, тогда как множитель μ есть просто аффикс некоторой точки, расположенной внутри круга с радиусом ρ и абсциссой и ординатой центра, равными a и b. Следовательно, множитель Дарбу изменяется вообще в гораздо менее ограниченной области, чем множитель Вейерштрасса. Однако формула Дарбу будет нам особенно полезной, и вскоре мы применим ее к важным вопросам.

Мы подходим теперь к нашему основному предмету; дадим сейчас, следуя Коши, определение символа:

$$J=\int\limits_{a+ib}^{a'+ib'} f(z)\, dz,$$

в котором $f(z)$ такая функция мнимой переменной $z=x+iy$, которая для всей системы значений x и y может быть выражена в виде $P+Qi$.

Пусть A и A' (рис. 31) точки, аффиксы которых равны $a+ib$ и $a'+ib'$. Соединяем их кривой или, вернее, некоторым непрерывным путем, координаты которого x и y мы предположим выраженными при помощи формул:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t).$$

Эти функции φ и ψ подчиняются только условию давать точки A и A' при двух частных значениях t, например, t_0 и t_1; так что имеем:

$$\varphi(t_0) + i\psi(t_0) = a + ib$$
$$\varphi(t_1) + i\psi(t_1) = a' + ib'.$$

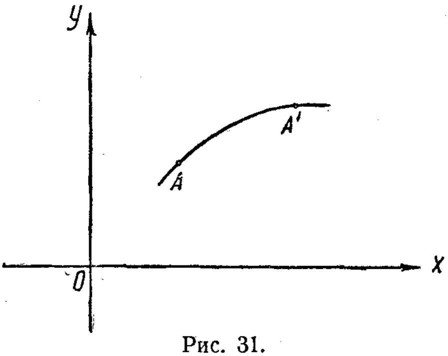

Рис. 31.

Не является необходимым, чтобы они имели между пределами t_0 и t_1 одно и то же аналитическое выражение; мы можем допустить, что рассматриваемое геометрическое место составляется из многих частей различного вида, выражающихся различными функциями переменной.

В этом случае условимся применять введение переменной t вместо z, как мы это делали для интеграла с вещественными пределами, и полагаем, следовательно:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t) + i\psi(t)] \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{at}\right) dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (P + iQ)(dx + idy) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (Pdx - Qdy) + i\int_{t_0}^{t_1} (Qdx + Pdy).$$

Интегралы, к которым мы таким образом пришли, имеют вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} [U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy],$$

который содержит, как частный случай, интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x, y)\,dt;$$

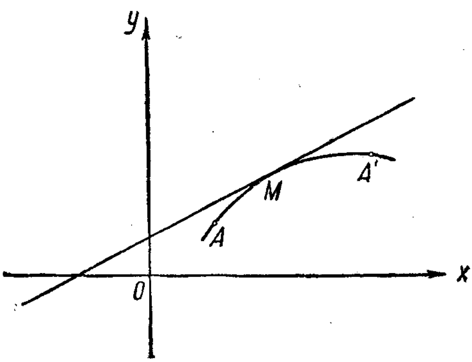

Рис. 32.

назовем их вместе с Карлом Нейманом криволинейными интегралами и сделаем следующее замечание.

Пусть (рис. 32) AMA' геометрическое место, определенное уравнением:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

σ дуга, взятая от точки A. Мы сможем написать:

$$\int_{t_0}^{t_1} [U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy] = \int_{t_0}^{t_1} \left[U(x, y)\frac{dx}{d\sigma} + V(x, y)\frac{dy}{d\sigma}\right] d\sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [U(x, y)\cos\varphi + V(x, y)\sin\varphi]\,d\sigma,$$

обозначая через φ угол, который образует с осью абсцисс касательная к кривой в точке (x, y). Выводим отсюда следующее равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1} [U(x, y)\,dx + V(x, y)\,dy] = [U(\xi, \eta)\cos\varepsilon + V(\xi, \eta)\sin\varepsilon]\operatorname{arc} AA',$$

в котором ξ и η — координаты некоторой точки дуги AA' и ε — угол, образованный касательной в этой точке с осью Ox.

Понятие определенного интеграла с мнимыми пределами приводится, следовательно, целиком к понятию криволинейного интеграла, в которое введен, как основной элемент, путь AA', данный аналитически уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Сделаем непосредственное применение только что полученного вывода, установив для интеграла Коши формулу, аналогичную формуле Дарбу.

Возвратимся к формуле:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (P + iQ)(dx + idy);$$

мы можем написать:

$$\operatorname{Mod} J = \theta \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{mod}(P + iQ) \cdot \operatorname{mod}(dx + idy).$$

Имеем:

$$\operatorname{Mod}(dx + idy) = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\sigma,$$

вводя, как выше, дугу σ кривой AA'; мы получаем следующее выражение:

$$\operatorname{Mod} J = \theta \operatorname{mod} f(\xi) \int_{t_0}^{t_1} d\sigma,$$

где ξ значение, заключенное между t_0 и t_1, откуда легко выводим, введя множитель λ Дарбу:

$$J = \lambda \operatorname{arc} AA' f(\xi).$$

Мы вскоре встретимся с многочисленными приложениями этого результата.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ.

Влияние пути, описываемого переменной, в интеграле Коши. — Метод Римана, основанный на теореме Грина. — Доказательство теоремы Неймана и понятие о площадях, ограниченных несколькими контурами. — Интеграл непрерывной и однозначной функции на заданной площадке, взятый по контуру, ограничивающему эту площадку, равен нулю. Пример на вычисление интегралов, взятых по замкнутому контуру. — Формула Коши: $f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$, где интеграл берется по замкнутому контуру, внутри которого функция $f(x)$ голоморфна.

Основным предметом этой лекции будет изучение влияния пути изменения переменной z на значение интеграла Коши. Этот путь AA', определяемый уравнениями

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t)$$

и который может быть составлен, как мы указываем, из частей, не представляемых одинаковыми аналитическими выражениями, характеризует закон последовательных значений z между двумя границами интеграла; именно это Нейман называет путем интегрирования функции между двумя границами.

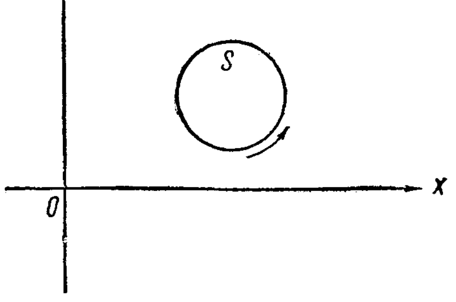

Рис. 33.

Чтобы изложить этот вопрос, решение которого дал впервые Коши в своем знаменитом мемуаре об интегралах, взятых между мнимыми границами, мы будем придерживаться преимущественно метода, указанного Риманом, который основан на следующем частном случае важной теоремы Грина.

Пусть имеем две функции U и V от x и y вещественные, непрерывные и однозначные внутри площадки S; я утверждаю, что криволинейный интеграл по контуру этой площадки $\int(Udx+Vdy)$ выражается двойным интегралом:

$$\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

который дает объем цилиндра, имеющего S основанием и ограниченного поверхностью $z=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$.

Чтобы доказать эту теорему, предположим сначала, что кривая, ограничивающая площадку, удовлетворяет условию, по которому каждой абсциссе соответствуют только две ординаты, и также каждой ординате соответствуют только две абсциссы.

Допустим кроме того, что контур будет описан один раз и в прямом направлении, т. е. таким образом, что внешнее пространство находится справа. При этих ограничениях и имея в виду определения, которые мы дали раньше, говоря о криволинейных интегралах, доказательство равенства:

$$\int\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_S(Udx+Vdy)$$

незатруднительно. Действительно, разложим двойной интеграл первой части на два; первый, а именно: $\int\int\frac{\partial V}{\partial x}dxdy$ был уже изучен и нам уже известен; мы выразим его через простой интеграл $\int_S Vdy$, в котором контур площадки S описан в прямом направлении. Что касается второго $\int\int\frac{\partial U}{\partial y}\,dxdy$, то он также равен $\int_S Udx$; но контур при этом описан в обратном направлении. Имеем, следовательно:

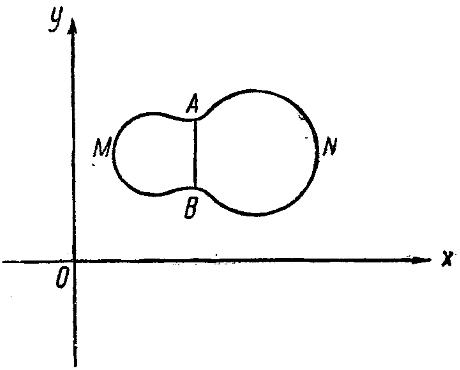

Рис. 34.

$$\int\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_S Vdy+\int_S Udx=\int(Udx+Vdy);$$

как раз то, что и требовалось доказать.

Функции U и V должны быть конечными, непрерывными и однозначными. Мы говорим кроме того, что кривая ограничивающая площадку, такова, что каждому значению x отвечают только два значения y и каждому значению y только два значения x; это ограничение может быть легко снято.

Действительно, рассмотрим кривую $AMBNA$ (рис. 34), в которой четыре различных абсциссы могут соответствовать одной и той же ординате. Я предположу, что если мы проведем линию AB, то две площади $AMBA$ и $ABNA$ подойдут под случай, который был уже разобран, и буду рассуждать следующим образом.

Пусть

$$J=\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy$$

двойной интеграл, который взят ко всем точкам площадки $AMBNA$. J представляет объем цилиндра, имеющего основанием эту площадку и ограниченного поверхностью: $z=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$; обозначая затем через J_1 и J_2 значения двойных интегралов, взятых по частным площадкам $AMBA$, $ABNA$, будем иметь: $J=J_1+J_2$; итак, мы можем применить теорему к интегралам J_1 и J_2.

Обозначая для этого значение интеграла $\int(Udx+Vdy)$ указанием пути интегрирования, будем иметь:

$$J=(AMBA)+(ABNA)$$

или мы можем написать:

$$(AMBA)=(AMB)+(BA)$$
$$(ABNA)=(AB)+(BNA);$$

из соотношения $(AB)+(BA)=0$, мы выводим:

$$J=(AMB)+(BNA)=(AMBNA).$$

Следовательно, J, как в предыдущем случае, снова равняется криволинейному интегралу, взятому по контуру площадки. Таким образом, если задан сложный контур, всегда возможно разбить его на достаточно большое число частей, чтобы каждая из них удовлетворяла бы условиям, которые мы поставили вначале; таким образом, повторяя рассуждение, только что нами проведенное, видим, что теорема может быть применена к любому контуру.

В работе Неймана, на которую мы уже ссылались, находим понятие о площадках с несколькими контурами, которое следует и нам установить. Мы говорим, что площадка с n контурами, если она часть плоскости, ограниченной внешней кривой и $n-1$ другими отдельными кривыми, расположенными внутри первой.

Рассмотрим в частности площадь с двумя контурами (рис. 35); распространим на этот новый случай предыдущую теорему и дадим одновременно определение того, что обозначает выражение — „описать контур этой площадки“.

Пусть двойной интеграл $\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy$ взят по всем точкам площадки, заключенной между двумя кривыми; он дает объем полого цилиндра.

Пусть линии AB, DE делят рассматриваемую площадку таким образом, что в результате получаются две простых площадки: $AMEDCBA$ и $ABFDENA$, и пусть J_1 и J_2 — двойные интегралы, взятые по каждой из них; вспоминая геометрическое значение J, видим непосредственно, что:

$$J=J_1+J_2.$$

Итак, мы можем применить теорему к интегралам J_1 и J_2, что дает:

$$J_1 = (AMEDCBA) = (AME) + (ED) + (DCB) + (BA),$$
$$J_2 = (ABFDENA) = (AB) + (BFD) + (DE) + (ENA).$$

Замечая, как выше, что интегралы, относящиеся к одному и тому же пути, описанному в двух различных направлениях, в сумме равны нулю, имеем:

$$J = (AME) + (ENA) + (BFD) + (DCB) = (AMENA) + (BFDCB).$$

Мы видим, следовательно, что J равен сумме криволинейных интегралов, относящихся к двум контурам, причем каждый из них описан таким образом, что ограниченная площадь находится всегда слева; получаем то, что Нейман называет „описать в прямом направлении площадь с двумя контурами“; мы можем также сказать, что J равен криволинейному интегралу $\int (Udx + Vdy)$, взятому по всему контуру площадки, описанному в указанном направлении. Кроме того очевидно, что то же рассуждение применимо без изменения к площадке с n контурами. Мы доказали, следовательно, для таких площадей теорему, которой мы сейчас и воспользуемся для вывода основного предложения Коши, как это сделал Риман.

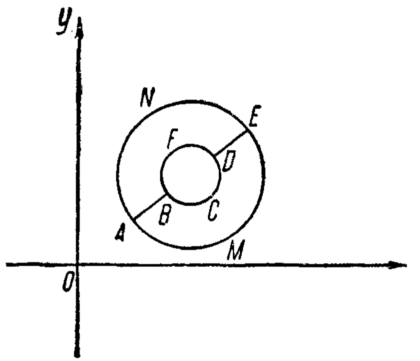

Рис. 35.

Пусть функция $f(z)$ мнимой переменной $z = x + iy$ непрерывна и однозначна на площадке, ограниченной одним или многими контурами; я утверждаю, что интеграл от функции, взятый по контуру этой площадки, равен нулю.

Предположим, что мы можем написать:

$$f(z) = P + iQ,$$

где P и Q функции вещественные, непрерывные и однозначные от x и y; допустим также, что если z описывает рассматриваемый контур, x и y будут даны выражениями: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Имея это, будем исходить от предыдущей формулы, которая дает:

$$J = \int (Pdx - Qdy) + i \int (Qdx + Pdy),$$

где оба интеграла второй части криволинейные интегралы, взятые по этому контуру. Применим затем, основываясь на теореме Грина, следующие выражения:

$$\int [Pdx - Qdy] = \iint \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$\int [Qdx + Pdy] = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy.$$

Мы знаем, что функции P и Q связаны основными соотношениями:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0;$$

оба интеграла, следовательно, равны нулю; имеем то же самое для J, и наша теорема доказана.

Перейдем теперь к выводу нескольких следствий.

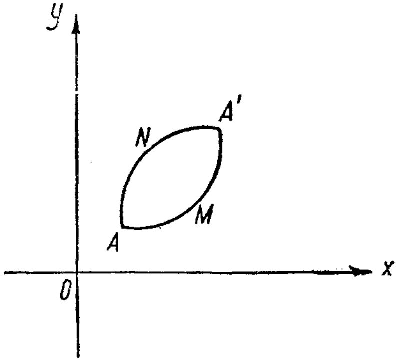

Рис. 36.

Рассмотрим, во-первых, значения J_1 и J_2 интеграла $\int\limits_{a+ib}^{a'+ib'} f(z)\,dz$, когда переменная z переходит от точки A к точке A' двумя такими различными путями (рис. 36) AMA', ANA', что внутри контура, образованного ими, функция $f(z)$ остается непрерывной и однозначной. Второй интеграл, взятый вдоль пути $A'NA$, равен $-J_2$; применяя предыдущую теорему, имеем: $J_1-J_2=0$, т. е. значение интеграла не меняется, когда путь AMA' изменяется, не достигая ни одной точки, в которой функция $f(z)$ перестает быть непрерывной и однозначной.

Рассмотрим, во-вторых, две замкнутые кривые (рис. 37) одна внутри другой, и такие, что на площади, заключенной между ними, функция $f(z)$ будет непрерывной и однозначной. Я утверждаю, что интегралы от $f(z)$, взятые вдоль этих двух кривых, равны.

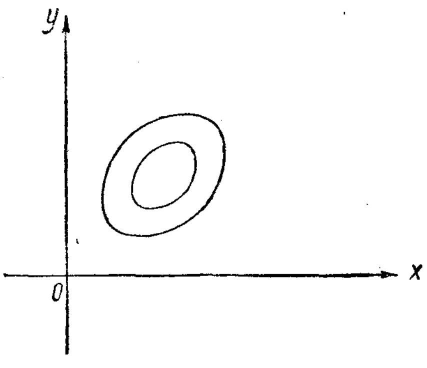

Рис. 37.

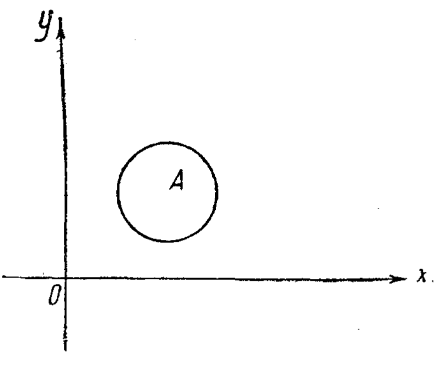

Рис. 38.

Пусть, действительно, J_1 и J_2 значения интегралов, взятых вдоль этих кривых, причем каждая описана в прямом направлении; применяя основную теорему и вспоминая, что мы понимали, говоря „описать площадь с двумя контурами в прямом направлении“, мы имеем: $J_1-J_2=0$, что и требовалось доказать.

Применим эти результаты к наиболее простой из однозначных функций, претерпевающих разрыв.

Пусть $f(z)=\frac{1}{z-a}$; рассмотрим замкнутую кривую, содержащую точку A (рис. 38), аффикс которой есть a; интеграл $\int \frac{dz}{z-a}$, взятый вдоль этой кривой, легко вычисляется, так как, согласно предыдущему замечанию, он не изменится, если мы заменим кривую кругом с достаточно малым радиусом ρ, описанным около точки A, как центра. Выполнив эту замену, мы должны брать:

$$z-a=\rho e^{it}; \qquad dz=i\rho e^{it}dt,$$

что приводит к:

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}}=i\int_0^{2\pi} dt=2i\pi.$$

Итак, таково значение интеграла $\int \frac{dz}{z-a}$, взятого вдоль замкнутого контура, описанного один раз в прямом направлении и заключающего точку a.

Не следует однако думать, что количество $\int f(z)\,dz$ будет отличаться от нуля всякий раз, когда $f(z)$ перестает быть непрерывной и однозначной на данной площадке. Так, интеграл $\int \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$, где n целое положительное число, равен нулю, если мы возьмем его вдоль контура, заключающего точку a. Мы это легко докажем, рассуждая, как выше, или дифференцируя n раз по a формулу, которую мы только что получили:

$$\int \frac{dz}{z-a}=2\pi i.$$

В более общем случае, интеграл $\int f'(z)\,dz$, в котором $f(z)$ однозначная функция, равен этой функции, увеличенной на постоянную, и мы получим, когда описываем замкнутый контур, то же значение в начальной и конечной его точке. Интеграл по этому контуру равен, следовательно, нулю, каково бы ни было внутри его число значений переменной, обращающих функцию в бесконечность.

Рассмотрим, наконец, неоднозначную функцию от z и положим, что переменная описывает кривую, заключающую точку разветвления.

Пусть, например, $f(z)=z^{a-1}$, где a не целое число; когда аргумент z увеличивается на 2π, значение функции умножается на $e^{2ai\pi}$; начало, следовательно, есть точка разветвления.

Вычислим интеграл $J=\int z^{a-1}\,dz$, взятый по кругу радиуса R и с центром в начале; мы полагаем: $z=Re^{it}$; неопределенный интеграл от $z^{a-1}dz$ равен $\frac{z^a}{a}=\frac{(Re^{it})^a}{a}$; находим, заставляя t изменяться от $\theta-\pi$ до $\theta+\pi$, описывая полную окружность

$$J=\frac{2i\sin a\pi\,(Re^{i\theta})^a}{a}.$$

Это выражение показывает, что значение J изменяется вместе с R и θ, т. е. зависит также и от начальной точки на круге. Для $\theta=0$ имеем в частности:

$$J=\frac{2i\sin a\pi R^a}{a}.$$

Сделав эти замечания, мы начнем применение только что выведенного положения с доказательства следующей теоремы.

Пусть $f(z)$ функция непрерывная и однозначная на площадке, ограниченной некоторым контуром; пусть x — точка на этой площадке; имеем:

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{z-x}dz,$$

причем интеграл взят по контуру, описанному в прямом направлении.

Из точки x, как из центра, опишем окружность бесконечно малого радиуса ρ. Функция $\frac{f(z)}{z-x}$ однозначна и непрерывна на площадке, заключенной между данным контуром и окружностью; следовательно, интегралы $\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$ по двум кривым, когда каждая описана в прямом направлении по отношению к площадке, которую они окружают, равны. Вычислим интеграл, взятый по окружности; для этого полагаем:

$$z=x+\rho e^{it};$$

имеем:

$$dz=i\rho e^{it}dt.$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$i\int_0^{2\pi}f(x+\rho e^{it})\,dt;$$

но ρ бесконечно мало, а функция $f(z)$ непрерывна; это выражение, следовательно, обращается в

$$if(x)\int_0^{2\pi}dt=2i\pi f(x)$$

и отсюда выводим:

$$2i\pi f(x)=\int\frac{f(z)}{z-x}dz,$$

где интеграл взят по контуру площадки; это и есть вышеуказанная теорема.

Эта теорема, доказанная Коши, имеет чрезвычайно важное значение в анализе. Следующие лекции будут посвящены изложению ряда следствий, к которым она приводит.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Ряды Тейлора и Маклорена, выведенные из выражения функций $f(x)$ по формуле Коши. — Приложение к однозначным функциям e^x, $\sin x$, $\cos x$; элементарное доказательство иррациональности целых степеней e и отношения окружностей к диаметру. — Приложение к неоднозначным функциям $\operatorname{arc\,tg} x$, $\ln(1+x)$; существование линии разрыва у этих функций. — Интеграл Коши приводит к понятию разрезов; он дает аналитическое выражение функции, совпадающей на определенных площадках с произвольно заданными функциями и равной нулю вне этих площадок.

Первое применение формулы Коши, выведенной в предыдущей лекции, имеет целью установление ряда Тейлора и ряда Маклорена в самом широком аналитическом смысле, принимая во внимание вещественные и мнимые значения переменной; это будет нашим исходным пунктом в общей теории функций.

Пусть $f(x)$ функция непрерывная и однозначная на площадке, ограниченной кривой S (рис. 39). Рассмотрим, как это делал Нейман, окружность, целиком заключенную в этой площадке, имеющую центр в точке A, радиусом AX; положим a и x аффиксы A и X и z — аффикс точки Z кривой S: будем иметь условие:

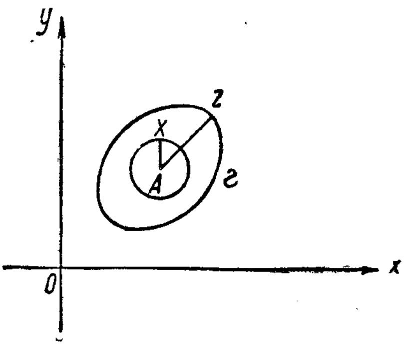

Рис. 39.

$$\operatorname{Mod}(x-a) < \operatorname{Mod}(z-a),$$

так как модули дают расстояния AX и AZ.

Выражение $f(x)$ формулой:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

даст нам разложение этой функции в ряд Тейлора, как следствие простого тождества:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots + \frac{x^n}{z^n(z-x)}.$$

Заменяя для этого z на $z-a$ и x на $x-a$, имеем:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)}.$$

Умножив затем обе части на $f(z)$, интегрируя по кривой S и деля на $2\pi i$, приходим к следующему соотношению

$$f(x)=J_0+J_1(x-a)+\ldots+J_{n-1}(x-a)^{n-1}+R,$$

в котором положено:

$$J_k=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}},$$

$$R=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n\frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Пусть теперь σ — периметр кривой; одна из формул, относящихся к теории криволинейных интегралов, данная выше (на стр. 87), позволяет нам написать, вводя мнимое i в множитель λ:

$$R=\frac{\lambda\sigma}{2\pi}\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}.$$

Количество ζ представляет в этом выражении аффикс некоторой точки на S, модуль же $\frac{x-a}{\zeta-a}$ меньше единицы; его степени убывают беспредельно, и таким образом непосредственно оказывается доказанным, что для достаточно большого значения n, R, который не что иное, как дополнительный член ряда, абсолютно меньше любой заданной величины.

Доказав таким образом возможность разложения функции $f(x)$ в ряд, расположенный по степеням $x-a$, и применяя формулу Коши, мы выведем из этой же формулы значения коэфициентов J_k. Берем для этого производные порядка k по x от обеих частей равенства

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S\frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

приходим таким образом к следующему, часто применяемому выражению:

$$\frac{f^k(x)}{1\cdot 2\ldots k}=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{k+1}}.$$

Полагаем затем $x=a$ и получаем искомое значение:

$$J_k=\frac{f^k(a)}{1\cdot 2\ldots k}:$$

и, наконец, формулу:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots+f^k(a)\frac{(x-a)^k}{1\cdot 2\ldots k}+\ldots;$$

справедливую при указанных выше условиях.

Отметим, что выражение R легко приводит к известному для случая вещественных количеств виду остаточного числа. Дифференцируя по a, приходим действительно к равенству:

$$\frac{dR}{da}=-\frac{n(x-a)^{n-1}}{2i\pi}\int\limits_S\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

и, следовательно, к равенству:

$$\frac{dR}{da}=-\frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}.$$

Остаточный член уничтожается при $x=a$, отсюда заключаем:

$$R=-\int_x^a \frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1.\ 2\ldots(n-1)}\,da=$$

$$=+\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\,da;$$

и затем, так как множитель $x-a$ положителен в пределах интегрирования:

$$R=f^n(\xi)\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}\,da}{1\cdot 2\ldots(n-1)}=$$

$$=\frac{(x-a)^n f^n(\xi)}{1\cdot 2\ldots n},$$

где ξ — количество, заключенное между a и x.

К ряду Маклорена переходят от ряда Тейлора, полагая, что точка A — начало координат. Отсюда следствие: функция $f(x)$ может быть разложена в сходящийся ряд, расположенный по степеням переменной по формуле:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.\ 2}f''0+\ldots,$$

когда функция конечна, непрерывна и однозначна, внутри круга, имеющего центр в начале координат и радиус, равный модулю X. Коши, которому мы обязаны этой важной теоремой, формулирует ее следующим образом. Функция $f(x)$ может быть разложена в сходящийся ряд по формуле Маклорена, при условии, что модуль переменной будет меньше самого малого из тех значений, при которых функция перестает быть непрерывной и однозначной.

Теорема Коши освобождает, следовательно, от изучения остаточного члена, которое необходимо при применении формулы Маклорена в дифференциальном исчислении, причем это изучение чаще всего невозможно, так как для его выполнения необходимо знать выражение производной любого порядка от функции.

Применение формулы Маклорена к функциям e^x, $\sin x$, $\cos x$, которые на всей плоскости конечны и непрерывны, дает разложения:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots,$$

сходимость которых таким образом доказана для всех значений переменной, мнимых или вещественных. Я задержусь на некоторое время на этих рядах, которые имеют крайне важное значение в анализе, чтобы доказать, что степени числа e и число π — отношение окружности к диаметру — числа иррациональные.

Пусть, во-первых:

$$F(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1};$$

таким образом, имеем:

$$\frac{e^x-F(x)}{x^n}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right].$$

Легко получить, беря производную порядка $n-1$ от обеих частей, соотношение:

$$\frac{e^x\pi(x)-\Phi(x)}{x^{2n-1}}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\sum\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+m-1)}x^m,$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

в котором $\pi(x)$ — полином с целыми коэфициентами степени $n-1$, а именно:

$$\pi(x)=x^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-3}\ldots$$

и:

$$\Phi(x)=\pi(-x).$$

Имея это, положим временно:

$$S=\sum\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+m-1)}x^m;$$

таким образом, имеем:

$$e^x\pi(x)-\Phi(x)=\frac{Sx^{2n-1}}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Отсюда выводим, что при целом x показательная функция e^x не может быть рациональным числом.

Положим, в самом деле, $e^x=\frac{B}{A}$; при целых A и B это соотношение принимает вид:

$$B\pi(x)-A\Phi(x)=\frac{ASx^{2n-1}}{1\cdot 2\ldots n}$$

и приводит к противоречию. Оно вытекает из того, что первая часть есть целое число, тогда как вторую можно уменьшить сколь угодно, увеличивая n, никогда не обращая в нуль.

Ряд S, который здесь фигурирует, имеет, действительно, положительные члены; следовательно, он всегда отличен от нуля, а его значение уменьшается, когда n возрастает. С другой стороны, множитель $\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\ldots n}$ имеет пределом нуль, что делает непосредственно очевидным недопустимость высказанного допущения.

Установим теперь иррациональность отношения окружности к диаметру.

Пусть $X=\frac{\sin x}{x}$; вычисляем последовательно:

$$X_1=-\frac{1}{x}X'=\frac{1}{x^3}(\sin x-x\cos x),$$

$$X_2=-\frac{1}{x}X_1'=\frac{1}{x^5}[(3-x^2)\sin x-3x\cos x],$$

$$X_3=-\frac{1}{x}X_2'=\frac{1}{x^7}[(15-6x^2)-(15x-x^3)\cos x]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Положив вообще $X_{n+1}=-\frac{1}{x}X_n'$ легко убедиться, что имеется следующее соотношение:

$$X_n=\frac{1}{x^{2n+1}}[\theta(x)\sin x-\theta_1(x)\cos x],$$

в котором $\theta(x)$ и $\theta_1(x)$ полиномы с целыми коэфициентами степени $n-1$ и n в зависимости от того, четное или нечетное n.

С другой стороны, получаем разложением $\sin x$:

$$X_n=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n+1}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+3)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}-\ldots\right]=$$
$$=\frac{S}{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n+1},$$

где:

$$S=\left[1-\frac{x^2}{2(2n+3)}\right]+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\left[1-\frac{x^2}{6(2n+7)}\right]+\ldots.$$

Замечаем, что этот ряд будет иметь положительное значение, существенно отличное от нуля, если мы положим $1-\frac{x^2}{2(2n+3)}>0$; этому условию удовлетворяет $x=\frac{\pi}{2}=1{,}57\ldots$ при $n=1$, а тем более при больших значениях n.

Установив это, допустим, что $\frac{\pi}{2}=\frac{b}{a}$, где a и b целые числа. Полином $\theta(x)$, если в нем $x=\frac{b}{a}$, превращается в дробь, знаменатель которой a^n или a^{n-1}, в зависимости от его степени, и который я обозначу через $\frac{A}{a^n}$. Этой дроби, положив $x = \frac{\pi}{2} = \frac{b}{a}$ в соотношении

$$[\theta(x)\sin x - \theta_1(x)\cos x] = \frac{Sx^{2n+1}}{1 \cdot 3 \ldots 2n+1},$$

можно дать следующий вид:

$$\frac{A}{a^n} = \frac{S\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n+1},$$

что дает:

$$Aa^{n+1} = \frac{S(ab)^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n+1}.$$

Полученное таким образом равенство содержит противоречие: первая часть его целое число, тогда как вторая бесконечно убывает, когда мы увеличиваем n, никогда не становясь нулем; это очевидно, если принять во внимание сказанное о ряде S. Прибавлю, наконец, что так как $\theta(x)$ содержит только четные степени, тот же метод доказывает, что квадрат $\frac{\pi}{2}$ есть также число иррациональное.

Продолжаем применять формулы Маклорена, рассматривая выражение $\ln(1+x)$ и выражение $(1+x)^n$, в котором показатель степени n не целое число. Мы знаем, что эти количества выражают функции конечные, непрерывные и однозначные внутри окружности с радиусом, равным единице, имеющей центр в начале координат. Заключаем отсюда, что разложения:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots$$

применимы исключительно к тем значениям переменной, модуль которых меньше единицы.

В том случае, когда показатель степени n число целое, формула бинома даст возможность использовать выражение коэфициентов J_k ряда Маклорена через криволинейные интегралы:

$$J_k = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_S \frac{f(z)\,dz}{z^{k+1}}.$$

Если мы положим для сокращения:

$$N = \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k},$$

то будем иметь:

$$\int\limits_S \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz = 2i\pi N.$$

Возьмем за контур интегрирования окружность радиуса, равного единице, имеющую центр в начале координат, и пусть $z = e^{it}$. Мы получаем, таким образом:

$$1 + z = 2\cos\frac{t}{2}\left[\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right],$$

и:

$$\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^n\left[\cos\frac{n-2k}{2}t + i\sin\frac{n-2k}{2}t\right]dt = 2\pi N.$$

Мы видим, что коэфициент при i в левой части равенства должен быть равным нулю, что дает более простое равенство:

$$\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^n\cos\frac{n-2k}{2}t\cdot dt = 2\pi N.$$

Изменим для большей симметрии n на $n+k$; заменим N его значением и положим $t = 2u$; получаем следующий определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi}(2\cos u)^{n+k}\cos(n-k)u\cdot du = \pi\frac{(n+1)(n+2)\ \dots\ (n+k)}{1\cdot 2\ \dots\ k},$$

который Коши посредством функции Γ распространил на любые значения n и k.

В частном случае получаем отсюда при $n = k$

$$\int_0^{\pi}(2\cos u)^{2n}du = \pi\frac{(n+1)(n+2)\ \dots\ 2n}{1\cdot 2\ \dots\ n}.$$

Затем, положив $\cos u = x$, после несложного преобразования находим:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ 2n}$$

или

$$\int_0^1\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ 2n}.$$

Вскоре мы используем этот вывод.

Как последнее применение формулы Маклорена, рассмотрим $\operatorname{arctg} x$, для которого мы получили в начальном курсе дифференциального исчисления ряд $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, считая в нем переменную по существу вещественной и меньше единицы.

Заметим, что геометрическое определение, ограниченное вещественными значениями переменной, является недостаточным для намеченного применения, которое основывается на знании функции $\operatorname{arctg} x$ во всей плоскости переменной или, по крайней мере, в области этой плоскости. Я применю к интегралу $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, который выражает для вещественных значений границ интегрирования наименьшую дугу, тангенс которой равен x, рассмотренные выше соображения (стр. 82). Мы выведем, заменяя x на tx, следующее новое выражение $\int_0^1 \frac{xdt}{1+t^2x^2}$, в котором количество под знаком интеграла имеет определенный смысл при мнимых значениях переменной и в котором границы интегрирования неизменны. Искомое обобщение мы можем получить, следовательно, положив:

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^1 \frac{zdt}{1+z^2t^2}.$$

Этот результат, давая функции $\operatorname{arctg} z$ совершенно новое определение, заслуживает внимания. Действительно интеграл имеет одно единственное значение, тогда как, функция, как известно, может принимать бесчисленное множество. То же самое обстоятельство относится и к $\ln(1+z)$, если выразим его формулой:

$$\ln(1+z) = \int_0^1 \frac{zdt}{1+zt};$$

также окажется, что логарифм может быть рассматриваем, как имеющий на всей плоскости единственное значение. Затруднения, которые мы отмечаем, связаны с новым, в высшей степени важным, аналитическим понятием, которое дает полное разъяснение вопроса, а именно, с понятием о разрывах, названных в работах Римана разрезами (купюрами). Эти линии обнаруживаются естественным образом, если заметить, что определение двух функций интегралами:

$$\int_0^1 \frac{zdt}{1+z^2t^2}, \quad \int_0^1 \frac{zdt}{1+zt}$$

невозможно, когда знаменатели $1+z^2t^2$ и $1+zt$ на пути интегрирования обращаются в нуль. Мы видим, заставляя изменяться t от нуля до единицы, принимая вещественные значения, что корни уравнения: $1+$ $+z^2t^2=0$ заполняют (рис. 40) неограниченные отрезки AM и $A'M'$ оси y, где $OA=OA'=1$, тогда как соотношение $1+zt=0$ дает для z неограниченный отрезок BN оси x на расстоянии OB от начала координат, равном единице.

Мы можем также отметить, что, написав

$$\int_0^1 \frac{zdt}{1+z^2t^2} = \frac{1}{2i}\left[\int_0^1 \frac{dt}{t-\frac{i}{z}} - \int_0^1 \frac{dt}{t+\frac{i}{z}}\right],$$

получаем, что первый интеграл не определен при z на AM и второй на $A'M'$. Дадим теперь аналитическую характеристику этих прямых.

Рассмотрим более общее выражение:

$$J = \int_a^b \frac{dt}{t + iz},$$

в котором линия неопределенности интеграла часть оси y, заключенная между $OA = a$ и $OB = b$.

Пусть C точка этой линии, $OC = \zeta$, затем, пусть $z = i\zeta - \varepsilon$, $z' = i\zeta + \varepsilon$ аффиксы двух точек D и D', взятых на равных расстояниях от C на перпендикуляре к оси (рис. 41). Пусть также

$$J = \int_a^b \frac{dt}{t + i(i\zeta - \varepsilon)}, \qquad J' = \int_a^b \frac{dt}{t + i(i\zeta + \varepsilon)}$$

Имеем:

$$J - J' = \int_a^b \frac{2i\varepsilon dt}{(t - \zeta)^2 + \varepsilon^2}$$

и, выполняя интегрирование,

$$J - J' = 2i\left[\operatorname{arctg}\frac{b - \zeta}{\varepsilon} - \operatorname{arctg}\frac{a - \zeta}{\varepsilon}\right].$$

Полагаем теперь ε бесконечно малым; так как ζ меньше b и больше a, получаем в пределе:

$$\operatorname{arctg}\frac{b - \zeta}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg}\frac{a - \zeta}{\varepsilon} = -\frac{\pi}{2}$$

и, следовательно:

$$J - J' = 2i\pi.$$

Разность значений интеграла для двух бесконечно близких точек D и D' есть величина конечная; таким образом доказано, что линия неопределенности есть линия прерывности.

Применим этот вывод к изучаемой функции:

$$\int_0^1 \frac{z dt}{1 + z^2 t^2} = \frac{1}{2i}\left[\int_0^1 \frac{dt}{t - \frac{i}{z}} - \int_0^1 \frac{dt}{t + \frac{i}{z}}\right].$$

Рассмотрим две бесконечно близкие точки z_0 и z_1 на перпендикуляре к AM (рис. 40) и также две точки z_0' и z', расположенные по обе стороны от $A'M'$. Обозначая, для краткости, соответствующие значения интеграла через (z_0), (z_1) и т. д., мы получим соотношения:

$$(z_1) - (z_0) = \pi, \quad (z_1') - (z_0') = -\pi.$$

Аналогичным образом находим для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{zdt}{1+zt}$, которым мы выразили $\ln(1+z)$, что при двух бесконечно близких точках z и z' от линии неопределенности BN (рис. 40), имеем:

$$(z') - (z) = 2i\pi.$$

Укажем теперь следствия, вытекающие из только что изложенных соображений.

Мы видим сперва, что, согласно с новым определением, функция $\operatorname{arctg} z$ конечна, непрерывна и однозначна внутри круга, имеющего центр в начале и радиус равный единице. Мы можем, следовательно, применить формулу Маклорена и вывести заключение, что ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

имеет место для всех вещественных и комплексных значений переменной, модуль которых меньше единицы.

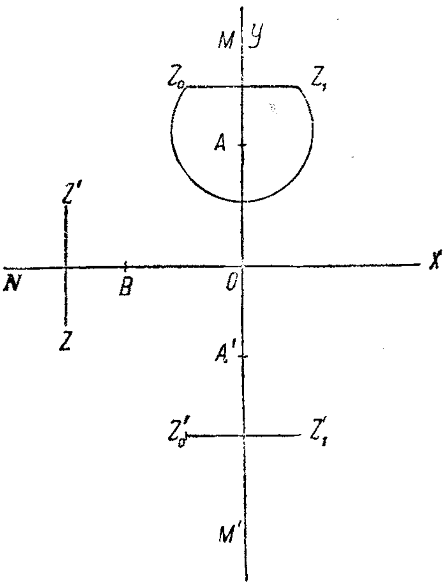

Рис. 40.

Покажем затем как получаются различные значения $\operatorname{arctg} z$. Построим между точками z_1 и z_0 путь z_1Pz_0 (рис. 40), который не встречается с прямой AM. Вдоль такого пути функция будет меняться непрерывно. Положим теперь, что, сохраняя непрерывность изменения функции, мы хотим перейти за z_0 и возвратиться к точке отправления z_1. Ясно, что придется взять, получив значение в z_0, за значение функции, отвечающее точке z_1, то, которое бесконечно близко к (z_0), т. е. значение, обозначенное через (z_0), равное $(z_1) - \pi$. Уничтожить линию разрыва AM все равно, что установить в одной точке z два значения функции, а затем и некоторое число n значений, описывая n раз тот же путь, причем эти значения заключаются в формуле $(z_1) - n\pi$. Второй разрез $A'M'$ приводит подобно этому, к значениям, вычисляемым по формуле: $(z_1') + n\pi$; легко вывести, что во всякой точке плоскости, а не только в z_1 и z_1', мы имеем неограниченное число значений $\operatorname{arctg} z$, которые получаются из одного прибавлением или вычитанием целого числа, кратного π. Предыдущие рассуждения дают пример разрывов, идея о которых не могла бы возникнуть, если бы мы ограничились элементарным анализом.

Например, дроби делаются бесконечными и, следовательно, терпят разрывы при значениях переменной, обращающих в нуль знаменатели, но эти значения — изолированные точки плоскости. Другие выражения, получаемые из ряда Фурье, переходят внезапно от некоторых конечных значений к другим, совершенно отличным, хотя переменная изменяется, возрастая непрерывно. Но эти изменения обнаруживаются в точках, отделенных конечными интервалами, тогда, как мы только что нашли сплошные линии прерывности. Следующее замечание, связанное с формулой Коши:

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S}\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

покажет нам с новой и более общей точки зрения это расширение понятия разрыва и укажет на его важное значение в анализе. Положим, что точка, аффикс которой есть переменная x, вне контура ограниченного кривой S; при этом предположении, функция $\frac{f(z)}{z-x}$ конечна и непрерывна во всех точках внутри контура; следовательно, интеграл

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

равен нулю.

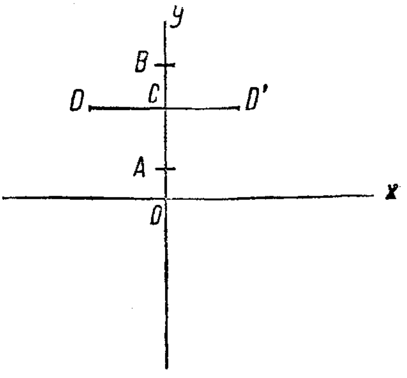

Рис. 41.

Контур интегрирования есть, следовательно, линия разрыва, или иначе то, что Риман называет разрезом; в заключение дадим новый пример на применения этого понятия, которое играет такую большую роль в работах этого великого геометра.

Пусть, вообще:

$$(S)_k=\int\limits_{S}\frac{f_k(z)\,dz}{z-x};$$

рассмотрим несколько отдельных площадок, ограниченных контурами S, S', S'', ... и положим:

$$\Phi(x)=(S)+(S')_1+(S'')_2+\ \ldots,$$

где $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... любые функции. Из сказанного выше ясно, что, если точка x находится внутри контура S, $\Phi(x)$ будет равна функции $f_1(x)$ и т. д. Таким образом, посредством криволинейных интегралов, мы образовали аналитическое выражение, вполне точное, которое представляет последовательно $f(x)$, $f_1(x)$, ... когда x принадлежат к различным заданным областям плоскости, причем функции $f(x)$, $f_1(x)$, ... совершенно независимы одна от другой. Я ограничиваюсь кратким указанием на этот результат, чтобы только показать, как видоизменяется и расширяется идея функции на основании результатов, вытекающих из построений, доставляемых анализом нашему соображению и нашим исследованиям.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Теорема Лорана; аналитическое выражение однозначных функций, к которым она приводит. — Исследование голоморфных функций; основные свойства; доказательство теоремы Вейерштрасса о разложении их на первичные множители, по методу Миттаг-Леффлера. — Приложение к $\sin \pi x$, разложение на множители, выявление периодичности функции. — О роде голоморфных функций по Лагерру.

Теорема Коши, из которой мы только что вывели ряды Тейлора и Маклорена, дает для функции $f(x)$ в предположении, что она однозначна и непрерывна на площадке, ограниченной контуром S, выражение посредством формулы:

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

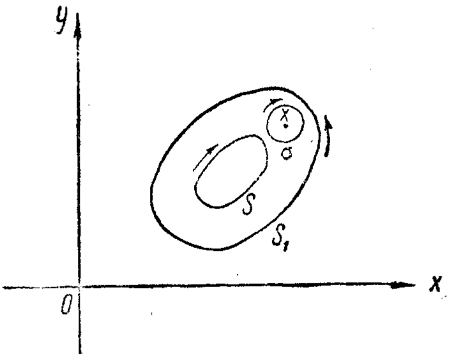

Рис. 42.

Рассмотрим теперь площадку, ограниченную двумя контурами S и S_1 (рис. 42), и допустим, что во всех ее точках функция $f(z)$ будет также однозначна и непрерывна; покажем, как в этом более общем случае получить выражение для функции. Пусть x аффикс некоторой точки площадки и σ окружность бесконечно малого радиуса, имеющая центром эту точку. На площадке, ограниченной тремя кривыми S, σ и S_1, функция $\frac{f(z)}{z-x}$ однозначна и непрерывна; следовательно, интеграл $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ равен нулю, если он взят последовательно по указанным различным контурам и выполнено данное выше условие, — описывать их, имея рассматриваемую площадь слева.

Отсюда вытекает, что если следовать по каждой кризой в прямом направлении относительно площади, которую она замыкает, значение интеграла дается выражением:

$$(S_1)-(\sigma)-(S).$$

Имеем соотношение

$$(\sigma)=(S_1)-(S)$$

и, так как $\sigma = 2i\pi f(x)$, получаем отсюда следующую формулу:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S}\frac{f(z)\,dz}{x-z},$$

которая является обобщением формулы Коши. Укажем важное следствие, к которому приводит эта формула.

Положим, что S и S_1 две окружности радиусов R и R_1, имеющие центром начало координат; в этом случае мы можем разложить в ряд оба интеграла, первый по возрастающим степеням переменной и второй по убывающим.

Действительно, применив соотношение:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)},$$

получим выражение для

$$\int\limits_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

в виде целой функции от x степени $n-1$ с дополнительным членом

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S_1}\frac{x^n f(z)\,dz}{z^n(z-x)}.$$

Обозначая через ζ аффикс некоторой точки контура интегрирования, который является окружностью радиуса R_1, и через λ множитель Дарбу, имеем:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S_1}\frac{x^n f(z)\,dz}{z^n(z-x)} = \lambda R_1\left(\frac{x}{\zeta}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}.$$

Модуль $\frac{x}{\zeta}$ меньше единицы: отсюда вытекает, что для достаточно больших значений n, остаточный член ряда может быть сделан меньше любой заданной величины.

Применим далее соотношение:

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{x^n} + \frac{z^n}{x^n(x-z)};$$

второй интеграл будет разложен по убывающим степеням переменной, причем дополнительным членом будет

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S}\frac{z^n f(z)\,dz}{x^n(x-z)}$$

или, обозначив через ζ аффикс точки окружности радиуса R:

$$\lambda R\left(\frac{\zeta}{x}\right)^n \frac{f(\zeta)}{x-\zeta}.$$

Теперь модуль множителя $\frac{\zeta}{x}$ меньше единицы, так что этот второй остаточный член, как и предыдущий, имеет пределом нуль, когда n бесконечно возрастает.

Теорема, которую мы только что доказали и которую называют теоремой Лорана, [1] дает путь к изучению однозначных функций одной переменной, которым мы сейчас и займемся. Когда эти функции конечны на всей плоскости, формула Маклорена выражает их в виде сходящегося ряда, каково бы ни было значение переменной. Если же мы допустим, что функция становится бесконечной при различных значениях, которые мы обозначим через $a_0, a_1, \ldots a_k, \ldots$, причем

$$\operatorname{Mod} a_0 < \operatorname{Mod} a_1 < \operatorname{Mod} a_2 < \ldots < \operatorname{Mod} a_k < \ldots,$$

то для площадки, заключенной между двумя окружностями, имеющими центр в начале и проходящими через точки a_{k-1} и a_k, теорема Лорана даст разложение другого вида, сходящееся на этой площадке, за исключением кривых, которые ее ограничивают; в разложение входят положительные и отрицательные степени переменной:

$$S_k = A_0{}^k + A_1{}^k x + A_2{}^k x^2 + \ldots + \frac{B_1{}^k}{x} + \frac{B_2{}^k}{x^2} + \ldots.$$

Присоединим теперь к этим выражениям ряд Маклорена S_0, для значений переменной внутри первой окружности; собрание выражений $S_0, S_1, \ldots S_k$ представит функцию для всех точек круга, имеющего радиусом модуль a_k. Если не существует разрывов в оставшейся бесконечной области по ту сторону круга, выражение его в этой области мы получим, полагая R_1 в интеграле $\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$ бесконечно большим, что дает таким образом ряд, вполне сходящийся для всех значений переменной из указанной области.

При общем изучении однозначных функций в течение долгого времени останавливались на этих выводах, на которые мы вкратце указали. Впоследствии эти выводы были широко разработаны Вейерштрассом. Наша цель изложить из всех открытий знаменитого геометра те, которые мы считаем необходимым поместить в настоящем курсе. Рассмотрим сначала функции, называемые Брио и Буке голоморфными, которые, будучи конечными во всех точках плоскости, могут быть разложены по формуле Маклорена в ряд, сходящийся для любого значения переменной; вот первая теорема, которую мы докажем относительно их. Я го-

[1] См. т. 17 Comptes-rendus, стр. 938, доклад Коши относительно мемуара, в котором Лоран дал свою теорему, и примечание, которое великий геометр добавил к своему докладу.

ворю, что всякая голоморфная функция $f(z)$, у которой отношение $\frac{f(z)}{z^n}$ остается конечным для бесконечно большого z, есть целый полином степени n.

Для этого я буду исходить из формулы:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(0) + J,$$

в которой

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{x^{n+1} f(z)\, dz}{z^{n+1}(z-x)},$$

и интеграл взят по окружности с радиусом R и центром в начале, содержащей внутри себя точку, аффикс которой x.

Обозначаем, как и раньше, через $\zeta = Re^{i\theta}$ аффикс некоторой точки указанной окружности; мы сможем написать:

$$J = \frac{\lambda R x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - x)}$$

или же, подставляя $\zeta e^{-i\theta}$ на место R и вводя степень $e^{-i\theta}$ в множитель λ:

$$J = \frac{\lambda x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^n (\zeta - x)}.$$

В этой формуле, так как функция $f(z)$ предполагается голоморфной, мы можем, не меняя значения интеграла, увеличивать как угодно радиус окружности, которая служит контуром интегрирования. Отношение $\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}$ имеет конечный предел; таким образом мы находим, что J равно нулю; это и доказывает высказанное мною предположение. В частности, полагая $n = 0$, имеем следствие, что голоморфная функция должна бесконечно возрастать вместе с переменной; если же допустить, что она не может превзойти конечного предела, то она должна быть непременно постоянной. Следовательно, трансцендентные голоморфные функции обладают характерными свойствами, благодаря которым они существенно отличаются от полиномов, и разложение их на множители, к которому мы скоро подойдем, выявит нам с полной очевидностью разницу в аналитической природе обоих видов функций. При изложении этого вопроса мы будем опираться на следующую теорему Неймана, которая имеет чрезвычайно важное значение в анализе: *функция, голоморфная на данной площадке и остающаяся постоянной вдоль некоторой линии конечной длины, непременно сохраняет это постоянное значение на всей площадке.*

Положим, что (рис. 43) линия MN имеет конечную, произвольно малую длину и что вдоль нее $f(z)$ сохраняет постоянное значение C. Принимаем точку A на этой линии за центр окружности радиуса AX и предполагаем, что эта окружность находится полностью в рассматриваемой площадке. Обозначим через x аффикс X и через a аффикс A;

теорема Тейлора, которую мы можем применить к данному случаю, дает:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\ldots.$$

Имеем во всех точках MN : $f(z)=C$; отсюда получаем, что производные любого порядка функции равны нулю вдоль этой линии и, следовательно, в точке A, так что ряд даёт нам $f(x)=C$ при $x=a$. Следовательно, функция постоянна внутри взятой окружности; установив это, повторим рассуждение, исходя от некоторой точки A', расположенной в круге AX. Затем — от точки A'' в новом круге, и очевидно, таким образом, мы постепенно докажем, что на всей площадке, на которой функция голоморфна, $f(x)=C$. Укажем следствия, которые Нейман выводит из этой теоремы.

Голоморфная функция не может быть равной нулю вдоль линии конечной длины, иначе она тождественно равна нулю; отсюда заключаем, что значения переменной, при которых она обращается в нуль, обязательно изолированные точки.

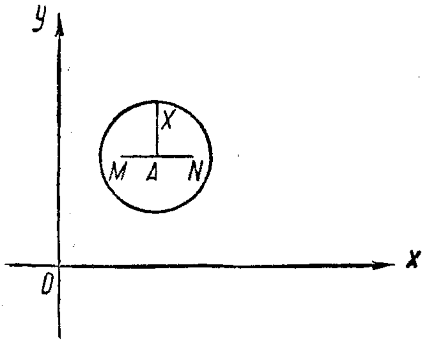

Рис. 43.

Полагаем затем, что $f(x)$ и ее $n-1$ первые производные равны нулю при $x=a$, производная же порядка n принимает значение, отличное от нуля; ряд Тейлора дает нам следующее выражение:

$$f(x)=(x-a)^n F(x),$$

в котором $F(x)$ есть снова голоморфная функция. Мы говорим тогда, как и в случае алгебраических полиномов, что это значение $x=a$ есть корень кратности n уравнения $f(x)=0$. Мы прибавим еще, что невозможно, чтобы голоморфная функция имела бы корень, кратность которого бесконечна; в самом деле, ряд Тейлора указывает, что, допустив такое предположение, мы получим функцию, тождественно равную нулю.

Эти результаты приводят нас естественно к исследованию, не допускает ли голоморфная функция, подобно полиномам, разложения на множители, выявляющего ее корни, число которых конечно или бесконечно велико.

Прежде чем изучили этот вопрос, который настолько же важен, насколько и труден, в его общем виде, были рассмотрены некоторые частные случаи.

Так, Эйлер дал знаменитую формулу:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\ldots,$$

которая справедлива при всех значениях x.

Коши первый занялся этим вопросом с общей точки зрения; не построив еще законченной теории, он установил, что, обозначая через a

корень функции $f(x)$, в произведения таких количеств, как $1-\frac{x}{a}$, мы должны в некоторых случаях вводить множители вида $e^{G(x)}$, в которых $G(x)$ — голоморфные функции, и которые, следовательно, не обращаются в нуль ни при каком значении x.

Вейерштрасс решил после этого полностью данную задачу в мемуаре, озаглавленном: „К теории однозначных функций одного переменного", перевод которого, сделанный Пикаром, мы найдем в Annales de l'École Normale (1879). Путем научного и глубокого метода знаменитый геометр приходит к исключительно важным выводам, которые мы изложим самым простым способом, пользуясь остроумным и оригинальным соображением, которым мы обязаны Миттаг-Леффлеру, профессору Стокгольмского Университета.

Обозначим через $a_1, a_2, a_3, \ldots$ корни голоморфной функции $f(x)$, расположенные в порядке возрастающих модулей. Предположим, что все корни различны, и допустим, что среди них нет ни одного, равного нулю.

Установив это, укажем сначала случай, в котором разложение на множители наиболее близко к разложению, свойственному полиномам.

Положим, что ряд $\sum\frac{1}{\operatorname{mod} a}$, образованный обратными модулями корней, сходящийся; я утверждаю, что и ряд $\sum\frac{1}{\operatorname{mod}(a_n-x)}$ сходится при любых x, исключая значения $a_1, a_2, \ldots$, при которых сумма его бесконечно велика; таким образом, выражение $\sum\frac{1}{x-a_n}$ будет представлять на всей плоскости переменной аналитическую функцию.

Чтобы установить это, воспользуемся простым замечанием; допустим, что даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$, из которых первый предполагается сходящимся; второй будет также сходящимся, если при некотором k имеем $v_n<ku_n$ для всех значений n, начиная с некоторой определенной границы.

В самом деле, пусть в нашем случае:

$$u_n=\frac{1}{\operatorname{mod} a_n} \quad \text{и} \quad v_n=\frac{1}{\operatorname{mod}(a_n-x)},$$

предыдущее условие имеет вид:

$$\frac{\operatorname{Mod} a_n}{\operatorname{Mod}(a_n-x)}<k.$$

Но из неравенства:

$$\operatorname{Mod} a_n<\operatorname{Mod}(a_n-x)+\operatorname{Mod} x,$$

получается соотношение:

$$\frac{\operatorname{Mod} a_n}{\operatorname{Mod}(a_n-x)}<1+\frac{\operatorname{Mod} x}{\operatorname{Mod}(a_n-x)},$$

которое доказывает высказанное предположение, так как отношение $\frac{\operatorname{Mod} x}{\operatorname{Mod}(a_n - x)}$ бесконечно уменьшается, когда n увеличивается.

Установив это, рассмотрим выражение:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \frac{1}{x - a_n},$$

которое, очевидно, есть однозначная функция во всех точках плоскости; я говорю, что она не становится бесконечной и тогда, когда $x = a_n$.

В самом деле имеем:

$$f(x) = (x - a_n) F(x),$$

обозначая через $F(x)$ голоморфную функцию, не имеющую уже a_n корнем, который предполагался простым; отсюда заключаем, что

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x - a_n} = \frac{F'(x)}{F(x)}$$

конечно при $x = a_n$.

Следовательно, функция $\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \frac{1}{x - a_n}$ голоморфна на всей плоскости; обозначим ее через $G'(x)$, положив, что $G(x)$ исчезает при $x = 0$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \frac{1}{x - a_n} = G'(x).$$

Умножаем теперь обе части на dx и интегрируем от $x = 0$; получаем

$$\ln \frac{f(x)}{f(0)} - \sum \ln \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) = G(x),$$

откуда

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)} \prod \left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

где $\Pi \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$ — произведение конечного или бесконечного числа множителей:

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \ldots$$

К этому выводу пришел Коши.

Приступим теперь к общему случаю и установим по методу Миттаг-Леффлера открытые Вейерштрассом важные выводы, заметив вместе с этим знаменитым геометром, что путь ему был открыт выражением, данным Гауссом, для обратной величины функции Эйлера второго рода в виде бесконечного произведения линейных множителей.

Когда ряд $\sum \frac{1}{\operatorname{mod} a}$ не является сходящимся, сумма $\sum \frac{1}{x - a}$ не представляет уже аналитической функции; но, отбрасывая от каждого члена часть его разложения, расположенного по убывающим степеням x, Миттаг-Леффлер заметил, что становится возможным образовать при помощи этих разностей ряд абсолютно сходящийся.

Пусть:

$$P_\omega(x) = \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \ldots + \frac{x^{\omega-1}}{a_n^\omega};$$

мы имеем:

$$\frac{1}{x-a_n} + P_\omega(x) = \frac{x^\omega}{a^\omega(x-a_n)};$$

установив это, я утверждаю, что, располагая надлежащим образом числами ω, мы сделаем ряд $\sum\left[\frac{1}{x-a_n} + P_\omega(x)\right]$ или равный ему

$$\sum \frac{x^\omega}{a_n^\omega(x-a_n)}$$

сходящимся.

Во-первых, может случиться, что ряд $\sum \frac{1}{\operatorname{mod} a}$ будет расходящимся, ряд же, который мы образуем, возвышая все его члены в одну и ту же степень, таковым быть перестает; это случай гармонического ряда $\sum \frac{1}{n}$; действительно, мы знаем, что сумма $\sum \frac{1}{n^\mu}$, в которой $\mu > 1$, конечна. Будем иметь при этом условии определенное число ω такое, что ряд $\sum \frac{1}{\operatorname{mod} a_n^{\omega+1}}$ будет сходящимся; отсюда мы можем заключить и о сходимости ряда $\sum \frac{1}{\operatorname{mod} a_n^\omega (x-a_n)}$, и следовательно, ряда

$$\sum \frac{x^\omega}{a_n^\omega(x-a_n)}.$$

Действительно, если мы положим

$$u_n = \frac{1}{\operatorname{mod} a_n^{\omega+1}}, \quad v_n = \frac{1}{\operatorname{mod} a_n^\omega (a_n - x)},$$

мы получим для отношения $\frac{v_n}{u_n}$ то же значение, как и выше:

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\operatorname{mod} a_n}{\operatorname{mod}(a_n - x)}.$$

Но далеко не всегда мы можем поступать таким образом и переходить от расходящегося ряда к другому, сходящемуся, возвышая члены первого в одну и ту же степень.

Рассмотрим, например, расходящийся ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$; я говорю, что ряд $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\omega}}$ будет также расходящимся, как бы велико ни было постоянное число ω.

В самом деле, заметим, как это сделал Штерн из Геттингена, что положив:

$$S_n = \frac{1}{(\ln 2)^{\omega}} + \frac{1}{(\ln 3)^{\omega}} + \ldots + \frac{1}{(\ln n)^{\omega}},$$

будем иметь:

$$S_n > \frac{n-1}{(\ln n)^{\omega}}.$$

Можем, однако, писать

$$\frac{n-1}{(\ln n)^{\omega}} = \frac{n}{(\ln n)^{\omega}} - \frac{1}{(\ln n)^{\omega}};$$

второй член разности стремится к нулю, и им можно пренебречь; но первый, как известно, увеличивается беспредельно вместе с n; следовательно, ряд расходящийся.

В подобных случаях необходимо брать для ω значения, которые изменяются вместе с n; мы примем, как и Вейерштрасс, что $\omega = n - 1$. Рассматриваемый ряд принимает тогда вид:

$$\sum \frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}(x - a_n)} = \frac{1}{x} \sum \frac{x^n}{a_n^n \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}$$

и сходится, так как, положив $u_n = \operatorname{Mod} \frac{x^n}{a_n^n \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}$ получаем, что при беспредельном возрастании n предел выражения $\sqrt[n]{u_n}$ равен нулю, а, как известно, для сходимости достаточно, чтобы этот предел был меньше единицы.

Если это так, то выражение:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \left[\frac{1}{x - a_n} + P_{\omega}(x)\right]$$

есть аналитическая функция, которая никогда не становится бесконечной, как мы это только что видели. Мы можем, следовательно, приравнять ее производной $G'(x)$ от голоморфной функции $G(x)$, которую мы предположим снова равной нулю при $x = 0$; это дает:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \left[\frac{1}{x - a_n} + P_{\omega}(x)\right] = G'(x).$$

Умножаем обе части на dx и интегрируем от нуля; пусть:

$$Q_{\omega}(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\omega}}{\omega};$$

тогда

$$\int_0^x P_\omega(x)\,dx = \frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{x^\omega}{\omega a_n^\omega} = Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)$$

и мы получаем окончательно:

$$\ln\frac{f(x)}{f(0)} = \sum\left[\ln\left(1-\frac{x}{a_n}\right) + Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)\right] = G(x),$$

или:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)}\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right].$$

Это есть формула, выведенная Вейерштрассом, дающая для всех голоморфных функций аналитическое выражение, позволяющее выявить их корни и обобщить разложение полиномов на множители. Количества $\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)}$, которые фигурируют в этом выражении, были названы знаменитым геометром первичными множителями.

Предположим теперь, что $f(x)$ имеет равные корни; пусть имеется корень кратности p; ясно непосредственно, что формула не изменится в ее аналитическом характере: достаточно возвысить соответствующий первичный множитель в степень p. Наконец, в случае, когда функция имеет n корней, равных нулю, можно вести рассуждения о частном $\frac{f(x)}{x^n}$; результат будет отличаться от предыдущего только присутствием множителя x^n.

Относительно степенной функции $e^{G(x)}$ заметим, что она дает пример голоморфной функции, не имеющей ни одного корня. Это-то и навело Пикара на исследование вопроса, существуют ли функции $f(x)$ такие, что каждое из двух уравнений $f(x)=a$, $f(x)=b$ не имеет ни одного корня. Автор доказал в „Annales de l'École Normale", что $f(x)$, если она голоморфна, непременно оказывается в этом случае постоянной, а если рассматриваемые уравнения имеют только конечное число решений, эта функция не может не быть полиномом.

Мы воспользуемся этими результатами, которые будут доказаны позже в теории эллиптических функций; их теория выводится независимо от той, которой мы занимаемся в настоящее время.

Теперь же мы применим только что выведенные теоремы, к частному случаю $\sin x$ и придем таким образом к формуле Эйлера путем элементарных рассуждений. Рассмотрим голоморфную функцию $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$, которая имеет корнями числа $x=n$, где значения n образуют последовательность целых положительных и отрицательных чисел, исключая число нуль; значит рассматриваемый выше ряд $\sum\frac{1}{\operatorname{mod} a_n}$ — расходящийся, но ряд $\sum \frac{1}{\mathrm{mod}^2 a_n}$ уже сходится; мы положим, следовательно, $\omega = 1$. Таким образом, первичными множителями будут

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}};$$

замечая, что $f(0) = 1$ и допуская, что вскоре будет доказано, что $G(x) = 0$, имеем формулу:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \Pi \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}.$$

Если мы соединим два множителя, которые соответствуют равным и обратным по знаку значениям n, показательные функции исчезнут и мы получим окончательно:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \ldots,$$

т. е. формулу Эйлера.

Мы заметим, что она обнаруживает непосредственно периодичность синуса также хорошо, как геометрическое определение.

В самом деле, беря конечное число множителей и обозначая через A постоянную, напишем:

$$F(x) = Ax(x-1)(x-2) \ldots (x-n)$$
$$(x+1)(x+2) \ldots (x+n).$$

Заменив x на $x+1$, получаем:

$$F(x+1) = A(x+1)x(x-1) \ldots (x-n+1)$$
$$(x+2) \quad (x+3) \ldots (x+n+1),$$

отсюда:

$$F(x+1) = F(x) \frac{x+n+1}{x-n}$$

и в пределе при $n = \infty$

$$F(x+1) = -F(x),$$

что дает соотношение:

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

и, следовательно:

$$\sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Сделаем еще по поводу формулы Эйлера следующее замечание.

Можно думать, что допустимо писать:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{x}{m}\right),$$

где m и n бесконечно возрастающие величины и, следовательно, заменять полином:

$$F(x)=x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{n}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

полиномом

$$\Phi(x)=x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{n}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{m}\right);$$

но выражение Вейерштрасса обнаруживает, что этим была бы допущена ошибка.

Если положим для краткости:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots+\frac{1}{n},$$

эта формула дает в действительности:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi}=\Phi(x)\,e^{x(S_n-S_m)},$$

где m и n бесконечно возрастают. Но имеем для очень больших m и n:

$$S_n-S_m=\ln\frac{n}{m},$$

отсюда получаем следующее значение:

$$\Phi(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}\left(\frac{m}{n}\right)^x.$$

Предел произведения линейных множителей, данных $\Phi(x)$, равен следовательно, пределу полинома $F(x)$, помноженному на особый множитель $\left(\frac{m}{n}\right)^x$. Это согласуется с равенством.

$$\Phi(x+1)=\Phi(x)\frac{m+1+x}{x-n},$$

из которого получаем, действительно, заставляя возрастать числа m и n:

$$\Phi(x+1)=-\Phi(x)\lim\left(\frac{m}{n}\right);$$

значит, только в частном случае, когда предел отношения $\frac{m}{n}$ равен единице, мы получаем целый полином, могущий служить для образования периодической функции.

Выражение $\cos x$ в виде произведения первичных множителей получается легко, как следствие соотношения:

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}.$$

Заменяем для этого в предыдущей формуле x на $\frac{x}{\pi}$, что дает:

$$\sin x = x \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{n\pi} \right) e^{\frac{x}{n\pi}} \right];$$

соединяя затем множители, соответствующие четным и нечетным значениям n, мы можем написать:

$$\sin x = x \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{2n\pi} \right) e^{\frac{x}{2n\pi}} \right] \cdot \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{m\pi} \right) e^{\frac{2x}{m\pi}} \right]$$

$$(m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

Таким образом, оказывается, что все множители $\sin x$ находятся среди множителей $\sin 2x$ и после упрощения мы получаем:

$$\cos x = \Pi \left[\left(1 - \frac{2x}{m\pi} \right) e^{\frac{2x}{m\pi}} \right].$$

Но можно притти к тому же результату, пользуясь равенством

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right);$$

для этого лучше всего использовать общее выражение $f(x + \xi)$, в котором ξ есть некоторая, легко определяемая постоянная.

Положим временно $f(x + \xi) = F(x)$, что даст:

$$\frac{F(x)}{F(0)} = \frac{f(x + \xi)}{f(\xi)};$$

замечая, что корни уравнения $F(x) = 0$ равны $a_n - \xi$, получаем формулу:

$$\frac{f(x + \xi)}{f(\xi)} = e^{G(x)} \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{a_n - \xi} \right) e^{Q_\omega \left(\frac{x}{a_n - \xi} \right)} \right],$$

которая приведет к предыдущему выражению для $\cos x$, если положить $a_n = n\pi$; $\xi = \frac{\pi}{2}$ и $G(x) = 0$.

Этот результат, казалось, должен бы вытекать из двух соотношений:

$$\frac{f(x + \xi)}{f(0)} = e^{G(x+\xi)} \Pi \left[\left(1 - \frac{x + \xi}{a_n} \right) e^{Q_\omega \left(\frac{x+\xi}{a_n} \right)} \right]$$

и

$$\frac{f(\xi)}{f(0)}=e^{G(\xi)}\Pi\left[\left(1-\frac{\xi}{a_n}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{\xi}{a_n}\right)}\right]$$

при почленном делении; но поступая так, получают новое выражение:

$$\frac{f(x+\xi)}{f(\xi)}=e^{G(x+\xi)-G(\xi)}\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n-\xi}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x+\xi}{a_n}\right)-Q_\omega\left(\frac{\xi}{a_n}\right)}\right].$$

Я присоединяю к нему другое, которое получаем, исходя от следующего равенства, в котором явно выделен множитель x:

$$\frac{f(x)}{f(0)}=e^{G(x)}x\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right];$$

из него вытекает равенство:

$$\frac{f(x+\xi)}{f(\xi)}=e^{G(x+\xi)-G(\xi)}\left(1+\frac{x}{\xi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n-\xi}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x+\xi}{a_n}\right)-Q_\omega\left(\frac{\xi}{a_n}\right)}\right],$$

которое я применю к случаю $\sin x$, и которое дает, полагая $\xi=\frac{\pi}{2}$ и $m=2n-1$ формулу:

$$\cos x=\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right].$$

Мы видим, насколько она отличается от формулы, выведенной выше, необходимо показать, что эти два выражения равны; дадим для этого простой и изящный прием, которым мы обязаны Эдуарду Вейру (Weyr), профессору Пражской политехнической школы (Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-ая серия, том XII, январь 1888).

Пишем сначала в первом выражении $\cos x$, $2n-1$ вместо m и выделяем множитель, соответствующий $n=0$; получаем:

$$\cos x=\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)e^{-\frac{2x}{\pi}}\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{2x}{(2n-1)\pi}}\right];$$

$$(n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Делим теперь на второе выражение, в котором выделен также множитель, соответствующий $n=0$:

$$\cos x=\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{x}{\pi n}}\right];$$

частное равно:

$$e^{-\frac{2x}{\pi}}\Pi\left[e^{\frac{2x}{(2n-1)\pi}-\frac{x}{n\pi}}\right]=e^{-\frac{2x}{\pi}+\frac{2x}{\pi}S},$$

где для сокращения мы положили:

$$S=\sum\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]\qquad(n=\pm 1,\ \pm 2\ldots).$$

Чтобы доказать равенство двух данных выше выражений, достаточно установить, что сумма S равна единице. Для этого замечаем, что по замене n на $-n$ общий член принимает вид: $-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}$; следовательно, мы можем ограничиться суммированием положительных слагаемых и написать, соединяя два соседних члена:

$$S=\sum\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$S=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots;$$

значит $S=1$, что и требовалось получить.

Следующее, очень простое замечание, позволяет видеть, что вообще первичные множители не определяются единственным способом. Пусть, действительно $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots F_n(x)\ldots$ — полиномы, имеющие суммой голоморфную функцию $F(x)$; мы сможем написать:

$$\frac{f(x)}{f(0)}=e^{G(x)-F(x)}\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)+F_n(x)}\right]$$

В частности, обозначая через A_1, A_2, $\ldots$ A_n $\ldots$ постоянные, сумму которых положим равной A, получим:

$$\frac{f(x)}{f(0)}=e^{G(x)-AF(x)}\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)+A_nF(x)}\right],$$

где $F(x)$ — произвольный полином.

Мы закончим несколькими замечаниями относительно частного класса голоморфных функций $f(x)$, в которых число ω остается тем же самым для всех первичных множителей. Это есть случай, когда ряд

$$\sum\frac{1}{\operatorname{mod} a_n}$$

становится сходящимся при возвышении его членов в одинаковую степень $\omega+1$; таким функциям дают название, которое предложено Лагерром — функции рода ω. Пусть 1, ε, ε', $\ldots$ — различные корни уравнения $x^{\omega+1}=1$; следующее произведение:

$$f(x)\,f(\varepsilon x)\,f(\varepsilon' x)\ldots$$

будет целой функцией от $x^{\omega+1}$; обозначим ее через $F(x^{\omega+1})$; очевидно, что уравнение $F(x)=0$ имеет корнями количества $a_n^{\omega+1}$ и голоморфная функция $F(x)$ будет нулевого рода. Мы видим, таким образом, что всякая фукция рода ω есть делитель другой, более простой функции нулевого рода, в которой x заменен через $x^{\omega+1}$.

Разложения этих функций в ряд было предметом исследований Пуанкарэ и вот к какому прекрасному результату пришел знаменитый геометр (Bulletin de la Société mathématique de France, т. XI, п. 4). Если эти функции представить рядом:

$$\sum \frac{A_n x^n}{(1\cdot 2 \ldots n)^{\frac{1}{\omega+1}}},$$

то коэфициенты A_n будут иметь при бесконечном возрастании n пределом нуль.

Мы отметим, наконец, для случая, когда a_n вещественны, распространение теоремы Ролля на функции первого рода, выведенное Лагерром.

Полагая для этого, что функция $G(x)$ приводится к постоянной, имеем выражение:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \Pi\left[\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n}}\right],$$

откуда и получаем следующие равенства:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum\left[\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n}\right]$$

$$D_x\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = -\sum \frac{1}{(x - a_n)^2}.$$

Первое показывает, что между двумя последовательными корнями a_n и a_{n+1} уравнения $f(x) = 0$ находится корень производной $f'(x)$, а из второго равенства следует, что этот корень единственный.

Добавляю, что уравнение $f'(x) = 0$ не имеет мнимых корней; это доказывается следующим методом, которым мы обязаны исключительно одаренному итальянскому геометру Felix Chio, похищенному у науки преждевременной смертью.

В предыдущем уравнении:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum\left(\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n}\right),$$

полагаем $x = \alpha + i\beta$ и выделяем вещественную часть и коэфициент при i:

$$\frac{f'(\alpha + i\beta)}{f(\alpha + i\beta)} = \sum\left[\frac{\alpha - a}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2} + \frac{1}{a_n}\right] - i\beta \frac{1}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2}.$$

Непосредственно получаем условие:

$$\beta \sum \frac{1}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2} = 0,$$

которое удовлетворяется только когда $\beta = 0$, так как все члены ряда положительны.

Лагерр показал затем, что если у голоморфной функции одного из двух первых родов все корни вещественны, производная ее принадлежит обязательно одному из этих же родов. Действительно, при этом условии ряд $\sum \frac{1}{\operatorname{mod}^2 a}$ сходящийся; корни же производной заключены между корнями функции; очевидно, аналогичный ряд, относящийся к корням производной, также сходящийся и, следовательно, $f'(x)$ — функция нулевого или первого рода. [1]

---

[1] См. т. 99 „Comptes-rendus" две статьи: одна из них Лагерра (Laguerre) о виде некоторых целых функций, стр. 79, — и вторая М. Чезаро (Cesaro), — о голоморфных функциях некоторого рода, стр. 26.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Приложение теоремы Неймана о голоморфных функциях к доказательству равенства

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-k^2x^2y^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Исследование не голоморфных однозначных функций, когда они имеют разрывы только в конечных изолированных точках. — Выражение их в явном виде на ограниченной части плоскости. — Понятие о полюсах и особых точках. — Выражение функций на всей плоскости по теореме Миттаг-Леффлера. — Другой вид для случая, когда существуют только полярные разрывы.

Предыдущие исследования обнаружили сразу и сходство и различие в основных свойствах трансцендентных голоморфных функций и простых полиномов.

Прежде чем приступать к изучению однозначных функций, которые не являются голоморфными, я сделаю еще замечание по поводу элементарной теоремы, по которой два полинома степени n, равные для $n+1$ значений переменной, тождественны. Теорема, касающаяся трансцендентных функций, которую можно с нею сравнивать, состоит в том, что две голоморфные функции U и V, равные во всех точках линии, конечной и сколь угодно малой длины, также тождественны; это утверждение — частный случай важной теоремы Римана, которою мы займемся позже; мы получаем непосредственно его доказательство, заметив, что разность $U-V$, равная нулю вдоль линии, обязательно равна нулю во всей плоскости, как это было доказано Нейманом. Эта теорема имеет место и для функций, голоморфных только в некоторой части плоскости; эта теорема приводит таким образом к важным следствиям, которые я вкратце изложу. Мы видели в предыдущей лекции, что

$$\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2}$$

дает распространение на мнимые значения z функции $\operatorname{arctg} x$, который геометрически определен только для вещественных значений переменной; спрашивается, следовательно, можно ли такое распространение выполнить единственным способом.

Вообразим себе две кривые (рис. 43 bis), заключающие в своих бесконечных ветвях неограниченные отрезки AM и $A'M'$ оси y, которые являются разрезами интеграла, если считать $AM = A'M' = 1$.

Эти линии отделяют две области плоскости, вне которых интеграл однозначная и голоморфная функция. К этому последнему пространству теорема Римана применима, и она указывает, следовательно, что не существует другого выражения, имеющего аналитические свойства голоморфной функции и равного $\operatorname{arctg} x$ в области вещественных значений. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+zt},$$

который дал распространение $\ln(1+x)$, приведет нас к такому же заключению, если мы отделим разрез, который будет при этом отрицательной частью оси x, отстоящей от начала на расстоянии $OB=1$. Заметим, наконец, что кривые, заключающие разрезы, могут быть приведены к системе двух параллельных прямых, бесконечно близких и связанных бесконечно малым контуром, идущим вокруг точек A, A' и B. Эти результаты обнаруживают уже в достаточной мере важность теоремы Римана, но, чтобы освоиться с только что приведенными соображениями, я укажу еще следующее применение этой теоремы, которым я обязан сообщению Лагерра.

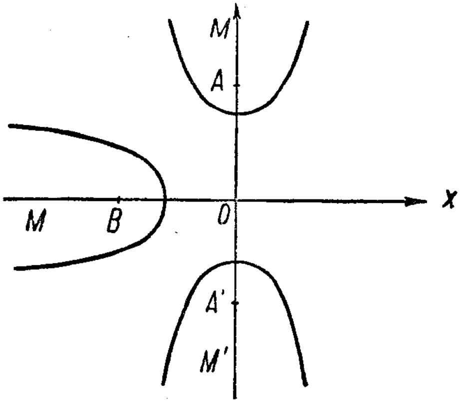

Рис. 43 bis.

Рассматриваем определенный интеграл:

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

как функцию от k^2. Для всех тех значений этого количества, как вещественных, так и мнимых, модуль которых меньше единицы, если переменная x пробегает интервал, заключенный между нулем и единицей, может быть применен для вычисления интеграла ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}=1+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4x^4+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}k^{2n}x^{2n}+\ldots;$$

при помощи него мы получаем следующее выражение:

$$K=\sum\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}k^{2n}\int_0^1\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если мы теперь используем значение, найденное на стр. 101

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}$$

то получим:

$$K = \frac{\pi}{2}\sum\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right)^2 k^{2n};$$

этим выражением K пользуются в теории эллиптических функций.

Установив это, Лагерр сделал важное замечание, что двойной интеграл

$$J = \int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-k^2x^2y^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

приводит к тому же ряду, умноженному на $\frac{\pi}{2}$. Действительно, разлагая дробь $\frac{1}{1-k^2x^2y^2}$ по степеням k^2, получаем:

$$J = \sum\int_0^1\int_0^1 \frac{k^{2n}\,x^{2n}\,y^{2n}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,dx\,dy$$

и так как очевидно

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{2n}\,y^{2n}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

непосредственно получаем высказанный результат:

$$J = \frac{\pi}{2}K.$$

Установив это, мы распространяем следующим образом это соотношение на любые значения k^2.

Рассмотрим условия $1-k^2x^2=0$ и $1-k^2x^2y^2=0$, которые определяют точки разветвления радикала $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, и те точки, в которых функция двух переменных, входящая в двойной интеграл, становится бесконечной. Так как переменные x и y пробегают интервал, заключенный между нулем и единицей, значения k^2 изображаются в обоих случаях всей положительной частью оси x, отсчитанной от начала с расстояния, равного единице.

Установив это, выделяем, как и раньше, на плоскости неограниченную площадь таким образом, чтобы она заключала в себе эту прямую. Во всем остающемся пространстве, количества J и $\frac{\pi}{2}K$, по теореме Римана, будут однозначными, голоморфными функциями от k^2, равными между собой, потому что, как было доказано, они равны на ограниченном отрезке.

Мы подходим теперь к изучению однозначных функций $f(z)$, имеющих конечное или бесконечное число разрывов. Поставим необходимым условием, что эти разрывы будут иметь место только для отдельных точек, отделенных друг от друга конечными интервалами, и обозначим через S замкнутый контур, содержащий любое число этих точек, имеющих аффиксами количества a, b, c, ... При таком условии интеграл Коши

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

взятый по контуру S, дает самым простым способом, как это изложил при защите на докторскую степень Бургэ, аналитическое выражение $f(x)$ для каждой точки внутри области, ограниченной этой кривой.

Выделяем сначала разрывы выражения $\frac{f(z)}{z-x}$, окружая a, b, c, ... и x бесконечно малыми кривыми, например, окружностями, имеющими своими центрами эти точки. Интеграл

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

взятый по контуру площади, ограниченной внешней кривой, и по всем этим окружностям, будет равен нулю, потому что на этой площади выражение $\frac{f(z)}{z-x}$ непрерывно. Таким образом, применяя ранее введенное обозначение, имеем соотношение:

$$(S)-(a)-(b)\ldots-(x)=0,$$

в котором для каждого из интегралов контуры описаны в прямом направлении по отношению к площади, которую они окружают.

Найдем эти интегралы и выражения, к которым они приводят.

Первый интеграл:

$$(S)=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

имеет, очевидно, единственное конечное значение, которое непрерывно изменяется вместе с x, когда x описывает некоторый путь внутри S; следовательно, это есть голоморфная функция внутри площади, ограниченной контуром интегрирования: я обозначу ее через $\Phi(x)$. Переходя далее к (a), (b), (c), ... , рассмотрим один из них; пишем:

$$(a)=-\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{x-z},$$

где следует считать $z=a+\rho e^{it}$, причем ρ бесконечно мало и t возрастает от нуля до 2π.

Заменяем $\frac{1}{x-z}$ равным ему тождественно выражением:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{z-a}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{(x-a)^n(x-z)};$$

мы получим, таким образом, целый полином от $\frac{1}{x-a}$ степени n с дополнительным членом:

$$J=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{(z-a)^n f(z)\,dz}{(x-a)^n(x-z)}.$$

Установив это, я пользуюсь выражением:

$$J=\lambda\rho\,\frac{(\zeta-a)^n f(\zeta)}{(x-a)^n(x-\zeta)},$$

в котором ζ — аффикс некоторой точки контура интегрирования. Модуль $\zeta-a$, будучи равным ρ, бесконечно малая величина, и множитель $\left(\frac{\zeta-a}{x-a}\right)^n$ может быть сделан меньше любой заданной величины, а это указывает на то, что дополнительный член J имеет своим пределом нуль. Мы получаем, следовательно, для рассматриваемого интеграла ряд, расположенный по степеням $\frac{1}{x-a}$ без постоянного члена и сходящийся во всей плоскости.

Обозначу этот ряд через $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$; таким образом, мы получим: $(a)=-G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ и подобным образом $(b)=-G_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$ и т. д.; присоединяя затем к этим результатам известное уже значение интеграла, обозначенного через (x), равное $f(x)$, имеем соотношение:

$$(S)-(a)-(b)-\ldots-(x)=0,$$

которое дает следующее:

$$\Phi(x)+G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)+G_b\left(\frac{1}{x-b}\right)+\ldots-f(x)=0.$$

Получаем отсюда

$$f(x)=\Phi(x)+G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)+G_b\left(\frac{1}{x-b}\right)+\ldots,$$

что дает для функций в области, ограниченной контуром S, выражение, совершенно аналогичное с тем, которое мы имеем для рациональной дроби, разложенной на простые дроби; последнее выражение выявляет разрывы, которые функция претерпевает в рассматриваемой области.

В частности, когда площадь содержит только одну точку разрыва, мы имеем следующую важную формулу:

$$f(x)=\Phi(x)+G_a\left(\frac{1}{x-a}\right);$$

она позволяет, как мы покажем, изучать особенности, которые обнаруживает функция, когда мы считаем x близким к a.

Заметим по этому поводу, что функция G_a может быть полиномом или бесконечным рядом. Когда G_a есть полином от $\frac{1}{x-a}$, мы говорим, что точка a есть полюс функции $f(x)$, но когда $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ трансцендентная функция от $\frac{1}{x-a}$, т. е. бесконечный ряд, то точка a называется существенно особой точкой.

Пусть сначала:

$$G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m};$$

из этого заключаем, что при $x-a$, стремящемся к нулю, $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ увеличивается безгранично. Так как голоморфная часть выражения функции $f(x)$ существенно конечна, то функция становится вблизи полюса по модулю больше любой заданной величины.

Прибавим кроме того, что произведение $f(x)$ на $(x-a)^m$ конечно при $x=a$ и допускает разложение в рассматриваемой области в ряд Тейлора по степеням $x-a$. Полагая, следовательно, $(x-a)^m f(x)=F(x)$, получаем:

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{(x-a)^m}{F(x)}$$

и мы видим, что величина, обратная $f(x)$, исчезает при $x=a$.

Мы покажем затем, что вблизи особой точки функция совершенно неопределенна и может принимать любое, произвольно взятое, значение, за исключением, может быть, только одного.

В самом деле, если имеем трансцендентную и голоморфную функцию $G_a(z)$, мы знаем из упомянутых выше теорем Пикара, что уравнение $G_a(z)=\alpha+i\beta$ допускает всегда бесконечное число корней $z=z_n$, если только правая часть его не имеет некоторого, не более одного, значения.

Мы знаем также, что эти корни представлены изолированными точками, отделенными конечными интервалами; отсюда вытекает, что модуль z_n возрастает беспредельно. При наличии этого, соотношение $\frac{1}{x-a}=z_n$ дает:

$$x=a+\frac{1}{z_n},$$

что доказывает, что вблизи особой точки функция $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, а следовательно, и рассматриваемая функция может принимать любое заданное значение, исключая, может быть, одного.

Возвращаясь, для большей ясности, к мемуару Picard'a (Annales de l'École Normale, 1880), мы поясним изложенное выше на примере.

Рассмотрим функцию:

$$e^{\frac{1}{x-a}}=1+\frac{1}{1}\,\frac{1}{x-a}+\frac{1}{1\cdot2}\,\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\,\frac{1}{(x-a)^3}+\ldots;$$

я утверждаю, что, если $\alpha + i\beta$ произвольное число, можно найти такое, сколь угодно малое $\xi + i\eta$ значение разности $x - a$, что

$$e^{\frac{1}{\xi + i\eta}} = \alpha + i\beta.$$

Пусть, в самом деле:

$$\alpha + i\beta = e^{p+iq};$$

предыдущее уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{\xi + i\eta} = p + iq = \frac{p^2 + q^2}{p - iq},$$

из которого вытекает:

$$\xi = \frac{p}{p^2 + q^2}, \qquad \eta = -\frac{q}{p^2 + q^2}.$$

Кажется, таким образом, что ξ и η будут вполне определены; но предлагаемое уравнение удовлетворяется и тогда, когда мы в нем q заменим через $q + 2k\pi$, где k произвольное целое число, так как степенная функция допускает период $2i\pi$; q может, таким образом, увеличиваться беспредельно и, следовательно, ξ и η могут быть сделаны сколь угодно малыми. Значит функция $e^{\frac{1}{x-a}}$ вполне неопределенна вблизи точки a.

Я укажу, кроме того, характерную разницу между полюсами и особыми точками; если мы рассмотрим вместо предлагаемой функции обратную ей, то мы увидим, что полюс обращается в нуль, тогда как особая точка остается особой точкой, и обратная функция остается вблизи особой точки столь же неопределенной, как и сама функция.

Зададимся теперь целью получить общее аналитическое выражение изучаемых нами однозначных функций; рассмотрим сначала случай, впервые изученный Вейерштрассом, когда имеется конечное число разрывов. Результат, полученный знаменитым геометром, является следствием равенства:

$$f(x) = \Phi(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots,$$

установленного выше в предположении, что все разрывы содержатся внутри контура S. Действительно, ясно, что, увеличивая бесконечно контур, мы расширяем безгранично область, в которой $\Phi(x)$ голоморфна. Обозначая затем эту функцию через $G(x)$, мы получаем для всей плоскости формулу Вейерштрасса

$$f(x) = G(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots.$$

Выводом выражения однозначной функции для случая бесконечного числа разрывов мы обязаны Миттаг-Леффлеру; чтобы получить это выражение, мы будем придерживаться того же метода, который привел ученого геометра к его изящному открытию. Этот метод, данный Вейерштрассом для случая полярных разрывов, может быть легко применен, как заметил Миттаг-Леффлер, к функциям, которые допускают особые точки. Упомянутый метод имеет большое значение и с успехом применялся Пуанкарэ и Аппелем в чрезвычайно интересных и глубоких исследованиях, касающихся функций нескольких переменных.[1]

Пусть a_1, a_2, ... a_n, ... аффиксы точек разрыва однозначной функции $f(x)$, причем:

$$\operatorname{mod} a_1 < \operatorname{mod} a_2 < \ldots < \operatorname{mod} a_n \ldots,$$

и допустим, что модуль a_n беспредельно увеличивается вместе с n. Пусть, кроме того, $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ полученное выше выражение интеграла

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

взятого по окружности с бесконечно малым радиусом и с центром в a_n. Разлагая G_n по формуле Маклорена по степеням переменной, положим:

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}x + \ldots + A_\nu^{(n)}x^\nu + R_\nu,$$

где R_ν — остаточный член ряда; или для краткости:

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = F_n(x) + R_\nu.$$

Известно, что для заданного значения x, не превышающего по модулю $\operatorname{mod} a_n$, мы можем взять достаточное число членов разложения, т. е. определить ν так, чтобы остаточный член был бы меньше любой данной величины. Установив это, обозначим, следуя Вейерштрассу, через ε_1, ε_2, ... ε_n ... такие положительные числа, чтобы ряд $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ был сходящимся; распорядимся степенями полиномов $F_n(x)$ так, чтобы было:

$$\operatorname{mod}\left[G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) - F_1(x)\right] < \varepsilon_1,$$

считая, что $\operatorname{mod} x < \operatorname{mod} a_1$; далее

$$\operatorname{mod}\left[G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) - F_2(x)\right] < \varepsilon_2$$

при условии, что $\operatorname{mod} x < \operatorname{mod} a_2$ и вообще:

$$\operatorname{mod}\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - F_n(x)\right] < \varepsilon_n,$$

---

[1] Poincaré, Sur les fonctions de deux variables; Acta mathematica, T. II. Appel, Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'equation $\Delta F = 0$, id. T. IV.

См. также в „Annali di Mathematica", T. X, мемуар Casorati, Aggiunte a recenti lavori da Signor Weierstrass e Mittag-Leffler, sulle funzioni di una variable complessa.

если $\mathrm{mod}\, x < \mathrm{mod}\, a_n$. Имея эти данные, составим ряд:

$$\sum\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-F_n(x)\right]; \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

утверждаем, что он представляет аналитическую функцию переменной, конечную во всей плоскости, исключая точки разрыва. Допустив, в самом деле, что модуль a_n увеличивается безгранично вместе с n, мы можем для любого x поставить условие, что $\mathrm{mod}\, x < \mathrm{mod}\, a_n$. Вследствие этого выделяем первые $n-1$ членов, сумма которых конечна, и замечаем, что последующие имеют модули меньшие ε_n, ε_{n+1}, ε_{n+2} ... и т. д., если $\mathrm{mod}\, x < \mathrm{mod}\, a_n$, $\mathrm{mod}\, x < \mathrm{mod}\, a_{n+1}$ и т. д., что соблюдено для данного значения переменной. Эта вторая часть ряда, следовательно, будет конечной, как и первая, так как, по предположению, ряд $\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_{n+2}+\ldots$ сходящийся.

Установив это, я напомню, что в части плоскости, ограниченной контуром S и содержащей одну точку разрыва $x=a_n$, функция $f(x)$ выражается следующей формулой:

$$f(x)=\Phi(x)+G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right).$$

Имеем, следовательно:

$$f(x)-G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)=\Phi(x)$$

и видим, что, отняв от функции количество $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, мы уничтожим этот разрыв, так как $\Phi(x)$, как мы доказали, голоморфная функция внутри S. То же самое получим, если возьмем $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-F_n(x)$ вместо $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, отсюда заключаем, что разность:

$$f(x)-\sum\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-F_n(x)\right]$$

не имеет больше никаких разрывов и представляет функцию $G(x)$, голоморфную во всей плоскости; таким образом, мы приходим к общему выражению однозначных функций, впервые полученному Миттаг-Леффлером:

$$f(x)=G(x)+\sum\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-F_n(x)\right].$$

Чтобы пояснить изложенное выше, не бесполезно будет привести пример на определение степеней полиномов $F_n(z)$, рассмотрим для этого случай, когда имеем просто:

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)=\frac{A_n}{x-a_n},$$

что дает:

$$F_n(x) = -A_n\left[\frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x^{\nu-1}}{a_n^{\nu}}\right]$$

и, следовательно:

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - F_n(x) = \frac{A_n x^{\nu}}{a_n^{\nu}(x-a_n)}.$$

Мы уже видели, при установлении понятия первичных множителей (стр. 114), что ряд $\sum \frac{x^{\nu}}{a_n^{\nu}(x-a_n)}$ становится сходящимся во всей плоскости, если мы примем $\nu = n - 1$ при любом a_n. Мы будем рассматривать теперь задачу, совершенно подобную этой, и пользуясь аналогичным приемом. Положим для этого:

$$\mathrm{mod}\, A_n = [\mathrm{mod}\, a_n]^{\lambda_n};$$

модуль общего члена примет вид:

$$U_n = \frac{(\mathrm{mod}\, x)^{\nu}}{(\mathrm{mod}\, a_n)^{\nu-\lambda_n}} \frac{1}{\mathrm{mod}\,(x-a_n)}$$

и наша задача будет заключаться в определении ν через n так, чтобы предел $U_n^{\frac{1}{n}}$ для n бесконечно большого был бы меньше единицы.

Заметим сначала, что при бесконечном возрастании модуля a_n предел $[\mathrm{mod}\,(x-a_n)]^{\frac{1}{n}}$ не меньше единицы; мы можем, следовательно, рассматривать вместо U_n более простое выражение

$$U_n = \frac{(\mathrm{mod}\, x)^{\nu}}{(\mathrm{mod}\, a_n)^{\nu-\lambda_n}}.$$

Различаем два случая, смотря по тому, имеет ли λ_n значение отрицательное, нулевое или положительное; в первом случае пишем $\lambda_n = -\sigma_n$; разбиваем рассматриваемый ряд на два следующих:

$$S = \sum \frac{(\mathrm{mod}\, x)^{\nu}}{(\mathrm{mod}\, a_n)^{\nu+\sigma_n}}; \quad S_1 = \sum \frac{(\mathrm{mod}\, x)^{\nu}}{(\mathrm{mod}\, a_n)^{\nu-\lambda_n}}.$$

Положив $\nu = n$, мы видим, что ряд S становится сходящимся и выражение:

$$U_n^{\frac{1}{n}} = \frac{\mathrm{mod}\, x}{(\mathrm{mod}\, a_n)^{1+\frac{\sigma_n}{n}}}$$

при бесконечно большом n имеет пределом нуль.

Во втором случае мы примем:

$$\nu = n + 2\lambda_n,$$

что дает:

$$U_n = \left(\frac{\operatorname{mod} x}{\operatorname{mod} a_n}\right)^n \left(\frac{\operatorname{mod} x^2}{\operatorname{mod} a_n}\right)^{\lambda_n},$$

откуда:

$$U_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\operatorname{mod} x}{\operatorname{mod} a_n}\right) \left(\frac{\operatorname{mod} x^2}{\operatorname{mod} a_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}}$$

и это выражение для бесконечно большого n также равно нулю. Действительно, множитель $\frac{\operatorname{mod} x^2}{\operatorname{mod} a_n}$, возведенный в положительную степень $\frac{\lambda_n}{n}$, бесконечно убывает; следовательно, эта степень не может иметь предела, большего единицы; $\frac{\operatorname{mod} x}{\operatorname{mod} a_n}$ имеет пределом нуль. Полученное таким образом определение чисел ν является более простым, чем то, которое было дано во 2-м издании этого курса (стр. 85). Этот вывод дал Camille Jordan в Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, т. II, стр. 321.

Заметим, наконец, что полином $F_n(x)$, также как и $G(x)$, имеет не единственное определение. Действительно, обозначив через $\Phi(x), \ldots$ $\ldots \Phi_n(x) \ldots$ полиномы, сумма которых голоморфная функция $\Phi(x)$, мы снова получим для выражения $f(x)$ формулу:

$$f(x) = G(x) + \Phi(x) + \sum \left[G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) - F_n(x) - \Phi_n(x)\right].$$

После того, как мы доказали теорему Миттаг-Леффлера и установили таким образом общее аналитическое выражение для однозначных функций, нам остается еще дать специальный вывод для случая, в котором рассматриваемая функция имеет разрывы только в полюсах.

Пусть a_1, a_2, ... полюса функции $f(x)$, которые мы считаем расположенными в порядке возрастания их модулей. Мы видели, что аналитическое свойство полюса $x = a$ заключается в том, что существует такое целое и положительное число n, что произведение $(x - a)^n f(x)$ остается конечным при $x = a$. Строим голоморфную во всей плоскости функцию $G(x)$, которая обращается в нуль для значений $x = a_1, a_2, \ldots$ и принимаем, что кратности ее первичных множителей равны порядкам полюсов функции $f(x)$. Произведение $G(x) f(x)$ уже не будет иметь разрывов; следовательно, оно будет голоморфной функцией $G_1(x)$ и мы получим:

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G(x)}.$$

Таким образом, мы доказали, что однозначная функция, допускающая только полярные разрывы, может быть представлена в виде частного двух функций, голоморфных во всей плоскости.

Для более полного изучения однозначных функций, мы отсылаем к знаменитому мемуару Вейерштрасса, на который мы уже ссылались выше, также, как и к более новой работе Миттаг-Леффлера, озаглавленной: Sur la représentation analytique des fonctions, monogènes uniformes d'une variable (Acta Mathematica, т. III); сейчас же сделаем последнее замечание об этом важном вопросе.

Рассматриваем голоморфную функцию $G(x)$ и заменяем переменную обратной ей. В том случае, когда $G(x)$ есть полином степени n, функция $G\left(\frac{1}{x}\right)$ имеет полюсом порядка n точку $x=0$. Но если положим, что $G(x)$ — функция трансцендентная и представлена бесконечным рядом, расположенным по возрастающим степеням переменной, точка $x=0$ по отношению к $G\left(\frac{1}{x}\right)$ будет особой точкой. Мы приходим таким образом к заключению, что следует считать бесконечность особой точкой для $G(x)$ и таким образом установить различие между трансцендентными голоморфными функциями и алгебраическими полиномами. Я должен был дать это аналитическое понятие, которым теперь постоянно пользуются.

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Приложение теоремы Миттаг-Леффлера к функции $\operatorname{ctg} x$; выражения $\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi}$ и $\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi}$ в виде произведения первичных множителей. — Определение чисел Бернулли. — Доказательство по методу Пикара теоремы Римана: две однозначных функции, совпадающие вдоль линии конечной длины, тождественны. — Доказательство теоремы Коши об интеграле от однозначной функции, взятом вдоль замкнутого контура. — Определение вычетов и приложение теоремы о них.

Мы начнем приложения теоремы Миттаг-Леффлера с применения ее к функции $\operatorname{ctg} x$, выражение которой в виде бесконечного ряда простых дробей имеет важное значение в анализе. В этом случае разрывы будут простыми полюсами $x = n\pi$, где n — целое число, а выражения

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

дробями вида $\frac{A_n}{x-n\pi}$. Коэфициент A_n определяется согласно условию, по которому разность $\operatorname{ctg} x - \frac{A_n}{x-n\pi}$ остается конечной при $x = n\pi$; отсюда A_n есть предел $(x-n\pi)\operatorname{ctg} x$ или дроби $\frac{(x-n\pi)\cos x}{\sin x}$, когда $x = n\pi$, что дает $A_n = 1$.

Имея это, замечаем, что ряд:

$$\sum \frac{1}{x-n\pi}$$

расходящийся; мы должны, следовательно, прибегнуть к полиномам, обозначенным через $F_n(x)$; достаточно использовать первый член $-\frac{1}{n\pi}$ каждого из них, так как новый ряд:

$$\sum\left[\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right]=\sum\frac{x}{n\pi(x-n\pi)}$$

сходится, как $\sum\frac{1}{n^2}$. В результате, выделяя член $\frac{1}{x}$, имеем выражение:

$$\operatorname{ctg} x = G(x)+\frac{1}{x}+\sum\left[\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right]; \qquad n=(\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

в котором G — голоморфная функция, подлежащая определению. Для этого возвратимся к соотношению, которое было для нас исходной точкой при изучении однозначных функций, а именно:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f(x) - G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) - G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) - \ldots$$

Напомню, что интеграл, стоящий в левой части, относится к замкнутому контуру S, заключающему различные разрывы $f(x)$, обозначенные через a, b, ... и т. д., и мы видели, что он представляет внутри этого контура голоморфную функцию от x. Если мы предположим теперь, что при увеличении кривой S интеграл стремится к определенному пределу, например, к нулю, то мы получим для выражения функции ряд $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots$, распространенный на все разрывы, и который должен быть обязательно сходящимся. Установив это, полагаем $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$ и выбираем для контура интегрирования квадрат $ABCD$ (рис. 44), имеющий центром начало координат и стороны, параллельные осям. Пусть $AB = 2a$, выражениями z, представляющими последовательно отрезки AB, BC, CD, DA, будут:

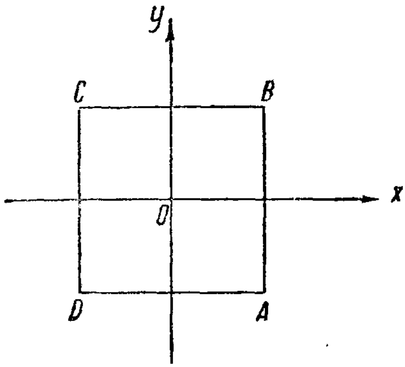

Рис. 44.

$$z = a + it; \quad z = ia - t; \quad z = -a - it; \quad z = -ia + t,$$

если в них t возрастает от $-a$ до $+a$. Интеграл $J = \int F(z)\,dz$ от некоторой функции $F(z)$, взятый по контуру квадрата в прямом направлении, представится, следовательно, выражением:

$$J = (AB) + (BC) + (CD) + (DA) = i\int\limits_{-a}^{+a} [F(a+it) - F(-a-it)]\,dt + \int\limits_{-a}^{+a} [F(-ia+t) - F(ia-t)]\,dt.$$

Применим теперь формулу Дарбу, выведенную на стр. 80; она дает, при обозначении через λ и λ' двух количеств, модуль которых не превышает единицы, и через t_0 и t_1 двух значений t, заключенных в пределах $-a$ и $+a$:

$$J = 2\lambda a\,[F(a+it_0)] - [F(-a-it_0)] + 2\lambda' a\,[F(t_1 - ia) - F(-t_1 + ia)].$$

Положив $F(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z(z-x)}$, мы будем иметь:

$$J=\frac{2\lambda a \operatorname{ctg}(a+it_0)}{a+it_0}\left[\frac{1}{a+it_0-x}+\frac{1}{a+it_0+x}\right]+$$
$$+\frac{2\lambda' a \operatorname{ctg}(t_1-ia)}{t_1-ia}\left[\frac{1}{t_1-ia-x}+\frac{1}{t_1-ia+x}\right].$$

На основании этого, полагая $a=m\pi+\frac{\pi}{2}$, где m целое число, убеждаемся, что $J=0$ для бесконечно большого m. Действительно, следующие формулы:

$$\operatorname{mod}^2 \operatorname{ctg}(a+it_0)=\frac{\cos 2it_0+\cos 2a}{\cos 2it_0-\cos 2a}, \quad \cos 2a=-1$$
$$\operatorname{mod}^2 \operatorname{ctg}(t_1-ia)=\frac{\cos 2ia+\cos 2t_1}{\cos 2ia-\cos 2t_1}$$

показывают, что первый модуль меньше единицы, и при возрастающих значениях a второй быстро стремится к единице; таким образом, остается только положить в тех дробях, в которых степень числителя относительно a меньше степени знаменателя, a бесконечно большим, чтобы получить указанный выше результат.

Установив это, образуем выражение $\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$, использовав его простые полюсы $x=n\pi$, которым соответствуют дроби $\frac{1}{n\pi(x-n\pi)}$, и пропустив тот, в котором $n=0$. Получаем в пропущенном случае двойной полюс, дающий, как легко видеть, член $\frac{1}{x^2}$; выделяя его, получаем формулу:

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{x}=\frac{1}{x^2}+\sum\frac{1}{n\pi(x-n\pi)}, \qquad (n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$$

откуда выводим:

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+\sum\frac{x}{n\pi(x-n\pi)}$$

или

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+\sum\left[\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right].$$

Это и есть результат, к которому мы стремились и который показывает, что функция, обозначенная выше через $G(x)$, равна нулю, как мы это и утверждали. Вот первое следствие, которое вытекает отсюда.

Переносим член $\frac{1}{x}$ в первую часть, умножаем на dx и интегрируем от $x=0$; находим:

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\sum\left[\ln\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)+\frac{x}{n\pi}\right]; \qquad (n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$$

вводя показательные функции и освобождаясь от знаменателя, получаем:

$$\sin x = x\Pi\left[\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right],$$

т. е. ту же формулу разложения $\sin\pi x$ на первичные множители, которую мы дали на стр. 110.

Мы можем следующим образом получить другое, более общее выражение, в котором первичные множители содержат произвольную постоянную.

В формуле, дающей $\operatorname{ctg} x$, заменяем x на $x+\xi$:

$$\operatorname{ctg}(x+\xi)=\frac{1}{x+\xi}+\sum\left[\frac{1}{x+\xi-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right].$$

Отнимаем затем почленно равенство:

$$\operatorname{ctg} a=\frac{1}{a}+\sum\left[\frac{1}{a-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right],$$

в котором a обозначает произвольную постоянную; в разности исчезает член $\frac{1}{n\pi}$ и мы можем написать, полагая $n=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots$,

$$\operatorname{ctg}(x+\xi)-\operatorname{ctg} a=\sum\left[\frac{1}{x+\xi-n\pi}-\frac{1}{a-n\pi}\right].$$

Отсюда получаем, если проинтегрируем от $x=0$:

$$\ln\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi}-x\operatorname{ctg} a=\sum\left[\ln\left(1+\frac{x}{\xi-n\pi}\right)-\frac{x}{a-n\pi}\right]$$

и, следовательно:

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi}=e^{x\operatorname{ctg} a}\,\Pi\left[\left(1+\frac{x}{\xi-n\pi}\right)e^{-\frac{x}{a-n\pi}}\right]\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots).$$

В этом виде разложения на первичные множители постоянная a может иметь любое значение; мы можем даже принять ее равной нулю. Для этого выделяем множитель, соответствующий $n=0$, т. е.

$$\left(1+\frac{x}{\xi}\right)e^{-\frac{x}{a}}.$$

Заметив далее, что разность $\operatorname{ctg} a-\frac{1}{a}$ равна нулю при $a=0$, мы получаем:

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi}=\left(1+\frac{x}{\xi}\right)\Pi\left[\left(1+\frac{x}{\xi-n\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right];\ (n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Полагая $\xi=\frac{\pi}{2}$, имеем отсюда:

$$\cos x=\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right],$$

то же выражение, которое было дано выше (стр. 119).

Заменяем затем ξ на $\xi+\frac{\pi}{2}$ и a на $a+\frac{\pi}{2}$; отсюда, полагая $m=2n-1$, находим:

$$\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi}=e^{-x\operatorname{tg}a}\Pi\left[\left(1+\frac{2x}{2\xi-m\pi}\right)e^{-\frac{2x}{2a-m\pi}}\right],$$

откуда при $\xi=0$ и $a=0$ получаем:

$$\cos x=\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{2x}{m\pi}}\right].$$

Тождественность обеих формул доказал, как известно, Вейер; мы приходим теперь к тому же заключению, обнаруживая, что они являются частными случаями одного и того же, более общего, выражения. Присоединим, наконец, следующие, легко получаемые соотношения:

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi}=\Pi\left[\left(1+\frac{x}{\xi-n\pi}\right)e^{-\frac{n\pi x}{a^2-n^2\pi^2}}\right]$$

$$\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi}=\Pi\left[\left(1+\frac{2x}{2\xi-m\pi}\right)e^{-\frac{2m\pi x}{4a^2-m^2\pi^2}}\right].$$

В качестве второго результата найдем разложение $\operatorname{ctg}x$ по возрастающим степеням x, играющее важную роль в анализе. Чтобы получить его, замечаем, что, соединяя в сумме $\sum\frac{x}{x(n-x)}$ члены, которые соответствуют целым значениям n, равным по величине, но обратным по знаку, мы получаем следующую новую формулу:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi x=\frac{1}{x}-\sum\frac{2x}{k^2-x^2}\qquad(k=1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

Имея это, рассматриваем элементарный ряд:

$$\frac{1}{k^2-x^2}=\frac{1}{k^2}+\frac{x^2}{k^4}+\ \ldots\ +\frac{x^{2n-2}}{k^{2n}}+\ \ldots,$$

который будет сходящимся для значения x, модуль которого меньше k, при условии, что $\operatorname{mod}x<1$; этот ряд может быть применен ко всем дробям, которые входят в сумму; полагая для сокращения:

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^{2n}}+\ \ldots,$$

мы непосредственно получаем искомое выражение:

$$\pi\operatorname{ctg}\pi x=\frac{1}{x}-2S_2x-2S_4x^3-\ \ldots\ -2S_{2n}x^{2n-1}-\ \ldots\ .$$

Но мы можем прямо притти к этому разложению посредством формулы Маклорена, применяя ее к функции $x \operatorname{ctg} x$, которая уже не содержит члена $\frac{1}{x}$.

Можно также исходить от частного:

$$x \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots}$$

и применить метод неопределенных коэфициентов, что будет более быстрым.

Пусть:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{B_1 (2x)^2}{2} - \frac{B_2 (2x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots - \frac{B_n (2x)^{2n}}{2 \cdot 3 \ldots 2n} - \ldots,$$

где постоянные B_1, B_2, ... будут так называемыми числами Бернулли; приравнивая члены, содержащие x^{2n} в обеих частях тождества:

$$x \cos x = \sin x \left[1 - \frac{B_1 (2x)^2}{2} - \frac{B_2 (2x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots - \frac{B_n (2x)^{2n}}{2 \cdot 3 \ldots 2n} - \ldots\right];$$

легко находим следующее соотношение, в котором $(2n+1)_i$ обозначает коэфициент при x^i в разложении $(1+x)^{2n+1}$, а именно:

$$4B_1 (2n+1)_2 - 4^2 B_2 (2n+1)_4 + 4^3 B_3 (2n+1)_6 \ldots -$$
$$- (-1)^n B_n (2n+1) = 2n.$$

Это соотношение определяет последовательно неизвестные коэфициенты, если полагать в нем $n = 1, 2, 3$ и т. д., и дает значения:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{66},$$
$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \ldots .$$

Заменяем теперь в предыдущем уравнении x на πx; имеем:

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - \frac{B_1 (2\pi x)^2}{2} - \frac{B_2 (2\pi x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots - \frac{B_n (2\pi x)^{2n}}{2 \cdot 3 \ldots 2n}$$

и так как с другой стороны:

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2S_2 x^2 - 2S_4 x^4 - \ldots - 2S_{2n} x^{2n} - \ldots$$

мы получаем важное и замечательное соотношение:

$$\frac{B_n (2\pi)^{2n}}{2 \cdot 3 \ldots 2n} = 2S_{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right).$$

Отсюда получаем выражение для чисел Бернулли, в виде определенных интегралов, применяя формулу:

$$\int_0^\infty x^{2n-2} \ln \frac{1}{1-e^{-x}}\, dx = \frac{B_n (2\pi)^{2n}}{4n(2n-1)},$$

которую мы сейчас докажем и которой воспользуемся позже.

Для этого исходим из разложения:

$$\ln \frac{1}{1-e^{-x}} = e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + \ldots = \sum \frac{e^{-kx}}{k} \quad (k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ ),$$

из которого получаем:

$$\int_0^\infty x^{2n-2} \ln \frac{1}{1-e^{-x}}\, dx = \sum \frac{1}{k} \int_0^\infty x^{2n-2} e^{-kx}\, dx.$$

Установив это и пользуясь знакомым равенством:

$$\int_0^\infty x^{2n-2} e^{-nx}\, dx = \frac{2 \cdot 3\ \ldots\ (2n-2)}{k^{2n-1}},$$

делаем вторую часть равной:

$$2 \cdot 3\ \ldots\ (2n-2) \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right)$$

и, следовательно:

$$\frac{B_n (2\pi)^{2n}}{4n(2n-1)},$$

что и требовалось доказать.

Не задерживаясь больше на числах Бернулли, изучение которых составляет предмет многочисленных и важных работ, я ограничусь указанием изящной теоремы, доказанной одновременно Клаузеном и Штаудтом, которая дает для этих чисел следующее выражение: обозначим через α, β, ... λ простые числа, удовлетворяющие условию, по которому $\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$, ... $\frac{\lambda-1}{2}$ делители значка n; имеем:

$$B_n = A_n + (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right),$$

где n есть целое число.

Таким образом, имеем в частности:

$$B_7 = \frac{7}{6} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

$$B_8 = \frac{3617}{510} = 6 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17}\right),$$

$$B_9 = \frac{43\,867}{798} = 56 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19}\right).$$

Штаудт дал доказательство своей теоремы в „Crelle's Journal" т. **21**, стр. 372, к которому я и отсылаю.

Возвращаясь теперь к общим исследованиям однозначных функций, я выведу, следуя Риману, теорему, которая выше была доказана для частного случая голоморфных функций.

Если две однозначных функции U и V, имеющие любое конечное или бесконечное число полюсов или существенно особых точек, совпадают вдоль некоторого элемента произвольно малой величины, то они будут обязательно тождественны.

Рассмотрим разность $U-V$; она будет однозначная функция, равная нулю вдоль данного элемента, следовательно, она будет равной нулю и для всех точек, расположенных внутри контура, не заключающего никаких точек разрыва U или V, так как внутри такого контура $U-V$ есть голоморфная функция. Увеличиваем этот контур, заставляя его проходить близ точки разрыва a функции U или V; я утверждаю, что этот разрыв, полярный или особый, должен обязательно исчезнуть в разности $U-V$. В самом деле, точка a не может быть полюсом для этой разности, так как на расстоянии, достаточно малом от такой точки, функция становится больше любой заданной величины, а мы доказали, что она будет равной нулю для всех точек, сколь угодно близких к a; и a не может быть особой точкой, так как вблизи такой точки однозначная функция делается абсолютно неопределенной. Следовательно, разность $U-V$ не допускает разрывов; она равна нулю на протяжении любого конечного элемента; следовательно, она равна нулю и во всей плоскости; это и требовалось доказать.

Теорема Римана показывает, что функция, заданная вдоль линии конечной длины, может быть распространена за пределы линии только единственным способом, — если мы введем условие, чтобы она была однозначной и имела разрывы только в изолированных точках. Мы можем таким образом сопоставить ее со следующей элементарной теоремой: *произвольно малый отрезок алгебраической кривой заданной степени вполне определяет ее на всем протяжении.*

Этим несложным доказательством, которое приводит, как мы это видим, теорему Римана к теореме Неймана, мы обязаны Пикару.

В теории однозначных функций нам остается еще доказать только теорему Коши, которая дает значение интеграла от такой функции, взятого вдоль некоторого замкнутого контура. С этой знаменитой теоремой связано в высшей степени важное в анализе понятие о вычете, которому она дает начало, и из которого Коши получил свои крайне изящные выводы.

Вот как мы к нему приходим:

Пусть $f(z)$ однозначная функция, S — замкнутый контур, содержащий разрывы $a, b, \ldots l$ этой функции. Отделяем каждую из точек a, $b, \ldots l$ некоторой замкнутой кривой, образуя таким образом площадь с несколькими контурами, внутри которой рассматриваемая функция конечна и непрерывна. Получаем, согласно уже применявшемуся обозначению, соотношение:

$$(S)-(a)-(b) \ldots -(l)=0$$

и следовательно:

$$(S) = (a) + (b) + \ldots + (l).$$

Установив это, рассматриваем интеграл (a) и замечаем, что если функция имеет внутри контура интегрирования один разрыв, мы имеем для этого контура выражение:

$$f(z) = \Phi(z) + G_a\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

в котором $\Phi(z)$, как мы видели, представляет голоморфную функцию. Нам остается только найти интеграл от второго члена; мы можем, пользуясь свойством функции G_a, представить ее в виде:

$$G_a\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{A}{z-a} + H_a'\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

обозначая через $H_a'\left(\frac{1}{z-a}\right)$ производную от голоморфной функции от $\frac{1}{x-a}$. Следовательно, рассматриваемый интеграл мы получим, выполняя выкладки над дробью $\frac{A}{z-a}$; получаем:

$$(a) = 2i\pi A.$$

Постоянная A представляет то, что Коши называет вычетом функции $f(z)$ относительно точки $z = a$, в которой функция разрывна; таким же образом, мы будем иметь:

$$(b) = 2i\pi B,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(l) = 2i\pi L,$$

и теорема, которую требовалось установить, заключается в равенстве:

$$(S) = 2i\pi(A + B + \ldots + L).$$

Вычеты $A, B, \ldots L$, которые фигурируют в выражении интеграла (S), даются, таким образом, как коэфициенты членов

$$\frac{1}{x-a}, \frac{1}{x-b}, \ldots \frac{1}{x-l}$$

в различных функциях

$$G_a\left(\frac{1}{x-a}\right), \quad G_b\left(\frac{1}{x-b}\right), \ldots G_l\left(\frac{1}{x-l}\right).$$

Коши дает им еще другое определение, говоря, что вычет $f(z)$, соответствующий разрыву $z = a$, равен коэфициенту при $\frac{1}{h}$ в разложении $f(a+h)$, расположенном по возрастающим и убывающим степеням этого количества. Действительно, возвращаясь к выражению функции в области точки a:

$$f(z)=\Phi(z)+G_a\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

получаем:

$$f(a+h)=\Phi(a+h)+G_a\left(\frac{1}{h}\right)$$

и видим, что первый член $\Phi(a+h)$ дает один ряд целый относительно h, а второй ряд целый относительно $\frac{1}{h}$, первый член которого равен $\frac{A}{h}$.

Предположим, например, что $f(z)$ будет частное двух голоморфных функций, и пусть:

$$f(z)=\frac{F(z)}{G(z)}.$$

Вычет, соответствующий простому корню $z=a$ уравнения $G(z)=0$, будет коэфициентом при $\frac{1}{h}$ в разложении выражения:

$$f(a+h)=\frac{F(a)+hF'(a)+\ldots}{hG'(a)+\frac{h^2}{2}G''(a)+\ldots},$$

что дает непосредственно: $A=\frac{F(a)}{G'(a)}$. Полагая затем, что $z=a$ будет двойным корнем и $G'(a)=0$, находим:

$$A=\frac{6F'(a)G''(a)-2F(a)G'''(a)}{3G''^2(a)};$$

наконец, в случае функции:

$$f(z)=\frac{F(a)}{G^2(z)}$$

и для простого корня уравнения $G(z)=0$, являющегося двойным полюсом функции, вычет равен:

$$A=\frac{F'(a)G'(a)-F(a)G''(a)}{G'^3(a)}.$$

Применения этой теоремы в дальнейшем будут иметь целью дать возможность освоиться с этим понятием вычетов, которым постоянно пользуются в анализе.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Приложения теоремы Коши. — Интегралы от рациональных дробей в пределах $-\infty$ до $+\infty$. — Выражения полиномов Лежандра через определенные интегралы. — Теорема Валлиса. — Нахождение интегралов $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{(1-a)x}}{1-e^x}\,dx$ и т. д. — Разложение на простые элементы рациональных функций $\sin x$, $\cos x$ и т. д.

Нашим первым применением теоремы Коши, представленной соотношением:

$$\int\limits_S f(z)\,dz = 2i\pi(A+B+\ldots+L),$$

будет нахождение определенного интеграла $J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, в котором $f(t)$ рациональная дробь $\frac{F(t)}{G(t)}$, при условии, что знаменатель ее не имеет вещественных корней и степень его, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя. Берем за контур S полукруг AMB (рис. 45) радиуса R и с центром в начале координат и диаметр AB; имеем:

$$(S)=(AMB)+(BA).$$

Положив $z=Re^{it}$, получаем:

$$(AMB)=\int\limits_0^\pi f(Re^{it})\,iRe^{it}dt.$$

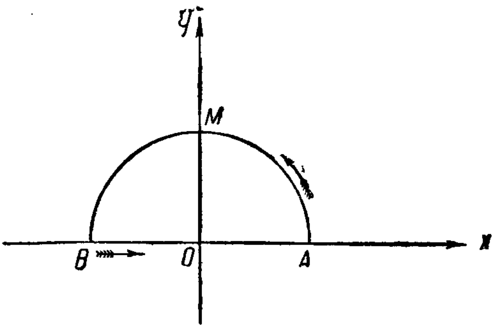

Рис. 45.

Что же касается второго интеграла (BA), то это прямолинейный интеграл: $\int\limits_{-R}^{+R} f(t)\,dt$, который при бесконечном радиусе дает искомое значение.

Пусть $\sum$ сумма вычетов $f(t)$ по полюсам, расположенным внутри полукруга AMB; получим:

$$\int\limits_0^\pi f(Re^{it})\,iRe^{it}dt+\int\limits_{-R}^{+R} f(t)\,dt = 2i\pi\sum.$$

Заставим теперь R беспредельно возрастать; в той части плоскости, которая вне круга, содержащего внутри все разрывы, по теореме Лорана (стр. 107) получаем:

$$f(z)=\frac{B_0}{z}+\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{z^3}+\ldots+\Phi(z).$$

Но мы предполагаем, что функция не имеет целой части и степень числителя на две единицы меньше степени знаменателя; поэтому $\Phi(z)$ и коэфициент B_0 равны нулю. Отсюда вытекает, что интеграл $\int\limits_0^{\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it}dt$ стремится к нулю, когда R беспредельно увеличивается. Мы получаем, следовательно, при бесконечном $R: J=2i\pi\sum$, обозначая через $\sum$ сумму вычетов по всем полюсам $f(z)$, расположенным выше Ox.

Этот интеграл позволяет сделать следующее замечание.

Изменяем переменную, заменив t на $at+a'$, где a и a' — постоянные; очевидно, получаем:

$$J=a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(at+a')}{G(at+a')}dt$$

или:

$$J=-a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(at+a')}{G(at+a')}dt,$$

в зависимости от того, положительно или отрицательно число a.

Подставим затем $\frac{b}{t}$ на место t и для этого разобьем интеграл, как мы это уже сделали на стр. 22, а именно, положим:

$$J=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{F(t)}{G(t)}dt+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}dt.$$

Предполагая b положительным, будем иметь:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{F(t)}{G(t)}dt=-b\int\limits_{0}^{-\infty}\frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2G\left(\frac{b}{t}\right)}dt=b\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2G\left(\frac{b}{t}\right)}dt$$

и аналогично:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}dt=b\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2G\left(\frac{b}{t}\right)}dt;$$

складывая, получаем:

$$J=b\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2G\left(\frac{b}{t}\right)}dt;$$

а если b отрицательно, то:

$$J=-b\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2G\left(\frac{b}{t}\right)}dt.$$

Установив это, заменяем переменную t на $\frac{k}{t+h}+l$, где h, k, l — некоторые постоянные; предыдущие выводы указывают, что, обозначив $+1$ или -1 в зависимости отт ого, положительно или отрицательно k, через ε мы получим:

$$J=\varepsilon k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F\left(\frac{k}{t+h}+l\right)}{(t+h)^2G\left(\frac{k}{t+h}+l\right)}dt.$$

Подставив, наконец, gt вместо t, будем иметь

$$J=\varepsilon\varepsilon' gk\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F\left(\frac{k}{gt+h}+l\right)}{(gt+h)^2G\left(\frac{k}{gt+h}+l\right)}dt,$$

где ε' будет $+1$ или -1, смотря по тому, положительно или отрицательно g. Этот результат можно записать в более простом виде, который сделает очевидным вывод, к которому мы стремимся. Пусть сначала:

$$\frac{k}{gt+h}+l=\frac{g't+h'}{gt+h},$$

легко находим:

$$gk=gh'-g'h;$$

мы видим также, что за исключением случая, когда g равно нулю, $\varepsilon\varepsilon'$ имеет знак определителя $gh'-g'h$.

Пусть, дальше, n и $n-2$ степени $G(t)$ и $F(t)$; мы положим:

$$(gt+h)^nG\left(\frac{g't+h'}{gt+h}\right)=G_1(t),$$

$$(gt+h)^{n-2}F\left(\frac{g't+h'}{gt+h}\right)=F_1(t).$$

Выражение J принимает вид:

$$J = \varepsilon\varepsilon'(gh' - g'h)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_1(t)}{G_1(t)}\,dt,$$

и мы замечаем, что квадрат его есть общий инвариант полиномов $F(t)$ и $G(t)$. Таким образом, в частном случае, когда $G(t) = At^2 + 2Bt + C$ и $F(t) = 1$, интеграл есть функция от $AC - B^2$. Пусть $J = \varphi(AC - B^2)$; положив $A = C$ и $B = 0$, будем иметь:

$$\varphi(A^2) = \frac{1}{A}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{A},$$

откуда получаем:

$$J = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Возвратимся к равенству:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{G(t)}\,dt = 2i\pi\sum;$$

допустим, что уравнение $G(z) = 0$ имеет только один корень z_1, в котором коэфициент при i положителен. Если допустим, что этот корень простой, то его вычет равен $\frac{F(z_1)}{G'(z_1)}$ и мы получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{G(t)}\,dt = 2i\pi\frac{F(z_1)}{G'(z_1)},$$

что дает первый пример выражения определенным интегралом рациональной функции от корня алгебраического уравнения $G(z) = 0$.

Пусть в частности $G(z) = Az^2 + 2Bz + C$ и коэфициенты вещественны или мнимы; положив $D = AC - B^2$ и

$$z_1 = \frac{-B + \varepsilon i\sqrt{D}}{A}, \qquad z_2 = \frac{-B - \varepsilon i\sqrt{D}}{A},$$

где ε обозначает $+1$ или -1 и введен с целью определить знак радикала $\sqrt{D}$ таким образом, чтобы коэфициент при i был положителен в z_1 и, следовательно, отрицателен в z_2. Соотношение:

$$G'(z_1) = A(z_1 - z_0)$$

дает:

$$G'(z_1) = 2\varepsilon i\sqrt{D};$$

получаем, следовательно, с вполне определенным знаком:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2 + 2Bt + C} = \frac{\pi}{\varepsilon\sqrt{D}}$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{D}}.$$

Для случая, когда например, $B=0$, мы имеем интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{At^2+C}$ или $2\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{At^2+C}$, или же, если положим $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$:

$$2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{A+C-(A-C)\cos\varphi},$$

имеющий значением $\frac{+\pi}{\sqrt{AC}}$ или $\frac{-\pi}{\sqrt{AC}}$, в зависимости от коэфициента при i в $\frac{i\sqrt{AC}}{A}$ и, следовательно, в зависимости, от того, положителен или отрицателен вещественный член в $\frac{\sqrt{AC}}{A}$.

Применим этот результат, считая, что $A=x-a-\sqrt{x^2-1}$, $C=x-a+\sqrt{x^2-1}$, что дает $AC=1-2ax+a^2$.

Пусть x имеет любое мнимое значение, но положим при этом, что постоянная a будет бесконечно малой; тогда знак вещественной части в выражении $\frac{\sqrt{AC}}{A}$ будет определяться знаком вещественной части $x-\sqrt{x^2-1}$.

Положив, согласно с Гейне,

$$x-\sqrt{x^2-1}=\xi+i\eta,$$

будем иметь:

$$2x=\xi+i\eta+\frac{1}{\xi+i\eta}=$$

$$=\frac{\xi(1+\xi^2+\eta^2)}{\xi^2+\eta^2}-i\frac{\eta(1-\xi^2-\eta^2)}{\xi^2+\eta^2},$$

что указывает, что знак при ξ будет одинаков со знаком вещественной части x. Следовательно, в зависимости от того, положительна или отрицательна вещественная часть x, мы будем иметь:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{x-a+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}=+\frac{\pi}{\sqrt{1-2ax+a^2}} \text{ или } -\frac{\pi}{\sqrt{1-2ax+a^2}};$$

отсюда получается важное следствие.

Разложив обе части последнего равенства по возрастающим степеням α, мы получим, полагая:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+\alpha X_1+\ldots+\alpha^n X_n+\ldots$$

следующее выражение:

$$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

если вещественная часть переменной положительна; в противном же случае:

$$X_n=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}.$$

Положим затем $A=1-\alpha(x-\sqrt{x^2-1})$, $C=1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1})$, что дает снова $AC=1-2\alpha x+\alpha^2$; заметим, что при бесконечно малом α знак вещественной части отношения $\dfrac{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{1-\alpha(x-\sqrt{x^2-1})}$ уже не зависит от x; таким образом, каково бы ни было значение этой переменной мы всегда имеем:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)}=\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},$$

беря второй член со знаком $+$. Выражение Якоби

$$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi,$$

которое является следствием этой формулы, не дает никакого разрыва. Количество X_n, к которому мы пришли, есть целый полином от x степени n, и называется полиномом Лежандра; эти полиномы играют большую роль в анализе.

Первое из найденных для них выражений было дано Лапласом; заметим, что оно теряет смысл, когда:

$$x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi=0.$$

Это условие обнаруживается, когда $x=i\operatorname{ctg}\varphi$; мы видим, следовательно, так как φ возрастает от нуля до π, что эта переменная представляет ось ординат, которая является, значит, линией разрыва для интеграла.

Рассмотрим теперь интеграл:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}},$$

нахождение которого требует вычисления вычета функции $\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$, соответствующего полюсу $t=i$, порядок которого $n+1$.

Нужно, следовательно, положить $t=i+h$ и получить коэфициент при $\frac{1}{h}$ в разложении по возрастающим степеням h функции $\frac{1}{(2ih+h^2)^{n+1}}$.

Написав ее следующим образом:

$$\frac{1}{h^{n+1}}(2i+h)^{-n-1},$$

мы видим, что вопрос сводится к определению коэфициента при h^n в разложении функции $(2i+h)^{-n-1}$, которой мы дадим вид:

$$\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(1-\frac{ih}{2}\right)^{-n-1}$$

Тогда соотношение

$$(1-x)^{-n-1}=\sum\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)\,x^a}{1\cdot 2\ldots n}\qquad (a=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

дает непосредственно, при $a=n$ и $x=\frac{ih}{2}$, искомый коэфициент

$$\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Умножив числитель и знаменатель дроби на $1\cdot 2\ldots n$, получаем:

$$\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{2i\ \ 2^{2n}\ \ (1\cdot 2\ldots n)^2}$$

или

$$\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{2i\,(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)^2};$$

сократив на общий множитель $2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n$, имеем окончательно:

$$J=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\pi.$$

Я остановлюсь временно на этом результате, чтобы дать асимптотическое выражение J для очень больших значений n; мы будем иметь таким образом возможность применить в простом случае знаменитый метод Лапласа для приближенного интегрирования дифференциалов, которые зависят от множителей, возведенных в большие степени (Théorie analytique des probabilités, стр. 97).

Пишем сначала:

$$J=2\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

Полагаем $1+t^2=e^{x^2}$, что дает:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}=\int_0^\infty \frac{e^{-nx^2}x\,dx}{\sqrt{e^{x^2}-1}}.$$

После этого замечаем, что формула Маклорена нам дает:

$$e^{x^2}=1+x^2e^{\theta x^2},$$

где θ положительное число, меньшее единицы. Заменив теперь в интеграле $e^{x^2}-1$ на $x^2e^{\theta x^2}$, мы находим:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx^2}x\,dx}{\sqrt{e^{x^2}-1}}=\int_0^\infty e^{-\left(n+\frac{1}{2}\theta\right)x^2}dx$$

и отсюда устанавливаем верхнюю и нижнюю границы интеграла, заменяя последовательно θ нулем и единицей. Согласно известной формулы этими границами будут:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \text{ и } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}.$$

Имея таким образом

$$J<\sqrt{\frac{\pi}{n}},\quad J>\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}},$$

видим, что мы можем написать:

$$J=\sqrt{\frac{\pi}{n+\varepsilon}},$$

где ε заключено между нулем и $\frac{1}{2}$; пользуясь полученным выше значением J, мы получаем следующий замечательный результат:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots\ 2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots\quad 2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\varepsilon)}}.$$

Мы только что воспользовались определенным интегралом

$$\int_0^\infty e^{-gx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{g}};$$

приведем элементарный метод для его нахождения. Мы знаем, что положив:

$$J_n=\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

имеем соотношение:

$$J_{n+1}=\frac{n}{n+1}J_{n-1};$$

отсюда заключаем:

$$J_{2n}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{3\cdot5\cdot7\ldots2n+1},$$

что дает:

$$(2n+1)J_{2n}J_{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Установив это, замечаем, что предел отношения $\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}$ при бесконечно большом n равен единице; действительно, так как J_n убывает при возрастании n, то мы имеем неравенство:

$$J_{2n}>J_{2n+1}>J_{2n+2}$$

или:

$$J_{2n}>J_{2n+1}>\frac{2n+1}{2n+2}J_{2n}.$$

Мы видим, следовательно, что $\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}$ заключается между единицей и дробью $\frac{2n+1}{2n+2}$, которая также равна единице при бесконечном n.

Установив это, получаем равенство:

$$(2n+1)J^2_{2n+1}\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}=\frac{\pi}{2},$$

которое нам дает, если заставим n бесконечно возрастать:

$$\lim(2n+1)J^2_{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

и следовательно:

$$\lim\sqrt{n}\,J_{2n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Полагая теперь $x^2=1-z^2$ в интеграле J_{2n+1}, мы получим следующее новое выражение:

$$J_{2n+1}=\int_0^1(1-z^2)^n dz;$$

заменив затем z на $\frac{z}{\sqrt{n}}$, получаем:

$$\sqrt{n}\,J_{2n+1}=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n dz,$$

и, следовательно, при бесконечном n

$$\lim \sqrt{n}\, J_{2n+1} = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Достаточно затем положить $z = x\sqrt{g}$, чтобы установить результат, к которому мы стремились:

$$\int_0^\infty e^{-gx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{g}}.$$

Рассмотрим еще интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{1 - t^{2n}} dt$, в котором m, m', n целые положительные числа, причем m и $m' < n$.

Корнями знаменателя будет:

$$t = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}; \quad (k = 0,\ 1,\ 2 \ldots,\ 2n - 1).$$

Значение $k = 0$ или $t = 1$ не дает полюса, так как при этом $f(t)$ конечна, то же имеем для $t = -1$, что соответствует $k = n$.

Установив это, мы сразу видим, что полюсы, расположенные выше оси Ox, получаются при $k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ n - 1$, и вычет относительно одного из них дается формулой

$$A = \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{-2nt^{2n-1}}$$

или, так как $t^{2n} = 1$, более простой:

$$A = -\frac{t^{2m+1} - t^{2m'+1}}{2n}.$$

Пусть теперь:

$$u = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

$$v = \cos\frac{(2m'+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2m'+1)\pi}{n}.$$

Для суммы $\sum$ вычетов полюсов, расположенных выше оси Ox, мы найдем выражение:

$$\sum = -\frac{1}{2n}\left[(u + u^2 + \ldots + u^{n-1}) - (v + v^2 + \ldots + v^{n-1})\right] =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\frac{u^n - u}{u - 1} - \frac{v^n - v}{v - 1}\right].$$

Но, так как $u^n = v^n = -1$, мы получаем, упрощая его:

$$\sum = \frac{1}{2n}\left(\frac{u+1}{u-1} - \frac{v+1}{v-1}\right).$$

Имеем:

$$\frac{u+1}{u-1} = \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\frac{(2m+1)}{2n}\pi, \qquad \frac{v+1}{v-1} = \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\frac{(2m'+1)}{2n}\pi;$$

следовательно:

$$\sum = \frac{1}{2ni}\left(\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right),$$

откуда окончательно:

$$J = \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right).$$

Замечаем теперь, что функция $f(t)$ четная, следовательно, принимая за пределы нуль и бесконечность и деля на 2, мы можем написать:

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{1 - t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right).$$

Мы получим замечательный частный случай этого интеграла, подставляя $2n$ вместо n и полагая затем $m' = m + n$.

Предыдущая формула обращается после этого в

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}(1 - t^{2n})}{1 - t^{4n}}\,dt = \frac{\pi}{4n}\left[\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{4n}\pi - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2m+1}{4n}\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left(\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{4n}\pi + \operatorname{tg}\frac{2m+1}{4n}\pi\right);$$

упрощая ее, мы получаем результат, данный Эйлером:

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}}{1 + t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Замечаем, наконец, что меняя переменную, положив $t = e^x$, находим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2m+1)x} - e^{(2m'+1)x}}{1 - e^{2nx}}\,dx = \frac{\pi}{2n}\left[\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2m+1)x}}{1 + e^{2nx}}\,dx = \frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Подставим еще $\frac{x}{2n}$ на место x и положим для сокращения:

$$\frac{2m+1}{2n}=a; \quad \frac{2m'+1}{2n}=b;$$

мы получим следующие формулы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}\,dx=\pi(\operatorname{ctg} a\pi-\operatorname{ctg} b\pi),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}}=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

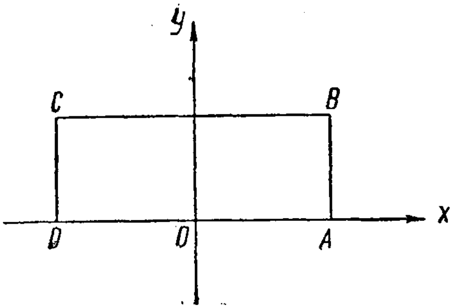

Рис. 46.

в которых a и b могут представлять с любой точностью два любые вещественные числа, меньшие единицы.

Этот последний результат открывает путь к новому применению теоремы Коши. Обобщим выражение $\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}$, положив:

$$f(x)=\frac{e^{ax}F(e^{x})}{G(e^{x})},$$

где $G(z)$ и $F(z)$ — целые полиномы от z. Чтобы интеграл:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

был бы конечным и определенным, поставим следующие условия: предположим, что дробь $\frac{F(z)}{G(z)}$ не имеет целой части, что знаменатель ее не имеет вещественных корней и что постоянная a или, если она мнимая, то ее вещественная часть, положительна и меньше единицы. Установив это, мы видим что $f(z)$ будет конечной для всех вещественных значений z, и если мы положим $z=x+iy$, то функция исчезнет для бесконечных значений x, положительных или отрицательных. Действительно, в первом случае числитель выражения $\frac{e^{az}F(e^{z})}{G(e^{z})}$ возрастает бесконечно, но менее быстро, чем знаменатель, а для отрицательных значений x показательный множитель e^{az} исчезает.

Берем теперь за контур интегрирования прямоугольник $ABCD$ (рис. 46), основание которого на оси Ox и который разделен симметрично осью Oy.

Пусть $\sum$ сумма вычетов функции для всех полюсов, находящихся внутри его; получаем соотношение:

$$(DA)+(AB)+(BC)+(CD)=2i\pi\sum.$$

Полагаем еще: $OA = OD = p$ и $AB = q$; интегралы, содержащиеся в первой части:

$$(DA) = \int_{-p}^{+p} f(z)\,dt, \qquad (AB) = i\int_0^q f(p+it)\,dt,$$

$$(BC) = -\int_{-p}^{+p} f(iq+t)\,dt, \qquad (CD) = -i\int_0^q f(-p+it)\,dt.$$

Установив это, полагаем в частности $q = 2\pi$; для функции $f(z)$ имеет место соотношение

$$f(2i\pi + z) = e^{2ia\pi} f(z),$$

откуда заключаем:

$$(BC) = -e^{2ia\pi}(DA).$$

Если заставить затем бесконечно возрастать постоянную p, то $f(-p+it)$, $f(p+it)$ становятся равными нулю и, следовательно: $(CD) = 0$, $(AB) = 0$; кроме того, $(DA) = J$; получаем таким образом искомую величину:

$$J = \frac{2i\pi}{1 - e^{2ia\pi}} \sum$$

или:

$$J = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi} \sum$$

Рассмотрим теперь для нахождения вычетов более простой случай, в котором уравнение $G(e^x) = 0$ имеет только простые корни.

Пусть $x = \xi$ один из его корней и $e^x G'(e^x)$ производная по x от функции $G(e^x)$; соответствующий вычет равен

$$\frac{e^{a\xi} F(e^\xi)}{e^\xi G'(e^\xi)},$$

как было ранее доказано (стр. 144), или проще:

$$\frac{e^{\xi(a-1)} F(e^\xi)}{G'(e^\xi)}.$$

Например, в случае, когда $G(e^x) = e^x + 1$, мы будем иметь $\xi = i\pi$; далее $G' = 1$; единственным вычетом будет $e^{i(a-1)\pi}$; находим, таким образом:

$$J = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi} e^{i(a-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Покажем, что предыдущие выкладки дают также и значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x}\,dx.$$

Возвращаемся для этого к соотношению:

$$(DA)+(AB)+(BC)+(CD)=2i\pi\sum,$$

и полагаем:

$$f(z)=\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}},$$

но вместо $q=2\pi$ берем $q=\pi$. Очевидно, внутри прямоугольника нет ни одного полюса, и мы имеем $\sum=0$. Допуская затем, что постоянные a и b имеют вещественные части положительными и меньшими единицы, полагаем, что $f(-p+it)$ и $f(p+it)$ равны нулю при бесконечно большом p. При этом предположении $(CD)=0$, $(AB)=0$, и наше соотношение обращается в

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt-\int_{-\infty}^{+\infty} f(i\pi+t)\,dt=0.$$

Мы получаем, таким образом, искомый интеграл, так как:

$$f(i\pi+t)=\frac{e^{i\pi a}e^{at}-e^{i\pi b}e^{bt}}{1+e^{t}}$$

и следовательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=e^{i\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}\,dt}{1+e^{t}}-e^{i\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{bt}\,dt}{1+e^{t}}=$$

$$=\pi\left[\frac{e^{i\pi a}}{\sin a\pi}-\frac{e^{i\pi b}}{\sin b\pi}\right]$$

и, упрощая:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\pi\,(\operatorname{ctg} a\pi-\operatorname{ctg} b\pi).$$

Остановимся несколько на результате, к которому приходим, положив $b=1-a$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{(1-a)\,t}}{1-e^{t}}\,dt=2\pi\operatorname{ctg} a\pi.$$

Таким образом мы имеем выражение функции $\operatorname{ctg} a\pi$, действительное только для значений a, вещественная часть которых положительна и меньше единицы; определенный интеграл не имеет смысла при a отрицательном и большем единицы. Интересным вопросом, заслуживающим внимания, будет нахождение общего аналитического выражения, исходя из этой формулы; это послужит нам подготовкой к более трудному исследованию, приводящему от узкого определения к открытию совершенно новой функции, примеры которого мы дадим позднее.

С этой целью мы замечаем, что функция

$$\frac{e^{at}-e^{(1-a)t}}{1-e^{t}},$$

очевидно, четная, так как ее можно написать следующим образом:

$$\frac{e^{\left(a-\frac{1}{2}\right)t}-e^{-\left(a-\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{\frac{1}{2}t}}\,t;$$

мы можем положить:

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{at}-e^{(1-a)t}}{1-e^{t}}\,dt.$$

Установив это, находим определенный интеграл, пользуясь тождеством:

$$\frac{1}{1-e^{t}}=1+e^{t}+e^{2t}+\ldots+e^{(n-1)t}+\frac{e^{nt}}{1-e^{t}},$$

и применяя следующие элементарные формулы, в которых k обозначает целое положительное число:

$$\int_{-\infty}^{0}e^{(k+a)t}\,dt=\frac{1}{k+a},\qquad \int_{-\infty}^{0}e^{(k+1-a)t}\,dt=\frac{1}{k+1-a};$$

мы получаем следующий результат:

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi=\frac{1}{a}+\frac{1}{1+a}+\ldots+\frac{1}{n-1+a}-\frac{1}{1-a}-$$

$$-\frac{1}{2-a}+\ldots-\frac{1}{n-a}+\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nt}\left[e^{at}-e^{(1-a)t}\right]}{1-e^{t}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{a}+\sum\frac{2a}{a^{2}-n^{2}}-\frac{1}{n+a}+\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nt}\left[e^{at}-e^{(1-a)t}\right]}{1-e^{t}}\,dt.$$

Это есть выражение $\operatorname{ctg} a\pi$ в виде конечной суммы простых дробей с добавочным членом, который становится нулем при бесконечно большом n и при условии, что переменная a, как мы говорили, будет ограниченной; таким образом, мы доказали, что

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi=\frac{1}{a}+\sum\frac{2a}{a^{2}-n^{2}},\qquad (n=1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

Но полученный нами ряд будет сходящимся для всякого значения переменной и представляет однозначную функцию; следовательно, теорема Римана приводит к заключению, что функция равняется во всей плоскости $\operatorname{ctg} a\pi$, так как это равенство имеет место, когда мы положим переменную заключенной между нулем и единицей.

Указав кратко, как пользуются теоремой Коши при нахождении определенных интегралов, мы покажем теперь ее важное значение с другой точки зрения, — при применении ее к теории простейших трансцендентных интегралов анализа, тех, которые являются рациональными функциями от $\sin x$ и $\cos x$. Предложим себе найти для таких функций выражения, аналогичные известным нам для рациональных дробей, разложенных на простые дроби, т. е. представить их посредством линейной комбинации количеств $\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{x-b}{2}$ и т. д. и их производных, которые будут таким образом играть роль простых элементов, аналогичных $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$ и т. д., или их степеням или производным различных порядков.

Пусть, в самом деле:

$$f(z)=\frac{F(\sin z,\ \cos z)}{G(\sin z,\ \cos z)},$$

где числитель и знаменатель обозначают целые полиномы от $\sin z$ и $\cos z$. Мы показали ранее, как можно получить результат, к которому мы стремимся, путем элементарного приема, рассматривая $f(z)$, как рациональную функцию от переменной e^{iz}, которую обозначим через u. Мы придем таким образом к выделению целой части $\Pi(z)$, состоящей из целых степеней e^{iz}, положительных или отрицательных, и к преобразованию вида:

$$f(z)=\Pi(z)+\Phi(z),$$

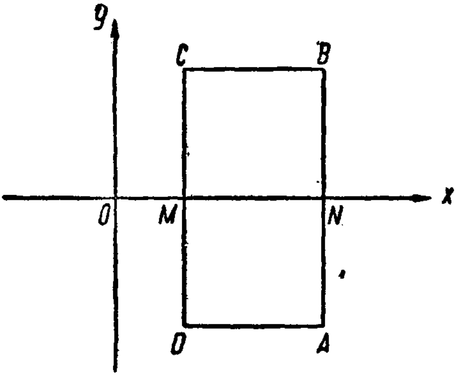

Рис. 47.

где второй член по отношению к u дробь в узком смысле этого слова, остающаяся конечной для бесконечно большого u, а также и при $u=0$, так как знаменатель дроби не содержит множителя u. Именно к дроби $\Phi(z)$ мы применим интегрирование по контуру прямоугольника $ABCD$ (рис. 47), симметричного по отношению к оси абсцисс, и в котором

$$OM=x_0,\quad MN=2\pi,\quad NA=NB=a.$$

Если мы обозначим через $\sum$ сумму вычетов функции $\Phi(z)$ соответствующих полюсам, расположенным внутри этого прямоугольника, теорема Коши даст соотношение:

$$(AB)+(BC)+(CD)+(DA)=2i\pi\sum.$$

Но

$$(DC)=i\int_{-a}^{+a}\Phi(x_0+it)\,dt$$

$$(AB)=i\int_{-a}^{+a}\Phi(x_0+2\pi+it)\,dt$$

и, следовательно, оба интеграла равны, согласно условию:

$$\Phi(z+2\pi)=\Phi(z);$$

имеем, таким образом:

$$(AB)-(DC)=0, \quad \text{или} \quad (AB)+(CD)=0;$$

предыдущее уравнение становится более простым:

$$(DA)+(BC)=2i\pi\sum$$

или

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x_0-ia+t)\,dt-\int_0^{2\pi}\Phi(x_0+ia+t)\,dt=2i\pi\sum.$$

Установив это, заставляем бесконечно возрастать положительную постоянную a и замечаем, что если положить последовательно: $z=x_0-ia+t$ и $z=x_0+ia+t$, количество $u=e^{iz}$ становится бесконечным в первом случае и нулем во втором. Пусть G и H значения, которые принимает соответственно функция $\Phi(z)$, когда мы, введя переменную u, полагаем в ней u бесконечным или равным нулю; будем иметь для бесконечно большого a:

$$(DA)=\int_0^{2\pi}\Phi(x_0-ia+t)\,dt=2\pi G,$$

$$(CB)=\int_0^{2\pi}\Phi(x_0+ia+t)\,dt=2\pi H,$$

и, следовательно:

$$G-H=i\sum.$$

Получаем очень простое соотношение:

$$i(H-G)=\sum,$$

которое при помощи постоянных G и H дает сумму вычетов $\Phi(z)$ для всех ее полюсов, заключенных между неограниченными параллельными линиями AB и CD.

Применим это к произведению $\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}\Phi(z)$; мы придем таким образом к искомому выражению дроби.

Заметим прежде всего, что выражение:

$$\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}=i\,\frac{e^{i(x-z)}+1}{e^{i(x-z)}-1}=i\,\frac{e^{ix}+u}{e^{ix}-u}$$

равно $-i$ для бесконечного u, $+i$ для $u=0$.

Следовательно, значения $\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}\Phi(z)$ равны: $-iG$ и iH и сумма вычетов этой функции, которые соответствуют с одной стороны полюсам

$\Phi(z)$, а с другой — единственному полюсу $z=x$, принадлежащему множителю $\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}$, равна $-G-H$.

Пусть теперь $z=a$ — некоторый полюс функции $\Phi(z)$; вычет определяется коэфициентом при $\frac{1}{h}$ в разложении по возрастающим степеням h, выражения:

$$\operatorname{ctg}\frac{x-a-h}{2}\,\Phi(a+h).$$

Имеем, пользуясь рядом Тейлора:

$$\operatorname{ctg}\frac{x-a-h}{2}=\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}-\frac{h}{1}D_x\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+\ldots+$$
$$+\frac{(-1)^n h^n}{1\cdot 2\ldots n}D_x^n\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+\ldots;$$

далее, если допустим, что рассматриваемый полюс будет порядка кратности $n+1$, то

$$\Phi(a+h)=\frac{A}{h}+\frac{A_1}{h^2}+\ldots+\frac{A_n}{h^{n+1}}+\ldots,$$

где опущенные члены содержат только положительные степени h. Но для простоты лучше написать это разложение в следующем виде:

$$\Phi(a+h)=A\frac{1}{h}+A_1D_h\frac{1}{h}+\ldots+A_nD_h^n\frac{1}{h}+\ldots.$$

Если мы заметим, что $D_h^i\frac{1}{h}=\frac{(-1)^i 1\cdot 2\ldots i}{h^{i+1}}$, то найдем, что коэфициент при $\frac{1}{h}$ в произведении двух рядов имеет значение:

$$A\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+A_1D_x\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+\ldots+A_nD_x^n\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}.$$

Таким образом, сумма вычетов, по полюсам функции $\Phi(z)$ равна:

$$\sum\left[A\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+A_1D_x\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+\ldots+A_nD_x^n\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}\right].$$

Наконец, для нахождения полюса $z=x$ мы дадим рассматриваемой функции вид:

$$\frac{\cos\frac{x-z}{2}\,\Phi(z)}{\sin\frac{x-z}{2}};$$

достаточно тогда положить $z=x$ в частном:

$$\frac{\cos\frac{x-z}{2}\,\Phi(z)}{D_z\sin\frac{x-z}{2}}$$

чтобы получить для вычета значение: $-2\Phi(x)$. Следовательно, соотношение, выведенное из теоремы Коши дает:

$$-G-H=\left[A\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+A_1D_x\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+A_nD_x^n\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}\right]-2\Phi(x);$$

отсюда получаем выражение функции $\Phi(x)$ в следующем виде:

$$\Phi(x)=\frac{G+H}{2}+\frac{1}{2}\sum\left[A\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+A_1D_x\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+A_nD_x^n\operatorname{ctg}\frac{x-a}{2}\right].$$

Я не буду больше останавливаться на этом вопросе, который был мною изложен с другой точки зрения в „Cours d'analyse de l'École Polytechnique" (стр. 321), и заканчиваю последним примером на нахождение определенных интегралов помощью вычетов.

Пусть $f(x)$ голоморфная функция на площадке, ограниченной контуром S; если обозначим через x и a аффиксы двух точек этой площадки, то интеграл

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n(z-x)}\,dz$$

будет иметь значением сумму вычетов функции $\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n(z-x)}$, отвечающих $z=x$ и $z=a$. Установив это, мы видим, как только что было установлено, что первым будет $f(x)$. Чтобы получить второй, полагаем $z=a+h$ и разлагаем по степеням h оба множителя:

$$\frac{1}{z-x}\quad\text{и}\quad\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n}.$$

Мы получаем сначала:

$$\frac{1}{z-x}=-\left[\frac{1}{x-a}+\frac{h}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(x-a)^n}\right]-\ldots;$$

второй множитель дает следующий ряд

$$\frac{(x-a)^n f(a+h)}{h^n}=$$
$$=(x-a)^n\left[f(a)\frac{1}{h^n}+\frac{f'(a)}{1}\frac{1}{h^{n-1}}+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{1\cdot2\ldots(n-1)}\frac{1}{h}\right]+\ldots$$

Остается только найти коэфициент при $\frac{1}{h}$ в произведении двух последних рядов. Простое вычисление показывает, положив:

$$\Pi(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1\cdot 2\dots n-1}(x-a)^{n-1},$$

что этот коэфициент есть полином $\Pi(x)$ с обратным знаком. Таким образом, в результате получаем:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n (z-x)}dx = f(x) - \Pi(x);$$

это не что иное как формула Тейлора, но путь, которым мы следовали при нахождении уже знакомой нам формулы, дает возможность получить другую, совсем новую формулу.

Обозначаем через a, b, $\dots l$ и x аффиксы любого числа точек внутри контура S и полагаем:

$$F(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \dots (z-l)^\lambda,$$

где показатели α, β, $\dots\lambda$ — целые числа.

Интеграл:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{F(x) f(z)}{F(z)(z-x)}dz,$$

который совершенно аналогичен предыдущему, получается посредством тех же выкладок. Вычет функции $\frac{F(x) f(z)}{F(z)(z-x)}$ для $z = x$ снова равен функции $f(x)$; положив $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$, мы легко найдем, что другие вычеты, соответствующие значениям $z = a$, b, $\dots l$, будут целыми полиномами от x степени $n-1$. Представив сумму их через $-\Pi(x)$, мы получим:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{F(x) f(z)}{F(z)(z-x)}dz = f(x) - \Pi(x).$$

Укажем вкратце следствия, вытекающие из этого соотношения. Замечаем, во-первых, что интеграл левой части, содержащий множителем полином $F(x)$, исчезает также, как и его производные по x до порядка $\alpha - 1$ при $x = a$, до порядка $\beta - 1$ при $x = b$ и т. д. Следовательно, полином $\Pi(x)$ разрешает проблему интерполирования, цель которой получить целую функцию степени $n-1$, удовлетворяющую следующим n условиям:

$$\begin{array}{lll}
\Pi(a) = f(a) & \Pi'(a) = f'(a) & \Pi^{\alpha-1}(a) = f^{\alpha-1}(a) \\
\Pi(b) = f(b) & \Pi'(b) = f'(b) & \Pi^{\beta-1}(b) = f^{\beta-1}(b) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Pi(l) = f(l) & \Pi'(l) = f'(l) & \Pi^{\lambda-1}(l) = f^{\lambda-1}(l).
\end{array}$$

Замечаем затем, что обозначив через ζ аффикс точки контура интегрирования, через σ периметр этого контура и через θ множитель, модуль которого не больше единицы, мы можем написать:

$$\frac{\sigma\theta F(x) f(\zeta)}{2\pi F(\zeta)(\zeta - x)} = f(x) - \Pi(x).$$

Допустим теперь, что окружности, описанные около точек a, b, ... l, как центров, и проходящие через точку x, будут внутри кривой S; имеем:

$$\mathrm{mod}(x-a) < \mathrm{mod}(\zeta - a), \quad \mathrm{mod}(x-b) < \mathrm{mod}(\zeta - b) \ \ldots \ \mathrm{mod}(x-l) < \\ < \mathrm{mod}(\zeta - l).$$

Эти условия показывают, что полином $\Pi(x)$ представляет любую функцию $f(x)$ с тем большим приближением, чем выше показатели степени α, β, ... λ, или чем больше число значений a, b, ... l. Действительно, выражение разности $f(x) - \Pi(x)$ уменьшается безгранично, каково бы ни было значение переменной x внутри контура S. Мы отсылаем интересующихся приложением этого результата к приближенному вычислению определенных интегралов к статье в журнале Борхарда: Sur la formule d'interpolation de Lagrange[1] (т. 84, стр. 70), и укажем для той же цели заметку Mansion: Determination du reste dans la formule de quadrature de Gauss. Comptes-rendus, т. CII, стр. 412.

---

[1] Journal für reine und angewandte Mathematik, редактируемый Борхардом.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Определение и основные свойства эйлеровых интегралов первого и второго рода. — Нахождение интеграла Раабе по методу Лерха. — Приближенное выражение $\ln \Gamma(a)$, когда переменная имеет очень большое положительное значение, формулою $\ln \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \ln \sqrt{2\pi} + J$. — Формула Эйлера разложения J в ряд; выражения остатка ряда, данные Коши и Шааром. — Определение по методу Лимбурга числа членов ряда Эйлера для наилучшего приближения.

Интегралам

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 e^{-x} x^{a-1}\,dx$$

Лежандр дал имя Эйлеровых интегралов первого и второго рода, так как они были предметом многочисленных и прекрасных мемуаров Эйлера; им он посвятил часть своих Exercices de Calcul Intégral. Изучение этих интегралов, вызывающее большой интерес, приобрело новое значение со времен этих знаменитых математиков; оно приводит к понятию о новой трансцендентной функции, которая является однозначной функцией переменной и следует непосредственно за круговыми, с которыми она тесно связана.

Изложим вкратце эти исследования и, придерживаясь исторического пути, установим сначала свойства этих функций помощью интегрального исчисления, именно с той точки зрения, как они были выведены впервые.

Пусть, согласно обозначениям Лежандра:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx;$$

заметим, что для вещественного и положительного значения a, не равного нулю, интеграл, верхний предел которого бесконечен, всегда ограничен.

В самом деле, написав:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1}\,dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx,$$

видим, что, когда $a < 1$ первый член конечен, хотя функция, стоящая под знаком интеграла, становится при $x = 0$ бесконечной; однако это заключение не имеет места при $a = 0$.

Что же касается второго члена, мы замечаем, что в пределах интегрирования выражение $x^{a-1} e^{-x}$ увеличивается вместе с a; таким образом, обозначая через n целое число, больше a, мы получаем:

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx < \int_1^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

и тем более

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx < \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx,$$

т. е.

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx < 1 \cdot 2 \ldots n-1.$$

Доказав это, имеем первое свойство $\Gamma(a)$, которое выводится из тождества:

$$D_x(e^{-x} x^a) = ae^{-x} x^{a-1} - e^{-x} x^a$$

интегрированием обеих частей в пределах от $x=0$ до $x=\infty$.

Так как $e^{-x} x^a$ исчезает при этих значениях, мы непосредственно получаем основное соотношение:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Отсюда выводим, заменяя последовательно a на $a+1$, $a+2$, ... $a+n-1$

$$\Gamma(a+2) = (a+1)\Gamma(a+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1)$$

и, следовательно:

$$\Gamma(a+n) = (a+1) \ldots (a+n-1)\Gamma(a).$$

Рассмотрим теперь интеграл первого рода и положим, как принято

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx,$$

где a и b положительны и не равны нулю. Заметим сначала, что мы легко можем получить в явном виде выражение интеграла в том случае, когда b целое число, которое обозначим через n

Исходя для этого из равенства

$$\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a},$$

в котором меняем a на $a+1$, что дает:

$$\int_0^1 x^a\,dx = \frac{1}{a+1}$$

и вычитая почленно, получим:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)\,dx = \frac{1}{a(a+1)}.$$

Заменим в этом равенстве a на $a+1$ и вычитая почленно, будем иметь:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^2\,dx = \frac{2}{a(a+1)(a+2)}$$

и продолжая так, далее, очевидно получим:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{1\cdot 2\ \dots\ n-1}{a(a+1)\ \dots\ (a+n-1)}.$$

Последнее выражение помощью равенств

$$\Gamma(n) = 1\cdot 2\ \dots\ n-1$$
$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\ \dots\ (a+n-1)\,\Gamma(a)$$

может быть записано следующим образом:

$$B(a, n) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)}.$$

Также мы будем иметь для всякого значения b:

$$B(n, b) = \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(n)}{\Gamma(b+n)};$$

это вытекает как следствие из равенства

$$B(a, b) = B(b, a),$$

которое непосредственно доказывается заменой x на $1-x$ в интеграле первого рода. Эти равенства наводят на более общее соотношение:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

в котором a и b имеют любые значения. Это соотношение, которое мы сейчас докажем, чрезвычайно важно.

Используем для доказательства новое выражение интеграла первого рода, которое находится путем замены переменной

$$x = \frac{y}{1+y}.$$

Таким образом получаем

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{(1+y)^{a+b}}$$

и, следовательно:

$$B(a, b)\,\Gamma(a+b) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(a+b)\,y^{a-1}\,dy}{(1+y)^{a+b}}.$$

Замечаем еще, что заменив в интеграле второго рода x на gx, мы получаем следующее равенство

$$\frac{\Gamma(a)}{g^a} = \int_0^\infty e^{-gx} x^{a-1}\,dx,$$

откуда

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-x(1+y)} x^{a+b-1}\,dx.$$

Мы можем, следовательно, произведение $B(a, b)\,\Gamma(a+b)$ выразить двойным интегралом, который вычисляется весьма простым путем.

В самом деле, имеем:

$$B(a, b)\,\Gamma(a+b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} x^{a+b-1} e^{-xy} y^{a-1}\,dx\,dy.$$

Выполним сначала интегрирование по y; это даст в результате $\frac{\Gamma(a)}{x}$; таким образом двойной интеграл приводится к простому интегралу:

$$\Gamma(a) \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1}\,dx = \Gamma(a)\,\Gamma(b).$$

Имеем, следовательно:

$$B(a, b)\,\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\,\Gamma(b),$$

откуда получаем соотношение

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

которое и требовалось установить.

Приведем первое следствие; положим $a+b=1$; предыдущее выражение для $B(a, b)$ приводит в этом случае к интегралу

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

(см. стр. 156); получаем, следовательно, уравнение:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Во-вторых, выведем определенные интегралы, которые дают логарифмическую производную и логарифм $\Gamma(a)$; воспользуемся для этого остроумным методом бельгийского геометра Шаара.

Этот метод заключается в применении двух равенств:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}$$

$$\Gamma(b)=\int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}\,dx;$$

вычитая почленно первое из второго и замечая, что можно написать:

$$\Gamma(b)-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{\Gamma(b)\,[\Gamma(a+b)-\Gamma(a)]}{\Gamma(a+b)}=$$

$$=\frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\right]=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\right],$$

мы получаем:

$$\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\right]=\int_0^\infty\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]x^{b-1}\,dx.$$

Положив теперь b бесконечно малым, находим, переходя к пределу:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^\infty\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}.$$

Мы получим совершенно другое выражение, заменив в интеграле

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

переменную x степенной функцией e^{-x} и заменив первое равенство следующим:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^\infty e^{-ax}(1-e^{-x})^{b-1}\,dx.$$

Такое же вычисление дает в этом случае выражение:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx$$

и более простое, если мы заменим x на $-x$:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_{-\infty}^0\left(\frac{e^{ax}}{e^x-1}-\frac{e^x}{x}\right)dx.$$

Это последнее выражение служит для нахождения $\ln\Gamma(a)$; действительно, мы легко получаем проинтегрировав последнее равенство между некоторыми пределами a и b:

$$\ln\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^{bx}}{e^{x}-1}-(a-b)e^{x}\right]\frac{dx}{x},$$

откуда, для $b=1$:

$$\ln\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}-(a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x}.$$

К этим основным результатам присоединим еще значение определенного интеграла, данного Раабе:

$$J=\int_{a}^{a+1}\ln\Gamma(x)\,dx;$$

чтобы найти его, приведем остроумный и изящный метод Лерха, доцента Чешской Политехнической школы в Праге. Метод заключается в замене x на $a+\xi$, что дает:

$$J=\int_{0}^{1}\ln\Gamma(a+\xi)\,d\xi;$$

далее, дифференцируя по a, мы получаем:

$$D_a J=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln a$$

и, следовательно, обозначив через C постоянную:

$$J=a\ln a-a+C.$$

Чтобы определить значение C, замечаем, что $a\ln a-a$ исчезает при $a=0$; имеем, следовательно:

$$C=\int_{0}^{1}\ln\Gamma(\xi)\,d\xi.$$

Заменив теперь ξ на $1-\xi$, получим:

$$C=\int_{0}^{1}\ln\Gamma(1-\xi)\,d\xi$$

и, складывая почленно:

$$2C=\int_{0}^{1}\ln[\Gamma(\xi)\Gamma(1-\xi)]\,d\xi.$$

После этого равенство

$$\Gamma(\xi)\Gamma(1-\xi)=\frac{\pi}{\sin\pi\xi}$$

позволяет написать:

$$2C = -\int_0^1 \ln \frac{\sin \pi\xi}{\pi}\, d\xi;$$

мы увидим, что этот интеграл находится очень легко.

В самом деле, пусть $f(\xi) = \ln \frac{\sin \pi\xi}{\pi}$; положим сначала:

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi)\, d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi)\, d\xi,$$

и, заменив в

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi)\, d\xi \quad \xi \ \text{на}\ 1-\xi,$$

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi)\, d\xi + \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-\xi)\, d\xi.$$

Но мы имеем $f(\xi) = f(1-\xi)$; следовательно, это равенство принимает вид

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi)\, d\xi$$

и, если заменить ξ на $\frac{\xi}{2}$, то имеем:

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = \int_0^1 f\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi.$$

Достаточно теперь применить соотношение

$$f(\xi) = f\left(\frac{\xi}{2}\right) + f\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \ln 2\pi,$$

которое выводится непосредственно, и проинтегрировать его в пределах от нуля до единицы, чтобы получить

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = 2\int_0^1 f(\xi)\, d\xi + \ln 2\pi,$$

что дает

$$\int\limits_0^1 f(\xi)\,d\xi = -\ln 2\pi$$

и, следовательно,

$$C = \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

Основываясь на интеграле Раабе, поставим себе задачей получить выражение $\ln\Gamma(a)$ в том случае, когда a большое число — важная и трудная проблема, точное решение которой впервые дал Коши.

Воспользуемся для этого выражением интеграла J, к которому приводит формула:

$$\ln\Gamma(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{\xi x}-e^{x}}{e^{x}-1}-(\xi-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x};$$

оно выводится помощью равенств.

$$\int\limits_a^{a+1} e^{\xi x}\,d\xi = \frac{e^{ax}(e^{x}-1)}{x}$$

$$\int\limits_a^{a+1}(\xi-1)\,d\xi = a-\frac{1}{2},$$

и простое вычисление непосредственно дает

$$J = \int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{x}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Отнимая теперь от $\ln\Gamma(a)$, получим

$$\ln\Gamma(a) - J = \int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{e^{x}-1}-\frac{e^{ax}}{x}+\frac{e^{x}}{2}\right]\frac{dx}{x};$$

прибавляя почленно равенство

$$\frac{1}{2}\ln a = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}-e^{x}}{2x}\,dx,$$

мы приходим к следующему соотношению

$$\ln\Gamma(a) = J - \frac{1}{2}\ln a + \int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]e^{ax}\frac{dx}{x}.$$

Положим, наконец, для сокращения

$$\varphi(x)=\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

и снова заменим J его значением $a\ln a-a+\frac{1}{2}\ln 2\pi$; результат, который мы только что получили, принимает следующий вид:

$$\ln\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,e^{ax}\,dx.$$

Продолжим и углубим исследование полученного равенства.

Докажем, во-первых, что последний результат дает асимптотическое значение $\ln\Gamma(a)$, установив, что наибольшее значение $\varphi(x)$ равно $\frac{1}{12}$; если это так, то обозначив через θ число, меньшее единицы, мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,e^{ax}\,dx=\frac{\theta}{12}\int_{-\infty}^{0}e^{ax}\,dx=\frac{\theta}{12a}.$$

Для доказательства замечаем, что можно написать:

$$\varphi(x)=\frac{e^x(x-2)+x+2}{2x^2(e^x-1)}$$

и заменив далее x на $2x$:

$$\varphi(2x)=\frac{(e^x+e^{-x})\,x-(e^x-e^{-x})}{4x^2(e^x-e^{-x})}.$$

Разложив в ряд и сократив общий множитель $2x^3$, легко находим

$$\varphi(2x)=\frac{1}{4}\,\frac{\sum\frac{(2n+2)\,x^{2n}}{\Gamma(2n+4)}}{\sum\frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+2)}}=\frac{1}{4}\,\frac{\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{4x^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots}{1+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

Очевидно, коэфициент при x^{2n} в числителе меньше, чем в знаменателе и, следовательно, мы получим максимум функции беря $x=0$; значение функции при этом равно $\frac{1}{12}$, как и было сказано.

Мы подходим теперь к важному вопросу приближенного вычисления определенного интеграла

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,e^{ax}\,dx,$$

который я обозначу для сокращения через $J(a)$. Первый способ заключается в разложении в ряд функции $\varphi(x)$ на основании тождества

$$\frac{1}{1-e^x}=1+e^x+\ldots+e^{(n-1)x}+\frac{e^{nx}}{1-e^x}.$$

Пусть

$$J_m=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{[e^x(2-x)-2-x]\,e^{mx}}{2x^2}\,dx,$$

имеем

$$J(a)=J_a+J_{a+1}+\ldots+J_{a+n-1}+J(a+n).$$

Принимая затем во внимание тождество:

$$\frac{e^{(m+1)x}(2-x)-e^{mx}(2+x)}{2x^2}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{(m+1)x}-e^{mx}}{x}-$$
$$-D_x\left[\frac{e^{(m+1)x}-e^{mx}}{x}\right],$$

мы непосредственно получаем

$$J_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)-1;$$

формула же, которую мы вывели:

$$J(a+n)=\frac{\theta}{12(a+n)}$$

показывает, что при бесконечно большом n дополнительный член равен нулю. Мы нашли, следовательно, выражение в виде сходящегося ряда:

$$J(a)=\sum\left[\left(a+m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{a+m}\right)-1\right]\qquad(m=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

которое впервые было дано Гудерманном. Этот изящный вывод мало полезен для той цели, которую мы имеем в виду. В самом деле, из значения остатка $J(a+n)$ видно, насколько медленно ряд сходится.

Метод, который приводит к окончательному выражению значения $J(a)$, покоится на преобразовании интеграла, основанном на следующем выражении функции $\varphi(x)$.

Чтобы получить этот интеграл, исходим от соотношения:

$$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{x}+\sum\frac{2x}{x^2-m^2\pi^2}\qquad(m=1,\ 2,\ 3\ \ldots),$$

и заметив, что

$$\operatorname{ctg}x=i\,\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1},$$

находим, заменяя x на $\frac{x}{2i}$:

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2}{x}+\sum\frac{4x}{x^2+4m^2\pi^2},$$

что дает сначала

$$\frac{e^x(x-2)+x+2}{x(e^x-1)}=\sum\frac{4x}{x^2+4m^2\pi^2},$$

и окончательно

$$\varphi(x)=\sum\frac{2}{x^2+4m^2\pi^2}.$$

Установив это, мы можем написать $J(a)$ в виде следующего выражения:

$$J(a)=\sum\int_{-\infty}^{0}\frac{2e^{ax}\,dx}{x^2+4m^2\pi^2};$$

Заменяем теперь переменную в определенном интеграле, положив $x=\frac{2m\pi\xi}{a}$; получим:

$$J(a)=\sum\int_{-\infty}^{0}\frac{a\,e^{2m\pi\xi}\,d\xi}{m\pi(\xi^2+a^2)}$$

или

$$J(a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\,d\xi}{\xi^2+a^2}\left(\frac{e^{2\pi\xi}}{1}+\frac{e^{4\pi\xi}}{2}+\frac{e^{6\pi\xi}}{3}+\ldots\right).$$

Но ряд, стоящий под знаком интеграла, есть разложение $\ln(1-e^{2\pi\xi})$ с обратным знаком; следовательно, мы имеем следующее новое выражение:

$$J(a)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\ln(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2}\,d\xi$$

или, переставляя пределы:

$$J(a)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\infty}\frac{a\ln(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2}\,d\xi.$$

Заметим, что a не входит более, как показатель, в состав трансцендентного выражения, а только в весьма простую рациональную дробь $\frac{a}{\xi^2+a^2}$. Имея это, находим, исходя из элементарного тождества

$$\frac{a}{\xi^2+a^2}=\frac{1}{a}-\frac{\xi^2}{a^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\xi^{2n-2}}{a^{2n-1}}+\frac{(-1)^n\xi^{2n}}{a^{2n-1}(\xi^2+a^2)},$$

разложение, расположенное по убывающим степеням a:

$$J(a)=\frac{1}{\pi a}\int_{0}^{-\infty}\ln(1-e^{2\pi\xi})\,d\xi-\frac{1}{\pi a^3}\int_{0}^{-\infty}\xi^2\ln(1-e^{2\pi\xi})\,d\xi+\ldots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi a^{2n-1}}\int_{0}^{-\infty}\xi^{2n-2}\ln(1-e^{2\pi\xi})\,d\xi+\frac{(-1)^n}{\pi a^{2n-1}}\int_{0}^{-\infty}\frac{\xi^{2n}\ln(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2}\,d\xi.$$

Определенные интегралы, входящие в последнее выражение, нам уже известны; действительно, мы получили (на стр. 141) формулу

$$\int_0^\infty x^{2n-2} \ln \frac{1}{1-e^{-x}}\, dx = \frac{B_n (2\pi)^{2n}}{4n(2n-1)},$$

в которой B_n обозначает число Бернулли с нумером n; достаточно положить $x = -2\pi\xi$, чтобы получить:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \xi^{2n-2} \ln (1 - e^{2\pi\xi})\, d\xi = \frac{B_n}{2n(2n-1)}.$$

Этот результат приводит к следующему важному равенству:

$$J(a) = \frac{B_1}{2a} - \frac{B_2}{3\cdot 4a^3} + \frac{B_3}{5\cdot 6a^5} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n(2n-1)\, a^{2n-1}} + (-1)^n R_n,$$

в котором

$$R_n = \frac{1}{\pi a^{2n-1}} \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2n} \ln (1 - e^{2\pi\xi})}{\xi^2 + a^2}\, d\xi.$$

Очевидно, легко найти верхний предел добавочного члена R_n, заменив $\frac{\xi^{2n} \ln (1 - e^{2\pi\xi})}{\xi^2 + a^2}$ большим значением $\frac{\xi^{2n} \ln (1 - e^{2\pi\xi})}{a^2}$. Получим таким образом интеграл

$$\frac{1}{\pi a^{2n+1}} \int_0^{-\infty} \xi^{2n} \ln (1 - e^{2\pi\xi})\, d\xi,$$

т. е. член ряда, который непосредственно следует за тем, на котором мы остановились; мы, следовательно, можем написать:

$$R_n = \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)\, a^{2n+1}},$$

обозначив через θ положительное число, меньшее единицы. Мы должны теперь показать, для чего яьляется необходимым исследование этого остатка и какую существенную роль играет оно в применении к разложению в ряд функции $J(a)$.

Замечаем для этого, что в рассматриваемой нами последовательности, которую мы называем рядом Стирлинга, члены начинают убывать, как это показывают значения первых чисел Бернулли:

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42} \text{ и т. д.}$$

Но из данного раньше (стр. 140) общего выражения

$$\frac{B_m (2\pi)^{2m}}{\Gamma(2m+1)} = 2\left(1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots\right)$$

мы получаем:

$$B_m = \frac{2\Gamma(2m+1)}{(2\pi)^{2m}}\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\ldots\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{B_m}{2m(2m-1)a^{2m-1}} = \frac{2a\,\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m}}\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\ldots\right)$$

Эта формула обнаруживает, что сначала члены убывают, а затем начинают беспредельно возрастать, каково бы ни было значение a, так что ряд, очевидно, расходящийся. Но в то же время известно, что возможно пользоваться этим расходящимся рядом и что мы получим наилучшее приближение, которое он в состоянии дать, определив порядок n наименьшего члена, так, чтобы остаточный член $R_n = \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)a^{2n+1}}$ был бы насколько возможно малым. Решение этого вопроса, достаточное для практического применения, было дано Лежандром в „Exercices de Calcul Intégral", стр. 292. Знаменитый геометр замечает, что отношение двух количеств $\frac{B_n}{2n(2n-1)a^{2n-1}}$ и $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)a^{2n+1}}$ приблизительно равно $\frac{2n(2n-1)}{(2\pi a)^2}$ и члены ряда убывают, пока $\frac{2n(2n-1)}{(2\pi a)^2} < 1$ и начинают возрастать, когда $\frac{2n(2n-1)}{(2\pi a)^2} > 1$. Положив $2n(2n-1) = (2\pi a)^2$, что дает приближение $n = \pi a$, мы получаем таким образом порядок наименьшего члена. Добавлю, что значение этого члена мы легко получим из формулы $\frac{2a\Gamma(2n-1)}{(2\pi a)^{2n}}$.

Умножив числитель и знаменатель на $2n-1$, мы получим сначала $\frac{2a\Gamma(2n)}{(2n-1)(2\pi a)^{2n}}$; заменив затем в знаменателе $2\pi a$ на $2n$, находим, пользуясь асимптотическим выражением для $\Gamma(2n)$,

$$\frac{\Gamma(2n)}{(2n)^{2n}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}\,e^{2n}}.$$

После упрощения, наименьший член равен $\frac{2\sqrt{a}}{(2a\pi-1)e^{2a\pi}}$ и таким образом мы видим, что он быстро убывает, когда a увеличивается.

Определение индекса наименьшего члена при данном значении a было после Лежандра предметом исследований Genocchi[1] и Лимбурга[2]. Ниже я дам понятие об остроумном анализе Лимбурга.

[1] Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ e alla Serie dello Stirling, che ne exprima il logarithmo (Memoires de la Societé Italienne des Sciences, T. VI).

[2] Sur les intégrales Eulériennes (Memoires couronnes par l'Academie Royale de Belgique, T. XXX).

Заменив ξ на $a\xi$, имеем сначала

$$R_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k} \ln (1 - e^{2a\pi\xi})\, d\xi}{1 + \xi^2}.$$

Мы не будем пользоваться для определения minimum'а трансцендентным уравнением $D_k R_k = 0$, рассматривая k как непрерывную переменную. Рассмотрим, следуя Лимбургу, разность $R_{k-1} - R_k$, которую обозначим через $f(k)$; имеем

$$f(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-2} (1 - \xi^2) \ln (1 - e^{2a\pi\xi})}{1 + \xi^2}\, d\xi.$$

Мы увидим, что уравнение $f(k) = 0$, которое доступнее предыдущего, приведет к искомому результату.

Замечаем, во-первых, что так как

$$f'(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-2} (1 - \xi^2) \ln \xi^2 \ln (1 - e^{2a\pi\xi})}{1 + \xi^2}\, d\xi,$$

то выражение, стоящее под знаком интеграла отрицательно, откуда вытекает, что функция $f(k)$ непрерывно убывает при возрастании переменной.

Действительно, в интервале между нулем и единицей, из двух множителей $1 - \xi^2$ и $\ln \xi^2$ первый положительный, а второй отрицательный; обратное имеет место при всех значениях $|\xi|$ больших единицы.

Следовательно, уравнение $f(k) = 0$ может иметь всего один корень; мы покажем, что он действительно существует и определим его приближенное значение.

Рассмотрим для этого следующие тождества:

$$\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} = 1 - \xi + \frac{\xi (1 - \xi)^2}{1 + \xi^2},$$

$$\frac{\xi (1 - \xi^2)}{1 + \xi^2} = 1 - \xi - \frac{(1 - \xi)^2}{1 + \xi^2},$$

из которых одно выводится из другого путем замены ξ на $\frac{1}{\xi}$, умножаем первое на $\xi^{2k-2} \ln (1 - e^{2a\pi\xi})\, d\xi$, второе на $\xi^{2k-3} \ln (1 - e^{2a\pi\xi})\, d\xi$; получаем соотношения:

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-2} (1 - \xi) \ln (1 - e^{2a\pi\xi})\, d\xi + J_1,$$

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-3} (1 - \xi) \ln (1 - e^{2a\pi\xi})\, d\xi - J_2,$$

в которых, в правых частях, положено для сокращения

$$J_1 = \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-1}(1-\xi)^2 \ln(1-e^{2a\pi\xi})}{1+\xi^2} d\xi,$$

$$J_2 = \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-3}(1-\xi)^2 \ln(1-e^{2a\pi\xi})}{1+\xi^2} d\xi.$$

Заметим, что эти оба интеграла положительны. Установив это, воспользуемся вспомогательными уравнениями:

$$\int_0^{-\infty} \xi^{2k-2}(1-\xi)\ln(1-e^{2a\pi\xi})\, d\xi = 0,$$

$$\int_0^{-\infty} \xi^{2k-3}(1-\xi)\ln(1-e^{2a\pi\xi})\, d\xi = 0,$$

которые легко написать в явном виде и которые как первое, так и второе имеют только один корень, как и рассматриваемое. Действительно, поступая как и раньше, мы получаем:

$$\int_0^{-\infty} \xi^{\mu-1} \ln(1-e^{2a\pi\xi})\, d\xi = \frac{\Gamma(\mu)}{(2a\pi)^{\mu}} S_{\mu+1},$$

где для сокращения положено:

$$S_\mu = 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} \ldots$$

Это дает непосредственно для вспомогательных уравнений.

$$\frac{\Gamma(2k-1)\, S_{2k}}{(2a\pi)^{2k-1}} - \frac{\Gamma(2k)\, S_{2k+1}}{(2a\pi)^{2k}} = 0,$$

$$\frac{\Gamma(2k-2)\, S_{2k-1}}{(2a\pi)^{2k-2}} - \frac{\Gamma(2k-1)\, S_{2k}}{(2a\pi)^{2k-1}} = 0$$

и, упрощая

$$2a\pi S_{2k} - (2k-1) S_{2k+1} = 0$$
$$2a\pi S_{2k-1} - (2k-2) S_{2k} = 0.$$

Рассмотрим теперь, чтобы на чем-нибудь остановиться, первое уравнение, которое напишем следующим образом:

$$\frac{2k-1}{2a\pi} = \frac{S_{2k}}{S_{2k+1}};$$

суммы S_μ убывают с возрастанием индекса, и мы имеем $\frac{2k-1}{2a\pi} > 1$ и, следовательно, $k > a\pi + \frac{1}{2}$.

С другой стороны, замечая, что S_{2k+1} больше единицы, мы можем положить $\frac{2k-1}{2a\pi} < S_{2k}$, т. е.

$$\frac{2k-1}{2a\pi} < 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \dots .$$

Во второй части показатель степени $2k$ заменим меньшим количеством $2a\pi + 1$; тем более получим

$$\frac{2k-1}{2a\pi} < 1 + \frac{1}{2^{2a\pi+1}} + \frac{1}{3^{2a\pi+1}} + \dots ,$$

откуда

$$k < a\pi + \frac{1}{2} + \frac{a\pi}{2^{2a\pi+1}} + \frac{a\pi}{3^{2a\pi+1}} + \dots .$$

Обозначим через k_1 корень, приближенное значение которого мы таким образом определим; применив тот же прием ко второму уравнению, найдем, что оно имеет один корень k_2, определяемый из следующих условий:

$$k_2 > a\pi + 1$$

$$k_2 < a\pi + 1 + \frac{a\pi}{2^{2a\pi+1}} + \frac{a\pi}{3^{2a\pi+1}} + \dots .$$

Установив это, из данных выше соотношений:

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-2}(1-\xi)\ln(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi + J_1,$$

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-3}(1-\xi)\ln(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi - J_2$$

заключаем, что если полагать $k = k_1$, затем $k = k_2$, то функция $f(k)$ становится последовательно то положительной, то отрицательной, откуда вытекает, что предложенное уравнение $f(k) = 0$ имеет единственный корень, заключенный между k_1 и k_2. Мы можем, следовательно, написать, обозначив его через k_0:

$$k_1 < k_0 < k_2$$

и тем более

$$a\pi + \frac{1}{2} < k_0 < a\pi + 1 + \frac{a\pi}{2^{2a\pi+1}} + \frac{a\pi}{3^{2a\pi+1}} + \dots .$$

Не будем находить более точного приближения для корня k_0, чтобы избежать слишком длинных вычислений, а перейдем прямо к заключению, полученному Лимбургом.

Для этого возвратимся к соотношению

$$R_{k-1} - R_k = f(k)$$

и заставим возрастать переменную k до целого значения, наиболее близкого к корню k_0; обозначим это значение через n. В этом случае вторая часть будет положительна и остаточные члены убывают: имеем

$$R_{n-1} > R_n.$$

Но если перейдем за этот корень, вторая часть переходит от положительного значения к отрицательному, последовательные остаточные члены возрастают, и мы получаем

$$R_n < R_{n+1}.$$

Таким образом мы доказали, что R_n есть наименьший остаточный член, следовательно, ряд дает наилучшее приближение, какое он может дать, если взять сумму n первых членов.

Наконец, для случая целого k_0 будем иметь два равных остатка, меньших, чем все остальные, и будет безразлично, брать ли n членов или $n-1$.

Бурге в своей диссертации о разложении в ряд Эйлеровых интегралов дал без доказательства формулу:

$$k_0 = a\pi + \frac{3}{4} - \frac{3}{32a\pi},$$

пренебрегая членами, содержащими высшие степени $\frac{1}{a\pi}$.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Интеграл Эйлера второго ряда, рассматриваемый как однозначная функция во всей плоскости. — Выражение Прима. — Определение Гаусса. — Основные свойства, вытекающие из рассмотрения второй производной от $\ln \Gamma(a)$. — Приложения теоремы Миттаг-Леффлера к функциям

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)},\quad \frac{\Gamma(x+a)\,\Gamma(x+b)\,\ldots\,\Gamma(x+l)}{\Gamma(x+a')\,\Gamma(x+b')\,\ldots\,\Gamma(x+l')},\quad \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\,\Gamma(x+b)}.$$

В этой лекции мы продолжаем изучение эйлеровых интегралов с новой точки зрения; мы покажем, что выражение, которое рассматривалось до сих пор только при вещественных и положительных значениях переменной, есть аналитическая однозначная функция во всей плоскости.

Приведем для этого простой и легкий метод, данный профессором Вюрцбургского университета Примом в журнале Крелле, т. XXIII [1], прежде знаменитого Вюрцбургского профессора, директора Неаполитанской обсерватории Гаспарис, для вычисления интеграла

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx,$$

пришел к мысли разбить его на две части:

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx.$$

(Sul calcole del valore della funzione $\sum \frac{1}{\Gamma(x)}$, Comptes-rendus de l'Academie des Sciences de Naples, Сентябрь, 1867), благодаря чему он вывел многие свойства, полученные позднее Примом. Однако от него ускользнули следствия этого разделения с точки зрения понятия эйлерового интеграла как аналитической функции. Эти следствия предполагают в действительности знания общей теории функции, менее известные в то время, чем теперь.

---

[1] Journal für reine und angewandte Mathematik, кратко называемый журналом Крелле.

Обозначим через ω некоторую положительную постоянную и положим:

$$P(a)=\int_0^\omega e^{-x}x^{a-1}\,dx,$$

$$Q(a)=\int_\omega^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx;$$

имеем следовательно:

$$\Gamma(a)=P(a)+Q(a).$$

Заметим, что второй интеграл, имея низший предел интегрирования отличным от $x=0$, ограничен, если положим $a=\alpha+i\beta$, при всех значениях α и β. В самом деле, мы можем написать:

$$\int_\omega^\infty e^{-x}x^{\alpha-1+i\beta}\,dx=\int_\omega^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\cos\ln(x^\beta)\,dx+i\int_\omega^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\sin\ln(x^\beta)\,dx,$$

где логарифм положительного количества x^β взят в арифметическом смысле; этот второй интеграл, следовательно, голоморфная функция во всей плоскости. Установив это, заменяем в первом e^{-x} его разложением $1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\ldots$; находим следующее выражение:

$$P(a)=\frac{\omega^a}{a}-\frac{\omega^{a+1}}{a+1}+\frac{\omega^{a+2}}{1\cdot 2(a+2)}-\frac{\omega^{a+3}}{1\cdot 2\cdot 3(a+3)}+\ldots=$$

$$=\omega^a\left[\frac{1}{a}-\frac{\omega}{a+1}+\frac{\omega^2}{1\cdot 2(a+2)}-\frac{\omega^3}{1\cdot 2\cdot 3(a+3)}+\ldots\right].$$

Следовательно, этот ряд, полученный из интеграла

$$\int_0^\omega e^{-x}x^{a-1}\,dx,$$

в котором необходимо предположить a или его вещественную часть положительной и неравной нулю, будет сходящимся и даже быстро сходящимся для всякого вещественного или мнимого значения a; следовательно, ряд определяет однозначную функцию. Итак, соотношение

$$\Gamma(a)=P(a)+Q(a)$$

дает нам общее выражение эйлеровой функции, полученное впервые Примом. Заметим, что $P(a)$ представляет дробную или мероморфную часть $\Gamma(a)$ и имеет полюсы $a=0, -1, -2\ldots$. Мы видим кроме того, что числители частичных дробей приводятся к постоянным; они дают для вычетов значения, определенные Примом, если мы предположим, что $\omega=1$. При этом предположении мероморфная часть и целая часть $\Gamma(a)$ становятся равными:

$$P(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1\cdot 2(a+2)}-\ldots+\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\ldots n(a+n)}+\ldots$$

$$Q(a) = \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Добавим, что мы имеем также:

$$eP(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} + \ldots.$$

Пинкерле доказывает эту формулу с исключительной простотой и изяществом, исходя от ряда:

$$e^{1-x} = \sum \frac{(1-x)^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Отсюда получаем:

$$\int_0^1 e^{1-x} x^{a-1}\, dx = \sum \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^n\, dx}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

и выражение эйлерового интеграла первого рода, выведенное на стр. 168:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n\, dx = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{a(a+1)\ldots(a+n)}$$

дает непосредственно высказанный результат. [1] Мы перешли таким образом от выражения, данного интегралом, определенным в части плоскости, к аналитической однозначной функции, и теорема Римана нам указывает, что это расширение возможно только единственным способом. Найдем теперь основные свойства эйлеровской функции, принимая за исходную точку аналитическое представление $\Gamma(a)$, данное Гауссом, из которого они выводятся весьма простым путем. [2]

Для этого возвратимся снова к формуле

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n\, dx = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}.$$

Заменим в интеграле x на $\frac{x}{n}$; наше равенство принимает вид:

$$\int_0^n x^{a-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)};$$

---

[1] Rendiconti del circolo matematico di Palermo 1888, p. 225.

[2] Это выражение было получено Эйлером гораздо раньше в мемуаре, оставшемся мало известным, и который остался неизвестным Гауссу.

отсюда находим, заставляя n бесконечно возрастать:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx=\lim\left[\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right],\ n=\infty.$$

Это и есть выражение, которое мы имели в виду получить, но его можно вывести и более строгим путем, при котором избегается использование интеграла, верхний предел которого становится бесконечным, как мы это сейчас и покажем.

Для этого исходим от интеграла:

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{a-1}\,dx=\frac{1\cdot 2\ \ldots\ n-1}{a(a+1)(a+2)\ \ldots\ (a+n-1)}$$

и полагаем $x^n=z$. Получаем благодаря такой замене переменной:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 (1-\sqrt[n]{z})^{a-1}\,dz=\frac{1\cdot 2\ \ldots\ n-1}{a(a+1)(a+2)\ \ldots\ (a+n-1)}$$

и, следовательно:

$$\int_0^1 [n(1-\sqrt[n]{z})]^{a-1}\,dz=\frac{n^a\cdot 1\cdot 2\ \ldots\ n-1}{a(a+1)(a+2)\ \ldots\ (a+n-1)}$$

или еще:

$$\int_0^1 [n(1-\sqrt[n]{z})]^{a-1}\,dz=\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ \ldots\ \left(1+\frac{a}{n-1}\right)}$$

Теперь мы не испытаем никаких затруднений, предположив, что n бесконечно велико; в этом случае имеем

$$n(1-\sqrt[n]{z})=-\ln z=\ln\frac{1}{z},$$

и интеграл принимает вид:

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}dz;$$

достаточно положить $z=e^{-x}$, чтобы привести его к $\Gamma(a)$.

Получив таким образом выражение:

$$\Gamma(a)=\lim\left[\frac{n^a}{a\left(a+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ \ldots\ \left(1+\frac{a}{n}\right)}\right],$$

в которое для большей симметрии введен множитель $1+\frac{a}{n}$, имеющий пределом единицу, выводим первое важное следствие: — это выражение определяет $\Gamma(a)$, как однозначную функцию во всей плоскости. Рассмотрим для этого соотношение:

$$\ln\Gamma(a)=\lim\left[a\ln n-\ln a-\ln\left(1+\frac{a}{1}\right)-\ \ldots\ -\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right];$$

чтобы при вещественном или мнимом a освободиться от неопределенности, вызванной множественностью значений логарифмов, условимся брать те их значения, которые исчезают, когда полагаем $a=0$.

Условившись в этом, заменяем согласно с Гауссом $\ln n$ суммой:

$$\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ \ldots\ +\ln\frac{n}{n-1};$$

мы можем написать тогда:

$$\begin{aligned}\ln a\,\Gamma(a)=&\left[a\ln\frac{2}{1}-\ln\left(1+\frac{a}{1}\right)\right]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\left[a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right],\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

или короче:

$$\ln a\,\Gamma(a)=\sum\left[a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]\qquad(n=1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

Докажем, что этот ряд будет сходящимся для всякого значения a как вещественного, так и мнимого.

В самом деле, пусть:

$$f(x)=a\ln(1+x)-\ln(1+ax)$$

$$f'(x)=\frac{x(a^2-a)}{(1+x)(1+ax)}.$$

Разлагая $f(x)$ по формуле Маклорена и заметив, что для мнимого a мы условились брать то из значений логарифма, которое обращается в нуль вместе с a, мы получим $f(0)=0$ и, следовательно:

$$f(x)=x\int_0^1 f'(tx)\,dt=x^2\int_0^1\frac{(a^2-a)\,dt}{(1+tx)(1+atx)}.$$

Применим теперь формулу Дарбу, обозначая через θ значение t, заключенное между нулем и единицей; получим:

$$f(x)=x^2\frac{\lambda(a^2-a)}{(1+\theta x)(1+a\theta x)}.$$

Заменяем затем x на $\frac{1}{n}$ и находим для общего члена

$$\frac{\lambda (a^2 - a)}{(n + \theta)(n + \theta a)},$$

где λ и θ меняются вместе с n. Мы получим верхний предел модуля этого выражения, если отметим, что вследствие неравенства:

$$\mathrm{mod}\,(A + B) > \mathrm{mod}\,A - \mathrm{mod}\,B$$

имеем

$$\mathrm{mod}\,(n + \theta a) > n - \theta\,\mathrm{mod}\,a$$

и тем более:

$$\mathrm{mod}\,(n + \theta a) > n - \mathrm{mod}\,a.$$

Начиная со значений n, больших $\mathrm{mod}\,a$, выражение:

$$\frac{\mathrm{mod}\,(a^2 - a)}{n^2 - n\,\mathrm{mod}\,a}$$

служит искомой границей, а это выражение — общий член сходящегося ряда.

Если мы предположим, что a будет мнимым количеством без вещественной части и, следовательно, вида ia, то определение Гаусса дает замечательное следствие, которым я обязан сообщению Стильтьеса.

Пусть в этом случае:

$$\Gamma(ia) = R(\cos\Theta + i\sin\Theta);$$

будем иметь:

$$R = \sqrt{\frac{2\pi}{a(e^{a\pi} - e^{-a\pi})}}.$$

Угол Θ получается затем из формулы:

$$\Theta = \lim\left[a\ln n \mp \frac{\pi}{2}\,\mathrm{arctg}\,a - \mathrm{arctg}\,\frac{a}{2}\,\ldots\, - \mathrm{arctg}\,\frac{a}{n}\right],$$

в которой мы должны брать верхний или нижний знак в зависимости от того, положительно или отрицательно a, причем все arctg заключены в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Мы подходим теперь к основным свойствам функции $\Gamma(a)$, которые мы выведем как следствия формулы:

$$\ln\Gamma(a) = \lim\left[a\ln n - \ln a - \ln\left(1 + \frac{a}{1}\right) - \,\ldots\, \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right].$$

Беря производную по a от обеих частей этого равенства, мы приходим к

$$D_a \ln\Gamma(a) = \lim\left[\ln n - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \,\ldots\, - \frac{1}{a+n}\right].$$

Следовательно, $D_a \ln \Gamma(a)$ будет, как и $\ln \Gamma(a)$, конечной разностью двух бесконечно возрастающих количеств.

Но дифференцируя еще раз, получаем равенство:

$$D_a^2 \ln \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+n)^2} + \ldots,$$

в котором ряд второй части всегда сходящийся, каково бы ни было значение a — вещественное или мнимое. Этот важный результат позволяет обнаружить истинную природу $\Gamma(a)$ как однозначной функции переменной. Действительно, мы покажем, что отсюда можно вывести все ее свойства и прежде всего, что трансцендентная функция $\frac{1}{\Gamma(a)}$ голоморфна во всей плоскости; эта теорема была предметом одной из первых работ Вейерштрасса (Journal de Crelle, t. L).

Возвратимся для этого к уравнению:

$$D_a^2 \ln \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+n)^2} + \ldots .$$

Умножим обе части на da и, проинтегрировав в пределах от 1 до a, получим:

$$D_a \ln \Gamma(a) = -C + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \ldots;$$

ряд, который стоит в правой части, общий член которого:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n} = \frac{a-1}{(n+1)(a+n)},$$

будет снова сходящимся, каково бы ни было значение a — вещественное или мнимое. Что же касается постоянной — C, она, очевидно, равна значению, которое принимает производная $D_a \ln \Gamma(a)$ при $a=1$, т. е. мы имеем:

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty \ln x \cdot e^{-x}\, dx.$$

Это количество $C = 0{,}577215664\ldots$ известно под именем эйлеровой постоянной.

В полученной формуле меняем a на $a+1$; получаем:

$$D_a \ln \Gamma(a+1) = -C + \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a+n}\right) + \ldots .$$

Умножаем снова на da и интегрируем в пределах от 0 до a; получаем, не прибавляя постоянной, так как обе части исчезают при $a=0$,

$$\ln \frac{1}{\Gamma(a+1)} = Ca + [\ln(1+a) - a] + \ldots + \left[\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right] + \ldots,$$

откуда:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\Pi\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}\right].$$

Этот результат показывает, что $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ функция голоморфная во всей плоскости, как это впервые доказал Вейерштрасс, и дает выражение ее в виде произведения первичных множителей.

Это же соотношение, написанное следующим образом:

$$\ln\Gamma(a+1)=-Ca+[a-\ln(1+a)]+\ldots\left[\frac{a}{n}-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]+\ldots$$

дает разложение $\ln\Gamma(a+1)$ по возрастающим степеням a, когда модуль a меньше единицы. Действительно, при этом условии, формула Маклорена применима к логарифмам, которые входят в правую часть, и, положив, как прежде:

$$S_n=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots,$$

получаем:

$$\ln\Gamma(a+1)=-Ca+\frac{S_2a^2}{2}-\frac{S_3a^3}{3}+\frac{S_4a^4}{4}-\ldots.$$

Заметим еще, что если мы перенесем в левую часть равенства слагаемые: $\ln\left(1+\frac{a}{1}\right)$, $\ln\left(1+\frac{a}{2}\right)$, $\ldots\ln\left(1+\frac{a}{n-1}\right)$, то область сходимости расширится и разложение правой части будет действительным при всех значениях модуля a, меньших целого числа n, которое можно выбирать произвольно. Таким образом получаем формулу:

$$\ln\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-C\right)a+$$

$$+\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]\frac{a^2}{2}-$$

$$-\left[\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots\right]\frac{a^3}{3}+$$

$$+\left[\frac{1}{n^4}+\frac{1}{(n+1)^4}+\ldots\right]\frac{a^4}{4}.$$

. . . .

Пусть теперь для сокращения записи: $F(a)=D_a{}^2\ln\Gamma(a)$; таким образом, имеем:

$$F(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\ldots.$$

Выводим из этого выражения следующие соотношения:

$$F(1+a)-F(a)=-\frac{1}{a^2}$$

$$F(1-a)+F(a)=\sum\frac{1}{(a+n)^2};$$

во втором сумма распространена на все значения n положительные, нуль и отрицательные. Таким образом, выявляется периодическая функция от a, период которой равен единице и которую нетрудно найти. Дифференцируем для этого полученное выше равенство

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi=\frac{1}{a}+\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{a-n}\right),$$

в котором n проходит ряд целых положительных и отрицательных значений, за исключением нуля; получаем:

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2=\sum\frac{1}{(a+n)^2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2\ldots).$$

Мы имеем, следовательно, вторую теорему:

$$F(1-a)+F(a)=\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2.$$

Рассмотрим, наконец, как это делает Лежандр в „Exercices de calcul intégral“ сумму:

$$S=F(a)+F\left(a+\frac{1}{n}\right)+F\left(a+\frac{2}{n}\right)+\ldots+F\left(a+\frac{n-1}{n}\right);$$

мы можем написать:

$$S=\sum F\left(a+\frac{k}{n}\right), \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1)$$

или

$$S=\sum\frac{1}{\left(a+\frac{k}{n}+\nu\right)^2}=\sum\frac{n^2}{(na+k+n\nu)^2},$$

где k изменяется от нуля до $n-1$ и ν принимает все целые значения от нуля до бесконечности.

Следовательно, выражение $k+n\nu$ дает:

для $k=0$ все числа кратные n,

для $k=1$ те же кратные числа, увеличенные на 1,

для $k=2$ те же кратные числа, увеличенные на 2 и так далее, наконец, для $k=n-1$ мы будем иметь все числа, кратные n, увеличенные на $n-1$. Отсюда вытекает, очевидно, что $k+n\nu$ принимает каждое целое значение и только один раз следовательно, мы можем написать:

$$S=\sum\frac{n^2}{(na+k+n\nu)^2}=\sum\frac{n^2}{(na+\mu)^2}=n^2F(na), \qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда получаем соотношение:

$$F(a)+F\left(a+\frac{1}{n}\right)+\ldots+F\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=n^2F(na).$$

Таковы три основных свойства $F(a)$; выявим теперь соответствующие свойства $\Gamma(a)$.

Возьмем снова уравнение:

$$F(a+1)-F(a)=-\frac{1}{a^2}.$$

Проинтегрировав его два раза, получаем:

$$\ln\Gamma(a+1)=\ln a+\ln\Gamma(a)+Ca+C'$$

или

$$\ln\frac{\Gamma(a+1)}{a\Gamma(a)}=Ca+C',$$

где C и C' две постоянные. Но для всякого целого значения a, $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$; следовательно, C и C' равны нулю; заключаем, что каково бы ни было значение a:

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a).$$

Рассмотрим, во-вторых, равенство:

$$F(a)+F(1-a)=\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2.$$

Проинтегрировав также два раза, получаем:

$$\ln\Gamma(a)+\ln\Gamma(1-a)=\ln\frac{\pi}{\sin a\pi}+Ca+C',$$

откуда:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}e^{Ca+C'}.$$

Чтобы определить C и C', умножаем обе части на a; заметив, что $a\Gamma(a)=\Gamma(a+1)$, получаем:

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)=\frac{a\pi}{\sin a\pi}e^{Ca+C'}.$$

Левая часть этого равенства есть четная функция от a; точно так же и $\frac{a\pi}{\sin a\pi}$; следовательно, $e^{Ca+C'}$ должно быть также четной функцией и, следовательно, $C=0$. Пусть теперь $a=0$; левая часть приводится к единице так же, как $\frac{a\pi}{\sin a\pi}$; следовательно, получаем: $e^{C'}=1$. Таким образом, второе свойство функции $\Gamma(a)$ выражается формулой:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

В своей превосходной диссертации о функции $\Gamma(a)$, Бурге замечает, что эта теорема непосредственно указывает, что функция $\frac{1}{\Gamma(a)}$ голоморфна во всей плоскости. В самом деле, имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)}=\frac{\Gamma(a)\sin a\pi}{\pi}.$$

Заменим во второй части $\Gamma(a)$ на $P(a)+Q(a)$. Произведение $P(a)\sin a\pi$ не будет иметь полюсов, $Q(a)$ голоморфна; очевидно, следовательно, что этими свойствами обладает и $\frac{1}{\Gamma(1-a)}$.

Мы можем еще получить из формулы:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

важную теорему, данную Эйлером. Пусть:

$$N=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right);$$

мы можем также написать:

$$N=\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Перемножая и применяя предыдущую формулу, получаем:

$$N^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

Но из тригонометрии известно, что знаменатель этого выражения равен: $\frac{n}{2^{n-1}}$; следовательно, будем иметь:

$$N=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим, наконец, соотношение:

$$\sum F\left(a+\frac{k}{n}\right)=n^2F(na). \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1);$$

интегрируя, получаем:

$$\sum \ln\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)=\ln\Gamma(na)+Ca+C'.$$

Определяем сначала C'. Вычитая от обеих частей $\ln a$, имеем:

$$\sum \ln\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)=\ln\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}+Ca+C' \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots\ m-1)$$

и если положим $a=0$, то первый член примет вид:

$$\sum \ln \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)=\ln N=\ln\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Чтобы найти затем значение $\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}$ заметим, что:

$$\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}=\frac{na\Gamma(na)}{na\Gamma(a)}=\frac{\Gamma(na+1)}{n\Gamma(a+1)};$$

таким образом, при $a=0$, $\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}$ равно $\frac{1}{n}$. Получаем, следовательно.

$$C'=\ln n+\ln\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right]=\ln\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Чтобы определить C, заменим в равенстве:

$$\sum \ln \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)=\ln \Gamma(na)+Ca+C'$$

a на $a+1$ и вычтем полученное уравнение из предыдущего. Пользуясь соотношением $\ln\Gamma(a+1)=\ln\Gamma(a)+\ln a$ находим для первой части значение $\sum \ln\left(a+\frac{k}{n}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n-1)$; вторая получается путем замены a на na в равенстве: $\Gamma(a+n)=(a+1)(a+2)\cdot(a+n-1)\Gamma(a)$. Мы приходим таким образом к условию:

$$\sum \ln\left(a+\frac{k}{n}\right)=\ln\left[na(na+1)\ldots(na+n-1)\right]+C,$$

из которого путем несложного преобразования получаем:

$$C=-n\ln n.$$

Следовательно, мы можем написать:

$$\sum \ln\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)=\ln\Gamma(na)-an\ln n+\ln\left[2\pi^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right]$$

и перейдя от логарифмов к числам:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-an}\Gamma(na).$$

Изложив с другой точки зрения теорию эйлеровой функции, выводя свойства их из определения Гаусса:

$$\Gamma(a)=\lim\left[\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right],$$

при n бесконечно большом, вернемся назад, чтобы получить новые следствия, к определенным интегралам, встречавшимся уже нам в излагаемой теории; рассмотрим сначала выражение для $\ln\Gamma(a)$, данное формулой:

$$\ln\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}-(a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Мы можем также написать, заменив a на $a+1$:

$$\ln\Gamma(a+1)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1-e^{ax}-a(1-e^{x})}{x(1-e^{x})}\right]e^{x}dx.$$

Замечаем теперь, что так как переменная в интеграле имеет только отрицательные значения, то мы можем заменить $\frac{1}{1-e^{x}}$ его разложением $1+e^{x}+e^{2x}+\ldots$. Получаем таким образом ряд

$$\ln\Gamma(a+1)=\sum\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1-e^{ax}-a(1-e^{x})}{x}\right]e^{nx}\,dx,\qquad (n=1,2,3\ldots),$$

общий член которого $\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{nx}-e^{(n+a)x}}{x}-a\frac{e^{nx}-e^{(n+1)x}}{x}\right]dx$ равен

$$\ln\frac{n}{n+a}-a\ln\frac{n}{n+1}\quad\text{или}\quad a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Следовательно, определенный интеграл приводит нас к выводу Гаусса:

$$\ln\Gamma(a+1)=\sum\left[a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right];\qquad (n=1,2,3\ldots).$$

Рассмотрим, во-вторых, формулу:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{e^{ax}}{e^{x}-1}-\frac{e^{x}}{x}\right)dx$$

и выведем из нее, положив $a=1$, следующее выражение эйлеровой постоянной:

$$-C=\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{e^{x}}{x}\right)dx;$$

вычитая почленно, получаем:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}\,dx.$$

Установив это, замечаем, что в том случае, когда a есть количество, соизмеримое $\frac{\beta}{\alpha}$, где α и β — целые числа, то подстановка $e^x = y^\alpha$ дает после преобразования интеграл от рациональной функции

$$\int_0^1 \frac{y^\beta - y^\alpha}{\alpha y (y^\alpha - 1)} dy$$

и интеграл, следовательно, берется точно в конечном виде. Не задерживаясь на этом, пишем, заменив a на $a+1$:

$$D_a \ln \Gamma(a+1) + C = \int_{-\infty}^{0} \frac{(1-e^{ax}) e^x}{1-e^x} dx,$$

и вводим, как выше, вместо $\frac{1}{1-e^x}$ его разложение в ряд. Находим, таким образом:

$$D_a \ln \Gamma(a+1) + C = \sum \int_{-\infty}^{0} [e^{nx} - e^{(n+a)x}]\, dx = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right)$$

$$(n = 1, 2, 3 \ldots)$$

и интегрируем от предела $a = 0$

$$\ln \Gamma(a+1) = -Ca + \sum \left[\frac{a}{n} - \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right];$$

это то соотношение, из которого мы вывели выражение $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ в виде произведения первичных множителей.

Нахождение приближенного значения $\Gamma(a)$, когда a большое число, нас привело к другому интегралу, обозначенному через $J(a)$, который был представлен в виде двух следующих выражений:

$$J(a) = \int_{-\infty}^{0} \frac{[e^x(x-2) + x + 2]\, e^{ax}}{2x^2(e^x - 1)} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{a \ln(1 - e^{2\pi x})\, dx}{x^2 + a^2}.$$

Мы их использовали, рассматривая только вещественные значения a, и получили, пользуясь первым, неравенство $J(a) < \frac{1}{12a}$ так же, как и ряд Гудерманна:

$$J(a) = \sum \left[\left(a + n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{a+n}\right) - 1\right],$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Приведем чрезвычайно важный результат, которым я обязан сообщению Стильтьеса и который дает нижний предел интеграла для мнимого значения a, представленного выражением $a=Re^{i\theta}$, предполагая аргумент θ заключенным между $-\pi$ и $+\pi$. Этот выдающийся геометр замечает, что общий член ряда Гудерманна

$$\left(a+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{a+n}\right)-1$$

выражается интегралом $\int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx$ или иначе:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx.$$

Заменив во втором интеграле x на $1-x$, имеем:

$$J(a)=\sum\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{1}{2}-x}{n+a+x}-\frac{\frac{1}{2}-x}{n+a+1-x}\right)dx=$$

$$=\sum\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}(1-2x)^2\,dx}{(n+a+x)(n+a+1-x)}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots)$$

и из этого выражения получаем сначала границу $J(a)<\frac{1}{12a}$, когда a вещественное и положительное количество.

Следующее тождество:

$$(n+a+x)(n+a+1-x)=(n+a)(n+a+1)+x(1-x)$$

действительно показывает, что для значений переменной, меньших единицы, можно написать:

$$(n+a+x)(n+a+1-x)>(n+a)(n+a+1)$$

и, следовательно:

$$J(a)<\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sum\frac{1}{(n+a)(n+a+1)}\cdot\frac{1}{2}(1-2x)^2\,dx.$$

Отсюда получаем уже указанный результат:

$$J(a) < \frac{1}{12a},$$

так как:

$$\sum \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right) + \ldots = \frac{1}{a}$$

и

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(1-2x)^2\,dx = \frac{1}{12}.$$

Пусть далее $a = Re^{i\theta}$; мы имели, как известно:

$$\operatorname{mod} J(a) < \sum \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-2x)^2\,dx}{\operatorname{mod}(n+a+x)(n+a+1-x)}.$$

Замечаем далее, что равенство:

$$\operatorname{mod}^2(A+Re^{i\theta}) = A^2 + 2AR\cos\theta + R^2 =$$

$$= (A+R)\cos^2\frac{\theta}{2} + (A-R)\sin^2\frac{\theta}{2},$$

в котором A имеет вещественное значение, если предположить, что A положительно и θ заключается между $-\pi$ и $+\pi$, так что $\cos\frac{\theta}{2}$ также положительно, приводит к выводу, что

$$\operatorname{mod}(A+Re^{i\theta}) > (A+R)\cos\frac{\theta}{2}$$

или

$$\operatorname{mod}(A+a) > (A+R)\cos\frac{\theta}{2}.$$

Полагаем последовательно $A = n+x$, $A = n+1-x$ и перемножаем почленно; получим таким образом:

$$\operatorname{mod}(n+a+x)(n+a+1-x) > (n+R+x)(n+R+1-x)\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

В результате можем написать:

$$\operatorname{mod} J(a) < \sum \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-2x)^2\,dx}{(n+R+x)(n+R+1-x)\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

т. е.

$$\operatorname{mod} J(a) < \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} J(R)$$

и тем более:

$$\operatorname{mod} J(a) < \frac{1}{12R\cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Этот изящный вывод Стильтьеса служит основой при изучении функции $J(a)$ при мнимых значениях переменной, но этим мы не будем заниматься в этих лекциях.

Рассмотрим, наконец, интеграл $\int\limits_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1}\,dt$, выражение которого мы выразили формулой $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$; заменим b переменной x и покажем, как соотношение:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \int\limits_0^1 (1-t)^{a-1} t^{x-1}\,dt,$$

в котором предполагаем a и x положительными, приводит при расширении на все значения переменной к аналитическому выражению однозначной функции $\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}$. Для этого разлагаем интеграл в ряд, применяя формулу бинома:

$$(1-t)^{a-1} = \sum \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1\cdot 2\ldots n} t^n,$$

которая имеет место, как это доказал Абель, в пределах от $t=0$ до $t=1$. Но оказывается, что полученное разложение, а именно:

$$\int\limits_0^1 (1-t)^{a-1} t^{x-1}\,dt = \sum \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1\cdot 2\ldots n(x+n)}$$

будет сходиться при всех как вещественных, так и мнимых значениях x.

Положим для сокращения

$$R_n = \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1\cdot 2\ldots n},$$

условясь считать $R_0 = 1$, мы будем иметь, согласно теореме Римана, для всей плоскости формулу:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \sum \frac{R_n}{x+n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

Замечаем теперь, что функция $\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}$ имеет полюсами только такие значения $\Gamma(x)$, при которых множитель $\frac{1}{\Gamma(a+x)}$ голоморфный. Отсюда вытекает, что при $x=-n$ ее вычет будет равен вычету $\Gamma(x)$, который равен, как мы знаем, дроби $\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\ldots n}$ (стр. 184), умноженному на $\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)}=(a-1)(a-2)\ldots(a-n)$, т. е. равен R_n. Полученное выражение, следовательно, будет тем же, которое дает теорема Миттаг-Леффлера; одновременно мы находим, что голоморфная функция, входящая в формулу на основании этой теоремы, равна нулю. Но мы полагали, что постоянная a положительна. Мы получим другой аналитический вид, если это условие не имеет места.

Чтобы получить его, полагаем $a=a'-k$, причем k обозначает целое число, и a' некоторое положительное количество.

Пользуясь соотношением:

$$\Gamma(x-k)=\frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)},$$

мы будем иметь:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}=\frac{(x+a'-1)(x+a'-2)\ldots(x+a'-k)\Gamma(a')\Gamma(x)}{(a'-1)(a'-2)\ldots(a'-k)\Gamma(a'+x)};$$

таким образом, положив для сокращения:

$$F(x)=\frac{(x+a'-1)(x+a'-2)\ldots(x+a'-k)}{(a'-1)(a'-2)\ldots(a'-k)},$$

мы получаем соотношение:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}=F(x)\frac{\Gamma(a')\Gamma(x)}{\Gamma(a'+x)},$$

которое сводит новый случай к рассмотренному.

Пусть временно R_n' то, чем становится R_n, когда заменяем a на a', т. е.:

$$R_n'=\frac{(-1)^n(a'-1)(a'-2)\ldots(a'-k)}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Замечаем, как легко доказать, что:

$$R_n'F(-n)=R_n.$$

Полагаем затем:

$$\frac{F(x)-F(-n)}{x+n}=F_n(x),$$

обозначая через $F_n(x)$ целый полином от x степени $k-1$.

Напишем последовательно:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}=\sum\frac{R_n'F(x)}{x+n}$$

$$=\sum\left[\frac{R_n'F(-n)}{x+n}-R_n'F_n(x)\right]$$

$$=\sum\left[\frac{R_n}{x+n}-R_n'F(x)\right].$$

Полученное таким образом выражение будет снова выражением, которое дает теорема Миттаг-Леффлера. Мы получили вместе с этим пример того, что это выражение, как это было выше отмечено, способно принимать различные формы. Действительно, целое число k, подчиняющееся единственному условию — делать вещественную часть $a+k$ положительной, — может принимать, начиная с некоторой границы, любое значение. Мы видим также, что ряд из дробей $\frac{R_n}{x+n}$ сделан сходящимся по иному, а не при помощи применений общего метода, который заключается в прибавлении полинома

$$R_n\left[\frac{1}{n}+\frac{x}{n^2}+\ \dots\ +\frac{x^{\nu-1}}{n^\nu}\right].$$

В заключение рассмотрим выражение:

$$f(x)=\frac{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)\ \dots\ \Gamma(x+l)}{\Gamma(x+a')\Gamma(x+b')\ \dots\ \Gamma(x+l')},$$

считая для начала, что все постоянные $a, b, \dots l, a', b', \dots l'$ вещественны; обозначим через μ число множителей, которое одинаково как в числителе, так и в знаменателе, и пусть для сокращения:

$$S=a+b+\ \dots\ +l$$
$$S'=a'+b'+\ \dots\ +l'.$$

В этом случае полюсы $f(x)$ будут полюсами функций $\Gamma(x+a)$, $\Gamma(x+b)$, ... $\Gamma(x+l)$, т. е. $x=-(a+n)$, $x=-(b+n)$ ... $x=-(l+n)$, причем n равно нулю или некоторому целому положительному числу. Выражаем через A_n, B_n, ... L_n соответствующие им вычеты; я утверждаю, что всегда существует такой показатель степени i, при котором ряды:

$$\sum\frac{A_n}{(n+a)^i},\quad \sum\frac{B_n}{(n+b)^i},\ \dots\ \sum\frac{L_n}{(n+l)^i}$$

сходящиеся.

Будем рассуждать, чтобы на чем-нибудь остановиться, над первым рядом и используем выражение для A_n, а именно:

$$A_n=\frac{(-1)^n\Gamma(b-a-n)\ \dots\ \Gamma(l-a-n)}{n\ \ \Gamma(a'-a-n)\ \dots\ \Gamma(l'-a-n)},$$

Сравнивая его с A_{n-1}, легко получаем соотношение:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = -\frac{(n+a-a')(n+a-b')\ \dots\ (n+a-l')}{n(n+a-b)\ \dots\ (n+a-l)};$$

если мы временно положим

$$u_n = \frac{(-1)^n A_n}{(n+a)^i},$$

то получим:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+a-1)^i (n+a-a')(n+a-b')\ \dots\ (n+a-l')}{n(n+a)^i (n+a-b)\ \dots\ (n+a-l)}.$$

Следовательно, мы можем вывести непосредственно условие сходимости ряда $\sum \frac{A_n}{n+a}$, применив правило Гаусса. Замечая по этому поводу, что мы легко получаем:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n^{\mu+i} + n^{\mu+i-1}[(\mu+i)a - S' - i] + \dots}{n^{\mu+i} + n^{\mu+i-1}[(\mu+i)a - S] + \dots},$$

находим, следуя этому правилу:

$$(\mu+i)a - S' - i - [(\mu+i)a - S] + 1 < 0.$$

Следовательно:

$$i > S - S' + 1.$$

Итак, за показатель степени i мы должны взять целое число, непосредственно большее $S - S' + 1$; из самого вида этого условия вытекает, что другие ряды:

$$\sum \frac{B_n}{(n+b)^i}, \ \dots \ \sum \frac{L_n}{(n+l)^i}$$

будут сходящимися также, как и первые. Прибавим, наконец, что в общем случае, когда постоянные $a, b, \dots l, a', b', \dots l'$ мнимые, т. е., когда мы имеем:

$$S = \sigma + \sigma_0 i$$
$$S' = \sigma' + \sigma_0 i,$$

простое распространение правила Гаусса показывает, что следует предположить:

$$i > \sigma - \sigma' + 1;$$

это условие заключает, как частный случай, условие, полученное выше.

Пусть, в частности: $S = S'$, мы будем иметь $i = 2$ и мероморфная часть функции, которую мы рассматривали, представится в виде:

$$\sum A_n \left(\frac{1}{x+n+a} - \frac{1}{n+a}\right)$$
$$+ \sum B_n \left(\frac{1}{x+n+b} - \frac{1}{n+b}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \sum L_n \left(\frac{1}{x+n+l} - \frac{1}{n+l}\right)$$

причем n принимает в этих рядах все целые значения, начиная с нуля.

Как последнее применение теоремы Миттаг-Леффлера, рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)},$$

считая для простоты a и b вещественными. Пусть R_n вычет, соответствующий полюсу $x=-n$, имеем:

$$R_n=\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\ \dots\ n}\ \frac{1}{\Gamma(a-n)\Gamma(b-n)},$$

или, в ином виде:

$$R_n=\frac{(-1)^n F_n(a) F_n(b)}{1\cdot 2\ \dots\ n\Gamma(a)\Gamma(b)},$$

если мы для сокращения примем:

$$F_n(x)=(x-1)(x-2)\ \dots\ (x-n).$$

Установив это, мы говорим, что невозможно определить, как это было получено выше, такое постоянное число i, чтобы ряд $\sum\frac{R_n}{n^i}$ был бы абсолютно сходящимся.

Действительно, обозначаем через u_n абсолютное значение $\frac{R_n}{n^i}$; из легко получаемого соотношения:

$$\frac{R_n}{R_{n-1}}=-\frac{(n-a)(n-b)}{n}$$

имеем:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{(n-1)^i(n-a)(n-b)}{n^{i+1}},$$

и мы видим, что так как это отношение увеличивается вместе с n, то ряд $\sum u_n$ расходящийся.

Значит мы нашли пример функции, подчиняющейся условию, по которому в выражении мероморфной части степени целых полиномов, которые мы вычитаем из простых дробей, должны бесконечно возрастать. Рассмотрим, поэтому, показатель степени, изменяющийся вместе с n; требуется его определить таким образом, чтобы ряд $\sum\frac{R_n x^\nu}{n^\nu}$ был сходящимся при любом значении x. Достаточно для этого положить $\nu=2n$; действительно, мы находим тогда для абсолютного значения отношения членов со значками n и $n-1$ следующее выражение:

$$x^2\frac{(n-a)(n-b)}{n}\cdot\frac{(n-1)^{2n-2}}{n^{2n}},$$

которому можем дать вид:

$$\frac{x^2}{n}\cdot\frac{(n-a)(n-b)}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-2}.$$

Полученное выражение непосредственно обнаруживает, что каково бы ни было значение x, при n бесконечно большом оно равно нулю.

Из доказанного нами следует, что, обозначив через $G(x)$ голоморфную функцию, мы получаем формулу:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)} = G(x) + \frac{R_0}{x} &+ R_1\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) \\ &+ R_2\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3}\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ R_n\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} - \dots - \frac{x^{2n-2}}{n^{2n-1}}\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Изучение интегралов $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{z-a-ib+t}$ и $\int\limits_{a}^{b} \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\,dz$; их разрезы. — Примеры на нахождение определенных интегралов помощью исследования разрезов. — Распространение понятия интеграла от однозначной функции $\int\limits_{x_0}^{x} f(u)\,du$, взятого между вещественными границами, на мнимые значения этих границ приводит к функции, имеющей разрезами пучок прямых.

В девятой лекции (стр. 105) мы отметили, что если S замкнутый контур, то интеграл Коши

$$\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{S} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

имеет значением $f(x)$ или нуль в зависимости от того, находится ли x внутри или снаружи этого контура. Кривая интегрирования является, следовательно, линией разрыва и интегральное исчисление, таким образом, дало нам пример аналитического выражения, совершенно несхожего с изученными выше однозначными функциями, отличавшимися тем, что имели разрывы только в изолированных точках. Покажем теперь, что, не прибегая к криволинейным интегралам, достаточно определенных интегралов, взятых в элементарном смысле, в которых переменное интегрирование пробегает только вещественные значения, чтобы получить новое и чрезвычайно важное понятие об однозначных функциях, допускающих разрезы; это замечание заслуживает внимания, так как оно приводит простым и легким путем к исследованиям, играющим важную роль в работах Римана. Мы уже имели очень простой частный случай этого; мы должны были изучить интеграл

$$J = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t+iz}$$

как раз с интересующей нас точки зрения, распространяя на всю плоскость функцию $\operatorname{arctg} x$, первоначальное определение которой ограничивалось вещественными значениями переменной. Возвратимся к нему, слегка изменив предыдущее выражение, и рассмотрим, в виду важного ее значения, функцию:

$$\Phi(z)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dt}{z-a-ib+t},$$

где пределы α и β вещественные.

Заметим сначала, что интеграл не определен нами при значениях z, удовлетворяющих условию:

$$z-a-ib+t=0.$$

Пусть $z=x+iy$ решение этого уравнения:

$$x=a-t;\quad y=b,$$

причем t изменяется от α до β; таким образом мы получаем отрезок прямой AB (рис. 48) параллельной оси абсцисс. Отсюда вытекает, что для точки z, взятой на этом отрезке, функция $\Phi(z)$ не существует, тогда как для всякой другой точки плоскости она имеет единственное, вполне определенное значение. Мы утверждаем теперь, что AB есть разрез. Возьмем на перпендикуляре к AB, восстановленном в точке C, на равных от нее расстояниях, точки N и N'.

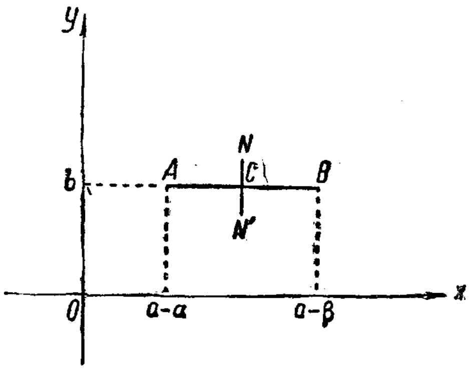

Рис. 48.

Обозначим через θ значение t в точке C и пусть $CN=CN'=\lambda$. Положим далее: $\zeta=a+ib-\theta$; таким образом, аффикс точки N будет: $\zeta+i\lambda$ и аффикс точки N': $\zeta-i\lambda$; имеем, заменив ζ ее значением:

$$\Phi(N)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dt}{t-\theta+i\lambda};\qquad \Phi(N')=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dt}{t-\theta-i\lambda};$$

отсюда заключаем:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=-2i\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\lambda\,dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2},$$

и, следовательно:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=-2i\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta-\theta}{\lambda}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\theta}{\lambda}\right).$$

Если θ не заключается между α и β, это выражение равно нулю при $\lambda=0$. Но если θ заключается между α и β, $\Phi(N)-\Phi(N')$ стремится к $-2i\pi$, так как при бесконечно малом и положительном λ:

$$\operatorname{arctg}\frac{\beta-\theta}{\lambda}=\frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\theta}{\lambda}=-\frac{\pi}{2}.$$

Отрезок AB, следовательно, разрез для явно однозначной функции $\Phi(z)$. В то же время мы видим, что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2i\lambda\,dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2}$$

не всегда равен нулю вместе с λ. В самом деле, если мы положим, что θ заключено между α и β, интеграл будет равен $2i\pi$ при бесконечно малом λ. Получаем так называемый особенный интеграл. Элементы такого интеграла равны нулю, за исключением единственного соответствующего $t=\theta$, который бесконечно велик. Особенные интегралы часто применялись Коши и Пуассоном; но в работах настоящего времени они не имеют такого широкого распространения.

Результат, выведенный так просто, применяется при нахождении определенных интегралов; но предварительно необходимо сделать несколько замечаний.

Пусть $f(z)$ однозначная функция, которая становится бесконечной при $z=a+ib$; точки плоскости, в которых функция:

$$\Phi(z)=\int_{\alpha}^{\beta}D_t f(t+z)\,dt$$

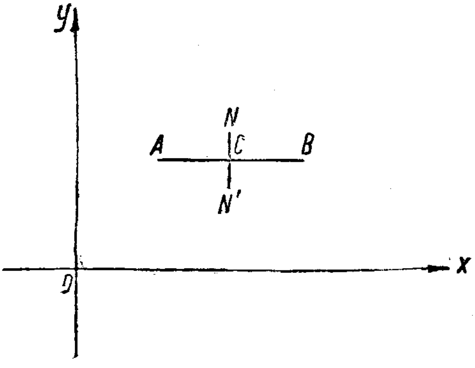

Рис. 49.

не определена данным интегралом, получаются, если положим:

$$t+z=a+ib,$$

откуда:

$$\begin{cases}x=a-t\\ y=b,\end{cases}$$

уравнение, представляющее, как мы уже указали, отрезок прямой AB параллельный Ox. Возьмем, как выше, две точки N и N' с той и другой стороны от AB, на перпендикуляре в точке C к этой прямой, и пусть $CN=CN'=\lambda$.

Мы утверждаем, что в настоящем случае изменение функции $\Phi(z)$ у обоих концов разреза, т. е. $\Phi(N)-\Phi(N')$, будет бесконечно мало вместе с λ, тогда как в изложенном выше случае эта разность равнялась $-2i\pi$.

Пусть θ значение t в точке $a+ib$, которую для краткости обозначим через c. Положим ζ соответствующее значение z; имеем: $\theta+\zeta=c$. Аффикс точки N будет $\zeta+i\lambda$ и мы получим:

$$\Phi(N)=f(\beta+\zeta+i\lambda)-f(\alpha+\zeta+i\lambda),$$

и затем, заменив ζ ее значением:

$$\Phi(N)=f(c+\beta-\theta+i\lambda)-f(c+\alpha-\theta+i\lambda).$$

Для всех значений θ, не равных β или α, оба члена этого выражения остаются конечными, когда $\lambda=0$, и мы можем разложить $\Phi(N)$ в ряд по степеням λ по формуле Маклорена. Заметив, что $\Phi(N')$ выводится из $\Phi(N)$ заменою λ на $-\lambda$, непосредственно обнаруживаем, что разность $\Phi(N)-\Phi(N')$ бесконечно мала вместе с λ.

Установив это, рассмотрим рациональную функцию или вообще любую однозначную функцию $f(t)$, пусть:

$$\Phi(z)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t+z)\,dt;$$

каждому из полярных или существенных разрывов $f(t)$ соответствует разрез для $\Phi(z)$; эти разрезы являются отрезками прямых, параллельных Ox.

Находим изменение $\Phi(z)$ у обоих концов того разреза, который соответствует разрыву $t=a$ функции $f(t)$.

Как известно:

$$f(t)=\sum\left[G_a\left(\frac{1}{t-a}\right)+P_a(t)\right],$$

причем G_a и P_a соответственно голоморфная функция и целый полином. Из $G_a\left(\frac{1}{t-a}\right)$ мы получаем член, который делает $\Phi(z)$ разрывной при $t=a$; мы видели, что можно написать:

$$G_a\left(\frac{1}{t-a}\right)=\frac{A}{t-a}+H_a'\left(\frac{1}{t-a}\right),$$

где H_a' обозначает производную голоморфной функции и где A — вычет $f(t)$ относительно $t=a$. Следовательно, доказанное нами обнаруживает, что изменение $\Phi(N)-\Phi(N')$ у обоих концов разреза, соответствующего рассматриваемому разрыву $f(t)$, равно $-2i\pi A$, т. е. произведению $-2i\pi$ на вычет $f(t)$ относительно $t=a$.

Применим эти результаты, во-первых, к вычислению интеграла

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt,$$

в котором $f(t)$ рациональная функция вещественной переменной t. Напомним, что функция $f(t)$ должна быть конечной для всех вещественных значений переменной, и, таким образом, все ее полюсы должны быть мнимыми. Кроме того, наличие бесконечных пределов требует, чтобы в рациональной функции $f(t)$ степень числителя была бы по крайней мере на две единицы ниже степени знаменателя. Впрочем, это необходимое условие обнаружится само собой из метода, который мы сейчас изложим.

Заметим, во-первых, что функция:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

не зависит от z. В самом деле, имеем:

$$\Phi'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t+z)\,dt;$$

мы видим, что $\Phi'(z)$ есть разность значений функции $f(t+z)$ при $t=+\infty$ и $t=-\infty$; но на основании поставленных нами условий, которым должна удовлетворять функция $f(t)$, эти два значения будут равны нулю; следовательно, $\Phi'(z)=0$. И, таким образом, $\Phi(z)$ не зависит от z, но ее значение, постоянное между некоторыми границами, изменяется, когда переходим от одного интервала к другому.

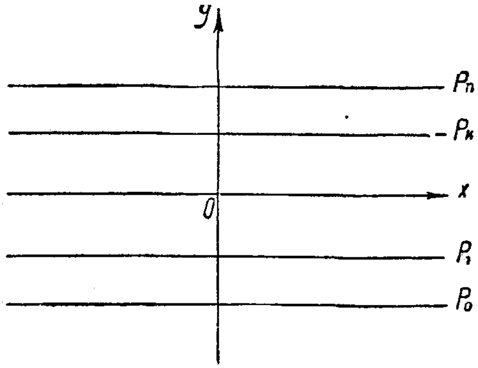

Рис. 50.

Замечаем, что если z равно бесконечно большому мнимому значению, то функция $f(t+z)$ равна нулю; таким образом там имеем:

$$\Phi(z)=0.$$

Отмечаем затем, что если $a+bi$ будет одним из полюсов $f(t)$, то соответствующий ему разрез будет дан уравнениями: $x=a-t$; $y=b$, в которых t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Это разрез, следовательно, вся прямая, параллельная оси Ox, ординаты которой равны коэфициенту при i.

Заметив это, расположим полюсы $f(t)$ в порядке возрастания коэфициентов при i и обозначим их через:

$$a_0+ib_0, \quad a_1+ib_1, \; \ldots \; a_n+ib_n,$$

проведем линии, параллельные оси OX, имеющие ординатами значения этих коэфициентов. Следовательно, прямые (рис. 50):

$$P_0, \; P_1, \; \ldots \; P_n$$

образуют систему разрезов функции $\Phi(z)$.

В этом случае, когда z имеет очень большое мнимое значение, при котором коэфициент при i отрицателен, то функция $\Phi(z)$, как мы это видели, будет равна нулю и, следовательно, останется равной нулю во всей области плоскости, расположенной ниже первого разреза. При пересечении этой линии, функция $\Phi(z)$ претерпевает изменение, равное, как мы это показали, $-2i\pi R_0$, где R_0 — вычет $f(t)$, отвечающий полюсу a_0+ib_0, соответствующему этому разрезу. Мы найдем таким же образом, пересекши вторую линию

$$\Phi(z) = -2i\pi(R_0+R_1)$$

и продолжая так далее, мы найдем, что значение функции в области плоскости, заключенной между разрезами P_k и P_{k+1}, будет равно:

$$-2i\pi(R_0+R_1+\ldots+R_k),$$

причем R_k, вообще, вычет $f(t)$, отвечающий полюсу a_k+ib_k.

Наконец, значение функции $\Phi(z)$ в части плоскости, расположенной выше последнего разреза P_n, равно: $-2i\pi(R_0+R_1+\ldots+R_n)$. Но на основании сказанного выше, в этой части плоскости значение функции $\Phi(z)$ равно нулю. Следовательно, сумма вычетов, т. е. то, что Коши называет полным вычетом функции, должна равняться нулю. Ясно, что это условие тождественно условию, высказанному выше, а именно, что степень числителя $f(t)$ должна быть ниже степени знаменателя, по крайней мере, на две единицы; чтобы убедиться в этом, достаточно разложить $f(t)$ на простые дроби и каждую из этих дробей разложить по убывающим степеням переменной.

Так как J равен $\Phi(0)$, мы видим, что, считая ось Ox заключенной между разрезами P_k и P_{k+1}, имеем:

$$J = -2i\pi(R_0+R_1+\ldots+R_k)$$

или, согласно условию $R_0+R_1+\ldots+R_n=0$,

$$J = 2i\pi(R_{k+1}+R_{k+2}+\ldots+R_n).$$

Искомое выражение $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ равно, следовательно, произведению $2i\pi$ на сумму вычетов, отвечающих полюсам $f(t)$, расположенным выше оси Ox; этот результат аналогичен полученному раньше на стр. 145 помощью теоремы Коши, дающей значение интеграла от однозначной функции по замкнутому контуру.

Для второго приложения найдем еще значение интеграла.

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}\,dt;$$

следуя путем, примененным при вычислении интеграла от рациональной функции, рассмотрим функцию:

$$\Phi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(t+z)}-e^{b(t+z)}}{1-e^{(t+z)}}\,dt.$$

Получаем сначала систему разрезов, заданную уравнением $y=2k\pi$, в котором k принимает все целые значения, положительные или отрицательные, за исключением $k=0$.

Замечаем, что в этом случае, хотя функция $f(t)$ не рациональная, но трансцендентная, выражение

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

все же остается постоянным относительно z в каждой области, ограниченной двумя последовательными разрезами. Рассмотрим в частности разрезы, соответствующие $k=1$ и $k=2$; значение постоянной в этом интервале получается следующим образом. Пусть R_1 и R_2 вычеты функции

$$f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^{t}}$$

для $t=2i\pi$ и $t=4i\pi$; пересекая последовательно разрезы $y=2\pi$, $y=4\pi$, имеем:

$$\Phi(z+2i\pi)=\Phi(z)-2i\pi R_1,$$
$$\Phi(z+4i\pi)=\Phi(z)-2i\pi(R_1+R_2).$$

Положив для сокращения

$$\alpha=e^{2ai\pi},\quad \beta=e^{2bi\pi},$$

находим следующие значения вычетов:

$$R_1=\beta-\alpha,\quad R_2=\beta^2-\alpha^2;$$

при этом, так как функция $f(t)$ содержит линейно две показательные функции e^{at} и e^{bt}, находим соотношение:

$$f(t+4i\pi)-(\alpha+\beta)f(t+2i\pi)+\alpha\beta f(t)=0.$$

Из него мы выводим следующее равенство:

$$\Phi(z+4i\pi)-(\alpha+\beta)\Phi(z+2i\pi)+\alpha\beta\Phi(z)=0;$$

достаточно заменить в нем $\Phi(z+4i\pi)$ и $\Phi(z+2i\pi)$ данными выше выражениями, чтобы сразу получить:

$$\Phi(z)=\frac{2i\pi\left[R_1+R_2-(\alpha+\beta)R_1\right]}{(1-\alpha)(1-\beta)}=i\pi\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right).$$

Вводим, наконец, вместо α и β их значения и полагаем в частности $z=0$; приходим к интегралу, полученному на стр. 156:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^{t}}\,dt=\pi(\operatorname{ctg} a\pi-\operatorname{ctg} b\pi).$$

Рассмотрим теперь с более общей точки зрения функцию:

$$\Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt,$$

беря интеграл всегда между вещественными границами и считая функции $F(t, z)$ и $G(t, z)$ от t и z голоморфными.

Заметим, как и выше, что этот интеграл имеет единственное и конечное значение для всех точек плоскости, за исключением тех точек, которые определяются из условия $G(t, z) = 0$. Это уравнение приводит в соответствии ряду вещественных значений t, возрастающих от α до β, то конечное, то бесконечное число отрезков кривых или целых кривых, смотря по случаю, указывая таким образом точки плоскости, в которых интеграл не дает значения функции.

Докажем, что эти кривые имеют характерные свойства разрезов.

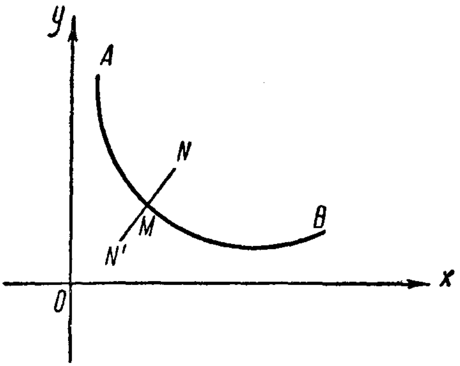

Рис. 51.

Пусть AMB одна из кривых, отнесенная к прямоугольным координатным осям Ox, Oy, и M точка на ней, для которой $t = \theta$, $z = \zeta$ и, следовательно: $G(\theta, \zeta) = 0$ (рис. 51). Вычислим разность значений функции $\Phi(z)$ в точках N и N', лежащих на нормали в точке M на равных между собой бесконечно малых расстояниях MN, MN'; покажем, что эта разность величина конечная.

Составим прежде всего уравнение нормали, исходя из соотношения:

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy = 0,$$

в котором X и Y — текущие координаты, а x и y — координаты точек кривой, которые считаем функциями от t. Мы можем заменить это уравнение следующими двумя:

$$X - x = \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$Y - y = -\lambda \frac{dx}{dt},$$

в которых λ — неопределенный вещественный коэфициент; отсюда получаем:

$$X - x + i(Y - y) = \lambda \frac{dy}{dt} - i\lambda \frac{dx}{dt} = -i\lambda \frac{d(x + iy)}{dt},$$

и, следовательно:

$$X + iY = z - i\lambda \frac{dz}{dt}.$$

Находим теперь из заданного уравнения кривой $G(t, z) = 0$:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{G_t'(t, z)}{G_z'(t, z)}.$$

Исключая случай, когда для некоторых частных значений t и z мы имеем $G_t'(t, z) = 0$ и $G_z'(t, z) = 0$, получаем аффикс любой точки нормали, равный:

$$Z = z + i\lambda \frac{G_t'(t, z)}{G_z'(t, z)}.$$

Чтобы отделить вещественные и мнимые количества, полагаем:

$$\frac{G_t'(t, z)}{G_z'(t, z)} = p + iq;$$

получаем соотношения:

$$X = x - \lambda q$$
$$Y = y + \lambda p,$$

которые приводят к следующему замечанию.

Предположим сначала, что p не равно нулю; назовем положительным направлением нормали ту часть этой прямой, которая от точки пересечения с кривой идет бесконечно вверх от оси абсцисс, а обратное направлением отрицательным.

Очевидно, что при положительном значении p мы получим положительное направление, если заставим λ возрастать от нуля до бесконечности; обратное направление определяется отрицательными значениями этого коэфициента; при отрицательном p будем иметь обратное. Допустим далее, что $p = 0$; при этом нормаль будет параллельна оси абсцисс. В этом случае положительное направление нормали совпадает с положительным направлением оси, если λ приписать знак, обратный знаку q. Следовательно, всегда можно представить положительную часть нормали уравнениями:

$$X = x - \varepsilon\lambda q$$
$$Y = y + \varepsilon\lambda p,$$

в которых λ положительно и ε, равное по абсолютному значению единице, имеет знак, одинаковый с p, если p не равно нулю; в случае же, когда $p = 0$, то знак ε одинаков со знаком $-q$. Отрицательную часть нормали мы получим из тех же самых уравнений, считая в них λ отрицательным.

Установив это, полагаем:

$$G_t'(t, z) = P(t, z)$$
$$G_z'(t, z) = Q(t, z)$$
$$F_z'(t, z) = R(t, z).$$

Так как в точке M мы имеем $t = \theta$, $z = \zeta$, то аффикс точки N, расположенный на положительном направлении нормали, будет задан формулой:

$$z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)},$$

в которой λ имеет бесконечно малое и положительное значение или проще:

$$z = \zeta + \frac{i\varepsilon\lambda P}{Q},$$

написав для краткости P и Q вместо $P(\theta, \zeta)$ и $Q(\theta, \zeta)$.

Пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, имеем:

$$F\left(t, \zeta + \frac{i\varepsilon\lambda P}{Q}\right) = F(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda \frac{PR(t, \zeta)}{Q}$$

и

$$G\left(t, \zeta + \frac{i\varepsilon\lambda P}{Q}\right) = G(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda \frac{PQ(t, \zeta)}{Q};$$

последние выражения дают:

$$\Phi(N) = \int_\alpha^\beta \frac{QF(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda PR(t, \zeta)}{QG(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda PQ(t, \zeta)}\, dt.$$

Переходя затем от точки N к симметричной ей точке N', получаем путем замены λ на $-\lambda$:

$$\Phi(N') = \int_\alpha^\beta \frac{QF(t, \zeta) - i\varepsilon\lambda PR(t, \zeta)}{QG(t, \zeta) - i\varepsilon\lambda PQ(t, \zeta)}\, dt,$$

и после несложного преобразования:

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\int_\alpha^\beta \frac{2i\varepsilon\lambda PQ\,[F(t, \zeta)\,Q(t, \zeta) - G(t, \zeta)\,R(t, \zeta)]}{Q^2G^2(t, \zeta) + \lambda^2P^2Q^2(t, \zeta)}\, dt.$$

Полученное выражение и определяет значение разности. Очевидно, мы имеем особенный интеграл, так как λ предполагается бесконечно малой; нам достаточно рассматривать элементы, обращающиеся в бесконечность и получающиеся при значениях переменной, делающих $G(t, \zeta)$ нулем. Но такое значение $t = \theta$; добавлю, что между границами $t = \alpha$, $t = \beta$ уравнение $G(t, \zeta) = 0$ не может иметь никакого другого корня $t = \theta'$. Действительно, это обстоятельство возможно только тогда, когда $z = \zeta$ будет двойной точкой; в этом случае, как легко установить, должны иметь место условия $G(t, z) = 0$, $G_t'(t, z) = 0$, $G_z'(t, z) = 0$, противоречащие ограничениям, поставленным нами при выводе уравнения нормали. Отсюда следует, что, пренебрегая квадратом $(t - \theta)$, мы можем положить:

$$G(t, \zeta) = (t - \theta)\,P$$

и непосредственно заменить в числителе t через θ; таким образом, упрощая, приходим к выражению:

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\frac{2i\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)} \int_\alpha^\beta \frac{\lambda dt}{(t - \theta)^2 + \lambda^2}.$$

Для бесконечно малого λ, как мы это уже видели, имеем:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2}=\pi;$$

и, следовательно:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=-\frac{2i\pi\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)}$$

Этот результат обнаруживает для рассматриваемых кривых аналитический характер разрезов функции $\Phi(z)$.

Применим сказанное к следующему вопросу.

Пусть $f(u)$ — однозначная функция; рассмотрим интеграл

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\, du,$$

взятый по вещественным значениям переменной; пределы интеграла, следовательно, вещественные. Выполнив подстановку:

$$u=x_0+(x-x_0)\,t,$$

получаем преобразованный интеграл:

$$J=\int_{0}^{1}(x-x_0) f[x_0+(x-x_0)\,t]\;\; dt,$$

который имеет определенный смысл при мнимых значениях x_0 и x. Заменив x на z, а x_0 некоторой мнимой постоянной z_0, мы получаем таким образом некоторую определенную на всей плоскости однозначную функцию:

$$\Phi(z)=\int_{0}^{1}(z-z_0) f[z_0+(z-z_0)\,t]\, dt,$$

которое является расширением интеграла J посредством приема, применявшегося в девятой лекции для

$$\operatorname{arctg} x=\int_{0}^{x}\frac{du}{1+u^2}.$$

Пусть $u=a$ — разрыв функции $f(u)$; ряд значений z, удовлетворяющих условию:

$$z_0+(z-z_0)\,t=a,$$

когда t возрастает от нуля до единицы, не определяет функции $\Phi(z)$ посредством этого интеграла. Дав предыдущему условию вид;

$$z-z_0=\frac{a-z_0}{t},$$

мы видим, что значения, о которых идет речь, лежат на прямой, проходящей через точки Z_0 и A, имеющие аффиксами z_0 и a; следовательно, прямые, отвечающие различным разрывам, как имеющие общую точку Z_0, образуют пучок. Прибавим, что, если мы будем уменьшать t от единицы до нуля, мы получаем от точки A безграничную часть AZ; оставшийся отрезок прямой отвечает положительным значениям t от $t=1$ до $t=+\infty$ и его отрицательным значениям.

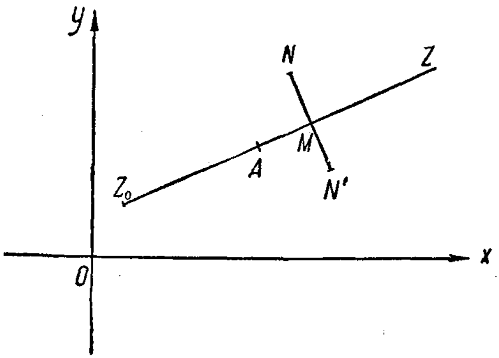

Рис. 52.

Установив это, я говорю, что AZ есть разрез $\Phi(z)$.

В самом деле, рассмотрим в выражении однозначной функции $f(u)$ часть $G_a\left(\frac{1}{u-a}\right)$, которая дает разрыв $u=a$, и пишем, как выше:

$$G_a\left(\frac{1}{u-a}\right)=\frac{A}{u-a}+H_a'\left(\frac{1}{u-a}\right).$$

Чтобы получить разность значений функции $\Phi(z)$ в двух точках N и N', лежащих на перпендикуляре к прямой в точке M, аффикс которой ζ (рис. 52), достаточно положить $f(u)=\frac{A}{u-a}$, и следовательно:

$$\Phi(z)=\int_0^1 \frac{A(z-z_0)\,dt}{z_0-a+(z-z_0)\,t}.$$

Таким образом, имеем:

$$F(t, z)=A(z-z_0)$$
$$G(t, z)=z_0-a+(z-z_0)\,t,$$

откуда:

$$P(t, z)=z-z_0$$
$$Q(t, z)=t;$$

искомое выражение:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=-\frac{2i\pi\varepsilon A(\zeta-z_0)}{\zeta-z_0}=-2i\pi\varepsilon A$$

В этой формуле остается еще определить знак ε; для этого необходимо прибегнуть к соотношению:

$$\frac{G_t'(t, z)}{G_z'(t, z)}=p+iq.$$

Предположим, что в точке M имеем $t=\theta$, тогда как $z=\zeta$; это уравнение примет вид:

$$\frac{\zeta-z_0}{\theta}=p+iq,$$

и так как θ положительно, мы видим, что знак p и, следовательно, ε будет одинаков со знаком вещественной части $\zeta-z_0$ или $a-z_0$, согласно с соотношением

$$z_0-a+(\zeta-z_0)\,\theta=0.$$

Изменение функции $\Phi(z)$ имеет, следовательно, то же самое значение во всех точках разреза. [1]

---

[1] См. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique de M. **Camille Jordan**, т. III, стр. 610, где изучение функции $\Phi(z)$ представлено с новой, более общей точки зрения, имеющей большой интерес.

СЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Исследование двойного интеграла

$$\iint \frac{f(x, y)}{g(x, y) - z}\, dx\, dy,$$

взятого по данной площадке, по методу Лагерра и разрез этого интеграла. — Ряд Таннери, имеющий разрезом окружность с центром в начале и радиусом, равным единице.—Аналогичные и большой обобщенности результаты, полученные Аппелем; разложения в ряд на площадке, ограниченной дугами круга. — Пример, данный Пуанкарэ, функции, определенной на всей плоскости за исключением некоторой области.

Исследование двойных интегралов вида:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{u_0}^{u_1} \frac{F(t, u, z)}{G(t, u, z)}\, du,$$

в которых пределы предполагаются постоянными и функции $F(t, u, z)$, $G(t, u, z)$ от t и u голоморфными, приводит к вопросам, аналогичным тем, которые рассматривались в предыдущей лекции. Гурса посвятил им прекрасный мемуар, озаглавленный: Sur une classe d'intégrales doubles; Acta mathematica, т. V, стр. 97, к которому мы еще вернемся. В том же самом порядке идей Лагерр становится на другую точку зрения и рассматривает функцию, определенную двойным интегралом, взятым по площадке A:

$$\Phi(z) = \iint \frac{F(x, y, z)}{G(x, y, z)}\, dx\, dy,$$

где $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ конечные, вещественные и непрерывные функции на площадке A, при всяком значении z. Значение функций будет всегда конечно и определенно, если только не существует такого значения $z = \zeta$, при котором кривая $G(x, y, z) = 0$ пересекает область интегрирования. В противном случае вещественные значения z, которым соответствуют кривые, пересекающие площадь A, образуют особенную линию, так как в этом случае интеграл не определяет функции. Пусть $z = \zeta$ такое значение; Лагерр рассматривает разность:

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda)$$

и доказывает, что при бесконечно малом λ она конечна, и вполне определяет ее для частного случая, когда:

$$F(x, y, z) = f(x, y)$$
$$G(x, y, z) = g(x, y) - z.$$

Этот важный результат, опубликованный в Comptes-rendus (т. 99, стр. 1065) показывает, что указанная особенная линия является разрезом функции; любезное сообщение знаменитого геометра позволяет мне привести здесь доказательство этого.

Пусть A — площадка, по которой интегрируют, $\alpha\beta$ — часть кривой, $g(x, y) = \zeta$, пересекающей эту площадку (рис. 53). Обозначив через μ бесконечно малое положительное число, строим кривые $\mu_0\nu_0$ и $\mu_1\nu_1$, уравнения которых:

$$g(x, y) = \zeta - \mu, \qquad g(x, y) = \zeta + \mu.$$

Рассматривая разность:

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda) = 2i \iint \frac{\lambda f(x, y)\, dx\, dy}{[g(x, y) - \zeta]^2 + \lambda^2}$$

и предполагая, что λ бесконечно мало, легко заключаем, что значение интеграла в правой части не близко к нулю только в части, взятой по области, заключенной на площадке A между двумя кривыми $\mu_0\nu_0$ и $\mu_1\nu_1$. Производим интегрирование по y, положив x постоянной, и для большей ясности пишем u вместо y, сохранив эту букву для обозначения ординаты кривой $g(x, y) = \zeta$. Пусть u_0 и u_1 — ординаты MM_0 и MM_1 точек кривых $\mu_0\nu_0$ и $\mu_1\nu_1$, имеющих абсциссой $OM = x$, причем u_0 меньше u_1; имеем:

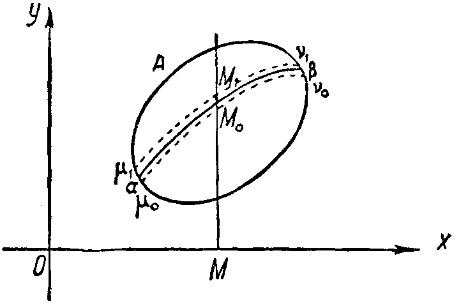

Рис. 53.

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda) = 2i \int dx \int_{u_0}^{u_1} \frac{\lambda f(x, u)\, du}{[g(x, u) - \zeta]^2 + \lambda^2}$$

или, если заметим, что $f(x, u)$ бесконечно мало отмечается от $f(x, y)$:

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda) = 2i \int f(x, y)\, dx \int_{u_0}^{u_1} \frac{\lambda du}{[g(x, u) - \zeta]^2 + \lambda^2}.$$

Вычислим теперь ординату u_0 из соотношения:

$$g(x, u_0) = \zeta - \mu.$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можем написать:

$$g(x, u_0) = g(x, y + u_0 - y) = g(x, y) + (u_0 - y)\, g_y'(x, y) =$$
$$= \zeta + (u_0 - y)\, g_y'(x, y).$$

Отсюда:

$$(u_0 - y)\, g_y'(x, y) = -\mu$$

и u_0, следовательно, равно:

$$u_0 = y - \frac{\mu}{g_y'(x, y)}.$$

Изменив знак μ, мы получаем ординату точки на кривой $\mu_1 \nu_1$:

$$u_1 = y + \frac{\mu}{g_y'(x, y)},$$

и так как мы полагаем вторую ординату больше первой, пишем, обозначив через $[g_y'(x, y)]$ абсолютное значение этой производной:

$$u_0 = y - \frac{\mu}{[g_y'(x, y)]}$$

$$u_1 = y + \frac{\mu}{[g_y'(x, y)]}.$$

Интеграл, который мы вычисляем, принимает таким образом вид:

$$2i \int f(x, y)\, dx \int\limits_{y - \frac{\mu}{[g_y']}}^{y + \frac{\mu}{[g_y']}} \frac{\lambda du}{[g(x, u) - \zeta]^2 + \lambda^2}$$

или, если выполнить подстановку:

$$u = y + \lambda t:$$

$$2i \int f(x, y)\, dx \int\limits_{-\frac{\mu}{\lambda [g_y']}}^{\frac{\mu}{\lambda [g_y']}} \frac{dt}{g_y'(x, y)^2 t^2 + 1}$$

Заставляя бесконечно уменьшаться постоянную λ, которую мы считаем положительной, получаем искомое выражение:

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda) = 2i\pi \int \frac{f(x, y)\, dx}{[g_y'(x, y)]},$$

справа стоит простой интеграл, взятый по отрезку кривой:

$$g(x, y) = \zeta,$$

принадлежащему площадке A.

Пусть например:

$$\Phi(z) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{f(x, y)\, dx\, dy}{1 - xyz}$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\frac{f(x, y)}{xy} dx\, dy}{\frac{1}{xy} - z}.$$

Имеем:

$$g_y'(x, y) = -\frac{1}{xy^2} \quad \text{и} \quad [g_y'(x, y)] = \frac{1}{xy^2},$$

следовательно, находим:

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda) = 2i\pi \int_{\frac{1}{\zeta}}^{1} f(x, y)\, y dx,$$

где требуется заменить y на $\frac{1}{\zeta x}$ и считать ζ положительным и большим единицы для того, чтобы гипербола пересекала площадь интегрирования. Позже мы применим эту формулу к важному вопросу, касающемуся теории эллиптических функций.

Изучение простых определенных интегралов, а также двойных интегралов, составляющих предмет исследований Лагерра, привело нас таким образом элементарным путем к понятию о функциях, имеющих целые линии разрыва. Вейерштрасс показал, что можно притти к этому аналитическому понятию, не прибегая к интегральному исчислению; он первый дал пример бесконечных рядов, составленных из вещественных выражений и представляющих функции, которые допускают настоящие разрезы (Comptes-rendus Германской Академии наук, 1880). Эти результаты, выведенные великим геометром, были получены Таннери более легким и элементарным путем, помощью ряда:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \ldots,$$

сумма которого находится следующим образом. Складываем почленно тождества:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} = \frac{1+x^4}{1-x^4},$$

$$\frac{1+x^4}{1-x^4} + \frac{2x^4}{x^8-1} = \frac{1+x^8}{1-x^8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}} + \frac{2x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} = \frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}};$$

получаем, таким образом:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \ldots + \frac{2x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} = \frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Отсюда вытекает, что если n беспредельно возрастает, сумма рассматриваемого ряда равна единице для $x<1$ и -1, если x или его модуль >1.

Следовательно, функция, заданная рядом, имеет разрезом окружность с радиусом, равным 1, и центром в начале координат.

Приведем теперь в том же порядке понятий более общие и чрезвычайно интересные выводы, полученные Аппелем, которые знаменитый аналитик, по моей просьбе, изложил следующим образом.

Разложение в ряд на площадках, ограниченных дугами круга.

Метод, применяемый при выводе рядов Тейлора и Лорана, может быть распространен и на разложение голоморфной функции в ряд на площади, ограниченной пересекающимися дугами круга. Такого рода разложения обладают некоторыми свойствами, первые примеры которых были указаны Вейерштрассом и выведены из теории эллиптических функций. Пусть ABC криволинейный треугольник (рис. 53bis), стороны которого образованы дугами кругов, обращенными выпуклостями внутрь треугольника. Описываем полностью круги, которым принадлежат дуги BC, CA, AB, и обозначаем соответственно через a, b, c аффиксы центров этих кругов. Пространство, расположенное вне этих трех кругов, состоит из двух частей: во-первых площадь S криволинейного треугольника ABC; во-вторых неограниченная площадь S'.

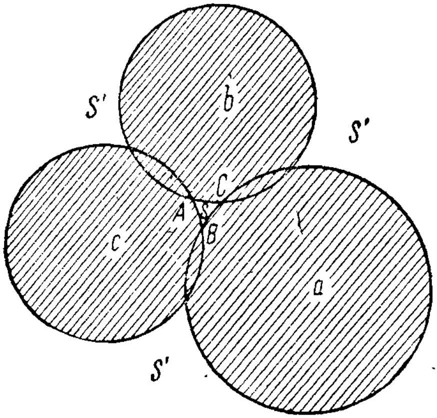

Рис. 53 bis.

Установив это, обозначаем через $f(z)$ голоморфную функцию на площадке S, ограниченной треугольником ABC, и через x — аффикс точки, внешней относительно всех трех кругов: рассмотрим интеграл:

$$J = \int_{BCA} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

распространенный на контур треугольника. Если точка x лежит на площадке S, интеграл J равен: $2i\pi f(x)$, если же точка x лежит на площади S', этот интеграл равен нулю. Разбивая интеграл I на три части, соответственно трем сторонам криволинейного треугольника, будем иметь:

$$J = \int_{BC} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{CA} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{AB} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

В первом из этих равенств заменим $\frac{1}{z-x}$ тождественным ему выражением:

$$\frac{1}{(z-a)-(x-a)} = -\frac{1}{x-a} - \frac{z-a}{(x-a)^2} - \ldots - \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n}.$$

Тогда получим для этого интеграла следующее выражение:

$$\int_{BC} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + R_n,$$

в котором коэфициенты A_1, A_2 ... заданы формулами:

$$A_1 = -\int_{BC} f(z)\,dz, \qquad A_2 = -\int_{BC} (z-a) f(z)\,dz, \;\ldots,$$

$$A_n = -\int_{BC} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz,$$

а остаток R_n:

$$R_n = \int_{BC} \left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

причем интегралы берутся вдоль дуги BC. По формуле Дарбу имеем:

$$R_n = \lambda \operatorname{arc} BC \left(\frac{\rho-a}{x-a}\right)^n \cdot \frac{f(\rho)}{\rho-x},$$

где ρ обозначает точку дуги BC; когда n бесконечно увеличивается, этот остаток стремится к нулю, так как модуль отношения $\frac{\rho-a}{x-a}$ меньше единицы, ибо точка аффикса x, согласно предположению, лежит вне круга, которому принадлежит дуга BC. Таким образом, для всех значений x, соответствующих точкам площади S или неограниченной площади S':

$$\int_{BC} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \ldots.$$

Повторяя аналогичное рассуждение, будем иметь для тех же самых значений x:

$$\int_{CA} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \ldots$$

$$\int_{AB} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(x-c)^n} + \ldots,$$

где:

$$B_n = -\int_{CA} (z-b)^{n-1} f(z)\,dz, \qquad C_n = -\int_{AB} (z-c)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Заменим, наконец, в J все три указанные выше интеграла соответствующими рядами:

$$J = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n}\right];$$

разложение действительно во всех точках площадей S и S'. Если точка x лежит на площадке S криволинейного треугольника ABC, то интеграл J, а следовательно, и сумма ряда равны $2i\pi f(x)$, если же точка x принадлежит к неограниченной площади S', интеграл J, так же как и сумма ряда, равны нулю.

Разделив на $2i\pi$, будем иметь ряд рациональных дробей:

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{B_n}{(x-b)^n}+\frac{C_n}{(x-c)^n}\right],$$

сходящийся на площадях S и S': сумма этого ряда равна $f(x)$ на площади S и нулю на площади S'.

Пример. Положим $f(x)=1$; обозначим через α, β, γ — аффиксы точек A, B, C. Тогда:

$$A_n=-\int_{\beta}^{\gamma}(z-a)^{n-1}\,dz=\frac{(\beta-a)^n-(\gamma-a)^n}{n}$$

$$B_n=-\int_{\gamma}^{\alpha}(z-b)^{n-1}\,dz=\frac{(\gamma-b)^n-(\alpha-b)^n}{n}$$

$$C_n=-\int_{\alpha}^{\beta}(z-c)^{n-1}\,dz=\frac{(\alpha-c)^n-(\beta-c)^n}{n};$$

следовательно, ряд:

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(\beta-a)^n-(\gamma-a)^n}{(x-a)^n}+\frac{(\gamma-b)^n-(\alpha-b)^n}{(x-b)^n}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha-c)^n-(\beta-c)^n}{(x-c)^n}\right]$$

сходится на площадках S и S' и сумма его равна единице в S и нулю в S'. Это легко доказать, суммируя ряд с помощью формулы:

$$-\ln(1-u)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^n}{n}+\ldots,$$

положив в ней последовательно:

$$u=\frac{\beta-a}{x-a},\quad u=\frac{\gamma-a}{x-a},\quad u=\frac{\gamma-b}{x-b},\ \text{и т. д.}$$

Замечание. Ряд, полученный в общем случае:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{B_n}{(x-b)^n}+\frac{C_n}{(x-c)^n}\right]$$

сходится на площадках S и S' и сумма его равна $f(x)$ на площади S и нулю на S'. Существует бесконечное множество других рядов подобного вида, обладающих теми же свойствами. В самом деле, для всех точек, расположенных вне круга, которому принадлежит дуга CB:

$$\frac{1}{x-\gamma}=\frac{1}{x-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\gamma-a}{x-a}}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(\gamma-a)^{n-1}}{(x-a)^n},$$

и для всех точек, расположенных вне круга, которому принадлежит дуга AC:

$$\frac{1}{x-\gamma}=\frac{1}{x-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\gamma-b}{x-b}}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(\gamma-b)^{n-1}}{(x-b)^n};$$

следовательно, для всех точек, лежащих вне этих двух кругов, ряд:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{(\gamma-a)^{n-1}}{(x-a)^n}-\frac{(\gamma-b)^{n-1}}{(x-b)^n}\right]$$

сходящийся и сумма его равна нулю. То же самое будем иметь для рядов, полученных из ряда $\varphi(x)$, если возьмем от него производные различных порядков по x, которые обозначим:

$$\varphi'(x),\quad \varphi''(x),\ \ldots\ \varphi^{(k)}(x)$$

и, следовательно, для ряда:

$$\lambda_0\varphi(x)+\lambda_1\varphi'(x)+\lambda_2\varphi''(x)+\ldots+\lambda_k\varphi^{(k)}(x).$$

Мы можем, следовательно, прибавить последнее разложение к ряду:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum\left[\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{B_n}{(x-b)^n}+\frac{C_n}{(x-c)^n}\right],$$

не меняя при этом суммы и области сходимости.

Аналогичные рассуждения применяются и к площадям, ограниченным криволинейными многоугольниками, образованными дугами кругов, обращенными выпуклостями внутрь площади.

Закончим изучение разрывов в однозначных функциях, приведя, следуя Пуанкарэ, замечательный пример функции, определенной на всей плоскости, за исключением некоторой области.

Перемножаем следующие уравнения, в которых модули переменных предполагаются меньшими единицы:

$$\frac{1}{1-x}=\sum x^m,$$

$$\frac{1}{1-y}=\sum y^n,$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum z^p.$$

Отсюда заключаем, что тройной ряд $\sum x^m y^n z^p$, в котором показатели m, n, p проходят последовательно все целые числа, начиная от нуля, будет сходящимся, и его значение равно:

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}.$$

Установив это, рассмотрим выражение:

$$\sum \frac{x^m y^n z^p}{\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}-\xi},$$

в котором a, b, c мнимые количества, рассматриваемые как аффиксы трех точек A, B, C (рис. 54). Предполагаем, что к этим точкам приложены три параллельные силы, действующие в одном направлении и пропорциональные целым числам m, n, p. Выражение $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$ является аффиксом точки приложения их равнодействующей; мы можем, следовательно, допустить, что m, n, p выбраны таким образом, что $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$ представляет с желаемой точностью любую точку внутри треугольника ABC. Если ξ аффикс точки, лежащей внутри ABC, то рассматриваемый ряд будет расходящимся потому, что такой ряд содержит неограниченное число бесконечно больших членов и не определяет функции. Наоборот, функция определяется полностью, если ξ аффикс точки вне ABC; таким образом, мы можем сказать, что этот ряд определяет функцию, представляющую треугольник ABC, как пустое пространство.

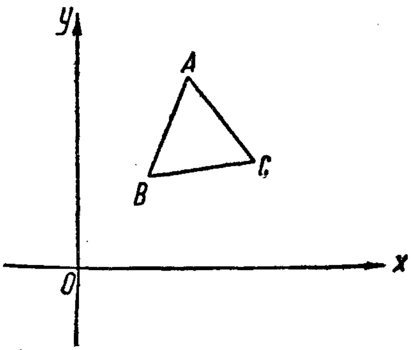

Рис. 54.

Мы выбрали наиболее простой пример; подобным образом могут быть построены функции, определяющие заданный многоугольник, как пустое пространство; мы отсылаем к прекрасной работе Пуанкаре, опубликованной в „Acta Societatis Fennicae" под названием: Sur les fonctions à espaces lacunaires (т. XII, 1881); в ней заключаются по этому вопросу новые и чрезвычайно интересные сведения.

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Выражение числа корней уравнения внутри замкнутого контура определенным интегралом. — Выражение корня и некоторой функции корня, единственного внутри контура. Исследование интеграла $\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, где $f(t)$ мероморфная функция; теорема Коши относительно числа корней уравнения, заключающихся внутри замкнутого контура. — Алгорифм, аналогичный теореме Штурма, для определения числа корней в случае алгебраических уравнений, когда контур задан уникурсальной кривой.

Мы подошли теперь к концу намеченного нами краткого изучения той части общей теории функций, которая относится к однозначным функциям. Прежде, чем приступить к исследованиям, которых мы коснемся только слегка, относящимся к функциям другого рода, мы остановимся на важном вопросе, благодаря которому мы получим возможность изложить одно из наиболее интересных открытий Коши: мы имеем в виду решение посредством определенных интегралов уравнений вида $G(z)=0$, первый член которых есть голоморфная функция неизвестного.

Воспользуемся прежде всего замечанием, которое вытекает из теорем, доказанных выше об этих функциях.

Если a корень кратности m, имеем:

$$G(z)=(z-a)^m H(z),$$

причем $H(z)$ не обращается в нуль при $z=a$. Из этого равенства получаем:

$$\frac{G'(z)}{G(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{H'(z)}{H(z)};$$

следовательно, вычет функции $\frac{G'(z)}{G(z)}$, соответствующий полюсу $z=a$, равен целому и положительному числу m, определяющему порядок кратности корня a. Следовательно, когда мы рассматриваем интеграл $\int_S \frac{G'(z)}{G(z)}dz$, то общая теорема Коши указывает, что значение его будет равно $2i\pi\mu$, где число μ обозначает число корней уравнения $G(z)=0$, заключенных внутри контура S, сосчитанное принимая во внимание порядок кратности каждого из них.

Из этого ясно, что мы всегда можем вычислить число корней уравнения, заключенных внутри любого данного контура. Решение этого вопроса приводится, действительно, к численному вычислению определенного интеграла, которое достаточно вычислить с точностью меньшей единицы, чтобы иметь точное значение искомого числа.

К этой первой теореме прибавим следующую.

Пусть $F(z)$ — конечная, непрерывная и однозначная функция внутри контура S; интеграл:

$$\int\limits_{(S)} \frac{F(z)\,G'(z)}{G(z)}\,dz$$

по теореме Коши равен произведению $2i\pi$ на сумму вычетов функции $\frac{F(z)\,G'(z)}{G(z)}$, взятую по корням функции $G(z)$, заключенным внутри S. Если a один из таких корней кратности m, то соответствующий вычет, очевидно, равен $mF(a)$. Следовательно, предыдущий интеграл равен произведению $2i\pi$ на сумму значений $F(z)$, соответствующих корням $G(z)=0$, заключенным внутри контура S, принимая во внимание их кратность.

Отсюда вытекает, что, если установлено, что внутри контура S имеется только один корень $z=a$, то некоторая функция $F(a)$ от этого корня дается формулой:

$$F(a)=\frac{1}{2i\pi}\int \frac{F(z)\,G'(z)}{G(z)}\,dz$$

и, следовательно, может быть вычислена с любой степенью точности.

Дадим сейчас пример такого приближенного вычисления, рассматривая интеграл, который выражает число μ корней, заключенных внутри круга с радиусом R и с центром в начале, полагая при этом, что $G(z)$ целый полином. Положим для этого, что $z=Re^{it}$; таким образом, положив:

$$J=\int\limits_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz,$$

будем иметь

$$J=\int\limits_0^{2\pi} \frac{G'(z)}{G(z)}\,iRe^{it}dt=i\int\limits_0^{2\pi} \frac{zG'(z)\,dt}{G(z)}$$

и следовательно:

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{zG'(z)}{G(z)}\,dt.$$

Чтобы вычислить интеграл, пользуемся приближенной формулой:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt=\frac{2\pi}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2\pi}{n}\right)+f\left(\frac{4\pi}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right];$$

пусть $\theta=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ первообразный корень уравнения $\theta^n-1=0$; написанное выражение дает тем лучшее приближение, чем больше взято n; имеем:

$$\mu=\frac{1}{n}\sum \frac{z\,G'(z)}{G(z)},$$

где различные слагаемые относятся к значениям:

$$z = R,\ R\theta,\ R\theta^2,\ R\theta^3,\ \dots\ R\theta^{n-1}.$$

Идя дальше, применяем формулу:

$$\frac{n}{x^n-1} = \sum \frac{\theta^m}{x-\theta^m},\ (m = 0, 1, 2, 3, \dots n-1)$$

в правой части которой стоят различные корни уравнения $\theta^n - 1 = 0$. Пусть затем $a, b, c, \dots k, l$ корни уравнения $G(z) = 0$; принимая $x = \frac{a}{R}$, имеем:

$$\frac{n}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n} = \sum \frac{\theta^m}{\theta^m - \frac{a}{R}} = \sum \frac{R\theta^m}{R\theta^m - a},$$

где суммирование выполнено по различным значениям показателя степени m.

Имея это, достаточно применить соотношение:

$$\frac{zG'(z)}{G(z)} = \sum \frac{z}{z-a},$$

чтобы получить число μ:

$$\mu = \sum \frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}.$$

Заметим, что это выражение непосредственно выявляет свое свойство — представлять приближенно число тех корней $a, b, \dots,$ модуль которых меньше R. Действительно, при весьма большом n, члены $\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}$ очевидно равны нулю или единице, смотря по тому, что мы имеем: $\operatorname{mod} a > R$ или $\operatorname{mod} a < R$.

Добавим, что, составляя уравнение $\Pi(x) = 0$, корни которого степени n от корней уравнения $G(z) = 0$, получаем:

$$\frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum \frac{z}{z-a^n} = \sum \frac{1}{1-\frac{a^n}{z}}.$$

Отсюда выводим, принимая $z = R^n$, соотношение:

$$\frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum \frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}$$

и следовательно:

$$\mu = \frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} \text{ для } z = R^n.$$

Таким образом, применяя эту формулу, мы можем вычислить μ с желаемой степенью точности, беря n достаточно большим.

Возвращаемся к общим исследованиям; пользуемся формулой:

$$\mu=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(S)}\frac{G'(z)}{G(z)}\,dz,$$

которая дает число корней уравнения $G(z)=0$, содержащихся внутри некоторого замкнутого контура S.

Чтобы вычислить подобный интеграл, как известно, должно считать $z=\varphi(t)+i\psi(t)$, где φ и ψ — две такие вещественные функции вещественной переменной t, что уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ определяют контур S. Но нет необходимости, чтобы этот контур был дан на всем протяжении теми же функциями φ и ψ и мы можем предположить, что он будет составлен из нескольких таких отдельных путей, так что только для каждого из них в отдельности функции φ и ψ остаются теми же самыми.

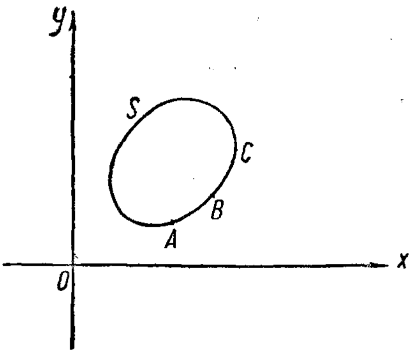

Рис. 55.

Итак, пусть AB, BC, ... (рис. 55) эти различные пути; применим соотношение:

$$\int\limits_{(S)}\frac{G'(z)}{G(z)}\,dz=\int\limits_{(AB)}\frac{G'(z)}{G(z)}\,dz+\int\limits_{(BC)}\frac{G'(z)}{G(z)}\,dz+\ldots;$$

поставим весьма существенное условие, что в каждом из интегралов правой части функции φ и ψ однозначные.

Вводим переменную t и полагаем, что контур S описан целиком и только один раз в прямом направлении, начиная от точки A с начальным значением $t=b$. Положив $G(z)=P+iQ$, можем написать:

$$\frac{G'(z)}{G(z)}\,dz=d\,[\ln G(z)]=\frac{dP+idQ}{P+iQ};$$

тогда получаем:

$$\mu=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{PdP+QdQ}{P^2+Q^2}+\frac{1}{2\pi}\int\frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2};$$

принимая же: $P+iQ=Re^{i\lambda}$, имеем:

$$\mu=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(S)}d\,(\ln R)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}d\lambda.$$

При вещественном μ первый член должен исчезать; это легко доказывается, так как $\ln R$ взят в арифметическом смысле: значения его для пределов $t=a$ и $t=b$ равны, и интеграл $\int\limits_{(S)} d\ln R$ обращается в нуль.

Следовательно, получается просто:

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} d\lambda,$$

откуда, если λ_0 и λ_1 обозначают начальное и конечное значения аргумента функции $G(z)$, имеем соотношение

$$\lambda_1-\lambda_0=2\mu\pi.$$

Таким образом, снова получаем посредством интегрального исчисления теорему, уже доказанную с помощью элементарных соображений для случая, когда $G(z)$ полином, а именно: изменение аргумента голоморфной функции по контуру площадки, взятому в положительном направлении, равно произведению 2π на число корней, заключенных на этой площадке.

Коши не удовлетворился этим результатом; следуя методу великого геометра, покажем, что мы можем подойти к определению числа μ в случае алгебраических уравнений, когда координаты контура рациональные функции от переменной t, при помощи действий, совершенно аналогичных тем, которые применяются в теореме Штурма.

Возвратимся для этого к выражению функции $G(z)$ в виде $P+iQ$ и напомним, что аргумент λ определяется соотношением: $\operatorname{tg}\lambda=\frac{Q}{P}$, где P и Q — вполне определенные функции от t, когда заданы значения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, определяющие контур S или его различные части.

Положим $\frac{Q}{P}=f(t)$, откуда $\lambda=\int\limits_a^b\frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$; изучение этого интеграла приведет нас к знаменитой теореме, найденной Коши.

Заметим, во-первых, что неопределенный интеграл $\int\frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ вполне определяется формулой $\operatorname{arctg}f(t)+C$, причем многочисленные определения $\operatorname{arctg}f(t)$ требуют только изменения значения произвольной постоянной. Но, переходя к определенному интегралу $\int\limits_a^b\frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, представляющему $\operatorname{arctg}f(b)-\operatorname{arctg}f(a)$, если мы выберем для $\operatorname{arctg} f(a)$ одно из определений, то необходимо узнать, какое соответствующее определение примет $\operatorname{arctg}(b)$; в этом и заключается трудность рассматриваемого вопроса.

Из всего бесконечного множества дуг, отвечающих заданному вещественному значению x, мы будем обозначать знаком $\operatorname{arctg}x$ дугу, тангенс которой x и которая заключается между $\frac{-\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, т. е. наименьшую по абсолютному значению; когда x непрерывно меняется от $-\infty$ до $+\infty$, $\operatorname{arctg} x$ также непрерывно изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Установив это, мы видим, что выражение интеграла $\int\limits_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2 t}$ представляется в виде: $\operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a) + n\pi$; таким образом, предложенная задача сводится к определению целого числа n. Рассмотрим для этого интеграл:

$$J = \int\limits_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)};$$

покажем сначала, что этот интеграл является непрерывной функцией от t, если $f(t)$ равно частному от деления двух голоморфных функций $\frac{H(t)}{G(t)}$.

Действительно, заменяем t на $t+h$, и пусть J' новое значение рассматриваемого интеграла; имеем:

$$J' - J = \int\limits_t^{t+h} \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = h\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)},$$

где θ обозначает количество, заключенное между t и $t+h$; согласно допущенным условиям мы сразу видим, что дробь $\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)}$ конечна, каково бы ни было значение t; действительно, мы можем написать это выражение в виде:

$$\frac{H'(\theta)\,G(\theta) - H(\theta)\,G'(\theta)}{G^2(\theta) + H^2(\theta)},$$

и чтобы эта дробь становилась бесконечной, $G(\theta)$ и $H(\theta)$ одновременно должны равняться нулю, что невозможно, так как предполагается, что дробь $\frac{H(\theta)}{G(\theta)}$ приведена к своему простейшему виду.

Доказав это, возьмем выражение интеграла

$$\int\limits_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$$

в виде

$$\operatorname{arctg} f(t) - \operatorname{arctg} f(a) + n\pi.$$

Для $t=a$ имеем $J=0$ и, следовательно, $n=0$; в этом случае, если t возрастает постепенно, начиная от a, то n остается обязательно равным нулю, предполагая $\operatorname{arctg} f(t)$ непрерывной функцией от t, т. е. поскольку функция $f(t)$ остается конечной.

Полагаем, что при $t=k$, функция $f(t)$, становясь бесконечной, положительна, когда $t<k$, и отрицательна, когда $t>k$.

Последовательность значений $\operatorname{arctg} f(k-\varepsilon)$, когда бесконечно малое положительное ε стремится к нулю, мы можем представить в виде последовательности количеств:

$$\frac{\pi}{2}-\alpha_1,\quad \frac{\pi}{2}-\alpha_2,\ \ldots\ \frac{\pi}{2},$$

где последовательность α_1, α_2, ... убывает до нуля. Когда же ε возрастает, начиная от нуля, последовательность значений $\operatorname{arctg} f(k+\varepsilon)$ будет:

$$-\frac{\pi}{2},\ -\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right),\ -\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right),\ -\ldots,$$

где члены β_1, β_2, ... идут возрастая; таким образом, когда t изменяется непрерывно от $k-\varepsilon$ до $k+\varepsilon$ мы имеем для $f(t)$ следующий ряд значений:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right),\ \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right),\ \ldots\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\ \ldots -\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right),$$
$$-\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right),\ -\ldots,$$

который и обнаруживает разрыв.

Но, очевидно, достаточно прибавить π к членам второго ряда, чтобы образовать вместе с первым рядом совокупность непрерывных значений. Следовательно, чтобы образовать выражение J, мы должны положить $n=1$, начиная со значения $t=k$, и это выражение будет неизменным, пока $f(t)$ не станет снова бесконечной.

Пусть t продолжает возрастать; рассуждение, подобное предыдущему, показывает, что n должно быть увеличено на единицу всякий раз, как $f(t)$, становясь бесконечной, переходит от положительного значения к отрицательному. Очевидно также, что n необходимо уменьшить на единицу в том случае, если функция переходит от отрицательного значения к положительному; n не меняется, если нет перемены знака.

Значение интеграла $J=\int\limits_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ равно, следовательно, $J=\operatorname{arctg}(b)-\operatorname{arctg} f(a)+n\pi$, причем n обозначает избыток числа случаев, когда функция $f(t)$ становится бесконечной при переходе от положительного значения к отрицательному, над числом случаев, когда $f(t)$ становится бесконечной при переходе от отрицательного значения к положительному, при возрастании переменной от $t=a$ до $t=b$. Число n Коши назвал индексом функции $f(t)$ в пределах от a до b.

Рассмотрим затем второй промежуток, соответствующий новому отрезку пути, описанному переменной z, на котором $f(t)$ заменим другой однозначной функцией $f_1(t)$ и предположим, что в этом случае t возрастает от $t=a'$ до $t=b'$. Так как оба пути следуют без перерыва, мы имеем условие:

$$f(b)=f_1(a').$$

Установив это, обозначаем через J интеграл, относящийся к функции $f_1(t)$ и через n' — соответствующий индекс; складывая почленно соотношения:

$$J' = \operatorname{arctg} f_1(b') - \operatorname{arctg} f_1(a') + n'\pi$$
$$J = \operatorname{arctg} f\ (b) - \operatorname{arctg} f\ (a) + n\pi,$$

получим:

$$J + J' = \operatorname{arctg} f_1(b') - \operatorname{arctg} f(a) + (n + n')\pi.$$

Мы видим, что в этом равенстве $J + J'$ выражает интеграл, взятый по пути, составленному из двух частей, и сумма $n + n'$ снова представляет вдоль этого пути избыток числа случаев, когда частное $\frac{Q}{P}$ становится бесконечным при переходе от положительных к отрицательным значениям, над числом случаев, когда оно делается бесконечным при переходе от отрицательных к положительным. Поступаем так далее, пока не возвратимся в точку отправления, описав замкнутый контур. Пусть ν индекс $\frac{Q}{P}$, J — интеграл по всему контуру; принимая во внимание, что арктангенсы дают разность, равную нулю, так как они имеют одинаковые значения, как в точке отправления, так и в точке прибытия, мы получаем соотношение:

$$J = \nu\pi,$$

и если сравнить этот результат со значением $J = 2\mu\pi$, мы получим для числа корней уравнения $G(z) = 0$, заключенных внутри контура, выражение, выведенное Коши:

$$\mu = \frac{\nu}{2}.$$

Применим непосредственно этот результат к алгебраическим уравнениям, положив:

$$G(z) = z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \ldots$$

и выберем за контур окружность с центром в начале координат, заданную соотношением:

$$z = R(\cos t + i \sin t),$$

заставляя t возрастать от нуля до 2π. Чтобы представить $G(z)$ в виде $P + iQ$, положим:

$$A = a + ia', \quad B = b + ib', \text{ и т. д.};$$

таким образом, получим:

$$P = R^n \cos nt + R^{n-1}[a \cos(n-1)t - a' \sin(n-1)t] + \ldots,$$
$$Q = R^n \sin nt + R^{n-1}[a \sin(n-1)t + a' \cos(n-1)t] + \ldots.$$

Установив это, замечаем, что эти значения при бесконечном R дают $\frac{Q}{P} = \frac{\sin nt}{\cos nt}$; таким образом, полное число корней является индексом этого выражения, при изменении t от нуля до 2π. Знаменатель обращается в нуль при

$$t = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

где следует брать $k = 0, 1, 2 \ldots 2n-1$, и так как соответствующие вычеты все равны $-\frac{1}{n}$, то все $2n$ переходов через бесконечность происходят от положительного значения к отрицательному; таким образом $\nu = 2n$ и, следовательно, $\mu = n$.

Мы укажем теперь, как великий геометр располагает вычисления, нужные для определения индекса, когда функция $f(t)$ задана, как частное двух полиномов, в случае, когда уравнение $G(z) = 0$ алгебраическое. Это имеет место в том случае, когда функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ рациональные; впрочем эти выражения, как мы отмечали, могут изменять вид в различных частях контура. Можно указать более общие условия, при которых также может быть вычислен индекс; уравнение Кеплера дает этому интересный пример; для ознакомления с ним мы отсылаем к работе Gourier (Annales de l'École Normale supérieure, 1878). Возьмем за основание следующее замечание, которое имеет место вообще, независимо от того, какова будет функция $f(t)$.

Чтобы установить его, берем снова соотношение:

$$J = \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = \operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a) + n\pi;$$

заменяем $f(t)$ на $\frac{1}{f(t)}$ и, обозначив затем через J' значение интеграла и через n' соответствующий индекс, получим равенство:

$$J' = -\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{f(b)} - \operatorname{arctg}\frac{1}{f(a)} + n'\pi.$$

Сложив его почленно с предыдущим, имеем:

$$(n+n')\pi = \operatorname{arctg} f(a) + \operatorname{arctg}\frac{1}{f(a)} - \operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg}\frac{1}{f(b)};$$

сумма $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ равна $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$, в зависимости от того, положителен или отрицателен x. Приходим, таким образом, к соотношению: $n + n' = \varepsilon$, в котором ε определяется следующим образом:

I	если	$f(a)f(b) > 0$,	то $\varepsilon = 0$
II	„	$f(a) > 0,\ f(b) < 0$,	„ $\varepsilon = 1$
III	„	$f(a) < 0,\ f(b) > 0$,	„ $\varepsilon = -1$.

Это соотношение между индексами двух обратных функций $f(t)$, $\frac{1}{f(t)}$, взятыми в одинаковых границах a и b, может быть доказано совершенно элементарным путем. Для этого я обопрусь на следующее, вполне очевидное замечание: когда

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

то знак одной из функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ вблизи значения, при котором она становится бесконечной, определяет знак левой части, если другая функция при этом остается конечной. Обозначаем через $[\varphi(t)]$ индекс некоторой функции $\varphi(t)$, взятой в пределах от $t=a$, $t=b$; имеем соотношение:

$$[f(t)]=[f_1(t)]+[f_2(t)].$$

Пусть в частности:

$$f_1(t)=\frac{V_1}{V}, \quad f_2(t)=\frac{V}{V_1},$$

обозначая через V и V_1 полиномы или голоморфные функции, не имеющие общих множителей. Получаем в этом случае:

$$f(t)=\frac{V^2+V_1^2}{VV_1},$$

что позволяет написать, так как числитель существенно положителен:

$$[f(t)]=\left[\frac{1}{VV_1}\right]$$

и следовательно:

$$\left[\frac{1}{VV_1}\right]=\left[\frac{V_1}{V}\right]+\left[\frac{V}{V_1}\right].$$

Допустим теперь, что VV_1 положительно при $t=a$ и отрицательно при $t=b$; ясно, что, когда t возрастает от $t=a$ до $t=b$, значение VV_1 на один раз больше перейдет от положительного к отрицательному, чем от отрицательного к положительному. Имеем, следовательно, между индексами двух обратных функций соотношение:

$$\left[\frac{V_1}{V}\right]+\left[\frac{V}{V_1}\right]=1.$$

Полагаем затем, что VV_1, или, что приводит к тому же, частное $\frac{V_1}{V}$ отрицательно при $t=a$, положительно при $t=b$ и, наконец, имеет одинаковый знак на обеих границах; найдем также:

$$\left[\frac{V_1}{V}\right]+\left[\frac{V}{V_1}\right]=-1, \quad \text{и} \quad \left[\frac{V_1}{V}\right]+\left[\frac{V}{V_1}\right]=0.$$

Доказав это, возвращаемся к случаю, когда V и V_1 — целые полиномы, не имеющие общих делителей.

Выполняя действия, необходимые для нахождения общего наибольшего делителя, изменяем при этом знаки остатков:

$$V = V_1 Q_1 - V_2$$
$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}.$$

Согласно сделанному предположению, один из остатков V_n постоянная и значит V_{n+1} равен нулю.

Установив это, полагаем:

$$\left[\frac{V}{V_1}\right] + \left[\frac{V_1}{V}\right] = \varepsilon_1,$$

где ε имеет значение 0,1 или -1, которое находится, как мы это видели, по знакам, принимаемым отношением $\frac{V_1}{V}$ при $t = a$ и $t = b$.

Точно также имеем:

$$\left[\frac{V_1}{V_2}\right] + \left[\frac{V_2}{V_1}\right] = \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{V_{n-1}}{V_n}\right] + \left[\frac{V_n}{V_{n-1}}\right] = \varepsilon_n.$$

С другой стороны, равенство $V = V_1 Q_1 - V_2$ показывает, что вблизи некоторого корня уравнения $V_1 = 0$ полиномы V и V_2 будут обратных знаков, то же самое, очевидно, будет и с дробями $\frac{V}{V_1}$ и $\frac{V_2}{V_1}$; отсюда получаем соотношение:

$$\left[\frac{V}{V_1}\right] + \left[\frac{V_2}{V_1}\right] = 0,$$

и также

$$\left[\frac{V_1}{V_2}\right] + \left[\frac{V_3}{V_2}\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}}\right] + \left[\frac{V_n}{V_{n-1}}\right] = 0.$$

Складывая почленно равенства первого ряда и принимая в расчет предыдущие соотношения, получаем, что просто:

$$\left[\frac{V_1}{V}\right] + \left[\frac{V_{n-1}}{V_n}\right] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n;$$

но так как V_n постоянная, $\left[\frac{V_{n-1}}{V_n}\right]$ равно нулю; это дает искомое значение индекса:

$$\left[\frac{V_1}{V}\right]=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_r.$$

В том случае, когда полином V_1 есть производная от V, частное $\frac{V'}{V}$ проходит всегда от отрицательного значения к положительному, становясь бесконечным. Индекс, в этом случае отрицательный, равен по абсолютному значению числу вещественных корней уравнения $V=0$, заключенных между двумя границами a и b. Отсюда легко получаем теорему Штурма в том виде, который она имеет в элементарной алгебре.

С более общей точки зрения мы можем сказать, что какова бы ни была голоморфная функция V, индекс дроби $\frac{V_1}{V}$, взятый с обратным знаком, указывает на число вещественных корней уравнения $V=0$, заключенных между любыми пределами a и b.

Пусть

$$f(t)=\frac{V'}{V},$$

откуда

$$\frac{f'(t)}{1+f^2(t)}=\frac{VV''-V'^2}{V+V'^2};$$

индекс, который мы обозначим через ν определяется из соотношения:

$$\int_a^b \frac{VV''-V'^2}{V^2+V'^2}\,dt=\left(\operatorname{arctg}\frac{V'}{V}\right)_{t=b}-\left(\operatorname{arctg}\frac{V'}{V}\right)_{t=a}+\nu\pi;$$

отсюда получаем выражение для числа вещественных корней в виде определенного интеграла и двух арктангенсов.

Пусть, например:

$$V=Ae^{at}+Be^{bt}+\ldots+Le^{lt},$$

где $A, B, \ldots L$ целые полиномы от t и $a, b, \ldots l$ — постоянные, которые предполагаем расположенными в убывающем порядке. Имеем, сохраняя только показательную функцию высшего порядка:

$$VV''-V'^2=(AA''-A'^2)\,e^{2at}+\ldots$$
$$V^2+V'^2=(A^2+A'^2)\,e^{2at}+\ldots$$

и, очевидно, получаем, предположив, что t положительно и весьма большое:

$$\frac{VV''-V'^2}{V^2+V'^2}=\frac{AA''-A'^2}{A^2+A'^2}.$$

При наличии этого, достаточно заметить, что числитель последней дроби имеет степень по крайней мере на две единицы меньшую чем степень знаменателя, чтобы заключить, что интеграл

$$\int_a^\infty \frac{VV'' - V'^2}{V^2 + V'^2}\,dt$$

имеет конечное значение.

Написав члены V в обратном порядке

$$V = Le^{lt} + \ldots + Be^{bt} + Ae^{at},$$

мы также докажем, что интеграл будет конечным, если примем t отрицательным и бесконечно большим; мы доказали, следовательно, что уравнение $V = 0$ имеет ограниченное число вещественных корней; это можно также доказать совершенно элементарным путем, воспользовавшись теоремой Ролля.

ДЕВЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Ряд Лагранжа. — Приложения к уравнению Кеплера. — Изложение **метода Лапласа для** изучения условия сходимости. — Приложение к разложению

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Краткое указание на свойства полиномов Лежандра. — Теорема Эйзенштейна относительно рядов, выводимых из алгебраического уравнения, коэфициенты которого соизмеримы. — Формулировка теоремы Чебышева относительно рядов с соизмеримыми коэфициентами, когда они представляют явную функцию переменной.

Ряд Лагранжа дает возможность получить один из корней следующего уравнения $z-a-\alpha f(z)=0$, которое чрезвычайно общего вида, так как функция $f(z)$ может быть любой при условии, что она остается голоморфной в некоторой части плоскости.

Докажем, во-первых, что существует замкнутый контур, заключающий внутри себя корень этого уравнения; этот корень, как мы увидим далее, может быть разложен в сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням α; для этой цели докажем следующую лемму: пусть F и Φ — две голоморфные функции; уравнения

$$F=0, \quad F+\Phi=0$$

имеют тоже число корней, заключенных в замкнутом контуре S, если соблюдено условие: на всем протяжении контура мы неизменно имеем $\operatorname{mod}\frac{\Phi}{F}<1$. Числа μ и μ_1 корней этих уравнений, заключенных внутри S, выражаются формулами:

$$\mu=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(S)} d\,[\ln(F(z))]$$

$$\mu_1=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(S)} d\,[\ln(F(z)+\Phi(z))].$$

Получаем таким образом:

$$\mu_1-\mu=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(S)} d\left[\ln\left(1+\frac{\Phi}{F}\right)\right],$$

и так как, согласно предположения, на всем протяжении контура интегрирования модуль $\frac{\Phi}{F}$ меньше единицы, то значение $\ln\left(1+\frac{\Phi}{F}\right)$ будет одинаковым как в начале, так и в конце; следовательно, интеграл, дающий разность $\mu_1-\mu$, равен нулю, и мы имеем: $\mu_1=\mu$.

Применим это к уравнению:

$$z-a-\alpha f(z)=0;$$

полагаем, что a — аффикс точки, расположенной внутри контура S, и α определяется из условия, что для всех точек этого контура мы имеем:

$$\operatorname{mod}\frac{\alpha f(z)}{z-a}<1.$$

В этом случае, данное уравнение имеет то же число корней, как и уравнение $z-a=0$, т. е. один корень; определенный таким образом корень мы разложим в сходящийся ряд.

Мы находим в работах Коши другие способы изложения, но при них возникают многочисленные затруднения, которым посвящен прекрасный и серьезный мемуар Felix Chio, помещенный в XII томе „Savants étrangers". Обратимся по этому поводу также к работе того же автора, озаглавленной „Troisième mémoire sur la série de Lagrange", напечатанной в „Comptes-rendus" Туринской Академии наук (т. VIII, апрель, 1872), а также к статье Genocchi, помещенной „Comptes-rendus" Парижской Академии наук (29 декабря, 1873). Метод, которым мы воспользуемся, свободен от этих затруднений; мы позаимствовали его из прекрасного мемуара Rouché о ряде Лагранжа (Journal de l'École Polytechnique, 39 тетр.)

Пусть:

$$F(z)=z-a-\alpha f(z)=0$$

и ζ единственный корень, существующий, как доказано, внутри S.

Обозначим через $\Pi(z)$ некоторую голоморфную функцию от z; вычет дроби $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ относительно корня знаменателя равен $\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$; имеем, следовательно:

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(S)}\frac{\Pi(z)\,dz}{F(z)}.$$

Разложим в ряд этот интеграл, следуя методу, которым мы уже пользовались при выводе формулы Тейлора.

Исходим для этого из следующего тождества:

$$\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{z-a-\alpha f(z)}=\frac{1}{z-a}+\frac{\alpha f(z)}{(z-a)^2}+\frac{\alpha^2 f^2(z)}{(z-a)^3}+\dots+$$
$$+\frac{\alpha^{n-1}f^{n-1}(z)}{(z-a)^n}+\frac{\alpha^n f^n(z)}{(z-a)^n F(z)}.$$

Пусть, кроме того:

$$J_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(S)} \frac{f^n(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

и

$$R_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(S)} \frac{\alpha^n f^n(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^n F(z)}\,dz.$$

Умножая обе части нашего тождества на $\Pi(z)\,dz$ и интегрируя по контуру, получаем:

$$\frac{\Pi(\xi)}{F'(\xi)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 + \ldots + \alpha^{n-1} J_{n-1} + R_n$$

Обозначим через σ периметр кривой S, z_0 — аффикс одной из точек контура и λ — множитель Дарбу; мы можем написать:

$$R_n = \frac{\lambda\sigma\Pi(z_0)}{2\pi F(z_0)}\left[\frac{\alpha f(z_0)}{z_0 - a}\right]^n$$

Но для всех точек контура S имеем условие:

$$\operatorname{mod}\left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right] < 1,$$

и остаток R_n стремится к нулю, когда n беспредельно увеличивается; получаем отсюда выражение в виде сходящегося ряда:

$$\frac{\Pi(\xi)}{F'(\xi)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 + \ldots + \alpha^n J_n + \ldots .$$

Значение коэфициентов J нетрудно найти; действительно, мы знаем, что вообще:

$$\frac{D_a^{\,n}\,\Phi(a)}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(S)} \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

откуда, положив:

$$\Phi(z) = f(z)^n\,\Pi(z),$$

$$J_n = \frac{D_a^{\,n}\,[f^n(a)\,\Pi(a)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

приходим к формуле:

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum \frac{\alpha^n D_a^{\,n}\,[f^n(a)\,\Pi(a)]}{1 \cdot 2 \ldots n}. \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Мы получили, таким образом, первое аналитическое выражение для ряда Лагранжа; выведем из него второе, не менее важное. Полагаем:

$$\Pi(z) = \Phi(z)\,F'(z) = \Phi(z)\,[1 - \alpha f'(z)]$$

и пишем для краткости Φ и f вместо $\Phi(a)$ и $f(a)$.

Получаем тогда:

$$\Phi(\zeta)=\sum\frac{\alpha^n D_a{}^n[f^n\Phi(1-\alpha f')]}{1.\ 2.\ \dots\ n},$$

что можно еще написать иначе, выделяя первый член, соответствующий $n=0$.

$$\Phi+\sum\frac{\alpha^{n+1}D_a{}^{n+1}(\Phi f^{n+1})'}{1\cdot 2\ \dots\ n+1}-\sum\frac{\alpha^{n+1}D_a{}^n[\Phi f^n f']}{1\cdot 2\ \dots\ n}.$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

Соединяя теперь члены, имеющие одинаковую степень α, получаем сначала:

$$\Phi(\zeta)=\Phi+\sum\frac{\alpha^{n+1}D_a{}^n[(\Phi f^{n+1})'-(n+1)\Phi f^n f']}{1\cdot 2\ \dots\ n+1}$$

и, так как мы имеем:

$$(\Phi f^{n+1})'=(n+1)\Phi f^n f'+\Phi' f^{n+1},$$

находим:

$$\Phi(\xi)=\Phi+\sum\frac{\alpha^{n+1}D_a{}^n[\Phi'(a)f^{n+1}(a)]}{1\cdot 2\ \dots .\ n+1}.$$

$$(n=0,\ 1,\ 2\ \dots)$$

Применим ряд Лагранжа к уравнению Кеплера: $z=nt+e\sin z$, которое имеет большое значение в небесной механике; в этом уравнении z обозначает эксцентрическую аномалию.

Пусть: $nt=a$, $f(z)=\sin z$; получаем следующий ряд:

$$z=a+e\sin a+\frac{e^2D_a(\sin^2 a)}{1\cdot 2}+\ \dots\ +\frac{e^nD_a{}^{n-1}(\sin^n a)}{1\cdot 2\ \dots\ n}.$$

Остается еще найти общее выражение производной $D_a{}^{n-1}(\sin^n a)$. Пользуемся для этой цели формулой, которая дает любую степень $\sin a$ в виде линейной функции синуса или косинуса дуг, кратных a. Путем несложного вычисления, получаем:

$$2^{n-1}D_a{}^{n-1}(\sin^n a)=n^{n-1}\sin na-n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)a+$$
$$+n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)a+\ \dots\ +(-1)^i n_i(n-2i)^{n-i}\sin(n-2i)a,$$

где для краткости принято $n_i=\dfrac{n(n-1)\ \dots\ (n-i+1)}{1\cdot 2\ \dots\ i}$; последний член соответствует $i=\dfrac{n-2}{2}$ или $i=\dfrac{n-1}{2}$ в зависимости от того, четное или нечетное n. Определение границы значений эксцентриситета, для которых этот ряд будет сходящимся, имеет чрезвычайно важное значение. Лаплас первый получил число 0,662743...; тот же результат получил Коши более простым путем; вот каким образом Руше излагает его прием в своем прекрасном мемуаре, указанном выше.

Мы показали раньше, что уравнение $z=a+\alpha\ (z)$ имеет единственный корень внутри контура S, заключающего точку a, когда на протяжении всего контура модуль $\frac{\alpha f(z)}{z-a}$ меньше единицы. Следовательно, полагая S окружностью $z=a+Re^{i\varphi}$, имеем условие

$$\operatorname{mod}\frac{\alpha f(a+Re^{i\varphi})}{R}<1.$$

Обозначаем через $F(R)$ maximum модуля $f(a+Re^{i\varphi})$ для заданных значений a и R, когда φ возрастает от нуля до 2π, и допускаем для большей простоты, что α вещественно; условие принимает вид: $\frac{\alpha F(R)}{R}<1$, откуда $\alpha<\frac{R}{F(R)}$.

Мы видим, таким образом, что maximum выражения $\frac{R}{F(R)}$ относительно R соответствует наибольшему возможному значению α.

Чтобы получить наибольший модуль $f(a+Re^{i\varphi})$, предполагая, что $f(z)=\sin z$, пользуемся равенством:

$$\sin(\alpha+i\beta)\sin(\alpha-i\beta)=\cos^2 i\beta-\cos^2\alpha=\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\right)^2-\cos^2\alpha;$$

пусть

$$\begin{aligned}\alpha+i\beta&=a+R\cos\varphi+iR\sin\varphi,\\ \alpha&=a+R\cos\varphi,\\ \beta&=R\sin\varphi.\end{aligned}$$

Очевидно β зависит только от φ; искомый maximum получим, распорядившись этим количеством таким образом, чтобы $\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}$, а следовательно, и β имели бы возможно большое значение. Таким образом имеем: $\beta=R$, и следовательно:

$$F(R)=\frac{e^R+e^{-R}}{2}.$$

Чтобы получить затем $\frac{R}{F(R)}$, что дает верхний предел эксцентриситета, приравниваем нулю производную, и получаем уравнение:

$$e^R(R-1)-e^{-R}(R+1)=0.$$

Левая часть его имеет разные знаки при $R=1$ и $R=2$; ее производная: $R(e^R+e^{-R})$ всегда отрицательна; следовательно, мы имеем только один положительный корень, заключенный между 1 и 2.

Замечаем затем, что, имея $e^{2R}=\frac{R+1}{R-1}$, получаем отсюда последовательно:

$$e^R=\frac{R+1}{\sqrt{R^2-1}},\qquad e^{-R}=\frac{R-1}{\sqrt{R^2-1}},$$

и окончательно:

$$\frac{2R}{e^R+e^{-R}}=\sqrt{R^2-1}.$$

Этот результат дает возможность легко выразить через R искомую границу тех значений эксцентриситета, для которых ряд сходится.

Существуют некоторые небольшие различия в числах, данных разными авторами; Стильтьес проделал снова с большой тщательностью вычисления и нашел следующие значения, в которых все десятичные знаки точны:

$$R = 1{,}19967\quad 86402\quad 57734$$
$$e = 0{,}66274\quad 34193\quad 492\ldots.$$

Не лишнее будет дать теперь метод Лапласа, который привел впервые к результатам, только что нами доказанным, и который в высшей степени достоин внимания. [1]

Возвратимся для этого к ряду:

$$z = a + e\sin a + \frac{e^2 D_a(\sin^2 a)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{e^n D_a^{\,n-1}(\sin^n a)}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots,$$

в котором коэфициент при e^n равен:

$$\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)}\left[n^{n-1}\sin na - n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)a + \right.$$
$$\left. + n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)a + \ldots + (-1)^i n_i(n-2i)^{n-1}\sin(n-2i)a\right];$$

последний член соответствует $i=\frac{n-2}{2}$ или $i=\frac{n-1}{2}$ в зависимости от того, четное или нечетное n. Лаплас замечает, что этот коэфициент не может превышать следующего количества:

$$\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)}\left[n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \ldots + \right.$$
$$\left. + n_i(n-2i)^{n-1}\right],$$

что представляет собой конечную сумму, которую можно представить, принимая во внимание значения n_1, n_2 и n_i, следующим образом:

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(i),$$

положив:

$$f(x) = \frac{(n-2x)^{n-1}}{2^{n-1}\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}.$$

Лаплас ищет далее его приближенное значение при очень большом n и для этого основывается на том, что определенный интеграл

$$J = \int_a^b f(x)\,dx,$$

в котором $f(x)$ некоторая положительная функция, дает приближенное значение суммы: $f(a) + f(a+1) + \ldots + f(b)$. Наконец, что составляет

[1] Sur le développement des coordonnées elliptiques, в Le Supplément au t. V de la Mécanique celeste.

основной пункт его анализа, Лаплас получает этот интеграл, применяя очень важный метод, изложенный им в аналитической теории вероятности (стр. 97), для интегрирования дифференциалов, заключающих в себе множители, возведенные в высокие степени. Изложим в нескольких словах, в чем заключается этот метод для случая, который мы собираемся использовать.

Предположим, что x возрастает от a до b, положительная функция $f(x)$ идет сначала возрастая до определенного maximum'а, а затем убывает. Допустим, что этот maximum отвечает некоторому простому корню $x=\xi$ уравнения $f'(x)=0$, причем $f''(\xi)$ будет неравна нулю и отрицательна. Имея это, выполняем в интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx=J$$

замену переменной, положив:

$$f(x)=f(\xi)\,e^{-t^2}.$$

Значениям x, возрастающим от $x=\xi$ до $x=b$, я привожу в соответствие ряд положительных значений t от $t=0$ до $t=\beta$, затем в интервале, заключенном между $x=\xi$ и $x=a$, отрицательные значения от $t=0$ до $t=-\alpha$.

Таким образом полученное преобразование приводит к:

$$J=f(\xi)\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-t^2}\,dx.$$

Дадим данному соотношению другой вид:

$$t=\sqrt{\ln f(\xi)-\ln f(x)},$$

чтобы получить из него выражение переменной x в виде ряда, расположенного по степеням t, пользуясь формулой Лагранжа для уравнения: $x=a+t\varphi(x)$. Это уравнение дает $x=a$ для $t=0$, а данное нам $x=\xi$ отвечает тому же предположению о t; полагаем поэтому $a=\xi$. Установив это, решаем уравнение относительно t:

$$t=\frac{x-\xi}{\varphi(x)}$$

и полагаем:

$$\frac{x-\xi}{\varphi(x)}=\sqrt{\ln f(\xi)-\ln f(x)};$$

функция $\varphi(x)$ определится из следующей формулы:

$$\varphi(x)=\frac{x-\xi}{\sqrt{\ln f(\xi)-\ln f(x)}}.$$

Таким образом из ряда Лагранжа:

$$x=a+t\varphi(a)+\frac{t^2D_a(\varphi^2a)}{1\cdot 2}+\ldots,$$

заменив $\varphi(x)$ его выражением и вводя в коэфициенты значение $a=\xi$, мы находим требуемое разложение, если при этом дифференцирования выполнимы. Кроме того, легко видеть, что производные любого порядка от функции $\varphi(x)$ конечны, когда $x=\xi$. В самом деле, по формуле Тейлора, имея в виду условие $f'(\xi)=0$, получаем разложение:

$$f(x)=f(\xi)+\frac{(x-\xi)^2f''(\xi)}{1\cdot 2}+\frac{(x-\xi)^3f'''(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

откуда:

$$\ln f(x)-\ln f(\xi)=A(x-\xi)^2+B(x-\xi)^3+\ldots;$$

первый коэфициент $A=\frac{f''(\xi)}{2f(\xi)}$ не равен нулю, так как мы полагали, что $x=\xi$ простой корень уравнения $f'(\xi)=0$. Выражение

$$\sqrt{\ln f(\xi)-\ln f(x)}$$

приводит к ряду вида: $G(x-\xi)+H(x-\xi)^2+\ldots$, в котором G не равно нулю. Отсюда вытекает, что все коэфициенты разложения:

$$\varphi(x)=\frac{x-\xi}{\sqrt{\ln f(\xi)-\ln f(x)}}=\frac{1}{G+H(x-\xi)+\ldots},$$

по степеням $x-\xi$, конечны и, следовательно, производные $\varphi^n(\xi)$ также конечны, что и требовалось доказать.

Положим теперь, что

$$x=\xi+Pt+Qt^2+Rt^3+\ldots$$

ряд, полученный из уравнения

$$f(x)=f(\xi)\,e^{-t^2};$$

дифференцируя, имеем:

$$dx=(P+2\,Qt+3Rt^2+\ldots)\,dt$$

и, следовательно:

$$J=f(\xi)\int\limits_{-\alpha}^{\beta}e^{-t^2}(P+2Qt+3Rt^2+\ldots)\,dt.$$

Не останавливаясь на вопросе о сходимости этого разложения, полагаем $f(x)=F^n(x)$, где показатель степени n большое число; тогда предыдущее уравнение может быть представлено в виде:

$$F(x)=F(\xi)\,e^{-\frac{t^2}{n}};$$

очевидно, выражение для x разлагается по степеням $\frac{t}{\sqrt{n}}$, и мы имеем некоторое право допустить сходимость, по крайней мере ограничиваясь первыми членами. Примерно то же самое будем иметь и для более общего случая, когда:

$$f(x)=F^n(x)F_1(x);$$

в самом деле можно написать:

$$f(x)=\left[F(x)F_1^{\frac{1}{n}}(x)\right]^n,$$

причем множитель $F_1^{\frac{1}{n}}(x)$ мало отличается от единицы для больших значений n; очевидно, мы приходим к первому случаю.

Так как мы легко находим, что

$$P=\sqrt{-\frac{2f(\xi)}{f''(\xi)}},$$

то в этом случае первый член выражения J нам дает:

$$J=f(\xi)\sqrt{-\frac{2f(\xi)}{f''(\xi)}}\int_{-\alpha}^{\beta}e^{-t^2}dt.$$

Заметим теперь, что интеграл

$$\int_{-\alpha}^{\beta}e^{-t^2}dt$$

обладает свойством при больших, хотя и не слишком, значениях пределов α и β мало отличаться от определенного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Следовательно, мы можем написать:

$$J=\sqrt{2\pi}f(\xi)\sqrt{-\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}};$$

получаем формулу, которой мы воспользуемся, применив ее к функции:

$$f(x)=\frac{(n-2x)^{n-1}}{2^{n-1}\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)},$$

чтобы притти к асимптотическому значению суммы:

$$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(i),$$

в которой i, как мы видели, равно $\frac{n-2}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$ в зависимости от того, четное или нечетное n. Наша первая задача заключается в составлении уравнения $f'(x)=0$; воспользуемся для этого приближенными выражениями:

$$\ln\Gamma(x+1)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\sqrt{2\pi}$$

$$\ln\Gamma(n-x+1)=\left(n-x+\frac{1}{2}\right)\ln(n-x)-n+x+\ln\sqrt{2\pi},$$

которые дают сначала:

$$\ln f(x)=(n-1)\ln\left(\frac{n}{2}-x\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-$$

$$-\left(n-x+\frac{1}{2}\right)\ln(n-x)+n-\ln 2\pi,$$

затем, дифференцируя:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2n-2}{2x-n}-\ln x+\ln(n-x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x-n)}.$$

Пренебрегая в правой части членами:

$$-\frac{2}{2x-n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x-n)},$$

пишем:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2n}{2x-n}-\ln x+\ln(n-x),$$

откуда, дифференцируя вторично:

$$\frac{f''(x)}{f(x)}-\frac{f'^2(x)}{f^2(x)}=-\frac{4n}{(2x-n)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-n}=-\frac{n^3}{x(n-x)(n-2x)^2}.$$

Искомое уравнение $f'(x)=0$ запишется так:

$$\frac{2n}{2x-n}=\ln\frac{x}{n-x};$$

если положим согласно с Лапласом $x=n\omega$, то оно примет вид:

$$\frac{2}{2\omega-1}=\ln\frac{\omega}{1-\omega};$$

очевидно, мы снова получим уравнение для R, которое мы рассматривали на (стр. 244), если примем $\omega=\frac{R-1}{R}$.

Пусть $\xi=n\omega$, имеем:

$$\frac{f''(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{n^3}{\xi(n-\xi)(n-2\xi)^2},$$

откуда:

$$-\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}=\frac{\xi(n-\xi)(n-2\xi)^2}{n^3},$$

и следовательно:

$$J=\sqrt{2\pi}\,f(\xi)\sqrt{-\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}}=$$

$$=\sqrt{2\pi}f(\xi)\frac{[\xi(n-\xi)]^{\frac{1}{2}}(n-2\xi)}{\sqrt{n^3}}.$$

При вычислении $f(\xi)$, которое мы выполним, пользуясь приближенными значениями $\Gamma(\xi+1)$ и $\Gamma(n-\xi+1)$, обозначаем основание Неперовых логарифмов буквой Е, как это сделал Тиссеран в своем трактате о небесной механике, чтобы сохранить e для обозначения, принятого в астрономии.

Таким образом, будем иметь:

$$\Gamma(\xi+1)\,\Gamma(n-\xi+1)=2\pi \mathrm{E}^{-n}[\xi(1-\xi)]^{\frac{1}{2}}\xi^{\xi}(n-\xi)^{n-\xi},$$

что дает после простого приведения:

$$J=\frac{2}{\sqrt{2\pi n^3}}\left[\frac{\mathrm{E}(n-2\xi)}{2\xi^{\frac{\xi}{n}}(n-\xi)^{1-\frac{\xi}{n}}}\right]^n$$

или, если заменить ξ на $n\omega$:

$$J=\frac{2}{\sqrt{2\pi n^3}}\left[\frac{\mathrm{E}(1-2\omega)}{2\omega^{\omega}(1-\omega)^{1-\omega}}\right]^n.$$

Произведем новое упрощение, воспользовавшись уравнением для ω, которое напишем следующим образом:

$$\mathrm{E}^{\frac{2}{2\omega-1}}=\frac{\omega}{1-\omega}$$

или, в другом виде:

$$\mathrm{E}=\frac{\omega^{\omega-\frac{1}{2}}}{(1-\omega)^{\omega-\frac{1}{2}}}.$$

Исключая Е, найдем для J более простой вид:

$$J=\frac{2}{\sqrt{2\pi n^3}}\left[\frac{1-2\omega}{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}\right]^n;$$

асимптотическое выражение количества:

$$\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)}[n^{n-1}+n_1(n-2)^{n-1}+n_2(n-4)^{n-1}+\ldots+$$
$$+n_i(n-2i)^{n-1}]$$

служит верхним пределом для коэфициента при n-ой степени эксцентриситета в разложении в ряд эксцентрической аномалии. Значение, которое эксцентриситет e не должен превышать, чтобы ряд оставался сходящимся, получится, если установим для бесконечного n условие:

$$(e^n J)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

т. е.

$$\frac{e(1-2\omega)}{2\sqrt{\omega(1-\omega)}} = 1$$

и следовательно:

$$e = \frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega}.$$

Заменив ω на $\frac{R-1}{R}$, получаем отсюда:

$$e = \sqrt{R^2-1};$$

это и есть результат, полученный выше совершенно другим путем при помощи понятий анализа, которыми овладели спустя долгое время после Лапласа.

Лаплас обобщил ряд Лагранжа, рассматривая следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$F(x, y) = x - a - \alpha\varphi(x, y) = 0,$$
$$G(x, y) = y - b - \beta\psi(x, y) = 0.$$

Приведем изящный вид, к которому Дарбу привел этот важный результат.

Обозначим решения системы через $x=\xi$, $y=\eta$ и пусть:

$$\Delta(x, y) = \frac{dF}{dx}\frac{dG}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{dG}{dx};$$

имеем:

$$\frac{\Pi(\xi, \eta)}{\Delta(\xi, \eta)} = \sum \frac{\alpha^m\beta^n}{1\cdot 2 \ldots m} \cdot \frac{d^{m+n}(\Pi\varphi^m\psi^n)}{1\cdot 2 \cdot \ldots n da^m db^n},$$

написав для краткости в правой части Π, φ, ψ вместо $\Pi(a, b)$, $\varphi(a, b)$, $\psi(a, b)$; заметим, что $\Delta(x, y)$ есть функциональный определитель левых частей данных уравнений — выражение аналогичное, насколько это возможно, производной от функции по переменной, от которой функция зависит.

Эта формула также, как и формула Лагранжа, привлекает внимание на аналитический характер коэфициентов при степенях α и β.

Дадим понятие о чрезвычайно важном значении их, которое было впервые установлено и отмечено Якоби; укажем сначала в нескольких словах, каким образом этот знаменитый автор вывел из ряда Лагранжа разложение по степеням α радикала $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, играющее основную роль в серьезных вопросах небесной механики и математической физики.

Полагаем в уравнении $z = a + \alpha f(z)$, $a = x$, $f(z) = \frac{z^2 - 1}{2}$; оно принимает вид: $\alpha z^2 - 2z + 2x - \alpha = 0$ и имеет корни:

$$\zeta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}{\alpha}.$$

Решение, разложение которого дает формула Лагранжа, должно приводиться к $\zeta = x$ при $\alpha = 0$, и соответствует знаку — радикала; положив в первом виде этого ряда $\Pi(z) = 1$, получаем для $\frac{1}{1 - \alpha\zeta}$, т. е. для выражения $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$, разложение следующего вида:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum \frac{\alpha^n D_x^{\,n} (x^2 - 1)^n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \ \ldots \ n}.$$

Коэфициенты при степенях α называются полиномами Лежандра, по имени открывшего их великого геометра; обозначив их через X_n, получаем:

$$X_n = \frac{D_x^{\,n} (x^2 - 1)^n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \ \ldots \ n}$$

и, пользуясь этим выражением, без труда доказываем большое число замечательных свойств, к которым Лежандр пришел путем более сложного анализа. Во-первых, уравнение: $X_n = 0$ имеет все корни вещественные, различные и заключенные между -1 и $+1$. Покажем, как эта теорема получается из теоремы Ролля. Уравнение $(x^2 - 1)^n$ имеет корни, равные 1 и -1, кратности n. Производная $D_x (x^2 - 1)^n = 0$ имеет, следовательно, корни, равные 1 и -1 кратности $n - 1$ и, кроме того, один вещественный корень x_0, заключенный между -1 и $+1$. Вторая производная $D_x^{\,2} (x^2 - 1)^n = 0$ имеет корни 1 и -1 кратности $n - 2$ и, кроме того, два вещественных корня, из которых один заключен между -1 и x_0, другой между x_0 и $+1$. Продолжая так далее, мы видим, что $D_x^{\,n} (x^2 - 1)^n = 0$ или $X_n = 0$ имеет n вещественных, неравных корней, заключенных между -1 и $+1$. Обозначим эти корни через ξ_1, ξ_2, ... ξ_n, располагая их в возрастающем порядке; каждый из корней заключается между:

$$\cos \frac{(2n - 2k)\pi}{2n + 1} \quad \text{и} \quad \cos \frac{(2n - 2k - 1)\pi}{2n + 1};$$

последняя замечательная теорема доказана Марковым (Mathematische Annalen, т. 27, стр. 177).

Я укажу еще, ограничиваясь их формулировкой, следующие выводы.

Если знаки m и n не равны, имеем соотношение:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0;$$

при равных же знаках:

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Полином X_n, разложенный по убывающим степеням переменной, выражается формулой:

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots\right].$$

Три последовательных функции X_{n-1}, X_n, X_{n+1} связаны равенство

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) x X_n + n X_{n-1} = 0;$$

отсюда мы можем заключить о вещественности корней уравнения $X_n = 0$, пользуясь методом, аналогичным тому, который мы применили при доказательстве теоремы Штурма.

Функция X_n удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, которое часто встречается в анализе:

$$(x^2-1)\frac{d^2 X_n}{dx^2} + 2x \frac{dX_n}{dx} - n(n+1) X_n = 0.$$

Скажу, наконец, несколько слов об одном свойстве, открытом одновременно Чебышевым и Гейне; оно связано с важным вопросом анализа, касающемся непрерывных алгебраических дробей.

Рассмотрим ряд, расположенный по убывающим степеням переменной:

$$S = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{x^n} + \ldots$$

и пусть

$$A = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

полином степени n с неопределенными коэфициентами.

Распорядимся этими коэфициентами таким образом, чтобы в произведении AS отсутствовали члены $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, ... $\frac{1}{x^n}$; мы получим уравнения:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n &= 0 \\
\alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \ldots + \alpha_{n+1} a_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\alpha_{n-1} a_0 + \alpha_n a_1 + \ldots + \alpha_{2n-1} a_n &= 0,
\end{aligned}$$

определяющие, вообще говоря, A до постоянного множителя. Установив это, получаем соотношение:

$$AS = B + \frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \dots ,$$

обозначив через B полином степени $n-1$; выводим отсюда:

$$S = \frac{B}{A} + \frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \dots\right).$$

Это выражение S показывает, что разложение рациональной дроби $\frac{B}{A}$, расположенное по убывающим степеням переменной, совпадает с разложением S до членов $\frac{1}{x^{2n}}$, так как, разложив количество:

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \dots\right),$$

мы получаем последовательность

$$\frac{\eta}{x^{2n+1}} + \frac{\eta'}{x^{2n+2}} + \dots .$$

Дробь $\frac{B}{A}$ называется подходящей порядка n, и теория непрерывных алгебраических дробей имеет своим главным предметом нахождение алгорифма, позволяющего образовывать постепенно все подходящие дроби. Нам достаточно здесь установить порядок приближения, с которым они выражают функцию, представленную рядом S.

Докажем, что X_n является знаменателем подходящей дроби порядка n функции

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right).$$

Рассмотрим для этого определенный интеграл:

$$J = \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^n D^n\left(\frac{1}{x-z}\right) dz;$$

он берется при помощи уже применявшейся формулы

$$\int UV^n\,dx = \Theta + (-1)^n \int VU^n\,dx,$$

в которой

$$\Theta = UV^{n-1} - U'V^{n-2} + \dots - (-1)^{n-1} U^{n-1} V.$$

Замечаем, что Θ на границах равно нулю, так как выражение $(z^2-1)^n$ и все его производные до $(n-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль при $z=1$ и $z=-1$; заменив $D_z^n(z^2-1)^n$ через $2^n\cdot 1\cdot 2\,\ldots\, n\cdot Z_n$, получаем следующее выражение:

$$\frac{(-1)^n J}{2^n\cdot 1\cdot 2\,\ldots\, n}=\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n\,dz}{x-z}.$$

Мы найдем после этого интеграл от рациональной функции, подставив $Z_n-X_n+X_n$ вместо Z_n. Приходим таким образом к выражению $\frac{Z_n-X_n}{x-z}$, которое является целым полиномом степени $n-1$ от x и z; интеграл

$$\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n-X_n}{x-z}\,dz,$$

следовательно, полином от x степени $n-1$, который мы обозначим через P_n. Таким образом имеем:

$$\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 1\cdot 2\ldots n}\quad J=\int_{-1}^{+1}X_n\frac{dz}{x-z}+P_n,$$

и следовательно:

$$\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 1\cdot 2\ldots n}J=X_n\ln\frac{x+1}{x-1}+P_n.$$

Этот результат и доказывает наше предложение. В самом деле, мы видим, что разложение по убывающим степеням x выражения $D_z^n\left(\frac{1}{x-z}\right)$ начинается с члена $\frac{1}{x^{n+1}}$ и рассматриваемый интеграл:

$$J=\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^n D_z^n\left(\frac{1}{x-z}\right)dz$$

имеет вид $\frac{\alpha_0}{x^{n+1}}+\frac{\alpha_1}{x^{n+2}}+\ldots$. Отсюда вытекает, что $\ln\frac{x+1}{x-1}+\frac{P_n}{X_n}$, т. е. $\frac{J}{X_n}$ есть ряд, расположенный по возрастающим положительным степеням $\frac{1}{x}$, начинается с члена $\frac{1}{x^{2n+1}}$; это свойство является характерным и указывает, что $\frac{P_n}{X_n}$ есть подходящая дробь порядка n функции $\ln\frac{x+1}{x-1}$.

Не будем больше задерживаться на свойствах полиномов Лежандра, чтобы еще раз возвратиться к решению уравнений помощью рядов, что еще до аналитических выводов Коши составляло предмет важных исследований со времен Ньютона. Мы обязаны автору Principia прекрасным методом, известным под названием правила аналитического параллелограма, помощью которого определяются наиболее высокие показатели степеней в разложениях, расположенных по убывающим степеням x, различных корней y любого алгебраического уравнения $F(x, y)=0$. Мы отсылаем читателя к работе Брио и Букэ, в которой подробно излагается это правило в § 34, стр. 42, ограничиваясь только указанием, что Миндинг вывел отсюда в высшей степени интересный прием, дающий возможность точно получать степень уравнения, получающегося в результате исключения одного из неизвестных из двух алгебраических уравнений, связывающих x и y. Задержимся несколько на арифметическом характере рядов вида:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

когда они соответствуют алгебраическому уравнению $F(x, y)=0$, коэфициенты которого мы полагаем целыми числами. Эйзенштейну, одному из наиболее знаменитых геометров нашего времени, с именем которого связаны замечательные открытия в арифметике, мы обязаны следующим очень интересным замечанием; в том случае, когда коэфициенты ряда — дроби, достаточно изменить x на kx, причем k обозначает целое число, выбранное подобающим образом, чтобы все дроби, за исключением первой, сделались целыми числами. Доказываем это следующим образом.

Заменяем сначала y на a_0+y так, чтобы получилось новое уравнение, удовлетворяющееся при $x=0$ и $y=0$. Расположив уравнение по возрастающим степеням y, получаем: $P+P_1y+P_2y^2+\ldots=0$, где P, P_1, P_2, ... полиномы от x, из которых первый обращается в нуль при $x=0$. Для большей простоты допустим, что только один корень исчезает вместе с x; пишем:

$$\begin{aligned}
P&=x(g+hx+\ldots)\\
P_1&=g_1+h_1x+\ldots\\
P_2&=g_2+h_2x+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

если предположить, что все коэфициенты целые числа, то g непременно не равно нулю. Пусть теперь $x=g_1{}^2t$, $y=g_1u$; в уравнении с новыми переменными t и u мы можем уничтожить множитель $g_1{}^2$; уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
Gt+Ht^2+\ldots&+[1+G_1t+H_1t^2+\ldots]u\\
&+[G_2+H_2t+\ldots]u^2\\
&+\ldots\ldots\ldots=0,
\end{aligned}$$

где G, G_1, ... H, H_1, ... целые числа. Переписываем наконец, это уравнение следующим образом:

$$u=-\frac{Gt+Ht^2+\ldots}{1+G_1t+H_1t^2+\ldots}-\frac{G_2+H_2t+\ldots}{1+G_1t+H_1t^2+\ldots}u^2-\ldots$$

или, выполняя указанное деление:

$$u=At+A't^2+\ldots+(B+B't+\ldots)u^2+\ldots.$$

Если положить: $u = mt + m't^2 + m''t^3 + \ldots$, то сравнение коэфициентов приводит непосредственно к равенствам:

$$\begin{aligned} m &= A \\ m' &= A' + Bm^2 \\ m'' &= A'' + 2Bmm' + B'm^2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Последние равенства с полной очевидностью показывают, что m, m', m'', ... непременно целые числа, так как они получаются, как целые функции количеств A, A', ... B, B' ... с целыми коэфициентами; таким образом, теорема Эйзенштейна доказана.

Пусть, например, дано уравнение: $y^n = (1-x)^{-m}$, которое по формуле бинома дает:

$$y = \sum \frac{m(m+n)\ \ldots\ [m+(i-1)n]}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ i\cdot n^i} x^i;$$

заменяем y на $1+y$, чтобы получить преобразованное уравнение:

$$ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \ldots = mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots .$$

Мы видим, таким образом, что число, обозначенное выше через g_1, равно n; следовательно, в том случае, когда показатель степени равен $-\frac{m}{n}$, биномиальный ряд изменяется на другой, в котором коэфициенты целые числа, если мы, во-первых, заменим x на n^2t и, затем, положим: $y = nu$. Отсюда вытекает, что выражение:

$$\frac{m(m+n)\ \ldots\ [m+n(i-1)]\,n^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ i}$$

приводится неизменно к целому числу.

Непосредственное следствие теоремы Эйзенштейна заключается в том, что e^x и $\ln(1+x)$ трансцендентные функции; в самом деле, очевидно, что замена x на kx в рядах, которые их представляют:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\ \ldots\ n},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

не может заместить все их коэфициенты целыми числами.

Чебышев пошел дальше в этом направлении и пришел к чрезвычайно интересным результатам. В заданной функции:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

разложенной в ряд по возрастающим степеням x, приведем кажд й коэфициент α_n, который мы полагаем рациональным, к более простому выражению: $\frac{N}{d}$. Пусть p_n наибольший из простых делителей d и временно обозначим предел частного $\frac{p_n}{n}$ при $n = \infty$ индексом ряда. В этом случае, теорема, данная знаменитым геометром, заключается в том, что всякий ряд с рациональными коэфициентами, получающийся для функции, составленной из конечного числа функций алгебраических, логарифмических и показательных, имеет индексом число конечное.

Рассмотрим, например, ряд $\sum \frac{x^n}{n^2+1}$; Чебышев доказал, что n^2+1 содержит простые множители, беспредельно увеличивающиеся вместе с n; индекс этого ряда бесконечен; следовательно, ряд представляет трансцендентную функцию, которая не может быть получена из сочетания ограниченного числа функций алгебраических, показательных и логарифмических.

Заметим, что теорема, обратная теореме Чебышева, не справедлива; это вытекает из формулы, данной на стр. 125:

$$\frac{2K}{\pi} = \sum \left(\frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right)^2 k^{2n},$$

в которой коэфициенты степеней переменной k равны квадратам коэфициентов алгебраического разложения:

$$(1-k^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} k^{2n}.$$

Лиувилль доказал, действительно, что интеграл:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

не может быть выражен сочетанием конечного числа алгебраических, логарифмических и показательных функций от модуля. (Sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce considerées comme fonctions de leur module. Journal de Mathématiques, т. V, стр. 34).

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Различные значения интеграла от однозначной функции, имевшей разрывы, в зависимости от пути изменения переменной. — Приложение к $\int_1^z \frac{dz}{z}$. — Как многие значения функции приводят вообще к полной неопределенности. — Теорема Чебышева относительно последовательных минимумов выражения $x - ay - \alpha$ при целых значениях x и y. — Преобразование Римана интегралов со многими значениями в однозначные функции, имеющие разрезы. — Аналогичное преобразование квадратного корня из полинома в однозначную функцию.

Корни уравнений дают нам первый пример не однозначных функций, имеющих для каждого значения переменной конечное или бесконечное число значений, в зависимости от того, будет ли уравнение алгебраическим или трансцендентным. Покажем теперь, как интегральное исчисление приводит к неоднозначным функциям с полной неопределенностью в том смысле, что переменная, описав некоторый контур, начиная от заданной точки и возвращаясь в нее, приводит при этом к последовательности значений, которые могут приближаться с любой степенью точности к некоторому произвольному количеству. Это столь важное аналитическое свойство является следствием того представления определенного интеграла, которое дано Коши. Прежде чем изложить его, следует показать, во-первых, каким образом многочисленные значения функции $u = \ln z$, полученные из уравнения $e^u = z$, вытекают из интеграла

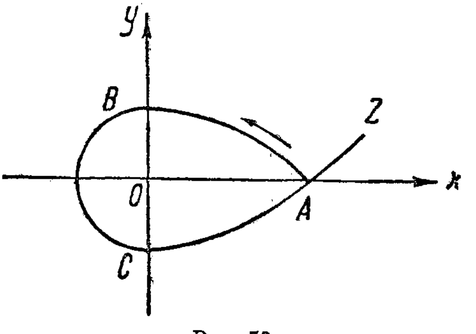

Рис. 56.

$$u = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Пусть $OA = 1$ и Z переменная точка, аффикс которой z (рис. 56).

Рассмотрим путь AZ, которому соответствует некоторое значение (AZ) рассматриваемого интеграла; прежде чем следовать этому пути, опишем некоторый контур ABC, обходя начало в прямом направлении. Полученный таким образом интеграл равен $2i\pi + (AZ)$; проходя замкнутый контур произвольное число раз как в прямом направлении, так и в обратном, находим для него:

$$2ni\pi + (AZ),$$

причем n положительное или отрицательное целое число. Это как раз то бесконечное число определений, к которым приводит исследование уравнения $e^u = z$.

Станем на более общую точку зрения; пусть

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

где $f(z)$ — однозначная функция, допускающая некоторое число разрывов: a, b, ..., которым соответствуют вычеты A, B, ...

Пусть J — одно из значений интеграла, соответствующее некоторому определенному пути Z_0Z; очевидно, что, заставляя, как только что, переменную описывать контуры, заключающие в себе последовательно точки a, b, c, ..., мы получаем для значений функции $\Phi(z)$ формулу

$$2i\pi(mA + nB + \ldots) + J,$$

в которой m, n, ... — некоторые положительные или отрицательные целые числа.

Это выражение, составленное из арифметических элементов m, n,... и определенных постоянных A, B, ..., приводит к следующему чрезвычайно важному замечанию. Рассмотрим сначала случай трех вычетов A, B, C, которые полагаем вещественными или мнимыми; можно доказать, что если эти количества не подчиняются условию $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, в котором α, β, γ, ... целые, то можно распорядиться числами m, n, p таким образом, что выражение $mA + nB + pC$ будет меньше любого заданного числа. Отсюда следует, что если функция $f(z)$ имеет по крайней мере три вычета, то интеграл становится неопределенным, так как в этом случае он может принимать произвольно близкие между собой значения.

Таким образом невозможно получить $\Phi(z)$, как функцию от z, если, как это первый заметил Пюизо, не задать z_0 и путь от z_0 до z, как необходимый элемент для определения функции. Это тонкие арифметические исследования, которые приводят к только-что указанному результату, относящемуся к случаю трех вычетов; но можно указать и более простые случаи, в которых можно полностью выявить неопределенность интеграла или функции $\Phi(z)$; положим, например:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{a^2}{z^2+a^2},$$

где постоянная a вещественна и иррациональна. Очевидно, что эта функция имеет полюсами значения $\pm i$ и $\pm ai$, соответствующие вычеты будут $\pm\frac{1}{2i}$ и $\pm\frac{a}{2i}$; следовательно, общее значение интеграла равно:

$$J + \pi(m - na).$$

Установив это, докажем сейчас, что $m - na$ может представлять любое вещественное число α с любым заданным приближением. Мы получим таким образом один из результатов важной теории, данной Чебышевым и изложенной им в прекрасной и серьезной работе, опубликованной на русском языке в мемуарах Петербургской академии наук. Мы придем к этому результату, пользуясь совершенно элементарным методом (см. Journal de Borchardt, т. LXXXVIII, 1879).

Пусть $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ — две последовательные подходящие дроби разложения a в непрерывную дробь; полагаем:

$$an = N + \omega$$
$$an' = N' + \omega',$$

обозначая через N и N' два целых числа и считая, что ω и ω' по абсолютному значению меньше $\frac{1}{2}$. Полагаем еще для краткости:

$$\varepsilon = mn' - m'n = \pm 1;$$

рассмотрим два целых числа x и y, заданных формулами

$$\varepsilon x = mN' - m'N$$
$$\varepsilon y = nN' - n'N.$$

Отсюда легко получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon(x - ay) &= (m - an)N' - (m' - an')N \\ &= (m - an)(an' - \omega') - (m' - an')(an - \omega) \\ &= \varepsilon\alpha + \omega(m' - an') - \omega'(m - an),\end{aligned}$$

и следовательно:

$$\varepsilon(x - ay - \alpha) = \omega(m' - an') - \omega'(m - an).$$

Обозначим теперь через λ полное частное, соответствующее подходящей дроби $\frac{m'}{n'}$; будем иметь как известно:

$$a = \frac{m + \lambda m'}{n + \lambda n'},$$

откуда

$$m - an = \frac{\varepsilon\lambda}{n + \lambda n'}, \qquad m' - an' = -\frac{\varepsilon}{n + \lambda n'},$$

и следовательно:

$$\omega(m' - an') - \omega'(m - an) = -\varepsilon\frac{\omega + \lambda\omega'}{n + \lambda n'}.$$

Отсюда вытекает, что:

$$x - ay - \alpha = -\frac{\omega + \lambda\omega'}{n + \lambda n'};$$

так как ω и ω' меньше $\frac{1}{2}$, получаем для верхней границы этого выражения количество $\frac{1}{2}\frac{\lambda+1}{n+\lambda n'}$. Достаточно переписать его следующим образом: $\frac{1}{2n'}\left(1+\frac{n'-n}{n+\lambda n'}\right)$, чтобы непосредственно обнаружить, что это выражение убывает, когда λ увеличивается, так как $n'>n$; максимум получается при $\lambda=1$. Следовательно, пишем:

$$x-ay-a=\frac{\theta}{n+n'},$$

обозначая через θ число, по абсолютному значению меньшее единицы; n и n' беспредельно возрастают; таким образом мы доказали, что можно найти два таких целых числа x и y, что разность $x-ay$ как угодно мало отличается от любого данного числа α.

Определим, наконец, верхнюю границу целого числа y, полученную Чебышевым. Имеем:

$$\varepsilon y=nN'-n'N=n(an'-\omega')-n'(an-\omega)$$

или проще

$$\varepsilon y=\omega n'-\omega' n;$$

очевидно, целое y заключено между $+\frac{n+n'}{2}$ и $-\frac{n+n'}{2}$.

Выражения x и y легко приводят к другому следствию, которое полезно отметить. Пусть имеем: $g-ah-\alpha=0$, где g и h — целые; мы утверждаем, что, начиная с некоторой подходящей дроби разложения a в непрерывную дробь, и для всех последующих, мы постоянно имеем: $x=g$, $y=h$. В самом деле, согласно теории непрерывных дробей, имеем:

$$a=\frac{m}{n}+\frac{\theta}{nn'},\qquad a=\frac{m'}{n'}+\frac{\theta'}{n'n''},$$

где θ и θ' по абсолютному значению меньше единицы.

Следовательно, так как $\alpha=g-ah$, получаем:

$$\alpha n=ng-h\left(m+\frac{\theta}{n'}\right),$$

$$\alpha n'=n'g-h\left(m'+\frac{\theta'}{n''}\right);$$

таким образом целые N и N' должны быть наиболее близкими к выражениям $ng-h\left(m+\frac{\theta}{n'}\right)$ и $n'g-h\left(m'+\frac{\theta'}{n''}\right)$; условие же, что ω и ω' по абсолютному значению меньше $\frac{1}{2}$ указывает, что, начиная с n' большего $2h$, имеем:

$$N=ng-mh,$$
$$N'=n'g-m'h.$$

Следовательно, вычислив x и y по формулам:

$$\varepsilon x = mN' - m'N,$$
$$\varepsilon y = nN' - n'N,$$

находим:

$$x = g, \quad y = h,$$

т. е. получаем высказанный результат.

Пусть теперь:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{a^2}{z^2+a^2} + \frac{1}{z-p} + \frac{b}{z-q},$$

где a и b — вещественны и несоизмеримы; тогда общее выражение функции $\Phi(z)$ принимает вид:

$$J + \pi(m - na) + 2i\pi(m' - bn');$$

по доказанному выше, мы можем выбрать такие целые m, n, m', n', что функция $\Phi(z)$ будет отличаться как угодно мало от некоторого заданного числа $\alpha + i\alpha'$. Следовательно, функция $\Phi(z)$ абсолютно неопределенна.

Только что изложенные исследования показывают, что, вообще, функция $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ нуждается для своего определения в задании пути интегрирования от нижнего предела z_0 до верхнего предела z; далее этого результата долгое время не двигались. Только на долю Римана выпало достигнуть большого успеха путем замены этого аналитического понятия новыми построениями, приводящими к однозначным функциям, снабженным разрезами.

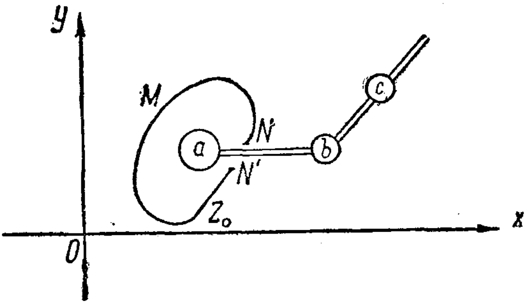

Рис. 57.

Допустим, например, что функция $f(z)$ имеет три полюса a, b, c, которым соответствуют вычеты A, B, C (рис. 57).

Пусть $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ и J — значение этого интеграла, взятого вдоль определенного пути $z_0 z$; следующая формула дает все значения функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = J + 2i\pi(mA + nB + pC),$$

где m, n, p — некоторые целые числа.

Обведем каждый полюс бесконечно малым контуром; функция $f(z)$ будет конечной и непрерывной на всей вне площадок, ограниченных этими контурами.

Соединим теперь эти контуры разрезами, образованными двумя бесконечно близкими линиями, идущими: первая от A до B, вторая от B до C и последняя от C до бесконечности.

Если мы исключим для z пространство, ограниченное разрезами и контурами, то функция $\Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ будет, очевидно, конечной, непрерывной и однозначной, так как в этой части плоскости функция $f(z)$ голоморфна и нет ни одного замкнутого контура, заключающего точку разрыва $f(z)$. Что же касается линий соединения AB, BC, ..., которые являются совершенно произвольными, то мы покажем сейчас, что они будут линиями разрыва, имеющими аналитический характер разрезов.

Пусть N и N' — две бесконечно близкие точки, лежащие по обе стороны от одного из разрезов, например AB. Следуем от z_0 к N и N' ходами z_0N', z_0MN, не встречающими части плоскости, ограниченной контурами и разрезами; имеем:

$$\Phi(N)=(z_0MN); \quad \Phi(N')=(z_0N'),$$

откуда:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=(N'z_0MN).$$

Если мы прибавим бесконечно малый элемент (NN'), то, очевидно, $\Phi(N)-\Phi(N')$ станет интегралом от функции $f(z)$, взятым по замкнутому контуру, заключающему полюс A и описанному в отрицательном направлении, т. е. $-2i\pi A$.

Следовательно, изменение функции $\Phi(z)$ у двух краев первого разреза равно $-2i\pi A$; у двух краев второго оно равно $-2i\pi(A+B)$; продолжая так далее для любого числа полюсов, получим у краев последнего разреза $-2i\pi\sum A$, причем $\sum A$ обозначает сумму всех вычетов, т. е. интегральный вычет функции $f(z)$. Если ввести условие, что $\sum A=0$, то последний разрез может быть отброшен, как не являющийся линией разрыва; и вообще, если сумма $A+B$, например, равна нулю, то соответствующий разрез, в данном случае второй, должен быть отброшен.

Наконец, если все вычеты равны нулю, то все разрезы исчезают; действительно, в этом случае интеграл от $f(z)\,dz$, будучи алгебраическим и рациональным, имеет в каждой точке единственное значение.

Такова, в нескольких словах, идея Римана, позволяющая приводить интегралы неоднозначных функций к соответствующим однозначным функциям.

Знаменитый геометр пошел дальше; ему удалось преобразовать раж...кцию с двумя различными определениями, выраженными посредством ...тного корня, в однозначную функцию, снабженную разрезами. ...пример,

ω' по абсо...

большего $2h$,

$$F(z)=(z-a)(z-b)\ldots(z-l),$$

h, ... не равны.

Полагаем

$$f(z)=\frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{и} \quad \Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Строя систему разрезов функции $\Phi(z)$ видим, что все вычеты $\frac{F'(z)}{F(z)}$ равны единице и изменение функции у двух краев первого разреза равно $-2i\pi$, второго $-4i\pi$, третьего $-6i\pi$ и т. д.

Пусть теперь

$$\varphi(z)=e^{\frac{1}{2}\Phi(z)};$$

эта формула определяет однозначную функцию, равную, с точностью до знака, $\sqrt{\frac{F(z)}{F(z_0)}}$.

Очевидно, что у двух краев первого разреза $\frac{\varphi(N)}{\varphi(N')}=-1$; у двух краев второго это отношение равно $+1$, как и вообще для всех четных по порядку разрезов, тогда как -1 соответствует всем разрезам с нечетным нумером.

Отбрасывая разрезы четного порядка, которые не являются линиями разрыва для функции $\varphi(z)$, получаем функцию $\varphi(z)$ с определенными значениями, меняющую знак при пересечении разрезов с нечетным нумером функции $\Phi(z)$ и, следовательно, имеем преобразование квадратного корня $\sqrt{\frac{F(z)}{F(z_0)}}$ в однозначную функцию.

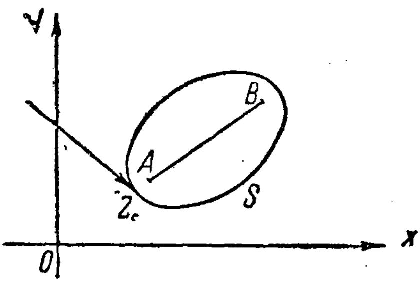

Рис. 58.

Замечаем, что последний разрез, который уходит в бесконечность, существует только в том случае, когда функция $F(z)$ нечетной степени.

Как пример, указывающий на преимущества подобного преобразования, рассмотрим интеграл $\int\limits_{z_0}^{z}\frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)}$, где $F(z)$ — некоторая однозначная функция, а $\varphi(z)$ — радикал $\sqrt{(z-a)(z-b)}$.

Пусть Z_0, Z, A, B — точки, аффиксы которых z_0, z, a, b; $\varphi(z)$ — однозначная функция, допускающая разрез по прямой AB (рис. 58).

Допустив это, мы можем итти от точки Z_0 к точке Z путем, не содержащим внутри разреза AB; каков бы ни был такой путь, интеграл имеет одно и то же значение J, которое мы получим, описывая, например, прямую Z_0Z.

Можно так же описать сначала замкнутую кривую S, начиная от точки Z_0 и окружая разрез AB, а затем уже прямую Z_0Z; в этом случае интеграл равен $J+(S)$, где (S) обозначает $\int\limits_{(S)}\frac{F(z)}{\varphi(z)}dz$; если мы опишем кривую в положительном или отрицательном направлении n раз, то общее значение интеграла будет равно $J+n(S)$, причем n — целое положительное или отрицательное число.

Чтобы вычислить (S), мы можем заменить контур любым путем, окружающим разрез AB; выберем путь, состоящий из двух бесконечно близких друг к другу прямых PQ, $P'Q'$, параллельных AB, и из двух бесконечно малых полукругов PQ', $P'Q$, имеющих центры в точках A и B (рис. 59).

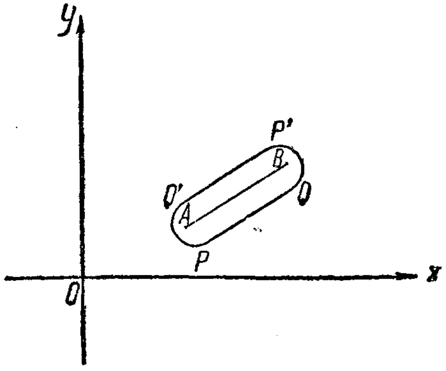

Рис. 59.

Тогда, пренебрегая бесконечно малыми членами, соответствующими интегрированию вдоль полуокружностей, получаем:

$$(S)=(PQ)+(P'Q');$$

имея же

$$(PQ)=\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

замечаем, что должны написать:

$$(P'Q')=\int_b^a -\frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

так как у обоих краев разреза $\varphi(z)$ отличается знаком. Следовательно, получаем:

$$(S)=2\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz;$$

таким образом общее значение искомого интеграла равно:

$$J+2n\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz.$$

Применим этот результат к вычислению интеграла

$J=\int\limits_{-1}^{+1} \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$, в котором функция $F(z)$ — целый полином.

Пусть A и B (рис. 60) точки $z=1$ и $z=-1$; согласно с только что доказанным, $2J$ равно интегралу, взятому вдоль любого контура, заключающего AB. Если $F(z)$ — целый полином, то мы можем бесконечно увеличивать этот контур и взять окружность с центром в начале и бесконечно большого радиуса R, положив $z=Re^{it}$. Допустив это, воспользуемся рядом:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{iz}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{iz}\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{1}{z^{2n}};$$

умножив его на $F(z)$, получаем выражение, сравнимое с выражением функции, допускающей единственный полюс $z=0$. Следовательно, обозначив через A коэфициент при $\frac{1}{z}$, т. е. вычет, соответствующий полюсу $z=0$, имеем:

$$2J=2i\pi A \quad \text{или} \quad J=i\pi A.$$

Пусть, в частности, $F(z)=z^{2n}$, получаем непосредственно

$$J=\pi\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n},$$

т. е.:

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz=\frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n},$$

что было установлено ранее.

Пусть еще:

$$J=\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}};$$

замечаем сначала, что интеграл $(S)=\int_R \frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}$, взятый вдоль окружности с центром в начале и бесконечно большого радиуса R, равен нулю, так как разложение в ряд функции $\frac{1}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}$ по убывающим степеням z не содержит члена $\frac{1}{z}$; с другой стороны (S) получается из $2J$ прибавлением интеграла, взятого вдоль бесконечно малого контура, описанного вокруг точки A, аффикс которой a.

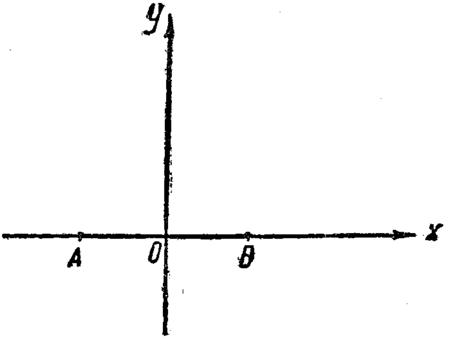

Рис. 60.

По отношению же к этому контуру мы можем рассматривать $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ как однозначную функцию, что дает непосредственно:

$$\int_A \frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}=\frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}};$$

отсюда заключаем, что, определяя надлежащим образом знак квадратного корня, имеем:

$$J=\frac{i\pi}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Положим для этого $a = \alpha + i\beta$; находим:

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\alpha + i\beta - z)\sqrt{1 - z^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{(\alpha - z)\,dz}{[(\alpha - z)^2 + \beta^2]\sqrt{1 - z^2}} - i\int_{-1}^{+1} \frac{\beta\,dz}{[(\alpha - z)^2 + \beta^2]\sqrt{1 - z^2}};$$

с другой стороны, если положим:

$$\sqrt{a^2 - 1} = A + iB,$$

получаем:

$$J = \frac{\pi}{A + iB} = \pi\frac{A - iB}{A^2 + B^2}.$$

Следовательно, знак квадратного корня определяется из условия, что B имеет знак β или, что то же самое, A имеет знак α, так как соотношение:

$$\sqrt{(\alpha + i\beta)^2 - 1} = A + iB$$

дает, как нетрудно видеть, что:

$$\alpha\beta = AB.$$

ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ.

Исследование интеграла $\int\limits_{z_0}^{z} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$; различные его значения; случай, когда $R(z)$ четвертой степени. — Определенные интегралы

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

рассматриваемые как функции от модуля, по Лагерру и Гурса; теорема Фукса.

Пусть $R(z)$ — целый полином, о котором мы предположим, что его множители простые, и $f(z)$ — рациональная функция. Рассмотрим интеграл:

$$J = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{\sqrt{R(z)}}\,dz$$

и предложим себе, как мы это делали выше для интегралов от рациональных функций, обнаружить его различные значения, появляющиеся вследствие различия путей, которыми может следовать переменная между границами z_0 и z. Чтобы изложить этот важный вопрос, воспользуемся методом, которым мы обязаны Пюизо; ученый геометр опубликовал его в знаменитом мемуаре[1], к которому и отсылаем для изучения интегралов от любых алгебраических дифференциалов; здесь же ограничимся частным случаем, достаточным с точки зрения теории эллиптических функций.

Напомним сначала, что, если мы обозначим через $f(z)$ однозначную функцию, то интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый последовательно вдоль двух замкнутых контуров S и S', описанных полностью и один раз в прямом направлении, причем S' будет внутри S, сохраняет одинаковое значение при условии, что внутри площадки, ограниченной этими двумя контурами, функция $f(z)$ не будет иметь никакого разрыва.

Эта основная теорема в применении к интегралу J видоизменяется, как мы увидим, когда внутри меньшего контура S' находится нечетное число корней $R(z)$, хотя рациональная функция $f(z)$ и не имеет никакого разрыва на площадке, ограниченной S и S'.

[1] Recherches sur les fonctions algébriques: Journal de Liouville, т. XV, стр. 395.

Принимаем за внешний контур S кривую $AMENA$ и за S' кривую $BCDFB$ (рис. 61); проводим затем соединяющие их линии AB и DE. Имеем сначала:

$$S=(AME)+(ENA),$$
$$S'=(BCD)+(DFB).$$

Замечаем теперь, что на площадке $AMEDCBA$ нет ни полюсов, ни точек разветвления и, следовательно, на этой части плоскости мы можем рассматривать функцию $\frac{f(z)}{\sqrt{R(z)}}$, как однозначную и непрерывную, и написать:

$$(AME)=(AB)+(BCD)+(DE).$$

На том же основании имеем:

$$(ENA)=(ED)+(DFB)+(BA).$$

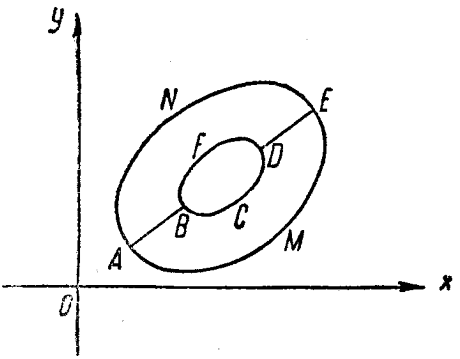

Рис. 61.

Установив это, заметим, что члены (AB) и (BA), стоящие в этих соотношениях, не относятся к одной и той же последовательности значений функции. В самом деле, во втором соотношении, описав контур S', мы возвращаемся в B, чтобы следовать путем BA; если этот контур содержит нечетное число точек разветвления, то радикал, имея то же самое абсолютное значение, изменяет знак, и интеграл (BA) равен (AB). Наоборот $(DE)=-(ED)$; складывая почленно, мы получаем:

$$(AME)+(ENA)=2(AB)+(BCD)+(DFB),$$

и следовательно:

$$(S)=2(AB)+(S').$$

Оба интеграла, обозначенные через (S) и (S'), имеют вообще различные значения; они будут равны, если предположим: $(AB)=0$, т. е. когда два контура S и S' имеют общую точку.

Добавим, кроме того, что если число критических точек функции $\sqrt{R(z)}$ внутри S' четное, то эта функция на протяжении контуров интегрирования может быть уподоблена однозначной функции; мы получим тогда: $(S)=(S')$.

Установив это, покажем, как получаются различные значения данного интеграла

$$J=\int_{z_0}^{z}\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Полагаем для большей простоты, что функция $f(z)$ голоморфная, и пусть Z_0 и Z точки, соответствующие границам интеграла z_0 и z (рис. 62). Прежде чем следовать путем Z_0Z, опишем замкнутый контур A, заключающий один корень $z=a$ уравнения:

$$R(z)=0$$

и обозначим через (A) интеграл, взятый по этому контуру.

Когда мы возвращаемся к точке отправления, то мы находим другое значение радикала $\sqrt{R(z)}$, которое и следует сохранять при интегрировании по Z_0Z, что дает вследствие изменения знака, количество $-(Z_0Z)$, откуда получаем следующее значение J для рассматриваемого пути:

$$J=-(Z_0Z)+(A).$$

При этом интеграл (A) получается, как мы сейчас разъясним, следующим образом.

Описываем окружность бесконечно малого радиуса ρ с центром в критической точке $z=a$ и пусть C одна из точек на этой окружности. Контур, составленный из прямой линии Z_0C, окружности, описанной полностью и только один раз в определенном направлении, и линии CZ_0 сможет заменить (A). Действительно, оба контура имеют общую точку Z_0, и в части плоскости, которую они заключают, нет разрывов функции. Положив временно, что ρ интеграл, относящийся к окружности, будем иметь:

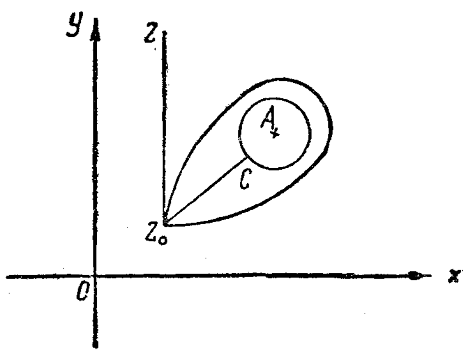

Рис. 62.

$$(A)=(Z_0C)+(\rho)+(CZ_0).$$

Замечая еще, что радикал $\sqrt{R(z)}$ меняет знак, когда мы возвращаемся к точке C описав эту окружность, получаем:

$$(CZ_0)=(Z_0C),$$

откуда заключаем, что

$$(A)=2(Z_0C)+(\rho).$$

Заметим, что интеграл (ρ) бесконечно мал; действительно полагаем $Z=a+\rho e^{it}$ или короче $z=a+\zeta$, что дает $dz=i\zeta\,dt$; так как $z=a$ простой корень функции $R(z)$, мы можем написать:

$$R(z)=\zeta R_1(\zeta),$$

обозначив через $R_1(\zeta)$ целый полином от ζ; таким образом, находим значение для (ρ):

$$(\rho)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(a+\zeta)\,i\zeta\,dt}{\sqrt{\zeta R_1(\zeta)}}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(a+\zeta)\,i\zeta^{\frac{1}{2}}\,dt}{\sqrt{R_1(\zeta)}},$$

которое бесконечно мало вместе с ζ.

Контур, которым мы только что пользовались, дающий формулу:

$$(A) = 2\int_{z_0}^{a} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где интеграл прямолинейный, назван Пюизо элементарным контуром.

Укажем сейчас применение этого результата, рассматривая следующее соотношение:

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

помощью которого можно определить функцию $z = \sin x$. Заставляя переменную описать путь, заключающий одну из двух критических точек радикала $\sqrt{1-z^2}$, например точку: $z = 1$, получаем для интеграла новое значение:

$$2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

т. е. $\pi - x$. Отсюда вытекает, что, не меняя z, мы можем изменить x на $\pi - x$, откуда получаем элементарное соотношение:

$$\sin x = \sin(\pi - x).$$

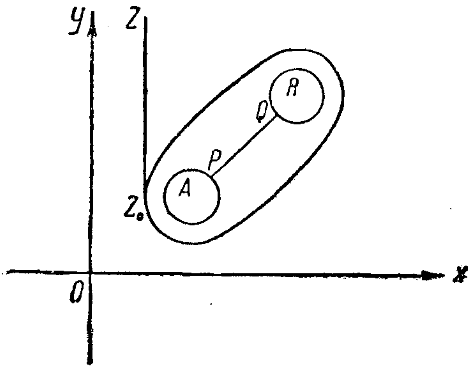

Рис. 63.

Другой закон изменения переменной приведет нас к значениям интеграла, устанавливающим периодичность обратной функции. Заменяем замкнутый контур, который мы только что применяли, другим, заключающим, вместо одного, два корня a и b полинома $R(z)$ (рис. 63). Пусть A и B — соответствующие им точки, и (AB) — значение, полученное в результате интегрирования по этому контуру. Если мы заметим, что $\sqrt{R(z)}$ вместо того, чтобы изменить знак, принимает теперь то же значение, когда мы возвращаемся в точку Z_0, то в этом случае мы находим для нового пути:

$$(AB) + (Z_0 Z).$$

Установив это, рассматриваем две бесконечно малых окружности с центрами в точках A и B и радиусами ρ и σ. Обозначаем окружности их радиусами и берем точку P на первой и точку Q на второй; ясно, что контур AB может быть заменен следующим:

$$PQ + \sigma + QP + \rho.$$

Замечаем затем, что, если мы возвратимся в точку Q, описав окружность σ, то радикал меняет знак, что дает соотношение:

$$(PQ) = (QP);$$

пренебрегая, наконец, членами ρ и σ, как бесконечно малыми, имеем просто:

$$(AB) = 2(PQ) = 2\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Этот результат устанавливает периодичность $\sin x$, как следствие соотношения:

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

в самом деле мы видим, что заставляя переменную описывать контур, заключающий две критические точки $z=1$ и $z=-1$, мы получаем значение, выраженное равенством:

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\pi + x,$$

показывающим, что мы можем заменить x на $2\pi + x$, не меняя z.

Допустим затем, что функция $R(z)$ — полином четвертой степени:

$$R(z) = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d);$$

мы придем к заключению, что к некоторому значению эллиптического интеграла:

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

смотря по пути изменения переменной, надо прибавлять следующие интегралы:

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad \int_b^c \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad \int_c^d \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

взятые по отрезкам прямых.

Эти постоянные получили наименование индексов периодичности; они связаны некоторым соотношением, которое необходимо установить.

Рассмотрим для этого бесконечно малые окружности с центрами в точках A, B, C, D (рис. 64), соответствующих корням функции $R(z)$. Если мы соединим окружности попарно прямыми PQ, RS, TU, то замкнутый контур, представляющий последовательность путей:

$$PQ + QB'R + RS + SC'T + TU + UD'D''U +$$
$$+ UT + TC'''S + SR + RB''Q + QP + PA''A'P,$$

будет заключать внутри все критические точки $\sqrt{R(z)}$. Интегрируем теперь дифференциал $\dfrac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ по этому контуру и замечаем, что одни и те же отрезки прямой, описанные в противоположном направлении, дают следующие соотношения:

$$(TU)=+(UT)$$
$$(RS)=-(SR)$$
$$(PQ)=+(QP),$$

в зависимости от знаков, которые принимает радикал $\sqrt{R(z)}$, когда описываются последовательно окружности. Замечаем, наконец, что интегралы, относящиеся к различным частям бесконечно малых окружностей, также бесконечно малы, и мы получаем в результате интегрирования значение:

$$2(TU)+2(PQ),$$

т. е.

$$2\int_c^d \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+2\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

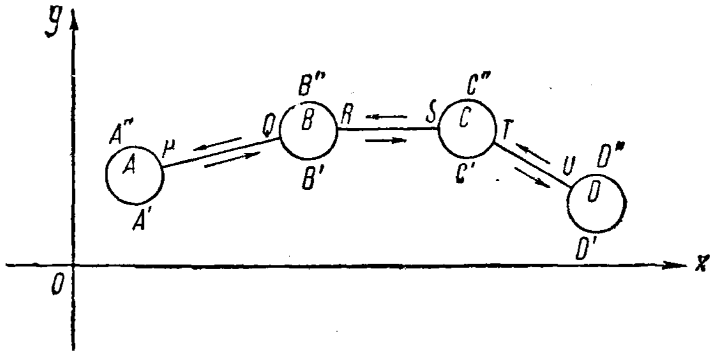

Рис. 64.

Так как всякий другой замкнутый путь, заключающий внутри эти точки, являющиеся единственными разрывами дифференциала, приводит к тому же значению интеграла, выбираем за новый путь окружность с очень большим радиусом, имеющую центр в начале. Для всех точек этого контура мы можем принять иррациональную функцию $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ за однозначную, которая получается из разложения ее по убывающим степеням z; таким образом, полученный ряд не содержит вовсе члена $\frac{1}{z}$ и интегрирование, выполненное вдоль выбранной окружности, дает в результате нуль. Отсюда получаем соотношение, которое мы и хотели получить:

$$\int_c^d \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=0;$$

оно дает важное следствие, что многочисленные значения эллиптического интеграла приводятся к выражению:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + m \int_{a}^{b} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + n \int_{b}^{c} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

в которое входят только два целых произвольных m и n.

Дадим второй, чисто алгебраический, метод для вывода этого результата.

Исходя из симметричного соотношения между переменными z и z', в котором p и q — постоянные коэфициенты:

$$zz' + p(z + z') + q = 0,$$

замечаем, что мы можем распорядиться этими постоянными таким образом, чтобы иметь одновременно:

$$z = a; \quad z' = c,$$
$$z = b; \quad z' = d.$$

Отсюда заключаем, что соотношение останется соблюденным, если меняя местами z и z', положим:

$$z = c; \quad z' = a;$$
$$z = d; \quad z' = b;$$

в результате этого заключаем, что оно может быть написано в двух видах:

$$\frac{z-a}{z-b} = g\frac{z'-c}{z'-d}; \qquad \frac{z-c}{z-d} = h\frac{z'-a}{z'-b},$$

если обозначим через g и h постоянные.

Берем обратные значения получаем:

$$\frac{z-b}{z-a} = \frac{1}{g}\,\frac{z'-d}{z'-c}, \qquad \frac{z-d}{z-c} = \frac{1}{h}\,\frac{z'-b}{z'-a},$$

откуда, дифференцируя:

$$\frac{(a-b)\,dz}{(z-b)^2} = g\,\frac{(c-d)\,dz'}{(z'-d)^2},$$

$$\frac{(c-d)\,dz}{(z-d)^2} = h\,\frac{(a-b)\,dz'}{(z'-a)^2},$$

$$\frac{(b-a)\,dz}{(z-a)^2} = \frac{1}{g}\,\frac{(d-c)\,dz'}{(z'-c)^2},$$

$$\frac{(d-c)\,dz}{(z-c)^2} = \frac{1}{h}\,\frac{(b-a)\,dz'}{(z'-a)^2},$$

затем, перемножая почленно и извлекая корень четвертой степени, находим:

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=\pm\frac{dz}{\sqrt{R(z')}}.$$

Наконец, интегрирование дает:

$$\int\limits_a^b\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=\pm\int\limits_c^d\frac{dz'}{\sqrt{R(z')}},$$

если принять во внимание, что пределам $z=a$, $z=b$ соответствуют для z' значения $z'=c$ и $z'=d$.

Рассмотрев выше эллиптический интеграл первого рода в самом общем виде, займемся теперь его каноническим видом, в котором имеем:

$$R(z)=(1-z^2)(1-k^2z^2),$$

допустив, что модуль k вещественный и меньше единицы.

Индексы периодичности в этом случае равны:

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\qquad\int\limits_1^{\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Мы используем следующие обозначения. Полагаем сначала:

$$K=\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

что дает:

$$2K=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Пишем затем:

$$iK'=\int\limits_1^{\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

и замечаем, что изменив переменную, полагая $z^2=t$, мы получим следующие новые выражения:

$$K=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}},$$

$$iK=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{k^2}}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}.$$

Мы придем к двум интегралам, имеющим пределами нуль и единицу, применив во втором линейную подстановку, $t=\frac{1-k'^2u}{k^2}$, где полагаем $k'^2=1-k^2$. Получаем таким образом:

$$K'=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k'^2u)}},$$

или, считая $u=z^2$:

$$K'=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k'^2z^2)}};$$

мы видим, таким обра? м, что K и K' — одинаковые функции модуля k и его дополнения k'.

Возвратимся теперь к ряду, полученному на стр. 125, а именно:

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\ldots\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\sum\left(\frac{1.\ 3.\ 5\ \ldots\ 2n-1}{2.\ 4.\ 6\ \ldots\ 2n}\right)^2k^{2n}\qquad(n=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

который действителен при условии, что модуль k меньше единицы. Гудерманн сделал важное замечание, показав, что положив $k=\sin\theta$, мы получаем формулу:

$$K=\pi\sum\left(\frac{1.\ 3.\ 5\ \ldots\ 2n-1}{2.\ 4.\ 6\ \ldots\ 2n}\right)^2\sin(4n+1)\theta,$$

из которой следует также, что

$$K'=\pi\sum\left(\frac{1.\ 3.\ 5\ \ldots\ 2n-1}{2.\ 4.\ 6\ \ldots\ 2n}\right)^2\cos(4n+1)\theta.$$

Пусть, наконец:

$$S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\ldots+\left(\frac{1.\ 3.\ 5\ \ldots\ 2n-1}{2.\ 4.\ 6\ \ldots\ 2n}\right)^2k^{2n}.$$

Мы получим для K' другое, чрезвычайно важное разложение, данное Лежандром:

$$K'=K\ln\frac{4}{k}-(K-1)-\frac{2}{2\cdot4}(K-S_1)-\frac{2}{5\cdot6}(K-S_2)-\ldots.$$

Количества K и K', рассматриваемые, как функции модуля k, дают первый пример совершенно нового вида функций, общее изучение которых относится к теории линейных дифференциальных уравнений и было предметом очень важных исследований Фукса, одного из наиболее знаменитых аналитиков нашей эпохи. Опуская основы, изложение которых вне плана наших лекций, мы установим характерные свойства K и K' элементарным путем, любезно указанным Лагерром.

Положив для этого $x^2 = t$ и $k^2 = z$, напишем, чтобы выявить переменную z:

$$K = K(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}},$$

что дает:

$$K' = K(1-z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)[1-(1-z)t]}};$$

то же самое мы получили на стр. 125 в виде двойного интеграла:

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-xyz)\sqrt{x(1-x)y(1-y)}}.$$

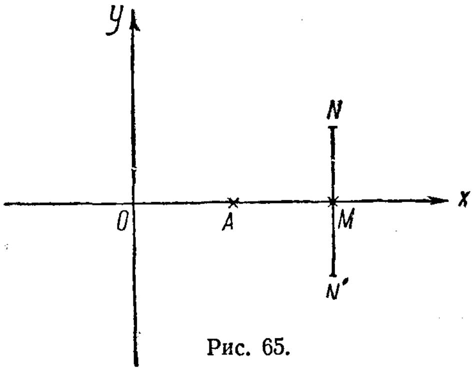

Рис. 65.

Формулы эти, как было уже указано, определяют $K(z)$, как функцию, голоморфную на всей плоскости, но имеющую разрезом всю положительную часть оси абсцисс, считая от точки $x = OA = 1$ (рис. 65).

Пусть $OM = \zeta$, $MN = MN' = \lambda$; разность значений $K(z)$ в бесконечно близких точках N и N' получаем из общей теоремы, доказанной на стр. 221; положим:

$$2\pi f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}}.$$

Это приводит к соотношению:

$$K(\zeta + i\lambda) - K(\zeta - i\lambda) = i \int_{\frac{1}{\zeta}}^{1} \frac{y\,dx}{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}},$$

в котором, как указано, мы должны заменить в интеграле y на $\frac{1}{\zeta x}$.

Установив это, переходим снова к пределам, равным нулю и единице, положив для этого:

$$x = \frac{1-(1-\zeta)t}{\zeta},$$

что дает:

$$y = \frac{1}{1-(1-\zeta)t};$$

таким образом, окончательно находим:

$$K(\zeta+i\lambda)-K(\zeta-i\lambda)=i\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)[1-(1-\zeta)t]}},$$

т. е.

$$K(\zeta+i\lambda)-K(\zeta-i\lambda)=2iK'(\zeta).$$

Рассмотрим далее функцию $K'(z)=K(1-z)$, которая имеет разрезом отрицательную часть оси абсцисс. Считая ζ отрицательным и обозначая неизменно через λ положительное, бесконечно малое количество, получаем равенства:

$$K'(\zeta+i\lambda)=K(1-\zeta-i\lambda),$$
$$K'(\zeta-i\lambda)=K(1-\zeta+i\lambda),$$

дающие непосредственно:

$$K'(\zeta+i\lambda)-K'(\zeta-i\lambda)=-2iK'(1-\zeta),$$

и следовательно:

$$K'(\zeta+i\lambda)-K'(\zeta-i\lambda)=-2iK(\zeta).$$

Гурса, профессор Нормальной школы,[1] приходит к этим результатам другим методом, изложенным им по моей просьбе в заметке, устанавливающей, что теоремы Фукса вполне доказываются способом, при котором становится излишним прибегать к теории линейных дифференциальных уравнений. Положим:

$$K=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad iK'=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где:

$$R(z)=(1-z^2)(1-k^2z^2).$$

Полагаем:

$$k^2=x,\ z^2=\frac{1-u}{1-ux};$$

находим для K и iK' следующие выражения:

$$2K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}, \qquad 2iK'=\int_0^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}.$$

Первый интеграл, взятый по отрезку вещественной оси, идущей от начала до точки $u=1$, имеет смысл, если только x не имеет вещественного значения большего единицы; достаточно рассматривать неограниченный отрезок $1, +\infty$ как разрез, чтобы этот интеграл представил однозначную функцию на всей плоскости. Чтобы закончить опре-

[1] Написано в 1885 г.

деление его, условимся принимать 0 за аргументы u и $1-u$ и за аргумент $1-xu$ тот, который приводится к нулю при $u=0$.

Также интеграл, представляющий $2iK'$, определяет однозначную функцию от x на всей плоскости, если рассматривать, как разрез, неограниченный отрезок $-\infty$, 0, сохраняя условия, сделанные выше об аргументах $1-u$ и $1-xu$, но беря аргумент u равным π.

Присоединим к этим двум интегралам третий интеграл того же вида:

$$2K''=\int_{1}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}},$$

в котором мы принимаем 0 за аргумент u и $-\pi$ за аргумент $1-u$, а за аргумент $1-xu$ тот, первоначальное значение которого заключается между $-\pi$ и $+\pi$. Этот интеграл имеет смысл, если только x не имеет вещественного и положительного значения меньшего единицы, и когда x описывает замкнутый контур, заключающий внутри прямолинейный отрезок 0,1, то каждый элемент интеграла, а следовательно, и сам интеграл, меняет знак. Чтобы окончательно сделать его однозначным, условимся рассматривать, как разрез, неограниченный отрезок $0, +\infty$. Замечаем только, что в двух, бесконечно близких друг к другу точках, взятых с той и с другой стороны разреза $1, +\infty$, значения K'' равны и обратны по знаку.

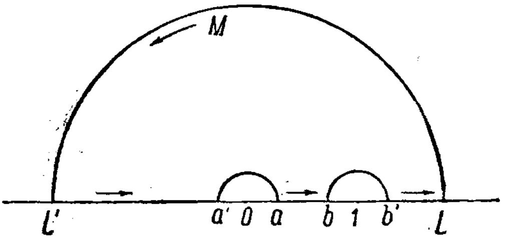

Рис. 66.

Установив это, полагаем, что точка x в верхней части плоскости; тогда точка $\frac{1}{x}$ будет находиться в нижней части и функция:

$$\frac{1}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}$$

будет голоморфной внутри контура $abnb'LML'a'ma$ (рис. 66) и применение теоремы Коши даст:

$$(L'a')+(a'ma)+(ab)+(bnb')+(b'L)+(LML').$$

Если мы устремим теперь радиусы обеих малых окружностей к нулю, в то время как радиус большой окружности будем бесконечно увеличивать, то мы получим в пределе:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}+\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{}}+\int_{1}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{}}=0.$$

Если мы приняли 0 за аргумент u и $1-u$ вдоль ab, то аргумент u будет равен π вдоль $L'a'$, и аргумент $1-u$ равен $-\pi$ вдоль $b'L$; предыдущее соотношение принимает вид:

$$K - iK' = -K''. \tag{1}$$

Точно также, предположив, что точка x в нижней части плоскости и, действуя указанным выше образом, находим новое соотношение:

$$K + iK' = K''. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) позволяют следить за изменением интегралов K, K', когда переменная x описывает некоторый замкнутый контур. Найдем, например, что произойдет с этими функциями, когда x описывает петлю в прямом направлении вокруг точки $x=0$. Нам уже известно, что K возвращается снова к своему первоначальному значению. Что же касается iK', то прежде, чем пересечь разрез $-\infty$, 0, заменяем его по формуле (1) через $K+K''$; получаем, таким образом, в нижней части плоскости для аналитического продолжения iK' функцию $K+K''$ или, заменив K'' значением его, полученным из формулы (2), функцию $2K+iK'$, причем линия 0,1 не будет разрезом ни для одного из интегралов K, iK'; мы возвратимся к точке отправления со значением $2K+iK'$. Петля, идущая в обратном направлении, изменит iK' на $-2K+iK'$. Петля вокруг точки $x=1$ также меняет K на $K \pm 2iK'$, не изменив значения iK'.

ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ.

Теория эллиптических функций. — Определение параллелограмма периодов. — Нахождение выражения двояко-периодических функций в виде частного двух голоморфных функций. — Разложение на простые элементы и общие свойства.

Изучение круговых функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ имеет исходной точкой их геометрическое определение, из которого мы получаем, во-первых, периодичность их, затем установление всех вещественных решений уравнений $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ и, наконец, основные формулы, которые дают $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ и $\operatorname{tg}(a+b)$ через отрезки, отвечающие двум дугам a и b.

Далее переходят, пользуясь теоремой Моавра, от выражений $\sin ma$ и $\cos ma$ в виде функций от $\sin a$ и $\cos a$ при m целом, к изучению алгебраических уравнений для $\sin\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$ и т. д. Определив, наконец, разложения в ряд $\sin x$ и $\cos x$, получают по формулам Эйлера, сводящим круговые функции к простой показательной, основные исходные пункты теории этих наиболее простых и в то же время очень важных трансцендентных функций, встречающихся как в различных отделах чистой математики, так и в ее приложениях.

Но многочисленные и важные вопросы приводят к исследованию других, более общих функций — эллиптических трансцендентных, которые заключают в себе как частный случай, круговые функции.

Эйлер первый ввел их в анализ следующим образом, обобщая определения круговых функций $z = \sin x$, $z = \operatorname{tg} x$, заданных равенствами:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = x, \qquad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = x.$$

Рассмотрим эллиптический интеграл первого рода

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

в котором

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2);$$

пусть $z = \varphi(x)$ функция, определенная условием

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = x,$$

т. е. такая, что:

$$\varphi'(x) = \sqrt{[1 - \varphi^2(x)][1 - k^2\varphi^2(x)]}$$

при условии: $\varphi(0) = 0$. Эйлер нашел формулу исключительной важности в анализе, установив, что

$$\varphi(a + b) = \frac{\varphi(a)\varphi'(b) + \varphi(b)\varphi'(a)}{1 - k^2\varphi^2(a)\varphi^2(b)}$$

и другие, подобные ей, касающиеся выражений:

$$\sqrt{1 - \varphi^2(x)}, \quad \sqrt{1 - k^2\varphi^2(x)}.$$

Именно эти соотношения открыли для функции $\varphi(x)$ путь, который проходят в теории круговых функций, исходя от формул:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

он был пройден с исключительным успехом Абелем и Якоби и их исследования, после выводов Эйлера, Лагранжа и Лежандра, послужили основой теории этих новых функций, очевидно, тесно связанных с тригонометрическими функциями. Введенное Лежандром наименование этих трансцендентных функций эллиптическими связано с тем, что длина дуги эллипса, у которого большая ось равна единице и эксцентриситет постоянной k, выражается интегралом второго рода:

$$\int_0^z \frac{1 - k^2z^2}{\sqrt{R(z)}}\,dz.$$

Но, как мы уже говорили, необходимо заметить, что функция, определяемая равенством:

$$\int_0^z \frac{1 - k^2z^2}{\sqrt{R(z)}}\,dz = x,$$

т. е. абсцисса точки эллипса, рассматриваемая как функция дуги, считаемой от конца большой оси до этой точки, не будет иметь ничего общего с $\sin x$ и не будет обладать никаким простым свойством, могущим облегчить ее изучение.

Таким образом, только анализ, а не геометрия, определяет новые функции, основные свойства которых мы сейчас изложим. Первое из этих свойств, оставшееся неизвестным Эйлеру, Лагранжу и Лежандру, заключается в двойной периодичности функции $\varphi(x)$, установленной одновременно Абелем и Якоби, и которая вытекает из выведенной ранее множественности в определении интеграла

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Мы придем, однако, наиболее простым путем к свойствам эллиптических трансцендентных функций и функции $\varphi(x)$, изучая однозначные двояко-периодические функции, заданные в общем виде.

Вот с этой точки зрения первое замечание, данное Якоби.

Утверждаем, что однозначная функция $f(x)$ не может иметь два вещественных периода a и b, т. е. невозможно равенство:

$$f(x+ma-nb)=f(x),$$

в котором m и n — любые целые числа.

Полагаем сначала, что a и b соизмеримы, т. е., что мы имеем $a=\omega\mu$, $b=\omega\nu$, причем μ и ν взаимно простые целые числа; очевидно, что, определив m и n из уравнения $m\mu-n\nu=1$, мы сводим оба периода a и b к одному ω.

Предположим, во-вторых, что $\frac{b}{a}$ несоизмеримо; можно выбрать такие m и n, что разность $m-\frac{b}{a}n$ будет отличаться сколь угодно мало от наперед заданного числа α; отсюда следует, что функция $f(x)$ может быть только постоянной, так как она не меняется от прибавления к переменной произвольного количества αa.

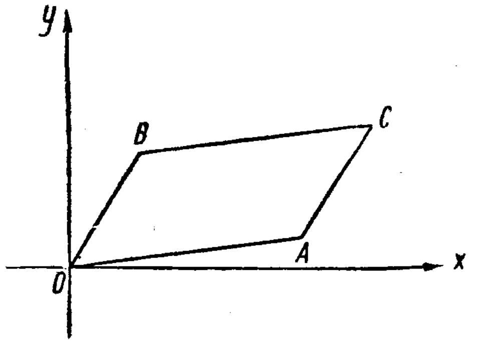

Рис. 67.

Следовательно, не существует однозначной функции, имеющей два вещественных периода; это приводит к важному понятию параллелограмма периодов.

Пусть A и B — точки, аффиксы которых a и b. Предполагаем, что эти точки лежат выше оси абсцисс, для чего изменяем, если это необходимо, знаки периодов. Строим параллелограмм со сторонами OA и OB; фигура $OACB$ (черт. 67) является, по определению, параллелограммом периодов.

Мы полагаем таким образом, что радиус-вектор, направленный сначала по Ox, вращаясь вокруг начала в прямом направлении, встречает сперва точку A и потом точку B, т. е. что, обозначив через λ и μ углы AOx и BOx, мы имеем $\mu>\lambda$.

Пусть временно:

$$a=\operatorname{mod} a\cdot e^{i\lambda}$$
$$b=\operatorname{mod} b\cdot e^{i\mu}.$$

Если положить $\frac{b}{a}=\alpha+i\beta$, то очевидно, что β, равное

$$\operatorname{mod}\left(\frac{b}{a}\right)\sin(\mu-\lambda),$$

будет непременно положительным.

Возьмем более общий случай; пусть P — некоторая точка плоскости (черт. 68). Проводим через эту точку два отрезка PA, PB, равных и параллельных отрезкам OA, OB на предыдущем чертеже; строим параллелограмм $PACB$ со сторонами PA и PB; получаем фигуру, которая также называется параллелограммом периодов.

Обозначим через p аффикс вершины P; легко видеть что переменная

$$z = p + at + bu$$

при вещественных значениях t и u представляет любую точку плоскости; если же положим, что t и u заключаются между нулем и единицей, то эта точка лежит внутри параллелограмма $PABC$

Пусть теперь:

$$t = m + \tau$$
$$u = n + \nu,$$

причем m и n — целые числа, выбранные таким образом, что τ и ν положительны и меньше единицы. Условимся считать соответствующими две точки, имеющие аффиксами значения z, отвечающие, с одной стороны, t и u, с другой стороны, τ и ν; последние точки будут внутри параллелограмма периодов.

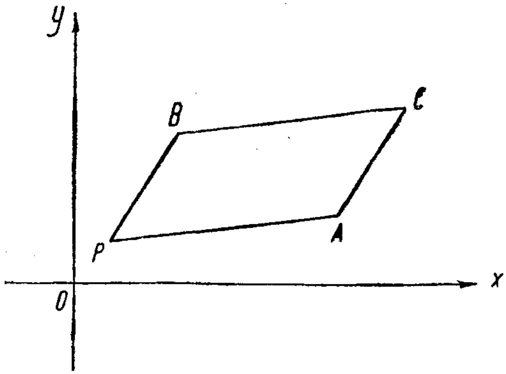

Рис. 68.

Имеем:

$$z = p + a(m + \tau) + b(n + \nu) = p + a\tau + b\nu + ma + nb$$

и очевидно, что значения двояко-периодической функции $f(z)$ будут одинаковыми в двух соответствующих точках; следовательно, достаточно знать выражение ее внутри параллелограмма периодов, чтобы считать ее заданной на всей плоскости.

Поставив задачей получить это выражение, докажем сначала, что не существует вовсе двояко-периодической голоморфной функции, что первым показал Лиувилль.

В самом деле, исходим из общей формулы:

$$f(x) = \sum A_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

представляющей любую целую функцию с периодом a. Условие $f(x + b) = f(x)$ приводит к равенству:

$$\sum A_m e^{\frac{2mi\pi b}{a}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}} = \sum A_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}};$$

сравнивая коэфициенты при одинаковых показательных функциях в обеих частях, получаем

$$A_m e^{\frac{2mi\pi b}{a}} = A_m.$$

Отсюда заключаем, что коэфициент A_m равен нулю, так как считая, как это следует, отношение $\frac{b}{a}$ мнимым, мы только при единственном значении $m=0$ можем иметь $e^{\frac{2mi\pi b}{a}}=1$. Если же мы должны считать коэфициент A_m равным нулю для всякого значения m, кроме $m=0$, то очевидно, что функция $f(x)$ приводится к постоянной A_0.

Этот результат приводит к необходимости искать выражение функций с двумя периодами в дробном виде:

$$f(x)=\frac{\sum B_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}}}{\sum A_n e^{\frac{2ni\pi x}{a}}}$$

и к определению коэфициентов числителя и знаменателя из условия:

$$f(x+b)=f(x).$$

Полагаем для сокращения

$$Q=e^{\frac{i\pi b}{a}}$$

и записываем наше равенство следующим образом:

$$\frac{\sum B_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}}}{\sum A_n e^{\frac{2ni\pi x}{a}}}=\frac{\sum B_r Q^{2r} e^{\frac{2ri\pi x}{a}}}{\sum A_s Q^{2s} e^{\frac{2si\pi x}{a}}},$$

где m, n, r, s принимают все целые значения, как положительные, так и отрицательные. Избавляемся от знаменателей и сравниваем затем коэфициенты при одинаковых показательных функциях в обеих частях равенства. Приходим, таким образом, к следующему уравнению:

$$\sum B_m A_s Q^{2s}=\sum A_n B_r Q^{2r},$$

в котором целые переменные должны удовлетворять условию:

$$m+s=n+r.$$

Ограничимся частным случаем, достаточным для той цели, которую мы имеем в виду; сделаем ряды тождественными, уравнивая их почленно; полагаем

$$B_m A_s Q^{2s}=A_n B_r Q^{2r}$$

или

$$\frac{A_s}{A_n}Q^{2s}=\frac{B_r}{B_m}Q^{2r}.$$

Считаем еще, чтобы удовлетворить условию $m+s=n+r$:

$$s=n+k$$
$$r=m+k,$$

обозначая через k целое число, выбранное произвольно.

Предыдущее равенство принимает вид:

$$\frac{A_{n+k}}{A_n} Q^{2n} = \frac{B_{m+k}}{B_m} Q^{2m},$$

где целые переменные m и n независимы одна от другой; каждая часть равенства вследствие этого постоянная и таким образом A_n и B_m — решения одного и того же уравнения в конечных разностях:

$$\frac{z_{n+k}}{z_n} Q^{2n} = \mathrm{const}.$$

Из него находим:

$$z_n = U_n Q^{-\frac{n^2}{k} + an},$$

где α — произвольная постоянная и U_n должно удовлетворять условию

$$U_{n+k} = U_n.$$

Как числитель, так и знаменатель функции $f(x)$ задаются, следовательно, выражениями:

$$\sum U_m Q^{-\frac{m^2}{k} + \alpha m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

приписывая две системы значений постоянным U_m; замечаем, что, заменив x на $x + x_0$, можно распорядиться x_0 таким образом, что последнее выражение примет более простой вид:

$$\sum U_m Q^{-\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Первым возникает вопрос о сходимости полученного ряда; сходимость его легко установить, разбив ряд на два других, один для положительных значений m, другой для отрицательных. Положим временно, чтобы выявить вещественные и мнимые члены:

$$\frac{x}{a} = g + ih$$

$$\frac{b}{a} = \alpha + i\beta.$$

Находим для корней степени m из модулей выражения:

$$\sqrt[m]{\operatorname{Mod} U_m}\, e^{\frac{m\pi\beta}{k} - 2\pi h}$$

$$\sqrt[m]{\operatorname{Mod} U_m}\, e^{\frac{m\pi\beta}{k} + 2\pi h},$$

и очевидно, что если произвольное целое k имеет знак, обратный β, т. е. отрицательный, то эти выражения равны нулю при бесконечно большом m; постоянные же U_m имеют ограниченные значения, согласно условию, по которому $U_{m+k} = U_m$.

На основании этого результата заменим k на $-k$.

Положим также:

$$\Phi(x)=\sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

$$\Pi(x)=\sum B_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}} \qquad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots),$$

подчиняя коэфициенты A_m и B_m условиям:

$$A_{m+k}=A_m; \qquad B_{m+k}=B_m;$$

изучим функции, заданные выражением:

$$f(x)=\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$

в котором числитель и знаменатель представляют ряды, сходящиеся на всей плоскости и, следовательно, голоморфные функции.

Чтобы найти, во-первых, каким образом осуществляется в дроби двойная периодичность, заменяем, например, в $\Phi(x)$ x на $x+b$. Находим:

$$\Phi(x+b)=\sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi(x+b)}{a}}=\sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}+2m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Но в общем члене можно заменить m на $m-k$, так как m должно принимать все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Вследствие этого, и считая $A_{m-k}=A_m$, получаем последовательно:

$$\Phi(x+b)=\sum A_m Q^{\frac{(m-k)^2}{k}+2(m-k)} e^{\frac{2(m-k)i\pi x}{a}}=$$

$$=\sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}-k} e^{\frac{2(m-k)i\pi x}{a}}=$$

$$=Q^{-k} e^{-\frac{2ki\pi x}{a}} \sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}},$$

т. е. получается первоначальный ряд, умноженный на определенный множитель. Записывая это соотношение следующим образом:

$$\Phi(x+b)=e^{-\frac{k\pi(2x+b)}{a}}\Phi(x)$$

и замечая, что оно было получено без каких-либо предположений о коэфициентах A_m, получим подобным же образом:

$$\Pi(x+b)=e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}\Pi(x).$$

Таким образом, двойная периодичность дроби вызвана тем, что оба ее члена, имеющие периодом a, приобретают только показательный множитель при замене x на $x+b$.

Укажем второй метод, приводящий к тому же результату и похожий на тот, который применял Göpel в своем знаменитом мемуаре, озаглавленном „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis Adumbratio levis“ (Crelle's Journal, т. 35).

Пусть

$$\varphi(x) = e^{\frac{ki\pi x^2}{ab}};$$

утверждаем, что произведение $\varphi(x)\Phi(x)$, потеряв период a, приобрело период b. В самом деле, имеем:

$$\varphi(x)\Phi(x) = \sum A_m e^{i\pi\frac{b}{a}\frac{m^2}{k} + 2mi\pi\frac{x}{a} + ki\pi\frac{x^2}{ab}} =$$

$$= \sum A_m e^{\frac{ki\pi}{ab}\left(x + \frac{mb}{k}\right)^2} =$$

$$= \sum A_m \varphi\left(x + \frac{mb}{k}\right).$$

В правой части мы можем заменить m на $m+k$, в виду того, что суммирование распространяется на все значения m от $-\infty$ до $+\infty$; в этом случае, условие $A_{m+k} = A_m$ позволяет написать:

$$\varphi(x)\Phi(x) = \sum A_m \varphi\left(x + b + \frac{mb}{k}\right);$$

следовательно, произведение $\varphi(x)\Phi(x)$ имеет период b. То же справедливо и для произведения $\varphi(x)\Pi(x)$; умножение же на тот же множитель $\varphi(x)$ числителя и знаменателя является достаточным, чтобы выявить второй период дроби $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$.

Заметим, что соотношение:

$$\varphi(x+b)\Phi(x+b) = \varphi(x)\Phi(x)$$

дает:

$$\Phi(x+b) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)}\Phi(x);$$

так как

$$\varphi(x) = e^{\frac{ki\pi x^2}{ab}},$$

получаем:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)} = e^{\frac{ki\pi}{ab}[x^2 - (x+b)^2]} = e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}};$$

Имеем, следовательно, как и раньше:

$$\Phi(x+b) = e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}\Phi(x)$$

и в более общем виде, при любом целом n:

$$\Phi(x+nb) = e^{-\frac{nki\pi(2x+nb)}{a}}\Phi(x).$$

Приведем первое и важное применение только что доказанного предложения; покажем, что оно легко дает число корней μ уравнения $\Phi(x)=0$, заключенных внутри параллелограмма периодов (рис. 67).

Будем исходить из выражения, данного теоремой Коши, а именно:

$$\mu=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}dz,$$

где интеграл берется вдоль пути $PACB$, т. е. где мы имеем:

$$\int\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}dz=(PA)+(AC)-(PB)-(BC).$$

Пусть p — аффикс точки P; стороны параллелограмма PA, PB, AC, BC задаются соответственно равенствами:

$$z=p+at;\quad z=p+bt;\quad z=p+a+bt;\quad z=p+b+at,$$

в которых t вещественная переменная, возрастающая от 0 до 1.

Положив временно для сокращения $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}=f(z)$, получим из этих выражений:

$$(PA)-(BC)=a\int_0^1[f(p+at)-f(p+b+at)]\,dt$$

и

$$(AC)-(PB)=b\int_0^1[f(p+a+bt)-f(p+bt)]\,dt.$$

Но если функция $\Phi(z)$ имеет период a, то тот же самый период имеет и функция $f(z)$; отсюда заключаем:

$$(AC)-(PB)=0.$$

Применяем затем соотношение:

$$\Phi(z+b)=e^{-\frac{ki\pi(2z+b)}{a}}\Phi(z);$$

беря логарифмическую производную от обеих частей этого равенства, получаем:

$$f(z+b)=f(z)-\frac{2ki\pi}{a}.$$

Таким образом, имеем:

$$f(p+at)-f(p+b+at)=\frac{2ki\pi}{a}$$

и следовательно:

$$(PA)-(BC)=2ki\pi,$$

что дает:

$$\mu=k.$$

Уравнение $\Phi(z)=0$ имеет, таким образом, k корней внутри параллелограмма периодов.

В наиболее простом случае, когда $k=1$, функция $\Phi(x)$ имеет только один корень внутри этой области; коэфициенты A_m приводятся тогда к A_0, которое мы полагаем равным единице. Обозначим теперь через $\chi(x)$ функцию, определяемую рядом:

$$\chi(x)=\sum Q^{m^2} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

С помощью этой замечательной функции мы весьма просто получим общее аналитическое выражение двояко-периодических однозначных функций, имеющих только полярные разрывы. Позже мы займемся однозначными двояко-периодическими функциями, которые допускают особые точки.

Замечаем, во-первых, что внутри параллелограмма с вершиной в начале находится единственный корень уравнения $\chi(x)=0$, лежащий на пересечении диагоналей и имеющий аффиксом $\frac{a+b}{2}$.

Этот результат получится позже сам собою, но его легко обосновать и теперь.

В самом деле, имеем:

$$\chi\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sum(-1)^m Q^{m^2+m};$$

вместо m ставим $-1-n$; так как суммирование распространяется от $m=-\infty$ до $m=+\infty$, результат не изменится; таким образом, мы получаем:

$$\sum(-1)^m Q^{m^2+m}=-\sum(-1)^n Q^{n^2+n}.$$

Так как ряд равен самому себе с обратным знаком, то он непременно равен нулю; таким образом доказано, что $\chi(x)$ обращается в нуль при $x=\frac{a+b}{2}$, что и требовалось.

Прибавим, что чередуя знаки в функции $\chi(x)$, мы получаем ряд $\theta(x)$ Якоби, играющий большую роль в анализе и встречавшийся раньше, как это заметил Розенгэм, в работах Фурье по теории тепла. Этот пример показывает согласованность исследований отвлеченного анализа с приложениями их к физическим вопросам. Работы геометров в этих различных направлениях, действительно, связаны настолько тесно, что они встречаются, несмотря на различие своих целей, в одних и тех же аналитических теориях.

Возвратимся теперь к нашему основному предмету — дать общее аналитическое выражение однозначных функций с периодами a и b, когда функции допускают только полярные разрывы.

Пусть $c=\frac{a+b}{2}$; полагаем:

$$Z(x-c)=\frac{\chi'(x)}{\chi(x)}$$

или

$$Z(x)=\frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)};$$

таким образом $Z(x)$, однозначная функция, имеющая единственный простой полюс $x=0$ внутри параллелограмма периодов и удовлетворяющая условиям:

$$Z(x+a)=Z(x),$$
$$Z(x+b)=Z(x)-\frac{2\pi i}{a};$$

$Z(x+b)$ отличается от $Z(x)$ только постоянной, отсюда имеем $Z'(x+b)=Z'(x)$; $Z''(x+b)=Z''(x)$, ..., т. е. производные от функции $Z(x)$ имеют два периода a и b.

Установив это, возьмем однозначную функцию $F(z)$ с периодами a и b, имеющую внутри параллелограмма $PABC$ разрывами только полюсы. Обозначая через x аффикс переменной, которая остается внутри параллелограмма, используем функцию:

$$f(z)=F(z)\,Z(x-z).$$

Замечаем сначала, что эта функция имеет период a и что, заменив z на $z+b$, на основании соотношения:

$$Z(x-z-b)=Z(x-z)+\frac{2i\pi}{a},$$

получаем:

$$f(z+b)=f(z)+\frac{2i\pi}{a}F(z).$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый по контуру $PACB$; поступая, как и прежде, легко найдем, на основании вышесказанного:

$$(PACB)=a\int_0^1-\frac{2i\pi}{a}F(p+at)\,dt=-2i\pi\int_0^1 F(p+at)\,dt.$$

С другой стороны, интеграл равен произведению $2i\pi$ на сумму S вычетов функции $f(z)$, распространенную по полюсам, расположенным внутри контура; получаемое таким образом выражение:

$$S=-\int_0^1 F(p+at)\,dt$$

приводит, очевидно, к важному заключению, что сумма вычетов не зависит от x.

Выполняем вычисления, заметив, что функция $f(x)$ имеет полюсами все полюсы функций $F(z)$ и $Z(x-z)$, расположенные внутри параллелограмма $PABC$. Но функция $Z(x-z)$, имеет полюс $Z=x$, и соответствующий вычет равен $-F(x)$.

Пусть затем α один из полюсов функции $F(x)$; соответствующий вычет получим, полагая $z=\alpha+h$ и разлагая функцию $F(z)$ в ряд по возрастающим степеням h. Главная часть, заключающая члены, которые содержат в знаменателе степени h, может быть представлена в виде:

$$\frac{A}{h}+A_1D_h\left(\frac{1}{h}\right)+A_2D_h^2\left(\frac{1}{h}\right)+\ldots+A_nD_h^n\left(\frac{1}{h}\right),$$

или

$$\frac{A}{h}-A_1\frac{1}{h^2}+A_2\frac{1\cdot 2}{h^3}-\ldots+(-1)^nA_n\frac{1\cdot 2\ldots n}{h^n}.$$

Имеем, кроме того:

$$Z(x-\alpha-h)=Z(x-\alpha)-\frac{h}{1}Z'(x-\alpha)+\ldots+$$
$$+(-1)^i\frac{h^i}{1\cdot 2\ldots i}Z^{(i)}(x-\alpha)+\ldots;$$

искомый вычет, т. е. коэфициент при $\frac{1}{h}$ в разложении $F(\alpha+h)\,Z(x-\alpha-h)$, равен, следовательно:

$$AZ(x-\alpha)+A_1Z^{(1)}(x-\alpha)+\ldots+A_nZ^{(n)}(x-\alpha).$$

Записав, что сумма S равна постоянной C, не зависящей от x, получаем формулу:

$$F(x)=C+\sum\left[AZ(x-\alpha)+A_1Z^{(1)}(x-\alpha)+\ldots+A_nZ^{(n)}(x-\alpha)\right],$$

где суммирование распространяется на все полюса функции $F(x)$, расположенные внутри параллелограмма периодов.

Получаем, следовательно, общее аналитическое выражение однозначных функций, имеющих два периода a и b и допускающих только полярные разрывы, причем в виде, представляющем наиболее полную аналогию с рациональными дробями, разложенными на простые дроби.

Укажем некоторые основные следствия, вытекающие отсюда. Находим сначала, каким образом формула выявляет двойную периодичность функции. Заметив для этого, что

$$Z(x+a)=Z(x),$$
$$Z(x+b)=Z(x)-\frac{2i\pi}{a},$$

получаем непосредственно:

$$F(x+a)=F(x)$$
$$F(x+b)=F(x)-\frac{2i\pi}{a}\sum A.$$

Таким образом, необходимо, чтобы сумма вычетов $\sum A$ равнялась нулю, что дает важную и часто применяемую теорему; ее можно вывести наиболее простым и прямым способом, пользуясь интегралом от функции $f(z)$, взятым по контуру $PABC$.

Действительно, как было доказано выше, имеем:

$$(PABC) = a\int_0^1 [f(p+at) - f(p+b+at)]\,dt$$

$$+ b\int_0^1 [f(p+a+bt) - f(p+bt)]\,dt;$$

если мы заменим $f(z)$ двояко-периодической функцией $F(z)$, то правая часть обратится в нуль, что вполне доказывает, что сумма вычетов, соответствующих полюсам, расположенным внутри параллелограмма, равна нулю.

Установив это, находим, как было доказано выше, что не существует голоморфной двояко-периодической функции, так как наша формула приводится к постоянной при предположении, что внутри нет ни одного полюса.

Допустим затем, что имеется только единственный простой полюс; имеем тогда:

$$F(x) = C + AZ(x-\alpha);$$

но соотношение $\sum A = 0$ дает в этом случае $A = 0$ и, значит, при этом предположении снова функция может быть только постоянной.

Необходимо, следовательно, как это впервые нашел Лиувилль, чтобы всякая двояко-периодическая функция имела бы по крайней мере два простых полюса, или же один двойной полюс.

Это является первым из тех частных случаев, которые нас приведут впоследствии к обратным функциям от эллиптических интегралов.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ.

Двояко-периодические функции второго рода; аналитическое выражение их, когда они имеют только полярные разрывы. — Разложение на простые элементы и общие свойства.

Общее выражение двояко-периодических функций через сумму простых элементов, выявляющее полюсы, значительно отличается от представления их нашей исходной формулой $f(x) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$. Покажем сейчас, что эту формулу можно вывести независимо от общего выражения, помощью метода, указанного в одиннадцатой лекции, стр. 133, давшего нам выражения однозначных функций, имеющих только полярные разрывы, в виде частных двух голоморфных функций. Напомним для этого, что так как ряд $\Phi(x) = \sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$, согласно условию, что $A_{m+k} = A_m$ — линейная однородная функция от произвольных коэфициентов, то мы можем распорядиться ими таким образом, чтобы уравнение $\Phi(x) = 0$ имело в параллелограмме периодов $k-1$ заданных простых или кратных корней. Берем за эти корни полюсы двояко-периодической функции $f(x)$, число которых полагаем равным $k-1$; произведение $\Phi(x) f(x)$ будет голоморфной функцией, и мы покажем сейчас, как можно получить ее выражение. Для этого замечаем, что если умножаем $\Phi(x)$ на функцию с периодами a и b, то произведение будет попрежнему удовлетворять полученным выше характерным соотношениям:

$$\Phi(x+a) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+b) = \Phi(x) e^{-\frac{ki\pi}{a}(2x+b)}.$$

Таким образом мы приходим к задаче нахождения наиболее общего выражения целых функций, удовлетворяющих этим двум условиям. Покажем, как оно получается.

Из первого соотношения, по формуле Фурье, имеем:

$$\Phi(x) = \sum a_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Заменяем коэфициенты a_m на $A_m Q^{\frac{m^2}{k}}$, рассматривая количества A_m как новые неопределенные коэфициенты; имеем:

$$\Phi(x) = \sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

отсюда заключаем, что:

$$\Phi(x+b)=\sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}+2m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

и следовательно:

$$\Phi(x+b)\, e^{\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}=\sum A_m Q^{\frac{m^2}{k}+2m+k} e^{\frac{2(m+k)i\pi x}{a}}$$

Подставим теперь $m-k$ на место m, что допустимо, так как m принимает последовательные целые значения от $-\infty$ до $+\infty$; замечая, что показатель степени Q равен $\frac{(m+k)^2}{k}$, получаем из нашего второго соотношения:

$$\Phi(x)=\sum A_{m-k} Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Сравнивая это выражение с первым, получаем зависимости: $A_{m-k}=A_m$ или $A_{m+k}=A_m$; мы приходим точно к тому выражению, которое нашли в начале нашего изучения двояко-периодических функций; таким образом, очевидно, что голоморфное произведение $\Phi(x)f(x)$ отличается от $\Phi(x)$ только системой коэфициентов A_m. Мы можем, следовательно, положить:

$$\Phi(x)f(x)=\Pi(x);$$

отсюда вытекает, что формула $f(x)=\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ является общим аналитическим выражением однозначных функций, имеющих только полярные разрывы и допускающих периоды a и b, что мы и хотели доказать.

Из общего решения уравнений:

$$\Phi(x+a)=\Phi(x)$$
$$\Phi(x+b)=\Phi(x)\, e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}$$

при помощи голоморфных функций вытекает множество важных следствий; укажем сейчас следующее.

Мы заметили выше, что можно вводить новую произвольную постоянную в выражение $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$, заменив x на $x+g$; утверждаем, что умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{\Pi(x+g)}{\Phi(x+g)}$ на функцию $\chi(x-kg)$, мы приводим частное к виду $\frac{\Pi_1(x)}{\Phi_1(x)}$, в котором число k заменено на $k+1$.

В самом деле, пусть

$$\Pi_1(x)=\Pi(x+g)\chi(x-kg),$$
$$\Phi_1(x)=\Phi(x+g)\chi(x-kg);$$

эти два произведения имеют период a и из соотношения:

$$\chi(x+b)=\chi(x)\, e^{-\frac{i\pi(2x+b)}{a}}$$

непосредственно выводим, что:

$$\Pi_1(x+b)=\Pi_1(x)e^{-\frac{i\pi(k+1)(2x+b)}{a}},$$
$$\Phi_1(x+b)=\Phi_1(x)e^{-\frac{i\pi(k+1)(2x+b)}{a}};$$

эти соотношения доказывают высказанную теорему.

Возникающее само собой расширение сделанного замечания приводит к рассмотрению выражения:

$$f(x)=\frac{\Pi(x+g)}{\Phi(x+h)},$$

в котором g и h — две различные постоянные. Мы имеем соотношения:

$$f(x+a)=f(x)$$
$$f(x+b)=f(x)e^{-\frac{2i\pi(g-h)}{a}}$$

и выходим таким образом из области двояко-периодических функций. Но эти новые трансцендентные функции тесно связаны с предыдущими. Важные вопросы механики, как-то: вращение тела вокруг заданной точки при отсутствии сил ускорения, сферический маятник и т. д. показывают, что эти функции встречаются при многих обстоятельствах и что их изучение необходимо включить в теорию эллиптических функций. Назовем вообще двояко-периодическими функциями второго рода однозначные функции, удовлетворяющие соотношениям:

$$f(x+a)=\mu f(x),$$
$$f(x+b)=\mu' f(x),$$

в которых μ и μ' — постоянные множители. Положив $\mu=1$ и $\mu'=1$, мы попадаем в категорию двояко-периодических функций в узком смысле этого слова, которые мы будем называть функциями первого рода. Установив эти названия, для функций второго рода, в качестве первого способа их аналитического представления, можно выбрать формулу:

$$f(x)=\frac{\Pi(x+g)e^{\lambda x}}{\Phi(x+h)},$$

в которой постоянные λ и $g-h$ могут быть определены таким образом, чтобы множители μ и μ' имели заданные значения.

В самом деле, имеем:

$$f(x+a)=\mu f(x),$$
$$f(x+b)=\mu' f(x);$$

положив:

$$\mu=e^{\lambda a}$$
$$\mu'=e^{\lambda b-\frac{2i\pi k(g-h)}{a}},$$

из этих уравнений непосредственно находим:

$$\lambda a=\ln\mu$$
$$2ki\pi(g-h)=b\ln\mu-a\ln\mu'.$$

Докажем теперь, что предыдущее выражение дает в наиболее общем виде однозначные двояко-периодические функции второго рода, имеющие только полярные разрывы.

Рассмотрим для этого частный случай $k=1$; тогда функции $\Pi(x)$ и $\Phi(x)$ с точностью до постоянного множителя совпадают с функцией $\chi(x)$; функция, которая теперь приводится к $\frac{\chi(x+g)e^{\lambda x}}{R\chi(x+h)}$, где R — постоянная, будет иметь только один полюс в параллелограмме периодов.

Положим $h=\frac{a+b}{2}=c$, чтобы этим единственным полюсом был $x=0$; пусть также $g=c+\omega$ и выберем постоянные λ и μ согласно предыдущим формулам, считая $k=1$; имеем:

$$\lambda a = \ln\mu$$
$$2i\pi\omega = b\ln\mu - a\ln\mu'.$$

Предположим, наконец, что вычет, соответствующий значению $x=0$ равен единице; тогда имеем:

$$R=\frac{\chi(c+\omega)}{\chi'(c)}.$$

Установив это, покажем, что полученная таким образом функция играет для $f(x)$ роль простого элемента.

Положим для этого:

$$\Psi(x)=\frac{\chi(x+c+\omega)e^{\lambda x}}{R\chi(x+c)};$$

рассмотрим произведение:

$$F(z)=f(z)\Psi(x-z);$$

замечаем, что из соотношений:

$$\Psi(z+a)=\mu\Psi(z)$$
$$\Psi(z+b)=\mu'\Psi(z)$$

имеем:

$$\Psi(z-a)=\frac{1}{\mu}\Psi(z)$$

$$\Psi(z-b)=\frac{1}{\mu'}\Psi(z)$$

и следовательно:

$$\Psi(x-z-a)=\frac{1}{\mu}\Psi(x-z),$$

$$\Psi(x-z-b)=\frac{1}{\mu'}\Psi(x-z).$$

Отсюда вытекает, что $F(z)$ двояко-периодическая функция первого рода и для нее сумма вычетов, соответствующих полюсам, находящимся внутри параллелограмма периодов, равна нулю, как следует из доказанного. Один из этих вычетов, относящийся к значению $z=x$, равен $-f(x)$, вследствие предположений, сделанных о $\Psi(x)$. Обозначим затем через $z=a$ некоторый полюс функции $f(z)$; ограничиваясь главной частью разложения, расположенного по возрастающим степеням h, имеем:

$$f(a+h)=\frac{A}{h}+A_1 D_h\left(\frac{1}{h}\right)+\ldots+A_n D_h{}^n\left(\frac{1}{h}\right);$$

проделанное нами раньше вычисление дает для вычета функции $F(z)$, соответствующего значению $x=a$, количество:

$$A\Psi(x-a)+A_1\Psi'(x-a)+\ldots+A_n\Psi^{(n)}(x-a).$$

Следовательно, имеем соотношение:

$$-f(x)+\sum[A\Psi(x-a)+A_1\Psi'(x-a)+\ldots+A_n\Psi^{(n)}(x-a)]=0,$$

в котором знак $\sum$ распространен по всем полюсам функции; в результате имеем общее выражение функций второго рода в виде суммы простых элементов:

$$f(x)=\sum[A\Psi(x-a)+A_1\Psi'(x-a)+\ldots+A_n\Psi^{(n)}(x-a)].$$

Второе выражение их в виде частного двух голоморфных функций получается следующим образом.

Обозначим число полюсов через $k-1$ и пусть, как только что, $\Phi(x)$ голоморфная функция, определяемая соотношениями:

$$\Phi(x+a)=\Phi(x)$$
$$\Phi(x+b)=\Phi(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}},$$

корни которой равны различным полюсам функции $f(x)$. Представим произведение $\Phi(x)f(x)$, которое будет обязательно голоморфным, в виде выражения $\Pi(x+l)e^{\lambda x}$, в котором l — неопределенная постоянная, и поставим задачей найти функцию $\Pi(x)$. Для этого замечаем, что, если заменим x на $x+a$, то условие $\mu=e^{\lambda a}$ дает нам:

$$\Pi(x+l+a)=\Pi(x+l)$$

и следовательно:

$$\Pi(x+a)=\Pi(x).$$

Заменив теперь x на $x+b$, будем иметь:

$$\Pi(x+l+b)e^{\lambda(x+b)}=\Phi(x+b)f(x+b)=\mu'\Phi(x)f(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}},$$

т. е.

$$\Pi(x+l+b)=\mu'\Pi(x+l)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}-\lambda b}$$

или

$$\Pi(x+b)=\mu'\Pi(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}+\frac{2kli\pi}{a}-\lambda b}.$$

Пусть теперь

$$\mu' e^{\frac{2kli\pi}{a}-\lambda b}=1;$$

определяя постоянную l из этого условия, получаем соотношения:

$$\Pi(x+a)=\Pi(x)$$
$$\Pi(x+b)=\Pi(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}},$$

которые, очевидно, определяют функцию $\Pi(x)$. Имеем, следовательно, искомое выражение:

$$f(x)=\frac{\pi(x+l)e^{\lambda x}}{\Phi(x)};$$

это и есть та формула, которая служила нам исходным пунктом при изучении двояко-периодических функций второго рода; в ней только постоянная h равна нулю.

Возвратимся временно к первому выражению этих трансцендентных функций через сумму простых элементов:

$$f(x)=\sum[A\Psi(x-a)+A_1\Psi'(x-a)+\ldots+A_n\Psi^{(n)}(x-a)];$$

и предположим, что в нем $\lambda=0$, $\omega=0$; это приводит множители μ и μ' к единице. В этом частном случае формула кажется сначала иллюзорной, так как

$$R=\frac{\chi(c+\omega)}{\chi'(c)}$$

становится равным нулю, а функция $\Psi(x)$ бесконечной. Это обстоятельство указывает на изменение аналитической формы; оно легко обнаруживается, если, положив $\lambda=0$, что дает:

$$\Psi(x)=\frac{\chi(x+c+\omega)}{R\chi(x+c)},$$

положим ω бесконечно малым. В самом деле, из ряда Тейлора имеем:

$$\chi(c+\omega)=\omega\chi'(c)+\frac{\omega^2}{2}\chi''(c)+\ldots$$

и можем написать, обозначив через p, q, ... постоянные коэфициенты:

$$\frac{\chi'(c)}{\chi(c+\omega)}=\frac{1}{\omega}+p+\omega q+\ldots.$$

Используем еще другое разложение по степеням ω:

$$\frac{\chi(x+c+\omega)}{\chi(x+c)}=1+\omega\frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)}+\ldots;$$

перемножая почленно, получим:

$$\frac{\chi(x+c+\omega)\chi'(c)}{\chi(x+c)\chi(c+\omega)}=\Psi(x)=\frac{1}{\omega}+\frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)}+p+\ldots,$$

причем не написанные члены содержат множителем ω.

Замечаем, наконец, что коэфициенты A, A_1 и т. д. функции от ω и для A, единственного коэфициента, который следует рассматривать, ряд Тейлора дает:

$$A = A_0 + \omega A_0' + \frac{\omega^2}{2} A_0'' + \ldots .$$

Таким образом, имеем:

$$A\Psi(x) = \frac{A_0}{\omega} + A_0 \frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)} + A_0 p + A_0' + \ldots$$

или, заменив $A_0 p + A_0'$ новой постоянной C и вводя функцию $Z(x)$:

$$A\Psi(x) = \frac{A_0}{\omega} + A_0 Z(x) + C + \ldots .$$

Пренебрегая в этой формуле членами, имеющими множитель ω, находим при $\omega = 0$:

$$\Psi'(x) = Z'(x) + \ldots$$
$$\Psi''(x) = Z''(x) + \ldots .$$

Отсюда получаем сначала:

$$\sum A\Psi(x-a) = \frac{1}{\omega} \sum A_0 + \sum A_0 Z(x-a) + \text{const} + \ldots$$

и видим, что член в правой части, содержащий $\frac{1}{\omega}$, исчезает, так как сумма чисел A_0 равна нулю, ибо они вычеты двояко-периодической функции в узком смысле этого слова; отсюда в пределе при $\omega = 0$, имеем:

$$\sum A\Psi(x-a) = \sum A_0 Z(x-a) + \text{const}.$$

Что же касается производных $\Psi'(x-c)$, $\Psi''(x-c) \ldots$, то они непосредственно приводятся к $Z'(x-c)$, $Z''(x-c)$ и т. д., что дает формулу пригодную для функции первого рода, если бы ее требовалось получить.

Теория функций первого и второго рода имеет нечто общее, на чем мы должны теперь остановить наше внимание. Если обозначим через $f(x)$ ту или другую из этих трансцендентных функций, мы заметим, что логарифмическая производная $\frac{f'(x)}{f(x)}$ есть двояко-периодическая функция первого рода, и мы сейчас увидим, что выражение ее через сумму простых элементов приводит к одному важному следствию; положим временно $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, предполагая числитель и знаменатель голоморфными; обозначим через $p_1, p_2, \ldots p_n$ корни уравнения $P(x) = 0$, расположенные внутри параллелограмма периодов, и через $q_1, q_2, \ldots q_m$ такие же корни уравнения $Q(x) = 0$. Соотношение:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = D_x \ln Q(x) - D_x \ln P(x)$$

показывает, что корни p и q являются полюсами логарифмической производной и что вычеты их равны соответственно -1 и $+1$, считая что различные корни простые. Установив это, имеем следующее выражение, в котором λ постоянная:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\lambda+Z(x-q_1)+\ldots+Z(x-q_m)-Z(x-p_1)\ldots-Z(x-p_n),$$

и помня, что

$$Z(x)=\frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)},$$

пишем:

$$\frac{f'(x-c)}{f(x-c)}=\lambda+\frac{\chi'(x-q_1)}{\chi(x-q_1)}+\ldots+\frac{\chi'(x-q_m)}{\chi(x-q_m)}-$$
$$-\frac{\chi'(x-p_1)}{\chi(x-p_1)}-\ldots-\frac{\chi'(x-p_n)}{\chi(x-p_n)}.$$

Отсюда, интегрируя обе части и обозначив через λ_0 постоянную, получаем:

$$f(x-c)=\frac{\chi(x-q_1)\chi(x-q_2)\ldots\chi(x-q_m)}{\chi(x-p_1)\chi(x-p_2)\ldots\chi(x-p_n)}e^{\lambda x+\lambda_0};$$

ясно, что эта формула останется справедливой без изменения ее аналитического вида, если отбросим предположение, что корни p и q все различны. Сделаем по поводу нее еще одно замечание: можно утверждать, что число корней p и q одинаково; в самом деле, если сумма вычетов функции первого рода $\frac{f'(x)}{f(x)}$ равна нулю, то $m-n=0$.

Покажем, далее, как находятся множители μ и μ' функции $f(x)$; примем для сокращения:

$$s=p_1+p_2+\ldots+p_n,$$
$$t=q_1+q_2+\ldots+q_n$$

и положим:

$$P(x)=\chi(x-p_1)\chi(x-p_2)\ldots\chi(x-p_n),$$
$$Q(x)=\chi(x-q_1)\chi(x-q_2)\ldots\chi(x-q_n).$$

Из основных соотношений:

$$\chi(x+a)=\chi(x)$$
$$\chi(x+b)=\chi(x)\,e^{-\frac{i\pi(2x+b)}{a}}$$

заключаем, что $P(x)$ и $Q(x)$ имеют период a и кроме того:

$$P(x+b)=P(x)\,e^{-\frac{i\pi n(2x+b)}{a}+\frac{2i\pi s}{a}},$$
$$Q(x+b)=Q(x)\,e^{-\frac{i\pi n(2x+b)}{a}+\frac{2i\pi t}{a}}.$$

Отсюда видим, что эти функции приводятся к $\Phi(x)$ заменой в первой x на $x+\frac{s}{n}$ и x на $x+\frac{t}{n}$ во второй. Получаем затем из формулы:

$$f(x-c)=\frac{Q(x)\,e^{\lambda x+\lambda_0}}{P(x)}$$

искомые значения:

$$\mu=e^{\lambda a};\quad \mu'=e^{\lambda b-\frac{2i\pi(s-t)}{a}}.$$

Исключаем из последних двух равенств постоянную λ и приходим к следующему важному соотношению:

$$2i\pi(s-t)=b\ln\mu-a\ln\mu';$$

оно показывает, что с точностью до кратных периодов разность $s-t$ определяется множителями μ и μ' [1].

В частном случае, когда $\mu=1$, $\mu'=1$, имеем для функций первого рода

$$s-t=mb-na,$$

где m и n — целые числа; это равенство впервые дал Лиувилль в своих лекциях в Collège de France. Предположим, наконец, переходя к трем функциям второго рода, имеющим те же множители, как и $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, что

$$\begin{cases}\mu=-1\\ \mu'=+1\end{cases}\qquad \begin{cases}\mu=-1\\ \mu'=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}\mu=1\\ \mu'=-1\end{cases}$$

Находим последовательно:

$$2(s-t)=(2m+1)b-2na=(2m+1)b-(2m'+1)a=$$
$$=2nb-(2m'+1)a.$$

---

[1] Этот результат, данный мною в лекциях в 1885 году, был выведен профессором университета в Инспруке Гегенбауэром и опубликован этим выдающимся геометром в том же году в журнале императорской академии наук в Вене.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Определение и основные свойства функций Якоби $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\Theta_1(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$. — Определение и основные свойства $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. — Обращение эллиптического интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

в предположении, что k вещественно и меньше единицы. Сложение аргументов; количества J и J'. — Вывод соотношения $\Theta_1(0)=\sqrt{\frac{2k}{\pi}}$.

Полученные выше результаты дают возможность приступить к изучению основного вопроса теории эллиптических функций. Мы себе ставим задачей получить функцию переменной x, определяемую соотношением:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=x.$$

В этом и заключается вопрос об обращении эллиптического интеграла; мы изложим его, считая сначала, что модуль вещественен и меньше единицы, а затем уже рассмотрим общий случай, когда модуль принимает любое вещественное или мнимое значение.

С этой целью возвратимся к нашему выражению двояко-периодических функций в виде формулы $f(x)=\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ и рассмотрим наиболее простой случай этой формулы, положив $k=2$. Вспомним, что когда $k=1$, мы имеем:

$$\Phi(x)=A\chi(x) \quad \text{и} \quad \Pi(x)=B\chi(x);$$

так что отношение этих двух функций величина постоянная.

Для случая $k=2$, коэфициенты в ряде:

$$\Phi(x)=\sum A_{\overline{m}}Q^{\frac{m^2}{2}}e^{\frac{2\overline{m}i\pi x}{a}}$$

имеют только два различных значения: A_0, если m четное, и A_1, если m нечетное, т. е. можно написать:

$$\Phi(x)=A_0\sum Q^{2m^2}e^{\frac{4\overline{m}i\pi x}{a}}+A_1\sum Q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}e^{\frac{(4m+2)i\pi x}{a}}.$$

Чтобы притти к обозначениям Якоби, полагаем:

$$a=4K, \qquad b=2iK',$$

затем:

$$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

что дает:

$$Q=q^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, первый из двух рядов, сумма которых образует функцию $\Phi(x)$, принимает вид:

$$A_0 \sum q^{m^2} e^{\frac{mi\pi x}{K}};$$

полагаем:

$$\Theta_1(x)=\sum q^{m^2} e^{\frac{mi\pi x}{K}}.$$

Заметим, что если мы соберем члены, соответствующие равным значениям m, но обратным по знаку, то можем написать:

$$\Theta_1(x)=1+2q\cos\frac{\pi x}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi x}{K}+2q^9\cos\frac{3\pi x}{K}+\ldots$$

или

$$\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots.$$

Второй ряд равен:

$$A_1 \sum q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\frac{(2m+1)i\pi x}{2K}};$$

положим:

$$\mathrm{H}_1(x)=\sum q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\frac{(2m+1)i\pi x}{2K}};$$

соберем затем члены с m и $-m-1$; получим:

$$\mathrm{H}_1(x)=2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{2K}+2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi x}{2K}+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi x}{2K}+\ldots,$$

откуда:

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\ldots.$$

Подобно тому, как функциям $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ приводят в соответствие $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$, мы присоединим к функциям Θ_1 и H_1 следующие:

$$\Theta_1(K-x)=\Theta(x)$$
$$\mathrm{H}_1(K-x)=\mathrm{H}(x).$$

Функции Θ и H даются формулами:

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots,$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\ldots.$$

Функции Θ_1, H_1, Θ, H, из которых первые три четные и последняя нечетная, именно те трансцендентные функции Якоби, помощью которых мы и решим поставленную задачу обращения эллиптического интеграла первого рода.

Установим, во-первых, основные соотношения, к которым они приводят, когда к переменной прибавляются количества:

$$K,\ iK',\ K+iK'.$$

Непосредственно имеем сначала:

$$\begin{aligned}\Theta_1(x+K)&=+\Theta(x)\\ H_1(x+K)&=-H(x)\\ \Theta\ (x+K)&=+\Theta_1(x)\\ H\ (x+K)&=+H_1(x).\end{aligned}$$

Возьмем затем функцию $\varphi(x)=e^{\frac{Ki\pi x^2}{ab}}$, которая в нашем случае равна $e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}$; согласно полученному выше, она дает возможность написать:

$$\varphi(x)\,\Theta_1(x)=\sum\varphi(x+2miK')$$
$$\varphi(x)\,H_1(x)=\sum\varphi[x+(2m+1)iK']\ (m=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots).$$

Достаточно теперь заменить x на $x+iK'$, чтобы получить соотношения:

$$\varphi(x+iK')\,\Theta_1(x+iK')=\varphi(x)\,H_1(x)$$
$$\varphi(x+iK')\,H_1(x+iK')=\varphi(x)\,\Theta_1(x).$$

Полагая для краткости:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+iK')}=e^{\frac{-i\pi}{4K}(2x+iK')}=\lambda,$$

имеем:

$$\Theta_1(x+iK')=\lambda\,H_1(x)$$
$$H_1(x+iK')=\lambda\,\Theta_1(x).$$

Подставляем затем $x+K$ на место x и замечаем, что при этом λ изменяется в $\lambda e^{\frac{-i\pi}{2}}=-i\lambda$; находим:

$$\Theta(x+iK')=i\lambda\,H(x)$$
$$H(x+iK')=i\lambda\,\Theta(x).$$

Таким образом, вторая система соотношений имеет вид:

$$\begin{aligned}\Theta_1(x+iK') &= \lambda\,\mathrm{H}_1(x)\\ \mathrm{H}_1(x+iK') &= \lambda\,\Theta_1(x)\\ \Theta\,(x+iK') &= i\lambda\,\mathrm{H}(x)\\ \mathrm{H}\,(x+iK') &= i\lambda\,\Theta\,(x).\end{aligned}$$

Отсюда третья система получается заменой x на $x+K$; имеем:

$$\begin{aligned}\Theta_1(x+K+iK') &= -\lambda\,\mathrm{H}(x)\\ \mathrm{H}_1(x+K+iK') &= i\lambda\,\Theta(x)\\ \Theta\,(x+K+iK') &= i\lambda\,\mathrm{H}_1(x)\\ \mathrm{H}\,(x+K+iK') &= i\lambda\,\Theta_1(x).\end{aligned}$$

Обозначим, наконец, через λ_1 то значение λ, которое получается при замене x на $x+iK'$, т. е. положим $\lambda_1 = e^{\frac{-i\pi}{4K}(2x+3iK')}$; положим также:

$$\mu = \lambda\lambda_1 = e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')};$$

из уравнений второй системы, заменив x на $x+iK'$, имеем:

$$\begin{aligned}\Theta_1(x+2iK') &= +\mu\,\Theta_1(x)\\ \mathrm{H}_1(x+2iK') &= +\mu\,\mathrm{H}_1(x)\\ \Theta\,(x+2iK') &= -\mu\,\Theta\,(x)\\ \mathrm{H}\,(x+2iK') &= -\mu\,\mathrm{H}\,(x).\end{aligned}$$

Таким образом мы получили основные соотношения между четырьмя трансцендентными функциями Якоби.

Первым следствием отсюда является общее выражение корней уравнений, получаемых приравнивая нулю эти функции. Единственной нечетной функцией будет $\mathrm{H}(x)$, которая имеет, следовательно, корень $x=0$; отсюда мы и получим результат, который имеем в виду.

В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x+2K) &= -\mathrm{H}(x)\\ \mathrm{H}(x+2iK') &= -\mu\,\mathrm{H}(x);\end{aligned}$$

отсюда выводим шаг за шагом, что функция обращается в нуль при

$$x = 2mK + 2m'iK',$$

где m и m' — любые целые числа; эта формула дает все корни уравнения $\mathrm{H}(x)=0$. В самом деле, приняв временно $a=2K$, $b=2iK'$, имеем:

$$\frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}\,(x+a)} = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}\,(x)},\quad \frac{\mathrm{H}'(x+b)}{\mathrm{H}\,(x+b)} = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}\,(x)} - \frac{2i\pi}{a}$$

и, как было показано выше на стр. 291, эти соотношения доказывают, что рассматриваемое уравнение имеет единственный корень внутри параллелограмма периодов, отвечающего $2K$ и $2iK'$.

Установив это, из формул:

$$\begin{aligned}
&\Theta_1(x+K+iK')=+i\lambda\,\mathrm{H}(x)\\
&\mathrm{H}_1(x+K)=-\mathrm{H}(x)\\
&\Theta\ (x+iK')=+i\lambda\,\mathrm{H}(x)
\end{aligned}$$

находим, что корни уравнений $\Theta_1(x)=0$, $\mathrm{H}_1(x)=0$, $\Theta(x)=0$ равны соответственно:

$$\begin{aligned}
&x=(2m+1)K+(2m'+1)iK'\\
&x=(2m+1)K+2m'iK'\\
&x=2mK+(2m'+1)iK'.
\end{aligned}$$

Дадим теперь определения тех двояко-периодических функций, которые приводят к выражению функции обратной эллиптическому интегралу первого рода.

Введя постоянные:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{k}=\frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+\ldots}{1+2q+2q^4}\\
&\sqrt{k'}=\frac{\Theta\ (0)}{\Theta_1(0)}=\frac{1-2q+2q^4-\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots},
\end{aligned}$$

мы обозначим их следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sn} x=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\\
&\operatorname{cn} x=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta\ (x)}\\
&\operatorname{dn} x=\sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta\ (x)}.
\end{aligned}$$

Двойная периодичность этих функций вытекает из установленных выше соотношений между H_1, Θ_1, H, Θ.

Прежде всего, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(x+K)=\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}\\
&\operatorname{cn}(x+K)=-\frac{k'\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}\\
&\operatorname{dn}(x+K)=\frac{k'}{\operatorname{dn} x}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(x+iK')=\frac{1}{k\operatorname{sn} x}\\
&\operatorname{cn}(x+iK')=\frac{\operatorname{dn} x}{ik\operatorname{sn} x}\\
&\operatorname{dn}(x+iK')=\frac{\operatorname{cn} x}{i\operatorname{sn} x}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(x+K+iK') &= \frac{\operatorname{dn} x}{k \operatorname{cn} x} \\ \operatorname{cn}(x+K+iK') &= \frac{k'}{ik \operatorname{cn} x} \\ \operatorname{dn}(x+K+iK') &= \frac{ik' \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} \end{aligned}\right\}$$

Имеем далее:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(x+2K) &= -\operatorname{sn} x \\ \operatorname{cn}(x+2K) &= -\operatorname{cn} x \\ \operatorname{dn}(x+2K) &= +\operatorname{dn} x \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(x+2iK') &= +\operatorname{sn} x \\ \operatorname{cn}(x+2iK') &= -\operatorname{cn} x \\ \operatorname{dn}(x+2iK') &= -\operatorname{dn} x \end{aligned}\right\}$$

и эти соотношения показывают, что значения $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ повторяются снова, если мы заменим x на $x+4K$ и на $x+4iK'$.

Но необходимо заметить, что по отношению к $2K$ и $2iK'$ три введенные функции должны рассматриваться как двояко-периодические второго рода, причем их множители μ и μ' равны ± 1. С этой точки зрения мы утверждаем, что они служат соответственно простыми элементами для однозначных функций $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} F(x+2K) &= -F(x) \\ F_1(x+2K) &= -F_1(x) \\ F_2(x+2K) &= +F_2(x) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} F(x+2iK') &= +F(x) \\ F_1(x+2iK') &= -F_1(x) \\ F_2(x+2iK') &= -F_2(x) \end{aligned}\right\}$$

Действительно, они имеют те же самые множители и в параллелограмме периодов $a=2K'$, $b=2iK'$ допускают только единственный полюс, являющийся корнем $x=iK'$ уравнения $\Theta(x)=0$. Таким образом, если R, R_1, R_2 — вычеты функций $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, соответствующие этому полюсу, то простые элементы, как мы это видели, будут равны $\frac{\operatorname{sn} x}{R}$, $\frac{\operatorname{cn} x}{R_1}$, $\frac{\operatorname{dn} x}{R_2}$; покажем теперь как получаются эти вычеты. Воспользуемся соотношениями:

$$\operatorname{sn}(x+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} x}$$

$$\operatorname{cn}(x+iK') = \frac{\operatorname{dn} x}{ik \operatorname{sn} x}$$

$$\operatorname{dn}(x+iK') = \frac{\operatorname{cn} x}{i \operatorname{sn} x}$$

и заметим, что если положить $x=0$, то, согласно определению постоянных K и K', $\operatorname{sn} x$ обращается в нуль, тогда как $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$ становятся равными единице. Обозначив через ω значение производной от $\operatorname{sn} x$ при $x=0$, находим:

$$R=\frac{1}{k\omega}; \quad R_1=\frac{1}{ik\omega}; \quad R_2=\frac{1}{i\omega}.$$

Установив это и применяя обычные формулы разложения на простые элементы, получим дифференциальные уравнения, связывающие функции $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ с эллиптическим интегралом; отсюда же мы получим формулы сложения аргументов этих функций, данные Эйлером.

Положим, во-первых:

$$F(x)=\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$
$$F_1(x)=\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$
$$F_2(x)=\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x;$$

во всех трех случаях мы имеем единственный полюс $x=iK'$, который входит во второй степени; следовательно, мы можем непосредственно написать, вводя постоянные α, β, γ:

$$\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x=\alpha \operatorname{sn} x+\alpha' D_x \operatorname{sn} x$$
$$\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x=\beta \operatorname{cn} x+\beta' D_x \operatorname{cn} x$$
$$\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x=\gamma \operatorname{dn} x+\gamma' D_x \operatorname{dn} x.$$

Но функция $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ четная, функции же $\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$ и $\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$ нечетные; отсюда заключаем, что α, β, γ равны нулю. Наконец, если вблизи полюса мы имеем:

$$\operatorname{sn} x=\frac{R}{x-iK'}, \quad \operatorname{cn} x=\frac{R_1}{x-iK'}, \quad \operatorname{dn} x=\frac{R_2}{x-iK'},$$

то необходимо допустить, что:

$$R_1 R_2=-\alpha' R$$
$$R R_2=-\beta' R_1$$
$$R R_1=-\gamma' R_2;$$

эти соотношения дают:

$$\alpha'=\frac{1}{\omega}, \quad \beta'=-\frac{1}{\omega}, \quad \gamma'=-\frac{1}{k^2\omega}.$$

Таким образом, мы получаем дифференциальные уравнения:

$$D_x \operatorname{sn} x=\omega \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$
$$D_x \operatorname{cn} x=-\omega \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$
$$D_x \operatorname{dn} x=-k^2\omega \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.$$

Отсюда вытекают следующие следствия:

Имеем сначала:

$$\operatorname{sn} x D_x \operatorname{sn} x+\operatorname{cn} x D_x \operatorname{cn} x=0$$
$$k^2 \operatorname{sn} x D_x \operatorname{sn} x+\operatorname{dn} x D_x \operatorname{dn} x=0,$$

откуда:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = C$$
$$k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = C'.$$

Постоянные определим, положив $x=0$; непосредственно имеем $C=1$, $C'=1$ и таким образом приходим к алгебраическим соотношениям:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1$$
$$k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1.$$

Положим во втором равенстве $x=K$; из соотношений:

$$\operatorname{sn}(x+K) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{dn}(x+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x}$$

имеем $\operatorname{sn} K = 1$, $\operatorname{dn} K = k'$; получаем чрезвычайно важное равенство:

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Положим теперь, чтобы подойти к обращению эллиптического интеграла первого рода:

$$\operatorname{sn} x = z;$$

предыдущие соотношения дают нам:

$$\frac{dz}{dx} = \omega \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

откуда:

$$\omega\, dx = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

и, следовательно:

$$\omega x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где, как и в предыдущих лекциях,

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2).$$

Предполагаем, что K и K' вещественные; постоянные, обозначенные через k и k' будут также вещественны и, вследствие условия $k^2+k'^2=1$, меньше единицы. В этом случае, если x изменяется от 0 до K, принимая последовательность вещественных значений, то $z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$ принимает ряд вещественных значений, непрерывно изменяющихся от нуля до единицы, так как знаменатель $\Theta(x)$ обращается в нуль только при мнимом значении $x = iK'$; следовательно, мы имеем:

$$\omega K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Воспользуемся затем формулой $\operatorname{sn}(K+x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}$ и заменим в ней

x на ix, что дает $\operatorname{sn}(K+ix)=\dfrac{\operatorname{cn} ix}{\operatorname{dn} ix}$. Если заставить x возрастать от нуля до K', то правая часть, будучи вещественной, непрерывно изменяется от единицы до $\dfrac{1}{k}$. В самом деле, в этом интервале знаменатель $\operatorname{dn} ix$ не обращается в нуль и соотношение $\operatorname{sn}(K+iK'+x)=\dfrac{\operatorname{dn} x}{k\operatorname{cn} x}$ дает $\operatorname{sn}(K+iK')=\dfrac{1}{k'}$, если положить $x=0$.[1]

Мы можем, следовательно, положить:

$$\omega iK'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

или, как мы уже имели:

$$\omega K'=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}.$$

Чтобы подойти теперь к обращению интеграла:

$$\xi=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

достаточно, очевидно, положить $\xi=\omega x$ в выражении $z=\operatorname{sn} x$ и взять:

$$\omega K=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad \omega K'=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}},$$

[1] Чтобы легче следить за изменением вещественных и положительных значений, принимаемых тремя функциями $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$, достаточно рассматривать прямоугольник $OACB$ со стороны OA и OB, соответственно равными K и K' (черт. 69). Когда переменная описывает последовательно OA, AC, CB, $\operatorname{sn} x$ возрастает от нуля до единицы, от единицы до $\frac{1}{k}$ и от $\frac{1}{k}$ до бесконечности. Для функции $\operatorname{cn} x$ проследим путь, составленный из AO и OB; в этом случае функция возрастает от нуля до единицы и затем от единицы до бесконечности. Наконец, для $\operatorname{dn} x$, если переменная описывает прямые CA, AO и OB, то функция возрастает от нуля до k', от k' до единицы и, наконец, от единицы до бесконечности.

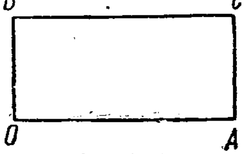

Рис. 69.

что дает:

$$\ln q = -\frac{\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}}{\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}}.$$

Применив эти подстановки, замечаем, что ω исчезает вовсе; получаем, следовательно, z как функцию от ξ, посредством формулы, в которую входит только параметр k.

Возвратимся временно к равенству:

$$k^2 + k'^2 = 1;$$

если мы заменим k и k' их разложениями в ряд по аргументу q, то придем к следующему замечательному соотношению:

$$(2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots)^4 + (1 - 2q + 2q^4 + \ldots)^4 =$$
$$= (1 + 2q + 2q^4 +)\ldots^4.$$

Это соотношение дает первый пример приложения теории эллиптических функций к теории чисел; покажем как отсюда получается теорема о разложении чисел на четыре квадрата.

Положим:

$$1 + 2q + 2q^4 + \ldots = \sum q^{n^2};$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

имеем сначала, возводя в квадрат:

$$(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2 = \sum q^{n^2 + n'^2},$$

где суммирование правой части распространено на все целые положительные и отрицательные значения n и n'. Отсюда следует, что данная степень q, q^N, имеет коэфициентом число решений уравнения $n^2 + n'^2 = N$; рассматривая затем третью и четвертую степени, имеем:

$$(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^3 = \sum q^{n^2 + n'^2 + n''^2}$$
$$(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^4 = \sum q^{n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2},$$

и коэфициенты при q^N в правых частях равны опять числу решений уравнений:

$$n^2 + n'^2 + n''^2 = N$$
$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 = N$$

в положительных или отрицательных целых числах.

Мы можем, следовательно, написать:

$$(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^4 = \sum (N) q^N,$$

обозначив через (N) число разложений на четыре квадрата показателя степени N, за который можно брать все целые положительные числа.

Аналогичным образом получим:

$$(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\ldots)^4=\Sigma(N)_1 q^N,$$

причем в этом равенстве коэффициент $(N)_1$ обозначает число решений уравнения:

$$(2n+1)^2+(2n'+1)^2+(2n''+1)^2+(2n'''+1)^2=4N,$$

где N, очевидно, число нечетное, и при условии, которого мы не вводили раньше, что n, n', n'', n''' все положительные. Заменив теперь q на $-q$, имеем:

$$(1-2q+2q^4\ldots)^4=\Sigma(-1)^N(N)q^N;$$

таким образом, полученное тождество приводит к следующему уравнению:

$$16(N_1)+(-1)^N(N)=(N).$$

Очевидно при четных значениях N оба члена $(-1)^N(N)$ и (N_1) сокращаются; если же N нечетное, то имеем соотношение:

$$8(N_1)=N$$

и, следовательно, получаем следующую теорему: *число разложений на четыре квадрата целого нечетного числа равно помноженному на восемь числу разложений на сумму таких четырех квадратов учетверенного этого числа, корни которых все нечетные и положительные.*

Нам остается еще дать формулы, аналогичные формулам элементарной тригонометрии и дающие выражения $\operatorname{sn}(x+a)$, $\operatorname{cn}(x+a)$, $dn(x+a)$ через функции от аргументов x и a. Для этой цели рассмотрим, чтобы разлагать их на простые элементы, функции второго рода $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, имеющие те же множители, что и $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, а именно:

$$\begin{aligned} F(x)&=\operatorname{cn} x \operatorname{dn}(x+a)=\operatorname{dn} x \operatorname{cn}(x+a)\\ F_1(x)&=\operatorname{sn} x \operatorname{dn}(x+a)=\operatorname{dn} x \operatorname{sn}(x+a)\\ F_2(x)&=\operatorname{sn} x \operatorname{cn}(x+a)=\operatorname{cn} x \operatorname{sn}(x+a). \end{aligned}$$

В этих различных случаях имеем неизменно те же самые два полюса $x=iK'$ и $x=-a+iK'$ и мы можем непосредственно писать, например:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} x \operatorname{dn}(x+a)&=\alpha \operatorname{sn} x+\beta \operatorname{sn}(x+a)\\ \operatorname{sn} x \operatorname{dn}(x+a)&=\alpha' \operatorname{cn} x+\beta' \operatorname{cn}(x+a) \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

обозначая через α и β постоянные. Для их определения проще всего положить $x=0$ и $x=-a$; находим:

$$\alpha=-\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a}; \qquad \beta=\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a};$$

$$\alpha'=\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a}; \qquad \beta=-\frac{1}{\operatorname{sn} a}.$$

Тот же прием применяется и ко всем другим рассмотренным нами функциям и дает следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cn} x \operatorname{sn} a \operatorname{dn}(x+a) &= \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(x+a) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} a\\ \operatorname{dn} x \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(x+a) &= \operatorname{cn} a \operatorname{sn}(x+a) - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} a\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{dn}(x+a) &= \operatorname{cn} x \operatorname{cn} a - \operatorname{cn}(x+a)\\ \operatorname{dn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) &= \operatorname{cn} x - \operatorname{cn} a \operatorname{cn}(x+a)\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned}k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(x+a) &= \operatorname{dn} x \operatorname{dn} a - \operatorname{dn}(x+a)\\ k^2 \operatorname{cn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) &= \operatorname{dn} x - \operatorname{dn} a \operatorname{dn}(x+a)\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

Взяв теперь из I и II группы уравнения:

$$\operatorname{dn} x \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a \operatorname{sn}(x+a) - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} a$$
$$\operatorname{dn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) = \operatorname{cn} x - \operatorname{cn} a \operatorname{cn}(x+a)$$

находим сначала

$$\operatorname{sn}(x+a) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a}$$

$$\operatorname{cn}(x+a) = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a};$$

воспользовавшись затем одним из соотношений III, имеем:

$$\operatorname{dn}(x+a) = \frac{\operatorname{dn} x \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a}.$$

Существуют и другие методы, приводящие к тем же результатам; следующий из них дает кроме того важную формулу сложения аргументов для функции

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

Пусть даны функции:

$$\Phi(x) = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a)$$
$$\Phi_1(x) = k^2 \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a)$$
$$\Phi_2(x) = k^2 \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a),$$

имеющие, очевидно, периодами $2K$ и $2iK'$; разложим их на простые элементы, применяя общую формулу для двояко-периодических функций первого рода.

Заметим для этого, что использованное ранее выражение:

$$\chi(x) = \sum Q^{m^2} e^{\frac{2mi\pi x}{a}},$$

становится равным $\Theta_1(x)$, если в нем заменить a на $2K$ и b на $2iK'$; имеем вместе с этим $c = K + iK'$ и количество, служащее простым элементом, принимает вид:

$$\frac{\Theta_1'(x+K+iK')}{\Theta_1(x+K+iK')} = \frac{\Theta'(x+iK')}{\Theta(x+iK')}.$$

Установив это, отмечаем, что полюсы рассматриваемых нами функций будут корнями уравнений $\Theta(x)=0$, $\Theta(x+a)=0$; следовательно, мы можем взять за корни iK' и $a+iK'$, как расположенные в одном и том же параллелограмме периодов. Так как эти корни простые, то обозначив через R и R_1 соответствующие вычеты и через C постоянную, мы представим функции $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ в следующем виде:

$$C+R\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}+R_1\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}.$$

Но известно, что $R+R_1=0$; значит во всех трех случаях, изменяя постоянную, имеем следующее выражение:

$$C+R\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}+\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}-\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}\right]$$

или проще, если положим $Z(x)=\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$:

$$C+R\,[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)].$$

Найдем теперь вычеты R наших трех функций для $x=iK'$; заметим, что они соответственно равны вычетам следующих выражений для $x=0$:

$$\Phi(x+iK')=\frac{1}{\operatorname{sn}(x+a)\operatorname{sn}x}$$

$$\Phi_1(x+iK')=-\frac{\operatorname{dn}x\operatorname{dn}(x+a)}{\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a)}$$

$$\Phi_2(x+iK')=-\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{cn}(x+a)}{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a)}.$$

Таким образом, находим:

$$R=\frac{1}{\omega\operatorname{sn}a},\quad -\frac{\operatorname{dn}a}{\omega\operatorname{sn}a},\quad -\frac{\operatorname{cn}a}{\omega k^2\operatorname{sn}a},$$

обозначая попрежнему через ω значение производной от $\operatorname{sn}x$ при $x=0$.

Сказанное ранее о дифференциальном уравнении:

$$D_x\operatorname{sn}x=\omega\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x$$

показывает, однако, что $\omega=1$; при подобающем определении K; отсюда получаем соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
k^2\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a)&=C+\frac{1}{\operatorname{sn}a}[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)]\\
k^2\operatorname{cn}x\operatorname{cn}(x+a)&=C_1-\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}a}[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)]\\
\operatorname{dn}x\operatorname{dn}(x+a)&=C_2-\frac{\operatorname{cn}a}{\operatorname{sn}a}[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)]
\end{aligned}\right\}$$

Постоянные определяют, положив $x=0$; окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) &= Z(x)+Z(a)-Z(x+a) \\ k^2 \operatorname{cn} x \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(x+a) &= k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a - Z(x) - Z(a) + Z(x+a) \\ \operatorname{dn} x \operatorname{sn} a \operatorname{dn}(x+a) &= \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a - Z(x) - Z(a) + Z(x+a) \end{aligned}\right\}$$

Исключив из этих трех равенств количество $Z(x)+Z(a)-Z(x+a)$, имеем:

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(x+a)$$
$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{sn}(x+a).$$

Меняя местами x и a, мы снова приходим к двум уравнениям полученным выше, из которых затем можно вывести и другие.

Полученное нами соотношение:

$$k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) = Z(x)+Z(a)-Z(x+a)$$

имеет большое значение в теории эллиптических функций; ограничимся только выводом из него следующего следствия.

Разделим обе части на a и положим $a=0$; обозначив через ζ постоянную $Z'(0)$, имеем:

$$k^2 \operatorname{sn}^2 x = -Z'(x) + \zeta,$$

откуда получаем сначала:

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \zeta x - \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx,$$

а затем и функцию $\Theta(x)$ новым интегрированием этого выражения:

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} = e^{\frac{\zeta x^2}{2} - \int_0^x dx \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx}.$$

Таким образом, видим, что показательная функция

$$e^{-\int_0^x dx \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx}$$

есть голоморфная функция от переменной; Вейерштрасс, который ввел ее с большим успехом в теорию эллиптических функций, обозначает ее через $Al(x)$; таким образом имеем:

$$Al(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}\, \Theta(x)}{\Theta(0)}.$$

Три других функции той же природы, соответствующие $H(x)$, $H_1(x)$ и $\Theta_1(x)$, обозначаются через $Al(x)_1$, $Al(x)_2$, $Al(x)_3$ и определяются соотношениями:

$$Al(x)_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} H(x)}{H'(0)}$$

$$Al(x)_2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} H_1(x)}{H_1(0)}$$

$$Al(x)_3 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} \Theta_1(x)}{\Theta_1(0)}.$$

Я хотел дать только определение этих трансцендентных функций; изучать их в этих лекциях мы не будем. Все же возвратимся еще к уравнению:

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \zeta x - \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx,$$

выводом которого мы обязаны Якоби, и укажем некоторые его следствия. Пусть сначала $x = K$; замечая, что соотношение:

$$\Theta(K + x) = \Theta(K - x)$$

дает:

$$\Theta'(K + x) = -\Theta'(K - x)$$

и, следовательно, полагая $x = 0$, $\Theta'(K) = 0$, выводим, подставив $x = K$:

$$\zeta K = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx.$$

Полученный определенный интеграл, который после подстановки $\operatorname{sn} x = z$ принимает вид $\int_0^1 \frac{k^2 z^2\, dz}{\sqrt{R(z)}}$, есть полная функция второго рода. Он соответствует интегралу $K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, который является полной функцией первого рода; согласно принятым обозначениям Вейерштрасса, назовем его через J. Полагаем так же:

$$iJ' = \int_K^{K+iK'} k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 z^2\, dz}{\sqrt{R(z)}};$$

таким образом J' соответствует K', который определяется равенством:

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Эти интегралы связаны следующим соотношением:

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2},$$

которое мы сейчас выведем.

Возвращаемся для этого к уравнению (см. стр. 307)

$$\Theta(x + K + iK') = i\lambda H_1(x);$$

беря логарифмическую производную, имеем:

$$\frac{\Theta'(x + K + iK')}{\Theta(x + K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K} + \frac{H_1'(x)}{H_1(x)}$$

и, следовательно, если положим $x = 0$:

$$\frac{\Theta'(K + iK')}{\Theta(K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K}.$$

Положим теперь в уравнении Якоби $x = K + iK'$ и заметим, что можно написать:

$$\int_0^{K+iK'} k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx = J + iJ'.$$

Таким образом, находим:

$$-\frac{i\pi}{2K} = \zeta(K + iK') - J - iJ',$$

что приводит после замены ζ на $\frac{J}{K}$ к равенству, которое требовалось установить:

$$\frac{\pi}{2} = KJ' - JK'.$$

Рассмотрим теперь производное уравнение:

$$\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'^2(x)}{\Theta^2(x)} = \zeta - k \operatorname{sn}^2 x;$$

положив в нем $x = 0$, имеем:

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \zeta;$$

это замечательное выражение приводит к отысканию значений, принимаемых аналогичными выражениями $\frac{H''(x)}{H(x)}$, $\frac{H_1''(x)}{H_1(x)}$, $\frac{\Theta_1''(x)}{\Theta(x)}$ при $x = 0$. Они легко получаются из соотношений:

$$H(x) = \sqrt{k} \operatorname{sn} x\, \Theta(x)$$

$$H_1(x) = \sqrt{\frac{k}{k'}} \operatorname{cn} x\, \Theta(x)$$

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k'}} \operatorname{dn} x\, \Theta(x)$$

применением формулы:

$$\frac{(UV)''}{UV}=\frac{U''}{U}+2\frac{U'}{U}\frac{V'}{V}+\frac{V''}{V}.$$

Таким образом, находим:

$$\frac{H''(x)}{H(x)}=2k^2\operatorname{sn}^2 x-1-k^2+\frac{2\operatorname{cn} x\operatorname{dn} x\,\Theta'(x)}{\operatorname{sn} x\,\Theta(x)}+\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}$$

$$\frac{H_1''(x)}{H_1(x)}=2k^2\operatorname{sn}^2 x-1-\frac{2\operatorname{sn} x\operatorname{dn} x\,\Theta'(x)}{\operatorname{cn} x\,\Theta(x)}+\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}$$

$$\frac{\Theta_1''(x)}{\Theta_1(x)}=2k^2\operatorname{sn}^2 x-k^2-\frac{2k^2\operatorname{sn} x\operatorname{cn} x\,\Theta'(x)}{\operatorname{dn} x\,\Theta(x)}+\frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}.$$

Достаточно теперь положить $x=0$, что дает:

$$\frac{\Theta'(x)}{\operatorname{sn} x}=\Theta''(0)\quad\text{и}\quad\frac{H''(x)}{H(x)}=\frac{H'''(0)}{H'(0)},$$

чтобы получить искомые значения:

$$\frac{H'''(0)}{H'(0)}=-1-k^2+3\zeta$$

$$\frac{H_1''(0)}{H_1(0)}=-1+\zeta$$

$$\frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)}=-k^2+\zeta.$$

Дадим им другой вид, введя производные, взятые по q; имеем:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\Theta''(0)=-4qD_q\Theta(0)$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 H'''(0)=-4qD_q\left[\frac{2K}{\pi}H'(0)\right]$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 H_1''(0)=-4qD_qH_1(0)$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\Theta_1''(0)=-4qD_q\Theta_1(0);$$

отсюда получаются следующие новые равенства:

$$4qD_q\ln\Theta(0)=-\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\zeta$$

$$4qD_q\ln\left[\left(\frac{2K}{\pi}\right)H'(0)\right]=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1+k^2-3\zeta)$$

$$4qD_q\ln H_1(0)=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1-\zeta)$$

$$4qD_q\ln\Theta_1(0)=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(k^2-\zeta);$$

из этих равенств вытекают несколько следствий, которые мы сейчас и укажем. Во-первых, имеем соотношение:

$$D_q \ln\left[\left(\frac{2K}{\pi}\right) \mathrm{H}'(0)\right] = D_q \ln\,[\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\mathrm{H}_1(0)],$$

к которому пришли различными методами и независимо друг от друга Хальфен и Каспари. Обозначив через C постоянную, получаем:

$$\frac{2K}{\pi}\mathrm{H}'(0) = C\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,H_1(0),$$

что приводит к тождеству:

$$2\sqrt[4]{q} - 6\sqrt[4]{q^9} + \ldots =$$
$$= C(1 - 2q + 2q^4 \ldots) \times (1 + 2q + 2q^4 \ldots) \times (2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots),$$

из которого видно, что $C = 1$. Заметим еще, что, имея $\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$, разделив обе части на x и положив затем $x = 0$, находим:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(0)}$$

и наконец, согласно значению $\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}$ (стр. 308)

$$1 = \frac{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}.$$

Перемножив почленно с полученным уравнением:

$$\frac{2K}{\pi}\mathrm{H}'(0) = \Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\mathrm{H}_1(0),$$

находим:

$$\frac{2K}{\pi} = \Theta_1^2(0),$$

откуда получаем важный результат, данный Якоби:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0).$$

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

Бесконечное число форм функций $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\Theta_1(x)$ и $\mathrm{H}_1(x)$. Выражения $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ при замене K и iK' на $L = aK + ibK'$ и $iL' = cK + idK'$, причем a, b, c, d — целые и $ad - bc = 1$, $a \equiv d \equiv 1$ и $b \equiv c \equiv 0 \bmod 2$. — Доказательство теоремы Римана о вещественной части $\frac{K'}{K}$, когда модуль мнимый. — Обращение эллиптического интеграла $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, причем модуль k имеет любое вещественное или мнимое значение. — Приложение теоремы Миттаг-Леффлера к функциям $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.

В предыдущей лекции мы видели, что функции $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$ не изменяются при замене в них x, K, K' на ωx, ωK, $\omega K'$; условимся в дальнейшем, что они определены равенствами:

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$K' = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}.$$

Отсюда следует, как это было доказано, что, положив:

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$$

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}$$

и предполагая, что модуль k вещественен и меньше единицы, мы имеем три дифференциальных уравнения:

$$D_x \operatorname{sn} x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$

$$D_x \operatorname{cn} x = -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$

$$D_x \operatorname{dn} x = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$$

Вот еще одно важное замечание.

Раньше было доказано, что если модуль описывает замкнутый контур, заключающий только точку $k^2=0$, то K не меняется в то время, как iK' становится равным:

$$2K+iK'.$$

Если же имеем контур, заключающий точку $k^2=1$, то iK' не меняется, тогда как вместо K находим $K-2iK'$.

Приходим, следовательно, к необходимому следствию, что функции, получаемые из $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, когда в них K и iK' заменяются количествами, расположенными справа:

$$\mathrm{I}\ \begin{Bmatrix} K, & K \\ iK', & 2K+iK' \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{II}\ \begin{Bmatrix} K, & K-2iK' \\ iK', & iK' \end{Bmatrix}$$

удовлетворяют тем же самым дифференциальным уравнениям и, следовательно, имеют при $x=0$ те же начальные значения. В первом случае, когда K не меняется, мы доказываем сразу, пользуясь периодичностью показательной функции, что $q=e^{i\pi\frac{iK'}{K}}$ не меняется. Во втором же случае мы приходим к новым аналитическим выражениям, совсем не похожим на эти функции, что дает начало теории, названной Якоби теорией бесконечного числа видов четырех трансцендентных функций $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$. Действительно, мы получаем бесконечное число видов, рассматривая все замкнутые контуры, которые описывает k^2, вращаясь любое число раз в прямом или обратном направлении вокруг двух указанных точек разрыва. Таким образом, если мы обернемся m раз вокруг начала координат или n раз вокруг точки $k^2=1$, будем иметь вместо формул I и II следующие:

$$\mathrm{III}\ \begin{Bmatrix} K, & K \\ iK', & 2mK+iK' \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{IV}\ \begin{Bmatrix} K, & K-2niK' \\ iK' & iK' \end{Bmatrix},$$

в которых m и n — любые положительные или отрицательные целые числа. Отсюда легко заключить, что, рассматривая некоторый контур, мы приходим к замене K и iK' на $\alpha K+\beta iK'$ и $\gamma K+\delta iK'$, где α, β, γ, δ — целые, связанные условием $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, причем β и γ четные, тогда как α и δ — нечетные и $\equiv 1$, Mod 4. Задержимся несколько на этом, чтобы иметь возможность указать на некоторые, часто применяемые, соображения.

Линейная подстановка:

$$x=\alpha x'+\beta y'$$
$$y=\gamma x'+\delta y'$$

обозначается символом: $S=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$; если после нее мы выполним другую подстановку, $S'=\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$, положив:

$$x'=\alpha'x''+\beta'y''$$
$$y'=\gamma'x''+\delta'y'',$$

то окончательную подстановку мы запишем в виде произведения двух множителей:

$$SS'=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'+\beta\gamma' & \alpha\beta'+\beta\delta'\\ \gamma\alpha'+\delta\gamma', & \gamma\beta'+\delta\delta'\end{pmatrix};$$

мы видим, что, если определители S и S' равны единице, то тому же равен определитель сложной подстановки SS'.

Очевидно также, что если β и γ будут четными так же как и β' и γ', тогда как α и δ, с одной стороны, α' и δ', с другой, будут $\equiv 1$, Mod 4, то те же условия имеют место и для сложной подстановки, так что, если мы напишем:

$$SS'=\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix},$$

то b и c будут четными, а a и d вида $4n+1$. Назовем такие подстановки, которые сохраняют свои характерные свойства, когда мы соединяем их между собой, подстановками главного типа.

Обозначим еще через S^{-1} подстановку, обратную S, а именно: $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$, что дает соотношение:

$$SS^{-1}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix};$$

уславливаются писать:

$$SS'=1.$$

Применим, наконец, обозначение, аналогичное показателю степени, чтобы обозначать результат повторения той же подстановки несколько раз подряд, полагая: $SS=S^2$, $SSS=S^3$ и т. д.

Условившись в этих обозначениях, положим:

$$S_0=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 2, & 1\end{pmatrix}, \quad S_1=\begin{pmatrix}1, & -2\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Эти частные подстановки соответствуют соотношениям I и II. Подстановка S, отвечающая любому возможному контуру, будет представлена формулой:

$$S=S_0{}^{\lambda}S_1{}^{\mu}S_0{}^{\nu}S_1{}^{\rho}\ldots,$$

в которой λ, μ, ν, ρ — целые положительные или отрицательные числа; согласно со сказанным раньше, очевидно, что она принадлежит к главному типу. Обратное предложение также имеет место, и мы докажем сейчас что всякая подстановка $T = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ с определителем равным единице и главного типа, выражается формулой:

$$T = S_0^{\lambda} S_1^{\mu} S_0^{\nu} S_1^{\rho} \ldots .$$

Воспользуемся для этого следующими соотношениями:

$$TS_0^m = \begin{pmatrix} a + 2mb, & b \\ c + 2md, & d \end{pmatrix}$$

$$TS_1^n = \begin{pmatrix} a, & b - 2na \\ c, & d - 2nc \end{pmatrix};$$

они показывают, что мы можем распорядиться целыми m и n таким образом, что $a + 2mb$ будет по абсолютному значению меньше b и $b - 2na$ по абсолютному значению меньше a. Отсюда вытекает возможность образовать следующую последовательность:

$$\begin{pmatrix} a', & b \\ c', & d \end{pmatrix} = TS_0^m$$

$$\begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix} = TS_0^m S_1^n$$

$$\begin{pmatrix} a'', & b' \\ c'', & d' \end{pmatrix} = TS_0^m S_1^n S_0^p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

в которой, не обращая внимания на знаки, имеем:

$$a' < b, \quad b' < a', \quad a'' < b', \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно также, что если члены обоих рядов:

$$a, a', a'', \ldots \text{ и т. д.}$$

$$b, b', b'', \ldots \text{ и т. д.}$$

расположены по убывающим значениям, то мы найдем после конечного числа действий член, равный нулю, т. е. мы придем к одной из двух подстановок $\begin{pmatrix} \alpha, & 0 \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0, & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$. Но эти подстановки должны быть главного типа; следовательно, необходимо исключить вторую; что же касается первой, то так как определитель должен быть равен единице, мы возьмем $\alpha = 1$, $\delta = 1$, отбрасывая значения $\alpha = 1$, $\delta = -1$, причем γ, по предположению, должна быть четной. Она становится, следовательно, степенью S_0; таким образом, положив временно:

$$U = S_0^m S_1^n S_0^p \ldots,$$

имеем следующее соотношение:

$$TU = S_0^r,$$

в котором r — целое число. Отсюда заключаем, что $T = U^{-1} S_0^r$ и справедливость теоремы, которую мы хотели доказать, вытекает из самого вида обратной подстановки U. Действительно, легко доказать, что обратные подстановок AB, ABC и т. д., составленных при помощи нескольких прямых, выражаются через $B^{-1}A^{-1}$, $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ и т. д. Изложенный нами алгорифм приводит к выражению каждой подстановки главного типа с определителем равным единице через произведение показателей степеней основных подстановок S_0 и S_1.

Доказав это, найдем выражения, полученные функциями $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, когда, вместо периодов K и iK', вводятся количества:

$$L = aK + ibK'$$
$$iL' = cK + idK',$$

в которых a, b, c, d — целые, связанные условием $ad - bc = 1$, причем b и c четные, a и $d \equiv 1$, Mod 4.

Замечаем сначала, что положив:

$$\frac{iK'}{K} = r + is, \quad \frac{iL'}{L} = R + iS,$$

чтобы выделить вещественную и мнимую части, получаем:

$$R + iS = \frac{c + d(r + is)}{a + b(r + is)} =$$
$$= \frac{ac + (ad + bc)r + bd(r^2 + s^2)}{(a + br)^2 + b^2s^2} + i\frac{(ad - bc)s}{(a + br)^2 + b^2s^2};$$

следовательно S, как и s, имеет положительное значение. Возвратимся теперь к соотношениям, данным на стр. 307, устанавливающим правила замены x на $x + 2iK'$ в четырех трансцендентных функциях Якоби. Пользуясь ими, легко получаем, что если заменим x на $x + 2imK'$, где m — любое целое число, и если напишем для краткости:

$$g = e^{\frac{-im\pi}{K}(x + imK')},$$

то получим:

$$\text{(A)} \begin{cases} \Theta(x + 2imK') = (-1)^m g\Theta(x) \\ \mathrm{H}(x + 2imK') = (-1)^m g\mathrm{H}(x) \\ \Theta_1(x + 2imK') = +g\Theta_1(x) \\ \mathrm{H}_1(x + 2imK') = +g\mathrm{H}_1(x). \end{cases}$$

Уравнения, относящиеся к замене x на $x + iK'$, приводят к аналогичному обобщению. Положив в этом случае:

$$g' = e^{-\frac{i(2m+1)\pi}{4K}[2x + i(2m+1)K']}$$

получим после несложных вычислений:

$$\text{(B)} \begin{cases} \Theta\ [x + i(2m+1)K'] = (-1)^m ig'\mathrm{H}(x) \\ \mathrm{H}\ [x + i(2m+1)K'] = (-1)^m ig'\Theta(x) \\ \Theta_1[x + i(2m+1)K'] = +g'\mathrm{H}_1(x) \\ \mathrm{H}_1[x + i(2m+1)K'] = +g'\Theta_1(x). \end{cases}$$

Установив это и вспоминая, что ранее мы положили:

$$L = aK + ibK',$$

меняем в уравнениях (A) x на $x + aK$ и полагаем $2m = b$. Показательный множитель g, принимающий вид:

$$e^{-\frac{ib\pi}{2K}\left(x + aK + \frac{ibK'}{2}\right)}$$

или

$$e^{-\frac{ib\pi}{2K}\left(x + \frac{aK+L}{2}\right)}$$

может быть написан следующим образом:

$$e^{-\frac{iab\pi}{4}} e^{-\frac{ib\pi}{4K}(2x+L)}.$$

Замечая затем, что целое a нечетно и $\equiv 1$, Mod 4, имеем:

$$\begin{aligned}
\Theta\ (x + aK) &= +\Theta_1(x),\\
\mathrm{H}\ (x + aK) &= +\mathrm{H}_1(x),\\
\Theta_1(x + aK) &= +\Theta(x),\\
\mathrm{H}_1(x + aK) &= -\mathrm{H}(x).
\end{aligned}$$

Следовательно, из уравнений (A) получаем:

$$(C)\ \begin{cases}
\Theta\ (x + L) = \alpha G \Theta_1(x)\\
\mathrm{H}\ (x + L) = \beta G \mathrm{H}_1(x)\\
\Theta_1(x + L) = \gamma G \Theta(x)\\
\mathrm{H}_1(x + L) = \delta G \mathrm{H}(x),
\end{cases}$$

положив для краткости:

$$G = e^{-\frac{ib\pi}{4K}(2x+L)};$$

$$\alpha = e^{\frac{ib\pi}{4}},\quad \beta = e^{\frac{ib\pi}{4}},\quad \gamma = e^{-\frac{ib\pi}{4}},\quad \delta = -e^{-\frac{ib\pi}{4}}.$$

Рассмотрим, во-вторых, выражение:

$$iL' = cK + idK',$$

в котором c четное и $d \equiv 1$, Mod 4; в уравнениях (B), в которых полагаем $2m + 1 = d$, заменим x на $x + cK$. На месте показательного множителя g' имеем:

$$e^{-\frac{icd\pi}{4}} e^{-\frac{id\pi}{4K}(2x+iL')},$$

и, пользуясь предыдущими равенствами, мы получим соотношения:

$$(D)\ \begin{cases}
\Theta\ (x + iL') = \alpha\, G' \mathrm{H}(x)\\
\mathrm{H}\ (x + iL') = \beta' G' \Theta(x)\\
\Theta_1(x + iL') = \gamma' G' \mathrm{H}_1(x)\\
\mathrm{H}_1(x + iL') = \delta' G' \Theta_1(x),
\end{cases}$$

в которых:

$$G' = e^{-\frac{id\pi}{4K}(2x+iL')},$$

$$\alpha' = ie^{\frac{ic\pi}{4}},\quad \beta' = ie^{-\frac{ic\pi}{4}},\quad \gamma' = e^{\frac{ic\pi}{4}},\quad \delta = e^{-\frac{ic\pi}{4}}.$$

Из установленных результатов можно вывести следующие следствия. Вводим функции, определенные следующим образом:

$$\Phi(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}} \Theta(x)$$

$$\Pi(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}} \mathrm{H}(x)$$

$$\Phi_1(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}} \Theta_1(x)$$

$$\Pi_1(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}} \mathrm{H}_1(x);$$

пользуясь очевидным тождеством:

$$\frac{(x+L)^2}{4KL} - \frac{x^2}{4KL} = \frac{2x+L}{4K}$$

из уравнений (C) получаем сначала:

$$(\mathrm{E}) \begin{cases} \Phi(x+L) = \alpha\Phi_1(x) \\ \Pi(x+L) = \beta\Pi_1(x) \\ \Phi_1(x+L) = \gamma\Phi(x) \\ \Pi_1(x+L) = \delta\Pi(x) \end{cases}$$

и затем:

$$(\mathrm{F}) \begin{cases} \Phi(x+2L) = +\Phi(x) \\ \Pi(x+2L) = -\Pi(x) \\ \Phi_1(x+2L) = +\Phi_1(x) \\ \Pi_1(x+2L) = -\Pi_1(x). \end{cases}$$

Рассмотрим теперь систему (D) и воспользуемся равенством:

$$\frac{b(x+iL')^2}{4KL} - \frac{bx^2}{4KL} = \frac{ibL'}{4KL}(2x+iL').$$

Заметим, что из уравнений:

$$L = aK + ibK'$$
$$iL' = cK + idK',$$

принимая во внимание, что $ad - bc = 1$, вытекает:

$$dL - ibL' = K,$$

что позволяет написать:

$$\frac{ibL'}{KL} = \frac{d}{K} - \frac{1}{L}$$

Таким образом, приходим к равенствам:

$$(\mathrm{G}) \begin{cases} \Phi(x+iL') = \alpha' E\Pi(x) \\ \Pi(x+iL') = \beta' E\Phi(x) \\ \Phi_1(x+iL') = \gamma' E\Pi_1(x) \\ \Pi_1(x+iL') = \delta' E\Phi_1(x), \end{cases}$$

положив:

$$E = e^{-\frac{i\pi}{4L}(2x + iL')}.$$

Пусть еще:

$$F = e^{-\frac{i\pi}{L}(x + iL')}.$$

Заменяя x на $x + iL'$, получаем из (G):

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} \Phi\,(x + 2iL') = -F\Phi\,(x), \\ \Pi\,(x + 2iL') = -F\Pi\,(x), \\ \Phi_1(x + 2iL') = +F\Phi_1(x), \\ \Pi_1(x + 2iL') = +F\Pi_1(x). \end{cases}$$

Соотношения (F) и (H) приводят непосредственно к следующему важному заключению: функции $\Phi\,(x)$, $\Pi\,(x)$, $\Phi_1\,(x)$, $\Pi_1\,(x)$ удовлетворяют условиям, определяющим $\Theta\,(x)$, $\mathrm{H}\,(x)$, $\Theta_1\,(x)$, $\mathrm{H}_1\,(x)$, если заменим в них K и K' на L и L'.

Следовательно, положив $Q = e^{\frac{-\pi L'}{L}}$, имеем разложения:

$$\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = A\,(1 - 2Q\cos 2x + 2Q^4\cos 4x\,\ldots)$$

$$\Pi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = B\,(2\sqrt[4]{Q}\sin x - 2\sqrt[4]{Q^9}\sin 3x + \ldots)$$

$$\Phi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = A_1(1 + 2Q\cos 2x + 2Q^4\cos 4x + \ldots)$$

$$\Pi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = B_1(2\sqrt[4]{Q}\cos x + 2\sqrt[4]{Q^9}\cos 3x + \ldots),$$

в которых A, B, A_1, C_1 постоянные.

Добавим, что с помощью уравнений (E) и (G) эти четыре постоянные могут быть сведены к одной.

Действительно, из равенств:

$$\Phi\,(x + L) = \alpha\Phi_1\,(x); \quad \Pi\,(x + L) = \beta\Pi_1\,(x)$$

получаем сначала условия:

$$A = \alpha A_1; \quad B = \beta B_1.$$

Применим затем одно из уравнений (G), например первое:

$$\Phi\,(x + iL') = \alpha' E\Pi\,(x);$$

оно дает, если заменим функции их разложениями в ряд:

$$A\left[1 - 2Q\cos\frac{\pi(x + iL')}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi(x + iL')}{L} - \ldots\right] =$$

$$= \alpha' BE\left[2\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi x}{2L} + 2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi x}{2L} + \ldots\right];$$

в правой части легко обнаружить член, не зависящий от переменной. В самом деле, имея в виду значение E, получаем:

$$2E\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi x}{2L}=e^{-\frac{i\pi x}{2L}}\,\frac{e^{\frac{i\pi x}{2L}}-e^{-\frac{i\pi x}{2L}}}{i}=\frac{1-e^{-\frac{i\pi x}{L}}}{i}$$

и приходим к равенству:

$$A=\frac{\alpha' B}{i}.$$

Получаем, следовательно, присоединяя его к двум предыдущим:

$$A=\alpha A_1,$$

$$B=\frac{i\alpha}{\alpha'}A_1,$$

$$B_1=\frac{i\alpha}{\alpha'\beta}A_1,$$

и принимая во внимание значения α, α', β:

$$A=e^{\frac{ib\pi}{4}}A_1,$$

$$B=e^{\frac{i(b-c)\pi}{4}}A_1,$$

$$B_1=e^{-\frac{ic\pi}{4}}A_1.$$

Установив это, рассмотрим выражение модуля в функции от q:

$$\sqrt{k}=\frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+\ldots}{1+2q+2q^4};$$

предыдущие соотношения:

$$\Pi_1(x)=e^{\frac{i\pi bx^2}{4KL}}\mathrm{H}_1(x),$$

$$\Phi_1(x)=e^{\frac{i\pi bx^2}{4KL}}\Theta_1(x),$$

позволяют написать:

$$\sqrt{k}=\frac{\Pi_1(0)}{\Phi_1(0)}=e^{-\frac{ic\pi}{4}}\,\frac{2\sqrt[4]{Q}+2\sqrt[4]{Q^9}+\ldots}{1+2Q+2Q^4+\ldots}.$$

Также находим:

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-\ldots}{1+2q+2q^4-\ldots}=e^{\frac{ib\pi}{4}}\,\frac{1-2Q+2Q^4+\ldots}{1+2Q+2Q^4+\ldots}.$$

Для большей ясности положим:

$$\sqrt{l}=\frac{2\sqrt[4]{Q}+2\sqrt[4]{Q^9}+\ldots}{1+2Q+2Q^4+\ldots},$$

$$\sqrt{l'}=\frac{1-2Q+2Q^4-\ldots}{1+2Q+2Q^4+\ldots}.$$

Эти количества получаются из $\sqrt{k}$ и $\sqrt{k'}$ при замене q на Θ или после подстановки L и L' на места K и K'. Предыдущие соотношения дают:

$$\sqrt{l}=e^{+\frac{ic\pi}{4}}\sqrt{k},$$

$$\sqrt{l'}=e^{-\frac{ib\pi}{4}}\sqrt{k'};$$

так как целые b и c четные, то возвышая в четвертую степень, имеем: $l^2=k^2$.

После модуля рассмотрим функции $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ сначала в виде:

$$\operatorname{sn}\frac{2Lx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k'}}\frac{\Pi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}{\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{B}{A}\cdot\frac{2\sqrt[4]{Q}\sin x-2\sqrt{Q^9}\sin 3x+\ldots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\ldots}$$

$$\operatorname{cn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\Pi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}{\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{B_1}{A}\frac{2\sqrt[4]{Q}\cos x+2\sqrt[4]{Q^9}\cos 3x+\ldots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\ldots}$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{k}\frac{\Phi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}{\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}=\sqrt{k}\frac{A_1}{A}\frac{1+2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\ldots}{1-2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\ldots}.$$

Так как:

$$\frac{B}{A}=e^{-\frac{ic\pi}{4}},\quad \frac{B_1}{A}=e^{-\frac{i(b+c)\pi}{4}},\quad \frac{A_1}{A}=e^{-\frac{ib\pi}{4}},$$

то эти выражения непосредственно принимают следующий новый вид:

$$\operatorname{sn}\frac{2Lx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{l}}\frac{2\sqrt[4]{Q}\sin x-2\sqrt[4]{Q^9}\sin 3x+\ldots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\ldots}$$

$$\operatorname{cn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\frac{2\sqrt[4]{Q}\cos x+2\sqrt[4]{Q^9}\cos 3x+\ldots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\ldots}$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{l}\frac{1+2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\ldots}{1-2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\ldots}.$$

Таким образом, мы видим, что, если подставить L и L' вместо K и K', то $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ остаются теми же как функции от квадрата модуля.

Полученные нами результаты позволяют перейти к той части теории эллиптических функций, в которой мы рассматриваем как переменный элемент частное периодов $\frac{iK'}{K}$.

Изложение этого чрезвычайно важного вопроса можно найти в прекрасном и серьезном мемуаре Дедекинда, напечатанном в Crelles Journal, т, 83, стр. 265 (Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul Functionen), а здесь мы ограничимся выводом из предшествующего обращения эллиптического интеграла в случае, когда модуль, предположенный раньше вещественным и меньшим единицы, имеет любое мнимое значение. Основываемся для этого на следующей важной теореме Римана, по которой при таком значении модуля: $k^2 = a + ib$ вещественная часть отношения $\frac{K'}{K}$ всегда положительна. Это, как мы сейчас увидим, легко доказывается.

Полагаем сперва, пользуясь для большего удобства формами Лежандра:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi}}$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}},$$

где оба интеграла предполагаются прямолинейными.

Пусть еще K_0 мнимое, сопряженное с K, т. е.

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi}};$$

рассматриваем произведение $K_0 K'$, записав его в виде двойного интеграла, а именно:

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{[1-(1-a-ib)\sin^2\varphi]\,[1-(a-ib)\sin^2\psi]}}$$

и полагаем:

$$\sqrt{[1-(1-a-ib)\sin^2\varphi]\,[1-(a-ib)\sin^2\psi]} = X + ibY.$$

Возводя в квадрат и сравнивая коэфициенты при i, получаем:

$$[1-(1-a)\sin^2\varphi]\sin^2\psi + (1-a\sin^2\psi)\sin^2\varphi = 2XY,$$

или

$$\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi = 2XY;$$

таким образом, произведение XY всегда положительно и равно нулю только тогда, когда одновременно $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Но в этом случае обращается в нуль множитель Y, тогда как X имеет начальным значением начальное значение произведения радикалов, которое равно положительной единице. Отсюда заключаем, что если углы φ и ψ возрастают от нуля до $\frac{\pi}{2}$, то X никогда не равен нулю и сохраняет свой знак, оставаясь положительным. Таким образом, достаточно написать:

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{X + ibY} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X d\varphi\, d\psi}{X^2 + b^2 Y^2} - ib \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Y d\varphi\, d\psi}{X^2 + b^2 Y^2},$$

чтобы убедиться, что вещественная часть произведения $K_0 K'$, а следовательно и $\frac{K' K_0}{K K_0} = \frac{K'}{K}$, действительно положительна.

Если положить, что $b = 0$ и a больше единицы или отрицательное, то одно из количеств K и K' будет вещественным и положительным, другое же мнимым. В первом случае, например, радикал $\sqrt{1 - a \sin^2 \varphi}$ переходит от вещественного значения к мнимому, обращаясь в нуль при некотором угле $\varphi = \varphi_0$, следовательно K мнимое, но вещественная часть его, выраженная интегралом $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a \sin^2 \varphi}}$ существенно положительна; таким образом, частное $\frac{K'}{K}$ имеет вещественную часть также положительной. Таким же образом легко убедиться, что теорема Римана остается справедливой, когда мы считаем a отрицательным.

Заметим еще, что, положив:

$$\sqrt{1 - (a + ib) \sin^2 \varphi} = U - ibV,$$

получаем условие:

$$\sin^2 \varphi = 2UV,$$

откуда следует, что U и V всегда положительны, когда φ изменяется от нуля до $\frac{\pi}{2}$. Имея, следовательно:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{U - ibV} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{U d\varphi}{U^2 + b^2 V^2} + ib \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{V d\varphi}{U^2 + b^2 V^2},$$

мы видим, что вещественная часть K положительна и, что коэфициент при i имеет знак b.

Таким же образом убеждаемся, что у K' вещественная часть положительна, тогда как коэфициент при i имеет знак, обратный b.

Теорема Римана показывает, что для некоторого мнимого значения модуля мы можем образовать, пользуясь определенными интегралами K и K', систему четырех функций $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$. Полагаем:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\sqrt{\lambda'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}$$

и рассматриваем выражения:

$$U=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

$$V=\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\ \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$W=\sqrt{\lambda'}\ \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Обозначив через ω значение D_xU при $x=0$, т. е. положив:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ \frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(0)}=\frac{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)},$$

мы имеем, как было установлено раньше, соотношения:

$$D_xu=\omega VW$$
$$D_xV=-\omega UW$$
$$D_xW=-\lambda^2\omega UV.$$

Выше мы видели, что отношение $\frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}$ приобретает множитель равный корню четвертой степени из единицы, если количество k^2 описывает некоторый контур, меняющий K и K' на L и L'. Четвертая степень его, следовательно, однозначная функция, и мы знаем, что эта функция совпадает с k^2 на всем протяжении вещественных значений от $k=0$ до $k=1$. Мы можем, следовательно, заключить согласно теореме Римана, доказательство которой было дано на стр. 142, что равенство $\lambda^2=k^2$ имеет место на всем протяжении плоскости.

Перейдем к постоянной, обозначенной через ω и равной единице, когда мы полагаем k^2 вещественным и <1. Докажем также, что условие $\omega=1$ справедливо для всякого значения k^2, как вещественного, так и мнимого.

В самом деле, возвратимся к установленному соотношению:

$$\operatorname{sn} x=\frac{1}{\sqrt{k}}\ \frac{2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2K}-2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K}+\ldots}{1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\cos\frac{2\pi x}{K}+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{l}}\ \frac{2\sqrt{Q}\sin\frac{\pi x}{2L}-2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi x}{2L}+\ldots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{2L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\ldots};$$

разделив обе его части на x и положив $x=0$, заключаем, что ω не изменится при замене K и K' на L и L'. Таким образом, это количество также как и λ^2, однозначная функция, принимающая то же самое значение, когда k^2 описывает некоторый замкнутый контур, следовательно, условие $\omega=1$ распространяется на всю плоскость.

Мы закончим то, что мы имели в виду изложить из теории эллиптических функций, применив теорему Миттаг-Леффлера к функциям $Z(x)$, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, из которых первая играет роль простого элемента в общем выражении двояко-периодических функций первого рода. Напомним, что обозначая через a и b периоды и положив затем $Q=e^{\frac{i\pi b}{a}}$ и

$$\chi(x)=\sum Q^{m^2} e^{\frac{2im\pi x}{a}}$$

$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

имеем:

$$Z(x)=\frac{\chi'\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)}{\chi\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)}.$$

Мы знаем также, что полюсы этой функции равны $p=ma+nb$, где m и n — любые целые числа, а соответствующие им вычеты все равны единице. Отсюда следует, что согласно с общей формулой (см. стр. 131), эта теорема дает следующее выражение:

$$Z(x)=G(x)+\frac{1}{x}+\sum\left[\frac{1}{x-p}+\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}+\ldots+\frac{x^{\nu-1}}{p^{\nu}}\right],$$

где $G(x)$ обозначает голоморфную функцию и ν — целое число, которое должно определяться из условия, по которому ряд правой части сходящийся. Так как числа m и n должны принимать всевозможные значения, кроме одновременного сочетания $m=0$, $n=0$, которому соответствует член $\frac{1}{x}$, стоящий отдельно, то мы приходим к двойному ряду, и наша задача, как мы сейчас увидим, решается весьма просто.

Заметим относительно общей формулы Миттаг-Леффлера:

$$f(x)=G(x)+\sum\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)-F_n(x)\right],$$

что в том случае, когда степени ν полиномов $F_n(x)$ одинаковы во всех членах, то эти полиномы обращаются в нуль в выражении производной порядка $\nu+1$ функции $f(x)$, и тогда ряд $\sum D_x^{\nu+1} G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ непременно сходящийся; так как производные порядка ν выражения $\frac{1}{x-p}$ равны $\frac{1}{(x-p)^{\nu+1}}$, если пренебречь постоянным множителем, можно показать, что сходимость ряда обеспечена, если принять $\nu=2$. Воспользуемся для этого остроумным рассуждением, примененным Хальфеном в своем трактате о эллиптических функциях (т. 1, стр. 359). Заметим, что для бесконечных значений m и n, или даже если только одно из них бесконечно, предел отношения $\frac{\operatorname{Mod}(x-p)}{\operatorname{Mod} p}$ равен единице. Мы можем, следовательно, заменить общий член $\frac{1}{(x-p)^3}$ его асимптотическим значением $\frac{1}{p^3}$, и нам достаточно доказать сходимость более простого ряда: $S=\sum\frac{1}{\operatorname{mod}^3 p}$. Сходимость его очевидна, если мы положим $m=0$ или $n=0$, так как при этом:

$$S\operatorname{mod}^3 b=\sum\frac{1}{n^3} \quad \text{или} \quad S\operatorname{mod}^3 a=\sum\frac{1}{m^3};$$

допустим в общем случае, что m и n оба не равны нулю.

Кроме того, мы можем положить, что оба эти числа положительны; рассматриваемая сумма составляется в действительности из четырех рядов, соответствующих системам значений:

$$\begin{array}{rr} m, & n, \\ m, & -n, \\ -m, & n, \\ -m, & -n, \end{array}$$

которые превращаются в одну при изменении знаков a или b. Установив это, рассмотрим эллипс, заданный уравнением:

$$\operatorname{mod}^2(ax+by)=1$$

и обозначим через A его большую ось. Для всех значений x и y, определяющих точку кривой, мы можем написать:

$$x^2+y^2<A^2$$

или, так как в этой точке мы имеем: $\operatorname{mod}^2(ax+by)=1$:

$$x^2+y^2<A^2\operatorname{mod}^2(ax+by).$$

Это соотношение, однородное относительно переменных x и y, останется справедливым и тогда, когда мы умножим их на произвольного множителя. Таким образом, оно имеет место, каковы бы ни были значения x и y; напишем его в следующем виде:

$$\frac{1}{\operatorname{mod}(ax+by)}<\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Установив это, рассмотрим двойной интеграл:

$$J=\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

простое обобщение хорошо известной теоремы Коши о рядах с положительными членами позволяет видеть, что двойной ряд сходится, если это количество имеет конечное значение. Последнее же имеет место, так как

$$\int_1^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

и, следовательно:

$$J = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) dx = 2 - \sqrt{2}.$$

Установив это, напишем соотношение:

$$D_x^2 Z(x) = G(x) + \sum \frac{2}{(x-p)^3}, \quad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots),$$

в котором $G(x)$ — голоморфная функция, подлежащая определению.

Заметим для этого, что сумма $\sum \frac{1}{(x-p)^3}$ представляет аналитическую функцию, допускающую периоды a и b. Изменение x на $x+a$ и на $x+b$ в действительности равносильно замене m на $m-1$ и n на $n-1$, что мы можем сделать, не изменяя значения суммы ряда, в котором суммирование распространяется на все целые значения m и n. Но нам известно, что справедлива зависимость:

$$Z(x+a) = Z(x), \qquad Z(x+b) = Z(x) - \frac{i\pi}{a};$$

следовательно, вторая производная от функции $Z(x)$ двояко-периодическая, так же значит и функция $G(x)$, которая вследствие этого постоянная.

Кроме того, мы утверждаем, что эта постоянная равна нулю. В самом деле, сумма $\sum \frac{1}{(x-p)^3}$, как и вторая производная от $Z(x)$, нечетная функция; это, именно, показывает равенство:

$$\sum \frac{1}{(x-p)^3} = \sum \frac{1}{(x+p)^3},$$

вытекающее при замене m и n на $-m$ и $-n$. Получив таким образом соотношение:

$$D_x^2 Z(x) = \sum \frac{2}{(x-p)^3},$$

мы найдем двойным интегрированием искомое выражение функции $Z(x)$. Выделим для этого в правой части член, соответствующий $m=0$, $n=0$; пишем:

$$D_x^2 Z(x) = \frac{2}{x^3} + \sum \frac{2}{(x-p)^3}$$

и замечаем, что новый ряд в правой части представляет, как и предыдущий, нечетную функцию. Мы получим, следовательно, еще одну нечетную функцию, проинтегрировав дважды, начиная от предела $x=0$, что и даст нам с одной неизвестной постоянной A то выражение, которое требовалось получить:

$$Z(x)=Ax+\frac{1}{x}+\sum\left[\frac{1}{x-p}+\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}\right].$$

Следует заметить, что общий член ряда $\frac{1}{x-p}+\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}$ имеет вид, вытекающий из теоремы Миттаг-Леффлера; очевидно также, что он приводится к $\frac{x^2}{p^2(x-p)}$ и асимптотическое значение его равно $\frac{-x^2}{p^3}$, что доказывает a postériori сходимость ряда. Определим, наконец, A из уравнения:

$$D_xZ(x)=A-\frac{1}{x^2}-\sum\left[\frac{1}{(x-p)^2}-\frac{1}{p^2}\right];$$

оно показывает, что эта постоянная является пределом выражения:

$$D_xZ(x)+\frac{1}{x^2} \quad \text{или} \quad D_x\left[Z(x)-\frac{1}{x}\right] \text{ при } x=0;$$

покажем, как его найти.

Возвращаясь к обозначениям Якоби, полагаем сначала $a=2K$, $b=2iK'$; имеем $\chi(x)=\Theta_1(x)$ и, следовательно:

$$Z(x)=\frac{\Theta_1'(x-K-iK')}{\Theta_1(x-K-iK')}=$$

$$=\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}+\frac{i\pi}{2K}.$$

Воспользуемся затем двумя первыми членами разложения $\mathrm{H}(x)$, расположенного по возрастающим степеням x; выражение:

$$\mathrm{H}(x)=x\mathrm{H}'(0)+\frac{x^3}{6}\mathrm{H}'''(0)+\ldots-$$

легко дает:

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}=\frac{1}{x}+\frac{x\mathrm{H}'''(0)}{3\mathrm{H}'(0)}+\ldots-,$$

откуда:

$$D_x\left[\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}-\frac{1}{x}\right]\doteq\frac{\mathrm{H}'''(0)}{3\mathrm{H}'(0)}+\ldots.$$

Имеем, следовательно, согласно формуле, доказанной на стр. 320:

$$A=\frac{\mathrm{H}'''(0)}{3\mathrm{H}'(0)}=\zeta-\frac{1+k^2}{3}.$$

Полученное выше равенство

$$Z(x)=\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}+\frac{i\pi}{2K}$$

приводит к важному следствию; заменим в соотношении Якоби:

$$k^2 \operatorname{sn}^2 x=\zeta-D_x\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

x на $x+iK'$; получаем:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}=\zeta-D_x\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)},$$

откуда мы находим соотношение, которым мы вскоре воспользуемся:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}=\zeta-D_x Z(x).$$

Перейдем теперь к функциям $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$; они имеют одинаковые полюса, данные равенствами: $p_1=2mK+(2n+1)iK'$, в которых m и n — любые целые числа; из равенств:

$$\operatorname{sn}(p_1+x)=\frac{(-1)^m}{k\operatorname{sn} x},$$

$$\operatorname{cn}(p_1+x)=\frac{(-1)^{m+n}\, dn\, x}{i\operatorname{sn} x}$$

$$\operatorname{dn}(p_1+x)=\frac{(-1)^n \operatorname{cn} x}{i\operatorname{sn} x}$$

следует, что вычеты, соответствующие p_1 равны,

$$\frac{(-1)^m}{k},\quad \frac{(-1)^{m+n}}{i}\quad \text{и}\quad \frac{(-1)^n}{i}.$$

Следовательно, обозначив через $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ голоморфные функции, имеем формулы:

$$D_x^2(k\operatorname{sn} x)=G_1(x)+\sum\frac{2(-1)^m}{(x-p_1)^3}$$

$$D_x^2(i\operatorname{cn} x)=G_2(x)+\sum\frac{2(-1)^{m+n}}{(x-p_1)^3}$$

$$D_x^2(i\operatorname{dn} x)=G_3(x)+\sum\frac{2(-1)^n}{(x-p_1)^3}.$$

Установив это, заметим, что все три ряда являются двояко-периодическими функциями второго рода, имеющими соответственно те же множители, как и $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$.

Рассмотрим, например, первый $\sum\frac{(-1)^m}{(x-p_1)^3}$; изменение x на $x+2K$ и $x+2iK'$ сводится к замене m на $m-1$ и n на $n-1$, что мы имеем право сделать, так как сумма распространяется на все целые m и n. В первом случае ряд повторяется за исключением знака, благодаря множителю $(-1)^m$, тогда как во втором случае он имеет то же значение; это дает условия:

$$G_1(x+2K) = -G_1(x), \qquad G_1(x+2iK') = G_1(x);$$

таким же образом, мы докажем равенства:

$$G_2(x+2K) = -G_2(x), \qquad G_2(x+2iK') = -G_2(x),$$
$$G_3(x+2K) = +G_3(x), \qquad G_3(x+2iK') = -G_3(x).$$

Из общего выражения функций второго рода, полученного на стр. 299 вытекает, что они существуют постольку, поскольку они допускают полюса; следовательно, эти три функции равны нулю и мы имеем просто:

$$D_x^2(k\,\mathrm{sn}\,x) = \sum \frac{2(-1)^m}{(x-p_1)^3},$$
$$D_x^2(i\,\mathrm{cn}\,x) = \sum \frac{2(-1)^{m+n}}{(x-p_1)^3},$$
$$D_x^2(i\,\mathrm{dn}\,x) = \sum \frac{2(-1)^n}{(x-p_1)^3}.$$

Отсюда получаем, проинтегрировав первый раз от $x=0$:

$$k\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x = k - \sum(-1)^m\left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right],$$
$$i\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x = \sum(-1)^{m+n}\left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right],$$
$$ik^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x = \sum(-1)^n\left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right].$$

Затем, интегрируя второй раз, начиная от того же предела:

$$\mathrm{sn}\,x = x + \frac{1}{k}\sum(-1)^m\left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_1^2}\right],$$
$$\mathrm{cn}\,x = 1 + \frac{1}{i}\sum(-1)^{m+n}\left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_1^2}\right],$$
$$\mathrm{dn}\,x = 1 + \frac{1}{ik^2}\sum(-1)^n\left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_1^2}\right].$$

Небольшие изменения в примененном приеме приводят к другим выражениям. Интегрируя вторую производную от $\mathrm{sn}\,x$, начиная от $x=-K$, находим, положив: $p_2 = (2m+1)K + (2n+1)iK'$,

$$k\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x = \sum(-1)^m\left[\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{(x-p_1)^2}\right],$$

и новое интегрирование от $x=0$ дает:

$$k \operatorname{sn} x = \sum (-1)^m \left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_2^2}\right].$$

Не задерживаясь на этом, упомянем еще формулы:

$$k^2 \operatorname{sn}^2 x = \sum \left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right]$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1+k^2}{3} = \frac{1}{x^2} + \sum \left[\frac{1}{(x-p)^2} - \frac{1}{p^2}\right].$$

Вторая будет следствием доказанного выше соотношения:

$$D_x Z(x) = A - \frac{1}{x^2} - \sum \left[\frac{1}{(x-p)^2} - \frac{1}{p^2}\right],$$

если в нем положить:

$$a = 2K, \qquad b = 2iK'.$$

В самом деле, имеем, как мы видели:

$$A = \zeta - \frac{1+k^2}{3}, \qquad p = 2mK + 2nK'.$$

Затем, как было доказано на стр. 339,

$$D_x Z(x) = \zeta - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x},$$

и отсюда непосредственно получаем выражение функции $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1+k^2}{3}$; оно приводит к следующему важному замечанию. Заменим в общем члене ряда целые m и n на n и $-m$ и подставим одновременно ix вместо x. Выражение:

$$\frac{1}{(x-2mK-2niK')^2} - \frac{1}{(2mK+2niK')^2}$$

становится равным:

$$-\frac{1}{(x-2mK'-2niK)^2} + \frac{1}{(2mK'+2niK)^2}$$

и воспроизводит, за исключением знака, то выражение, в котором мы поменяли местами K и K'. Замена K на K' равносильна замене модуля k его дополнением k', и таким образом доказано, что функция $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1+k^2}{3}$ обладает замечательным свойством менять только знак, если заменить в ней x на ix и k на k'.

Приведем, наконец, общее выражение двояко-периодических функций первого рода $F(x)$, которое вытекает из теоремы Миттаг-Леффлера. Оно является следствием соотношения:

$$\mathrm{F}(x) = C + \sum [RZ(x-a) + R_1 D_x Z(x-a) + \ldots + R_n D_x^n Z(x-a)],$$

в котором суммирование распространяется на все полюса, лежащие внутри параллелограмма периодов, и коэфициенты R, R_1, ... R_n определяются, как мы видели, из главной части разложения функции $F(a+h)$, расположенного по степеням h:

$$Rh^{-1} + R_1 D_h h^{-1} + \ldots + R_n D_h^n h^{-1}.$$

Заметим, что можно написать:

$$F(x) = C + F_0(x) + D_x F_1 + \ldots D_x^n F_n(x),$$

где различные функции, которые мы включили в последовательные производные:

$$F(x) = \sum RZ(x-a)$$
$$F_1(x) = \sum R_1 Z(x-a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n(x) = \sum R_n Z(x-a),$$

имеют только простые полюсы. Рассмотрим одну из них $F_k(x)$ и введем следующую рациональную дробь:

$$f_k(x) = \sum \frac{R_k}{x},$$

так же как и постоянные:

$$S_k = \sum R_k, \qquad S_k' = \sum R_k a.$$

Проделав несложные вычисления, исходя от формулы:

$$Z(x) = Ax + \frac{1}{x} + \sum \left[\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\right],$$

получаем:

$$F_k(x) = A \sum R_k (x-a) + f_k(x) + \sum \left[f_k(x-p) + \frac{S_k}{p} + \frac{S_k x - S_k'}{p^2}\right],$$

откуда выводим:

$$D_x^k F_k(x) = D_x^k f_k(x) + \sum D_x^k f(x-p),$$

замечая, что члены, содержащие первую степень x, исчезают при k равном или большем 2. Положив же $k=1$, имеем:

$$D_x F_1(x) = AS_1 + D_x f_1(x) + \sum \left[D_x f_1(x-p) + \frac{S_1}{p^2}\right];$$

для случая $k=0$ характерное условие $\sum R=0$ даст:

$$F_0(x)=-AS_0'+f_0(x)+\sum\left[f_0(x-p)-\frac{S_0'}{p^2}\right].$$

Наконец пусть:

$$f(x)=f_0(x)+D_xf_1(x)+\ \ldots\ +D_x^nf_n(x);$$

мы получаем при помощи этой рациональной функции и постоянных:

$$G=C-A(S_0'-S_1),\qquad \mathrm{H}=S_0'-S_1,$$

весьма простое выражение:

$$F(x)=G+f(x)+\sum\left[f(x-p)-\frac{\mathrm{H}}{p^2}\right],$$

в котором $p=ma+nb$ и суммирование распространено на все целые значения m и n, за исключением $m=0$, $n=0$. Это выражение показывает, что двояко-периодическая функция аналогична всякой рациональной функции, удовлетворяющей условию, что сумма ее вычетов равна нулю.

ДОБАВЛЕНИЯ.

О преобразовании эллиптических функций. — Преобразование первого порядка; характерное свойство функции $p(x)$. — Два метода для общего случая, из которых первый основан на разложении на простые элементы, а другой на исследовании функций

$$\Theta(x),\quad \mathrm{H}(x),\quad \Theta_1(x),\quad \mathrm{H}_1(x).$$

Пусть

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}}\quad \text{и}\quad L'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-l'^2\sin^2\varphi}}$$

такие же выражения, как и K, K', но с другим модулем l и его дополнением $l'=\sqrt{1-l^2}$. Можно определить этот модуль и постоянную M таким образом, что функции $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ будут иметь периодами $2K$ и $2iK'$ и будут выражаться, следовательно, через двояко-периодические функции модуля k. Обозначим через a, b, c, d целые числа; достаточно иметь два соотношения:

$$\frac{K}{M}=aL+ibL'$$

$$\frac{iK'}{M}=cL+idL',$$

которые определят M и l как функции от k. Заметим, однако, что, так как коэфициент при i в частных $\frac{iK'}{K}$, $\frac{iL'}{L}$ должен быть положительным, необходимо, чтобы определитель $ad-bc$ был также положительным (см. стр. 332). Обозначим его через n, и рассматривая простейший случай, когда $n=1$, поставим задачей получить новым путем выражения $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, вводя в них вместо K и K' значения L и L'.

Для этого предположим, что b и c четные, a и d нечетные; из этих условий следует, что $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, которые являются функциями второго рода относительно периодов $2K$ и $2iK'$, имеют соответственно те же самые множители, что и $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Мы можем, следовательно, выразить их через величины, играющие роль простых элементов; для этого достаточно знать полюсы этих трех функций, лежащие внутри прямоугольника или параллелограмма периодов, которые для краткости мы будем называть впредь главными полюсами. Значения, одновременно обращающие функции в бесконечность, даются формулой

$$\frac{x}{M} = fL + igL',$$

где f предполагается четным и g — нечетным; если заменить ML и $ML'i$ их выражениями через K и K', положив $ML = dK - ibK'$, $iML = cK + iaK'$, то выйдет:

$$x = (df - cg)K + i(ag - bf)K'.$$

Заметим, что коэфициент при K число четное, а коэфициент при iK' — нечетное; таким образом, существует только один главный полюс $x = iK'$, принадлежащий каждому из простых элементов. Следовательно, мы можем написать:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = A \operatorname{sn} x$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = B \operatorname{cn} x$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = C \operatorname{dn} x,$$

где через A, B, C обозначены постоянные. Полагаем теперь в последних уравнениях $x = 0$ и, разделив обе части первого уравнения на x, находим:

$$A = \frac{1}{M}, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Положим затем в первом уравнении $x = K$, потом $x = K + iK$; для них имеем:

$$\frac{K}{M} = aL + ibL'$$

$$\frac{K + iK'}{M} = (a + c)L + i(b + d)L';$$

и, следовательно:

$$\operatorname{sn}(aL + ibL', l) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} = A$$

$$\operatorname{sn}[(a + c)L + i(b + d)L', l] = \frac{(-1)^{\frac{a+c-1}{2}}}{l} = \frac{A}{k}.$$

Отсюда получаем:

$$M = (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \qquad l = (-1)^{\frac{c}{2}} k.$$

Полагаем, наконец, в уравнении $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \operatorname{cn} x$, $x = K$; так как $M = \pm 1$, то мы получаем новое следствие:

$$\operatorname{cn}(aL + ibL',\ l) = \frac{(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}}{l'} = \frac{1}{k'}$$

т. е.

$$l' = (-1)^{\frac{a+b-1}{2}} k'.$$

Из только что доказанного следует, что если мы положим:

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} K = aL + ibL'; \qquad (-1)^{\frac{a-1}{2}} iK' = cL + idL'$$

или

$$L = (-1)^{\frac{a-1}{2}} (dK - ibK'); \qquad iL' = (-1)^{\frac{a-1}{2}} (-cK + iaK'),$$

то, если $f(x, K, iK')$ одна из трех функций $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, мы будем иметь соотношение:

$$f(x, K, iK') = f(x, L, iL').$$

Этот результат мы получили пользуясь функциями Якоби; в самом деле, равенство $ad - bc = 1$, где b и c четные, дает $ad \equiv 1$ и, следовательно, $a \equiv d, \bmod 4$; отсюда следует, что коэфициенты

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} d \text{ и } (-1)^{\frac{a-1}{2}} a$$

оба $\equiv 1 \bmod 4$, как мы это допустили выше (стр. 326).

Чтобы освоиться с этими исследованиями, которые служат основой теории преобразования, рассмотрим два важных частных примера прежде чем перейти к более общим вопросам. Приводим первый.

Исходим от уравнений:

$$\frac{K}{M} = L + iL'; \qquad \frac{iK'}{M} = iL',$$

которые всегда принадлежат к случаю $ad - bc = 1$; множители функций

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \qquad \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

будут тогда множителями $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$.

Заметим далее, что если полюсы заданы формулой:

$$x = f \cdot (K - iK') + igK',$$

то существует, как и раньше, только один главный полюс $x = iK'$. Следовательно, обозначив через A, B, C постоянные, имеем:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = A \operatorname{sn} x$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = B \operatorname{dn} x$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = C \operatorname{cn} x,$$

и положив $x=0$, получаем:

$$A=\frac{1}{M}, \qquad B=1, \qquad C=1.$$

Положив затем в первом равенстве $x=K$, потом $x=K+iK'$, что дает:

$$\frac{K}{M}=L+iL' \quad \text{и} \quad \frac{K+iK'}{M}=L+2iL',$$

таким образом находим:

$$\frac{1}{l}=A; \qquad 1=\frac{A}{k}.$$

Отсюда следует, что:

$$l=\frac{1}{k}; \qquad M=\frac{1}{k}; \qquad A=k$$

и, следовательно, имеем соотношения:

$$\operatorname{sn}\left(kx, \frac{1}{k}\right)=k\operatorname{sn}x; \quad \operatorname{cn}\left(kx, \frac{1}{k}\right)=\operatorname{dn}x; \quad \operatorname{dn}\left(kx, \frac{1}{k}\right)=\operatorname{cn}x.$$

Пусть, далее:

$$\frac{K'}{M}=-iL'; \qquad \frac{iK'}{M}=L,$$

тогда формула, дающая полюсы, принимает вид:

$$x=-gK+ifK'$$

и так как f четное и g нечетное, имеем для главного полюса значение $x=K$. Множители функций:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

равны множителям функций $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$ и $\operatorname{dn}x$; мы приходим к следующим соотношениям:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)=A\operatorname{dn}(x-K+iK')$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)=B\operatorname{cn}(x-K+iK')$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)=C\operatorname{sn}(x-K+iK').$$

Изменяя постоянные и имея в виду формулы на стр. 309, эти соотношения можно привести к виду:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)=\frac{A\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)=\frac{B}{\operatorname{cn} x}$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)=\frac{C \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x};$$

положив $x=0$, имеем:

$$A=\frac{1}{M}, \quad B=1, \quad C=1.$$

Положим затем в первом равенстве $x=iK'$ и $x=K+iK'$, получим:

$$\operatorname{sn}(L, l)=1=iA$$

$$\operatorname{sn}(L+iL', l)=\frac{1}{l}=\frac{iA}{k'},$$

отсюда заключаем, что:

$$l=k', \quad M=i, \quad A=\frac{1}{i}$$

и приходим к следующим результатам большого значения:

$$\operatorname{sn}(ix, k')=\frac{i \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}$$

$$\operatorname{cn}(ix, k')=\frac{1}{\operatorname{cn} x}$$

$$\operatorname{dn}(ix, k')=\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}.$$

Заметим, что первое соотношение может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(ix, k')}+\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}=1,$$

откуда легко получаем равенство:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(ix, k')}-\frac{1+k'^2}{3}=-\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}-\frac{1+k^2}{3}\right),$$

которое мы вывели совершенно иным путем на стр. 341.

Положим, следуя Вейерштрассу:

$$p(x, k)=\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}-\frac{1+k^2}{3};$$

имеем следующие характерные условия:

$$p(ix, k')=-p(x, k)$$

$$p\left(kx, \frac{1}{k}\right)=k^2 p(x, k),$$

которые служат причиной, почему это вновь введенное выражение имеет такое значение. Укажем на прекрасную работу Халфена (Halfen, Traité des fonctions élliptiques et de leurs application), в которой доказывается, что введение функции p, как необходимого аналитического элемента, оправдывается большими ее преимуществами во многих чрезвычайно важных вопросах; здесь же мы ограничимся указанием на простое следствие ее введения, обусловленное наличием ряда:

$$p(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1-k^2+k^4}{15}x^2+\frac{2-3k^2-3k^4+2k^6}{189}x^4+$$
$$+\frac{2(1-k^2+k^4)^2}{675}x^6+\ldots$$

Обозначим через $\Phi(k^2)$ коэфициент при степени x^{2n+2}; он должен удовлетворять двум уравнениям:

$$k^{2n}\Phi\left(\frac{1}{k^2}\right)=\Phi(k^2)$$
$$\Phi(1-k^2)=(-1)^n\Phi(k^2).$$

Первое уравнение указывает, что $\Phi(k^2)$ — возвратный полином степени n относительно k^2; рассматривая затем второе уравнение, различаем два случая, в зависимости от того четное или нечетное n. Заметим, что при втором предположении имеем:

$$\Phi(1-k^2)=-\Phi(k^2),$$

откуда заключаем, что уравнение $\Phi(k^2)=0$ удовлетворяется при $k^2=\frac{1}{2}$; кроме того, будучи возвратным, оно допускает корень $k^2=2$ и, наконец, решение $k^2=-1$, так как, по предположению, уравнение нечетной степени.

Положим

$$\varphi(k^2)=(1-2k^2)(2-k^2)(1+k^2)=2-3k^2-3k^4+2k^6;$$

мы можем написать:

$$\Phi(k^2)=\varphi(k^2)\,\Phi_0(k^2),$$

обозначив через $\Phi_0(k^2)$ новый полином, для которого имеем:

$$\Phi_0(1-k^2)=\Phi_0(k^2),$$

так как $\varphi(k^2)$ меняет знак при замене k^2 на $1-k^2$. Таким образом, случай нечетного n приводит к случаю четного, который мы сейчас и рассмотрим.

Положим $n=2p$ и пусть A — произвольная постоянная; заметим, что поставленные условия сохраняются, если заменим $\Phi(k^2)-A(1-k^2+k^4)^p$ через $\Phi_1(k^2)$, т. е., положим:

$$\Phi(k^2)-A(1-k^2+k^4)^p=\Phi_1(k^2);$$

мы имеем снова:

$$k^{2n}\Phi_1\left(\frac{1}{k^2}\right)=\Phi_1(k^2),$$

$$\Phi_1(1-k^2)=\Phi_1(k^2).$$

Установив это, распорядимся произвольной постоянной A таким образом, чтобы $\Phi_1(k^2)$ имело корень $k^2=0$; из второго равенства следует, что можно одновременно допустить корень $k^2=1$, т. е. можно написать:

$$\Phi_1(k^2)=k^2(1-k^2)\Phi_2(k^2).$$

Для нового полинома находим условия:

$$k^{2n-6}\Phi_2\left(\frac{1}{k^2}\right)=-\Phi_2(k^2),$$

$$\Phi_2(1-k^2)=\Phi_2(k^2);$$

первое показывает, что $\Phi_2(k^2)$ обращается в нуль, если положить $k^2=1$, из второго же заключаем о наличии корня $k^2=0$. Следовательно, полином $\Phi_2(k^2)$ содержит множитель $k^2(1-k^2)$, и мы должны положить:

$$\Phi_1(k^2)=k^4(1-k^2)^2\Phi_3(k^2),$$

откуда получаем равенства:

$$k^{2n-12}\Phi_3\left(\frac{1}{k^2}\right)=\Phi_3(k^2),$$

$$\Phi_3(1-k^2)=\Phi_3(k^2).$$

Они указывают, что функция $\Phi_3(k^2)$ той же природы, как и $\Phi(k^2)$, но степени $n-6$ относительно k^2; таким образом, продолжая те же рассуждения, мы приходим постепенно к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\Phi(k^2)=A\ &(1-k^2+k^4)^p+\\ &+A_1(1-k^2+k^4)^{p-3}k^4(1-k^2)^2+\\ &+A_2(1-k^2+k^4)^{p-6}k^8(1-k^2)^4+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+A_r(1-k^2+k^4)^{p-3r}k^{4r}(1-k^2)^{2r},\end{aligned}$$

в котором r обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{p}{3}$.

Это и есть результат, который мы хотели получить; как частный случай, выводим из него тождество, которое полезно указать:

$$[(1-2k^2)(2-k^2)(1+k^2)]^2=4(1-k^2+k^4)^3-27k^4(1-k^2)^2.$$

Переходим теперь к более общему случаю теории преобразования; поставим задачей выразить функции:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},l\right),\quad \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},l\right),\quad \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},l\right)$$

через функции, относящиеся к модулю k, полагая, что в данных выше соотношениях:

$$\frac{K}{M} = aL + ibL'$$

$$\frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

определитель $ad - bc$ — любое нечетное число. В этом случае необходимо допустить, что ad и bc не одинаковой четности, что заставляет различать два случая, в зависимости от того, имеем ли мы $ad \equiv 1$ или $ad \equiv 0$, mod 2. Только при первом предположении функции:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

которые рассматриваются как функции второго рода относительно периодов $2K$ и $2iK'$, могут иметь те же множители, как и $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$; добавим, что условие, по которому a и d нечетные, — недостаточно. В самом деле, из равенств:

$$\begin{cases} \operatorname{sn}\left(\dfrac{x+2K}{M}, l\right) = -\operatorname{sn}\left(\dfrac{x}{M}, l\right) \\ \operatorname{sn}\left(\dfrac{x+2iK'}{M}, l\right) = (-1)^c \operatorname{sn}\left(\dfrac{x}{M}, l\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{cn}\left(\dfrac{x+2K}{M}, l\right) = -(-1)^b \operatorname{cn}\left(\dfrac{x}{M}, l\right) \\ \operatorname{cn}\left(\dfrac{x+2iK'}{M}, l\right) = -(-1)^c \operatorname{cn}\left(\dfrac{x}{M}, l\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{dn}\left(\dfrac{x+2K}{M}, l\right) = -(-1)^b \operatorname{dn}\left(\dfrac{x}{M}, l\right) \\ \operatorname{dn}\left(\dfrac{x+2iK'}{M}, l\right) = -\operatorname{dn}\left(\dfrac{x}{M}, l\right) \end{cases}$$

мы видим, что кроме того необходимо, чтобы b и c были четные. Особый случай, который мы сейчас будем рассматривать, характеризуется, следовательно, условиями:

$$a \equiv 1, \quad d \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad \text{mod } 2;$$

согласно выражениям, установленным для функций второго рода, мы получим следующие формулы:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum R \operatorname{sn}(x - p + iK'),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum S \operatorname{cn}(x - p + iK'),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum T \operatorname{dn}(x - p + iK'),$$

в которых суммы распространены по различным полюсам p, лежащим внутри параллелограмма периодов $2K$ и $2iK'$. Так как определение полюсов p является основным пунктом в рассматриваемом нами вопросе, то мы изложим его несколько подробнее.

Если обозначим через f и g целые числа, причем первое четное и второе нечетное, то полюсы всех трех функций определяются равенством:

$$\frac{p}{M}=fL+igL';$$

вводя K и K' вместо L и L', получим.

$$p=\frac{(df-cg)K}{n}+i\frac{(ag-bf)K'}{n}.$$

Это выражение не дает возможности непосредственно определить тех значений f и g, при которых коэфициенты $df-cg$ и $ag-bf$ отличаются только на четное кратное n. Для их определения дадим выражению иной вид; введем новые неизвестные ξ и ζ, полагая:

$$f=A\xi+B\zeta,$$
$$g=C\xi+D\zeta,$$

где A, B, C, D целые числа, выбранные таким образом, что $AD-BC=1$; покажем, как они определяются.

Положив $ad-bc=n$, обозначим через n' общий наибольший делитель c и d; замечая затем, что частные $\frac{c}{n'}$, $\frac{d}{n'}$ взаимно простые, определяем r и s так чтобы

$$\frac{d}{n'}r-\frac{c}{n'}s=1,$$

что дает

$$dr-cs=n'.$$

Пусть, наконец, $m=br-as$ и $n=n'n''$; утверждаем, что если положить:

$$A=r+\frac{\alpha c}{n'},\qquad B=4a+\beta c,$$

$$C=s+\frac{\alpha d}{n'},\qquad D=4b+\beta d,$$

то целые α и β можно определить таким образом, что $AD-BC=1$.

В самом деле мы имеем:

$$AD-BC=4(br-as)+\beta(dr-cs)+\frac{4\alpha(bc-ad)}{n'}=$$
$$=4m+\beta n'-4\alpha n'',$$

откуда получаем уравнение:

$$\beta n'-4\alpha n''=1-4m.$$

Очевидно, что ему всегда можно удовлетворить, когда делители n' и n'' числа n взаимно простые, а, следовательно, и в том случае, которым мы можем ограничиться, когда n не имеет кратных множителей.

Доказав это, ищем выражение для полюсов, которое получается в результате введения неизвестных ξ и ζ. Находим сначала:

$$p=\xi\frac{(Ad-Cc)K+i(Ca-Ab)K'}{n}+$$
$$+\zeta\frac{(Bd-Dc)K+i(Da-Bb)K'}{n};$$

простое вычисление дает затем:

$$Ad-Cc=n', \qquad Ca-Ab=\alpha n''-m,$$
$$Bd-Cc=4n, \qquad Da-Bb=\beta n$$

и новая формула принимает вид:

$$p=\xi\frac{n'K+i(\alpha n''-m)K'}{n}+\zeta(4K+i\beta K').$$

Прежде чем воспользоваться этой формулой, нам остается сделать еще одно замечание. Нами допущены условия, что $c\equiv 0$, $d\equiv 1$, $\mod 2$; равенства $dr-cs=n'$, $\beta n'-4\alpha n''=1-4m$ показывают, что r и s нечетные; имеем, следовательно: $A\equiv 1$, $B\equiv 0$, $D\equiv 1$, $\mod 2$.

Установив это, из равенства $f=A\xi+B\zeta$ заключаем, что если f четное, то ξ также четное; соотношение же $g=C\xi+D\zeta$ указывает, что ζ нечетное. Из найденного выражения p сами собой напрашиваются следующие следствия. Ясно, что достаточно задать одно значение ζ, например $\zeta=1$ и принять $\xi=0, 2, 4, \ldots 2n-2$, чтобы получить n полюсов, которые все различны. Действительно, в противном случае, считая, что ξ и ξ_1 меньше n, мы имели бы следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}\xi n'&\equiv\xi_1 n''\\ \xi(\alpha n''-m)&\equiv\xi_1(\alpha n'-m)\end{aligned}\right\}\mod n.$$

Из первого получаем $\xi_1=\xi+\lambda n'$, где λ меньше n'; второе же дает: $\lambda(\alpha n''-m)\equiv 0$, $\mod n'$, что невозможно, если $\alpha n''-m$ простое по отношению к n', как показывает равенство: $4(\alpha n''-m)=\beta n'-1$. Эти полюсы, однако, не должны обязательно находиться внутри параллелограмма периодов, и очевидно, совсем не является необходимым ставить такое ограничение. Рассмотрим, например, формулу:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\sum R\operatorname{sn}(x-p+iK');$$

подстановка вместо полюса p другого, эквивалентного ему, например $p+2K$ вызывает только изменение знака коэфициента R; постоянная R всегда определится, каково бы ни было принятое значение p, если положим $x=p+\varepsilon$ и сравним в обеих частях члены, содержащие $\frac{1}{\varepsilon}$.

Пользуясь этим замечанием, мы получаем достойные запоминания результаты, выведенные Якоби и изложенные в Fundamenta.

Возьмем для ξ произведение на 4 последовательности чисел, дающих систему вычетов по модулю n, и заменим значение $\zeta = 1$ на $\zeta = n'$. Положим, что $\xi = -4q$ и заметим, что $\gamma n' \equiv 1$, mod 4; теперь полюсы будут заданы выражениями:

$$p = -4q\frac{n'K + i(\alpha n'' - m)K'}{n} + iK',$$

в которых мы предполагаем, что $q = 0, 1, 2, \ldots n-1$. К этому значению присоединим также выражение, получаемое из равенства:

$$\frac{p}{M} = (A\xi + B\zeta)L + i(C\xi + D\zeta)L',$$

если в нем опустим члены, содержащие L и L' с коэфициентами кратными четырех. Пользуясь для этого соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} Bn' &= (4a + \beta c)n' \equiv c \\ Dn' &= (4b + \beta d)n' \equiv d \end{aligned}\right\} \bmod 4,$$

получим простое выражение:

$$\frac{p}{M} = cL + idL'.$$

Установив это, возвращаемся к трем формулам:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum R \operatorname{sn}(x - p + iK'),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum S \operatorname{cn}(x - p + iK'),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum T \operatorname{dn}(x - p + iK'),$$

и определяем коэфициенты R, S и T. Полагаем для этого $x = p + \varepsilon$ и, пользуясь основными уравнениями:

$$\operatorname{sn}(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{k \operatorname{sn} \varepsilon},$$

$$\operatorname{cn}(iK' + \varepsilon) = \frac{\operatorname{dn} \varepsilon}{ik \operatorname{sn} \varepsilon},$$

$$\operatorname{dn}(iK' + \varepsilon) = \frac{\operatorname{cn} \varepsilon}{i \operatorname{sn} \varepsilon},$$

находим, считая ε бесконечно малым, следующие равенства:

$$\frac{M}{l} = \frac{R}{k};$$

$$\frac{(-1)^{\frac{c+d-1}{2}} M}{il} = \frac{S}{ik}; \qquad \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}} M}{i} = \frac{T}{i}.$$

Отсюда, положив для краткости $\omega = \frac{n'K + i(an'' - m)K'}{n}$, получаем искомые выражения:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{Mk}{l} \sum \operatorname{sn}(x + 4q\omega),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{(-1)^{\frac{c+d-1}{2}} Mk}{l} \sum \operatorname{cn}(x + 4q\omega),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = (-1)^{\frac{d-1}{2}} M \sum \operatorname{dn}(x + 4q\omega),$$

$$(q = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

Мы должны прибавить следующее замечание, которым нельзя пренебрегать: чтобы эти выражения совпадали с выражениями, данными в Fundamenta, необходимо, чтобы $c \equiv 0$ и $d \equiv n$, mod 4. Но равенство $ad - bc = n$ дает $ad \equiv n$, mod 4, $a \equiv 1$, mod 4; формулы преобразования Якоби приводят к заключению, что в соотношениях:

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$

$$\frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

мы имеем обязательно $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, mod 4 и $d \equiv 1$, $c \equiv 0$, mod 2. Изложенный метод применим к различным случаям, соответствующим равенству $ad - bc = n$; чтобы дать пример, ограничимся рассмотрением одного случая, принимая следующие условия:

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 1, \quad d \equiv 1, \quad \text{mod } 2.$$

В этом случае множители $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ и $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ равны множителям $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{sn} x$, так как мы имеем равенства:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{x + 2K}{M}, l\right) &= -\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) \\ \operatorname{sn}\left(\frac{x + 2iK'}{M}, l\right) &= -\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right); \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{cn}\left(\frac{x + 2K}{M}, l\right) &= -\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) \\ \operatorname{cn}\left(\frac{x + 2iK'}{M}, l\right) &= \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right); \end{aligned}\right.$$

следовательно, мы получаем формулы:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\sum R\operatorname{cn}(x-p+iK'),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\sum S\operatorname{sn}(x-p+iK'),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\sum T\operatorname{dn}(x-p+iK').$$

Выберем теперь, что всегда возможно, между различными решениями уравнений $dr-cs=n'$ и $\beta n'-4\alpha n''=1-4m$ целые числа r и α кратными 4 и заметим, что так как $\beta n'\equiv 1$, $cs=-n'$, $\bmod 4$, мы получаем $\beta\equiv n'$ и $s\equiv -n'c$. Следовательно, значения A, B, C, D:

$$A\equiv 0,\quad C=-n'c,\quad B=n'c,\quad D=n'c,\quad \bmod 4,$$

и из равенств:

$$f=A\xi+B\zeta,$$
$$g=C\xi+D\zeta$$

следует, что ζ нужно считать четным, а ξ нечетным. Следовательно, выражение полюсов не остается прежним; принимаем $\zeta=0$ и $\xi=(4q+1)$, замечая, что для $q=0, 1, 2, \ldots n-1$ мы берем систему вычетов, соответствующую модулю n. Таким образом, имеем:

$$p=-(4q+1)\,\frac{n'K+i(\alpha n''-m)K'}{n}$$

и, пренебрегая кратными четырех, из равенства:

$$\frac{p}{M}=(A\xi+B\zeta)L+i(C\xi+D\zeta)L'$$

получаем:

$$\frac{p}{M}=in'cL'.$$

В этом случае, как и раньше, вычисление дает:

$$R=\frac{iMk}{l},$$

$$S=\frac{\varepsilon Mk}{l},$$

$$T=\varepsilon M,$$

где мы положили для краткости $\varepsilon=(-1)^{\frac{n'c-1}{2}}$; допустим затем:

$$\omega=\frac{n'K+i(\alpha n''-m)K'}{n}+iK'=$$
$$=\frac{n'K+i(\alpha n''-m+n)K'}{n},$$

или

$$\omega = \frac{n'K + 2tiK'}{n},$$

обозначив через $2t$ целое $an'' - m + n$, которое будет четным, так как $m = br - as$ нечетное. Таким образом, пользуясь тождественным соотношением:

$$p - iK' = -(4q + 1)\omega + 4qiK',$$

находим следующие формулы, в которых для сокращения записи мы обозначаем $4q + 1$ через ξ:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \frac{iMk}{l}\sum \operatorname{cn}(x + \xi\omega),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \frac{\varepsilon Mk}{l}\sum \operatorname{sn}(x + \xi\omega),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \varepsilon M \sum \operatorname{dn}(x + \xi\omega),$$

$$(\xi = 1,\ 5,\ 9,\ \ldots\ 4(n-1) + 1).$$

Заменив теперь x на $-x$, имеем:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = -\frac{iMk}{l}\sum \operatorname{cn}(x - \xi\omega),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = -\frac{\varepsilon Mk}{l}\sum \operatorname{sn}(x - \xi\omega),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \varepsilon M \sum \operatorname{dn}(x - \xi\omega);$$

эти равенства, в сочетании с предыдущими дадут нам:

$$2\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \frac{iMk}{l}\sum \left[\operatorname{cn}(x + \xi\omega) - \operatorname{cn}(x - \xi\omega)\right],$$

$$2\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \frac{\varepsilon Mk}{l}\sum \left[\operatorname{sn}(x + \xi\omega) - \operatorname{sn}(x - \xi\omega)\right],$$

$$2\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \varepsilon M \sum \left[\operatorname{dn}(x + \xi\omega) + \operatorname{dn}(x - \xi\omega)\right].$$

Отсюда, применяя известные соотношения, выводим непосредственно выражения:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \frac{iMk}{l}\sum \frac{\operatorname{sn}\xi\omega \operatorname{dn}\xi\omega \operatorname{sn}x \operatorname{dn}x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\xi\omega \operatorname{sn}^2 x},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \frac{\varepsilon Mk}{l}\sum \frac{\operatorname{sn}\xi\omega \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\xi\omega \operatorname{sn}^2 x},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right) = \varepsilon M \sum \frac{\operatorname{dn}\xi\omega \operatorname{dn}x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\xi\omega \operatorname{sn}^2 x},$$

в которых следует считать, что $\xi = 1,\ 5,\ 9,\ \ldots\ 4(n-1) + 1$.

Полученные результаты указывают на существование в теории преобразования двух различных родов формул, из которых один содержит кратные $4q$, другие кратные $4q+1$ постоянной ω. Эти два случая появляются смотря по тому, четное или нечетное число ξ в формуле:

$$p=\xi\frac{n'K+i(an''-m)K'}{n}+\zeta(4K+i\beta K').$$

По этому поводу заметим, что равенства:

$$f=A\xi+B\zeta,$$
$$g=C\xi+D\zeta,$$

в которых f четное и g нечетное дают в свою очередь:

$$\xi=Df-Bg$$
$$\zeta=Ag-Cf,$$

откуда заключаем, что:

$$\xi\equiv B, \mod 2.$$

Но мы имеем $B=4a+\beta c$; известно также, что β нечетное; следовательно, получаем:

$$\xi=c, \mod 2.$$

Установив это, и рассматривая шесть случаев, к которым приводит уравнение $ad-bc=n$ в зависимости от отношения значений a, b, c, d, к модулю 2, видим, что из них имеем только два случая, в которых c четное и в которых соотношения:

$$\frac{K}{M}=aL+ibL',$$

$$\frac{iK'}{M}=cL+idL',$$

приводят к формулам, подобным формулам Якоби. Из этих уравнений мы будем еще раз исходить при изложении теории преобразования с иной точки зрения, без всякого ограничения числа n, которое может быть четным или нечетным. Воспользуемся для этого выражениями:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

через

$$\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \mathrm{H}\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \Theta_1\left(\frac{x}{M}, l\right), \quad \mathrm{H}_1\left(\frac{x}{M}, l\right);$$

введем функцию:

$$\Phi(x)=\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right)e^{\frac{i\pi bx^2}{4KLM}}$$

и положим:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}.$$

Укажем прежде всего необходимые нам характерные свойства четырех функций: $\Phi(x)$, $\Pi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Pi_1(x)$, относящиеся к замене x на $x+2K$ и на $x+2iK'$.

Они получаются из формулы:

$$\Theta\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\sum(-1)^m e^{\frac{i\pi m x}{ML}-\frac{\pi m^2 L'}{L}}$$

$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

которая дает:

$$\Phi(x)=\sum(-1)^m e^{i\pi\varphi(x,\ m)},$$

если положить:

$$\varphi(x,\ m)=\frac{bx^2}{4KLM}+\frac{mx}{LM}+\frac{im^2L'}{L}.$$

Заметим, что принимая последовательно во внимание $2K$ и b, мы получаем:

$$\varphi(x+2K,\ m)=\varphi(x)+2K\left(\frac{bx}{2KLM}+\frac{m}{LM}\right)+\frac{bK}{LM}$$

$$\varphi(x,\ m+b)=\varphi(x)+b\left(\frac{x}{LM}+\frac{2imL'}{L}\right)+\frac{ib^2L'}{L}$$

или

$$\varphi(x+2K,\ m)=\varphi(x)+\frac{bx}{LM}+\frac{(2m+b)K}{LM}$$

$$\varphi(x,\ m+b)=\varphi(x)+\frac{bx}{LM}+\frac{ib(2m+b)L'}{L}.$$

При почленном вычитании переменная x исчезает и мы имеем:

$$\varphi(x+2K,\ m)-\varphi(x,\ m+b)=(2m+b)\left(\frac{K}{ML}-\frac{ibL'}{L}\right);$$

но $\frac{K}{ML}=a+\frac{ibL'}{L}$, что дает:

$$\varphi(x+2K,\ m)=\varphi(x,\ m+b)+(2m+b)a.$$

Следовательно, мы можем написать:

$$\Phi(x+2K)=\sum(-1)^m e^{i\pi\varphi(x+2K,\ m)}=$$
$$=\sum(-1)^m e^{i\pi[\varphi(x,\ m+b)+(2m+b)a]};$$

изменив m на $m-b$, что допустимо, мы получаем искомую зависимость:

$$\Phi(x+2K)=(-1)^{ab+b}\,\Phi(x).$$

Установив это, мы непосредственно находим из использованных выше равенств:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x+2K}{M},\ l\right)=(-1)^{a}\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x+2K}{M},\ l\right)=(-1)^{a+b}\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x+2K}{M},\ l\right)=(-1)^{b}\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right),$$

аналогичные результаты для трех других функций и приходим таким образом к первой системе равенств:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Phi\ (x+2K)=(-1)^{ab+b}\,\Phi(x),\\
&\Pi\ (x+2K)=(-1)^{ab+a+b}\,\Pi(x),\\
&\Pi_1(x+2K)=(-1)^{ab+a}\,\Pi_1(x),\\
&\Phi_1(x+2K)=(-1)^{ab}\,\Phi_1(x).
\end{aligned}\right.$$

Пусть затем:

$$\Phi(x)\,e^{\frac{\pi n x^2}{4KK'}}=\sum(-1)^m e^{i\pi\psi(x,\ m)},$$

где мы положили:

$$\psi(x,\ m)=-\frac{inx^2}{4KK'}+\varphi(x,\ m)=$$

$$=\frac{bK'-inLM}{4KK'LM}\,x^2+\frac{mx}{LM}+\frac{im^2L'}{L}$$

или на основании равенства $nLM=dK-ibK'$, проще:

$$\psi(x,\ m)=-\frac{idx^2}{4K'LM}+\frac{mx}{LM}+\frac{im^2L'}{L}.$$

Вычисление, аналогичное уже применявшемуся, дает:

$$\psi(x+2iK',\ m)=\psi(x,\ m)+\frac{dx}{LM}+\frac{i(2m+d)K'}{LM},$$

$$\psi(x,\ m+d)=\psi(x,\ m)+\frac{dx}{LM}+\frac{id(2m+d)L'}{L},$$

откуда следует:

$$\psi(x+2iK',\ m)-\psi(x,\ m+d)=(2m+d)\left(\frac{iK'}{LM}-\frac{idL'}{L}\right).$$

Замечая, что:

$$\frac{iK'}{LM}=c+\frac{idL'}{L},$$

выводим соотношение:

$$\psi(x+2iK',\ m)=\psi(x,\ m+d)+(2m+d)c,$$

и получаем, следовательно:

$$\Phi(x+2iK')\,e^{\frac{\pi n(x+2iK')^2}{4KK'}}=(-1)^{cd+d}\,\Phi(x)\,e^{\frac{\pi n x^2}{4KK'}}.$$

Если мы обозначим, как всегда, показательный множитель

$$e^{-\frac{i\pi(x+iK')}{K}}$$

через λ, то это уравнение примет простой вид:

$$\Phi(x+2iK')=(-1)^{cd+d}\lambda^n\,\Phi(x),$$

и равенства:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x+2iK'}{M},\ l\right)=(-1)^c\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right),$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x+2iK'}{M},\ l\right)=(-1)^{c+d}\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right),$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x+2iK'}{M},\ l\right)=(-1)^d\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right),$$

приведут затем ко второй системе уравнений, которую мы имели в виду получить:

$$\Phi(x+2iK')=(-1)^{cd+d}\lambda^n\,\Phi(x),$$
$$\Pi(x+2iK')=(-1)^{cd+c+d}\lambda^n\,\Pi(x),$$
$$\Pi_1(x+2iK')=(-1)^{cd+c}\lambda^n\,\Pi_1(x),$$
$$\Phi_1(x+2iK')=(-1)^{cd}\lambda^n\,\Phi_1(x).$$

Отсюда вытекают следующие следствия. Рассматриваем функции:

$$P(x)=\frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$Q(x)=\frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$R(x)=\frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$S(x)=\frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)};$$

пользуясь ими, получаем:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{P(x)}{S(x)},$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{Q(x)}{S(x)},$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{R(x)}{S(x)}.$$

Эти двояко-периодические функции первого или второго рода имеют только один полюс $x=iK'$ порядка n, за исключением случая, когда один из числителей при этом значении обращается в нуль; тогда порядок полюса равен $n-1$. В самом деле имеем равенства:

$$\begin{cases} P(x+2K) &= (-1)^{ab+a+b}P(x) \\ P(x+2K') &= (-1)^{cd+c+d+n}P(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(x+2K) &= (-1)^{ab+a}Q(x) \\ Q(x+2iK') &= (-1)^{cd+c+n}Q(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(x+2K) &= (-1)^{ab}R(x) \\ R(x+2iK') &= (-1)^{cd+n}R(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(x+2K) &= (-1)^{ab+b}S(x) \\ S(x+2iK') &= (-1)^{cd+d+n}S(x). \end{cases}$$

Эти равенства показывают, что в общем случае, когда n целое число четное или нечетное, задача преобразования сводится к получению выражений тех двояко-периодических функций, которым можно дать название однополярных. Разложение на простые элементы дает эти выражения; оно приводит к следующим результатам.

Рассматривая сначала функции первого рода, которые обозначим через $f(x)$, имеем согласно общей формуле:

$$f(x)=A_0+A_1\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}+A_2D_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]+\ldots+A_nD_x^{n-1}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right];$$

но коэфициент A_1 равен нулю, так как он равен вычету, соответствующему единственному полюсу в параллелограмме периодов. Имеем далее:

$$D_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]=\zeta-k^2\operatorname{sn}^2x;$$

таким образом, нам остается только составлять последовательные производные от функции $\operatorname{sn}^2 x$. Обозначим через ν число, равное нулю или единице в зависимости от того, четное или нечетное n, и через $F(\operatorname{sn}^2 x)$, $G(\operatorname{sn}^2 x)$ — полиномы степени $\frac{n-\nu}{2}$ и $\frac{n+\nu-4}{2}$ относительно $\operatorname{sn}^2 x$.

Находим простыми выкладками:

$$f(x)=F(\operatorname{sn}^2x)+\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\,G(\operatorname{sn}^2x).$$

Подобным же образом, обозначив через $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ функции второго рода, имеющие соответственно множителями множители $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, мы получаем формулы:

$$\begin{aligned} f_1(x)&=\operatorname{sn}x\,F(\operatorname{sn}^2x)+\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\,G(\operatorname{sn}^2x),\\ f_2(x)&=\operatorname{cn}x\,F(\operatorname{sn}^2x)+\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x\,G(\operatorname{sn}^2x),\\ f_3(x)&=\operatorname{dn}x\,F(\operatorname{sn}^2x)+\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\,G(\operatorname{sn}^2x), \end{aligned}$$

в которых функции $F(\operatorname{sn}^2 x)$ и $G(\operatorname{sn}^2 x)$ полиномы степени $\frac{n+\nu-2}{2}$ и $\frac{n-\nu-2}{2}$ относительно $\operatorname{sn}^2 x$.

Эти выражения выделяют четную и нечетную части, которыми мы постоянно будем пользоваться отдельно, причем полюс порядка n принадлежит той из двух частей, которая предуказана функцией. В качестве первого применения этих выражений поставим себе задачей вывести формулы преобразования Якоби; допустим, что n нечетное и целые числа a, b, c, d удовлетворяют условиям:

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad d \equiv 1, \ \operatorname{mod} 2.$$

В этом случае уравнения, данные на стр. 361 указывают, что функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ типа $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f(x)$, причем первая нечетная, все же остальные четные; число, обозначенное через ν равно единице и, согласно доказанному имеем:

$$P(x) = \operatorname{sn} x \left[A + A' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + \ldots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x\right],$$

$$Q(x) = \operatorname{cn} x \left[B + B' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x\right],$$

$$R(x) = \operatorname{dn} x \left[C + C' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + \ldots + C^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x\right],$$

$$S(x) = D + D' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + \ldots + D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x;$$

формулы преобразования принимают вид:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, \ l\right) = \frac{\operatorname{sn} x \left[A + A' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x\right]}{D + D' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + \ldots + D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, \ l\right) = \frac{\operatorname{cn} x \left[B + B' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x\right]}{D + D' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, \ l\right) = \frac{\operatorname{dn} x \left[C + C' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + C^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x\right]}{D + D' \operatorname{sn}^2 x + \ldots + D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sn}^{n-1} x}.$$

Переходим к рассмотренному выше второму случаю, когда даны условия:

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 1, \quad d \equiv 1, \quad \operatorname{mod} 2.$$

Функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ относятся тогда к типу функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$, $f_3(x)$ и, следовательно, мы получаем выражения:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\quad l\right)=\frac{\operatorname{sn}x\left[A+A'\operatorname{sn}^2x+\ \ldots\ +A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sn}^{n-1}x\right]}{\operatorname{dn}x\left[D+D'\operatorname{sn}^2x+\ \ldots\ +D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sn}^{n-1}x\right]},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\quad l\right)=\frac{\operatorname{cn}x\left[B+B'\operatorname{sn}^2x+\ \ldots\ +B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sn}^{n-1}x\right]}{\operatorname{dn}x\left[D+D'\operatorname{sn}^2x+\ \ldots\ +D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sn}^{n-1}x\right]},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\quad l\right)=\frac{\left[C+C'\operatorname{sn}^2x+\ \ldots\ +C^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sn}^{n-1}x\right]}{\operatorname{dn}x\left[D+D'\operatorname{sn}^2x+\ \ldots\ +D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sn}^{n-1}x\right]}.$$

Очевидно, что они соответствуют результатам, полученным на стр. 356, так как число, обозначенное через ξ принимает значения 1, 5, 9 ... $4(n-1)+1$, среди которых находится $\xi=n$ или $\xi=3n$, в зависимости от того, будет ли $n\equiv 1$ или $n\equiv 3$, mod 4.

Имеем, следовательно, в обоих случаях $\operatorname{sn}^2\xi\omega=\operatorname{sn}K=1$; выражение $1-k^2\operatorname{sn}^2\xi\omega\operatorname{sn}^2x$ становится тогда равным dn^2x и каждая из трех сумм содержит член, деленный на $\operatorname{dn}x$, который является, как мы видим, множителем в общем знаменателе найденных выражений.

Предположим, наконец, что $n=2$ и примем сначала:

$$a=1,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=2,$$

чтобы иметь:

$$\frac{K}{M}=L,\qquad \frac{K'}{M}=2L'.$$

Тогда число ν равно нулю и сразу получаем:

$$P(x)=A\operatorname{sn}x,$$
$$Q(x)=B\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x,$$
$$R(x)=C+C'\operatorname{sn}^2x,$$
$$S(x)=D+D'\operatorname{sn}^2x.$$

Установив это и вводя для большей простоты другие постоянные g и h, пишем:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\quad l\right)=\frac{A\operatorname{sn}x}{1+g\operatorname{sn}\ x},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\quad l\right)=\frac{B\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{1+g\operatorname{sn}^2x},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\quad l\right)=\frac{c(1+h\operatorname{sn}^2x)}{1+g\operatorname{sn}^2x}.$$

Положив $x=0$, находим сначала, что $B=1$, $C=1$; заменяем затем в первом и третьем уравнении x на $x+iK'$, согласно условию

$$\frac{K'}{M}=2L',$$

получаем:

$$\frac{A\operatorname{sn}x}{1+g\operatorname{sn}^2x}=\frac{Ak\operatorname{sn}x}{g+k^2\operatorname{sn}^2x};\qquad \frac{1+h\operatorname{sn}^2x}{1+g\operatorname{sn}^2x}=\frac{h+k^2\operatorname{sn}^2x}{g+k^2\operatorname{sn}^2x},$$

что дает непосредственно значения: $g=k$, $h=-k$. Заменим наконец в выражении $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)$ x на $x+2K$; пользуясь основным соотношением $\operatorname{sn}(x+K)=\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}$, мы получим новое равенство:

$$\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1-k \operatorname{sn}^2 x}=\frac{A \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{dn}^2 x+k \operatorname{cn}^2 x}=\frac{A \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1+k)(1-k \operatorname{sn}^2 x)},$$

которое дает $A=\frac{1}{M}=1+k$. Остается только определить модуль; он находится из соотношения:

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{1-k \operatorname{sn}^2 x}{1+k \operatorname{sn}^2 x};$$

полагая в нем $x=K$, находим:

$$l'=\frac{1-k}{1+k}$$

и, следовательно:

$$l=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Таким образом, получаем для преобразования второго порядка следующую систему формул:

$$\operatorname{sn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{(1+k)\operatorname{sn} x}{1+k \operatorname{sn}^2 x},$$

$$\operatorname{cn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1+k \operatorname{sn}^2 x},$$

$$\operatorname{dn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{1-k \operatorname{sn}^2 x}{1+k \operatorname{sn}^2 x}.$$

Пусть, наконец:

$$a=2, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=1,$$

т. е.

$$\frac{K}{M}=2L; \qquad \frac{K'}{M}=L',$$

тогда:

$$P(x)=A \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x,$$
$$Q(x)=B+B' \operatorname{sn}^2 x,$$
$$R(x)=C+C' \operatorname{sn}^2 x,$$
$$S(x)=D \operatorname{dn} x,$$

и мы можем непосредственно написать:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{A\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{1+f\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{1+g\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x}.$$

Получив это, меняем сначала x на $x+K$ в двух последних равенствах; условие $\frac{K}{M}=2L$ дает:

$$\frac{1+f\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x}=-\frac{1+f\operatorname{sn}^2(x+K)}{\operatorname{dn}(x+K)}=-\frac{1+f-(k^2+f)\operatorname{sn}^2x}{k'\operatorname{dn}x};$$

подобным же образом получаем:

$$\frac{1+g\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x}=\frac{1+g-(k^2+g)\operatorname{sn}^2x}{k'\operatorname{dn}x},$$

откуда:

$$1=-\frac{1+f}{k'},\qquad 1=\frac{1+g}{k'}$$

и:

$$f=-1-k';\qquad g=-1+k'.$$

Заменив в первом и втором уравнении x на $x+iK'$, мы приходим к новым равенствам; пользуясь соотношением $\frac{K'}{M}=L'$, получаем:

$$\frac{1}{l\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)}=\frac{A\operatorname{dn}x}{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x},$$

откуда:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},\ l\right)=\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{Al\operatorname{dn}x}$$

и, следовательно:

$$A=\frac{k^2}{AL}.$$

Из основной формулы:

$$\operatorname{cn}(x+iK')=\frac{\operatorname{dn}x}{ik\operatorname{sn}x}$$

находим затем:

$$\frac{1+g\operatorname{sn}^2x}{Al\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}=-\frac{f+k^2\operatorname{sn}^2x}{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x},$$

и имея в виду значения f, получаем:

$$1=\frac{Al(1+k^2)}{k'^2};$$

откуда легко находим:

$$A=\frac{1}{M}=1+k', \qquad l=\frac{1-k'}{1+k'}.$$

Отсюда вытекает вторая система формул преобразования второго порядка:

$$\operatorname{sn}\left[(1+k')x,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{(1+k')\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x},$$

$$\operatorname{cn}\left[(1+k')x,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x},$$

$$\operatorname{dn}\left[(1+k')x,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x}.$$

Из этих формул получаются, как сейчас увидим, выражения для $\operatorname{sn}2x$, $\operatorname{cn}2x$, $\operatorname{dn}2x$. Для этого заменим модуль k на $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, что дает:

$$\frac{1-k'}{1+k'}=k \quad \text{и} \quad 1+k'=\frac{2}{1+k}.$$

Заменим затем x на $(1+k)x$; таким образом, первое из предыдущих уравнений принимает вид:

$$\operatorname{sn}2x=\frac{2\operatorname{sn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]\operatorname{cn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]}{(1+k)\operatorname{dn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]};$$

и пользуясь формулами первой системы, получаем:

$$\operatorname{sn}2x=\frac{2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{1-k^2\operatorname{sn}^4x}.$$

Подобные же выкладки приводят к остальным равенствам:

$$\operatorname{cn}2x=\frac{1-2\operatorname{sn}^2x+k^2\operatorname{sn}^4x}{1-k^2\operatorname{sn}^4x}, \qquad \operatorname{dn}2x=\frac{1-2k^2\operatorname{sn}^2x+k^2\operatorname{sn}^4x}{1-k^2\operatorname{sn}^4x}.$$

Отсюда легко выводится соотношение:

$$\frac{1-\operatorname{cn}2x}{1+\operatorname{dn}2x}=\operatorname{sn}^2x$$

и, следовательно:

$$\frac{1-\operatorname{cn}x}{1+\operatorname{dn}x}=\operatorname{sn}^2\frac{x}{2};$$

вследствие этого равенства, уравнение:

$$\operatorname{dn}\left[(1+k)x,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{1-k\operatorname{sn}^2 x}{1+k\operatorname{sn}^2 x}$$

преобразуется в иной вид, заменою в нем x на $\frac{x}{2}$.

$$\operatorname{dn}\left[\frac{(1+k)x}{2},\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{1-k+\operatorname{dn}x+k\operatorname{cn}x}{1+k+\operatorname{dn}x-k\operatorname{cn}x}.$$

Заменив затем в знаменателе $\operatorname{dn}x-k\operatorname{cn}x$ на $\frac{1-k^2}{\operatorname{dn}x+k\operatorname{cn}x}$, получаем после несложного преобразования весьма простой результат:

$$\operatorname{dn}\left[\frac{(1+k)x}{2},\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]=\frac{\operatorname{dn}x+k\operatorname{cn}x}{1+k},$$

из которого вытекают формулы

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{(1+k)x}{2},\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1}{2}\left(1+k\operatorname{sn}^2 x-\operatorname{cn}x\,dnx\right)$$

$$\operatorname{cn}^2\left(\frac{(1+k)x}{2},\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1}{2}\left(1-k\operatorname{sn}^2 x+\operatorname{cn}x\,dnx\right).$$

Закончим это добавление к теории эллиптических функций доказательством теоремы Пикара, приведенной на стр. 115. Она заключается в том, что голоморфная функция $G(z)$ обязательно постоянна, если существуют две таких конечных постоянных a и b, что уравнения $G(z)=a$ и $G(z)=b$ не имеют решения.

Положим $G(z)=u$, строим, как это мы делали на стр. 71 кривую, представляющую последовательность значений u, когда переменная z описывает некоторый замкнутый контур S. Эта кривая, которую называют отображением S, может заключать некоторое число кратных точек, но не имеет вовсе бесконечных ветвей, так как функция $G(z)$ голоморфная; следовательно, кривая имеет границей замкнутый контур T. Утверждаем теперь, что T не заключает внутри себя точки $u=a$, если уравнение $G(z)=a$ не имеет решения.

В самом деле, вообразим, что мы уменьшаем размеры контура S, заставляя его непрерывно изменяться до тех пор, пока он не обратится в точку. Отображения, заданные функцией $G(z)$, при этом так же изменяются, пока не сведутся к точке. Следовательно, всякая точка A, лежащая внутри контура T, находится в некоторый момент на одном из деформированных отображений.

Таким образом, A соответствует некоторому значению z, и не может представлять a, если, по предположению, уравнение $G(z)=a$ не имеет решения.

Установив это, рассмотрим частное $\frac{K'}{K}$ и напомним, что оно голоморфная функция от k^2 внутри области ограниченной контуром не содержащим внутри точек $k^2=0$ и $k^2=1$. Положим временно, что $F(z)=$

$=\frac{G(z)-a}{b-a}$, чтобы иметь функцию, которая никогда не примет значения равного нулю или единице; выполняем в частном $\frac{K'}{K}$ подстановку $k^2=F(z)$. Таким образом получаем функцию $f(z)$, голоморфную на всей плоскости, так как отображение модулем некоторого контура, описанного переменной z, не может заключать точек $k^2=0$ и $k^2=1$. Утверждаем теперь, что эта функция обязательно постоянна и, следовательно, функция $F(z)$ или $G(z)$ так же постоянна. В самом деле, известно, что для всякого вещественного или мнимого значения модуля, вещественная часть $\frac{K'}{K}$ положительна. Это следует из теоремы Римана, доказательство которой дано на стр. 332.

Следовательно, мы видим, положив $f(z)=X+iY$, что модуль функции $e^{-f(z)}$ всегда меньше единицы; вследствие этого теорема, доказанная на стр. 109, дает возможность сделать заключение, что эта функция постоянна. Это и требовалось доказать.

II. Дифференцирование $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ по модулю. Производные эллиптических функций по модулю имеют весьма важное значение; дадим простой метод для их нахождения.

Дифференцируем по k соотношение:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=x;$$

получаем непосредственно:

$$\frac{D_k z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}+\int_0^z \frac{kz^2dz}{(1-k^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=0,$$

и, следовательно:

$$D_k \operatorname{sn} x=-k \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\int_0^x \frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}dx,$$

или:

$$D_k \operatorname{sn} x=\frac{k \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{k'^2}\int_0^x \operatorname{cn}^2(x+K)dx.$$

После этого, уравнение Якоби:

$$k^2\operatorname{sn}^2 x=\frac{J}{K}-D_x\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

дает при замене x на $x+K$:

$$k^2\operatorname{sn}^2(x+K)=\frac{J}{K}-D_x\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)};$$

далее:

$$k^2\operatorname{cn}^2(x+K)=D_x\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}+k^2-\frac{J}{K}.$$

Интегрируя от $x=0$, получаем, наконец:

$$\int_0^x k^2 \operatorname{cn}^2(x+K)\,dx = \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x.$$

Имеем, следовательно, для производной по модулю синуса амплитуды следующую формулу:

$$D_k \operatorname{sn} x = -\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{kk'^2}\left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right].$$

Отсюда пользуясь уравнениями: $\operatorname{cn}^2 x = 1 - \operatorname{sn}^2 x$, $\operatorname{dn}^2 x = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x$, получаем:

$$D_k \operatorname{cn} x = +\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{kk^2}\left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right],$$

$$D_k \operatorname{dn} x = -\frac{k \operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn} x} + \frac{k \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{k'^2}\left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right].$$

Последнее, благодаря соотношению:

$$\frac{H_1'(x)}{H_1(x)} - \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} = -\frac{k'^2 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}$$

может быть представлено проще:

$$D_k \operatorname{dn} x = \frac{k \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{k'^2}\left[\frac{H_1'(x)}{H_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right].$$

Наконец, введя в эти три выражения функцию $\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ или, по существу, функцию:

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\,dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = U(x),$$

мы получаем формулы:

$$kk'^2 D_k \operatorname{sn} x = +k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn}^2 x + \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\,[U(x) - k^2 x],$$
$$kk'^2 D_k \operatorname{cn} x = -k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn} x - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x\,[U(x) - k^2 x],$$
$$kk'^2 D_k \operatorname{dn} x = -k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{dn} x - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x\,[U(x) - k^2 x].$$

Заметим, что из первых двух имеем:

$$kk'^2 \frac{D_k(\operatorname{cn} x + i \operatorname{cn} x)}{i(\operatorname{cn} x + i \operatorname{sn} x)} = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x\,[U(x) - k^2 x].$$

Следовательно, для производной амплитуды аргумента имеем выражение:

$$kk'^2 D_k \operatorname{am} x = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x\,[U(x) - k^2 x].$$

Поставим задачей теперь присоединить к составленным производным еще значение $D_k U(x)$, вычисление которого требует несколько больших выкладок, так как вопрос заключается в интегрировании по x производной $D_k(k^2 \operatorname{sn}^2 x)$, которая дана равенством:

$$kk'^2 D_k(k^2 \operatorname{sn}^2 x) = 2k^2 k'^2 \operatorname{sn}^2 x + 2k^4 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn}^2 x + \\ + 2k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \, [U(x) - k^2 x].$$

Пишем для краткости U, U', U'' вместо $U(x)$, $D_x U(x)$, $D_x^2 U(x)$ и замечая, что:

$$k^2 \operatorname{sn}^2 x = U'$$
$$k^2 \operatorname{cn}^2 x = k^2 - U'$$
$$2k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x = U'',$$

даем этому выражению вид:

$$kk'^2 D_k(k^2 \operatorname{sn}^2 x) = 2k'^2 U' + 2U'(k^2 - U') + U''(U - k^2 x).$$

Заменив последний член $U''(U - k^2 x)$ на

$$D_x U'(U - k^2 x) + U'(k^2 - U'),$$

получаем:

$$kk'^2 D_k(k^2 \operatorname{sn}^2 x) = 2k'^2 U' + 3U'(k^2 - U') + D_x U'(U - k^2 x);$$

следовательно:

$$kk'^2 D_k U(x) = (2k'^2 + 3k^2) U - 3 \int_0^x U'^2 \, dx + U'(U - k^2 x).$$

Таким образом, нам остается только вычислить интеграл $\int_0^x U'^2 \, dx$.

Его мы получаем, разлагая на простые элементы функцию $U'^2 = k^4 \operatorname{sn}^4 x$, которая имеет периодами $2K$, $2iK'$ и единственный главный полюс $x = iK'$. Следовательно, мы имеем единственный простой элемент $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, формула получится путем разложения $k^2 \operatorname{sn}^4 x$ при $x = iK' + \varepsilon$.

Имеем:

$$k^4 \operatorname{sn}^4 (iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\operatorname{sn}^4 \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{2(1+k^2)}{3} \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots,$$

и выписанная часть, содержащая только отрицательные степени ε, представленная в каноническом виде, выразится так:

$$-\frac{1}{6} D_\varepsilon^3 \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2(1+k^2)}{3} D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда имеем:

$$k^4 \operatorname{sn}^4 x = -\frac{1}{6} D_x^3 \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{2(1+k^2)}{3} D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + C$$

или

$$k^4 \operatorname{sn}^4 x = \frac{1}{6} D_x^3 U(x) + \frac{2(1+k^2)}{3} D_x U(x) + C.$$

Положив $x=0$, тотчас же определяем постоянную. Таким образом находим $C=-\frac{k^2}{3}$; для искомого интеграла имеем:

$$\int_0^x U'^2\,dx=\frac{1}{6}U''+\frac{2(1+k^2)}{3}U-\frac{k^2x}{3},$$

что приводит к следующему выражению:

$$kk'^2D_kU(x)=UU'-k^2(U+xU')+k^2(x-\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x).$$

Укажем важное следствие. Обозначим через m и m' целые числа и положим:

$$G=2mK+2m'iK',\quad \mathrm{H}=2mJ+2m'iJ'.$$

Положив $\xi=x+G$, получим равенство:

$$U(\xi)=U(x)+H,$$

которое при дифференцировании по модулю дает:

$$U'(\xi)D_kG+D_kU(\xi)=D_kU(x)+D_kH.$$

Вычитая теперь почленно уравнения:

$$kk'^2D_kU(\xi)=U(\xi)U'(\xi)-k^2[U(\xi)+\xi U'(\xi)]+k^2(\xi-\operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi)$$
$$kk'^2D_kU(x)=U(x)U'(x)-k^2[U(x)+xU'(x)]+k^2(x-\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x)$$

и замечая, что:

$$U(\xi)=U(x)+\mathrm{H},\quad U'(\xi)=U'(x),\quad \operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi=\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x,$$

находим после несложных преобразований:

$$kk'^2[D_kU(\xi)-D_kU(x)]=(\mathrm{H}-k^2G)U'(x)-k^2(H-G).$$

Мы получаем, следовательно, в результате дифференцирования по модулю, следующее уравнение:

$$[kk'^2D_kG+H-k^2G]U'(x)-kk'^2D_kH-k^2(H-G)=0,$$

которое разбивается на два:

$$kk'^2D_kG=k^2G-H,$$
$$kk'^2D_kH=k^2(G-H);$$

общий интеграл системы этих двух дифференциальных уравнений очевидно:

$$G=\alpha K+\beta K'$$
$$H=\alpha J+\beta J',$$

где α и β — произвольные постоянные.

Эти результаты легко приводят, как мы это увидим, к производным, взятым по k от трех других функций второго рода аналогичных $U(x)$, а именно:

$$U_1(x)=\frac{Jx}{K}-\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)},$$

$$U_2(x)=\frac{Jx}{K}-\frac{\mathrm{H}_1'(x)}{\mathrm{H}_1(x)},$$

$$U_3(x)=\frac{Jx}{K}-\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Для этого исходим от соотношений:

$$\begin{aligned}
&U_1(x)=U(x+iK')-iJ',\\
&U_2(x)=U(x+K+iK')-J-iJ',\\
&U_3(x)=U(x+K)-J,
\end{aligned}$$

которые можно представить в виде:

$$U_n(x)=U(x+A)-B,$$

обозначив через A и B одинаковые линейные комбинации K и K', соответственно J и J'; таким образом имеем:

$$\begin{aligned}
&kk'^2D_kA=k^2A-B,\\
&kk'^2D_kB=k^2(A-B).
\end{aligned}$$

Установив это и положив еще $\xi=x+A$ из соотношения:

$$D_kU_n(x)=U'(\xi)D_kA+D_kU(\xi)-D_kB$$

получаем сначала:

$$\begin{aligned}
kk'^2D_kU_n(x)=&kk'^2U'(\xi)D_kA+U(\xi)U'(\xi)\\
&-k^2[U(\xi)+\xi U'(\xi)]+k^2(\xi-\operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi)\\
&-kk'^2D_kB.
\end{aligned}$$

Заменив затем в правой части $U(\xi)$, $U'(\xi)$ на $U_n(x)+B$, $U_n'(x)$ и ξ на $x+A$, получаем, группируя члены соответствующим образом:

$$\begin{aligned}
kk'^2D_kU_n(x)=&U_n(x)U_n'(x)-k^2U_n(x)\\
&+kk'^2D_kA+B-k^2(x+A)U_n'(x)\\
&+k^2[x-\operatorname{sn}(x+A)\operatorname{cn}(x+A)\operatorname{dn}(x+A)]\\
&-kk'^2D_kB+k^2(A-B),
\end{aligned}$$

далее, упрощая:

$$\begin{aligned}
kk'^2D_kU_n(x)=&U_n(x)U_n'(x)-k^2[U_n(x)+xU_n'(x)]+\\
&+k^2[x-\operatorname{sn}(x+A)\operatorname{cn}(x+A)\operatorname{dn}(x+A)].
\end{aligned}$$

Мы видим, что для различных значений n формулы отличаются только последним членом, который при $n=1, 2, 3$ должен равняться последовательно:

$$+\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{k^2 \operatorname{sn}^3 x}, \quad +\frac{k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{k^2 \operatorname{cn}^3 x}, \quad +\frac{k' \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn}^3 x}.$$

Заметим, наконец, что интегрирование по x дает:

$$2kk'^2 D_k \int U_n(x)\,dx = U_n^2(x) - 2k^2 x U_n(x) + k^2 [x^2 - \operatorname{sn}^2(x+A)] + C,$$

причем C — постоянная; мы имеем, следовательно, выражение производных по k от функций Вейерштрасса, которые определены уравнением:

$$D_x \ln Al(x)_n = U_n(x),$$

и, так как из этого условия следует, что:

$$D_x^2 \ln Al(x)_n = U_n'(x) = -U'(x+A) = -k^2 \operatorname{sn}^2(x+A),$$

то предыдущее соотношение принимает следующий новый вид:

$$-2kk'^2 D_k \ln Al(x)_n = [D_x \ln Al(x)_n]^2 + 2k^2 x D_x \ln Al(x)_n + \\ + D_x^2 \ln Al(x)_n + k^2 x^2 + C,$$

и после упрощения дает:

$$2kk'^2 D_k Al(x)_n + D_x^2 Al(x)_n + 2k^2 x Al(x)_n + (k^2 x^2 + C)\, Al(x)_n = 0.$$

Вывод этого линейного уравнения в частных производных принадлежит Вейерштрассу; в нем постоянная C, которую мы должны определить, изменяется вместе с индексом n. Пусть сначала $x=0$; исключив случай $n=1$, имеем $A(0)_n = 1$ и находим непосредственно, что $C = -D_x^2 Al(x)_n$ или, что то же самое, при предположении $x=0$, что

$$C = -D_x^2 Al(x)_n = -k^2 \operatorname{sn}^2 A.$$

Берем поэтому для $n=0, 2, 3$ соответствующие значения $A=0$, $K+iK'$, K, т. е. считаем $C=0, 1, k^2$. Предполагая затем $n=1$, дифференцируем сначала по x уравнение в частных производных; положив затем $x=0$, получаем условие:

$$C + 2k^2 = -D_x^3 Al(x) = 1 + k^2,$$

которое дает:

$$C = k'^2.$$

III. Доказательство соотношения Гаусса

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

Приложения.

Теория эйлеровых интеграловых интегралов тесно связана с рядом из четырех элементов или гипергеометрическим, который ввел в анализ Гаусс; обозначим его через $F(a, b, c, x)$ и определим соотношением:

$$F(a, b, c, x)=1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\ldots$$
$$+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\ldots n c(c+1)\ldots(c+n-1)}x^n+\ldots\ .$$

Если положим $x=1$, имеем, как доказал Гаусс:

$$F(a, b, c, 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Дадим сейчас доказательство этой весьма важной теоремы и укажем некоторые ее следствия.

Рассмотрим определенный интеграл:

$$I=\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}(1-zx)^{-b}dz,$$

и его разложение по степеням x, к которому мы приходим непосредственно применяя формулу бинома:

$$(1-zx)^{-b}=\sum\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n z^n.$$

$$(n=0, 1, 2, 3\ldots).$$

Положив:

$$I=I_1+I_1x+\ldots+I_nx^n+\ldots$$

имеем:

$$I_n=\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}\int_0^1 z^{a+n-1}(1-z)^{c-a-1}dz,$$

и, согласно значению интеграла Эйлера первого рода:

$$I_n=\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\Gamma(c+n)}.$$

Воспользовавшись элементарными соотношениями:

$$\Gamma(a+n)=a(a+1)\ldots(a+n-1)\Gamma(a)$$
$$\Gamma(c+n)=c(c+1)\ldots(c+n-1)\Gamma(c),$$

пишем:

$$I_n=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\frac{(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\ldots n c(c+1)\ldots(c+n-1)}.$$

Это значение I_n дает нам выражение определенного интеграла посредством ряда Гаусса. В самом деле, имеем:

$$\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}(1-zx)^{-b}dz=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a, b, c, x).$$

Пусть теперь $x=1$; левая часть принимает вид:

$$\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-b-1}\,dz \quad \text{и равна} \quad \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)},$$

откуда получаем теорему, которую требовалось доказать:

$$\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}=F(a,\ b,\ c,\ 1).$$

Дадим теперь ее приложения, заметив сначала, что ряд:

$$F(a,\ b,\ c,\ 1)=1+\frac{ab}{1\cdot c}+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\cdot 2c(c+1)}+\ \text{и т. д.},$$

сходящийся при условии, что

$$c>a+b,$$

полагаем $c=1$ и $b=-a$; имеем для любого значения a:

$$\frac{1}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a)}=\frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

$$=1-\frac{a^2}{1}+\frac{a^2(a^2-1)}{(1\cdot 2)^2}-\frac{a^2(a^2-1)(a^2-4)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\ldots$$

$$-(-1)^n\,\frac{a^2(a^2-1)(a^2-4)\ldots(a^2-n^2)}{(1\cdot 2\ldots n+1)^2}+\ldots\,.$$

Пусть затем $c=\frac{1}{2}$ при том же условии $b=-a$; соотношение:

$$\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{a\pi}{2}}$$

путем несложного вычисления и после замены a на $\frac{a}{2}$ дает нам:

$$\cos\frac{a\pi}{2}=1-\frac{a^2}{1\cdot 2}+\frac{a^2(a^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots$$

$$-(-1)^n\,\frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)\ldots(a^2-4n^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n+2}+\ldots\,.$$

Остановимся несколько на выражении для $\sin a\pi$, чтобы показать, что оно является тождественным преобразованием формулы Эйлера:

$$\frac{\sin a\pi}{a\pi}=\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\left(1-\frac{a^2}{9}\right)\ldots\,.$$

В самом деле, пусть:

$$X_n=\left(1+\frac{x}{a_1}\right)\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{a_n}\right);$$

имеем:

$$X_{n+1} = \left(1 + \frac{x}{\alpha_{n+1}}\right) X_n$$

или:

$$X_{n+1} - X_n = \frac{x}{\alpha_{n+1}} X_n.$$

Составляем теперь последовательно равенства:

$$X_2 - X_1 = \frac{x}{\alpha_2} X_1$$

$$X_3 - X_2 = \frac{x}{\alpha_3} X_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{x}{\alpha_{n+1}} X_n$$

и складываем их почленно. Соотношение, к которому мы приходим:

$$X_{n+1} = X_1 + \frac{x}{\alpha_2} X_1 + \frac{x}{\alpha_3} X_2 + \ldots + \frac{x}{\alpha_{n+1}} X_n,$$

если положить n бесконечным, дает преобразование в ряд бесконечного произведения; беря

$$\alpha_n = n^2 \text{ и } x = -a^2,$$

получаем искомый результат.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Одиннадцатая лекция

Двенадцатая лекция

Тринадцатая лекция

Четырнадцатая лекция

Пятнадцатая лекция

Двадцатая лекция

Двадцать первая лекция

Двадцать вторая лекция

Двадцать третья лекция

Двадцать четвертая лекция

Двадцать пятая лекция

Добавления