КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

учебник

Под общей редакцией
доктора экономических наук, профессора
К.В. Балдина

$$\frac{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}=t \qquad \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{9y}} f(x;y)\,dy. \qquad \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x}-6}$$

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебник

2-е издание

Под общей редакцией
доктора экономических наук, профессора
К. В. Балдина

Рекомендовано уполномоченным учреждением Министерства образования и науки РФ — Государственным университетом управления в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки «Экономика»

Регистрационный номер рецензии 22 от 17.02.2009 г.
(Федеральный институт развития образования)

Москва
2015

УДК 517 (0. 75.8)
ББК 22.16
К78

Авторы:
К. В. Балдин — доктор экономических наук, профессор — введение, гл. 9, гл. 10;
Ф. К. Балдин — научный сотрудник — гл. 3, п. 1.1, п. 1.3;
В. И. Джеффаль — страший преподаватель — гл. 7, гл. 8;
Е. Л. Макриденко — кандидат экономических наук — гл. 2;
А. В. Рукосуев — старший преподаватель — гл. 5, гл. 6.

Рецензенты:
И. В. Минаев — доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ;
А. И. Данилов — доктор экономических наук, профессор.

К78 **Краткий курс высшей математики:** Учебник / Под общ. ред. д. э. н., проф. К. В. Балдина. — 2-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 510 с.

ISBN-978-5-394-02103-9

Настоящий учебник содержит систематизированное изложение основ математики и написан на базе лекционных курсов, которые авторы преподавали в ряде вузов столицы.

Для студентов бакалавриата экономических вузов.

Подписано в печать 25.06.2014. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная. Печ. л. 32.
Тираж 500 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
Для писем: 129347, Москва, п/о И-347;
Тел./факс: 8(495) 741-34-28 (многоканальный), 8(499) 183-93-23.
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис; http://www.dashkov.ru

Отпечатано в ГУП Академиздатцентр «Наука» РАН,
ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ»-«Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: 554-21-86, 554-25-97, 974-69-76.

ISBN-978-5-394-02103-9

© Коллектив авторов, 2009
© ООО «ИТК «Дашков и К»°, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 9

Глава 1. Основы дискретной математики 12

1.1. Основы теории множеств 12

1.2. Основные понятия комбинаторики 26

1.3. Основы теории графов 29

1.4. Некоторые сведения из математической логики 59

Задачи для самостоятельного решения 66

Вопросы для самопроверки 67

Глава 2. Элементы линейной и векторной алгебры 69

2.1. Матрицы, определители и их свойства 69

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений 90

2.3. Собственные числа, собственные векторы матриц и квадратичные формы 97

2.4. Некоторые сведения о векторах 106

Задачи для самостоятельного решения 119

Вопросы для самопроверки 121

Глава 3. Функции и пределы 123

3.1. Некоторые сведения о функциях 123

3.2. Предел последовательности. Предел функции. Вычисление пределов 136

3.3. Комплексные числа 150

Задачи для самостоятельного решения 152
Вопросы для самопроверки 154

Глава 4. Основы дифференциального исчисления 155

4.1. Производная первого порядка. Дифференциал. Производные высших порядков 155

4.2. Некоторые сведения о функциях многих переменных. Понятие о частной производной 166

4.3. Некоторые приложения дифференциального исчисления 176

4.3.1. Формула Тейлора 176

4.3.2. Правило Лопиталя 179

4.3.3. Асимптоты 182

4.3.4. Исследование функций с помощью производных первого и второго порядков, построение их графиков 186

4.3.5. Экстремумы функций двух и многих аргументов 197

4.3.6. Понятие о методе наименьших квадратов 202

Задачи для самостоятельного решения 205
Вопросы для самопроверки 207

Глава 5. Элементы интегрального исчисления 210

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл 210

5.2. Определенный интеграл 233

5.3. Некоторые сведения о несобственных интегралах 242

5.3.1. Несобственный интеграл первого рода 242

5.3.2. Несобственный интеграл второго рода 247

5.4. Некоторые приложения определенного интеграла 251

5.4.1. Вычисление площадей плоских фигур 251

5.4.2. Нахождение длины дуги кривой 257
5.4.3. Объем тела вращения 260

5.5. Приближенное вычисление определенных интегралов 263

5.6. Понятие о двойном интеграле 269

5.7. Некоторые сведения о тройном интеграле 289
Задачи для самостоятельного решения 295
Вопросы для самопроверки 299

Глава 6. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях 301

6.1. Основные понятия и определения 301

6.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка 302
6.2.1. Общие понятия 302
6.2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными 303
6.2.3. Однородные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным 307
6.2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли 315
6.2.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 323
6.2.6. Уравнения Лагранжа и Клеро 326

6.3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка 331
6.3.1. Общие понятия 331
6.3.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, решаемые с помощью понижения порядка 334

6.3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ... 339
6.3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ... 342
6.4. Понятие о системах обыкновенных дифференциальных уравнений ... 350
Задачи для самостоятельного решения ... 355
Вопросы для самопроверки ... 358

Глава 7. Ряды ... 360
7.1. Числовые ряды ... 360
7.2. Функциональные ряды ... 365
7.3. Степенные ряды ... 367
7.4. Некоторые приложения степенных рядов ... 370
7.4.1. Приближенное вычисление определенных интегралов ... 370
7.4.2. Приближенное решение дифференциальных уравнений ... 372
7.5. Понятие о рядах Фурье ... 374
Задачи для самостоятельного решения ... 378
Вопросы для самопроверки ... 379

Глава 8. Краткие сведения из теории вероятностей ... 381
8.1. Общие понятия и определения ... 381
8.2. Классификация событий ... 382
8.3. Алгебра событий ... 383
8.4. Вероятность события ... 385
8.5. Алгебра вероятностей ... 390

8.6. Случайные величины ... 394
8.7. Понятие о нормальном распределении ... 408
8.8. Системы случайных величин ... 411
8.9. Понятие о предельных теоремах ... 425
Задачи для самостоятельного решения ... 428
Вопросы для самопроверки ... 429

Глава 9. Задачи линейного программирования и методы их решения ... 431
9.1. Постановка задачи линейного программирвоания ... 431
9.2. Графический метод решения задач линейного программирования ... 433
9.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования ... 440
9.3.1. Стандартная форма задач линейного программирования ... 440
9.3.2. Основные понятия симплекс-метода ... 442
9.3.3. Алгоритм симплекс-метода ... 445
9.3.4. Метод искусственных переменных ... 448
9.4. Двойственная задача линейного программирования ... 452
9.5. Анализ чувствительности задачи линейного программирования ... 458
9.6. Классификация методов решения задач целочисленного линейного программирования ... 463
9.7. Метод отсекающих плоскостей Гомори ... 465
9.7.1. Метод Гомори для полностью целочисленных задач ... 465
9.7.2. Метод Гомори для частично-целочисленных задач ... 470

9.8. Метод ветвей и границ 473
Задачи для самостоятельного решения 476
Вопросы для самопроверки 477

Глава 10. Специальные задачи линейного программирования 478

10.1. Вербальная и математическая постановка транспортной задачи линейного программирования 478

10.2. Решение транспортной задачи 482

10.3. Практическое решение задачи оптимального планирования 492

10.4. Многопродуктовая транспортная задача 499

10.5. Транспортная модель с промежуточными пунктами 503
Задачи для самостоятельного решения 506
Вопросы для самопроверки 507

Литература 508

ВВЕДЕНИЕ

Математика проникла практически во все сферы человеческой деятельности. Это объясняется, во-первых, тем, что она способна создавать модели изучаемых явлений[1], а во-вторых — используется для обработки цифровых данных (как средство расчета. В настоящее время различные численные и аналитические методы используются не только в естественных, но и в гуманитарных науках, например в социологии, лингвистике, юриспруденции, экономике.

С помощью математических методов можно более глубоко анализировать сложные экономические явления и процессы. Проблемы экономики стимулирует разработку новых математических теорий. Например, необходимость решения задач экономического планирования привела к разработке теории линейного программирования в 30-х гг. XX в. Можно сделать вывод о том, что глубокое изучение экономических процессов и управление этими процессами невозможны без знания современного математического аппарата. Математическая подготовка современного специалиста в области экономики имеет свои специфические особенности, связанные со сложностью проведения финансово-экономических операций и принятия рациональных управленческих решений по ним.

Как наука математика имеет определенное математическое мировоззрение, однако для специалистов в области экономики, менеджмента, психологии и юриспруденции она является прежде всего мощным инструментарием при проведении необходимых расчетов и исследований, а также фундаментом,

---

[1] Математической моделью изучаемого явления называется логическая конструкция, которая отражает геометрические формы этого явления и количественные соотношения между его числовыми параметрами.

на котором строится современное здание высшего профессионального образования.

Материал учебника представлен в виде десяти глав и предназначен для студентов 1-го и 2-го курсов экономических специальностей и направлений вузов.

В первой главе “Основы дискретной математики” представлены основы теории множеств, введены элементы комбинаторики, основы теории графов и элементы математической логики. Вторая глава “Элементы линейной и векторной алгебры” посвящена матрицам, векторам, определителям и их свойствам, а также действиям над ними. Приведены методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В третьей главе “Функции и пределы” даны определение функции, способы ее задания и основные свойства, а также понятия предела, методы его вычисления и понятие о комплексных числах. В четвертой главе “Основы дифференциального исчисления” кратко рассмотрены такие фундаментальные понятия, как производная, дифференциал, их геометрический смысл, дано понятие о функции многих переменных и о частных производных, а также приведены некоторые сведения о приложениях дифференциального исчисления (формула Тейлора, правило Лопиталя, исследование функции одного и многих аргументов с помощью производной). В пятой главе “Элементы интегрального исчисления” раскрыто содержание интегрального исчисления, приведены определения и свойства неопределенного, определенного, несобственного и кратного интегралов, а также способы их вычисления. Рассматриваются некоторые приложения интегрального исчисления. Шестая глава “Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях” написана на основе материалов, изложенных в предыдущих главах. В ней представлены обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка, а также методы их решения. Особое место занимает решение линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Дано также понятие о решении систем дифференциальных уравнений. В седьмой главе “Ряды” имеются сведения о числовых, функциональных

и степенных рядах и рядах Фурье. Восьмая глава “Краткие свединия из теории вероятностей” посвящена основам исследованиям случайных событий, величин и векторов. Основные понятия дают возможность на новом качественном уровне исследовать процессы и явления экономической жизни. В девятой главе “Задачи линейного программирования и методы их решения” рассматриваются задачи оптимизации, крайне необходимые в практике экономических расчетов и задачах математического программирования. Десятая глава “Специальные задачи линейного программирования” является заключительной, в которой представлены методы решения транспортной задачи и специальной многопродуктовой задачи по оптимизации маршрутов перевозок.

Представленный курс математики охватывает большинство разделов, изучаемых студентами экономических специальностей и направлений вузов. При написании книги авторы придерживались современных точек зрения на понятия, о которых идет речь, и не отступали от общепринятых взглядов. Авторы стремились изложить материал в доступной для студентов форме. Однако авторы издания не претендуют на исчерпывающую широту охвата учебного материала из-за ограничений на объем книги.

Глава 1. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1. Основы теории множеств

Начала теории множеств заложил в XIX в. немецкий математик Георг Кантор. Понятие множества является неопределенным, внешним по отношению к математике, поэтому точного определения оно не имеет.

Г. Кантору принадлежит высказывание, которое можно считать интуитивным определением математики: “Множество есть многое, мыслимое как единое”. Это определение можно сформулировать несколько иначе. Множество — собрание различных объектов, которые различимы нашей интуицией. Данное определение множества требует введения трех символов. Первый символ должен представлять само множество. В качестве него мы будем использовать заглавные буквы латинского алфавита A, B, C, ... Второй символ — это элемент самого множества. Их мы будем обозначать маленькими буквами латинского алфавита, т. е. a, b, c ... . А третий символ должен однозначно сопоставить элемент самому множеству. В качестве этого символа применяют знак “$\in$”, который является первой буквой греческого слова εtri (быть). Следовательно, запись $a \in A$, говорит о том, что элемент a принадлежит множеству A, а запись $b \notin B$, говорит о том, что элемент b не принадлежит множеству B.

Заметим, что множества могут быть любой природы. Так можно говорить о множестве всех студентов МГУ, о множестве всех ядерных боеголовок РФ, о множестве всех спиральных галактик нашей Вселенной и т. д. Однако дальнейшее развитие теории множеств, которое опиралось на его интуитивное определение, привело к ряду противоречий (парадоксов). Извест-

ный логический парадокс Рассела мы приводим в этом пункте. А о семантическом парадоксе лжеца рассказано в подразд. 1.4.

Заметим, что в логических парадоксах используют только понятия теории множеств, а в семантических парадоксах применяются такие понятия, как “характеризовать”, “истинный” и др., которые совсем не обязаны применяться в математическом языке. Поэтому логические парадоксы представляют куда большую угрозу для математиков, чем семантические.

Парадоксы теории множеств определились уже к началу XX в. Они показали, что построения, основанные на интуитивных определениях, не могут рассматриваться в математике как основополагающие. Поэтому надо определить множество так, чтобы затем при доказательствах теоретических построений не прибегать к интуитивным понятиям.

Выход из этой ситуации был найден в построении аксиоматической системы, которая бы опиралась на интуитивное определение множества, но затем не прибегала бы к нему в дальнейших определениях и доказательствах теорем.

К настоящему времени создано несколько аксиоматических систем теории множеств, которые в чем-то исключают, а в чем-то и дополняют друг друга. Одной из таких систем является система Цермело (Z-система), которая состоит из семи аксиом, причем их нумерация не во всех источниках совпадает. Приведем формулировки этих аксиом по книге [5].

Z1. Аксиома объемности.

Если все элементы множества X принадлежат также множеству Y, а все элементы множества Y принадлежат также множеству X, то данные множества равны.

Z2. Аксиома пары.

Для произвольных x и y существует множество, единственными элементами которого является x и y, т. е. $\{x; y\}$.

Z3. Аксиома суммы.

Для произвольных множеств X и Y существует единственное множество Z, элементами которого являются все элементы множества X и все элементы множества Y и которое никаких других элементов не содержит.

Z4. Аксиома степени.

Для любого множества А существует множество всех его подмножеств 2^A.

Z5. Аксиома выделения.

Путь А — произвольное множество, $a \in A$ и $F(a)$ — функция со значениями на множестве $\{0, 1\}$. В этом случае существует множество C, для которого $a \in C$.

Z6. Аксиома бесконечности.

Существует по крайней мере одно бесконечное множество — натуральный ряд чисел.

Z7. Аксиома выбора.

Для семейства X непустых непересекающихся множеств существует множество Y, имеющее только один общий элемент с каждым из множеств $P \in X$.

Следовательно, предполагается существование некоторой функции выбора φ, которая определяет получение единственного общего элемента с каждым из множеств семейства X.

Аксиому Z7 некоторые математики разделяют, а другие не признают.

Если все элементы множества X являются также элементами множества Y, то множество X есть подмножество множества Y. Это записывается следующим образом $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Множество всех подмножеств множества Y называется степенью этого множества и обозначается 2^y или $P(Y)$.

Множество X и Y являются равными (состоят из одних и тех же элементов) $X = Y$, если $X \subset Y$ или $Y \subset X$.

Чтобы подчеркнуть тот факт, что рассматриваемое множество X может совпадать с множеством Y, записывают $X \subseteq Y$.

Вводится понятия пустого множества (∅), которое не содержит ни одного элемента. Например, множество решений уравнения $x^2 + 4 = 0$ есть пустое множество.

Способы задания множеств

а) Словесное описание.

Например, множество X есть множество всех прямых, проходящих через точку A плоскости α.

б) Перечисление элементов, входящих в множество.

Например, $X = \{-7, 0, 12, 123, 700\}$. Элементы в приведенном списке могут располагаться в любом порядке и должны быть различны, т. е. множества $X = \{5, 5, 7\}$ и $Y = \{5, 7\}$ равны между собой. Если во множестве есть совпадающие элементы, то его называют семейством $Z = (5, 9, 9, 12, 12, 23)$ и заключают в круглые скобки.

в) Описание свойств элементов, входящих в множество.

$X = \{x \mid [(x - 3)(x - 5)] > 0\}$, т. е. элементами множества X будут только те числа, которые удовлетворяют неравенству $(x - 3)(x - 5) > 0$.

Если обозначить через $Q(x)$ свойства элементов, входящих во множество X, то для задания этого множества в общем случае можно использовать следующую запись $X = \{x \mid Q(x)\}$, т. е. множество X состоит из тех элементов x, которые удовлетворяют свойству $Q(x)$. Множество, которое содержит все рассматриваемые в некоторой задаче множества, называется универсальным и обозначается U.

Например, в качестве U можно взять множество N (заметим, что в некоторых монографиях оно начинается не с единицы, а с нуля).

$$Z = \{z \in N \mid z < 6\}, \text{ т. е. } Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Для сокращения записи в математике используют кванторы всеобщности, существования, существования и единственности:

$\forall$ — квантор всеобщности (перевернутая первая буква английского слова *All*);

$\exists$ — квантор существования (перевернутая первая буква английского слова *Exists*);

$\exists!$ — квантор существования и единственности.

Например, запись $(\forall x \in X)\ P(x)$ означает: для всех x из множества X справедливо $P(x)$; запись $(\exists y \in Y)\ R(y)$ — существует y из множества Y такое, что справедливо $R(y)$; запись $(\exists! z \in Z)\ M(z)$ — существует единственное z из множества Z такое, что справедливо $M(z)$.

Операции над множествами

Пусть задано универсальное множество U. Множество всех его подмножеств есть 2^U. Заданы также множества X и Y, причем $X \in 2^U$ и $У \in 2^U$.

Дополнением множества X называется множество X' элементов множества U, которые не принадлежат X:

$$X' = \{x \in U \mid x \notin X\}.$$

Графически операции над множествами (рис. 1.1) можно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна):

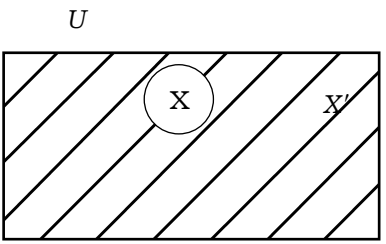


Рис. 1.1

U — изображается прямоугольником;
X — круг;
X' — заштрихованная область прямоугольника.

Пересечение ($X \cap Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих обоим этим множествам (рис. 1.2).

Объединение ($X \cup Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и $У$ (рис. 1.3).

$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$

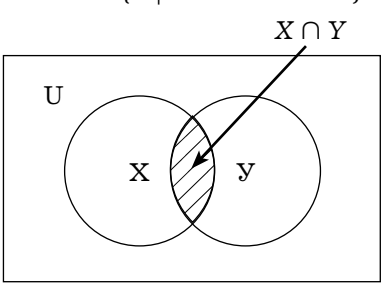


Рис. 1.2

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$

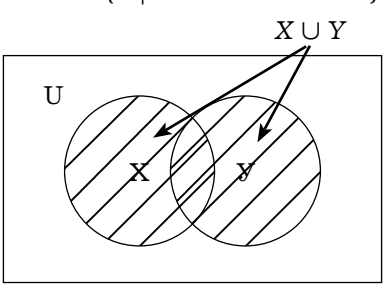


Рис. 1.3

Разность ($X \backslash Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих X, но не принадлежащих Y (рис. 1.4).

Аналогично определяется разность ($Y\backslash X$) множеств Y и X (рис. 1.5).

$X\backslash Y = \{x \mid x \in X$ и $x \notin Y\}$ $\qquad$ $Y\backslash X = \{y \mid y \in Y$ *и* $y \notin X\}$

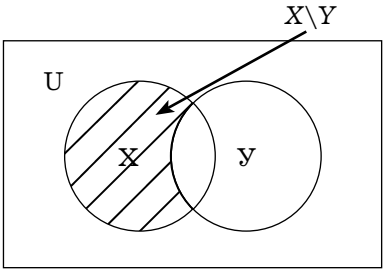


Рис. 1.4

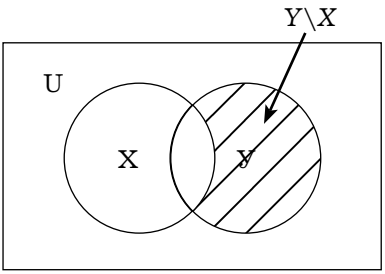


Рис. 1.5

Симметрическая разность ($X\Delta У$) множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств X и Y (рис. 1.6):

$$X\Delta Y=(X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)=(X \cup Y)\backslash(X \cap Y)$$

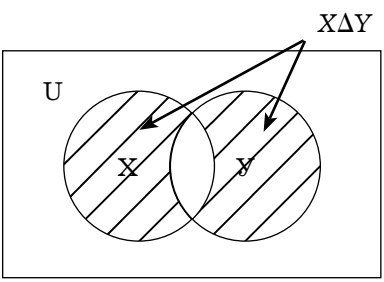


Рис. 1.6

Теперь рассмотрим конкретный числовой

Пример 1.0.

Дано множество: $X = \{-5, 0, 3, 17, 28, 33, 100\}$.

$Y = \{-7, 0, 5, 17, 33, 108\}$.

$X \cap Y = \{0, 17, 33\}$.

$X \cup Y = \{-7, -5, 0, 3, 5, 17, 28, 33, 100, 108\}$.

$X\backslash Y = \{-5, 3, 28, 100\}$.

$Y\backslash X = \{-7, 5, 108\}$.

$X\Delta Y = \{-7, -5, 3, 5, 28, 100, 108\}$.

Мощность множеств

Число элементов в конечном множестве X называют его мощностью и обозначают $|X|$ или $\#X$.

Например, $X = \{5, 12, 23, 111\}$, $|X| = 4$.

Если известны мощности множеств X и Y, то можно найти мощность их объединения по формуле:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

В общем случае имеем:

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_i |X_i| - \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| + \sum_{i<j<k} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots$$

Для подсчета элементов в конечных множествах можно использовать комбинаторику.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.

Взаимная однозначность показывает, что каждому элементу первого множества соответствует один элемент второго и наоборот.

Рассмотрим пример осуществления этого принципа.

Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 60 или мощности 40.

Используем понятие числа сочетаний из n элементов по k (они отличаются только составом элементов) (более подробно в подразд. 1.2). Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (читается n факториал).

В нашем случае имеем:

$$C_{100}^{60} = \frac{100!}{60!40!}; \quad C_{100}^{40} = \frac{100!}{40!60!}.$$

Поэтому у 100-элементного множества одинаковое количество подмножеств мощности 60 и 40 элементов.

Два множества называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое количество элементов.

Но это определение годится и для бесконечных множеств. Например, отрезки [0,1] и [0,10] равномощны, так как отображение $x \to 10x$ дает нужное соответствие.

Можно также доказать, что интервал (0,1) и луч $(0, +\infty)$ равномощны. Искомое взаимно однозначное соответствие имеет вид $x \to \frac{1}{x} - 1$.

Так же доказывается, что множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Тот факт, что множество X равномощно (эквивалентно) множеству Y записывается так: $X \sim Y$ ($|X| = |Y|$).

Множество называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел (N).

Например, множество целых чисел (Z) равномощно N, т. е. $Z \sim N$.

Доказывается:

1) подмножество счетного множества конечно или счетно;

2) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

3) объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

Множество действительных чисел (R) или множество бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. Мощность множества R больше мощности любого счетного множества и называется мощностью континуума.

Приведем без доказательства теорему Кантора—Бернштейна.

Если множество X равномощно какому-то подмножеству множества Y, а множество Y равномощно какому-то подмножеству множества X, то множества X и Y равномощны.

Дадим также общую формулировку теоремы Кантора.

Никакое множество Z не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Наглядные представления о множествах могут приводить к противоречиям.

Приведем, например, парадокс Рассела.

Типичные множества не являются своими элементами. Например, множество целых чисел (Z) само не является целым числом и не будет своим элементом. Но в принципе можно представить себе множество, которое является своим элементом, например, множество всех множеств (U). Такие множества назовем “необычными”. Теперь рассмотрим множество всех обычных множеств. Если оно обычное, то является своим элементом и, следовательно, оно — необычное, и наоборот.

В принципе понятие “множество” не является непосредственно очевидным: разные люди (научные школы) могут понимать его по-разному.

Функции, прямые произведения, отношения

Сначала дадим традиционное определение функции.

Даны два множества X и Y. Функцией, которая определена на множестве X и принимает значение на множестве Y, называется закон (f), по которому каждому элементу x из множества X ($x \in X$) ставится в соответствие один элемент y из множества Y ($y \in Y$). Обычно это записывают в виде $y = f(x)$. Множество X есть область определения функции f, а множество $E = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X\ y = f(x)\} \subseteq Y$ — множеством значений функции f. Функцию f, определенную на множестве X и принимающую значения на множестве Y, обозначают так $f : X \to Y$.

Элемент $x \in X$ называется независимой переменной (аргументом), элемент $f(x)$ называется значением функции на элементе x.

Пусть задана однозначная функция f, т. е. различным значениям ее аргументов соответствуют различные значения функции $(\forall x_1 \in X)\ (\forall x_2 \in X)\ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$. Знак “$\Leftrightarrow$” означает эквивалентность, например $A \Leftrightarrow B$ значит, что A эквивалентно B. (A тогда и только тогда, когда B).

Тогда $\forall y \in E$ может быть поставлен в соответствие единственный элемент $x \in X$, такой что $y = f(x)$ и который обозначается $x = f^{-1}(y)$. Это значит, что на множестве E определена функция $f^{-1}(y)$, которая принимает значения на множестве X и называется обратной к функции f. Если задана функция $f^{-1}(y)$: $E \to X$ и $Y = E$, т. е. когда множество значений функции f совпадает со всем множеством Y, функцию f называют взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y.

Теперь сформулируем определение прямого или декартова произведения.

Прямым произведением множеств $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ называется множество различных упорядоченных наборов (n-мерных векторов) $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3 \ldots$, $x_n \in X_n$, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, \forall i = \overline{1,n}\}$.

Заметим, что $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \neq X_n \times \ldots \times X_2 \times X_1$.

В том случае, если $X_i = X \; \forall i = \overline{1,n}$, то $X \times X \times \ldots \times X \equiv X^n$ (“$\equiv$” — тождественно равно) и называется n-й степенью множества X.

В частном случае, если имеется два множества X и Y, их прямым произведением будет множество различных упорядоченных наборов (двумерных векторов) (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$, обозначаемые $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Например, имеем два множества $X=\{5, 6\}$, $Y=\{\ln 3, \ln 7\}$.

$X \times Y = \{(5, \ln 3), (5, \ln 7), (6, \ln 3), (6, \ln 7)\}$.

$Y \times X = \{(\ln 3, 5), (\ln 7, 5), (\ln 3, 6), (\ln 7, 6)\}$.

т. е. $X \times Y \neq Y \times X$.

Теперь дадим определение отношения. Даны множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 1$; n-местным отношением между элементами множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется любое подмножество ρ прямого произведения этих множеств, т. е. $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times, \ldots, \times X_n$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$ говорят, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны отношением ρ.

Если $X_i = X \; \forall i = \overline{1,n}$, $\rho \subseteq X^n$, говорят, что ρ есть n-местное отношение на множестве X.

Для одноместных, двухместных и трехместных отношений часто используют специальные названия: унарные, бинарные, тернарные соответственно, т. е.

$n = 1$ — унарное отношение $\rho \subseteq X_1$;

$n = 2$ — бинарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2$;

$n = 3$ — тернарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$.

Если отношение совпадает с прямым произведением, оно называется полным, т. е. $\rho = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Рассмотрим конкретные примеры отношений.

Пример 1.1.

$X = \{1, 2, 7, 23, 35, 56\}$, $\rho = \{x \mid x \in X$ и $x < 23\}$, $\rho = \{1, 2, 7\}$, т. е. при $n = 1$ отношение ρ есть подмножество множества X.

Пример 1.2.

$X_1 = \{0, 1, 2\}$; $X_2 = \{5, 6, 7\}$;

$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_2 < 6\}$; $\rho = \{(0, 5), (1, 5), (2, 5)\}$.

Особый интерес представляют бинарные отношения, которые мы рассмотрим более подробно.

Если ρ есть отношение между элементами множеств X и Y, т. е. $\rho \subseteq X \times Y$, можно использовать запись $x \rho y$, т. е. x связано с y соотношением ρ.

Обратным к отношению $\rho \subseteq X \times Y$ называется отношение

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\} \subseteq Y \times X.$$

Геометрически понятие бинарного отношения показано на рис. 1.7.

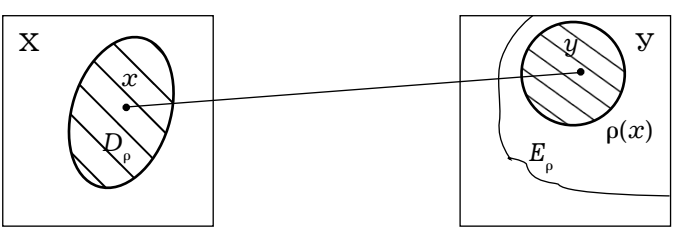


Рис 1.7

$D_\rho = \{x \mid x \in X, (xy) \in \rho\}$ — множество определения отношения $\rho \subset X \times Y$

$E_\rho = \{y \mid y \in Y, (xy) \in \rho\}$ — множество значений отношений $\rho \subset X \times Y$.

Заметим, что для $\rho^{-1} \subset Y \times X$ D_ρ и E_ρ поменяются местами. Точка x — элемент множества D_ρ, а множество $\rho(x)$ есть ρ-образ элемента x, а точка y является некоторым элементом из $\rho(x)$.

Отсюда видно, что бинарное отношение является многозначной функцией.

Заметим, что прямое произведение множества действительных чисел (R) само на себя $R \times R = R^2$ представляет собой систему координат на плоскости $x0y$.

Отношение $\rho \subseteq X \times Y \subseteq R^2$ является графиком отношения ρ.

Теперь рассмотрим конкретный пример бинарного отношения.

Пример 1.3.

Дано множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Найдем отношение ρ, если оно задано так:

$$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \text{ — делитель } x_2, x_1 \leq 5\}.$$

Отношение ρ имеет вид.

$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)\}$.

Теперь найдем множество определения и множество значений отношения ρ:

$$D_\rho = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E_\rho = X.$$

Представим полученное отношение ρ в графическом виде. Для этого зададим систему координат. Осью абсцисс будет D_ρ, а осью ординат E_ρ. По этим осям отложим элементы исходного множества X, затем соответствующие пары $(x_1 x_2)$ отметим точками и получим графическое изображение нашего отношения (рис. 1.8).

Бинарные отношения можно представить в виде графа (множества вершин и множества ребер, см. раздел “Основы теории графов”).

Вершинами будут элементы исходного множества X, а ребрами пары $(x_1 x_2)$. В данном случае важен порядок следования эле-

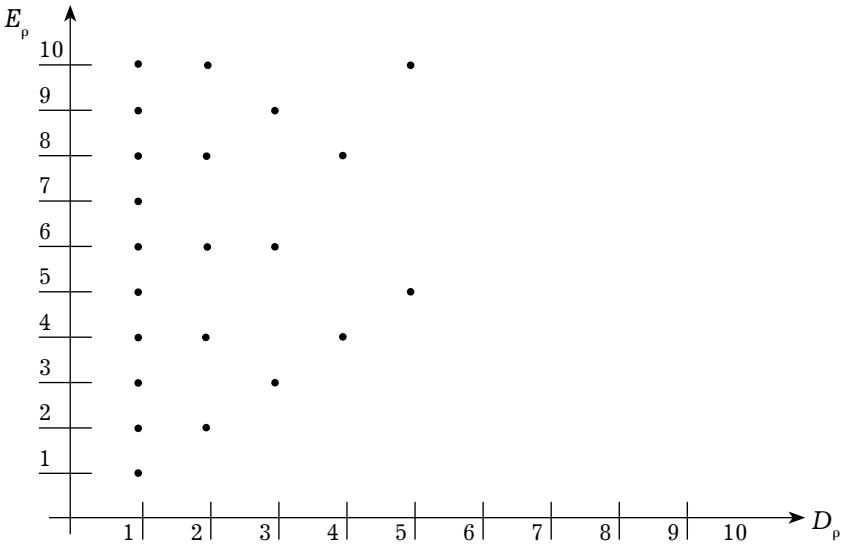


Рис. 1.8

ментов, поэтому ребра будут ориентированными (обозначим их стрелками). В результате получим следующий граф (рис. 1.9).

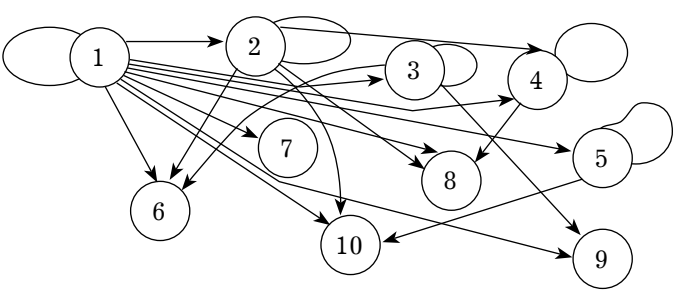


Рис. 1.9

В случае $x_1 = x_2$ получим петлю.

Наконец бинарное отношение можно представить в виде матрицы, т. е. прямоугольной таблицы размера $n \times m$, где n — количество строк, а m — количество столбцов. Например, если

имеем два множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ и бинарное отношение на элементах этих множеств $\rho \subseteq X \times Y = = \{(xy) \mid x \in X, y \in Y\}$, то этому отношению соответствует матрица размера $n \times m$, состоящая из нулей и единиц. Единицами обозначаются пары (xy), входящие в отношение ρ. (Более подробно о матрицах см. в главе 2 “Элементы линейной и векторной алгебры”.)

В данном примере имеем отношение $\rho \subseteq X^2$, т. е. ему соответствует матрица размера 10×10, число строк и столбцов которой равно числу элементов в множестве X (рис. 1.10).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1.10

В заключение рассмотрим функцию как отношение.

Отношение f между элементами множеств X и Y называется функцией, определенной на множестве X и принимающей значение на множестве Y, если

$$\forall x \in X \; \exists ! \; y \in У \mid (x,y) \in f. \tag{1.1}$$

В этом случае пишут f: $X \to У$, а вместо $(x,y) \in f$ обычно пишется $y = f(x)$; y называют значением функции f на элементе x, так как для функциональных отношений в силу (1.1) f-образом одноэлементного множества $\{x\}$ будет одноэлементное множество $\{f(x)\}$.

Заметим, что (1.1) эквивалентно выполнению двух условий:

$$f^{-1}(У) = X; \tag{1.2}$$

$$y_1 = f(x) \text{ и } y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2. \tag{1.3}$$

Иногда отношения называют функцией, если выполнено только условие (1.3), а если выполнено и условие (1.2), то *отображением.*

Часто слова функция и отображения используют как синонимы.

1.2. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика — часть математики, которая посвящена решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами, т. е. комбинаторика решает задачи выбора элементов из конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.

Приведем правила сложения и умножения, которые применяются в комбинаторике.

Правило сложения. Если выбор каждого из объектов A_i $(i = \overline{1,k})$ можно сделать n_i способами, то выбор или A_1 или A_2, ..., или A_k можно произвести $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Правило умножения. Если выбор каждого из k объектов B_i $(i = \overline{1,k})$ можно сделать m_i способами, то выбор и B_1, и B_2, ..., и B_k можно осуществить $N = \prod_{i=1}^{k} m_i$ способами.

Приведем конкретные примеры применения этих правил.

Пример 1.4. Из Москвы в Санкт-Петербург можно добраться самолетом, поездом, автобусом. Есть пять автобусных маршрутов, два авиамаршрута, один железнодорожный. Поэтому общее число маршрутов между Москвой и Санкт-Петербургом равно: $n = 5 + 2 + 1 = 8$.

Пример 1.5. Из пункта A в пункт B можно доехать по 5 дорогам, из B в C — по трем дорогам, а из C в D — по четырем дорогам (рис. 1.11). Сколькими способами можно проехать из A в D через B и C?

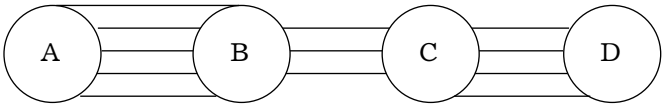


Рис. 1.11

По правилу произведения получаем $N = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

Размещения

Дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов исходного множества. Все эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения.

Обозначим размещения из n элементов по m

$$A_n^m = n(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (читается n факториал).

Принимается, что $0! = 1$ и $A_0^0 = 1$.

Пример 1.6. В футбольной премьер-лиге РФ участвует 16 команд. Сколькими способами можно распределить три первых призовых места?

Так как в данном случае порядок команд имеет значение, то имеем дело с размещениями, т. е.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{1\times2\times3\times\ldots\times16}{1\times2\times3\times\ldots\times13} = 14\times15\times16 = 3360.$$

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т. е.

$$(A_n^m)_{\text{повт}} = n^m.$$

Пример 1.7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5,6,7,8. $(A_4^3)_{\text{повт}} = 4^3 = 64$ трехзначных числа.

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов исходного множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов, т. е.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример 1.8. Расставить четыре книги на полки можно $P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ способами.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида, ..., n_i элементов i-го вида, то число перестановок с повторениями находится по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_i) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_i!}; \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_i.$$

Пример 1.9. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр: 2, 2, 3, 3, 4, 4. В данном случае $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, т. е.

$$P_6(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2} = 90.$$

Сочетания

Дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов исходного множества. Различными подмножествами считаются только те, которые отличаются по составу элементов.

Обозначив число сочетаний через C_n^m, получим

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.10. В бригаде 25 человек. Надо найти четырех человек для работы в ночную смену. Сколькими способами это можно сделать.

Так как порядок выбранных четырех рабочих не имеет значения, то имеем

$$C_{25}^{4}=\frac{25!}{4!(25-4)!}=\frac{25\times24\times23\times22}{1\times2\times3\times4}=12650.$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m находятся по формуле

$$\left(C_n^m\right)_{\text{повт}}=C_{n+m-1}^{m}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 1.11. Число различных бросаний трех одинаковых кубиков равно

$$(C_6^3)_{\text{повт}}=C_{6+3-1}^{3}=C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}=56.$$

С числами C_n^m связано функциональное тождество, которое называется формулой бинома Ньютона. Для любых $n\in N$ верно равенство

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+...+C_n^ma^{n-m}b^m+...+C_n^na^0b^n.$$

При $a=1$ имеем

$$(1+b)^n=C_n^0+C_n^1b+.....+C_n^mb^m+....+C_n^nb^n.$$

Пример 1.12. Используя бином Ньютона найти $(1+b)^7$.

$$(1+b)^7=1+C_7^1b+C_7^2b^2+C_7^3b^3+C_7^4b^4+C_7^5b^5+C_7^6b^6+C_7^7b^7=$$
$$=1+7b+21b^2+35b^3+35b^4+21b^5+7b^6+b^7.$$

1.3. Основы теории графов

Впервые термин “граф” был употреблен венгерским математиком Д. Кенигом в 1936 г. Но начало теории графов было положено Л. Эйлером в 1736 г., когда он решил задачу о кенигсбергских мостах и нашел критерий существования в графе специального маршрута (эйлерова цикла). Но как математическая дисциплина теория графов сформировалась именно в первой трети XX в. Эта теория располагает аппаратом решения различных прикладных задач из разных областей на-

уки и техники, например, сетевое планирование и управление. В настоящее время теория графов — один из наиболее быстро развивающихся разделов математики.

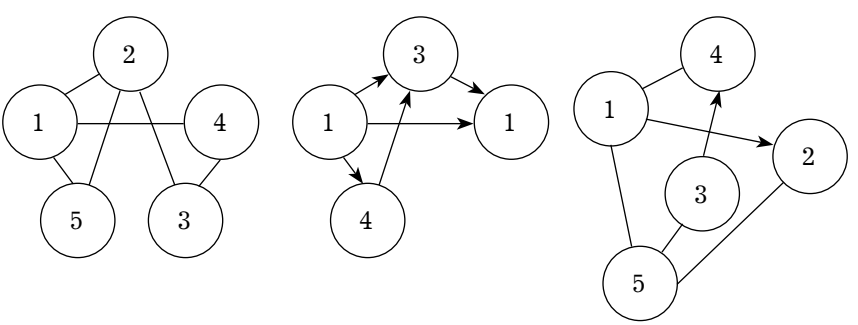
Предположим, что V — это непустое конечное множество, а $V^{(2)}$ — это множество всех его двухэлементных подмножеств. Множество E является произвольным подмножеством множества $V^{(2)}$, т. е. $E \subseteq V^{(2)}$.

Тогда графом (G) называется пара множеств (V, E), т. е. $G = (V, E)$, где VG — множество вершин графа, а EG — множество его ребер. Любое ребро графа определяется парой его вершин. Если все пары вершин упорядоченные, то граф называется ориентированным (его ребра обозначают стрелками), в противном случае он — неориентированный. В том случае, если в графе есть ориентированные и неориентированные ребра, он называется смешанным. Ориентированный граф G можно задать как отношение, т. е. как подмножество прямого произведения множества его вершин V само на себя.

$$G \subseteq V \times V.$$

В этом случае множество всех двухэлементных подмножеств $V^{(2)}$ заменяется декартовым произведением $V \times V$.

Графы обычно изображаются в виде рисунков, на которых вершины изображаются кружками (точками), а ребра отрезками (рис. 1.12).



а) неориентированный граф б) ориентированный граф в) смешанный граф

Рис. 1.12

Приведем конкретный пример.

Пример 1.13. Пусть задано множество V={1,2,3}. Тогда

$$V^{(2)} = \{(1,2), (1,3), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (3,1), (3,2)\}.$$
$$E = \{(1,2), (1,3), (3,2)\}.$$

Предположив, что порядок вершин имеет значение, получаем следующий ориентированный граф (рис. 1.13).

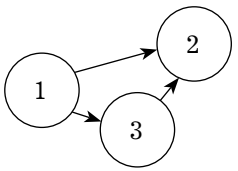


Рис. 1.13

Далее вершины графа будем обозначать буквами V_1, V_2, V_3, ...,V_n, а ребра e_1, e_2, ..., e_m. Вообще говоря, две вершины V_i и V_j определяют ребро e_k т. е. $e_k = (V_i,V_j)$ (рис. 1.14).

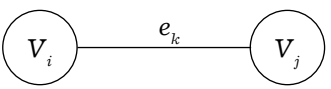


Рис. 1.14

И в этом случае они будут концевыми вершинами ребра e_k. Но концевые вершины ребра не обязательно различны, т. е. начальная и конечная вершины могут совпадать. В этом случае ребро становится петлей (рис. 1.15).

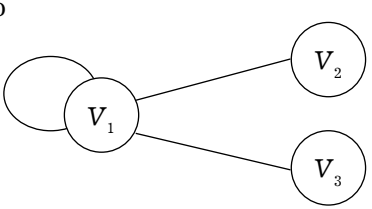


Рис. 1.15

Граф, имеющий петли, иногда называют псевдографом (рис. 1.16)

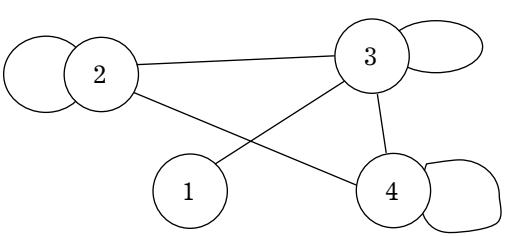


Рис. 1.16

Между двумя вершинами может проходить и несколько ребер (ориентированных и неориентированных), их называют параллельными. А граф, имеющий такие ребра, называют мультиграфом (см. рис. 1.17). Мультиграф — это пара (V, E),

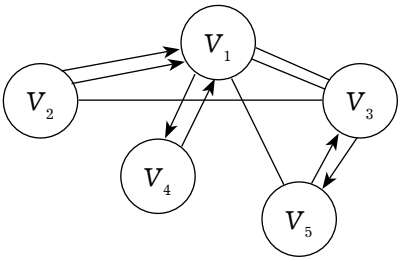


Рис. 1.17

где V — множество вершин, а E — семейство подмножеств множества $V^{(2)}$. Употребление термина “семейство” говорит о том, что элементы множества $V^{(2)}$ могут повторяться (возможны параллельные ребра).

Если граф не имеет петель и параллельных ребер его называют простым (см. рис. 1.13). Граф G называется графом порядка n, если он содержит n вершин. (На рис. 1.18 приведен граф восьмого порядка.)

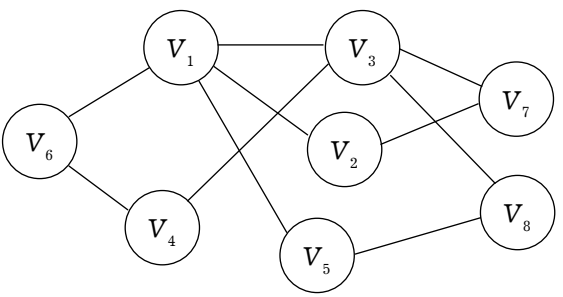


Рис. 1.18

Граф, который не имеет ребер (состоит только из вершин) называется пустым (рис. 1.19).

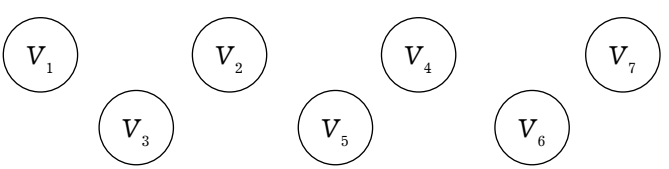


Рис. 1.19

Граф, не имеющий вершин, называется ноль-графом ($\varnothing$). Две вершины называются смежными, если они являются концевыми вершинами какого-то ребра (например, вершины V_1 и V_3; V_2 и V_7 на рис. 1.18).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, то они являются смежными (например, ребра e_1 и e_2; e_2 и e_4 на рис. 1.20).

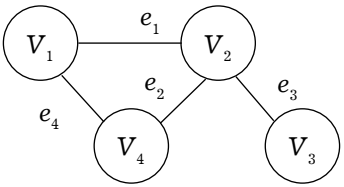


Рис. 1.20

Если имеют в виду разные элементы графа (вершины и ребра), то используют понятия инцидентности, т. е. ребро инцидентно своим концевым вершинам (например, ребро e_3 инцидентно вершинам V_2 и V_3).

Число инцидентных вершине ребер называется степенью (валентностью) этой вершины и обозначается $d(V_i)$. Например, степень вершины V_2 равна 3 ($d\ (V_2) = 3$).

Вершина степени 1 называется висячей, вершина степени ноль — изолированной, а петля при вершине добавляет в степень этой вершины двойку.

Например, вершина V_4 на рис. 1.21 является висячей, а вершина V_6 — изолированной, а степень вершины V_1 равна 4 ($dV_1 = 4$, два ребра и петля).

Граф называют полным, если две любые его вершины смежные (см. рис. 1.13).

Приведем без доказательства две теоремы.

Теорема 1.1. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер. У графа на рис. 1.21 имеется 7 ребер, а сумма степени его вершин равна — 14.

Теорема 1.2. Число вершин нечетной степени в любом графе четно. Например, у графа, изображенного на рис. 1.21 таких вершин две (V_4 и V_5).

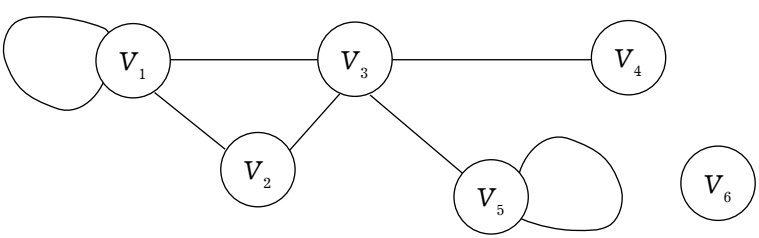


Рис. 1.21

Может оказаться, что один и тот же граф изображается разными рисунками. Говорят, что два графа G_1 и G_2 изоморфны, если существует такое взаимнооднозначное соответствие между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов ицидентны соответствующим вершинам этих графов. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

На рис. 1.22 приведен пример изоморфных графов.

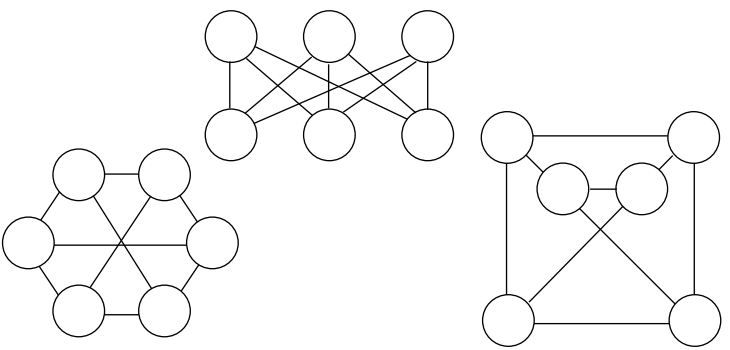


Рис. 1.22

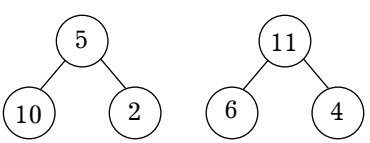


Рис. 1.23

В тех случаях, когда необходимо различать изоморфные графы помечают их вершины и (или) ребра (рис. 1.23).

Маршруты, цепи, пути, циклы

Маршрут в графе — это конечная чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и оканчивающаяся на вершине, причем одинаковые вершины и ребра в маршруте могут повторяться. Например, маршрут $V_1e_1\ V_2e_5\ V_4e_6\ V_1e_8\ V_6e_7\ V_4$ на рис. 1.24.

Маршрут называют открытым, если его конечные вершины различны, в противном случае он является замкнутым, например маршрут $V_1e_1\ V_2e_5\ V_4e_6\ V_1e_8\ V_6e_7\ V_4e_6V_1$ на рис. 1.24.

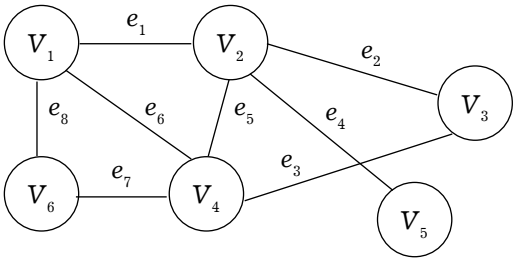


Рис. 1.24

Маршрут называют цепью, если все его ребра различны. Цепь является открытой, если ее конечные вершины различны, в противном случае она — замкнутая.

На рис. 1.25 $V_2e_1\ V_3e_3\ V_5e_{13}\ V_1e_5\ V_3\ e_8V_4$ — открытая цепь, а $V_1e_{13}\ V_5e_3\ V_3e_2\ V_2e_1\ V_3e_7\ V_1$ — замкнутая цепь.

Открытую цепь называют путем, если все ее вершины различны, например $V_4e_8\ V_3e_6\ V_1e_{11}\ V_6$ на рис. 1.25.

Замкнутую цепь называют циклом, если все ее вершины за исключением концевых различны, например $V_3e_3\ V_5e_{13}\ V_1e_7\ V_3$ на рис. 1.25.

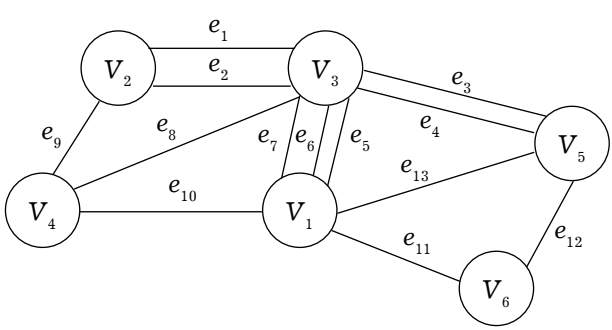


Рис. 1.25

Две несовпадающие вершины V_i и V_j в графе G называются связными, если существует маршрут V_i - V_j.

Граф G называют связным, если две его любые несовпадающие вершины могут быть соединены маршрутом. Например,

связными являются графы на рис. 1.24 и 1.25, а несвязным — граф, изображенный на рис. 1.26.

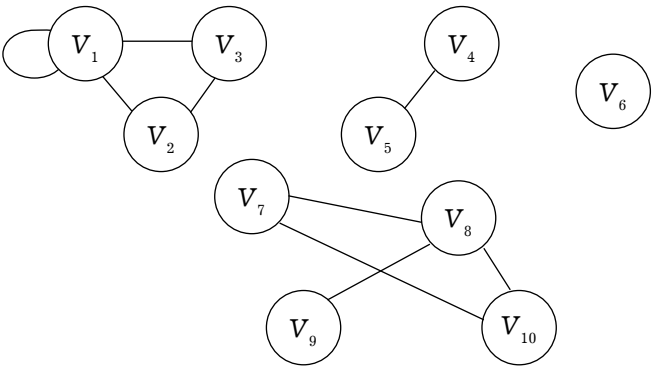


Рис. 1.26

Деревья и лес

Большую роль в различных отраслях науки имеют связные ациклические (не имеющие циклов) графы, мощность множества ребер которых на единицу меньше мощности множества вершин, т. е. если $|VG| = m$, то $|EG| = m - 1$. Эти графы носят название деревьев. Заметим, что $(m - 1)$ — это минимальное количество ребер для того, чтобы граф был связным.

Примерами древовидной структуры являются генеалогический граф, схема вертикали управления любой организации, совокупность всех файлов, размещенных на диске ПЭВМ. Пример дерева приведен на рис. 1.27.

Несвязный граф, компонентами которого являются деревья, называется лесом (рис. 1.28).

Матрицы графов

1. Матрица инцидентности.

Рассмотрим простой граф G (без петель и параллельных ребер), имеющий n вершин и m ребер. Ему соответствует матрица инцидентности размера $n \times m$, т. е.

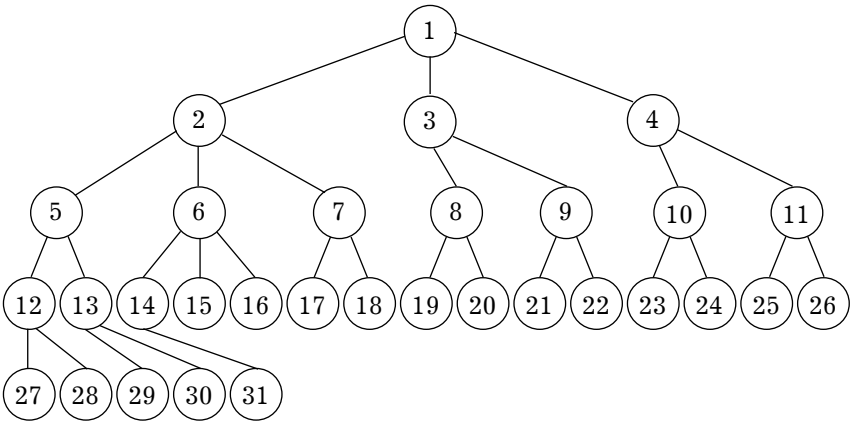


Рис. 1.27

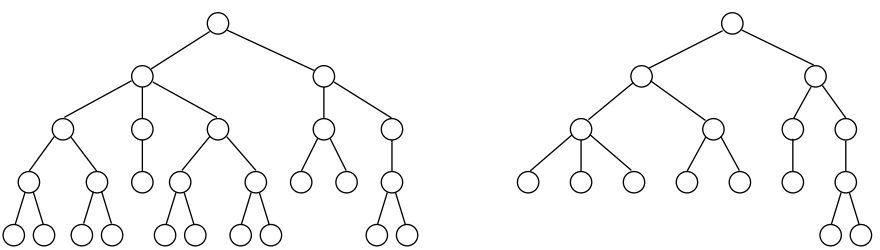


Рис. 1.28

$$A_I = [a_{ij}],\ где\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\ ;$$

Каждый элемент этой матрицы a_{ij} в случае ориентированного графа определяется следующим образом.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i \text{ и исходит из нее;} \\ -1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i \text{ и входит в нее;} \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ неинцидентно вершине } i. \end{cases}$$

В случае неориентированного графа имеем

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i; \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ неинцидентно вершине } i. \end{cases}$$

Рассмотрим конкретный пример. Имеем ориентированный граф, имеющий 5 вершин и 7 ребер. (рис. 1.29).

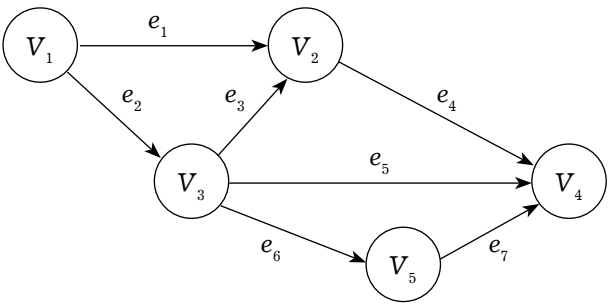


Рис. 1.29

Ему соответствует матрица инцидентности размера 5×7 следующего вида

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

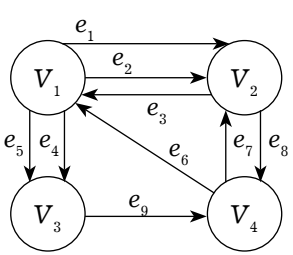


Рис. 1.30

В случае задания мультиграфа (имеет параллельные ребра) матрица инцидентности определяется по приведенным выше правилам. Например, найдем матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис. 1.30.

Искомая матрица имеет размер (4×9) и выглядит следующим образом

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица смежности.

Пусть задан псевдограф (имеет петли), содержащий n вершин и m ребер.

Матрицей смежности этого графа A_s называется матрица размера $n \times n$, т. е.

$$A_s = (a_{ij}), i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Любой элемент этой матрицы a_{ij} в случае ориентированного графа определяется следующим образом.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } (V_i V_j) \in e_k \text{ и ребро исходит из вершины } V_i; \\ 0, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае, если граф G неориентированный, то любой элемент его матрицы смежности определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } V_i \text{ и } V_j \text{ принадлежит ребру } e_k; \\ 0, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Матрица A_s в этом случае будет симметричной относительно главной диагонали. Рассмотрим конкретный пример. Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис. 1.31.

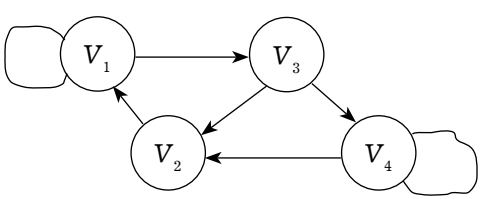


Рис. 1.31

Искомая матрица смежности имеет размер 4×4 и выглядит так:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В том случае, если граф кроме петель имеет параллельные ребра, матрица A_s находится по следующим правилам.

Если задан ориентированный граф, то каждый элемент его матрицы смежности находится так:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum \text{ числа ребер, выходящих из вершины } V_i \text{ и входящих в вершину } V_j; \\ 0 \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае неориентированного графа имеем:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum \text{ числа ребер между смежными вершинами } V_i \text{ и } V_j; \\ 0 \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис 1.32.

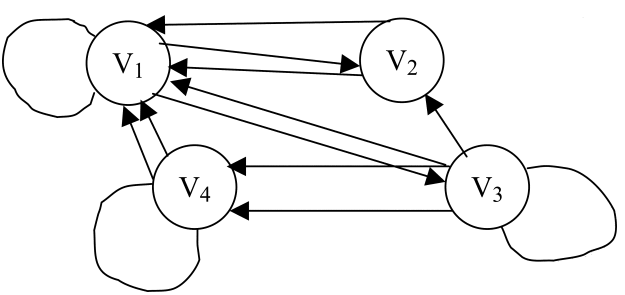


Рис. 1.32

Данному графу соответствует матрица смежности размера 4×4, имеющая вид:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Раскраски

Задачи раскраски вершин или ребер графа занимают важное место в теории графов. Особенностью этих задач является существование объектов, которые по каким-то причинам могут быть объединены в одну группу.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, $k \in N$. Произвольная функция вида $f: VG \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ называется вершинной k-раскраской, или просто k-раскраской. Раскраска называется правильной, если для любых смежных вершин V_i и V_j выполняется неравенство $f(V_i) \neq f(V_j)$. Граф, для которого существует правильная k-раскраска называется k-раскрашиваемым. В определении раскраски вместо множества $\{1, 2, 3, ..., k\}$ можно взять произвольное k-элементное множество. Правильную k-раскраску графа можно трактовать как окрашивание каждой его вершины в один из k цветов, при этом смежные вершины должны быть окрашены в разные цвета. При k-раскраске может быть использовано и менее k цветов. Правильную k-раскраску графа G можно рассматривать как разбиение

$$V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t = VG, t \leq k$$

множества вершин VG на не более чем k непустых классов, каждый из которых является независимым множеством. Классы этого разбиения называются цветными классами. Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется хроматическим числом этого графа и обозначается $\chi(G)$. Если $\chi(G) = k$, то граф G называется k-хроматическим. Правильная k-раскраска G при $k = \chi(G)$ называется минимальной.

На рис. 1.33 приведена одна из правильных 4-раскрасок, причем меньшим числом цветов этот граф раскрасить нельзя (краски обозначены номерами).

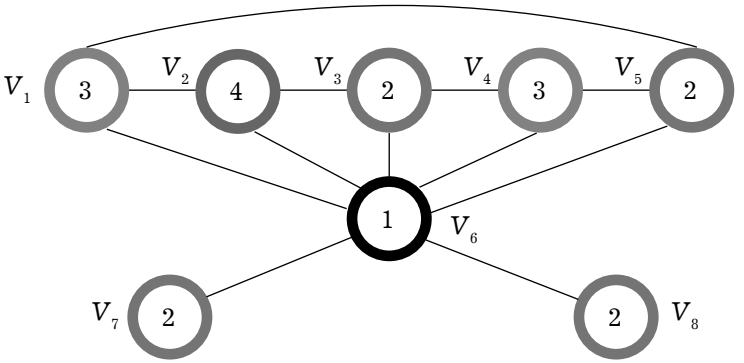


Рис. 1.33

Плоские и планарные графы

В некоторых случаях необходимо знать, можно ли изобразить граф на плоскости так, чтобы его изображение удовлетворяло некоторым условиям. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем проводники электрического тока не должны пересекаться. Такая же задача возникает при проектировании железнодорожных трасс, когда нежелательны переезды. Поэтому вводится понятие плоского графа.

Плоским называют граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра — непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Примеры плоских графов показаны на рис. 1.34.

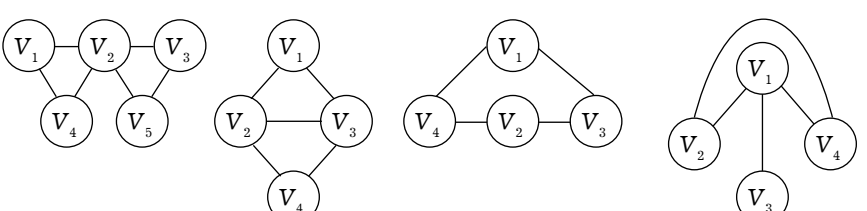


Рис. 1.34

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным. На рис. 1.35, *а* приведен плоский граф, а на рис. 1.35, *б* — планарный граф, изоморфный графу на рис. 1.35, *а*.

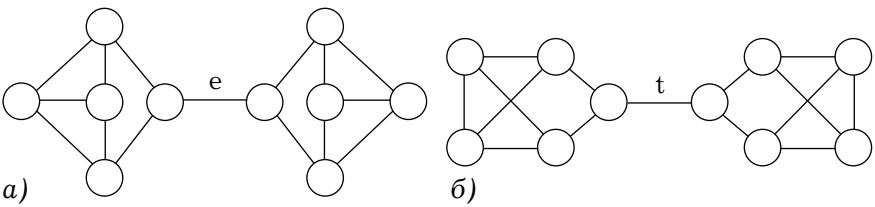


Рис. 1.35

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых в этой теории. Первоначально вопрос формулировался так: достаточно ли четырех красок для такой раскраски произвольной географической карты, при которой любые две соседние страны окрашены в разные цвета. Рассматриваются только те карты, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой линии, а соседними считаются страны, имеющие общую границу ненулевой длины.

Позднее понятие карты сформулировали так: карта — это связный плоский мультиграф без мостов (ребро графа называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент графа, мостами являются ребра e и t в графах на рис. 1.35, *а*, *б*).

В 1879 г. английский математик А. Кэли сформулировал гипотезу четырех красок так: всякая карта 4-раскрашиваема.

Часто пользуются другой формулировкой: всякий планарный граф 4-раскрашиваем.

В 1890 г. Р. Хивуд показал, что если 4 заменить на 5, то гипотеза легко доказывается, т. е. верна теорема: всякий планарный граф 5-раскрашиваем.

Эйлеровы цепи

Как уже упоминалось, с задачи о кенингсбергских мостах началась теория графов. На рис. 1.36 показан план расположе-

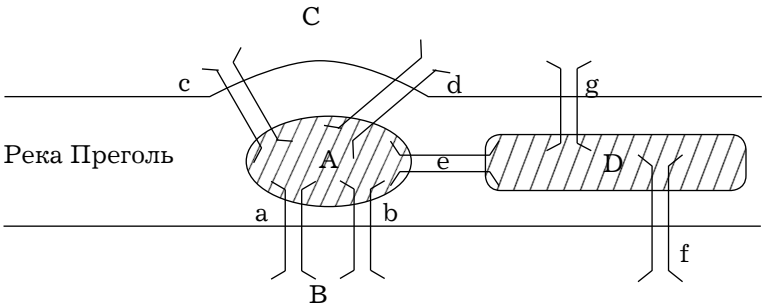


Рис. 1.36

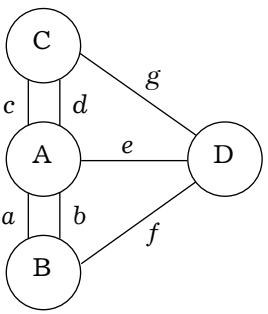


Рис. 1.37

ния семи мостов на реке Преголь в городе Кенингсберге (ныне Калининград). Задача состоит в том, чтобы пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку.

Так как существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины — различным, разделенным мостами, участками города (рис. 1.37).

Л. Эйлер обратился к общей задаче, касающейся теории графов: в каких случаях в конечном графе можно найти такой цикл, в котором каждое ребро графа участвовало бы один раз?

Если такой цикл (замкнутая цепь) есть, он называется эйлеровым, а граф, содержащий его — эйлеровым графом.

Л. Эйлер сформулировал и доказал теорему: конечный граф G является Эйлеровым графом тогда и только тогда, когда: а) граф является связным; б) степени всех его вершин четные.

Из теоремы Л. Эйлера следует, что задача о кенингсбергских мостах не имеет решения (граф на рис. 1.37 не Эйлеров, так как степени всех его четырех вершин являются нечетными $d(A) = 5$; $d(B) = 3$; $d(C) = 3$; $d(D) = 3$).

Если обобщить задачу Л. Эйлера, то надо искать наименьшее число не пересекающихся по ребрам цепей N_i, которые не-

обходимы для того, чтобы покрыть конечный связный граф G, т. е. включающий все его ребра в цепи N_i. Решение этой задачи сводится к задаче Л. Эйлера.

Гамильтоновы графы

Гамильтоновым называется граф, если в нем есть цикл, который содержит каждую вершину этого графа. Сам этот цикл тоже называется гамильтоновым. Гамильтоновым называют и путь, содержащий каждую вершину графа. Название “гамильтонов” в приведенном определении связано с именем ирландского математика У. Гамильтона, которым в 1859 г. была предложена игра “Кругосветное путешествие”.

Игра состоит в следующем. Каждой из вершин додекаэдра приписывается название города. Необходимо, переезжая из одного города в другой по ребрам додекаэдра, посетить каждый город один раз и вернуться в исходный пункт маршрута. Эта задача сводится к нахождению в исходном графе (рис. 1.38) цикла, проходящего через каждую вершину этого графа.

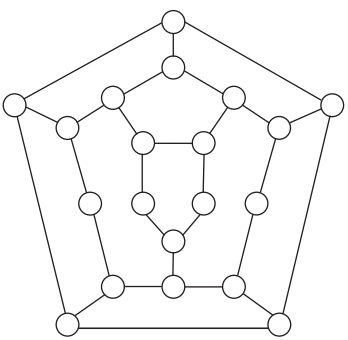


Рис. 1.38

В применении графов к играм вершины графа соответствуют различным позициям. Поэтому наличие гамильтонова цикла равносильно существованию цикличной последовательности ходов, которая содержит каждую позицию по одному разу. Примером является задача о шахматном коне: можно ли, начиная с любого поля на доске, двигать коня в такой последовательности, чтобы пройти через каждое из шестидесяти четырех полей и вернуться в исходное?

Одно из возможных решений показано на рис. 1.39 [43].

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38

42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

Рис. 1.39

В ориентированных графах можно искать ориентированные циклы, которые проходят через каждую вершину по одному разу.

Несмотря на сходство с эйлеровыми циклами, теория гамильтоновых циклов имеет с ней мало общего. Критерий существования эйлеровых циклов был установлен достаточно просто. А для гамильтоновых циклов общего правила неизвестно. Иногда даже для конкретных графов бывает трудно определить, имеется ли такой цикл. Для изучения вопроса о существовании гамильтоновых циклов в связном графе предположение об отсутствии кратных ребер или петель не является ограничением.

Пример 1.14.

Собираясь в отпуск, служащий одной из компаний решил посетить Токио, Дели, Осло, Сидней и Рим. Он позвонил в различные авиакомпании и узнал стоимость перелета между любыми двумя городами и предоставляемые льготы (у. е.). У него получилась следующая таблица (матрица) стоимостей (табл. 1.1).

Таблица 1.1

№ п/п	Город	Москва	Токио	Дели	Осло	Сидней	Рим
1	Москва	***	270	430	160	300	260
2	Токио	70	***	160	10	300	300
3	Дели	200	130	***	350	50	0
4	Осло	210	160	250	***	180	180
5	Сидней	120	460	270	480	***	50
6	Рим	230	50	50	90	50	***

В каком порядке надо объехать эти города и вернуться назад, чтобы стоимость проезда была минимальной?

Решение. Для удобства вычислений уменьшим все величины в 10 раз и пронумеруем пункты. Если бы не было льгот, предоставляемых авиакомпаниями, матрица стоимостей получилась бы симметричной относительно главной диагонали. Симметричные матрицы получаются, если рассматривать расстояния между городами или время в пути. Обозначим через c_{ij} стоимость проезда из i-го пункта в j-й. Следовательно, i и j могут принимать значения от 1 до n (в нашем случае $n = 6$). Пусть T — некоторый маршрут. Если в маршруте предусмотрен переезд из i-го пункта в j-й, то будем говорить, что в маршруте T есть дуга или звено (i, j). Следовательно, весь маршрут — совокупность n звеньев:

$$T = \{(p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n), (p_n, p_1)\},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — номера городов.

Величину c_{ij} называют еще длиной звена (i, j) . Будем считать $c_{ij} = \infty$. Обозначим через $z(T)$ стоимость маршрута T. Ясно, что она складывается из стоимостей проезда по отдельным звеньям и должна быть сделана как можно меньше, т. е. минимизирована. Этот факт принято записывать с помощью формулы

$$z(T) = \sum_{(i,j)\in T} c_{ij} \to \min.$$

Величина $z(T)$ определена для любого маршрута и не может быть меньше величины стоимости оптимально маршрута, т. е. значение $z(T)$ какого-либо маршрута является верхней границей стоимости оптимального маршрута. Пусть

$$T = \{(1, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 2), (2, 1)\},$$

тогда

$$z(T) = 16 + 18 + 27 + 0 + 5 + 7 = 73.$$

Обозначим минимальную стоимость $z^*(T)$, ее верхнюю границу — $\overline{z(T)}$, нижнюю границу — $\underline{z(T)}$. Тогда

$$\underline{z(T)} \le z^*(T) \le \overline{z(T)} = z(T) = 73.$$

Остается открытым вопрос, как вычислять нижнюю границу $\underline{z(T)}$? Для вычисления $\underline{z(T)}$ применяют редукцию строк и столбцов.

Определение. *Редукция строки (столбца)* — процедура вычитания из каждого элемента строки (столбца) наименьшего элемента этой же строки (столбца).

Проведем редукцию строк исходной матрицы, запоминая значение минимального элемента каждой строки в специальном столбце C_i, где $i = \overline{1, 6}$ (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Редукция строк

Узлы	1	2	3	4	5	6	C_i
1	∞	11	27	0	14	10	16
2	6	∞	15	0	29	29	1
3	20	13	∞	35	5	0	0
4	5	0	9	∞	2	2	16
5	7	41	22	43	∞	0	5
6	18	0	0	4	0	∞	5

Проведем редукцию столбцов полученной матрицы, запоминая значение минимального элемента каждого столбца в специальной строке q_j, где $i = \overline{1, 6}$ (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Редукция столбцов

Узлы	1	2	3	4	5	6	C_i
1	∞	11	27	0	14	10	16
2	1	∞	15	0	29	29	1
3	15	13	∞	35	5	0	0
4	0	0	9	∞	2	2	16
5	2	41	22	43	∞	0	5
6	13	0	0	4	0	∞	5
q_j	5	0	0	0	0	0	5 43

После редукции строк и столбцов в каждой строке и в каждом столбце будет по крайней мере один нулевой элемент. Такую матрицу будем называть *редуцированной*. Каждый пункт во время путешествия посещается 1 раз, поэтому в стоимость любого маршрута войдет одно число из каждой строки и одно число из каждого столбца. Если вычесть из каждого элемента некоторой строки или столбца матрицы стоимостей одну и ту же величину C, то стоимость любого маршрута, определяемого новой матрицей, меньше стоимости того же маршрута, определяемого старой матрицей, на величину C. При редукции матрицы все маршруты "дешевеют" на одну и ту же величину одновременно, поэтому отношения $<, >, \leq, \geq, =$ между стоимостями маршрутов останутся теми же. Эта величина — сумма всех констант, вынесенных в специальную строку и столбец при редукции. Обозначим ее H:

$$H = C_1 + C_2 + \ldots + C_6 + q_1 + q_2 + \ldots + q_6 = \sum_{i=1}^{6} C_i + \sum_{i=1}^{6} q_i = 48.$$

Если $z(T)$ — стоимость некоторого маршрута до редукции, $z_1(T)$ — его же стоимость после редукции, то

$$z(T) = z_1(T) + H.$$

Редуцированная матрица содержит в каждой строке и в каждом столбце по крайней мере один нулевой элемент. Ясно, что если из этих элементов можно составить маршрут, то его стоимость $z_1(T) = 0$, т. е. минимальная. Если маршрут составить нельзя, то придется привлекать ненулевые элементы, повышая тем самым стоимость маршрута. Следовательно, величина H является нижней границей $\underline{z(T)}$ для данной матрицы стоимостей. Итак,

$$48 \leq z^*(T) \leq 73.$$

Если бы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по одному нулевому элементу, то соответствующие пункты и образовывали бы оптимальный маршрут с оптимальной стоимостью H. Но в нашем случае это не так. С помощью метода ветвей и границ (МВГ) будем строить оптимальный маршрут постепенно, выявлял по одному принадлежащему этому маршруту

звену. Естественно вначале выбрать звено с минимальной стоимостью, т. е. нулевой длины: $c_{ij} = 0$, а потом добавлять к нему новые звенья с нулевой длиной, а если это невозможно, то с минимальной. Если звено (i, j) включается в маршрут, то решение не должно содержать звеньев, начинающихся в i-м и заканчивающихся в j-м пунктах. Поэтому i-ю строку и j-й столбец можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Итак, разделим множество всех маршрутов на две части: одна часть содержит звено (i, j), а другая не содержит (рис. 1.40).

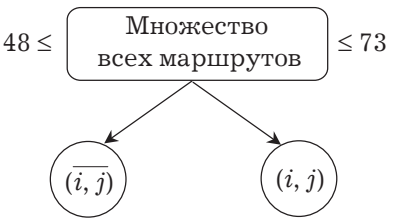


Рис. 1.40.

После этого решим вопрос, содержится ли рассматриваемое звено в оптимальном маршруте или нет? Таким образом, мы решим вопрос о неперспективности ветви.

Используем табл. 1.3. Видим, что в некоторых строках и столбцах имеется по два и более равных нулю элементов. Если мы не включаем звено (i, j) с $c_{ij} = 0$ в маршрут, то в любом случае из i-го пункта надо куда-то выезжать, а в j-й надо откуда-то прибывать. Следовательно, не включая звено (i, j) в маршрут, мы несем издержки, которые стремимся сделать как можно меньше. Поэтому каждый маршрут, не содержащий звено (i, j), должен содержать некоторое звено A, начинающееся в i-й строке и не совпадающее с (i, j), у которого стоимость минимальная. Обозначим стоимость таких звеньев в каждой строке A_i $(i = \overline{1, 6})$ и поместим их значения в специальный столбец. Далее маршрут, не содержащий звено (i, j), должен содержать некоторое звено B, заканчивающееся в j-м столбце и не совпадающее с (i, j), у которого стоимость минимальная. Обозначим стоимость таких звеньев в каждом столбце B_j $(j = \overline{1, 6})$ и поместим их значения в специальную строку. Внесем в таблицу и значение H (табл. 1.4).

При неиспользовании звена (i, j) издержки составят как минимум $A_i + B_j = \Phi_{ij}$. Величина Φ_{ij} называется *вторичным штрафом*. Это минимальный штраф (издержки), которому мы подвергаемся, если не включаем звено (i, j) в оптимальный мар-

Таблица 1.4

Узлы	1	2	3	4	5	6	C_i	A_i
1	∞	11	27	0	14	10	16	10
2	1	∞	15	0	29	29	1	1
3	15	13	∞	35	5	0	0	5
4	0	0	9	∞	2	2	16	0
5	2	41	22	43	∞	0	5	2
6	13	0	0	4	0	∞	5	0
q_j	5	0	0	0	0	0	$H = 48$	
B_j	1	0	9	0	2	0		

шрут. Вычислим Φ_{ij} для всех звеньев редуцированной матрицы стоимостей с $c_{ij} = 0$ и сравним их: $\Phi_{14} = 10$, $\Phi_{24} = 1$, $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{41} = 1$, $\Phi_{42} = 0$, $\Phi_{56} = 2$, $\Phi_{62} = 0$, $\Phi_{63} = 9$, $\Phi_{65} = 2$, $\max \Phi_{ij} = \Phi_{14} = 10$. Ясно, что в первую очередь надо решить, включать ли в оптимальный маршрут звено (1,4), ведь при использовании его будут самые большие издержки. Именно поэтому (1, 4) выбираем в качестве *базового звена для ветвления*.

Определим нижнюю границу стоимостей маршрутов, не содержащих звена (1,4). Ясно, что их стоимость не меньше 48 — текущей нижней границы. Не используя звено (1, 4), мы вынуждены "раскошелиться" еще как минимум на 10, поэтому нижняя граница этого множества маршрутов будет 48 + 10 = 58 (рис. 1.41).

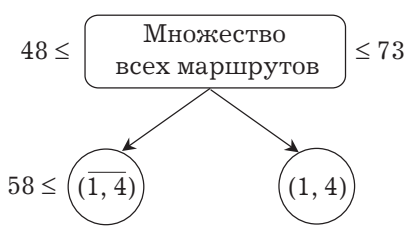


Рис. 1.41

Чтобы определить новую нижнюю границу для маршрутов, включающих звено (1, 4), необходимо преобразовать матрицу, стоимостей. Как уже говорилось, 1-ю строку и 4-й столбец можно исключить из рассмотрения. Кроме того, звено (4, 1) использовать уже нельзя, иначе возникает замкнутый подмаршрут (неполный маршрут) {(1, 4), (4, 1)}, что противоречит

смыслу задачи. Исключить это звено из рассмотрения можно, положив $c_{41} = \infty$. Получим преобразованную матрицу стоимостей (табл. 1.5):

Таблица 1.5

Узлы	1	2	3	5	6
2	1	∞	15	29	29
3	15	13	∞	5	0
4	∞	0	9	2	2
5	2	41	22	∞	0
6	13	0	0	0	∞

Редуцируем ее и подготовим для вычисления вторичных штрафов (табл. 1.6). Проведя редукцию строк и столбцов, находим $H = 1$. Определим теперь для множества маршрутов, включающих звено (1,4), новую нижнюю границу. Ясно, что она не меньше старой, так как 48 — нижняя граница всех маршрутов. Если из звеньев с нулевой стоимостью в последней матрице можно составить маршрут, то мы на самом деле заплатим за него H. Следовательно, любой маршрут, входящий в рассматриваемое множество, будет стоить не менее $H_1 = 48 + 1 = 49$. Поэтому 49 — новая нижняя граница данного множества (рис. 1.42).

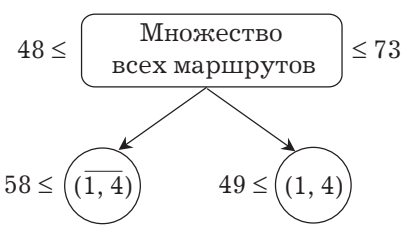


Рис. 1.42

Таблица 1.6

Узлы	1	2	3	5	6	C_i	A_i
2	0	∞	14	28	28	1	14
3	15	13	∞	5	0	0	5
4	∞	0	9	2	2	0	2
5	2	41	22	∞	0	0	2
6	13	0	0	0	∞	0	0
q_j	0	0	0	0	0	$H = 1$	
B_j	2	0	9	2	0		

Обе полученные ветви имеют право на существование. Продолжим обход по ветви, содержащей звено (1, 4), поскольку она обладает меньшей нижней границей и кажется более перспективной. Множество маршрутов, содержащих звено (1, 4), предстоит разбить на два подмножества по тому же самому принципу, что и исходное множество, поэтому необходимо выбрать базовое звено для ветвления. Для табл. 1.6 получим значения вторичных штрафов: $\Phi_{21} = 16$, $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{42} = 2$, $\Phi_{56} = 2$, $\Phi_{62} = 0$, $\Phi_{63} = 9$, $\Phi_{65} = 2$, $\max \Phi_{ij} = \Phi_{21} = = 16$. Итак, (2, 1) — базовое звено для ветвления. Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (2, 1), равна 49 + 16 = 65. Для определения новой нижней границы маршрутов, содержащих звено (2, 1), вычеркнем из предыдущей таблицы 2-ю строку и 1-й столбец и определим запрещенные звенья. Ясно, что запрещено звено (1, 2), образующее подмаршрут с рассматриваемым звеном, но его уже нет в таблице. Из оставшихся запрещено звено (4, 2), так как оно входит в подмаршрут {(1, 4), (4, 2), (2, 1)}. Получим табл. 1.7.

Таблица 1.7

Узлы	2	3	5	6
3	13	∞	5	0
4	∞	9	2	2
5	41	22	∞	0
6	0	0	0	∞

Редуцируем ее и подготовим для вычисления вторичных штрафов (табл. 1.8):

Таблица 1.8

Узлы	2	3	5	6	C_i	A_i
3	13	∞	5	0	0	5
4	∞	7	0	0	2	0
5	41	22	∞	0	0	22
6	0	0	0	∞	0	0
q_j	0	0	0	0	$H = 2$	
B_j	13	7	0	0		

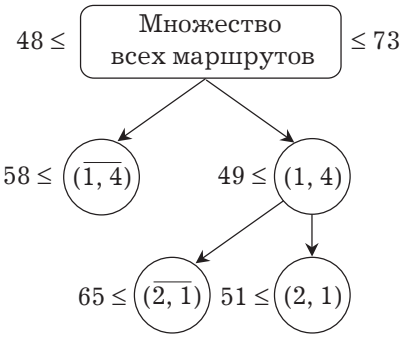


Рис. 1.43

Если из звеньев с нулевой длиной в табл. 1.8 можно составить маршрут, то его стоимость составит H, но пока такого маршрута составить не удается. Поскольку $H = 2$, то новая нижняя граница стоимостей маршрутов, содержащих звено (2, 1), равна 49 + 2 = 51 (рис. 1.43).

Продолжим обход дерева по ветви, содержащей звено (2, 1). Для выбора следующего звена для ветвления определим вторичные штрафы $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{45} = 0$, $\Phi_{46} = 0$, $\Phi_{56} = 22$, $\Phi_{62} = 13$, $\Phi_{63} = 7$, $\Phi_{65} = 0$, max $\Phi_{ij} = \Phi_{56} = = 22$. Итак, (5, 6) — базовое звено для ветвления. Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (5, 6), равна 51 + 22 = 73. Для определения новой нижней границы маршрутов, содержащих звено (5, 6), вычеркнем из предыдущей таблицы 5-ю строку и 6-й столбец. Среди оставшихся запрещенным будет звено (6, 5), так как оно образует подмаршрут с рассматриваемым звеном (табл. 1.9).

Таблица 1.9

Узлы	2	3	5
3	13	∞	5
4	∞	7	0
6	0	0	∞

Редуцируем ее, определим H, нижнюю границу стоимостей маршрутов, содержащих звено (5, 6) и вторичные штрафы. Новая нижняя граница стоимостей маршрутов, содержащих звено (5, 6), равна 51 + 5 = 56 (рис. 1.44). $\Phi_{35} = 8$, $\Phi_{45} = 7$, $\Phi_{62} = 8$, $\Phi_{63} = 7$, max $\Phi_{ij} = \Phi_{35} = \Phi_{62} = 8$. Итак, (3, 5) или (6, 2) — базовые звенья для ветвления. Можно ожидать, что они оба окажутся в предполагаемом оптимальном маршруте. Выберем (3, 5). Новая

нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (3, 5), равна 56 + 8 = 64. Для определения новой нижней границы для маршрутов, содержащих звено (3, 5), удалим из предыдущей таблицы 3-ю строку и 5-й столбец (табл. 1.10), редуцируем новую таблицу и подготовим ее к вычислению вторичных штрафов (табл. 1.11).

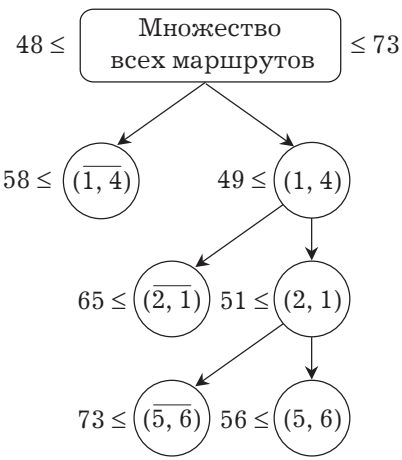


Рис. 1.44

Таблица 1.10

Узлы	2	3
4	∞	7
6	0	∞

Таблица 1.11

Узлы	2	3	C_i	A_i
4	∞	0	7	∞
6	0	∞	0	∞
q_j	0	0	$H = 7$	
B_j	∞	∞		

Новая нижняя граница для маршрутов, содержащих звено (3, 5), равна 56 + 7 = 63 (рис. 1.45). Вторичные штрафы для звеньев (4, 3) и (6, 2) равны $\Phi_{43} = \infty$, $\Phi_{62} = \infty$, следовательно, не используя их, мы несем неограниченные издержки и поэтому должны включить их в предполагаемый оптимальный маршрут. Кроме того, в табл. 1.11 в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному нулевому элементу, соответствующему как раз звеньям (4, 3) и (6, 2). Значит, включая их в маршрут, мы не меняем нижнюю границу стоимости. Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (4, 3), равна 56 + ∞ = ∞ (рис. 1.46). Теперь как неперспективные можно отсечь ветви с нижними границами, превосходящими стоимость полученного маршрута:

$$z(\{(1, 4), (2, 1), (5, 6), (3, 5), (4, 3), (6, 2)\}) =$$
$$= 16 + 7 + 5 + 5 + 25 + 5 = 63.$$

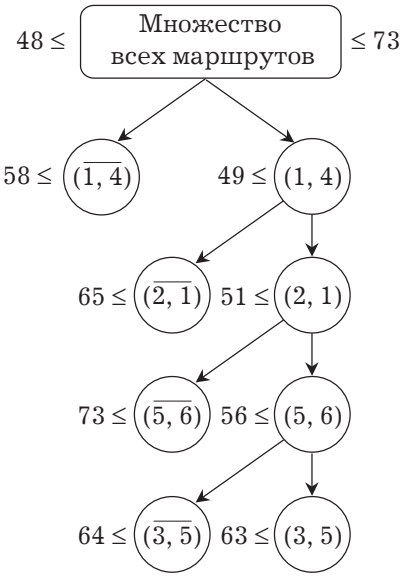


Рис. 1.45

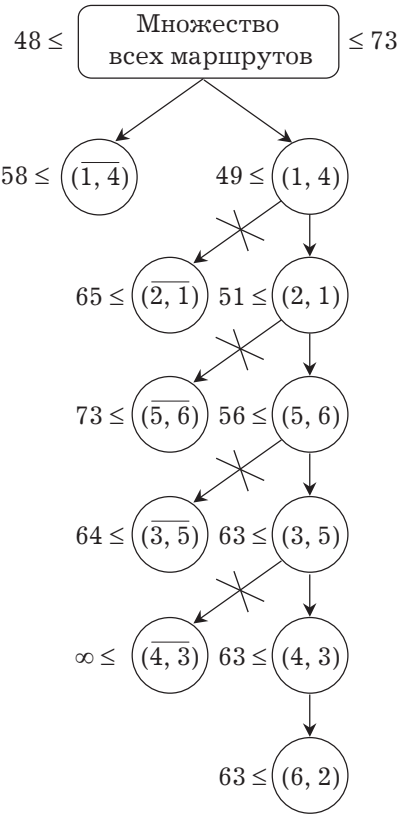


Рис. 1.46

Получили значение, большее 58 — нижней границы маршрутов, не использующих звено (1, 4). Надо проверить и эту ветвь на оптимальность. Таким образом, мы вынуждены вернуться в начало. Поскольку маршрут со звеном (1, 4) запрещен, то положим в исходной таблице $c_{14} = \infty$ (табл. 1.12):

Полученная матрица называется матрицей стоимости возврата, а процедура анализа предыдущих точек ветвления, которые могли бы определить более дешевый маршрут, называется возвратом. Теперь для полученной матрицы определяем вторичные штрафы и базовое звено для ветвления. Добавление

Таблица 1.12

Узлы	1	2	3	4	5	6
1	∞	27	43	∞	30	26
2	7	∞	16	1	30	30
3	20	13	∞	35	5	0
4	21	16	25	∞	18	18
5	12	46	27	48	∞	5
6	23	5	5	9	5	∞

новых звеньев и определение новых нижних границ получающихся ветвей ведется до получения нового полного маршрута или до того момента, когда нижние границы станут больше 63 и получающиеся множества окажутся неперспективными. Не будем приводить рассуждений и таблиц, покажем только момент остановки перебора (рис. 1.47).

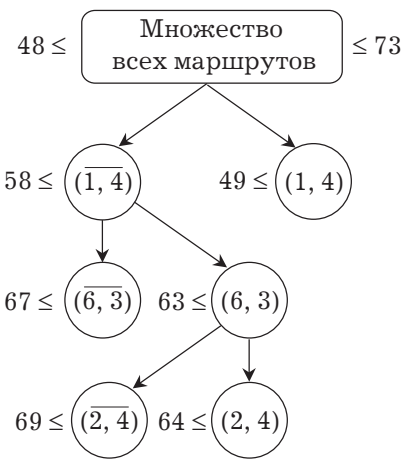


Рис. 1.47

Итак, оптимальным оказался маршрут со стоимостью $z(T) = 63$:

$$T = \{(1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 2), (2, 1)\}.$$

Отпускник должен посетить Осло, Дели, Сидней, Рим, Токио и вернуться домой. Стоимость билетов при этом составит 630 у.е.

Упражнения

Упражнение 1.1. Сельское почтовое отделение обслуживает 7 населенных пунктов. Между любыми двумя из них есть дорога, по которой может проехать почтальон на велосипеде. Расстояния между пунктами (км) указаны в табл. 1.13. Каким

должен быть маршрут почтальона, чтобы расстояние, которое он преодолевает, развозя почту было наименьшим?

Таблица 1.13

п/п	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	9	6	3	5	9
2	5	0	8	8	5	9	2
3	9	8	0	1	6	7	3
4	6	8	1	0	4	2	9
5	3	5	6	4	0	2	8
6	5	9	7	2	2	0	3
7	9	2	3	9	8	3	0

Ответ:
$T = \{(1, 2), (2, 7), (7, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 5), (5, 1)\}$,
$z^*(T) = 18$.

Упражнение 1.2. Из всех имеющихся маршрутов выбрать самый дешевый, если известны стоимости билетов для проезда между различными населенными пунктами, в которых должен побывать путешественник (табл. 1.14).

Таблица 1.14

п/п	1	2	3	4	5	6
1	∞	19	36	20	25	12
2	8	∞	16	8	30	36
3	11	17	∞	29	10	8
4	24	8	24	∞	13	15
5	20	38	20	45	∞	13
6	34	14	17	20	12	∞

Ответ:
$T = \{(1, 6), (6, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 1)\}$,
$z^*(T) = 78$.

1.4. Некоторые сведения из математической логики

По одному из наиболее распространенных определений, логика — это анализ методов рассуждений. Изучая эти методы, логика интересуется формой, а не содержанием доводов о том или ином суждении. Рассмотрим следующий вывод: все тигры любят мясо. Евгений — тигр. Следовательно, он любит мясо.

Этот вывод имеет форму: все A суть B; C есть A, следовательно, C есть B. Логичность или истинность отдельных посылок или выводов логика не интересует. Он хочет знать, вытекает ли истинность вывода из истинности посылок. Систематическая формализация верных методов рассуждений — одна из главных задач логика. Если при этом он применяет математический аппарат и его исследования посвящены в основном изучению математических рассуждений, то предмет занятий логика можно назвать математической логикой. Можно сузить область математической логики, сказав, что ее основная цель — дать точное и адекватное определение понятия математическое доказательство.

Логика является началом любой научной теории. В конце XIX столетия интерес к ней оживился под влиянием открытия неевклидовых геометрий и стремления обеспечить строгое обоснование математического анализа. Тогда же были открыты парадоксы, т. е. рассуждения, которые приводят к противоречиям. Наиболее важными парадоксами являются следующие: логические парадоксы (Рассела (см. подразд. 1.1), Кантора, Бурали-Форти), семантические парадоксы (Лжеца, Ришара, Берри, Греллинга).

Например, парадокс Лжеца состоит в следующем. Евгений Александрович говорит: “Я лгу”. Если при этом он лжет, то сказанное им есть ложь и поэтому он не лжет. Если при этом он говорит правду, то сказанное им есть истина и поэтому он лжет. В любом случае оказывается, что он лжет и говорит правду одновременно.

Высказывания и операции над ними

Понятие высказывания является исходным понятием математической логики.

Высказываниями называются повествовательные предложения, относительно которых известно или можно определить, истинны они или ложны.

Например, предложение “Конго впадает в Тихий океан” — ложное, а предложение “Альтаир — звезда в созвездии Орла” — истинное. Не всякое повествовательное предложение будет высказыванием. В частности, к высказываниям не относятся восклицательные и вопросительные предложения.

Например, не является высказыванием предложение “Который теперь час?” Не будут высказываниями и предложения, служащие определениями. Например, не будет высказыванием предложение “Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю”. Высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D, ... Из всех свойств высказывания нас интересует только одно: истинно оно или ложно. Каждому истинному высказыванию будем сопоставлять 1, а ложному — 0. На множестве всех высказываний введем функцию $\delta(A)$, которая принимает значение 1 или 0, т. е.

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \textit{если } A \textit{ истинно}; \\ 0, & \textit{если } A \textit{ ложно}. \end{cases}$$

$\delta(A)$ назовем значением истинности высказывания A.

Например, для высказывания A: “Миссисипи впадает в Бискайский залив” $\delta(A) = 0$.

Предположим, что мы имеем начальную совокупность высказываний. Из них с помощью логических операций можно строить новые высказывания. Приведем эти операции.

Отрицанием высказывания A называется новое высказывание, обозначаемое $\overline{A}$, которое читается “не A или неверно, что A”. A и $\overline{A}$ связаны между собой следующим образом (табл. 1.15).

Таблица 1.15

$\delta(A)$	$\delta(\overline{A})$
1	0
0	1

Таблица 1.15 называется таблицей истинности для отрицания.

Конъюнкцией высказываний A и ш является новое высказывание ($A \wedge B$), которое читается “A и B”. Таблица истинности для конъюнкции имеет вид (табл. 1.16).

Таблица 1.16

$\delta(A)$	$\delta(B)$	$\delta(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример 1.15. Высказывания $\sin\frac{\pi}{2} < \ln 3$ и $\ln 3 < 2^7$ истинны, т. е. $\sin\frac{\pi}{2} < \ln 3 < 2^7$.

Дизъюнкцией высказываний A и B называется новое высказывание ($A \vee B$), которое читается “A или B”.

Таблица истинности для дизъюнкции имеет вид (табл. 1.17).

Таблица 1.17

$\delta(A)$	$\delta(B)$	$\delta(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример 1.16. Высказывание “В сутках 20 часов или в минуте 60 секунд”.

Данное высказывание истинно (несмотря на его странность), так как истинно одно из составляющих его высказываний.

Импликацией высказываний A и B называется новое высказывание ($A \Rightarrow B$), которое читается “если A, то B или за A следует B”.

Таблица истинности для импликации имеет вид (табл. 1.18).

Таблица 1.18

$\delta(A)$	$\delta(B)$	$\delta(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример 1.17. Высказывание “если Земля есть эллипсоид вращения, то $\log_2 4 = 2$” есть импликация высказываний “Земля есть эллипсоид вращения” и “$\log_2 4 = 2$”. Оно является истинным, так как истинны оба входящих в него высказывания.

Эквивалентностью высказываний A и B называется новое высказывание ($A \Leftrightarrow B$), которое читается “A эквивалентно B или A тогда и только тогда, когда B”.

Таблица истинности для эквивалентности имеет вид (табл. 1.19).

Таблица 1.19

$\delta(A)$	$\delta(B)$	$\delta(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример 1.18. Высказывание “Вега находится в созвездии Лиры тогда и только тогда, когда склонение $\alpha \cup$Mi (Полярная) равно 30°” является эквивалентностью двух высказываний “Вега находится в созвездии Лиры” и “склонение $\alpha \cup$Mi (Полярная) равно 30°”. Оно является ложным, так как первое высказывание истинно, а второе ложно.

Число $\delta(A \Leftrightarrow B)$ полностью определяется $\delta(A)$ и $\delta(B)$, поэтому можно оперировать не с высказываниями, а с числами 0 и 1. Например, эквивалентность с помощью 0 и 1 можно записать так: $1 \Leftrightarrow 1 = 1$; $1 \Leftrightarrow 0 = 0$; $0 \Leftrightarrow 1 = 0$; $0 \Leftrightarrow 0 = 1$.

Так же можно поступать и по отношению к другим логическим операциям. Следовательно, каждой логической операции над высказываниями соответствует функция, определенная на множестве $\{0, 1\}$ и принимающая значения на нем же. Эту функцию называют тем же термином, что и соответствующую логическую операцию.

В математической логике с помощью логических операций можно строить формулы.

Например, $((A \wedge B) \Rightarrow C)$ будет формулой, которая построена из высказываний A, B с помощью логических операций конъюнкции и импликации.

Будем называть высказывательными такие переменные, которые могут принимать своими значениями любые конкретные высказывания.

Будем обозначать такие переменные заглавными латинскими буквами X, Y, Z, U, ... Кроме этого, введем две высказывательные переменные И и Л; вместо первой можно подставить любое истинное высказывание, вместо второй — ложное.

Следующие соглашения дают описание понятия формулы:

а) любая отдельно взятая высказывательная переменная является формулой;

б) если Φ_1 и Φ_2 — две формулы, то выражение $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$; $(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2)$; $\overline{\Phi_1}$; $\overline{\Phi_2}$ тоже формулы;

в) не существует никаких других формул, кроме тех, которые получаются в результате применения конечного числа раз пунктов а, б, в.

Например, формулами будут $(Y \Rightarrow \overline{X})$, $((X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow Z)$, а выражение $(\overline{X} \Rightarrow) \vee Y$ формулой не является.

Пример 1.19. Рассмотрим формулу $((X \vee Y) \Rightarrow Z)$. Обозначим ее $\Phi(X, Y, Z)$. Значение истинности этой формулы полностью определяется значениями истинности переменных X, Y, Z. Поэтому можно составить таблицу, дающую значение истинности для

$\Phi(X, Y, Z)$ в зависимости от значений истинности для X, Y, Z. Так как каждая переменная может принимать два значения (0 и 1), то для тройки X, Y, Z имеем 8 различных возможностей (таблица будет иметь 8 строк). Для заполнения последнего столбца таблицы подставляем значения X, Y, Z в формулу $\Phi(X, Y, Z)$.

Например, при $X = Y = Z = 1$ имеем $\Phi = ((1 \vee 1) \Rightarrow 1) = 1$.

В результате заполнения получим таблицу (см. табл. 1.20)

Таблица 1.20

X	Y	Z	$((X \vee Y) \Rightarrow Z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Для любой формулы $\Phi(X, Y, Z, \ldots)$ алгебры высказываний можно составить таблицу, которая дает значение истинности формулы в зависимости от переменных $X, Y, Z, \ldots$. Эта таблица называется таблицей истинности для формулы $\Phi(X, Y, Z, \ldots)$.

Таблица 1.20 будет таблицей истинности для формулы $((X \vee Y) \Rightarrow Z)$ в примере 1.19.

Определение. Формула $\Phi(X, Y, Z, \ldots)$ алгебры высказываний называется тождественно истинной или тавтологией, если ее значение истинности равно 1 при любых значениях истинности для $X, Y, Z, \ldots$.

Приведем некоторые важные тавтологии:

1. Законы коммутативности конъюнкции и дизъюнкции:
$((X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X))$; $((X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X))$.

2. Законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции:
$(((X \wedge Y) \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z)))$; $(((X \vee Y) \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z)))$.

3. Законы де Моргана:
$((\overline{X \wedge Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y}))$; $((\overline{X \vee Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y}))$.

4. Закон исключения третьего:
$(X \vee \overline{X})$.
5. Закон контрапозиции
$((X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}))$.
6. Схема доказательства “от противного”:
$((\overline{X} \Rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}) \Rightarrow X)$.

Предикаты

В математике используются высказывания, зависящие от одной или нескольких переменных. Например, высказывание $\log_2 x > 3$ зависит от переменной x и при различных значениях x может быть истинным или ложным. Например, при $x = 10$ оно превращается в истинное высказывание, а при $x = 2$ — в ложное.

Высказывание $2x + y > 5$ зависит от двух переменных. Например, при $x = 4$ и $y = 2$ оно будет истинным, а при $x = 3$ и $y = -4$ — ложным.

Определение. Высказывание, зависящее от переменных x, y, z,... и принимающее значения из некоторого множества D, в математической логике называют предикатом на множестве D. Если предикат содержит одну переменную, то его называют одноместным, а если n переменных, то n-местным. Область D — область определения предиката. Предикаты будем обозначать заглавными буквами. Например, $B(x)$ — одноместный предикат, а $P(x, y)$ — двухместный предикат.

Определение. Подмножество множества D, состоящее из тех значений переменных, при которых данный предикат превращается в истинное высказывание, называют областью истинности предиката.

Пример 1.20. Найти область истинности предиката $P(x) = \sqrt{1+x} < 3$.

D: $x \geq -1$ — область определения предиката.

Область истинности предиката: $x \in [-1; 8)$.

Предикат на множестве D при подстановке вместо переменных конкретных значений становится истинным или лож-

ным высказыванием. Поэтому можно считать, что предикат определен на множестве D и принимает значение на множестве $\{0, 1\}$. Поэтому на предикаты распространяются операции над обычными высказываниями.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано: $X = \{-5, 17, 22, 34, 101\}$;
   $Y = \{-17, 0, 22, 34, 102, 505\}$.
   Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, $X \Delta Y$.
2. Дано: $X=(-\infty;5]$; $Y=[-7;607)$.
   Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$, X/Y, Y/X.
3. Докажите, что отрезки $[0,1]$ и $[0,5]$ равномощны.
4. Дано: $X = \{1, 2, 3\}$; $Y = \{7, 8\}$ $\rho = \{(1,7), (1,8), (2,8), (3,7)\}$.
   Построить матрицу и граф отношения ρ.

5. Сколькими способами в отделе, состоящем из 100 человек можно выбрать начальника и его заместителей?

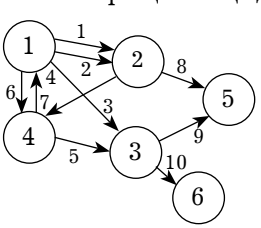
6. Есть шесть видов конвертов без марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?

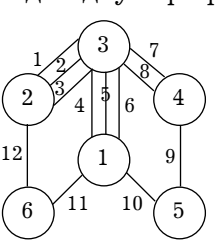
7. Из двенадцати человек надо выбрать пять и разместить их на занумерованных стульях (по одному человеку на стул). Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно посадить за стол четырех мужчин и четырех женщин так, чтобы женщины и мужчины не сидели рядом?

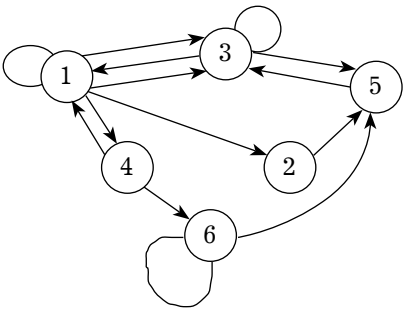
9. Сколько различных восьмизначных чисел можно составить, используя цифры 3,4,5?

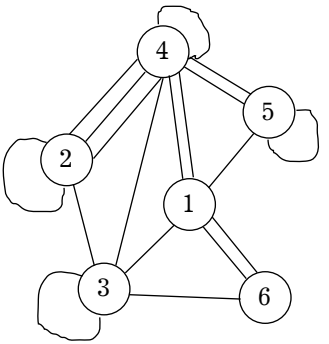
10. Найти матрицы инцидентности для двух графов:





11. Найти матрицы смежности для графов:





11. Найти таблицы истинности для формул

11.1. $(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \Rightarrow \underline{Y})$

11.2. $(X \vee Y) \Rightarrow (X \Leftrightarrow \overline{Y})$

12. Доказать, что формула $((\overline{X} \Rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}) \Rightarrow X)$ является тавтологией.

13. Найти область истинности предиката $Q(x) = \log_3(x + 2) < 4$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие способы задания множеств вы знаете?
2. Какое множество называется универсальным?
3. Какое отношение называется бинарным?
4. Что называется числом сочетаний из n элементов по m?
5. Что называется числом размещений из n элементов по m?
6. Что называется перестановкой из n элементов?
7. Какие графы называются изоморфными?
8. Какие графы называются Эйлеровыми?
9. Что такое степень вершины графа?
10. Какие графы называют деревьями?
11. Что такое k-раскраски графа?
12. Какие графы называют планарными?
13. Какой граф называется гамильтоновым?
14. Какие из графов правильных многогранников имеют гамильтоновы циклы?

15. Какие предложения называются высказываниями?

16. Привести определения логических операций.

17. Какие формулы алгебры высказываний называются тавтологиями?

18. Какие высказывания называются предикатами?

19. Что называется областью истинности предиката?

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Линейная алгебра — это часть математики, посвященная в основном теории матриц и связанной с нею теории линейных преобразований, векторных пространств. Она включает теорию форм, теорию инвариантов, тензорную алгебру.

В данном учебнике мы рассмотрим понятие матрицы, ее применение для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также определители, векторы, собственные числа, векторы матриц и квадратичные формы.

2.1. Матрицы, определители и их свойства

Матрицей называется прямоугольная таблица размером m (число строк) на n (число столбцов), заполненная некоторыми математическими объектами. Мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются действительные числа.

Как правило матрицы обозначают большими буквами (A, B,...), а их элементы маленькими буквами с двумя индексами, указывающими номер строки и номер столбца (a_{ij}, b_{ij},...). Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ записывают следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(a_{ij}\right) = \left[a_{ij}\right] = \left\|a_{ij}\right\|, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Если заменить строки матрицы ее столбцами (столбцы строками), то получим транспонированную матрицу, которую обозначают заглавной буквой с индексом Т наверху:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые типы матриц.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то мы имеем квадратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} называются главной диагональю, а их сумма — это след матрицы.

Элементы a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, ..., a_{n1} составляют побочную диагональ.

Если все элементы матрицы, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, равны нулю, то мы имеем диагональную матрицу:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все ненулевые элементы диагональной матрицы равны 1, то мы имеем единичную матрицу:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если ненулевые элементы располагаются выше главной диагонали, то имеем верхнюю треугольную матрицу, а если ниже — нижнюю треугольную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $m \times 1$ — это матрица-столбец, а матрица размера $1 \times n$ — матрица-строка:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейные операции над матрицами.

Для сложения двух матриц необходимо, чтобы они имели одинаковые размеры.

Сумму двух матриц обозначим $A + B$, а ее элементы равны $a_{ij} + b_{ij}$, т. е.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) Для любых двух матриц одинакового размера всегда существует единственная матрица Z такая, что $A + Z = B$. Тогда Z есть разность матриц B и A, т. е. $Z = B - A$. Элементы матрицы Z равны $b_{ij} - a_{ij}$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число $k \in R$ называется матрица

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots ka_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} \dots ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $5 \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$.

Для умножения двух матриц необходимо, чтобы они были согласованными. Матрицы A и B называются согласованными, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пусть заданы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \text{где } i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}.$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{np} \end{pmatrix}=(b_{jk}), \quad \text{где } j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p}.$$

Тогда произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C размера $m \times p$, элементы c_{ik} которой находятся по формуле

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} .$$

Из определения произведения матриц следует, что

$$A \times E = E \times A = A.$$

Произведение матриц обладает следующими свойствами:

1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
2) $(A + B) \times C = AC + BC$;
3) $k(A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$, $k \in R$;
4) $(A \cdot B)^{\text{т}} = B^{\text{т}} \cdot A^{\text{т}}$.

В общем случае $A \times B \neq B \times A$.

Рассмотрим конкретный пример умножения двух матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы размера $n \times n$ вводится понятие определителя.

Определителем квадратной матрицы порядка $n \times n$ (определителем порядка n) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки, по одному из каждого столбца и снабженных знаками плюс и минус по некоторому определенному правилу. Это правило сформулируем позже.

Определитель порядка n матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

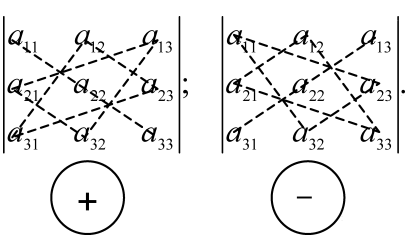
обозначается следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приведем легко запоминающиеся правила для вычисления определителей второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times (-6) = 15.$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 2\times4\times(-8)+0\times0\times7+1\times6\times(-3)-0\times4\times1-$$

$$-(-8)\times(-3)\times0-2\times6\times7=-64-18-84=-166.$$

Сформулируем **свойства определителей**.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

2. При перестановке строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Если все элементы строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{то} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно выносить за его знак:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$ где $k \in R$ (R — множество действительных чисел).

5. Определитель равен нулю, если все элементы минимум двух его строк (столбцов) пропорциональны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \text{где } k \in R.$$

6. Если каждый элемент строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых суммы, а у другого — из вторых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же вещественное число:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{где } k \in R.$$

(R — множество действительных чисел).

Дадим понятие минора и алгебраического дополнения.

Рассмотрим матрицу размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k различных строк и k различных столбцов, причем $1 \le k \le$ минимального значения из m и n.

Элементы выделенных строк и столбцов образуют квадратную матрицу порядка k. Определитель выделенной квадратной матрицы порядка k называют минором k-го порядка матрицы A.

Если в выделенную квадратную матрицу порядка k включены строки и столбцы исходной матрицы, имеющие одинаковые номера, то такой минор называется главным.

Полное обозначение минора k-го порядка следующее

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix},$$

где i — номера выделенных строк;

j — номера выделенных столбцов.

Общее число миноров порядка k прямоугольной матрицы размера $m \times n$ можно найти по формуле

$$N_k = C_m^k \times C_n^k,$$

где C_m^k — число сочетаний из m по k,

C_n^k — число сочетаний из n по k.

Число миноров первого порядка совпадает с общим числом элементов исходной матрицы

$$N_1 = C_m^1 \times C_n^1 = m \times n.$$

Рассмотрим конкретный пример

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее число миноров первого порядка данной матрицы A равно $N_1 = C_2^1 \times C_3^1 = 6$. Например,

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5; \qquad M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10.$$

Максимальный порядок миноров данной матрицы равен двум.

Общее число миноров второго порядка равно $N_2 = C_2^2 \times C_3^2 = 3$. Например,

$$M\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 3\\ 10 & 6\end{vmatrix}; \quad M\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 1\\ 10 & 2\end{vmatrix}; \quad M\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь квадратную матрицу размера $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем в ней все элементы i-й строки и j-го столбца. Оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$. Определитель этой матрицы будет минором $(n-1)$ порядка исходной матрицы A.

Например, вычеркнем в матрице A первую строку и второй столбец и получим следующий минор $(n-1)$ порядка исходной матрицы

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минор обозначаем по номеру элемента, который стоит на пересечении вычеркиваемой строки и вычеркиваемого столбца. В нашем случае это элемент a_{12}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется число, вычисляемое по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т. е., если сумма номеров строки и столбца — четная, алгебраическое дополнение будет совпадать с соответствующим минором, а если нечетная, то алгебраическое дополнение и минор будут иметь разные знаки.

Используя понятие алгебраического дополнения можно сформулировать общее правило вычисления определителя n-го порядка. Он вычисляется с помощью формул разложения по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. Всего существует $2n$ формул разложения определителя (по элементам n-строк и n-столбцов).

Например, приведем разложение по элементам первой строки и второго столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} =$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{n2}A_{n2}.$$

То есть каждый элемент строки (столбца) умножается на соответствующее алгебраическое дополнение.

Теоретически с помощью формул разложения можно вычислить определитель квадратной матрицы любого порядка, но реально эти формулы используются для нахождения определителей не выше 4-го порядка. Объем вычислений можно несколько сократить, если использовать свойства определителей.

Из формул разложения следуют приведенные нами выше правила вычисления определителей второго и третьего порядков.

Рассмотрим конкретные примеры вычисления определителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-7-18) - 5(21-24) + (9-(-4)) =$$

$$= -50 + 15 + 13 = -22.$$

В данном примере мы разложили определитель по элементам первой строки.

Найдем определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

К этому определителю сначала применим свойство номер 7. Первую строку определителя умножим последовательно на (–4); (–3); (–2) и сложим со 2-й; 3-й и 4-й строками. В результате получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам 1-ого столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

К полученному определителю вновь применим свойство номер 7. Умножим последовательно третью строку на (–2) и на (–7) и сложим со второй и первой строчками. Получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель разложим по элементам первого столбца, т. е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 36 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -[16-(-144)] = -160.$$

Теперь рассмотрим обратную матрицу и правило ее вычисления.

Квадратная матрица A называется вырожденной, если ее определитель равен нулю, т. е. $\det A = 0$.

В противоположном случае ($\det A \neq 0$) матрица A является невырожденной. A любой невырожденной матрице A соответствует единственная обратная матрица A^{-1}.

Причем выполняется равенство

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E.$$

Приведем алгоритм нахождения обратной матрицы.

1. Вычислить определитель матрицы A и убедиться, что он не равен нулю.

2. Составить матрицу A_1 из алгебраических дополнений матрицы A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Составить присоединенную матрицу (B), получаемую транспонированием матрицы A_1

$$B = A_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

5. Проверка полученного результата

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Рассмотрим конкретные примеры на обращение матриц.

Пример 2.1. Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти: A^{-1}

Находить A^{-1} будем в соответствии с приведенным алгоритмом. Найдем определитель исходной матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-1) \times 2 = 17,$$

т. е. $\det A \neq 0$, поэтому у матрицы A есть обратная A^{-1}

Теперь найдем алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = 5;\ A_{12} = 1;\ A_{21} = -2;\ A_{22} = 3.$$

Составим из найденных алгебраических дополнений матрицу A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B (транспонируем матрицу A_1)

$$B = A_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления обратной матрицы.

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} + \frac{2}{17} & -\frac{6}{17} + \frac{6}{17} \\ -\frac{5}{17} + \frac{5}{17} & \frac{2}{17} + \frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. обратная матрица A^{-1} вычислена верно.

Пример 2.2. Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{-1}.

Вычисляем определитель матрицы А.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку последовательно на (–2) и на (–3) и складываем со второй и третьей, затем полученный определитель раскладываем по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -50 + 30 = -20;$$

$\det A \neq 0$, т. е. исходная матрица A — невырожденная и у нее есть обратная матрица.

Теперь найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -7\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-26;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -7\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-25;\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-12;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-10;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -7\end{vmatrix}=10;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=15;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5.$$

Из найденных алгебраических дополнений составляем матрицу A_1

$$A_1=\begin{pmatrix}-26 & -25 & -11\\ -12 & -10 & -2\\ 10 & 15 & 5\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу $B=A_1^T$: $B=\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times B=$$

$$=\frac{1}{-20}\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{26}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{10}{20}\\ \frac{25}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{15}{20}\\ \frac{11}{20} & \frac{2}{20} & -\frac{5}{20}\end{pmatrix}.$$

Делаем проверку правильности вычисления обратной матрицы $A\times A^{-1}=E$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{26}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{10}{20}\\ \frac{25}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{15}{20}\\ \frac{11}{20} & \frac{2}{20} & -\frac{5}{20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Из проверки следует, что обратная матрица вычислена верно.

Имеют место следующие равенства:

$det\ A^{-1} = (det\ A)^{-1};$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1};$

$(A \times B \times C \times \ldots \times F)^{-1} = F^{-1} \times \ldots \times C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}.$

Ранг матриц. Любая матрица кроме своего порядка должна характеризоваться еще одним показателем, который устанавливает количество ее лтнейно-независимых строк и столбцов. Этот показатель и называют рангом матрицы. Дадим его определение.

Рангом ($r(A)$) матрицы A называют наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг имеет любая матрица.

Ранг матрицы считается равным нулю, если все элементы матрицы равны нулю.

Для матриц высокого порядка разработаны специальные вычислительные методы определения ранга, например, методы жордановых исключений. Из приведенных выше свойств определителей следует, что ранг матрицы не изменяется при ее транспонировании, при перестановке каких-либо строк или столбцов, при умножении каждого элемента строки или столбца на одно и то же число, при сложении элементов какой-то строки (столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца), умноженными на действительное число.

Без доказательства приведем теорему и следствия из нее.

Теорема 2.1. Если ранг матрицы равен k, то существует k линейно-независимых строк, от которых линейно зависят все остальные строки матрицы.

Следствие 1. Если ранг матрицы равен k, то она имеет k линейно-независимых столбцов, от которых линейно зависят остальные столбцы.

Следствие 2. Максимальное число линейно-независимых строк матрицы совпадает с максимальным числом линейно-независимых столбцов и равно рангу матрицы.

1. Метод элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями являются следующие преобразования матрицы:

а) перестановка местами двух любых строк или столбцов матрицы;

б) умножение любой строки или столбца матрицы на неравное нулю действительное число;

в) прибавление ко всем элементам какой-либо строки или столбца соответствующих элементов другой строки или столбца, умноженных на отличное от нуля действительное число.

Пример 2.3. Используя метод элементарных преобразований, найдем ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ -8 & 10 & 7 & -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Первую строку домножаем последовательно на (-3); (-5); 8 и складываем со второй, третьей и четвертой строками. Тогда получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -5 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 42 & 15 & 30 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Первую и вторую строки оставляем неизменными, третью строку умножаем на 3 и складываем с четвертой. После этого получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -5 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первую строку оставляем неизменной, а вторую строку умножаем на (-1) и складываем с третьей и получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен двум, следовательно, и ранг исходной матрицы тоже равен двум, т. е. $r(A) = 2$. Заметим, что ранг матрицы не меняется при вычеркивании из нее нулевого столбца или строки.

2. Метод окаймления

Данный способ основан на следующей теореме.

Теорема 2.2. Предположим, что матрица А имеет отличный от нуля минор порядка k и все ее миноры $(k + 1)$-го порядка, содержащие (окаймляющие) этот минор, равны нулю. В этом случае ранг матрицы A равен k.

Пример 2.4. Используя метод окаймления, найдем ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Выбираем в матрице В не равный нулю минор второго порядка, например минор

$$M\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Он входит в состав следующих миноров:

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ M\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим эти миноры:

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Первую строку мы умножили на (-2) и сложили с третьей. Полученный определитель имеет две одинаковые строки и по пятому свойству определителей равен нулю.

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Первую строку умножаем на (-2) и складываем с третьей, полученный определитель имеет две одинаковые строки и равен нулю. Поэтому в соответствии с теоремой 2.2 ранг матрицы В равен двум, т. е. $r(B)=2$.

3. Метод прямоугольников

Пусть задана матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что элемент $C_{11} \neq 0$. Если это не так, то переставляем строки местами. Элемент C_{11}, строку и столбец, где он находится, назовем разрешающими. Алгоритм метода прямоугольников состоит в следующем:

а) элементы разрешающей строки остаются неизменными;

б) элементы разрешающего столбца, которые расположены ниже разрешающего элемента, пишем нулями;

в) все остальные элементы находим из вычисления определителей второго порядка (их элементы и образуют прямоугольник), в них разрешающий элемент вместе с пересчитываемым составляют главную диагональ (рис. 2.1).

Полученную в результате матрицу преобразуем по такому же алгоритму, взяв разрешающим элемент $c'_{22} \neq 0$. После этого алгоритм повторяется, а в качестве разрешающего элемента берется элемент c''_{33} и т. д.

Процесс вычислений заканчивается, когда исходная матрица приводится к верхней треугольной или верхней трапеци-

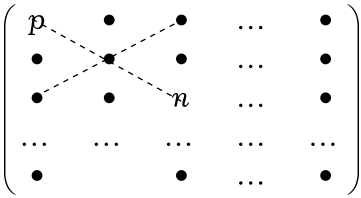


Рис. 2.1

евидной форме. А ее ранг будет равен числу ненулевых строк и одинаков с рангом исходной матрицы.

Пример 2.5. Используя метод прямоугольников, найти ранг следующей матрицы:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 5 & 6 & -4\\ 3 & 8 & 2 & -19\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\\ 0 & 2 & -10 & -10\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\\ 0 & 0 & 22 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому ранг исходной матрицы C равен трем, т. е. $r(C)=3$.

На первом шаге разрешающим элементом будет 1, элементы разрешающего столбца обнуляются, а остальные элементы матрицы находятся из вычисления определителей:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-1,\ \begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-6,\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=5,\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}=2,$$

$$\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-10,\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -19\end{vmatrix}=-10.$$

На втором шаге разрешающим элементом будет (-1), элементы разрешающего столбца обнуляются, а остальные элементы матрицы определяются с помощью вычисления следующих определителей:

$$\begin{vmatrix}-1 & -6\\ 2 & -10\end{vmatrix}=22,\ \begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & -10\end{vmatrix}=0.$$

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Линейная система m уравнений с n неизвестными — это система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $i = \overline{1, m}$;

$j = \overline{1, n}$;

a_{ij} — коэффициенты;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные;

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены.

Систему (2.1) можно записать в матричном виде:

$$AX = B, \tag{2.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных.

Решением СЛАУ называется любая совокупность n чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая обращает каждое уравнение системы (2.1) в верное равенство.

Любая СЛАУ вида (2.1) может иметь одно решение, бесконечное множество решений, ни одного решения.

Если СЛАУ имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если СЛАУ не имеет решений, то она — несовместная.

Если все свободные члены СЛАУ (2.1) равны нулю, то система называется однородной, а если хотя бы один из свободных членов системы не равен нулю, то она называется неоднородной. Система однородных уравнений всегда совместна, т. е. она имеет хотя бы одно решение (x_j=0).

Перед решением СЛАУ надо убедиться в ее совместности. Поэтому приведем без доказательства теорему Кронекера-Капелли, которая позволяет это сделать.

Дополним матрицу A системы (2.2) столбцом свободных членов. В результате этого получим матрицу порядка $m \times (n + 1)$, которую называют расширенной матрицей системы (C):

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Через $r(A)$ и $r(C)$ обозначим ранги матриц A и C соответственно.

Теперь сформулируем теорему.

Теорема 2.3 (Кронекера-Капелли). Для того чтобы СЛАУ вида (2.2) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы ($r(A)$) был равен рангу расширенной матрицы системы ($r(C)$), т. е. $r(A) = r(C)$. Здесь возможны два случая: 1) если $r(A) = r(C) = = n$, где n — число неизвестных в системе (2.2), то СЛАУ имеет единственное решение; 2) если $r(A) = = r(C) < n$, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

СЛАУ можно решать или прямыми или итерационными методами.

В прямых (точных) методах решение системы (2.2) находится за конечное число арифметических действий. К прямым методам относятся метод Гаусса и его модификации, метод квадратного корня, метод Крамера и др.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение системы (2.2) находится как lim (предел) при $k \to \infty$ последовательных приближений $x^{(k)}$, где k — номер итерации. Обычно за конечное число итераций этот предел не достигается. Как правило, задается некоторое малое число $\varepsilon > 0$ (точность) и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| < \varepsilon.$$

К итерационным методам относятся: метод Якоби, метод Зейделя, метод релаксации, метод минимальных невязок, метод скорейшего спуска и др.

В предлагаемом учебнике рассмотрим прямые методы: метод Гаусса и метод Крамера.

Рассмотрим метод Гаусса решения СЛАУ. Он состоит из двух шагов. На первом шаге мы приводим исходную систему уравнений к верхнему треугольному виду, а на втором шаге находим неизвестные (x_j), начиная с последнего.

Предположим, что мы имеем систему n уравнений с n неизвестными, и она является совместной, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Исключаем неизвестное x_1 из всех уравнений, начиная со второго. Для этого из второго уравнения почленно вычтем первое, умноженное на a_{21}/a_{11}, из третьего почленно вычтем пер-

вое, умноженное на a_{31}/a_{11} и т. д., причем $a_{11} \neq 0$, если $a_{11} = 0$, то переставляем местами уравнения системы (2.3). После этого система (2.3) примет вид.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_1 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$; $\quad b_i^{(1)} = b_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}b_1$; $\quad (i, j = \overline{2,n})$.

В системе (2.4) исключаем неизвестные x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, т. е. ведущим элементом становится $a_{22}^{(1)} \neq 0$, если он равен нулю, то переставляем уравнение местами, т. е. из третьего уравнения системы (2.4) вычитаем второе, умноженное на коэффициент $a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$, из четвертого уравнения системы (2.4) вычитаем второе, умноженное на коэффициент $a_{42}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$ и т. д. В результате мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases} \tag{2.5}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)}$; $\quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}b_2^{(1)}$; $\quad (i, j = \overline{3,n})$.

Аналогичный процесс мы продолжаем далее и на (n-1)-*м* шаге приходим к следующей системе уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

То есть исходную систему уравнений (2.3) привели к верхнему треугольному виду (первый шаг метода Гаусса завершен). Второй шаг (обратный ход) заключается в решении системы уравнений (2.6). Он осуществляется следующим образом: из последнего уравнения системы (2.6) находим $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, используя найденное значение x_n из предпоследнего (n–1) уравнения системы (2.6) находим x_{n-1}, затем из (n–2) уравнение системы (2.6) находим x_{n-2} и т. д. до x_1.

Алгоритм Гаусса состоит из однотипных операций, которые легко программируются.

Решим систему уравнений, используя метод Гаусса.

Пример 2.6.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24; \\ -15x_1 + 4x_2 = -42. \end{cases} \tag{2.7}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнения системы (2.7). Для этого умножим первое уравнение почленно на 4 и вычтем из второго, затем умножим первое уравнение на (–5) и вычтем из третьего. В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ -3x_2 + 17x_3 = -8; \\ 9x_2 - 25x_3 = -2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Теперь исключим из третьего уравнения системы (2.8) неизвестное x_2. Для этого умножим поэлементно второе уравне-

ние системы (2.8) на (–3) и вычтем из третьего уравнения системы (2.8).

В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ -3x_2 + 17x_3 = -8; \\ 26x_3 = -26. \end{cases} \tag{2.9}$$

Из системы уравнений (2.9) последовательно находим неизвестные x, начиная с последнего (x_3), т. е. $x_3 = -1$;

$$x_2 = \frac{17x_3 + 8}{3} = -3\,;\ x_1 = \frac{8 - x_2 + 5x_3}{3} = 2\,.$$

Теперь рассмотрим метод Крамера решение СЛАУ.

Рассмотрим систему уравнений (2.3), которую запишем в матричном виде

$$AX = B, \tag{2.10}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица системы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор неизвестных.

Если определитель матрицы A (det A) не равен нулю, то существует A^{-1}.

Домножим слева систему (2.10) на A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \textit{ так как } A^{-1}A = E, \textit{ то}$$

имеем $EX = A^{-1}B$, а так как $EX = X$, то

окончательно получим $X = A^{-1}B$ (2.11)

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\det A}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\det A}. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Числители равенств (2.13) есть разложения по элементам 1, 2, ..., n-го столбцов определителя, полученного из det A заменой в нем 1, 2, ..., n столбцов столбцом свободных членов, т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, неизвестные x_i можно найти по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \tag{2.14}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Решим систему уравнений, используя метод Крамера.

Пример 2.7.

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & =0; \\ 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & =0; \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & =1. \end{cases}$$

Вначале найдем определитель исходной системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\times\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -21-26+46=-1.$$

Затем находим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2.$$

и определяем неизвестные x_i; $i = 1, 2, 3$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = -2.$$

2.3. Собственные числа, собственные векторы матриц и квадратичные формы

Проблема собственных чисел играет существенную роль не только в линейной алгебре, но и в других разделах матема-

тики, а также во многих прикладных областях (в менеджменте, психологии, юриспруденции).

Пусть задана квадратная матрица A размера ($n \times n$), элементами которой являются действительные числа (R) и вектор неизвестных X размера ($n \times 1$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что λ — это некоторое неизвестное действительное число.

Если λ и ненулевой вектор X удовлетворяют уравнению

$$AX = \lambda \times X, \tag{2.15}$$

то λ называется собственным числом или собственным значением матрицы A, а X — собственным вектором этой же матрицы, соответствующим λ.

Преобразуем уравнение (2.15) к следующему виду:

$$\lambda \times X - A \times X = 0, (\lambda E - A) \times X = 0, \tag{2.16}$$

где E — единичная матрица.

Матрица

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

называется характеристической матрицей.

Так как по условию вектор неизвестных X не равен нулю, то среди его координат x_1, x_2, ..., x_n должна быть хотя бы одна ненулевая. А для того, чтобы система линейных однородных уравнений (2.16) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю (это следует из теоремы Кронекера-Капелли).

Поэтому получаем

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.17)$$

Число $\lambda = \lambda_k$, где $k = \overline{1, n}$ будет собственным числом только в том случае, если матрица $(\lambda_k E - A)$ — вырожденная.

Уравнение (2.17) называется характеристическим уравнением матрицы A и представляет собой алгебраическое уравнение степени n относительно λ:

$$det\,(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0. \qquad (2.18)$$

Уравнение (2.18) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Множество всех корней уравнения (2.18) называется спектром матрицы A.

Заметим, что уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет те же корни, что и уравнение (2.17), т. е.

$$det\,(A - \lambda E) = (-1)^n\, det\,(\lambda E - A).$$

Каждому собственному значению спектра матрицы A ставится в соответствие собственный вектор, определенный с точностью до скалярного множителя. Если λ_k есть кратный корень характеристического уравнения, то для произвольной квадратной матрицы число соответствующих собственных векторов может быть не равно кратности корня. С геометрической точки зрения собственный вектор определяет в пространстве некоторое направление (прямую, проходящую через начало координат), которое в результате преобразования не изменяется и вдоль которого пространство испытывает растяжение или сжатие в λ раз.

Полином $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ называют характеристическим полиномом. Коэффициенты p_k $(k = \overline{1, n})$ можно вычислить по следующим рекуррентным формулам [57]:

$$\begin{cases} p_1 = -SpA; \\ 2p_2 = -SpA^2 - p_1 SpA; \\ 3p_3 = -SpA^3 - p_1 SpA^2 - p_2 SpA; \\ 4p_4 = -SpA^4 - p_1 SpA^3 - p_2 SpA^2 - p_3 SpA; \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ np_n = -SpA^n - p_1 SpA^{n-1} - \dots - p_{n-1} SpA. \end{cases} \tag{2.19}$$

Здесь $SpA = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk}$ — след матрицы (сумма элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A). Заметим, что $p_n = (-1)^n \times \det A$. При отыскании собственных чисел даже для матриц невысокого порядка неизбежно большое количество вычислений. Для общего случая нельзя предложить оптимальный способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Рассмотрим случай, когда собственные числа находятся сразу исходя из вида матрицы (исходная матрица либо диагональная, либо верхняя или нижняя треугольная). В этом случае собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ совпадают с элементами главной диагонали исходной матрицы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Пусть задана верхняя треугольная матрица A размера $(n \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & (\lambda - a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda - a_{nn}) \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - a_{11}) \times (\lambda - a_{22}) \times \dots \times (\lambda - a_{nn}) = 0.$$

Отсюда видно, что собственные числа равны:

$$\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \ldots, \lambda_n = a_{nn}.$$

С появлением ЭВМ получили распространение итерационные методы нахождения собственных чисел, которые не используют вычисление характеристического полинома. К этим способам относятся: степенной метод, метод обратных итераций, QR-алгоритм, метод вращений Якоби, QL-алгоритм и др. Причем применение конкретного итерационного метода зависит от вида исходной матрицы A [4].

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 2.8. Дана матрица A размера (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А.

Из условия задачи видно, что матрица А является верхней треугольной матрицей. Поэтому собственными числами данной матрицы будут элементы ее главной диагонали

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -4 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Теперь найдем соответствующие найденным собственным числам собственные векторы. Для этого мы используем уравнение (2.16).

Для $\lambda_1 = -4$ получаем

$$(-4E - A) \times X_1 = 0, \tag{2.20}$$

где $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Далее раскроем матричное уравнение (2.20)

$$\left[-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&4&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$\begin{pmatrix}0&-4&-1\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ или\ \begin{cases}-4x_2 & -x_3 & =0;\\ -5x_2 & & =0;\\ & -5x_3 & =0.\end{cases}$$

Так как матрица этой системы вырождена, то она имеет ненулевые решения, которые имеют вид:

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix},\quad x_1\neq 0,\ x_1\in R,$$

т. е. получены искомые собственные вектора для λ_1

Для $\lambda_2=\lambda_3=1$ получаем

$$(E-A)X_2=0,\ где\ X_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

или в подробной записи $\begin{pmatrix}5&-4&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$

В результате получаем

$$5x_1-4x_2-x_3=0\ или\ x_3=5x_1-4x_2,$$

т. е. это уравнение имеет ненулевые решения, которые и будут искомыми собственными векторами для λ_2.

Эти решения запишем в виде

$$X_2=\begin{pmatrix}x_1 & \\ & x_2\\ 5x_1 & -4x_2\end{pmatrix},\quad x_1^2+x_2^2\neq 0,\quad x_1,x_2\in R.$$

Пример 2.9. Дана матрица A размера (2×2). Найти собственные числа и собственные матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение (2.17) для данного случая

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\lambda + 3) \times \lambda - 4 = 0; \quad \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0; \quad D = 9 - 4 \times 1(-4) = 25;$$

$$\lambda_1 = \frac{-3+5}{2} = 1; \quad \lambda_2 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Теперь найдем собственные векторы исходной матрицы A, соответствующие $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -4$.

Для $\lambda_1 = 1$ имеем

$$(E - A)X_1 = 0, \text{где } X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

В подробной записи получим

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{или} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель полученной матрицы равен нулю, то она имеет ненулевые решения, которые и являются собственными векторами X_1, которые мы и находим

$$\begin{cases} 4x_1 & -2x_2 & = 0; \\ -2x_1 & +x_2 & = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x_2 = 2x_1$. Из второго уравнения системы получаем $x_2 = 2x_1$, т. е. она имеет бесконечное множество решений. И искомый собственный вектор X_1 будет иметь вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \; x_1 \neq 0, \quad x_1 \in R.$$

Аналогично, для $\lambda_2 = -4$ находим

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ x_2 \neq 0, \quad x_2 \in R.$$

В заключение приведем два полезных правила [38]:

1) сумма собственных чисел матрицы A равна следу этой матрицы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn};$$

2) произведение собственных чисел матрицы A равно определителю этой матрицы

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A.$$

Кратко рассмотрим квадратичные формы.

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени от нескольких пременных. Обозначим их x_1, x_2, … x_n.

Квадратичную форму в общем виде можно записать так:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \text{где } b_{ij} \in R.$$

В качестве примера рассмотрим квадратичную форму трех переменных:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{3} (b_{i1} x_i x_1 + b_{i2} x_i x_2 + b_{i3} x_i x_3) = \\ &= b_{11} x_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{21} x_2 x_1 + b_{22} x_2 x_2 + \\ &+ b_{23} x_2 x_3 + b_{31} x_3 x_1 + b_{32} x_3 x_2 + b_{33} x_3 x_3 = \\ &= b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + x_1 x_2 (b_{12} + b_{21}) + \\ &+ x_1 x_3 (b_{13} + b_{31}) + x_2 x_3 (b_{23} + b_{32}). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$b'_{12} = b'_{21} = \frac{b_{12} + b_{21}}{2}; \ b'_{13} = b'_{31} = \frac{b_{13} + b_{31}}{2};$$

$$b'_{23} = b'_{32} = \frac{b_{23} + b_{32}}{2}.$$

Тогда квадратичная форма примет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b'_{12}x_1x_2 + \\ + 2b'_{13}x_1x_3 + 2b'_{23}x_2x_3.$$

Дополнительно вводим симметричную матрицу B, вектор $\vec{X}$.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; \ \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае квадратичная форма примет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \vec{X}^T \cdot B \cdot \vec{X}.$$

Последняя формула представляет собой матрично-векторный вид квадратичной формы.

А в общем случае получим:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{X}^T \cdot B \cdot \vec{X},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b'_{12} & \ldots & b'_{1n} \\ b'_{21} & b_{22} & \ldots & b'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}; \ \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где b_{ii} – коэффициенты при x_i^2 для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, а $b'_{ij} = b'_{ji}$ равны полусуммам коэффициентов при элементах, содержащих произведения $x_i x_j$ и $x_j x_i$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$.

Матрица B является матрицей квадратичной формы.

В качестве примера запишем в матрично-векторном виде квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 14x_2x_3.$$

В данном случае получаем:

$b_{11} = 2$; $b_{22} = 3$; $b_{33} = 1$; $b_{12} + b_{21} = -6$; $b_{13} + b_{31} = 8$; $b_{23} + b_{32} = 14$, т. е. $b'_{12} = b'_{21} = -3$; $b'_{13} = b'_{31} = 4$; $b'_{23} = b'_{32} = 7$.

Матрица данной квадратичной формы принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

А ее матрично-векторная запись такова:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2.4. Некоторые сведения о векторах

Цифровые данные, используемые в экономике, можно представить в виде списков чисел, каждое из которых имеет определенный смысл.

Например, списки цен различных товаров в магазинах, объемы продукции разных видов, выпущенных каким-либо предприятием за год и т. д. В математике такие упорядоченные списки чисел называют векторами. Дадим определение n-мерного вектора (n = 1, 2, ...).

Упорядоченный набор n чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называется n-мерным вектором. Мы будем обозначать векторы заглавными буквами со стрелками над ними, т. е.

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ есть координаты вектора, а n — его размерность.

Два n-мерных вектора называются равными, если их соответствующие координаты равны, например:

$$\vec{X} = (2, 3, 7, 12); \vec{Y} = (2, 3, 7, 12) \Rightarrow \vec{X} = \vec{Y}.$$

Вектор, все координаты которого нули, называется нуль-вектором и обозначается $\vec{0}$.

Алгебраической суммой двух n-мерных векторов

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } \vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

называется вектор $\vec{X} \pm \vec{Y}$, каждая координата которого равна алгебраической сумме соответствующих координат векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, т. е.

$$\vec{X} \pm \vec{Y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n). \qquad (2.21)$$

Произведением действительного числа k на n-мерный вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерный вектор $k\vec{X}$, каждая координата которого равна произведению числа k на соответствующую координату вектора $\vec{X}$, т. е.

$$k\vec{X} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n). \qquad (2.22)$$

Множество n-мерных векторов, для которых определены действия алгебраического сложения (2.21) и умножения на число (2.22), называют n-мерным векторным пространством и обозначают R^n (в случае $n = 1$ оно совпадает с множеством действительных чисел R).

В случае $n = 2$ и $n = 3$ имеем соответственно двумерное (R^2) и трехмерное (R^3) векторные пространства, а двумерные и трехмерные вектора имеют геометрическую интерпретацию: они изображаются направленными отрезками на плоскости и в пространстве.

Пусть в R^n заданы вектора

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\vec{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n); k \in R; t \in R.$$

Приведем свойства линейных действий векторами:

1) $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$;

2) $\vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) = (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z}$;

3) $\vec{X} + \vec{0} = \vec{X}$;

4) $kt(\vec{X}) = k(t\vec{X})$;

5) $k(\vec{X} + \vec{Y}) = k\vec{X} + k\vec{Y}$;

6) $(k + t)\vec{X} = k\vec{X} + t\vec{X}$;

7) $0\vec{X} = \vec{0}$;

8) $k\vec{0} = \vec{0}$;

9) $\vec{X} - \vec{Y} = \vec{X} + (-1)\vec{Y}$.

Длина (норма) вектора $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в пространстве R^n находится по формуле

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{2.23}$$

Например, задан вектор $\vec{X} = (5, 3, -2)$.

Используя (2.23) найдем, что его длина равна

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

Введем понятие скалярного произведения в действительном пространстве R^n.

Скалярным произведением двух векторов

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } \vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

в R^n ($x_i \in R$, $y_i \in R$, $i = \overline{1, n}$) называется число, получаемое по формулам:

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \tag{2.24}$$

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left|\vec{X}\right| \times \left|\vec{Y}\right| \times \cos\alpha, \tag{2.25}$$

где α есть угол между n-мерными векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ (в случае $n = 2$ и $n = 3$ α будет углом между направленными отрезками на плоскости и в пространстве, а при $n > 3$ векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ являются математическими абстракциями).

Из формулы (2.25) следует, что угол между n-мерными векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)}{\left|\vec{X}\right| \times \left|\vec{Y}\right|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{2.26}$$

Если угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен $\frac{\pi}{2}$, то скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n = 0. \tag{2.27}$$

Пример 2.10.

Например, заданы векторы

$\vec{X} = (2, 3, 7)$ и $\vec{Y} = (1, 6, 5)$ в 3-мерном пространстве R^3. Найти угол между ними.

По формуле (2.26) получим

$$\cos\left(\widehat{\vec{X}\vec{Y}}\right) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} =$$

$$= \frac{2 + 18 + 35}{\sqrt{4 + 9 + 49}\sqrt{1 + 36 + 25}} =$$

$$= \frac{55}{\sqrt{62}\sqrt{62}} = \frac{55}{62} \approx 0{,}887097;$$

$$\alpha = (\widehat{\vec{X}\vec{Y}}) \approx 27°29'21{,}5''$$

Скалярное произведение в пространстве R^n обладает следующими свойствами:

1) $\left(\vec{X}, \vec{X}\right) \geq 0$ (при этом равенство нулю будет только в том случае, если $\vec{X} = \vec{0}$);

2) $\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left(\vec{Y}, \vec{X}\right)$;

3) $(k\vec{X} + t\vec{Y}, \vec{Z}) = k(\vec{X}, \vec{Z}) + t(\vec{Y}, \vec{Z})$.

Здесь $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ — векторы в R^n, а k и t — действительные числа.

Пространство R^n, в котором введено понятие скалярного произведения по формуле (2.24), называется евклидовым n-мерным пространством.

Векторное произведение

Введем новое действие над векторами — векторное произведение. При этом будем считать, что в трехмерном пространстве задана декартова система координат. Напомним, что декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпенди-

кулярных осей, которые пронумерованы в некотором порядке. Точка пересечения осей — это начало координат, а оси — это координатные оси, причем первую называют осью абсцисс *(x)*, вторую — осью ординат *(y)*, а третью — осью аппликат (*z*).

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{X}$ на вектор $\vec{Y}$ называется вектор, который обозначается $[\vec{X}, \vec{Y}]$ или $\vec{X} \times \vec{Y}$ и определяется следующими условиями:

а) $\vec{X} \times \vec{Y} = |\vec{X}| \times |\vec{Y}| \cdot \sin\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$;

б) вектор $\vec{X} \times \vec{Y}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$;

в) если вектора $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{X} \times \vec{Y}$ приведены к общему началу, то вектор $\vec{X} \times \vec{Y}$ должен быть направлен так, чтобы из его конца кратчайший поворот вектора $\vec{X}$ к вектору $\vec{Y}$ был совершаем против часовой стрелки. Такая тройка векторов называется правой (рис. 2.2).

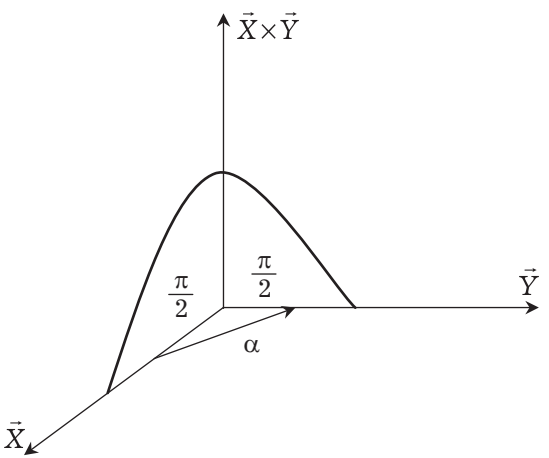


Рис. 2.2

Приведем свойства векторного произведения:

1. Если $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ коллинеарные векторы, то их векторное произведение равно нулю, т. е. $\vec{X} \times \vec{Y} = |\vec{X}| \times |\vec{Y}| \cdot \sin\alpha = 0$.

В данном случае $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$, а синус α в обоих случаях равен нулю.

2. Если векторное произведение векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равно нулю, то они коллинеарны.

3. Если векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ приведены к общему началу, то модуль векторного произведения $|\vec{X}\times\vec{Y}|$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Из элементарной геометрии известно, что площадь параллелограмма (S) равна произведению длин смежных сторон на синус угла между ними, т. е. $|\vec{X}|\times|\vec{Y}|\cdot\sin\alpha = S$, поэтому имеем $|\vec{X}\times\vec{Y}| = S$.

Из данного свойства следует, что векторное произведение можно записать в виде:

$$\vec{X}\times\vec{Y} = S\cdot\vec{e},$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор, т. е. $|\vec{e}|=1$, а его расположение видно из рис. 2.3.

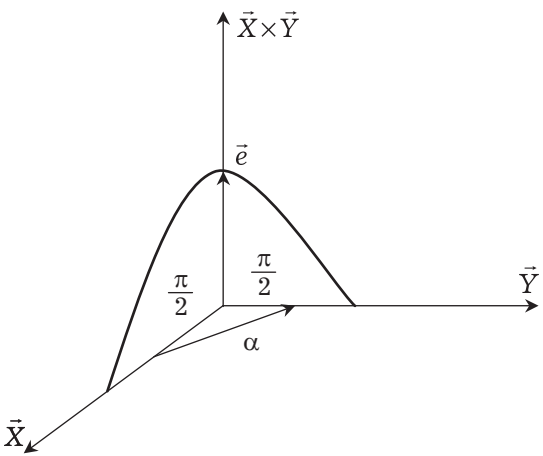


Рис. 2.3

4. Векторное произведение $\vec{X}$ на $\vec{Y}$ — это вектор, обратный векторному произведению $\vec{Y}$ на $\vec{X}$, т. е. $[\vec{X},\vec{Y}] = -[\vec{Y},\vec{X}]$.

5. Свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю k:

$$[(k\vec{X}),\vec{Y}] = k[\vec{X},\vec{Y}], \text{ или } [\vec{X},(k\vec{Y})] = k[\vec{X},\vec{Y}].$$

6. Распределительное свойство относительно сложения:

$$[\vec{X},(\vec{Y}+\vec{Z})]=[\vec{X},\vec{Y}]+[\vec{X},\vec{Z}], \text{ или } [(\vec{Y}+\vec{Z}),\vec{X}]=[\vec{Y},\vec{X}]+[\vec{Z},\vec{X}].$$

Приведем без доказательства теорему, позволяющую находить векторное произведение двух векторов, если заданы их координаты.

Теорема 2.4. Если заданы координаты векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$:

$\vec{X} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{Y} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение вектора $\vec{X}$ на вектор $\vec{Y}$ определяется формулой:

$$\vec{X}\times\vec{Y}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right). \qquad (2.28)$$

Формулу (2.28) можно переписать в виде

$$\vec{X}\times\vec{Y}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad (2.29)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатных осей, т. е. $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, а их расположение видно из рис. 2.4.

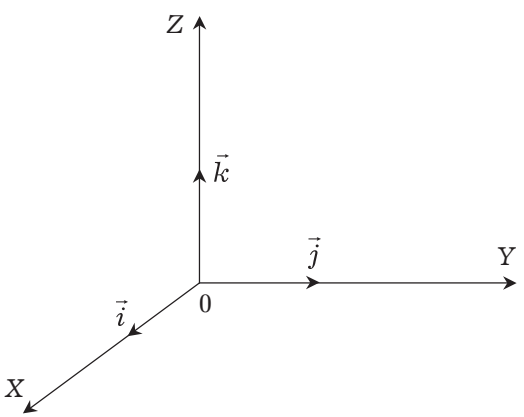


Рис. 2.4

Рассмотрим некоторые задачи на применение векторного произведения.

Пример 2.11.

Дано: $\vec{X} = (2, 5, 7)$; $\vec{Y} = (1, 2, 4)$. Надо найти площадь треугольника, построенного на этих векторах. Обозначим искомую площадь $S_{\text{тр.}}$ и воспользуемся свойством 3. Получим $|\vec{X} \times \vec{Y}| = S_{\text{пар}}$, где $S_{\text{пар}}$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Из элементарной геометрии известно, что $S_{\text{тр}} = \dfrac{S_{\text{пар}}}{2}$. Следовательно, получаем по формуле (2.28)

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6; -1; -1).$$

$$S_{\text{пар}} = |X \times Y| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{38}.$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{S_{\text{пар}}}{2} = \frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3{,}08.$$

Пример 2.12.

Дано: координаты вершины треугольника ABC: *A* (4, -14, 8); *B* (2, -18, 12); *C* (12, -8, 12). Надо найти длину его высоты, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*.

Обозначим: площадь треугольника *ABC* через $S_{\text{тр}}$, искомую высоту через $h_{\text{с}}$.

Из элементарной геометрии известно, что

$$S_{\text{тр}} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} \cdot h_{\text{с}},$$

где $|\overrightarrow{AB}|$ — длина стороны AB.

С другой стороны из свойства 3 векторного произведения имеем

$$S_{\text{тр}} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2},$$

где $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ — модуль векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Сравнивая обе формулы, получаем

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} \cdot h_{\text{с}} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} \text{ или } h_{\text{с}} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Находим $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$;

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16=16} = \sqrt{36} = 6;$$

$$\overrightarrow{AC} = (8, 6, 4);$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \right) = (-40; -40; -20);$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1600+1600+400} = \sqrt{3600} = 60.$$

И окончательно получаем

$$h_c = \frac{60}{6} = 10.$$

Смешанное произведение

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ называется число, которое равно векторному произведению $[\vec{X}, \vec{Y}]$, скалярно умноженному на вектор $\vec{Z}$. Обозначим смешанное произведение векторов $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ следующим образом $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z}$.

Выполняются следующие равенства $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} = [\vec{X}\,\vec{Y}]\vec{Z} = \vec{X}[\vec{Y}\,\vec{Z}]$.

Геометрический смысл смешанного произведения виден из теоремы 2.5.

Теорема 2.5. Смешанное произведение $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ — правая, и со знаком минус, если это тройка левая (в этом случае, если смотреть из конца вектора $\vec{Z}$, кратчайший поворот вектора $\vec{X}$ к вектору $\vec{Y}$ осуществляется по часовой стрелке).

Если же векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ компланарны, т. е. лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, то $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} = 0$.

Приведем свойства смешанного произведения.

1. $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} = \vec{Y}\,\vec{Z}\,\vec{X} = \vec{Z}\,\vec{X}\,\vec{Y}$, т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей.

2. $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} = -\vec{X}\,\vec{Z}\,\vec{Y}$; $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} = -\vec{Y}\,\vec{X}\,\vec{Z}$; $\vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} = -\vec{Z}\,\vec{Y}\,\vec{X}$, т. е. смешанное произведение меняет свой знак при перестановке местами любых двух векторов-сомножителей.

3. $\vec{X}(\vec{Y}+\vec{U})\vec{Z} = \vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} + \vec{X}\,\vec{U}\,\vec{Z}$; $\vec{X}\,\vec{Y}(\vec{Z}+\vec{U}) = \vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{Z} + \vec{X}\,\vec{Y}\,\vec{U}$.

4. $\vec{X}(k\vec{Y})\vec{Z} = \vec{X}\vec{Y}(k\vec{Z}) = k(\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$, где $k \in R$,
где R — множество действительных чисел.

В том случае, если векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ заданы своими координатами, т. е. $\vec{X} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{Y} = (x_2, y_2, z_2)$; $\vec{Z} = (x_3, y_3, z_3)$, их смешанное произведение находится по формуле

$$\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.30)$$

Объем параллелепипеда, который построен на векторах $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, вычисляется по формуле

$$V = |\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.31)$$

В формуле (2.31) знак берется одинаковым со знаком определителя.

Теперь приведем конкретный пример применения смешанного произведения.

Пример 2.13. Дано: $\vec{X} = (1, 5, 4)$; $\vec{Y} = (6, -4, 4)$; $\vec{Z} = (10, -1, 10)$. Надо доказать, что заданные векторы компланарны.

Из теоремы 2.5 следует, что если векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = 0$$

Далее используем формулу (2.30) и получим

$$\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 10 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -17 & -5 \\ 0 & -51 & -15 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} -17 & -5 \\ -51 & -15 \end{vmatrix} = 4\cdot(-5)\cdot\begin{vmatrix} -17 & 1 \\ -51 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

При решении определителя вынесли общие множители третьего столбца и второй строки, затем умножили первую строку на (-3) и сложили со второй. После этого умножили пер-

вую строку на (-10) и сложили с третьей, а затем разложили получившийся определитель по элементам первого столбца. После этого вынесли общий множитель второго столбца. Так как при решения определителя мы получили ноль, то доказано, что заданные векторы $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ компланарны.

Базис пространства R^n

Пусть в пространстве R^n задано n векторов:

$$\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n});$$
$$\vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n});$$
$$\vec{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}).$$

Базисом пространства R^n называется любая система из n линейно независимых векторов этого пространства.

Любой вектор из пространства R^n единственным образом можно разложить по векторам базиса. Например, вектор $\vec{y}$ можно разложить по линейно независимым векторам $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ следующим образом: $\vec{y} = p_1\vec{x}_1 + p_2\vec{x}_2 + \ldots + p_n\vec{x}_n$, где числа p_1, p_2, ..., p_n —координаты вектора $\vec{y}$ в данном базисе.

Заметим, что в пространстве R^2 базис составляют два неколлинеарных вектора, а в пространстве R^3 — три некомпланарных вектора.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ называется линейно независимой, если выполняется равенство

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \ldots + k_n\vec{x}_n = 0, \qquad (2.32)$$

где $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

В том случае, если хотя бы одно значение k_i, $i = \overline{1, n}$ в формуле (2.32) не равно нулю, система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ будет линейно зависимой и базиса не составляет.

Заметим, что система векторов, которая содержит нуль-вектор, всегда линейно зависима.

Перепишем выражение (2.32), поставив вместо векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ их координаты.

Получим:

$$k_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \ldots + k_n\begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.33)$$

Из формулы (2.33) следует:

$$\begin{pmatrix} k_1x_{11} + k_2x_{21} + \ldots + k_nx_{n1} = 0 \\ k_1x_{12} + k_2x_{22} + \ldots + k_nx_{n2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_1x_{1n} + k_2x_{2n} + \ldots + k_nx_{nn} = 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.34)$$

Полученная система однородных уравнений (2.34) всегда совместна.

Из теоремы Кронекера-Капелии (см. теорему 2.3) следует, что если определитель системы не равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} \ldots x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} \ldots x_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{1n} & x_{2n} \ldots x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (2.35)$$

то система (2.34) имеет единственное решение $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, а это значит, что векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ линейно независимы и составляют базис пространства R^n.

Пример 2.14. Составлют ли векторы $\vec{x}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$; $\vec{x}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$; ...; $\vec{x}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ базис пространства R^n?

Составляем из координат заданных векторов определитель (2.35):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Видно, что данный определитель не равен нулю, поэтому векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ составляют базис пространства R^n.

Данный базис называется ортонормированным, так как $|\vec{x}_1| = |\vec{x}_2| = ... = |\vec{x}_n| = 1$.

Пример 2.15. В пространстве R^3 заданы векторы: $\vec{x}$ = (2, 1, 0); $\vec{y}$ = (1, 0, 5); $\vec{z}$ = (0, 3, -1); $\vec{e}$ = (5, 16, 10). Показать, что векторы $\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}$ образуют базис и разложить вектор $\vec{e}$ по векторам этого базиса.

Из координат векторов $\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}$ составляем определитель (2.35):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -29.$$

Вторую строчку мы домножили на (-2) и сложили с первой, а затем полученный определитель разложили по элементам первого столбца. Определитель не равен нулю, поэтому векторы $\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}$ составляют базис пространства R^3.

Теперь расклыдываем вектор $\vec{e}$ по векторам базиса $\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}$, т. е. $\vec{e} = p_1\vec{x} + p_2\vec{y} + p_3\vec{z}$ или

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = p_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + p_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 + 0\times p_3 = 5 \\ p_1 + 0\times p_2 + 3\times p_3 = 16 \\ 0\times p_1 + 5p_2 - p_3 = 10 \end{cases}.$$

Третье уравнение полученной системы умножаем на 3 и складываем со вторым. Тогда получаем:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 = 5 \\ p_1 + 15p_2 = 46 \end{cases}.$$

Второе уравнение полученной системы умножаем на (-2) и складываем с первым. В результате получаем:

$$-29p_2 = -87, \text{ т. е. } p_2 = \frac{87}{29}.$$

Далее определяем

$$p_1 = 46 - 15p_2 = 46 - \frac{15\times 87}{29} = 1.$$

И наконец вычислим

$$p_3 = 5p_2 - 10 = \frac{5\times 87}{29} - 10 = 5.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = 1\times\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{87}{29}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти произведения матриц

1.1. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -3 & 9 & 0 \\ 18 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

1.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 17 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 10 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$;

1.3. $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

2.1. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 6 \\ 10 & 0 & -11 & 5 \\ -3 & -7 & 8 & 11 \end{vmatrix}$; *2.2.* $\begin{vmatrix} 7 & -10 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 18 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ -4 & -3 & 9 & 15 \end{vmatrix}$;

2.3. $\begin{vmatrix} 0 & -10 & 3 & 7 \\ 6 & 13 & -8 & -7 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Найти матрицы, обратные данным:

3.1. $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; *3.2.* $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; *3.3.* $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -10 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранги матриц:

4.1. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 1 \\ 8 & -7 & 12 & 4 \\ -15 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix}$; *4.2.* $\begin{pmatrix} 2 & 11 & -7 & 4 \\ -6 & 4 & -2 & -12 \\ 3 & -6 & 8 & -6 \\ 9 & 2 & 4 & 18 \end{pmatrix}$;

4.3. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить СЛАУ методами Гаусса и Крамера:

5.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ *5.2.* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 52x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

6. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

6.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; *6.2.* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; *6.3.* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

6.4. $\begin{pmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Дано: $\vec{X} = (1, -5, 6, 7, 10)$; $\vec{Y} = (-2, 7, 8, 11, -6)$.

Найти угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$.

8. Даны два ортогональных вектора

$\vec{X} = (3, x_2, 7)$ и $\vec{Y} = (1, 6, 8)$.

Найти координату x_2.

9. В трехмерном пространстве заданы три точки M (1; 1; 1); N (2; 2; 2); P (4; 3; 5). Найти площадь треугольника MNP.

10. В трехмерном пространстве заданы четыре точки M (1; 1; 1); N (4; 4; 4); P (3; 5; 5); Q (2; 4; 7). Найти объем тетраэдра $MNPQ$.

11. Даны векторы $\vec{X} = (-4; -8; 8)$, $\vec{Y} = (4; 3; 2)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь треугольника, построенного на этих векторах.

12. Проверить, что точки M (5; -1; -1); N (4; 2; 2); P (5; 3; 1); Q (8; 0; -5) лежат в одной плоскости.

13. Записать в матрично-векторном виде квадратичные формы:

13.1 $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 3x_2^2 - 0{,}5x_3^2 - 5x_1x_2 + 17x_1x_3 + 22x_2x_3$.

13.2 $f(x_1, x_2, x_3) = -32x_1^2 - 0{,}5x_2^2 + 11x_3^2 + 92x_1x_2 - 66x_1x_3 - x_2x_3$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей? Типы матриц.
2. Правило и свойства сложения матриц.
3. Правило и основные свойства перемножения двух матриц.
4. Как найти матрицу, обратную заданной? Любая ли матрица имеет обратную?
5. Что называется определителем?
6. Что такое ранг матрицы?
7. Как определить, совместна ли заданная СЛАУ?
8. В каких случаях однородные СЛАУ имеют ненулевые решения?
9. В чем суть итерационных методов решения СЛАУ?
10. В чем состоит метод Гаусса решения СЛАУ?
11. В чем состоит метод Крамера решения СЛАУ?

12. Какие числа называются собственными значениями матрицы?

13. Что такое след матрицы?

14. Какое уравнение называется характеристическим уравнением матрицы?

15. Дать определение n-мерного векторного пространства.

16. Что называется нормой вектора?

17. Как найти угол между двумя векторами в n-мерном векторном пространстве?

18. Какое n-мерное пространство называется евклидовым?

19. Что называется квадратичной формой?

20. Приведите матрично-векторную запись квадратичной формы.

21. Дать определение векторного произведения.

22. Как находится веторное произведение, если заданы координаты составляющих его векторов?

23. Дать определение смешанного произведения векторов. Каков его геометрический смысл?

24. Как определить смешанное произведение, если заданы координаты составляющих его векторов?

Глава 3. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

3.1. Некоторые сведения о функциях

В любой области науки мы встречаемся с различными величинами. Под величиной понимают все то, что может быть измерено и (или) вычислено и выражено числом или числами.

В естественных, технических и гуманитарных науках имеют дело с различными величинами, например, скоростью, силой, температурой, себестоимостью, валовым внутренним продуктом какой-либо страны, количеством преступлений в каком-то регионе и др.

А в математике конкретные величины не участвуют, т. е. рассматривают величины вообще, не принимая во внимание их физический смысл.

Все величины можно разделить на переменные и постоянные.

Переменной называется такая величина, которая принимает различные числовые значения. Величина, которая не меняет свое числовое значение, называется постоянной.

Все процессы характеризуются взаимоизменяемостью нескольких переменных величин, а это приводит к важнейшему понятию математики функциональной зависимости.

Часто одни и те же величины могут в одних случаях быть переменными, а в других постоянными.

Например, в формуле $F = ma$ величины m (масса) и a (ускорение) могут быть как постоянными, так и переменными.

Но существуют и фундаментальные постоянные, которые сохраняют свое значение, по крайней мере, в нашей Метагалактике.

Например, в законе всемирного тяготения $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ величина $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$, $\dfrac{м^3}{кг \cdot с^2}$ — фундаментальная постоянная.

Установление и описание связей между величинами одна из основных задач математического анализа, который включает в себя ряд дисциплин: теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисления, теорию рядов и др. Некоторые сведения из этих дисциплин мы рассмотрим в главах 3–7.

Теперь приведем определение функции одного независимого аргумента.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x на множестве определения D, если каждому значению $x \in D$ по какому-то закону поставлено в соответствие одно (несколько, бесконечно много) значение (значений) y.

В первом случае функция называется однозначной, например, $y = x + 1$ (рис. 3.1).

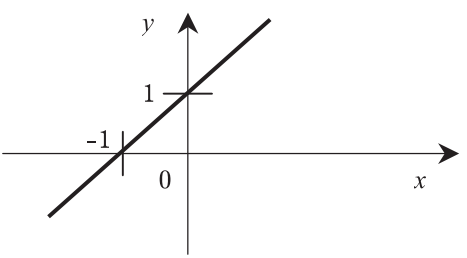


Рис. 3.1

А во втором случае — многозначной, например, y = Arcsin x (рис. 3.2).

Величину x из области D можно брать произвольно, поэтому она называется аргументом или независимой переменной. А величина y будет зависеть от выбранной величины x, поэтому ее называют зависимой переменной или функцией.

Область D может быть любой, но, как правило, используются области двух видов:

- множество целых неотрицательных чисел или какие-то части этого множества;

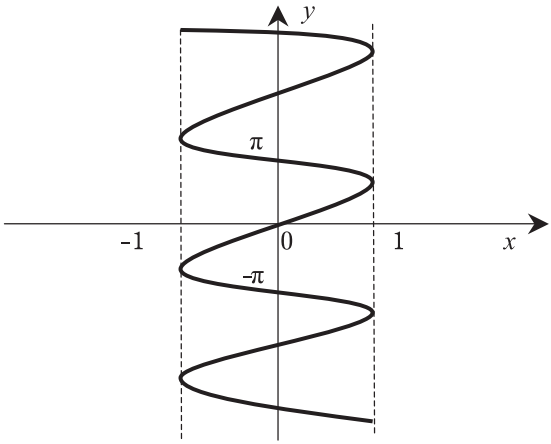


Рис. 3.2

- один или несколько интервалов (конечных или бесконечных) числовой оси.

В первом случае имеем функцию целочисленного аргумента, а во втором — непрерывного.

Тот факт, что величина y есть функция аргумента x, обычно записывают так: $y = f(x)$.

Множество всех значений функции y обозначим через E.

Функцию можно задать с помощью таблицы, в виде графика (преимуществом этого способа является его наглядность) или аналитически (формулой). Последний способ является самым распространенным.

Все функции можно разделить на два класса: элементарные и неэлементарные.

К элементарным функциям относятся основные элементарные функции:

$y = x^n (n \in R)$, $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$;

$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$;

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

и функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции и заданные одной формулой [44].

Например,

$$y=\frac{6\sin^2 x-5x^3}{\sqrt{14\mathrm{ctg}x+2}};\ y=\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}};\ y=\frac{8^x-7x^3}{\mathrm{tg}2x};\ y=\frac{e^x-5^{2x}}{\ln 4x}\ \textit{и т. д.}$$

Все функции, не подходящие под данное определение, элементарными функциями не являются.

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } x<0; \\ 0 & \text{при } x=0; \\ 1 & \text{при } x>0 \end{cases}$$

не является элементарной функцией, так как задана тремя формулами.

А функция $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n = n!$ не будет элементарной, так как количество операций умножения, которое нужно совершить для получения $f(n)$, не будет являться конечным.

Элементарные функции подразделяют на два класса: алгебраические и трансцендентные функции.

Функция называется ***алгебраической***, если ее значения можно получить, произведя над аргументом конечное число алгебраических действий: вычитаний, сложений, умножений, делений, возведений в степень с рациональным показателем.

Функция, которая не является алгебраической, называется ***трансцендентной***.

Алгебраическими являются следующие функции:

$$y=5x^5+2x^3-7x^2+2x-5;\ y=\frac{7x+3}{4x^2-8};$$

$$y=\frac{\sqrt{2x-1}}{x^5+2x^3-\sqrt[4]{x+7}};\ y=\frac{2x^2}{x+7}.$$

Трансцендентными являются, например, следующие функции:

$$y = \cos 2x,\ y = e^x,\ y = \operatorname{arcctg}\frac{5x}{x+2},\ y = 5 \cdot 8^{x+1}.$$

Алгебраические функции можно разделить на *рациональные* и *иррациональные*. Алгебраическая функция называется рациональной, если среди действий, которые проводятся над аргументом, отсутствует извлечение корней. Алгебраическая функция, которая не является рациональной, называется *иррациональной*.

Например, к рациональным функциям относятся:

$$y = \frac{x\sqrt[3]{3} - 7\pi}{\sqrt[5]{2}x^7 + 11x^2 + 6},\ y = \frac{2/x^2 - 7x + 6/x - 12}{x^2 - 2/x + 11},$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{x^2} - 4x + 5,\ y = \frac{7/x^3 - \sqrt{2}/x + 11}{\sqrt{3}/x^2 - 4x + 5}.$$

Функции $y = \sqrt{x-5}$; $y = \sqrt{x^3 + 2x - 1}$ являются иррациональными.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если при изменении знака у любого значения аргумента из ее области определения значения функции не изменяется, т. е. значение $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 3.3).

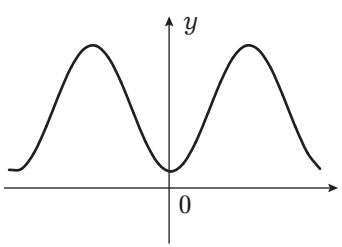


Рис. 3.3

Четными функциями являются, например, $y = \cos x$, $y = x^2$.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если при изменении знака у любого значения аргумента из ее области определения меняется только знак значения функци и, а модуль этого значения не меняется, т. е. $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 3.4).

Нечетными функциями являются, например, $y = \sin x$, $y = x^3$. Функция можент быть ни четной, ни нечетной. Например, таковыми будут функции: $y = x - 3$; $y = 5^x$.

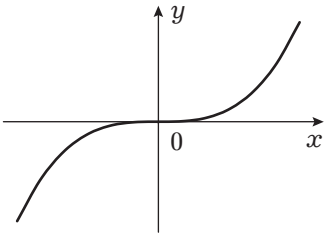


Рис. 3.4

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T > 0$, что для $\forall x$ справедливо равенство

$$f(x + T) = f(x). \qquad (3.1)$$

Если функция является периодической, то выполняются следующие равенства: $f(x + 2T) = f(x)$; $f(x + 3T) = f(x)$; $f(x - T) = f(x)$; $f(x - 2T) = f(x)$ и вообще $f(x + kT) = f(x)$ при $\forall x$, $k \in Z$ (Z – множество целых чисел).

Наименьшее положительное число T, при котором соблюдается условие (3.1), называется периодом функции. Периодической функцией является, например, функция $y = \cos x$, у которой $T = 2\pi$. Если периодическая функция не определена в точке x_0, то она не определена и во всех точках $x_0 + kT$. Например, функция $y = \operatorname{ctg} x$, у которой $T = \pi$, не определена в точках πk. Интервал аргумента, в котором функция возрастает, называется интервалом возрастания функции, а интервал, в котором функция убывает, — интервалом убывания. Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами монотонности функции, а функция в этих интервалах — монотонной. Например, функция $y = x^2$ на интервале $(-\infty; 0)$ монотонно убывает, а на интервале $(0; +\infty)$ монотонно возрастает (рис. 3.5).

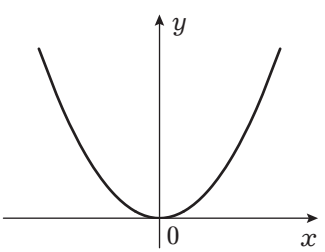


Рис. 3.5

Значение функции, большее или меньшее всех других ее значений на некотором интервале, называется соответственно наибольшим или наименьшим значением функции на этом интервале. Например, функция $y = x^2$ имеет наименьшее значение $y = 0$ на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим области определения и графики некоторых основных элементарных функций. Степенная функция $y = x^n$ определена на интервале $x \in (-\infty; +\infty)$, если $n \in Z^+$ (целые по-

ложительные числа). Приведем графики функций $y = x^4$ (рис. 3.6); $y = x^3$ (рис. 3.7):

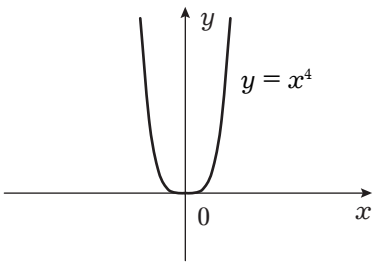


Рис. 3.6

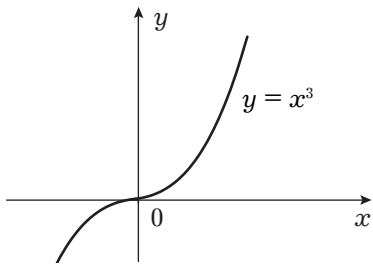


Рис. 3.7

Если $n \in Z^-$ (целые отрицательные числа), то степенная функция определена при ∀x, кроме x = 0.

Приведем графики функций $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 3.8) и $y = x^{3/2}$ (рис. 3.9):

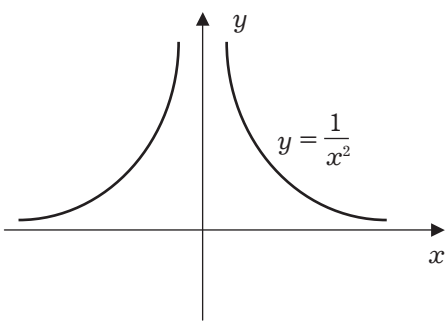


Рис. 3.8

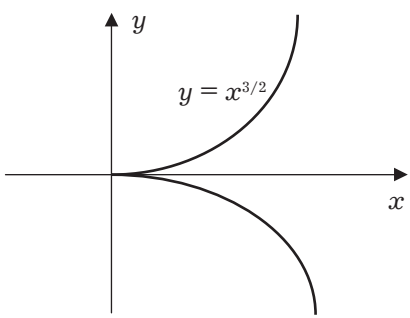


Рис. 3.9

Показательная функция $y = a^x$ определена при всех значениях x. Приведем графики функций $y = 2^x$ и $y = (1/2)^x$ (рис. 3.10)

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена только для $x > 0$ (рис. 3.11).

Тригонометрические функции:

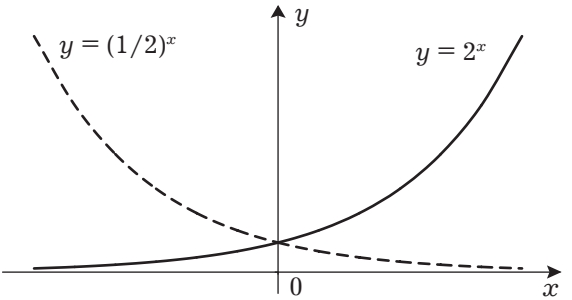


Рис. 3.10

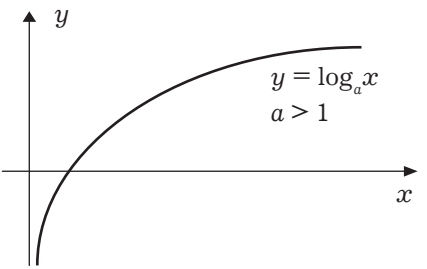


Рис. 3.11

Функции $y = \sin x$ (рис. 3.12) и $y = \cos x$ (рис. 3.13) определены при всех значениях x.

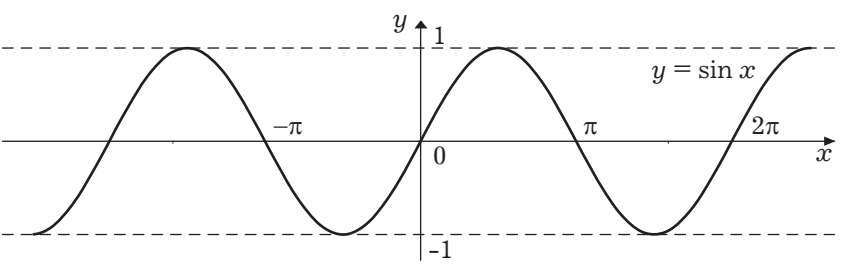


Рис. 3.12

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех значениях x, кроме точек $\pi/2 + \pi k$, $k \in Z$ (график на рис. 3.14).

Функция $y = \operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ определена при $\forall x$, кроме $x = \pi k$, $k \in Z$. Приведем график этой функции (рис. 3.15).

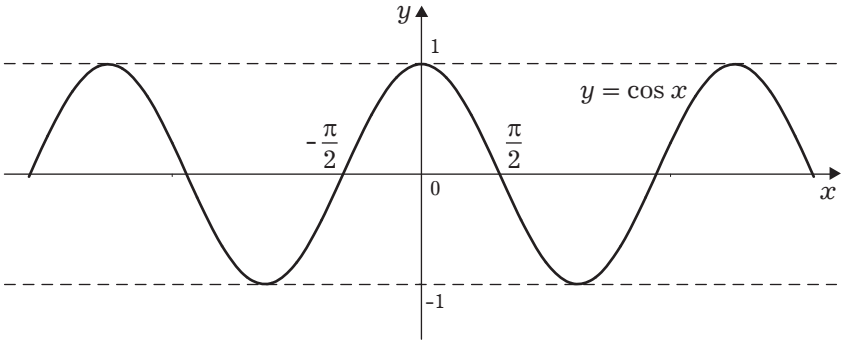


Рис. 3.13

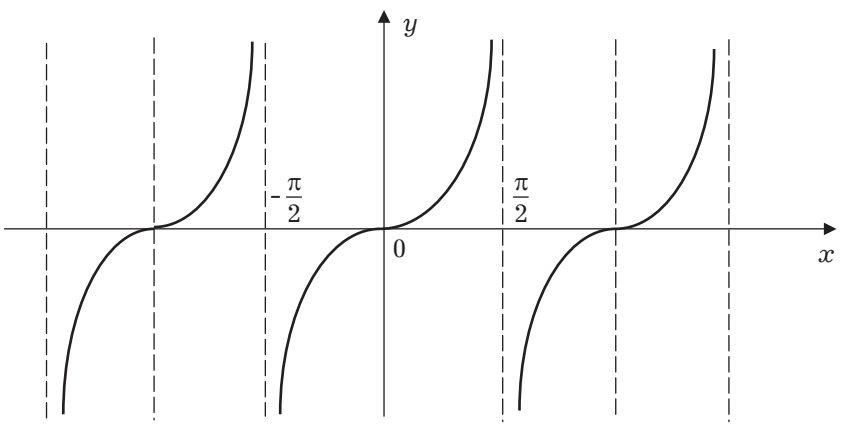


Рис. 3.14

Функция $y = \arccos x$, определена на отрезке $-1 \le x \le 1$, а значения функции заполняют отрезок $0 \le y \le \pi$. Приведем график этой функции (рис. 3.16).

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на интервале $-\infty < x < +\infty$, а значения функции заполняют интервал $-(\pi/2) < y < \pi/2$ (рис. 3.17).

Приведем графики некоторых функций, которые получаются из основных элементарных функций. График функции $y = \cos(x - \pi/4)$ — косинусоида, сдвинутая вдоль оси абсцис вправо на величину $\pi/4$ (рис. 3.18).

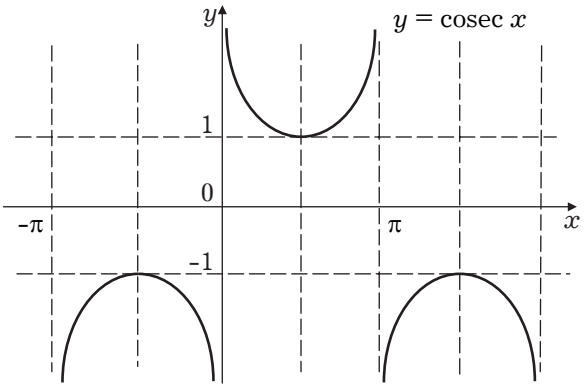


Рис. 3.15

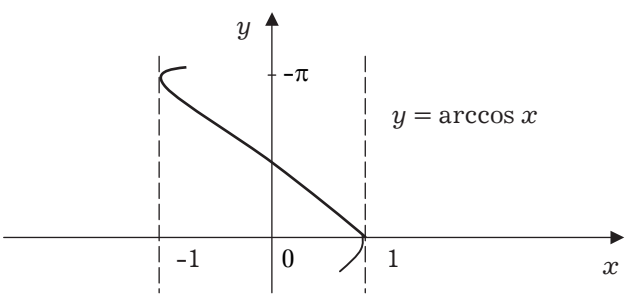


Рис. 3.16

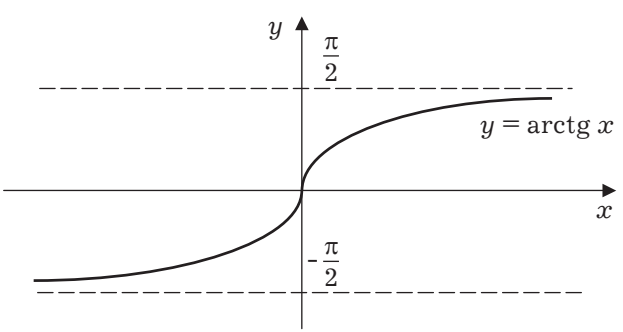


Рис. 3.17

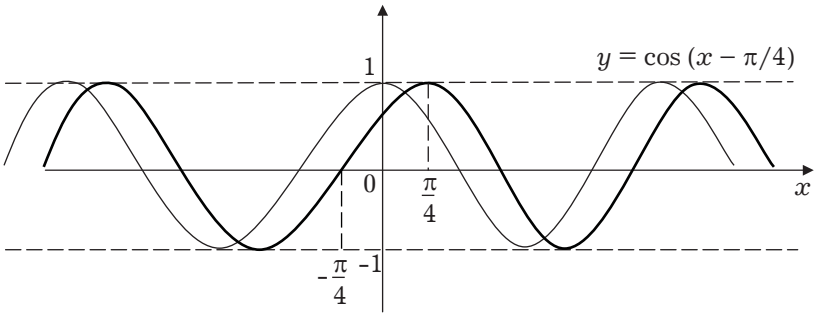


Рис. 3.18

Функция $y = -\sqrt{16 - x^2}$ определена при $16 - x^2 \geq 0$ или при $-4 \leq x \leq 4$. Возведем в квадрвт обе части уравнения $y = -\sqrt{16 - x^2}$, получаем $x^2 + y^2 = 16$, а это уравнение окружности с радиусом 4, с центром в начале координат. Так как исходная функция принимает только отрицательные значения, то ее графиком будет полуокужность, расположеная ниже оси абсцисс (рис. 3.19).

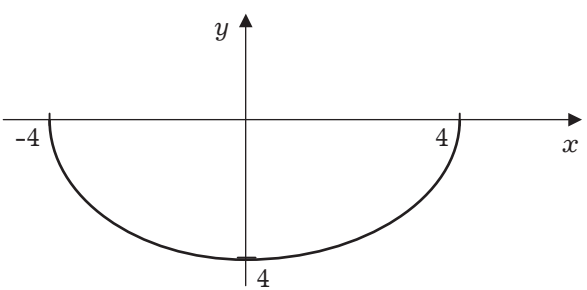


Рис. 3.19

Графиком функции $y = \sin x + 3$ является синусоида, сдвинутая в направлени оси ординат вверх на три единицы (рис. 3.20).

Покажем, как строятся графики функций вида $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$; $|y| = f(x)$. Напомним определение модуля числа:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0; \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

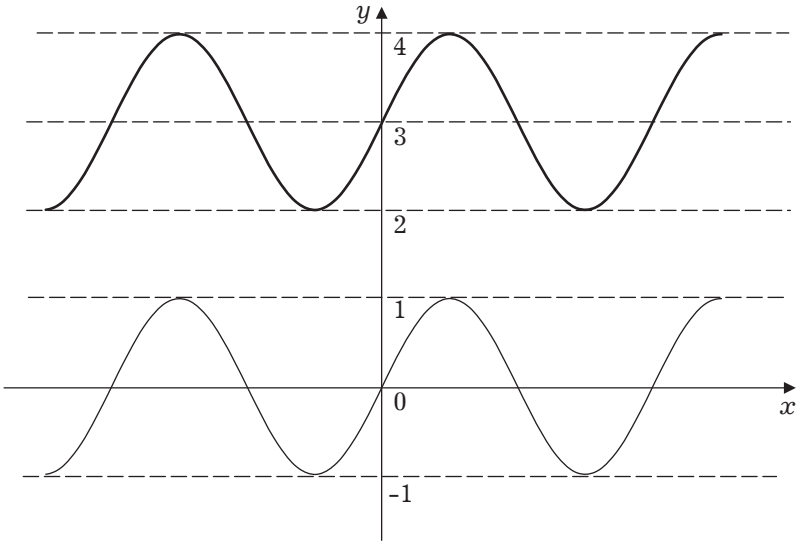


Рис. 3.20

Для построения графика функции $y = f(|x|)$ на основании определения модуля получим:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geq 0; \\ f(-x) \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

График данной функции состоит из двух графиков: графика $y = f(x)$ в правой полуплоскости и графика $y = f(-x)$ в левой полуплоскости. Построим график функции.

$$y = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \text{ при } x \geq 0; \\ x^2 + 3x + 2 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Функция $y = f(|x|)$ четная, поэтому для построения ее графика нужно построить график функции $y = f(x)$ для $\forall x > 0$ из области ее определения и отразить его симетрично оси ординат (рис. 3.21).

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ на основании определения модуля получим:

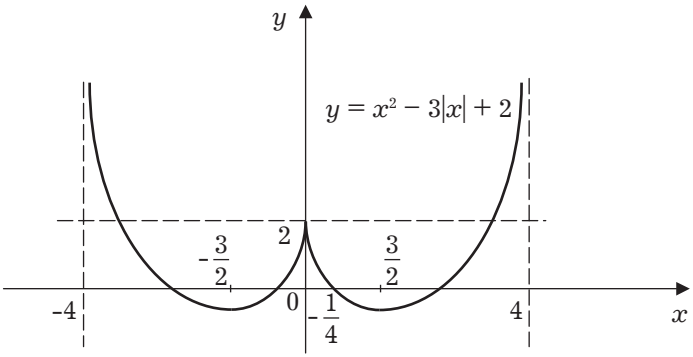


Рис. 3.21

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geq 0; \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для $\forall x$ из области ее определения и ту часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси абсцисс ($f(x) < 0$), отразить симметрично этой оси. Следовательно, график функции $y = |f(x)|$ расположен над осью абсцисс. Например, для построения графика функции $y = |x^2 - 4|$ надо построить график функции $y = x^2 - 4$ для $\forall$x и ту часть графика, которая распол-жена ниже оси 0X ($-2 < x < 2$), отразить симметрично этой оси (рис. 3.22).

Имея в виду, что в формуле $|y| = f(x)$ $f(x) \geq 0$ и на основании определения модуля, получим:

$$|y| = \begin{cases} y \text{ при } y \geq 0; \\ -y \text{ при } y < 0. \end{cases}$$

Теперь перепишем $|y| = f(x)$ в виде $y = \pm f(x)$ при $f(x) \geq 0$ и сформулируем правило построения графика функции $|y| = f(x)$. Нужно построить график функции $y = f(x)$ для тех x из области ее определения, при которых $f(x) \geq 0$ и отразить полученную часть графика симметрично оси абсцисс. Следовательно, график функции $|y| = f(x)$ состоит из графиков двух

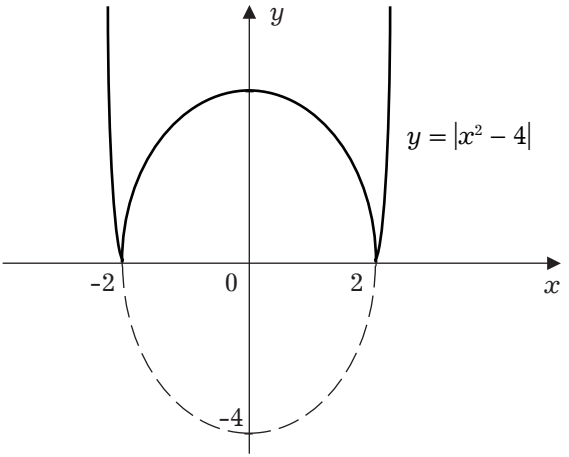


Рис. 3.22

функций: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ при $f(x) \geq 0$. Например, график функции $|y| = x$ имеет вид (рис. 3.23).

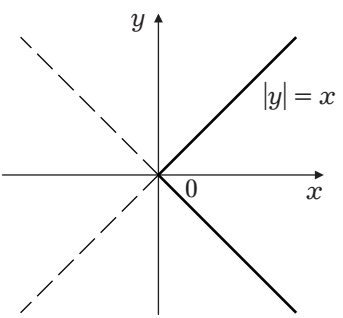


Рис. 3.23

3.2. Предел последовательности. Предел функции. Вычисление пределов

Прежде чем перейти к определению предела напомним, что в математике используются три вида бесконечностей $+\infty$,

$-\infty$, ∞. Бесконечность не является числом, она показывает, как меняется переменная величина, которая конечна в любой момент времени.

Теперь определим понятие последовательности и ее предела.

Последовательностью называется множество чисел, которое перенумеровано с помощью целых чисел и расположено в порядке возрастания номеров.

Если задана последовательность y_1, y_2, y_3, ..., то тем самым любому целому неотрицательному значению n поставлено в соответствие значение $y_n = f(n)$.

Например, члены геометрической прогрессии $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ являются последовательными значениями функции $f(n) = \frac{1}{3^n}$, где $n \in Z^+$, Z^+ — целые положительные числа.

Может случиться так, что с увеличением n значения $y_n = f(n)$ будет неограниченно приближаться к какому-то числу a. В этом случае говорят, что число a является пределом функции $f(n)$ целочисленного аргумента n или последовательности y_1, y_2, ..., y_n ... при $n \to \infty$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Число a является пределом последовательности y_1, y_2, ..., y_n, ..., если для $\forall\varepsilon > 0$ можно найти такое $N > 0$, что для всех $f(n)$ с номерами $n > N$ справедливо неравенство

$$|f(n) - a| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Используя приведенное определение, докажем, что последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ имеет предел, равный 1.

Согласно определению имеем

$$\left|\frac{n}{n+1`} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = N.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, что при всех $n > N$

будет выполняться (3.2), а это означает, что 1 есть предел исходной последовательности.

Теперь рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывного аргумента x (рис. 3.24) и предположим, что x неограниченно приближается к числу x_0 ($x \to x_0$). При этом может оказаться, что соответствующее значение $f(x)$ неограниченно приближается к некоторому числу b. В этом случае говорят, что число b есть предел функции $f(x)$ при ($x \to x_0$).

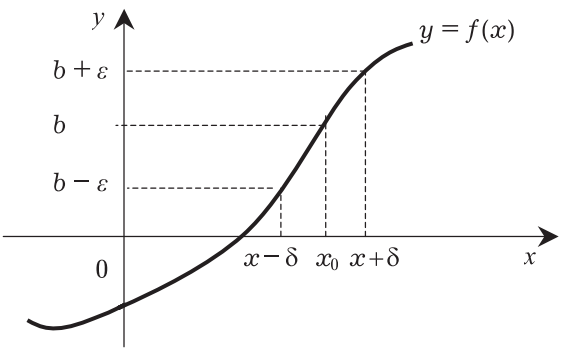


Рис. 3.24

Сформулируем определение предела функции.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для $\forall\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет справедливо неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Заметим, что функция не обязательно должна быть определена в предельной точке x_0, она должна быть определена лишь в некоторой окрестности этой точки.

Тот факт, что b — предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Данное нами определение иллюстрируется рис. 3.24. Используя приведенное определение предела, докажем, что

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

На основании определения имеем

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<\varepsilon=\delta. \quad (3.3)$$

Таким образом, мы доказали, что исходная функция будет отличаться от 6 меньше, чем на ε, если будет выполняться неравенство (3.3). В данном случае $\varepsilon = \delta$.

Приведенное определение не дает способа вычисления пределов. Ниже мы рассмотрим некоторые из таких методов.

Дадим понятие о левых и правых пределах функции $y = f(x)$ и точках ее разрыва.

Если $f(x) \to b_1$ при $x \to x_0$ так, что x принимает только значения, меньшие x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = b_1$ и называют b_1 левым пределом.

Аналогично, если $f(x) \to b_2$ при $x \to x_0$ так, что x принимает только значения, большие x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = b_2$ и называют b_2 правым пределом.

Геометрическая иллюстрация левого и правого пределов дана на рис. 3.25.

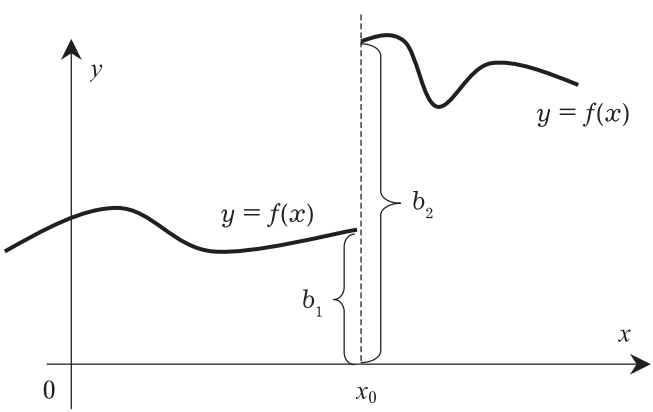


Рис. 3.25

Из рис. 3.25 следует, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет разрыв. Он носит название разрыва первого рода (в точке разрыва первого рода левый и правый пределы не равны $b_1 \neq b_2$ и конечны). Все остальные точки разрыва называются точками

разрыва второго рода. Примерами разрывов второго рода являются бесконечные разрывы (рис. 3.26).

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

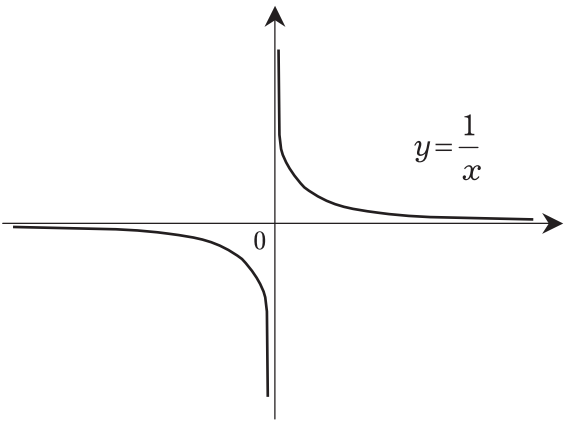


Рис. 3.26

Предположим, что аргумент функции $y = f(x)$ неограниченно возрастает $x \to \infty$, т. е. является бесконечно большим аргументом. Может оказаться, что при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому пределу b (рис. 3.27).

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to \infty$, если для $\forall\varepsilon > 0$ можно найти такое $N > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться условие $|f(x) - b| < \varepsilon$.

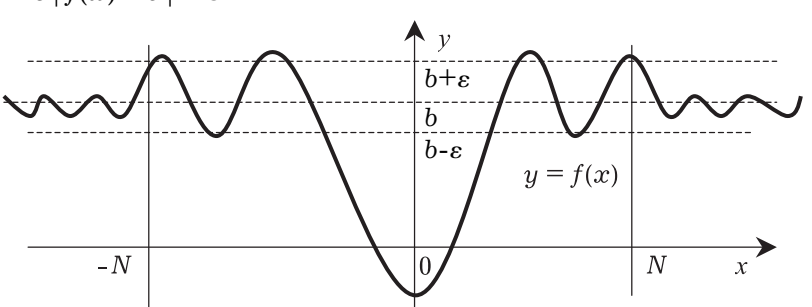


Рис. 3.27

Теперь рассмотрим случай стремления функции $y = f(x)$ к бесконечности при $x \to x_0$.

Функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, если для $\forall M > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Это определение иллюстрируется рис. 3.28.

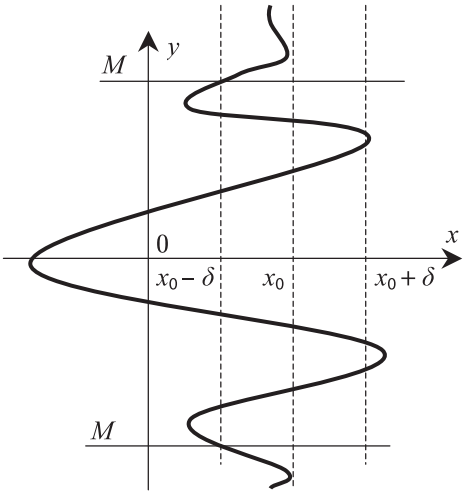


Рис. 3.28

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется ограниченной в данной области изменения аргумента, если существует $N > 0$ такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполняться неравенство $|f(x)| \leq N$. Если такого числа N нет, то функция $y = f(x)$ является неограниченной в данной области.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на своей области определения $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 3.29).

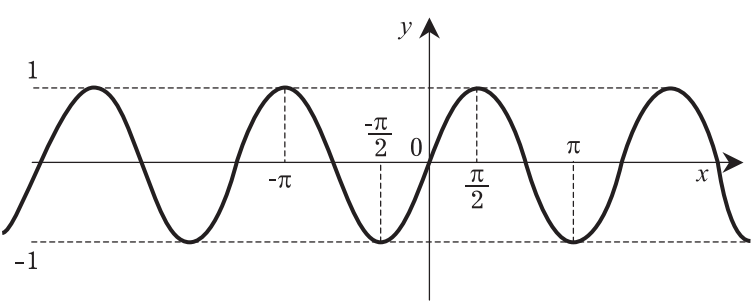


Рис. 3.29

$$|\sin x| \leq 1, \text{ т. е. } N = 1.$$

Дадим определение бесконечно малой величины.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Например, функция $y = (x - 3)^3$ при $x \to 3$ есть бесконечно малая величина, так как $\lim\limits_{x \to 3}(x-3)^3 = 0$.

Постоянное очень малое число не является бесконечно малой величиной. Единственное число, которое рассматривается в качестве бесконечно малой величины, это ноль. Связь бесконечно малых и бесконечно больших величин можно проследить из теоремы 3.1: если $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая величина и наоборот.

Сравнение бесконечно малых

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x} = 0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^5} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где $C \in R$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка.

Например, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x}{x} = 3$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть эквивалентные бесконечно малые.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Теперь приведем основные свойства пределов, которые будем использовать при их вычислении.

1. Предел алгебраической суммы конечного числа функции равен алгебраической сумме пределов от этих функций, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0} f_2(x)\pm\ldots\pm\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

2. Предел постоянной величины равен самой постоянной величине, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} C = C,$$

где $C \in R$.

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов от этих функций, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Следствие Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x),$$

где $C \in R$.

4. Предел частного двух функций равен частному от их пределов, если предел знаменателя не равен нулю, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0.$$

5. Предел целой положительной степени функции равен той же степени предела этой функции, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n,$$

где $n \in Z^+$, Z^+ — целые положительные числа.

6. Предел целой положительной n-й степени корня функции равен корню n-й положительной степени предела этой функции, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0}f(x)},$$

где $n \in Z^+$.

Приведем два замечательных предела, которые можно использовать при решении пределов.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (основание натуральных логарифмов).

Стремление к бесконечности всегда можно заменить стремлением к нулю и наоборот. Заменим во втором замечательном пределе $\dfrac{1}{x}=y$, а $x=\dfrac{1}{y}$. Тогда согласно теореме 3.1 при $x\to\infty$ $y\to 0$ и второй замечательный предел принимает вид $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$.

Кратко рассмотрим понятие непрерывности функции. Для этого напомним, что приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, где Δx есть приращение аргумента (рис. 3.30).

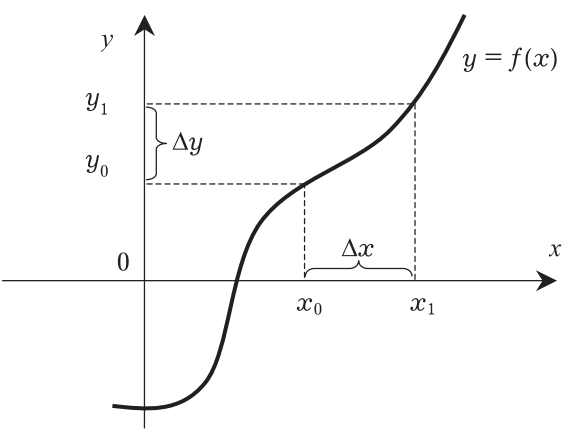


Рис. 3.30

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в какой-либо окрестности этой точки, и если выполняется следующее равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (3.4)$$

Докажем, например, что функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке x_0 своей области определения.

Согласно определению непрерывности функции в точке x_0 получим

$$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 =$$

$$= -2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cdot \sin\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x_0 + \Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x_0 + \Delta x}{2}\right) =$$

$$= -2\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{2x_0 + \Delta x}{2} = 0.$$

Пользуясь выражением для приращения функции, формулу (3.4) можно переписать так:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = 0$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$, тогда x будет стремиться к x_0 при $\Delta x \to 0$, и окончательно получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (3.5)$$

т. е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и предел функции при стремлении аргумента к x_0 существует и равен значению функции в этой точке.

Заметим, что функция является непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой его точке. А все основные элементарные функции непрерывны на тех интерва-

лах, в которых они определены. Приведем основные свойства непрерывных функций.

1. Алгебраическая сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная в тех точках, в которых делитель не равен нулю.

4. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ — непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также непрерывна.

5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, то последняя также непрерывна.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то в формуле (3.5) можно поменять местами знаки функции и предела, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f \lim_{x \to x_0} x. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) означает, что если функция непрерывна, то для отыскания предела надо вместо аргумента x подставить предельное значение x_0. Это правило неприменимо в том случае, когда при постановке предельного значения мы получаем неопределенности вида:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; (0\ \infty); (\infty - \infty); 1^{\infty}; 0^0; \infty^0 \text{ и др.}$$

Теперь приведем конкретные примеры вычисления некоторых пределов.

Пример 3.1.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{4^2 + 2}{4 - 3} = \frac{18}{1} = 18.$$

Пример 3.2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Пример 3.3.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{7x^5 + 6x^4 - 5x^2 + 7}.$$

Если подставить предельное значение, то получим неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Поэтому для решения подобных примеров используют следующий прием: делят числитель и знаменатель на x в максимальной степени, в данном случае на x^5. Тогда получим:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} - \frac{4}{x^5}}{7 + \frac{6}{x} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^5}} = \frac{0-0+0-0}{7+0-0+0} = 0.$$

Пример 3.4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{5x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{5x} \right) \left(\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2+x})} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{5(\sqrt{2+x} + \sqrt{2+x})} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Пример 3.5.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 2x\cdot\frac{3}{x}} = \left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right]^6 = e^6.$$

(Предел в квадратных скобках — это второй замечательный предел).

Пример 3.6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \right]^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.7.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log_5(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_5(1+x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\log_5(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_5\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_5 e$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то можно воспользоваться формулой (3.5).

Пример 3.8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}.$$

Данный предел можно свести к первому замечательному пределу путем замены переменной, т. е.

$$8x=y\Rightarrow x=\frac{y}{8},\ при\ x\to 0\ y\to 0,$$

тогда получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{y\to 0}8\frac{\sin y}{y}=8\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=8.$$

Пример 3.9.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{x}\right)^{x^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0,\ т.\ е.\ бесконечно\ малое.$$

Пример 3.10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+\sin x}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=\frac{6+0}{1-0}=6.$$

Пример 3.11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{0+1}{0+\frac{1}{3}}=3.$$

Пример 3.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)-\ln 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3+x}{3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{3x}}=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{1}{3}}=\ln e^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.$$

Пример 3.13.

$$\lim_{x\to 8}\frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4}=\lim_{x\to 8}\left[\frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4}\cdot\frac{\sqrt{x+8}+4}{\sqrt{x+8}+4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(64-x^2)(\sqrt{x+8}+4)}{x+8-16}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{-(x-8)(x+8)(\sqrt{x+8}+4)}{x-8}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 8}(x+8)(\sqrt{x+8}+4)=-128.$$

Пример 3.14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}.$$

Необходимо свести данный предел к первому замечательному пределу. Для этого делаем замену переменной, т. е. $\arcsin x = y$, $x = \sin y$, при $x \to 0$ у $\to 0$.

Тогда получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

3.3. Комплексные числа

Комплексным числом t называется выражение следующего вида:

$$t = p + ig, p \in R, g \in R,$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

В том случае, если $p = 0$ имеем чисто мнимое число $t = ig$.

А если $g = 0$, то $t = p$, т. е. является действительным числом. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел (C), т. е. $R \subset C$.

Величина p есть действительная часть комплексного числа t и обозначается $p = \mathrm{Re}t$, а g — мнимая часть комплексного числа t и обозначается $g = \mathrm{Im}t$.

Комплексные числа $t = p + ig$ и $\bar{t} = p - ig$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются комплексно сопряженными.

Пример 3.15.

Комплексные числа $t = 5 + 7i$; $\bar{t} = 5 - 7i$ являются комплексно сопряженными.

Два комплексных числа $t_1 = p_1 + ig_1$ и $t_2 = p_2 + ig_2$ будут равны только в том случае, когда равны их действительные и мнимые части, т. е. $p_1 = p_2$ и $g_1 = g_2$

Пример 3.16.

Найти x и y из равенства $7y + 4xi = 18 - 9i$.

Исходя из условия равенства комплексных чисел, получим

$$7y = 18 \to y = 18/7;$$
$$4x = -9 \to x = -9/4.$$

Любое комплексное число $t = p + ig$ можно изобразить точкой A (p, g) на плоскости $0pg$ такой, что $p = \mathrm{Re}t$, $g = \mathrm{Im}t$ и, наоборот, каждую точку A (p, g) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа t (рис. 3.31).

Плоскость $0pg$ называется комплексной плоскостью, ось $0p$ — действительной осью, а $0g$ — мнимой осью.

С каждой точкой A плоскости $0pg$ связан радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{0A}$. Угол, образованный этим радиусом-вектором с поло-

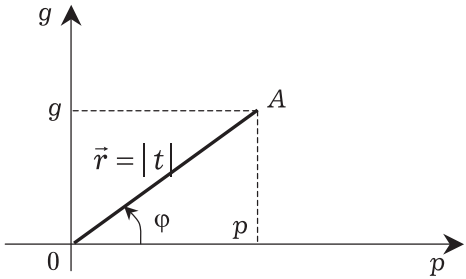


Рис. 3.31

жительным направлением оси $0p$, называется аргументом $\varphi = \mathrm{Arg}\ t$ комплексного числа.

Наименьшее по модулю значение Arg t называется его главным значением и обозначается arg t. Заметим, что $-\pi < \arg t \le \pi$.

Значение аргумента находят по формулам (см. рис. 3.31).

$$\sin\varphi = \frac{g}{|t|}; \quad \cos\varphi = \frac{p}{|t|}; \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{g}{p},$$

где $|t| = \vec{r} = \sqrt{p^2 + g^2}$ — модуль комплексного числа t.

Алгебраической формой комплексного числа называется запись вида $t = p + ig$. А модуль $\vec{r}$ и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\overrightarrow{0A}$, изображающего комплексное число t (см. рис. 3.31).

Тогда получаем $p = r\cos\varphi$; $g = r\sin\varphi$; и, следовательно, комплексное число $t = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в виде, который называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 3.17.

Записать в тригонометрической форме комплексное число $t = 1 + i$.

$$\vec{r} = |t| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\cos\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2; \quad \sin\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

Поэтому

$$arg\ t = \varphi = \pi/4.$$

Следовательно, получим

$$t = 1 + i = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + i(\sin\pi/4)].$$

Из формулы Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = \exp(i\varphi)$ следует показательная форма комплексного числа:

$$t = r\,exp\,(i\varphi),$$

где $r = |t|$, а $\varphi = \arg t$.

Пример 3.18.

Найдем показательную форму комплексного числа.

$$t = 1 + i \quad t = \sqrt{2}\exp(i\pi/4).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения функций:

1.1. $y = \sqrt{2x^2 + 7x - 5}$;

1.2. $y = \log_5(6\cos x - 2)$;

1.3. $y = \dfrac{x^4 + 6x^3 - 8x + 2}{x^2 - 5}$;

1.4. $y = 5x^3 - 16x^2 + 2x - 7$.

2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 6x^3 + x^2 - 9}{7x^5 + 11x^4 + 2x^2 - 6x}$;

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{4x^2 - x + 7x^3 + 18}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin(5x)}{32x}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - x^2 + 4x}{x^2 + 8x}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\arcsin x}{11x}$;

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$;

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{x}$;

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}(-5x^2-7x+18)$;

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

2.10. $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}(x-\sqrt{x^2-3})$;

2.11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$;

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(10\pi x)}{\operatorname{tg}(5x)}$.

3. Найти значение x и y из равенств:

a) $17x + 15i = 2 - 8iy$;

b) $6x - (5x - 3y)i = 7 + 2i$;

c) $(16 - 3i)x + (12 + 6)y = 10 + 6i$;

d) $(13i - 10)x + (12 - 13i)y = 12 - 23i$.

4. Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

a) $t = -4 + 2i\sqrt{3}$;

b) $t = 3 + 3i\sqrt{3}$;

c) $t = 2 - 2i$;

d) $t = 6i$.

5. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах.

a) $t = 2\exp\left(\dfrac{3\pi}{4}i\right)$;

b) $t = 4\exp\left(\dfrac{\pi}{4}i\right)$;

c) $t = 1{,}6\exp\left(\dfrac{10}{\pi}i\right)$;

d) $t = 7{,}6\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией одной независимой переменной?

2. Перечислить основные элементарные функции.

3. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.

4. Что такое предел функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$?

Дайте определение правого и левого пределов функции $y = f(x)$.

5. Дайте определение предела последовательности.

6. Какая функция называется бесконечно большой величиной при $x \to x_0$?

7. Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?

8. Сформулировать правила предельного перехода в случае арифметических действий.

9. В чем состоит правило предельного перехода для непрерывной функции?

10. Какое число называется комплексным?

11. Какие комплексные числа называются чисто мнимыми?

12. Какие комплексные числа называются сопряженными?

13. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?

14. Как записываются комплексное число в тригонометрической форме?

15. Как записываются комплексное число в показательной форме?

Глава 4. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление — это раздел математического анализа, связанный в основном с понятиями производной и дифференциала функции.

4.1. Производная первого порядка. Дифференциал. Производные высших порядков

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю.

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. производная функции

$$f(x) \quad \left(f'(x), y', \frac{dy}{dx} \right)$$

есть некоторая функция, полученная по определенным правилам из заданной функции.

Значение производной функции $y = f(x)$ в какой-то точке x_0 обозначают обычно так:

$$f'(x_0) \text{ или } y'_{x=x_0}.$$

Механический смысл производной — это предел средней скорости за бесконечно малый промежуток времени, т. е. мгновенная скорость.

Геометрический смысл производной вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.1. Если значение производной от функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно $f'(x_0)$, то прямая, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, является касательной к графику функции в точке M_0.

Геометрический смысл производной иллюстрируется на рис. 4.1.

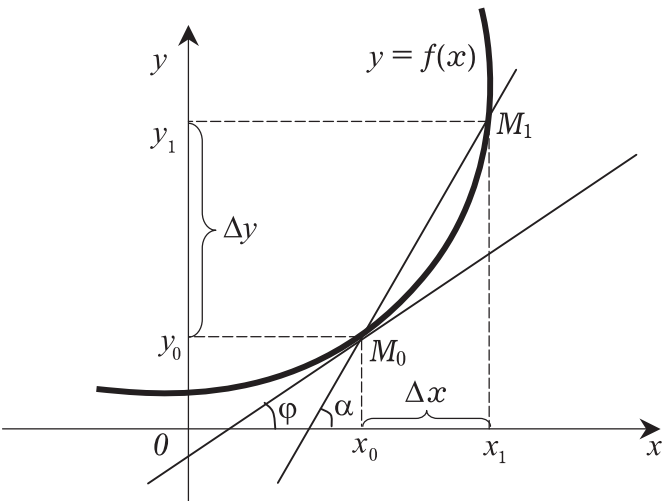


Рис. 4.1

Проведем через точки M_0 и M_1 секущую, угол α между секущей и положительным направлением оси $0x$ равен:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Будем перемещать точку M_1 по кривой в сторону точки M_0 т. е. устремим Δx к нулю. Предельным значением секущей будет касательная, проходящая через точку M_0. Тогда получим:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi.$$

Установим связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Она видна из следующей теоремы,

Теорема 4.2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она непрерывна. Обратное утверждение неверно. В качестве примера возьмем функцию $y = |x|$. Ее график показан на рис. 4.2.

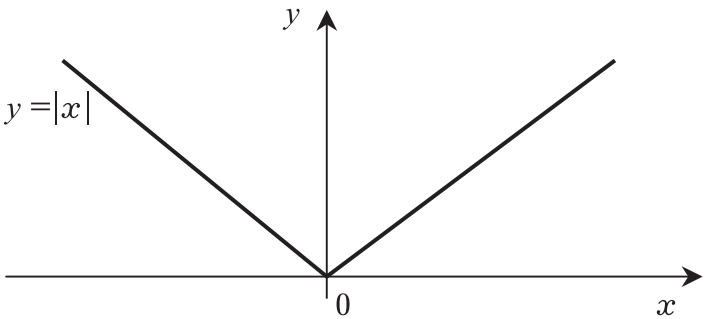


Рис. 4.2

Из него видно, что в точке $x = 0$ данная функция не имеет определенной касательной, а значит, не имеет в этой точке и производной.

Из определения производной следует способ ее вычисления.

Найдем производную функции $y = x^n$, где $n \in Z$, исходя из определения производной

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Итак, $(x^n)' = nx^{n-1}$, например $(x^8)' = 8x^7$.

Можно доказать, что полученная формула верна для всех $n \in R$ [42, 44].

Из приведенного примера видно, что использовать определение производной для ее вычисления дело достаточно трудоемкое. Поэтому гораздо проще, используя определение производной, вывести производные основных элементарных функций и сформулировать правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения, частного функций, сложной функции, обратной функции. По полученным формулам и правилам можно будет находить производные любых элементарных функций.

Производные основных элементарных функций

$(x^n)' = nx^{n-1}$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$;

$(e^x)' = e^x$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Дополним таблицу производных производными от гиперболических и обратных гиперболических функций, которые не являются основными элементарными функциями, но часто используются в различных приложениях.

К гиперболическим функциям относятся гиперболические синус (sh$x$), косинус (ch$x$) и тангенс (th$x$), которые находятся по формулам:

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Все эти функции определены на множестве действительных чисел (R) и связаны между собой следующими соотношениями:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$; $\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x$;

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x};\ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x};$$

Функции, обратные sh$x$, ch$x$, th$x$, являются обратными гиперболическими функциями и обозначаются Arch$x$ (ареа-косинус гиперболический), Arsh$x$ (ареа-синус гиперболический), Arth$x$ (ареа-тангенс гиперболический):

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1});$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Производные гиперболических и обратных гиперболических функций находятся по формулам:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;\ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};\ (\operatorname{Arch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};\ (\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Правила дифференцирования

1. Производная алгебраической суммы функций:

$$(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x);$$

2. Производная произведения функций:

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x).$$

Исходя из этого правила для трех функций, получим,

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x))' = (f_1(x) \cdot f_2(x))' \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x) =$$
$$= f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x) \cdot f_3(x) + f_3'(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(x);$$

3. Производная частного двух функций:

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_2'(x) \cdot f_1(x)}{\left[f_2(x)\right]^2}; \quad f_2(x) \neq 0;$$

4. Производная сложной функции.

Сформулируем теорему.

Теорема 4.3. Производная сложной функции равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной, т. е. если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$ и $y = f(\varphi(x))$, то согласно данной теореме

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Аналогично выводится формула при любом числе промежуточных аргументов, т. е. производная сложной функции равна произведению производных от функций ее составляющих.

Например, найдем производную функции

$$y = \cos^2 4x.$$

$$y' = 2\cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 = -8\cos 4x \cdot \sin 4x = -4\sin 8x;$$

5. Производная обратной функции находится по формуле

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \text{ или } x'(y) = \frac{1}{y'(x)},$$

т. е. производные от взаимно обратных функций обратны по величине. В качестве примера найдем производную функции

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x'_y = \cos y \Rightarrow y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Примеры нахождения производных

Пример 4.1.

$$y = \log_{2x} \sin^2 x = \frac{\ln \sin^2 x}{\ln 2x}.$$

Прежде чем найти производную от заданной функции перейдем к другому основанию и найдем производную исходной функции по правилу производной частного.

$$y = \frac{\frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x \cdot \ln 2x - \frac{1}{2x} \cdot 2\ln \sin^2 x}{(\ln 2x)^2} =$$

$$= \frac{2\mathrm{ctg}x \cdot \ln 2x - x^{-1} \ln \sin^2 x}{(\ln 2x)^2}.$$

Пример 4.2.

$$y = x^{\sin x}.$$

Данная функция называется сложной показательной функцией. Чтобы найти производную от такой функции прологарифмируем ее левую и правую части, а затем продифференцируем полученные выражения, помня, что y есть функция от x

$$\ln y = \sin x \ln x; \ \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x;$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right); \ y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Дадим понятие о дифференциале функции.

Если задана непрерывная функция $y = f(x)$, имеющая производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$,
где $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Далее получаем:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Дифференциалом (от латинского слова *differentia* — разность) функции называется главная часть приращения этой функции, линейная относительно приращения аргумента x, т. е.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Геометрический смысл дифференциала виден из рис. 4.3.

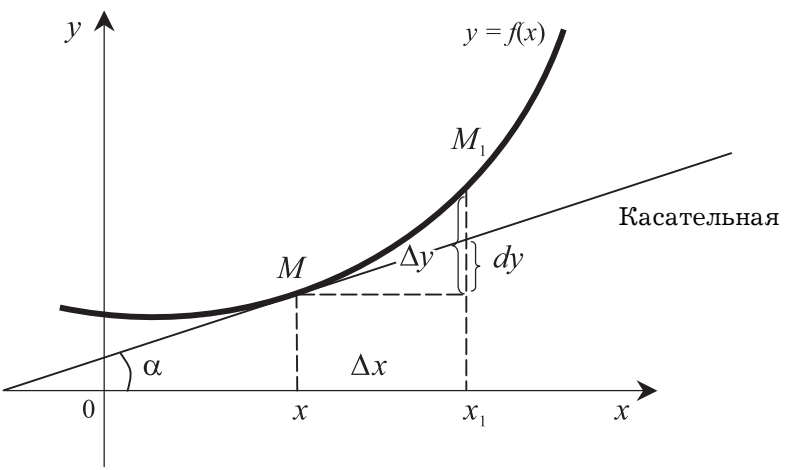


Рис. 4.3

Дифференциал функции геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведенной в точке $M(x,y)$ при данных значениях x, Δx.

Рассмотрим функцию $y = x$.

Для нее получим, что $dy = \Delta x$, а так как y можно заменить на x по условию, то имеем $dx = \Delta x$.

Следовательно, дифференциал функции равен $dy = y'dx$. Отсюда следует формула:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Дадим понятие о производной второго порядка. Предположим, что нам задана функция $y = f(x)$ имеющая производную $y' = f'(x)$.

Эта производная также является функцией и если она дифференцируема, то от нее можно взять производную. Она будет называться производной второго порядка:

$$y'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Например, найдем вторую производную функции.

Пример 4.3.

$$y = 3x^2 + \sin^3 x.$$
$$y' = 6x + 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$
$$y'' = 6 + 3(2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x).$$

С помощью первой и второй производных можно исследовать функцию на экстремум (max, min), находить точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости функции.

Производная второго порядка $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ также является функцией, и производная от нее будет называться производной третьего порядка от исходной функции и обозначаться следующим образом:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x}.$$

Производная от производной третьего порядка называется производной четвертого порядка от исходной функции и обозначается так:

$$y^{(4)} = y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'''(x + \Delta x) - f'''(x)}{\Delta x} \text{ и т. д.}$$

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n - 1)$ порядка, т. е.

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются либо $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., либо $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^5y}{dx^5}$, ..., либо y^{IV}, y^{V}, ...

Например, найдем производную третьего порядка для функции $y = x^2 \cdot \sin x + \ln^2 x$.

$$y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x + \frac{2\ln x}{x};$$

$$y'' = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x + \frac{\frac{2}{x}x - 2\ln x}{x^2} =$$

$$= 2 \cdot \sin x + 4x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x + \frac{2 - 2\ln x}{x^2};$$

$$y''' = 2 \cdot \cos x + 4\cos x + 4x \cdot \sin x - (2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) +$$

$$+ \frac{-\frac{2}{x}x^2 - (2 - 2\ln x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= 6 \cdot \cos x - 6x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x + \frac{4\ln x - 6}{x^3}.$$

Дифференцирование неявных функций

Если исходная функция не разрешена относительно переменной y, т. е. задана уравнением $F(x, y) = 0$, то говорят, что она задана неявно.

Любую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать в неявном виде, т. е. $y - f(x) = 0$.

А вот обратное действие выполнимо далеко не всегда, а если и выполнимо, то может быть связано с большими трудностями.

Например, уравнение окружности $x^2 + y^2 = 25$ можно легко записать в явном виде $y = \sqrt{25 - x^2}$, а уравнение $5^{yx} - \cos 2y + 7y + 2xy - 71 = 0$ представить с явном виде затруднительно.

Если неявная функция задана уравнением $F(x, y) = 0$, для нахождения производной dy/dx не нужно разрешать это уравнение относительно переменной y, а достаточно продифферен-

цировать его по x, помня при этом, что y является функцией от x. Полученное в результате дифференцирования выражения надо разрешить относительно dy/dx, т. е. производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 4.4. Найдем производную функции y, если она задана уравнением $3^{xy} + y^3 + 2xy = 0$.

Дифференцируем обе части исходного выражения и получаем

$$3^{xy} \ln 3 \cdot (y + y'x) + 3y^2 \cdot y' + 2y + 2xy' = 0;$$

$$3^{xy} \cdot y \cdot \ln 3 + y'x \cdot 3^{xy} \ln 3 + 3 \cdot y^2 \cdot y' + 2y + 2xy' = 0;$$

$$y' \cdot (x \cdot 3^{xy} \ln 3 + 3y^2 + 2x) = -y\,(3^{xy} \ln 3 + 2);$$

$$y' = \frac{-y(3^{xy} \ln 3 + 2)}{3^{xy} \cdot x \ln 3 + 3y^2 + 2x}.$$

Продифференцировав уравнения $f(x, y) = 0$ по x и разрешив полученное уравнение относительно y', определим первую производную, т. е. производную первого порядка. Если продифференцировать полученную первую производную по x, то мы получим вторую производную от неявной функции. Она будет зависеть от x, y, y'. А подставив в полученное выражение уже определенное значение y', получим выражения для y'', зависящее от x и y. Продифференцировав полученное значение y'' по x, получим производную третьего порядка от исходной неявной функции. Поступая далее аналогично, можно найти производные любых порядков от функции, заданной неявно.

Пример 4.5.

Найти вторую производную функции y, если она задана уравнением $x^2 + y^2 = 36$.

Дифференцируем по x обе части исходного выражения. Получаем:

$$2x + 2y'y = 0.$$

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Полученное выражение дифференцируем по x:

$$y'' = -\frac{y - y'x}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$y = -\frac{36}{y^3}, \text{ т. е. } x^2 + y^2 = 36.$$

4.2. Некоторые сведения о функциях многих переменных. Понятие о частной производной

Ранее были рассмотрены функции, которые зависели от одного независимого аргумента. Но в реальной действительности чаще приходится иметь дело с функциями, которые зависят от двух, трех и большего числа независимых аргументов.

Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b будет функцией двух независимых аргументов. Функция эта имеет вид $S_{пр} = a \cdot b$, где a и b могут быть любыми действительными положительными числами, так как и стороны прямоугольника, и его площадь не могут быть отрицательными величинами.

Положение какого-либо объекта на поверхности планеты определяется тремя координатами: широтой, долготой и высотой, т. е. является функцией трех независимых аргументов.

Положение космического аппарата (КА), движущегося по невозмущенной эллиптической орбите вокруг Земли, есть функция шести аргументов (трех координат (x, y, z) и трех составляющих скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$). Эта функциональная зависимость имеет следующий вид:

$$F = \varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

В гуманитарных науках, например в юриспруденции и экономике, жестко детерминированные функциональные связи встречаются нечасто. Там используются многофакторные статистические взаимосвязи вида

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta f(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \varepsilon(y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — учтенные признаки, под влиянием которых меняется функция Z,

$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ — ошибки учтенных признаков,

$y_1, y_2, ..., y_m$ — неучтенные признаки, которые могут влиять на функцию Z.

Сначала рассмотрим функцию двух независимых аргументов x и y. Переменная величина Z называется функцией переменных величин x и y на множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение величины Z.

Множество D называется областью определения функции Z. Обычно она представляет собой часть плоскости $x0y$, ограниченной одной или несколькими линиями. Тот факт, что Z есть функция независимых аргументов x и y записывают так:

$$Z = f(x, y).$$

Функция двух аргументов может задаваться следующими способами:

1) аналитическим, т. е. приводится формула, при помощи которой по заданным значениям аргументов x и y находят значения функции Z. Например,

$$Z = \frac{1}{2}xy;\ \ Z = \sin^2(x + 2y);\ \ Z = \sqrt[3]{\sin^3 x - \ln y};\ \ Z^2 = x^2 + y^2;$$

2) табличным, т. е. для некоторого количества пар аргументов (x, y) приводятся значения функции (Z).

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_n
x_1	Z_{11}	Z_{12}	...	Z_{1n}
x_2	Z_{21}	Z_{22}	...	Z_{2n}
...	...	...	...	...
x_n	Z_{n1}	Z_{n2}	...	Z_{nn}

3) графическим.

Графиком функции двух независимых аргументов в системе прямоугольных координат называется множество точек,

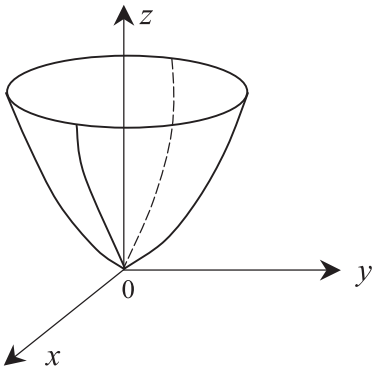


Рис. 4.4

абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты — соответствующими значениями Z. Графиком функции двух непрерывных аргументов обычно служит поверхность. Например, графиком функции $Z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения (рис. 4.4).

Теперь дадим определение функции n независимых аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$.

Переменная величина W называется функцией переменных величин $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение W.

Тот факт, что W есть функция аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, записывают так:

$$W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Геометрическая иллюстрация функций от n независимых аргументов теряет наглядность при $n > 2$.

При исследовании поверхностей 2-го порядка часто применяют метод сечений, который заключается в том, что определение вида поверхности по ее уравнению производится путем изучения кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Дадим определение предела функции двух независимых аргументов.

Число b называется пределом функции $Z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся от x_0 и y_0, соответствующие значения функции $f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа b.

Тот факт, что b есть предел функции $Z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x, y) = b.$$

Теперь введем понятия частных производных по независимым аргументам.

Рассмотрим функцию двух независимых аргументов x и y

$$Z = f(x, y).$$

Предположим, что $y = \text{const}$ и рассмотрим $f(x, y)$ как функцию одного независимого аргумента x.

Если эта функция дифференцируема, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y).$$

Нижний индекс (x) указывает на то, что производная берется по аргументу x.

Частной производной по x от функции $Z = f(x, y)$ называется функция переменных величин x и y, которая получается при дифференцировании $f(x, y)$ по x в предположении, что $y = \text{const}$.

Она обозначается так:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, Z'_x.$$

Аргумент y считается постоянным только в процессе дифференцирования. После нахождения частной производной функция $\frac{\partial Z}{\partial x}$ будет зависеть от двух аргументов x и y.

Аналогично определим частную производную по y от функции $Z = f(x, y)$ при $x = \text{const}$. Как предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Она обозначается так: $\frac{\partial Z}{\partial y}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, Z'_y$. При нахождении частных производных используются формулы и правила дифференцирования функции одного независимого аргумента. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 4.6.

$Z = 5x^3 \cdot \cos y$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 15x^2 \cdot \cos y; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -5x^3 \cdot \sin y;$$

Пример 4.7.

$Z = 6x^4 \cdot \operatorname{tg} y + 5x \cdot \ln y,$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 24x^3 \cdot \operatorname{tg} y + 5\ln y,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{6x^4}{\cos^2 y} + \frac{5x}{y}.$$

Аналогично можно определить частные производные от любого числа независимых аргументов.

Например, имеем функцию n независимых переменных

$$W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Определим частную производную по аргументу x_1

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определим частную производную по аргументу x_2

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_2}$$

и так далее.

Пример 4.8.

$W = 2x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \ln x_3;$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2 \cdot \cos x_2 \cdot \ln x_3; \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = -2x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ln x_3;$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_3} = \frac{2x_1 \cdot \cos x_2}{x_3}.$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть имеем функцию двух независимых аргументов $Z = f(u, v)$, причем аргументы являются функциями независимых переменных x и y, т. е. $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$, следовательно

$$Z = f\,[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

В этом случае частные производные функции Z по аргументам x и y будут вычисляться по формулам.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пример 4.9.

$Z = e^{3xy} \cdot \sin(5x + y)$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = e^{3xy} \cdot 3y \cdot \sin(5x + y) + e^{3xy} \cdot \cos(5x + y) \cdot 5 =$$

$$= e^{3xy} \cdot \left[3y \cdot \sin(5x + y) + 5\cos(5x + y)\right],$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = e^{3xy} \cdot 3x \cdot \sin(5x + y) + e^{3xy} \cdot \cos(5x + y) =$$

$$= e^{3xy} \cdot \left[3x \cdot \sin(5x + y) + \cos(5x + y)\right].$$

Пример 4.10.

$Z = \sin(x^3 y^2) \cdot \ln(3y + x^2)$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \cos(x^3 y^2) \cdot 3x^2 \cdot y^2 \cdot \ln(3y + x^2) + \frac{\sin(x^3 y^2)}{(3y + x^2)} \cdot 2x.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \cos(x^3 y^2) \cdot 2yx^3 \cdot \ln(3y + x^2) + \frac{\sin(x^3 y^2)}{(3y + x^2)} \cdot 3.$$

Частные производные высших порядков

Пусть задана функция двух независимых аргументов $Z = f(x, y)$, имеющая частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x$; $\frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y$. Эти производные тоже являются функциями аргументов x и y. Частные производные от этих функций называются частными производными второго порядка от функции $Z = f(x, y)$.

Каждая частная производная первого порядка имеет две частные производные, поэтому мы имеем четыре частные производные второго порядка, обозначаемые следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=Z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}=Z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=Z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=Z''_{xy}.$$

Производные $\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$ называются смешанными частными производными. Первая из них получается дифференцированием исходной функции сначала по y, а потом по x, а вторая наоборот.

Приведем теорему о вторых смешанных частных производных.

Теорема 4.4. Если вторые смешанные частные производные функции $Z = f(x, y)$ непрерывны, то они равные между собой, т. е.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}.$$

Поэтому функция $Z = f(x, y)$ имеет при условии выполнения теоремы 4.4 не четыре, а три частные производные второго порядка.

Пример 4.11. Найти для функции $Z = 5x^4y^3 - 6x^2y^5$ вторые частные производные.

Сначала находим первые частные производные:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=20x^3y^3-12xy^5;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=15x^4y^2-30x^2y^4.$$

Далее находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=60x^2y^3-12y^5;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 30x^4 y - 120x^2 y^3;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 60x^3 y^2 - 60xy^4;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 60x^3 y^2 - 60xy^4.$$

Из данного примера видно, что условия теоремы 4.4 выполняются, поэтому равны вторые смешанные частные производные.

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка и т. д.

Опираясь на теорему 4.4, можно доказать общее положение: результат повторного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, при этом рассматриваемые частные производные должны быть непрерывны.

Например, будут равны смешанные частные производные третьего порядка $\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial x}$. Функция $Z = f(x, y)$ имеет $(n + 1)$ частных производных n-го порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial^n Z}{\partial x^n};\ \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1} \partial y};\ \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-2} \partial y^2};\ \ldots\ \frac{\partial^n Z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}};\ \frac{\partial^n Z}{\partial x \partial y^{n-1}};\ \frac{\partial^n Z}{\partial y^n}.$$

Если задана функция, имеющая n независимых аргументов, то частные производные любого порядка для нее определяются аналогично. В этом случае также имеет место теорема о независимости результата от порядка дифференцирования.

Производная по направлению и градиент

Предположим, что в каждой точке A некоторой области D задано значение скалярной физической величины W (температура, давление, влажность и т. п.). Тогда W называется скалярной функцией точки и записывается так $W = W(A)$. Если в об-

ласти D задана скалярная функция точки $W(A)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле.

Если скалярное поле не зависит от времени, оно называется стационарным. В противном случае поле будет нестационарным, т. е. будет зависеть не только от точки A, но и от времени t.

В гиперпространстве, в котором задано поле $W = W(x_1, x_2, ..., x_n)$ возьмем точку $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ и найдем скорость изменения функции при движении точки A в направлении некоторого вектора $\vec{\mu}$. Этот вектор начинается в точке A, а косинусы углов между ним и координатными осями $X_1, X_2, ..., X_n$ (направляющие косинусы) равны: $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, ..., \cos\varphi_n$.

Приращение ΔW, получаемое при переходе от точки A в точку A_1, по направлению $\vec{\mu}$ равно:

$$\Delta W = W(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - W(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда $\Delta\mu = |AA_1| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2}$.

Производной от функции $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ по направлению $\vec{\mu}$ называется предел

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \lim_{\Delta\mu \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta \mu}\right).$$

То есть производная характеризует скорость изменения функции по данному направлению.

В курсах математического анализа доказывается (см., например, [9, 42]), что

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \frac{\partial W}{\partial x_1}\cos\varphi_1 + \frac{\partial W}{\partial x_2}\cos\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x_n}\cos\varphi_n.$$

Пример 4.12. Найти производную функции

$$W = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 - 4x_1x_4^2$$

в точке $A(0, 1, 2, 1)$ по направлению к точке $A_1(2, 0, 1, 3)$

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AA_1} = (2, -1, -1, 2)$:

$$\cos\varphi_1 = 0{,}632;\ \cos\varphi_2 = -0{,}316;\ \cos\varphi_3 = -0{,}316;\ \cos\varphi_4 = 0{,}632.$$

Далее определяем частные производные исходной функции W и их значения в точке A, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_1 - 4x_4^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = 4x_2;\ \frac{\partial W}{\partial x_3} = 9x_3^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_4} = -8x_1x_4.$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_A = -4;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)_A = 4;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)_A = 36;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)_A = 0.$$

Затем вычисляем искомую производную по направлению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)_A = -15{,}179.$$

Знак минус говорит о том, что функция в заданном направлении убывает.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, называют градиентом функции и обозначают grad W, т. е.

$$\operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) \textit{или}$$

$$\operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)\vec{e}_2 + ... + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)\vec{e}_n,$$

где $\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$ ... $\vec{e}_n = (0, 0, ..., 1)$.

Теперь формулу для производной по направлению можно переписать в виде скалярного произведения grad W на единичный вектор $\vec{e}_\mu = (\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, ..., \cos\varphi_n)$, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = (\operatorname{grad} W,\ \vec{e}_\mu)\ \textit{или}\ \frac{\partial W}{\partial \mu} = \left|\operatorname{grad} W\right| \cos\alpha,$$

где α — угол между вектором grad W и направлением $\vec{\mu}$.

Из последней формулы видно, что $dW/d\mu$ достигает своего максимального значения в том случае, когда $\alpha = 0$. Поэтому направление градиента совпадает с направлением $\vec{\mu}$, вдоль которого функция меняется быстрее всего, т. е. grad W показывает

направление скорейшего возрастания функции. А наибольшая скорость изменения функции W в точке A равна:

$$\left|\operatorname{grad} W\right| = \sqrt{(\partial W/\partial x_1)^2 + (\partial W/\partial x_2)^2 + \ldots + (\partial W/\partial x_n)^2}.$$

Пример 4.13. Найти наибольшую скорость возрастания функции $W = 2x_1x_2 + 3x_2^2x_3 - 4x_4^3$ в точке $A(1, 2, -1, 3)$.

Вначале находим частные производные

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_2;\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = 2x_1 + 6x_2x_3;\ \frac{\partial W}{\partial x_3} = 3x_2^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_4} = -12x_4^2.$$

Затем получаем

$$\operatorname{grad} W = 2x_2\vec{e}_1 + (2x_1 + 6x_2x_3)\vec{e}_2 + 3x_2^2\vec{e}_3 - 12x_4^2\vec{e}_4$$

и вычисляем $\operatorname{grad} W(1, 2, -1, 3) = 4\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 - 108\vec{e}_4$ и, наконец, находим наибольшую скорость возрастания функции $|\operatorname{grad} W(A)| = 109{,}2$.

4.3. Некоторые приложения дифференциального исчисления

4.3.1. Формула Тейлора

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n + 1)$-го порядка включительно на некотором интервале, включающем точку x_0. Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = x_0$ равно значению функции $y = f(x)$ в этой точке, а значение его производных до n-го порядка в точке $x = x_0$ равны значениям соответствующих производных от функции $y = f(x)$ в этой точке, т. е.

$$P_n(x_0) = f(x_0);\ P_n'(x_0) = f'(x_0);\ P_n''(x_0) = f''(x_0);$$

$$P_n'''(x_0) = f'''(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad (4.1)$$

Искомый многочлен будет иметь вид [9, 44]:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} f''(x_0) + \\ + \frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(x_0). \quad (4.2)$$

Через $R_n(x)$ обозначим разность значений данной функции $y = f(x)$и многочлена, находимого по формуле (4.2), т. е. $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Отсюда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, или

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \\ + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_o) + R_n(x), \quad (4.3)$$

где $R_n(x)$ — остаточный член, который может быть записан в разных формах. Приведем так называемую форму Лагранжа, которая имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta). \quad (4.4)$$

Здесь $\eta \in [x, x_0]$ и ее можно представить в виде $\eta = x_0 + \lambda(x - x_0)$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда формула для остаточного члена примет вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \lambda(x-x_0)].$$

А формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \\ + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \\ + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}[x_0 + \lambda(x-x_0)] \quad (4.5)$$

называется формулой Тейлора для функции $y = f(x)$.

Если в формуле (4.5) принять $x_0 = 0$, то она примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \\ + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\lambda x). \qquad (4.6)$$

Здесь $0 < \lambda < 1$, а формулу (4.6) часто называют формулой Маклорена. Теперь найдем разложение функции $y = e^x$ по формуле (4.6).

$f(x) = e^x$; $f(0) = 1$; $f'(x) = e^x$; $f'(0) = 1$; $f''(x) = e^x$;

$f''(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$.

Эти данные подставляем в формулу (4.6) и получаем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\lambda x}, \text{ где } 0 < \lambda < 1.$$

Если $|x| \le 1$, то взяв $n = 8$, найдем оценку остаточного члена $R_n < \frac{1}{9!} \cdot 3$. А если $x = 1$, то получим формулу для приближенного вычисления числа e [44], т. е.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71827.$$

Здесь верны первые четыре знака после запятой, так как ошибка не превосходит числа $\frac{3}{9!}$ или 10^{-5}. Заметим, что какое бы ни было x, остаточный член $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\lambda x} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$. Поэтому при $\forall x$, взяв достаточное число членов разложения, по формуле (4.6) получим e^x с любой необходимой степенью точности.

4.3.2. Правило Лопиталя

Данное правило помогает раскрывать неопределенности вида: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, его суть выражается теоремой.

Теорема 4.5 Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности. Если отношение производных этих функций имеет предел, то отношение самих функций тоже имеет предел, который равен пределу отношения производных, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}; \tag{4.7}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{4.8}$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры применения этого правила.

Пример 4.14.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Ранее мы сводили этот предел ко второму замечательному пределу и пользовались тем, что $\ln x$ является непрерывной функцией. Заметим, что простота взятия данного предела кажущаяся, так как дифференцирование функций само опирается на знание пределов.

Пример 4.15.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{2\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{7\cos 7x}{6\cos 3x} = \frac{7}{6}.$$

Пример 4.16.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4.17.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-3}=-1.$$

Заметим, что если производные числителя и знаменателя одновременно стремятся к нулю или к бесконечности можно применять правило Лопиталя еще раз, а в случае необходимости и далее.

Пример 4.18.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3+2x-6}{7x^4+20x^2-7x+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3-9x^2+2}{28x^3+40x-7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{60x^2-18x}{84x^2+40}=\lim_{x\to\infty}\frac{120x-18}{168x}=\lim_{x\to\infty}\frac{120}{168}=\frac{5}{7}.$$

Пример 4.19.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{6}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{6}{x}\right)\left(-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}6\cos\frac{6}{x}=6.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{7}=\infty.$$

Формулы (4.7) и (4.8) справедливы только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Приведем пример, когда отношение функций имеет предел, а отношение их производных не стремится ни к какому пределу.

Пример 4.20.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

А предел производных равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

При $x\to\infty$ этот предел колеблется между 0 и 2 и поэтому не имеет предела. То есть к данному примеру правило Лопиталя применить нельзя, оно не является универсальным.

При помощи правила Лопиталя можно раскрывать другие неопределенности, например:

$$0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 1^{\infty};\quad \infty^{0};\quad 0^{0}.$$

Эти случаи сводятся к рассмотренным нами неопределенностям $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4.21.

$$\lim_{x\to 0} x^3 \ln 5x.$$

Это случай $0\cdot\infty$.

Преобразуем данный предел к виду $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 5x}{\frac{1}{x^3}}$, т. е. привели исходный предел к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Теперь можно применить правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 5x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5x}\cdot 5}{-\frac{3}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{3}\right)=0.$$

Пример 4.22.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{\ln x}\right),$$

т. е., имеем случай $\infty-\infty$. Исходный предел преобразуем к виду

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x\ln x-2x+2}{(x-1)\ln x},$$

т. е. мы пришли к случаю $\frac{0}{0}$, поэтому применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x\ln x-2x+2}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{3\ln x+\frac{3x}{x}-2}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{3\ln x+1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Пример 4.23.

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$, т. е., имеем случай 1^{∞}.

Рассмотрим предел

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x}$, а это случай $\dfrac{0}{0}$, поэтому к последнему пределу применимо правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2}{1} = \lim_{x\to 0}(-2\operatorname{tg} 2x) = 0.$$

Поэтому исходный предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$$

Пример 4.24.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{7x}$, т. е. имеем случай 0^0.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^{7x} = \lim\limits_{x\to 0}7x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{7x}}$, т. е. пришли к случаю $\dfrac{\infty}{\infty}$. Теперь к последнему примеру применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{7x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{7x^2}} = \lim_{x\to 0}(-7x) = 0$$

Поэтому исходный предел равен

$$\lim_{x\to 0}x^{7x} = e^{0} = 1.$$

4.3.3. Асимптоты

Прямая L называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние δ от переменной точки A функции до этой прямой при удалении точки А в бесконечность стремится к нулю (рис. 4.5).

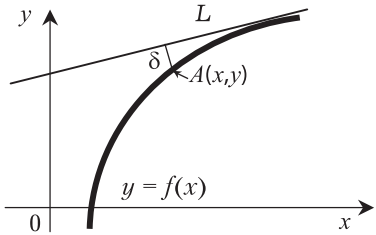


Рис. 4.5

Различают вертикальные асимптоты (параллельные оси $0y$) и наклонные.

Сначала рассмотрим вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty, \textit{ или } \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty, \textit{ или } \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ является асимптотой функции $y = f(x)$ и наоборот, если прямая $x = x_0$ есть асимптота кривой $y = f(x)$, то существуют указанные выше пределы.

То есть для нахождения вертикальных асимптот надо найти такие значения $x = x_0$, при приближении к которым функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечное число вертикальных асимптот (рис. 4.6): $x = \pm\frac{\pi}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{2}$; $x = \pm\frac{5\pi}{2}$; …,

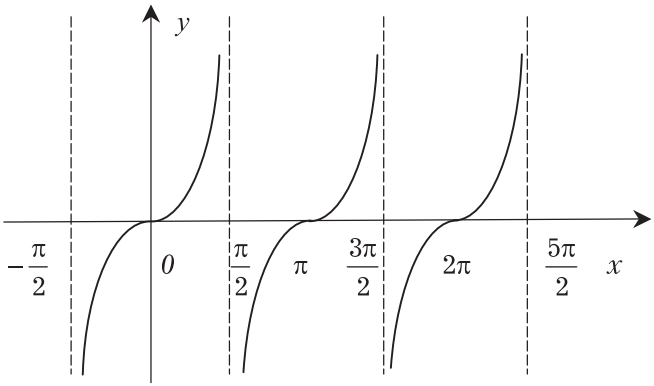


Рис. 4.6

Теперь рассмотрим наклонные асимптоты. Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax + b$ (рис. 4.7).

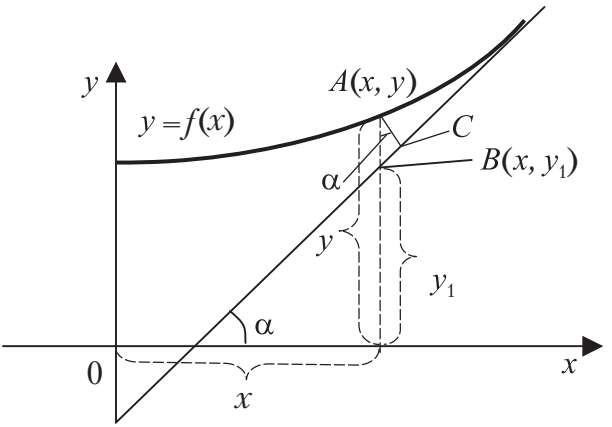


Рис. 4.7

Нам нужно найти коэффициенты a и b. Точка $A(x, y)$ принадлежит функции $y = f(x)$, а точка $B(x, y_1)$ — асимптоте. Длина отрезка AC — это расстояние от точки A до асимптоты и по условию

$$\lim_{x\to+\infty}(AC) = 0. \tag{4.9}$$

Обозначим через α угол наклона асимптоты к положительному направлению оси $0x$ и из ΔABC найдем

$$(AC) = (\mathrm{AB})\cos\alpha \Rightarrow (AB) = \frac{(AC)}{\cos\alpha},$$

так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \mathrm{const}$, то в силу (4.9) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(AB) = 0, \tag{4.10}$$

так как $(AB) = |y - y_1| = |f(x) - ax - b|$, то (4.10) принимает следующий вид:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax - b] = 0. \tag{4.11}$$

Следовательно, если $y = ax + b$ есть асимптота, то выполняется (4.11) и, наоборот, если при коэффициентах a и b выпол-

няется (4.11), то прямая $y = ax + b$ является асимптотой. Теперь найдем коэффициенты a и b. Из (4.11) получаем

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0.$$

Так как $x \to +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0,$$

а так как b есть число, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$, поэтому получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0$$

или

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (4.12)$$

Получив a, находим b по формуле

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]. \qquad (4.13)$$

Следовательно, если $y = ax + b$ является асимптотой, то a и b находятся по формулам (4.12) и (4.13). Если хотя бы один из пределов (4.12) или (4.13) не существует, то функция $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

Все приведенные рассуждения справедливы и при $x \to -\infty$. Так как асимптотическое изменение функции может быть различным при стремлении x к положительной и отрицательной бесконечности, то надо раздельно рассматривать случаи $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Если существует асимптота в первом случае, то ее называют левосторонней, а во втором случае — правосторонней.

Если при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ пределы (4.12) и (4.13) совпадают, то левосторонняя и правосторонняя асимптоты являются частями одной и той же прямой.

Заметим, что если функция дробно-рациональная, то при нахождении a и b сразу можно рассматривать произвольное стремление к бесконечности.

Рассмотрим примеры нахождения наклонных асимптот.

Пример 4.25.

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}.$$

Так как данная функция дробно-рациональная, то сразу рассматриваем произвольное стремление x к ∞

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(2x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2-1)}{2(2x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + x}{4x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4 - \frac{2}{x^2}} = 0.$$

Поэтому получаем $y = \frac{1}{2}x.$

Пример 4.26.

$$y = 2x + ln\ x.$$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 2$$

(по правилу Лопиталя)

$$b = \lim_{x\to+\infty} (2x + \ln x - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty.$$

Из последнего равенства следует, что исходная функция наклонной асимптоты не имеет.

4.3.4. Исследование функций с помощью производных первого и второго порядков, построение их графиков

Приведем ряд теорем, позволяющих находить участки монотонности (возрастания, убывания) функции, экстремумы функции, участки выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба.

Вначале сформулируем достаточный признак монотонности:

1) если $f'(x) > 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале возрастает;

2) если $f'(x) < 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале убывает;

3) если $f'(x) = 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале постоянна.

Геометрическая интерпретация этого признака показана на рис. 4.8.

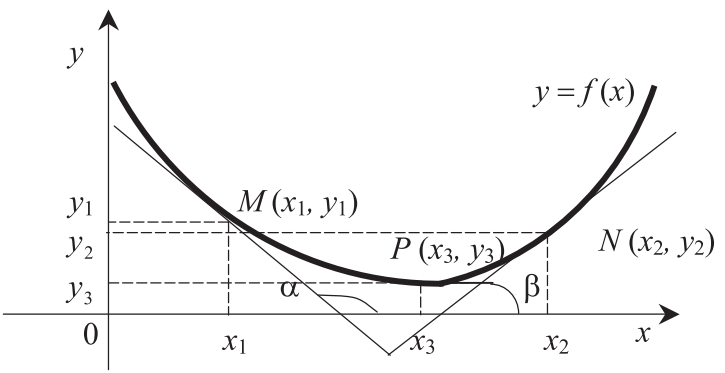


Рис. 4.8

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x = x_1) < 0;\ \operatorname{tg}\beta = y'(x = x_2) > 0;\ y'(x = x_3) = 0$$

Важную роль в исследовании функций играют точки, отделяющие интервалы ее возрастания от интервалов ее убывания. Эти точки носят название экстремумов функции или ее локальных максимумов и минимумов. Слово “локальный” означает, что точка будет максимальной (минимальной) лишь на каком-то интервале.

Теперь приведем определение:

1) точка $M(x_1, y_1)$ есть точка локального максимума функции $y = f(x)$, если $f(x_1)$ — наибольшее значение функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $M(x_1, y_1)$;

2) точка $N(x_2, y_2)$ есть точка локального минимума функции $y = f(x)$, если $f(x_2)$ — наименьшее значение функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $N(x_2, y_2)$.

Функция на своей области определения может иметь несколько экстремумов. Наибольшее и наименьшее значения функции ее области определения обычно называют абсолютным максимумом и абсолютным минимумом.

Понятие экстремума функции иллюстрируется рис. 4.9.

Теперь сформулируем необходимый признак экстремума: Если в точке (т. A, т. B, т. C, т. D на рис. 4.9) функция $y = f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю (т. A, т. B, т. D на рис. 4.9), либо не существует (т. C на рис. 4.9).

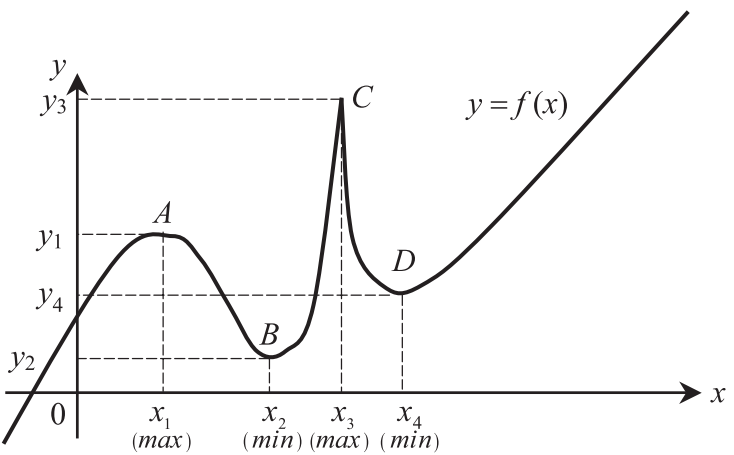


Рис. 4.9

Приведенный признак не является достаточным, т. е. из того факта, что производная в данной точке равна нулю или не существует, еще не следует, что эта точка есть экстремум функции.

Недостаточность данного признака проиллюстрируем примером.

Пример 4.27. Рассмотрим функцию $y = x^3$ и найдем ее экстремум, используя приведенный признак (найдем производную данной функции, приравняем ее к нулю и найдем координаты экстремума, если он существует).

$y' = 3x^2$; $3x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ — экстремум данной функции в соответствии с необходимым признаком.

Но из графика функции $y = x^3$ (рис. 4.10) следует, что экстремума в точке с координатами x = 0, y = 0 у данной функции нет.

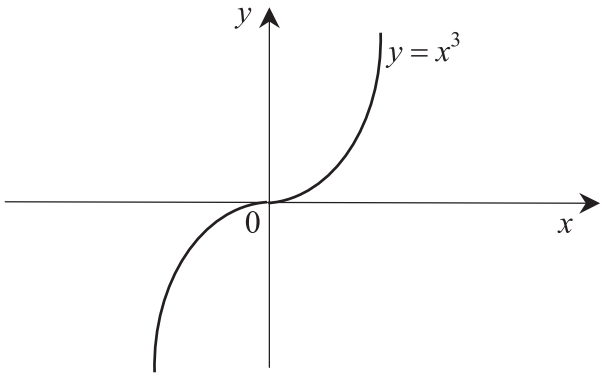


Рис. 4.10

Сформулируем теперь достаточный признак экстремума: точка (т. *A*, т. *B*, т. *C*, т. *D* на рис. 4.9) есть точка экстремума функции $y = f(x)$, если производная этой функции $y' = f'(x)$ при переходе x через критическую точку (точку, где производная равна нулю или не существует) меняет знак. Если знак меняется с плюса на минус (т. *A*, т. *C* на рис. 4.9), то имеем локальный максимум, а если знак меняется с минуса на плюс (т. *B*, т. *D* на рис 4.9), то имеем локальный минимум.

Заметим, что функция $y = f(x)$ должна быть непрерывна на интервале, содержащем критическую точку.

Пример 4.28. Производная функции

$$y = \frac{2}{x^2}; \quad y' = \frac{-4}{x^3}$$

меняет знак при переходе через точку $x = 0$, но экстремума в ней не имеет, так как в этой точке она разрывна [9].

Вернемся к примеру 4.27 и проверим, удовлетворяется ли там достаточный признак экстремума (рис. 4.11).

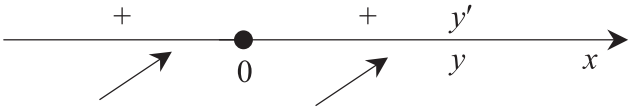


Рис. 4.11

Из рисунка видно, что производная функции $y = x^3$ не меняет знака при переходе x через точку $x = 0$, поэтому данная функция не имеет экстремума в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$.

Пример 4.29. Рассмотрим функцию

$y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2.$

$y' = 9x^2 + 12x - 1$

$9x^2 + 12x - 1 = 0$

$x_1 \approx 0{,}06; x_2 \approx -1{,}4$

$y' = 9(x - 0{,}06)(x + 1{,}4)$

Применяя достаточный признак экстремума, находим, что в точке $x = -1{,}4$ — максимум, а в точке $x = 0{,}06$ — минимум (рис. 4.12).

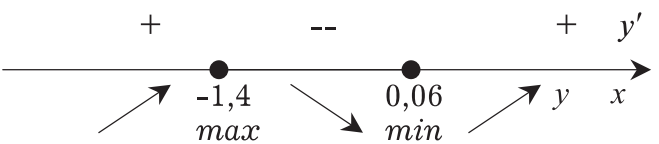


Рис. 4.12

Точки экстремума можно находить и с помощью второй производной. Для этого сформулируем второй достаточный признак экстремума: некоторая точка с координатами x_0, y_0 будет точкой экстремума функции $y = f(x)$, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, при этом, если $f''(x_0) > 0$, то данная точка будет точкой минимума функции $y = f(x)$, а если $f''(x_0) < 0$ — точкой максимума; в том случае если $f''(x_0) = 0$ данный признак не применим.

Используем приведенный признак для нахождения экстремумов функции $y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2$ из примера 4.29.

$y'' = 18x + 12.$

$y''(x = 0{,}06) = 18 \cdot 0{,}06 + 12 \approx 13{,}1.$

$y''(x = -1{,}4) = 18 \cdot (-1{,}4) + 12 \approx -13{,}2.$

Следовательно, в точке $x = 0{,}06$ исходная функция будет иметь минимум, а в точке $x = -1{,}4$ — максимум.

Теперь покажем, как применять вторую производную для нахождения участков выпуклости и вогнутости функции и ее точек перегиба.

Сначала приведем соответствующие определения.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется вогнутым вверх (в положительном направлении оси ординат) на некотором интервале, если на этом интервале он расположен выше касательной, проведенной к любой точке графика в этом интервале (рис. 4.13).

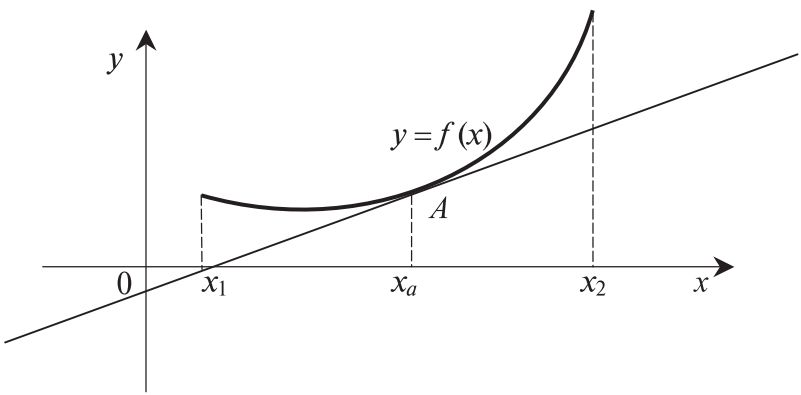


Рис. 4.13

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (в положительном направлении оси ординат) на некотором интервале, если на этом интервале он расположен ниже касательной, проведенной к любой точке графика в этом интервале (рис. 4.14).

Точки, отделяющие участки выпуклости функции от участков ее вогнутости (и наоборот), называются точками перегиба.

Теперь сформулируем теорему.

Теорема 4.6. Если вторая производная функции $y = f(x)$ всюду на некотором интервале меньше нуля, то функция $y = f(x)$ на этом интервале — выпуклая; если вторая производ-

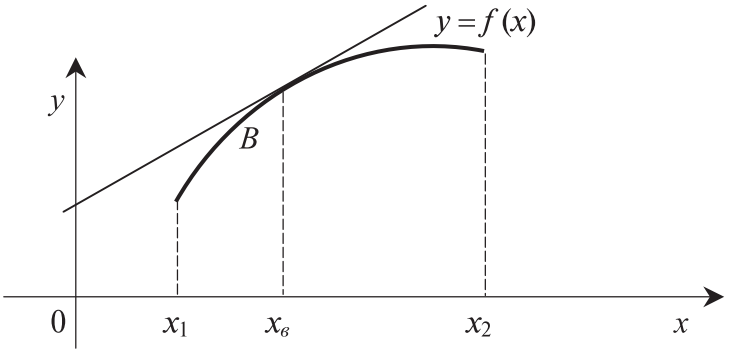


Рис. 4.14.

ная функции $y = f(x)$ всюду на некотором интервале больше нуля, то функция $y = f(x)$ на этом интервале — вогнутая.

Приведем также необходимый признак существования точки перегиба: если точка с координатами x_0, y_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то вторая производная данной функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Недостаточность данного признака мы проиллюстрируем примером.

Пример 4.30. Рассмотрим функцию $y = x^4$. Воспользовавшись приведенным выше признаком, проверим, есть ли у этой функции точки перегиба.

$y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$

$12x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ должна быть точкой перегиба по необходимому признаку, но если взглянуть на график этой функции (рис. 4.15) видно, что в данной точке перегиба нет.

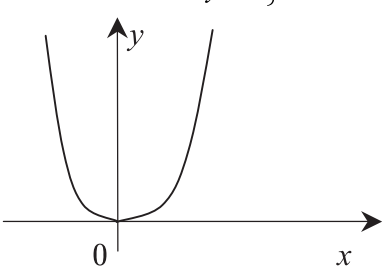


Рис. 4.15

Поэтому сформулируем достаточный признак существования точки перегиба: точка с координатами x_0, y_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, если $f''(x)$, меняет знак

при переходе x через x_0; если знак меняется с минуса на плюс, то слева от данной точки лежит участок выпуклости, а справа — участок вогнутости, а если знак меняется с плюса на минус, то наоборот.

Применим данный признак к функции из примера 4.30.

Из рис. 4.16 видно, что достаточный признак не выполняется, поэтому в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ перегиба нет.

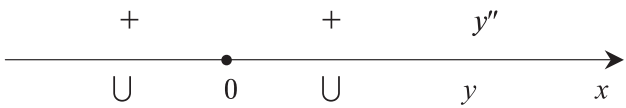


Рис. 4.16

Теперь применим достаточный признак существования точки перегиба к функции из примера 4.29.

В данном случае (рис. 4.17) достаточный признак свидетельствует о том, что точка с абсциссой $\left(-\frac{2}{3}\right)$ является точкой перегиба функции $y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2$.

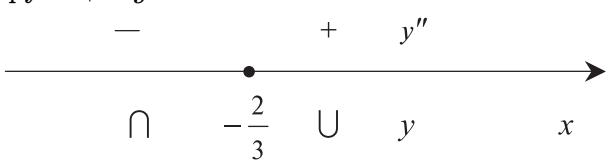


Рис. 4.17

$$y'' = 18x + 12;\ 18x + 12 = 0;\ x = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}.$$

Теперь приведем схему, по которой удобно проводить исследование функций [9]:

1. Нахождение области определения функции, точек ее разрыва, интервалов ее непрерывности и вертикальных асимптот.

2. Проверка функции на четность, нечетность, периодичность.

3. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат (если это не требует больших вычислительных затрат).

4. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции.

5. Нахождение участков выпуклости, вогнутости функции и точек ее перегиба.

6. Нахождение наклонных асимптот.

7. Построение графика функции по результатам проведенного исследования.

Пример 4.31.

Теперь в соответствии с приведенной схемой исследуем функцию $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Данная функция определена на всей оси $0x$ за исключением точки $x = 2$, т. е. $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой данной функции, так как

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty.$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической, так как $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x + T) \neq f(x)$, где T — период, а график данной функции проходит через начало координат.

Теперь найдем первую производную исходной функции и найдем участки монотонности и экстремумы.

$$y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2};$$

$$x^2 - 4x = 0;\ x(x - 4) = 0;\ x = 0;\ x = 4.$$

Точку $x = 2$, где не существует первой производной исходной функции, на экстремум можно не проверять, так как в этой точке сама функция имеет бесконечный разрыв.

Следовательно (рис. 4.18), в соответствии с достаточным признаком экстремума данная функция имеет максимум в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ и минимум в точке с координатами $x = 4$, $y = 8$.

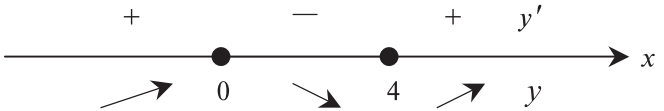


Рис. 4.18

Теперь найдем вторую производную и определим участки вогнутости, выпуклости и точки перегиба, используя теорему 4.6 и достаточный признак существования точки перегиба

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(x-2)[(2x-4)(x-2) - 2x^2 + 8x]}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Таким образом, вторая производная нигде не обращается в ноль, следовательно, данная функция не имеет точек перегиба. Надо только проверить, меняет ли вторая производная исходной функции знак при переходе x через точку бесконечного разрыва $x = 2$ (второй производной заданной функции также не существует в точке $x = +2$).

Поэтому (рис. 4.19) слева от точки $x = 2$ исходная функция будет выпуклой, а справа от точки $x = 2$ — вогнутой.

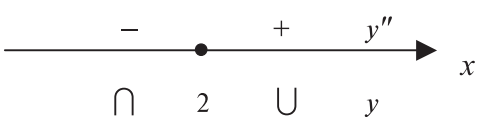


Рис. 4.19

Теперь проверим, имеет ли исходная функция наклонные асимптоты, для этого воспользуемся формулами (4.12) и (4.13) (так как заданная функция является дробно-рациональной, можно рассматривать произвольное стремление x к бесконечности).

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2.$$

Поэтому прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой исходной функции.

Теперь по результатам проведенного исследования построим график заданной функции (рис. 4.20).

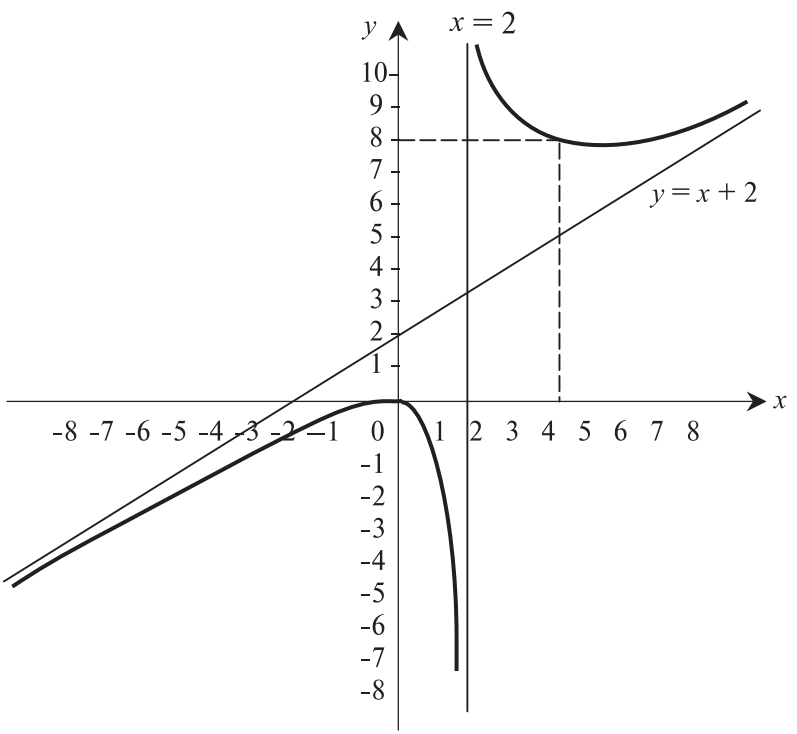


Рис. 4.20

4.3.5. Экстремумы функций двух и многих аргументов

Понятие экстремума функции двух аргументов аналогично соответствующему понятию функции одного аргумента.

Пусть функция $Z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости X0Y, а точки A(x_1, y_1) и B (x_2, y_2) принадлежат D.

Определения. Точка A (x_1, y_1) есть точка максимума функции $Z = f(x, y)$, если $f(x_1, y_1)$ является наибольшим значением функции $Z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки A (x_1, y_1). Аналогично, точка B (x_2, y_2) есть точка минимума функции $Z = f(x, y)$, если $f(x_2, y_2)$ является наименьшим значением функции $Z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки B (x_2, y_2).

Часто говорят, что функция $Z = f(x, y)$ достигает в точках A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) экстремума.

Заметим, что экстремум функции двух аргументов всегда лежит внутри области определния функции (это следует из определния).

Точки максимума и минимума функции двух аргументов показаны на рис. 4.21.

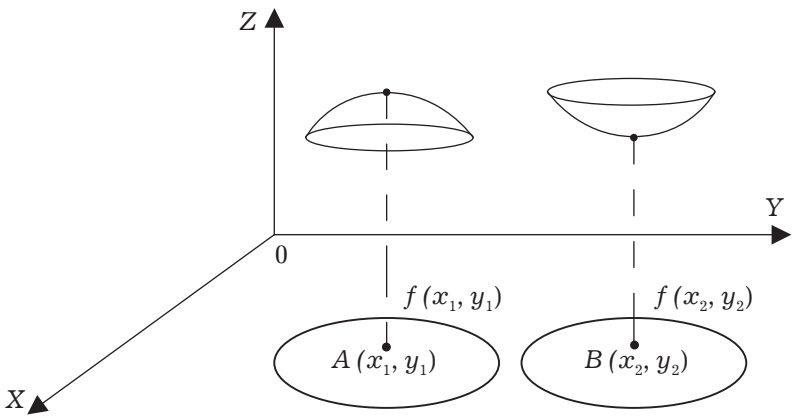


Рис. 4.21

Приведем необходимое условие экстремума функции двух независимых аргументов.

Теорема 4.7. Если в точке C (x_0, y_0) дифференцируемая функция $Z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т. е.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0; \ \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0$$

Точка C (x_0, y_0), в которой частные производные функции $Z = f(x, y)$ обращаются в ноль, называется стационарной точкой функции $Z = f(x, y)$.

Геометрически необходимый признак означает, что в экстремальной точке касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости X0Y.

Точками экстремума непрерывной функции двух аргументов могут быть точки, в которых функция недифференцируема. Этим точкам соответствуют острия поверхности графика функции $Z = f(x, y)$ (рис. 4.22).

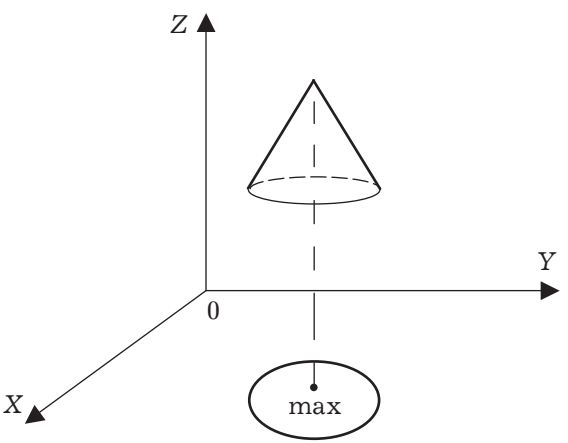


Рис. 4.22

Например, функция $Z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ имеет минимум в начале координат, но в этой точке функция недифференцируема. Данная функция представляет собой круглый конус с вершиной в начале координат.

Следовательно, точками экстремума функции двух аргументов могут быть точки, где либо одновременно $f'_x(x, y) = 0$, $f''_y(x, y) = 0$, либо хотя бы одна из этих частных производных не существует. Точки этих двух типов называют критическими.

Аналогично определяется экстремум функции любого числа независимых аргументов $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и вводятся необходимые условия экстремума.

Теорема 4.8. Дифференцируемая функция $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет экстремумы только при тех значениях $x_1, x_2 ..... x_n$, при которых равны нулю все ее n частных производных первого порядка, т. е.

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Поэтому для нахождения экстремумов имеем систему n уравнений с n неизвестными.

Однако не любая критическая точка является точкой экстремума.

Пример 4.32.

Для функции $Z = x \cdot y$ точка A (0, 0) будет критической, так как $\frac{\partial z}{\partial x} = y; \frac{\partial z}{\partial y} = x$ и по необходимому признаку экстремума $x = 0$, $y = 0$. Но экстремума в этой точке нет.

Действительно, Z (0, 0) = 0, а в любой окрестности точки A (0, 0) можно найти и положительные и отрицательные значения функции. Данная функция $Z = xy$ называется гиперболическим параболоидом и имеет вид седла.

Приведем достаточный признак экстремума для функции двух аргументов. Он имеет гораздо более сложный вид, чем для функции одного аргумента.

Теорема 4.9. Пусть в стационарной точке K (x_0, y_0) и в некоторой ее окрестности функция $Z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Найдем в точке K (x_0, y_0) значения:

$$A = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_K;$$

$$B = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_K;$$

$$C = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_K.$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} B & A \\ C & B \end{vmatrix} = B^2 - AC.$

Тогда:

а) если $\Delta < 0$, то функция $Z = f(x, y)$ имеет в точке K (x_0, y_0) экстремум: максимум при $A < 0$, $C < 0$ и минимум при $A > 0$, $C > 0$ (из условия $\Delta < 0$ следует, что A и C всегда имеют одинаковые знаки);

б) если $\Delta > 0$, то точка K (x_0, y_0) не является точкой экстремума функции $Z = f(x, y)$;

в) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке K (x_0, y_0) может быть, а может и не быть и для определения его нужны дополнительные исследования.

Пример 4.33

Найти экстремумы функции $Z = x^3 - y^3 + 3\,xy - 5$.

Используем необходимый признак экстремума и получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 3x;$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0; \\ -3y^2 + 3x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y = 0; \\ -y^2 + x = 0. \end{cases}$$

Далее находим $x = y^2$, поэтому $y^4 + y = 0$, или $y\,(y^3 + 1) = 0$. Из последнего выражения находим $y = 0$ или $y = -1$ (комплексные корни не учитываем).

Поэтому получаем две стационарные точки: N (0, 0) и K (1, -1).

Для того, чтобы определить, будут ли найденные точки экстремумами исходной функции, применим достаточный признак экстремума. Тогда получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y.$$

Рассмотрим точку N (0, 0).

Найдем:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_N = 0;$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_N = 0;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_N = 0.$$

Тогда $\Delta = B^2 - AC = 9 > 0$, т. е. точка N (0, 0) не является точкой экстремума исходной функции.

Рассмотрим точку K (1, -1).

Найдем:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_K = 6;$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_K = 3;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_K = 6.$$

Тогда $\Delta = B^2 - AC = -27 < 0$, т. е. точка K (-1, 1) будет точкой экстремума исходной функции, а так как A > 0 и C > 0, то это

точка минимума и значение функции в этой точке равно -6 (Z_{min} = -6).

4.3.6. Понятие о методе наименьших квадратов

При обработке результатов наблюдений в естественных, технических и гуманитарных науках часто приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основании наблюдений. Один из способов получения таких формул — метод наименьших квадратов (МНК). В 1806 г. французский математик Лежандр предложил способ для решения неопределенных СЛАУ, неизвестными в которых являются поправки в результаты наблюдений. Этот способ получил название МНК.

В данном способе уравнения подчиняются дополнительному условию – сумма квадратов поправок (V), вводимых в равноточные наблюдения, должна быть минимальной, меньше суммы квадратов любой другой системы поправок, удовлетворяющей исходным уравнениям, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^2 = \min. \tag{4.14}$$

Условие (4.14) — это математическое выражение принципа МНК [54].

Например, мы хотим установить зависимость между двумя величинами x и y, где x — административные правонарушения, а y – преступления. Данные, собранные юридической статистикой, свидетельствуют о наличии неполной прямой линейной зависимости между административными правонарушениями и преступлениями [36]. То есть в этом случае естественно считать, что y это линейная функция от x, записываемая следующим образом:

$$\tilde{y} = ax + b, \tag{4.15}$$

где a и b – неизвестные коэффициенты;

x – измерения;

$\tilde{y}$ – теоретические значения показателя, лежащие точно на прямой линии.

Исходные данные наблюдений удобно представить в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

X	x_1	x_2	.....	x_n
Y	y_1	y_2	.....	y_n

Причем значения y_i, где $i=\overline{1,n}$ не обязательно точно лежат на прямой линии.

Неизвестные коэффициенты a и b в уравнении (4.15) можно найти, используя МНК. В данном случае условие МНК (4.14) будет иметь вид

$$F=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\tilde{y}_i)^2=\min.$$

подставляем в него вместо $\tilde{y}_i$ его значение из (4.15) и получаем

$$F=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2=\min.$$

Данную функцию можно рассматривать как функцию двух аргументов a и b. Необходимыми условиями минимума этой функции будут равенства

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0;$$

$\frac{\partial F}{\partial b}=0$ (более подробно см. экстремум функции двух аргументов).

Далее имеем:

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)(-x)=0;$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)(-1)=0.$$

После преобразований получаем так называемую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}y_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n;\\ \sum_{i=1}^{n}y_ix_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i.\end{cases}$$

Решая данную, систему находим искомые коэффициенты:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad (4.16)$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad (4.17)$$

Пример 4.34 [36].

Пусть заданы два ряда наблюдений, характеризующих за шесть лет количество хищений оружия (x) и вооруженные преступления (y). Эти деяния связаны между собой потому, что у них почти одни и те же причины.

Исходные данные поместим в табл. 4.2, причем заполнять ее будем по возрастанию ряда x.

Таблица 4.2

Хищение оружия (x)	773	1130	1138	1336	1352	1396
Вооруженные преступления (y)	4481	9549	8873	12160	18059	19154
Выравненные значения $\tilde{y}$	3010	10864	11040	15396	15748	16716
Поправки $V = y - \tilde{y}$	1471	-1315	-2167	-3236	2311	2438

В данном случае связь между y и x будем искать в виде $\tilde{y} = ax + b$.

По формулам (4.16) и (4.17) находим искомые коэффициенты b = -13996; a = 22.

Тогда получим $\tilde{y} = 22x + 13996$. (14.18)

Используя формулу (4.18), найдем выравненные значения ряда $\tilde{y}$. Они приведены в третьей строке табл. 4.2, в ней же в четвертой графе показаны поправки.

Используя МНК можно находить коэффициенты и для случая любой нелинейной зависимости двух величин, а также

для случая многофакторной зависимости, т. е. исходная функция будет зависеть от нескольких аргументов, причем она может быть и линейной, и криволинейной. Например, если связь между x_1, x_2 и y ищется в виде $\tilde{y} = a_1 x^2 + a_2 x + b$, то коэффициенты a_1, a_2, b находятся в результате решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 = a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные следующих функций:

1.1. $y = \log_{\cos 2x}(5\sin^2 8x - e^{4x^3})$;

1.2. $y = (\mathrm{tg} 5x)^{\cos^3 x}$;

1.3. $y = e^{\mathrm{tg}^3 x} \cdot \ln^6(2x^4 + 7x)$;

1.4. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\cos^2 5x - x^6}}{16\mathrm{tg}^3 7x}$;

1.5. $y = 6^{\mathrm{ctg}^2 x} \cdot x^8 + \ln^2 4x$;

1.6. $y = e^{\mathrm{tg}^3 x} \cdot 7^{\cos^2 2x}$;

2. Найти вторые производные следующих функций:

2.1. $y = 6x^4 + 4\sin 3x$;

2.2. $y = e^{7x} \cdot \mathrm{tg}\, 5x$;

2.3. $y = \dfrac{\ln 6x}{4x^2}$;

2.4. $y = 5x^8 - 16x^5 + \sin 2x$

3. Исследовать функции и построить их графики:

3.1. $y = 2x^4 - 8x^2 + 3$;

3.2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3;$

3.3. $y = 2x^2 - 10;$

3.4. $y = 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6;$

3.5. $y = 3x - x^3;$

3.6. $y = \frac{x}{x^2 + 16};$

4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция Z имеет вид:

4.1. $Z = x^3 \cdot \sin^2 y;$

4.2. $Z = x^y;$

4.3. $Z = \sqrt{2x^2 + y^2};$

4.4 $Z = \mathrm{tg}^2 (x^3 y) \cdot 2^{2x+3};$

4.5. $Z = \mathrm{arctg}\,(x^4 + 5y^6);$

4.7. $Z = \sqrt{\mathrm{tg}^5 x^3 - \ln^2 y^6}.$

5. Используя правило Лопиталя, найти пределы функций:

5.1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{1 - 2x} + 1}{\sqrt{2 - x} - 1};$

5.2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 7x^2 - 6x}{8x^4 - 15x^2 - 10};$

5.3. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x}};$

5.4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, 8x}{\mathrm{tg}\, 12x};$

5.5. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2 \ln x}{1 - x^3};$

5.6. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

6. Найти производную функции

$W = 2x_1^3 x_3^2 - 3x_2^2 + 3x_3 x_4 x_5^3$ в точке A (0, -1, 2, 4, -3) по направлению к точке B (0, 1, -2, 4, 3).

7. Найти наибольшую скорость возрастания функции $W = 5x_1x_3^2 - 4x_1^2x_2^3 + 2x_3x_4x_5^2$ в точке A (-2, -1, 3, 0, 4).

8. Найти вторые частные производные функций:

8.1. $Z = 5x^3y^8 - 7\ln^2 y \cdot \sin x$;

8.2. $Z = 16 \operatorname{tg} y \cdot x^5 + 2x^7y^6$.

9. Найти производные третьего порядка для функций:

9.1. $y = x^3 \cdot \cos x - \dfrac{2x}{2^x}$;

9.2. $y = \ln^3 x - x^2 \cdot \sin x$.

10. Результаты измерения величин x и y заданы в таблице

X	12	22	32	42	52	62
У	149	98	38	-0,1	-59	-99

Полагая, что между x и y существует линейная зависимость вида $\tilde{y} = ax + b$ с помощью МНК найти коэффициенты a и b.

11. Найти экстремумы функции двух аргументов.

11.1. $Z = 6 - x^2 - (y^2 - 5)^2$;

11.2. $Z = 7(x - y) - 2x^2 - 3y^2$;

11.3. $Z = y\sqrt{x} - x^2 + 2y + 7x + 8$.

12. Найти производную функцию y, если она задана уравнением.

12.1. $e^{xy} + y \cos(2x) + 5 - 26 = 0$;

12.2. $2x^3y^2 - 4xy + 7 = 0$.

13. Найти вторую производную функции y, если она задана уравнением:

13.1. $6\,xy^2 - 7yx = 0$;

13.2. $x^3 - y^3 = 72$.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под неявным заданием функции?

2. Как вычислить производную функции заданной неявно?

3. Каким образом находятся производные высших порядков от функции, заданной неявно?

4. Дать определение производной функции $y = f(x)$.

5. Каковы геометрический и механический смыслы производной?

6. Как найти производную сложной функции?

7. Дать определение дифференциала функции $y = f(x)$.

8. Какой геометрический смысл имеет дифференциал?

9. Что называется производной второго порядка от функции $y = f(x)$?

10. В чем состоит достаточный признак экстремума?

11. Какие точки называются точками перегиба функции $y = f(x)$?

12 Что называется асимптотой функции $y = f(x)$?

13. Сформулировать правило Лопиталя и привести примеры его применения.

14. Что называется функцией двух независимых переменных?

15. Что называется графиком функции двух независимых переменных?

16. Что называется пределом функции $Z = f$ (x, y) при $x \to x_0$ и $y \to y_0$.

17. Дать определение частных производных функции двух независимых аргументов.

18. Дать определение градиента

19. Как можно выразить производную по направлению через градиент?

20. Что называется частной производной второго порядка от функции двух независимых аргументов?

21. Дать формулировку теоремы о равенстве вторых смешанных частных производных.

22. Что называется производной n-го порядка от заданной функции?

23. В чем состоит суть МНК?

24. Как с помощью МНК находить коэффициенты эмпирических формул?

25. Дать определение точки экстремума функции двух аргументов.

26. В чем состоит необходимый признак экстремума функции двух аргументов.

27. В чем состоят достаточные условия экстремума функции двух аргументов.

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Интегральное исчисление — это раздел математического анализа, в котором изучаются свойства и способы вычисления интегралов и их применение.

Интегрирование — это действие, обратное дифференцированию. Например, с его помощью находится скорость тела по заданному ускорению.

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразной от функции $y = f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, производная которой равна исходной функции, т. е. $F'(x) = f(x)$. Из этого определения следует, что любая функция по отношению к своей производной является первообразной.

Рассмотрим пример $y = x^5$. Данная функция служит производной для функции $y = \frac{x^6}{6}$, так как $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$ и $\left(\frac{x^6}{6} - 1000\right)' = x^5$, или в общем виде $\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = x^5$, где $C = \text{const}$.

Из данного примера видно, что любая функция $\left(\frac{x^6}{6} + C\right)$ будет первообразной для функцией $y = x^5$.

Теперь приведем формулировку основной теоремы о первообразных.

Теорема 5.1. Любая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных, причем любые две из них друг от друга отличаются постоянным слагаемым [9, 44].

Формула $F(x) + C$ исчерпывает множество всех первообразных исходной функции. Геометрически выражение $F(x)+C$

есть семейство кривых (рис. 5.1.), каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых вдоль оси $0y$.

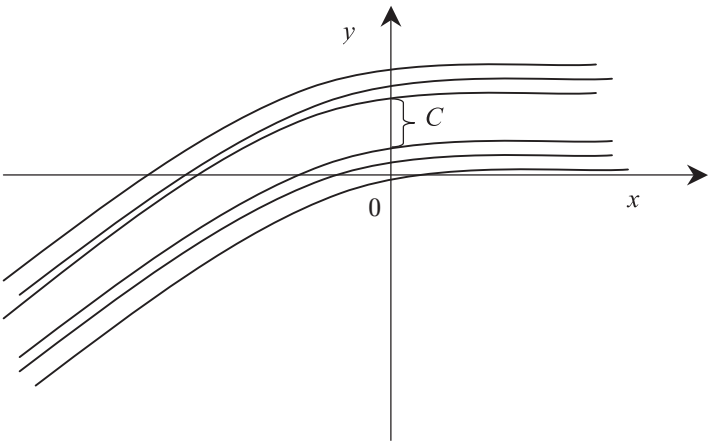


Рис. 5.1

Заметим, что первообразную можно находить не только по производной, но и по дифференциалу.

Теперь дадим определение неопределенного интеграла.

Отыскание первообразных называется неопределенным интегрированием, а выражение, охватывающие совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается так:

$$\int f(x)dx,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция;

$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение;

x — переменная интегрирования.

Заметим, что $f(x)$ на участке интегрирования должна быть непрерывна;

$\int$ — знак интеграла.

Таким образом, неопределенный интеграл есть семейство функций $F(x) + C$, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Нахождение всех первообразных для данной функции $f(x)$ и называется неопределенным интегрированием. Термин “неопределенное интегрирование” появился, потому что не указывается, какая первообразная имеется в виду.

Сразу скажем, что интегрирование значительно сложнее дифференцирования. Дифференцирование любых элементарных функций производится по определенным правилам, а интегрирование требует в каждом конкретном случае индивидуального подхода. Разумеется, есть общие методы интегрирования, некоторые мы рассмотрим далее. Заметим, что производная от любой элементарной функции есть функция элементарная, а про неопределенный интеграл от элементарной функции этого сказать нельзя. Первообразная от элементарной функции может оказаться и не представимой с помощью конечного числа элементарных функций. Про такие функции говорят, что они не интегрируемы в элементарных функциях. Примерами так называемых неберущихся интегралов являются:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};\ \int\frac{dx}{\ln x};\ \int\frac{\sin x dx}{x};$$

$$\int\frac{\cos x dx}{x};\ \int\frac{e^x dx}{x};\ \int e^{-x^2}dx$$

и др.

Из определения неопределенного интеграла следует, что

$$\left.\begin{aligned}(\int f(x)dx)' &= f(x);\\ d(\int f(x)dx) &= f(x)dx;\\ \int f'(x)dx = \int df(x) &= f(x)+C.\end{aligned}\right\}\qquad(5.1)$$

Найдем неопределенные интегралы от основных элементарных функций, используя для этого таблицу производных от основных элементарных функций (см. главу 4 “Основы дифференциального исчисления”).

Например, $(\sin x)' = \cos x$. Перепишем это равенство в виде

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \Rightarrow d\sin x = \cos\, xdx.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства и с учетом третьей формулы (5.1) получим

$$\int d\sin x = \int \cos x dx \Rightarrow \sin x + C = \int \cos x dx.$$

Это и есть табличный интеграл.

Точно так же получают и другие табличные интегралы от основных элементарных функций.

Приведем таблицу интегралов от основных элементарных функций. Справедливость приведенных формул легко проверить дифференцированием.

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$

9) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg} x + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$

Добавим формулы интегрирования гиперболических и обратных гиперболических функций.

12) $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C;$

13) $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C;$

14) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C;$

15) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C$, где $\mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x};$

16) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{Arth}x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Arsh}x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C;$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Arch}x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C.$

Объединение формул 17 и 18 и дает формулу 11 таблицы неопределенных интегралов. Заметим, что кроме основной таблицы интегралов существуют таблицы интегралов от элементарных и специальных функций, например. (*Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Наука, 1986; Интегралы и ряды. В 3 т. — М.: Наука, 1986).

Задача “взятия” неопределенного интеграла состоит в том, чтобы преобразовать его к табличному.

Приведем свойства неопределенного интеграла.

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx =$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак неопределенного интеграла, т. е.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \text{где } k \in R.$$

3. Любая формула интегрирования сохраняет свой вид при постановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т. е. если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то и $\int f(u)\,du = F(u) + C,$

где $u = u(x)$ — любая дифференцируемая функция от x.

В силу свойства 3 таблица неопределенных интегралов (основная таблица) будет справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функции от нее, т. е. основная таблица интегралов сразу значительно расширяется [9, 42. 44].

Методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование*. Используется таблица интегралов, свойства неопределенных интегралов и различные преобразования подынтегрального выражения.

Пример 5.1.

$$\int\left(2\sin x + 3x^3 - \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int \sin x dx + 3\int x^3 dx - 5\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= -2\cos x + \frac{3}{4}x^4 - 5\mathrm{tg}x + C.$$

Пример 5.2.

$$\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 7x}{2x}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int x^2 dx + 2\int x dx + \frac{7}{2}\int dx = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{7}{2}x + C.$$

Пример 5.3.

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx = 2\int \sin x dx = -2\cos x + C.$$

Пример 5.4.

$$\int \sin^2 x dx =$$

[Воспользуемся формулами $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Последнее выражение подставляем вместо подынтегральной функции]

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x\, d2x =$$

[Заметим, что $d2x = 2dx$ заменяем $2x$ на y, т. е. $2x = y$.]

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos y dy = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin y + C =$$

[Возвращаемся к прежнему аргументу] =

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Таким образом, в примере 5.4 использовали еще один метод интегрирования (замена переменной), который более подробно рассмотрим ниже.

2. *Интегрирование по частям*. Этот метод следует из формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции аргумента x, тогда имеем

$$(uv)' = u'v + v'u, \text{ или}$$

$$d\,(uv) = v\,du + u\,dv,$$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируем обе части последнего равенства и получим.

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (5.2)$$

Это и есть формула интегрирования по частям.

Этот способ состоит в том, что подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух множителей u и dv и заменяется двумя интегрированиями:

1) отыскание v из выражения для dv;

2) отыскание интеграла от vdu.

Смысл способа состоит в том, что эти два интегрирования выполнить легче, чем “взять” исходный интеграл.

Рассмотрим конкретные примеры применения данного метода.

Пример 5.5.

$$\int \ln x dx = \left[u = \ln x, dv = dx \Rightarrow v = x, du = \frac{dx}{x} \right] =$$

$$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

В данном примере выбор u и dv производится однозначно, но так бывает не всегда.

Пример 5.6.

$$\int x e^x dx = \left[u = x; du = dx; dv = e^x dx; v = \int e^x dx = e^x \right] =$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C,$$

но если принять

$$[u = e^x; du = e^x dx; dv = x dx; v = \frac{x^2}{2}],$$

то

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx,$$

т. е. получим более сложный интеграл, чем исходный.

Бывает случаи, когда формулу (5.2) надо применять несколько раз.

Пример 5.7.

$$\int e^x \sin x dx = [u = \sin x;\ du = \cos x dx;\ dv = e^x dx;$$

$$v = \int e^x dx = e^x] = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

[К интегралу $\int e^x \cos x dx$ опять применим формулу (5.2), получим

$$u = \cos x;\ du = -\sin x dx;\ dv = e^x dx;\ v = e^x]$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right) =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Переносим $\int e^x \sin x dx$ в левую часть равенства и получим:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + 2C,$$

(постоянная может быть любой, возьмем ее равной $2C$),

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 5.8.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left[u = \sqrt{1-x^2}; dv = dx \Rightarrow v = x; du = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \arcsin x.$$

Переносим $\int \sqrt{1-x^2}dx$ в левую часть и получаем

$$2\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + 2C,$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

3. *Метод замены переменной*. Его применяют в том случае, если исходный интеграл сложно или невозможно с помощью алгебраических и иных преобразований свести к одному или нескольким табличным интегралам.

Способ заключается в следующем: заменяется новой переменной такая часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подын-

тегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить или разделить подынтегральное выражение).

Метод замены переменной основан на следующей теореме. Пусть некоторая функция $\varphi(t) = x$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $[a, b]$, пусть X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на отрезке [a, b] справедлива формула

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (5.3)$$

В некоторых случаях лучше использовать замену переменной не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$.

Приведем конкретные примеры.

Пример 5.9.

Найти $\int (5x-6)^{90}dx.$

$\int (5x-6)^{90}dx =$ [Можно разложить подынтегральную функцию, используя бином Ньютона, но это будет слишком длинно, поэтому делаем замену переменной: $t = 5x-6 \Rightarrow x = \frac{t+6}{5}$; $dx = \frac{dt}{5}$, поэтому получим] $= \frac{1}{5}\int t^{90}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{91}}{91} + C =$

$=$ [Или, возвращаясь к первоначальной переменной x, имеем]

$= \int (5x-6)^{90}dx = \frac{(5x-6)^{91}}{455} + C.$

Пример 5.10.

$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{dx}{\frac{16(x^2+16)}{16}} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1} =$$

[Теперь делаем замену переменной

$$y = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4y \Rightarrow dx = 4dy] = \frac{1}{16}\cdot 4\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{4}arctgy + C =$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$= \frac{1}{4}arctg\left(\frac{x}{4}\right) + C.$$

Пример 5.11.

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{(x+1)^2+4}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

=[Теперь делаем замену переменной

$$t=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2t-1=x\Rightarrow dx=2dt]=\frac{1}{4}\int\frac{2dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}arctgt+C=$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$=\frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

Пример 5.12.

$$\int\frac{2x^2dx}{x^3+7}=\frac{2}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+7}=$$

[Заметим, что

$$d(x^3+7)=3x^2dx]=\frac{2}{3}\int\frac{d(x^3+7)}{x^3+7}=$$

= [Делаем замену переменной $y=x^3+7$]

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dy}{y}=\frac{2}{3}\ln|y|+C=$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$=\frac{2}{3}\ln\left|x^3+7\right|+C.$$

Пример 5.13.

$$\int\frac{2^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=$$

[Заметим, что $d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx]=$

$$=2\int 2^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=$$

[Теперь делаем замену переменной $\sqrt{x}=y$]

$$=2\int 2^y dy=2\cdot\frac{2^y}{\ln 2}+C=$$

[Возвращаем переменную x]

$$= \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C.$$

Пример 5.14.

$$\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = 2\int e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx =$$

[Заметим, что $d \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$]

$$= \int e^{\sin^2 x} d \sin^2 x =$$

[Теперь делаем замену переменной $t = \sin^2 x$]

$$= \int e^t dt = e^t + C =$$

[Возвращаем переменную x]

$$= e^{\sin^2 x} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Любая рациональная функция $R(x)$ может быть представлена в виде дроби, т. е. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Если степень числителя (m) больше или равна степени знаменателя (n), то, разделив $P(x)$ на $Q(x)$, получим многочлен $P_1(x)$ и в остатке многочлен $P_2(x)$ не выше ($n - 1$) степени, т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$. Интегрирование $P_1(x)$ проходит без проблем.

Надо проинтегрировать правильную рациональную дробь, степень числителя которой меньше степени знаменателя $\left(\frac{P_2(x)}{Q(x)}\right)$.

$\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей двух видов $\frac{A_i}{(x-a)^i}$; $\frac{B_i x + C_i}{(x^2 + px + q)^i}$, где A_i, B_i, C_i — постоянные.

Каждому множителю $(x - a)^k$ в представлении знаменателя $Q(x)$ соответствует в разложении дроби $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ на слагаемые сумма k простейших дробей вида:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}.$$

Каждому множителю $(x^2 + px + q)^t$ соответствует сумма t простейших дробей вида:

$$\frac{B_t x+C_t}{(x^2+px+q)^t}+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1 x+C_1}{(x^2+px+q)}.$$

Имеет место следующее разложение дроби $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ на слагаемые:

$$\frac{P_2(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}+\ldots+\frac{B_t x+C_t}{(x^2+px+q)^t}+$$
$$+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1 x+C_1}{(x^2+px+q)}. \qquad (5.4)$$

Пример 5.15.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=$$

[Делаем замену переменной, обозначив $\sqrt{e^x+1}=y$, тогда получим

$$e^x+1=y^2\Rightarrow e^x=y^2-1\Rightarrow \ln e^x=$$
$$=\ln(y^2-1), x=\ln(y^2-1), dx=\frac{2ydy}{y^2-1}]=$$

$$\int\frac{2ydy}{y(y^2-1)}=2\int\frac{dy}{y^2-1}=2\int\frac{dy}{(y-1)(y+1)}.$$

Дробь $\frac{1}{(y-1)(y+1)}$ — правильная рациональная дробь; разложим ее на простейшие дроби (см. 5.4)

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1},$$

где A и B неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти. Освобождаясь от знаменателя, имеем:

$1 = A(y + 1) + B(y - 1);$

$1 = Ay + A + By - B.$

Приравнивая коэффициенты при y и y^0, получим систему уравнений для определения A и B.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= A - B \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow A = -B \\ &1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \text{ и } A = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{0{,}5}{y-1} - \frac{0{,}5}{y+1}$$

и искомый интеграл примет вид:

$$2\int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = 2\left(\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1}\right) = \int \frac{d(y-1)}{y-1} - \int \frac{d(y+1)}{y+1} =$$

[Заметим, что $d(y+1) = dy$ и $d(y-1) = dy$]

$$= \ln|y-1| - \ln|y+1| + C = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C =$$

[Возвратим переменную e^x]

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int f(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ можно преобразовать в интеграл от рациональной функции.

Используются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Из равенства $x = 2\operatorname{arctg} u$ имеем $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. В результате указанной подстановке исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2},$$

т. е. подынтегральная функция рациональна относительно u.

Пример 5.16.

$\int \frac{dx}{\cos x}$.

Применим подстановку $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\frac{(1-u^2)}{(1+u^2)}} = 2\int \frac{du}{1-u^2} =$$

[Воспользуемся формулой 16 из таблицы интегралов.]

$$= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

С помощью указанной подстановки хорошо “берутся” интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}$.

Интегрирование функций $\int f(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $u = tg\frac{x}{2}$ всегда приводит к успеху, но в силу своей общности она не всегда является оптимальной.

Интегралы вида $\int \cos^n x \cdot \sin^m x dx$ находятся следующим образом:

a) если m — целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $\cos x = U$.

Пример 5.17.

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx =$$

$$= -\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)d\cos x = [\text{делаем подстановку } \cos x = U] =$$

$$= -\int U^2(1-U^2)dU = -\int U^2 dU + \int U^4 dU =$$

$$= \frac{U^3}{3} + \frac{U^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$$

b) если n – целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $\sin x = U$.

Пример 5.18.

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \sin^2 x \, d(\sin x) =$$

$$= \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x) \cdot \sin^2 x \, d(\sin x) =$$

[делаем замену переменной $\sin x = U$] =

$$= \int (1-2U^2+U^4) \cdot U^2 dU = \int (U^2 - 2U^4 + U^6) dU =$$

$$= \int U^2 dU - 2\int U^4 dU + \int U^6 dU =$$

$$= \frac{U^3}{3} - 2\frac{U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - 2\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C;$$

c) если $(n + m)$ – четное отрицательное число, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = U$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+U^2}; \quad \sin^2 x = \frac{U^2}{1+U^2}; \quad dx = \frac{dU}{1+U^2}.$$

Пример 5.19.

$$\int \frac{dx}{4-\sin^2 x} = [\text{делаем замену } \operatorname{tg} x = U] = \int \frac{dU}{(1+U^2)\left(4 - \frac{U^2}{1+U^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dU}{4(1+U^2)-U^2} = \int \frac{dU}{4+3U^2} = \int \frac{dU}{\frac{3(3U^2+4)}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dU}{U^2 + \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dU}{\frac{\frac{4}{3}\left(U^2 + \frac{4}{3}\right)}{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \int \frac{dU^3}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}U\right)^2 + 1} =$$

[делаем замену $\frac{\sqrt{3}U}{2} = t; U = \frac{2}{\sqrt{3}}t; \quad dU = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$] =

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}U}{2}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2}\right) + C;$$

d) если m и n – целые неотрицательные четные числа, то используются формулы

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Пример 5.20.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}(\int dx + 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + 2\frac{1}{2}\sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(x + \sin 2x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx) =$$

$$= \frac{1}{4}(x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x) + C =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Интегралы от иррациональных функций

а) Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{k/t})dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, т. е. над величинами x, $x^{m/n}$, ..., $x^{k/t}$ проводятся только рациональные операции.

Пусть p — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{k}{t}$.

Теперь делаем подстановку $x = y^p$; $dx = py^{p-1}dy$. Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень, т. е. подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от y.

Пример 5.21.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}-6}$$

Так как общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ это 4, то делаем замену $x = y^4$, $dx = 4y^3 dy$, $\sqrt{x} = y^2$; $\sqrt[4]{x} = y$.

В результате получаем $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}-6}=\int\frac{y^2\cdot 4y^3dy}{y-6}=4\int\frac{y^5dy}{y-6}$.

Делим числитель на знаменатель и получаем

$$
\begin{array}{l|l}
-\,y^5 & y-6 \\
\underline{y^5-6y^4} & \overline{y^4+6y^3+36y^2+216y+1296} \\
\quad -\,6y^4 & \\
\quad \underline{6y^4-36y^3} & \\
\qquad -\,36y^3 & \\
\qquad \underline{36y^3-216y^2} & \\
\qquad\quad -\,216y^2 & \\
\qquad\quad \underline{216y^2-1296y} & \\
\qquad\qquad -\,1296y & \\
\qquad\qquad \underline{1296y-7776} & \\
\qquad\qquad\qquad 7776 &
\end{array}
$$

$$4\int\frac{y^5dy}{y-6}=4\int\left(y^4+6y^3+36y^2+216y+1296+\frac{7776}{y-6}\right)dy=$$

$$=4\left(\frac{y^5}{5}+\frac{6y^4}{4}+36\frac{y^3}{3}+216\frac{y^2}{2}+1296y+7776\int\frac{dy}{y-6}\right)=$$

$$=4\left(\frac{y^5}{5}+\frac{3y^4}{2}+12y^3+108y^2+1296y+7776\ln|y-6|\right)+C=$$

$$=4\left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{3}{2}x+12\sqrt[4]{x^3}+108\sqrt{x}+1296\sqrt[4]{x}+7776\ln|\sqrt[4]{x}-6|\right)+C.$$

б) Теперь рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k/t}\right]dx.$$

Он сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=Z^S,$$

где S — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},\ldots,\frac{k}{t}$.

Пример 5.22.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+4}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx.$$

В данном примере $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x+1.$

Так как общий знаменатель дробей $\dfrac{1}{2}$ и 2 равен 2, то получаем $x + 1 = Z^2$.

Поэтому $dx = 2ZdZ$ и исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+4}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{(Z+4)2ZdZ}{Z^4-Z}=2\int \frac{Z(Z+4)dZ}{Z(Z^3-1)}=2\int \frac{Z+4}{Z^3-1}dZ=$$

$$=2\int \frac{Z+4}{(Z-1)(Z^2+Z+1)}dZ.$$

Разлагаем подынтегральную функцию на элементарные дроби и получаем:

$$\frac{Z+4}{(Z-1)(Z^2+Z+1)}=\frac{A}{Z-1}+\frac{BZ+C}{(Z^2+Z+1)}.$$

Отбрасываем знаменатель и имеем:

$Z + 4 = A\,(Z^2 + Z + 1) + (Z - 1)\,(B\,Z + C)$;

$Z + 4 = A\,Z^2 + A\,Z + A + B\,Z^2 + C\,Z - B\,Z - C$;

$$\begin{cases} 0=A+B; \\ 1=A+C-B; \\ 4=A-C. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим искомые коэффициенты A, B, C.

Складываем второе и третье уравнения полученной системы и получаем

$$\begin{cases} 0=A+B \\ 5=2A-B \end{cases} \to \begin{cases} A=-B \\ 5=-3B \end{cases} \to$$

$$\to B=-\frac{5}{3};\quad A=\frac{5}{3};\quad C=A-4=\frac{5}{3}-4=\frac{5-12}{3}=-\frac{7}{3}.$$

Поэтому получаем

$$2\int\frac{Z+4}{(Z-1)(Z^2+Z+1)}dZ=2\left(\frac{5}{3}\int\frac{dZ}{Z-1}+\int\frac{-\frac{5}{3}Z-\frac{7}{3}}{Z^2+Z+1}dZ\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|Z-1|-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2Z+\frac{7}{5}\cdot 2}{Z^2+Z+1}dZ\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\int\frac{2Z+\frac{14}{5}-\frac{9}{5}+\frac{9}{5}}{Z^2+Z+1}dZ\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\int\frac{2Z+1}{Z^2+Z+1}dZ-\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{5}\right)\frac{dZ}{Z^2+Z+1}=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\int\frac{d(Z^2+Z+1)}{Z^2+Z+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dZ}{Z^2+Z+1}\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\ln|Z^2+Z+1|-\frac{3}{2}\int\frac{dZ}{\left(Z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\ln|(x+1)+\sqrt{x+1}+1|-\frac{3}{2}\int\frac{dZ}{\frac{\frac{3}{4}\left[\left(Z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\frac{3}{4}}}\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\ln|x+\sqrt{x+1}+2|-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dZ}{\left[\frac{2\left(Z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right]^2+1}\right)=$$

$=$[делаем замену переменной $\frac{2\left(Z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}=t;\ dZ=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$]

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\frac{5}{6}\ln\left|x+\sqrt{x+1}+2\right|-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\frac{5}{6}\ln\left|x+\sqrt{x+1}+2\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}t\right)+C=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\frac{5}{6}\ln\left|x+\sqrt{x+1}+2\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2Z+1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C=$$

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\frac{5}{6}\ln\left|x+\sqrt{x+1}+2\right|-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$$

Интегрирование дифференциального бинома

Интеграл от дифференциального бинома — это интеграл вида

$$\int x^m\cdot(bx^n+a)^p\,dx, \tag{5.5}$$

где $a, b \in R$, $m, n, p \in Q$.

Как показал П. А. Чебышев, интегралы вида (5.5) «берутся» лишь в следующих случаях:

1) если $p \in Z$, используется подстановка $x = y^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей n и m;

2) $\frac{1+m}{n} \in Z$, то применяется подстановка $(bx^n + a) = y^S$, где S – знаменатель дроби p;

3) если $\frac{1+m}{n} + p \in Z$, то применяется подстановка $a \cdot x^{-n} + b = y^S$, где S – знаменатель дроби p.

Приведем конкретные примеры:

Пример 5.23.

$$\int x(\sqrt{x}+3)^{10}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x}=y\\ x=y^2\\ dx=2ydy\end{bmatrix}=\int y^2(y+3)^{10}2ydy=2\int y^3(y+3)^{10}dy=$$

$$=\begin{bmatrix}u=y^3; & du=3y^2dy\\ dv=(y+3)^{10}dy; & v=\frac{(y+3)^{11}}{11}\end{bmatrix}=$$

$$=2\int\frac{y^3\cdot(y+3)^{11}}{11}-\frac{3}{11}\int y^2(y+3)^{11}dy=$$

$$=\begin{bmatrix} u=y^2; & du=2ydy \\ dv=(y+3)^{11}dy; & v=\dfrac{(y+3)^{12}}{12}\end{bmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{y^3(y+3)^{11}}{11}-\frac{3}{11}\left(\frac{y^2(y+3)^{12}}{12}-\frac{2}{12}\int y(y+3)^{12}dy\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{11}y^3(y+3)^{11}-\frac{3}{66}y^2(y+3)^{12}+\frac{1}{11}\int y(y+3)^{12}dy=$$

$$=\begin{bmatrix} u=y; & du=dy \\ dv=(y+3)^{12}dy; & v=\dfrac{(y+3)^{13}}{13}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{11}y^3(y+3)^{11}-\frac{1}{22}y^2(y+3)^{12}+$$

$$+\frac{1}{11}\left(\frac{y(y+3)^{13}}{13}-\frac{1}{13}\int(y+3)^{13}dy\right)=$$

$$=\frac{2}{11}x^{3/2}(\sqrt{x}+3)^{11}-\frac{1}{22}x(\sqrt{x}+3)^{12}+\frac{1}{143}\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^{13}-$$

$$-\frac{1}{143}\cdot\frac{(y+3)^{14}}{14}+C==\frac{2}{11}x^{3/2}(\sqrt{x}+3)^{11}-\frac{1}{22}x(\sqrt{x}+3)^{12}+$$

$$+\frac{1}{143}\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^{13}-\frac{1}{2002}\cdot(\sqrt{x}+3)^{14}+C.$$

Рассмотренный пример относится к первому случаю. Кроме этого для “взятия” интеграла мы использовали метод интегрирования по частям.

Пример 5.24.

$$\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx=\int x^5\cdot(1+x^3)^{2/3}dx.$$

В данном случае $m = 5$; $n = 3$; $p = 2/3$; $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{5+1}{3}=2.$

Поэтому имеем случай 2 и применяем подстановку

$(1 + x^3) = y^3 \to x^3 = y^3 - 1;$

$x = (y^3 - 1)^{1/3};$

$$dx = \frac{y^2 dy}{(y^3-1)^{2/3}}.$$

Следовательно, получаем

$$\int x^5(1+x^3)^{2/3}dx = \int \frac{(y^3-1)^{5/3}\cdot y^2 \cdot y^2 dy}{(y^3-1)^{2/3}} =$$

$$= \int y^4(y^3-1)dy = \int (y^7 - y^4)dy =$$

$$= \frac{y^8}{8} - \frac{y^5}{5} + C = \frac{(1+x^3)^{8/3}}{8} - \frac{(1+x^3)^{5/3}}{5} + C.$$

Пример 5.25.

$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{(2-x^3)}} = \int x^{-3}(2-x^3)^{-1/3}dx$, т. е. в данном случае имеем $m = -3; n = 3; p = -1/3$. Поэтому получаем $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-3+1}{3} - \frac{1}{3} = -1$, т. е. имеем случай 3. Используем подстановку $2 - x^3 = x^3y^3$ или $2x^{-3} - 1 = y^3$.

$$x^3 = \frac{2}{y^3+1}; \quad x = \left(\frac{2}{y^3+1}\right)^{1/3};$$

$$dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{y^3+1}\right)^{-2/3} \cdot [-2(y^3+1)^{-2}\cdot 3y^2]dy;$$

$$2 - x^3 = \frac{2y^3}{y^3+1};$$

$$(2-x^3)^{-1/3} = \left(\frac{2y^3}{y^3+1}\right)^{-1/3}.$$

Следовательно, исходный интеграл примет вид

$$\int x^{-3}(2-x^3)^{-1/3}dx =$$

$$= -\int \left(\frac{y^3+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2y^3}{y^3+1}\right)^{-1/3}\cdot\left(\frac{2}{y^3+1}\right)^{-2/3}\cdot 2y^2(y^3+1)^{-2}dy =$$

$$= -\int \frac{y^2 dy}{2y} = -\frac{1}{2}\int y dy = -\frac{y^2}{4} + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2-x^3}{x^3}\right)^{2/3} + C.$$

5.2. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла можно прийти, рассматривая различные задачи, например нахождение площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы, определение пути по заданной переменной скорости.

Найдем площадь криволинейной трапеции, т. е. фигуры, которая ограничена осью $0x$, графиком непрерывной функции $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.2). Пока будем считать, что криволинейная трапеция расположена над осью 0x, т. е. $f(x) > 0$.

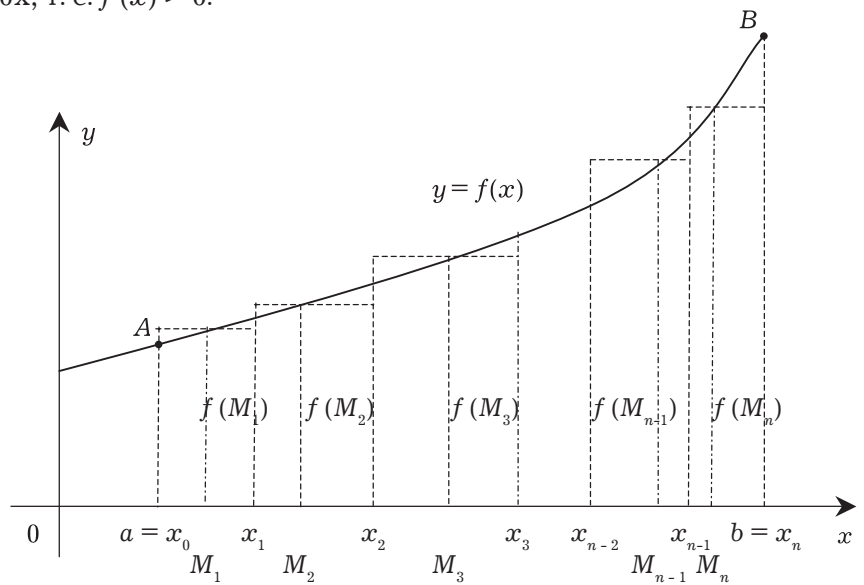


Рис. 5.2

Разделим отрезок $[a, b]$ на n частичных интервалов: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$.

В точках деления отрезка $[a,b]$ проведем прямые, параллельные оси $0y$, и разобьем криволинейную трапецию $aABb$ на n частичных трапеций. В каждом из частичных интервалов возьмем по произвольной точке $M_1, M_2,..., M_n$ (некоторые из этих точек могут совпадать с точками деления отрезка $[a, b]$).

Через точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ проведем прямые, параллельные оси $0y$ до пересечения с функцией $y = f(x)$. Отрезки этих прямых $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)$ есть ординаты графика функции $y = f(x)$. Взяв частичные интервалы за основания, построим на них n прямоугольников с высотами, равными $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)$. В результате мы получим ступенчатую фигуру, состоящую из n прямоугольников. Так как площадь любого из прямоугольников будет равна $f(M_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, то площадь ступенчатой фигуры можно найти по формуле

$$S_{\text{ступ}} = f(M_1)(x_1 - x_0) + f(M_2)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$+ f(M_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (5.6)$$

При неограниченном увеличении количество частичных интервалов ($n \to \infty$) и при стремлении длины наибольшего из них к нулю ступенчатая фигура будет неограниченно приближаться к криволинейной трапеции $aABb$, т. е. получим

$$S_{\text{кр.трап}} = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (5.7)$$

Зная площадь криволинейной трапеции, мы можем находить площади любых плоских фигур (этот вопрос мы подробнее рассмотрим ниже). К выражению вида (5.7) приводят и другие задачи (нахождение работы переменной силы, вычисление пути по заданной переменной скорости).

Теперь приведем строгое определение определенного интеграла.

Впервые для непрерывной функции оно было дано в 1823 г. французским математиком Коши, а позднее немецкий математик Риман показал, что определение Коши применимо к более широкому классу функций. Это позволило ему впервые дать в общей форме определение интеграла и определить условие его существования.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$ ($f(x)$ не обязательно положительна на $[a, b]$). Отрезок

$[a, b]$ разбивается на n частичных интервалов точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ причем $x_0 < x_1 < x_2 <...< x_n$.

Во всех частичных интервалах $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ берутся произвольно точки $M_1, M_2, ..., M_n$, находятся значения функций $y = f(x)$ в этих точках $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n)$.

Составляем сумму вида

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \qquad (5.8)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Затем находим предел интегральной суммы (5.8) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, т. е. при $\max \Delta x_i \to 0$.

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \qquad (5.9)$$

В рассмотренной нами задаче о криволинейной трапеции предел (5.9) определяет ее площадь. В общем случае он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и читается: интеграл от a до b $f(x)$ по dx. Таким образом, согласно определению, получаем:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5.10)$$

Сумма в выражении (5.8) называется n-й интегральной суммой.

Как и в неопределенном интеграле $f(x)$ — есть подынтегральное функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, переменная x — переменная интегрирования, отрезок $[a, b]$ называется интервалом интегрирования, а числа a и b нижним и верхним пределами соответственно.

Определенный интеграл есть некоторое число, а величина его зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Заметим, что площадь криволинейной трапеции — это геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла с помощью составления интегральных сумм вида

(5.8) вызывает серьезные проблемы даже в самых простых случаях, поэтому для их нахождения используют другой способ, который мы рассмотрим ниже.

Теперь приведем без доказательства теорему существования определенного интеграла.

Теорема 5.2. Если функция $f(x)$ непрерывна в отрезке $[a,b]$, то ее n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала. Этот предел, т. е. определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

не зависит ни от способа разбиение $[a, b]$ на частичные интервалы, ни от выбора в этих интервалах промежуточных точек.

Свойства определенного интеграла

1. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, k \in R.$$

3. Если переставить местами пределы интегрирования, то интеграл изменит только знак, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если интервал интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.

6. Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$ на длину интервала интегрирования, т. е.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),\ a < b,$$

где M и m — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 5.3).

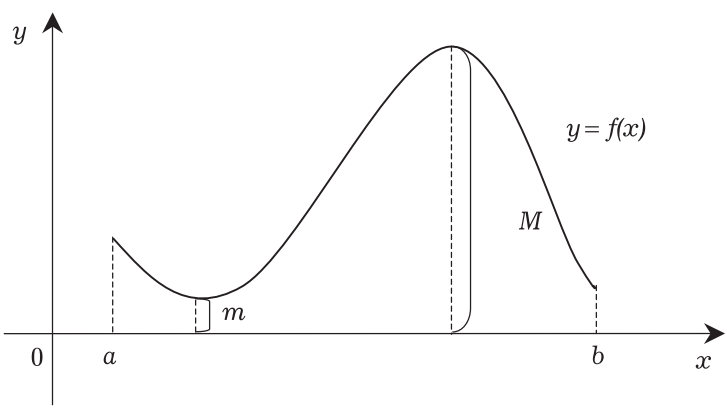


Рис. 5.3

7. Если в каждой точке x отрезка $[a, b]$ $\psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b \psi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx, a < b.$$

8. Внутри интервала интегрирования $[a, b]$ есть хотя бы одно значение $x = A$, для которого выполняется следующее равенство

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(A).$$

Формула Ньютона — Лейбница

Приведем без доказательства формулировку теоремы.

Теорема 5.3. Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{5.11}$$

Или иначе, значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной от подынтегральной функции в интервале интегрирования.

Формула (5.11) дает удобный способ вычисления определенных интегралов, если известна первообразная подынтегральной функции, т. е. необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции и подставить в нее пределы интегрирования.

Приведем конкретные примеры.

Пример 5.26.

$$\int_0^3 5e^x dx = 5\int_0^3 e^x dx = 5e^x\Big|_0^3 = 5(e^3 - e^0) = 5(e^3 - 1).$$

Пример 5.27.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right).$$

Пример 5.28.

$$\int_3^7 \frac{dx}{x+5} =$$

[Заметим, что $d(x+5) = dx$]

$$= \int_3^7 \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln\left| x+5 \right| \Big|_3^7 = \ln(7+5) - \ln(3+5) =$$

$$= \ln 12 - \ln 8 = \ln\left(\frac{12}{8}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в этом случае будет иметь вид:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (5.12)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.29.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx =$$

$$[u = \sin x; du = cosxdx; dv = \sin xdx; v = \int \sin xdx = -\cos x]$$

$$= -\sin x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx = -(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin 0 \cos 0) +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx.$$

Перенеся $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$ в левую часть равенства, окончательно получим

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 5.30.

$$\int_2^2 x\ln x\,dx = [u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x};\ dv=xdx;\ v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}] =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{x^2dx}{x}=\left(\frac{4}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1\right)-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx=$$

$$=2\ln 2-0-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=\ln 4-\frac{1}{4}(2^2-1^2)=\ln 4-\frac{3}{4}.$$

Метод замены переменной в определенном интеграле

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной проводится так же, как и при нахождении неопределенного интеграла, за исключением того, что в данном случае нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной. Но надо помнить, что, заменяя переменную под знаком интеграла, надо менять и пределы интегрирования.

Решим конкретные примеры.

Пример 5.31.

$$\int_2^4\frac{xdx}{x^2+8}=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{2xdx}{x^2+8}=$$

[Заметим, что $d(x^2+8)=2xdx$] $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4\frac{d(x^2+8)}{x^2+8}$.

Делаем замену переменной, обозначим $y=x^2+8$. Теперь необходимо поменять пределы интегрирования:

$$y\,|_{x=2}=2^2+8=12;\ \ y\,|_{x=4}=4^2+8=24;$$

и окончательно получаем:

$$\frac{1}{2}\int_2^4\frac{d(x^2+8)}{x^2+8}=\frac{1}{2}\int_{12}^{24}\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\ln|y|\Big|_{12}^{24}=\frac{1}{2}(\ln 24-\ln 12)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{24}{12}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 5.32.

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2x\sqrt{1+x^2}\,dx =$$

[Заметим, что $d(1 + x^2) = 2xdx$]

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2).$$

Теперь заменяем переменную и пределы интегрирования $t = 1 + x^2$;

$$t\,|_{x=1} = 1+1^2 = 2;\;\; t\,|_{x=2} = 1+2^2 = 5$$

и окончательно получаем:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int_2^5 y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3}\right) = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

Пример 5.33.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx =$$

[Заметим, что $d\mathrm{tg}x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2+\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)d\mathrm{tg}x.$$

Теперь делаем замену переменной и меняем пределы интегрирования $\mathrm{tg}\,x = t$; $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\mathrm{tg}0 = 0$, в результате получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2+\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)d\,\mathrm{tg}x = \int_0^1 \left(2+\sqrt{t}\right)dt = 2\int_0^1 dt + \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= 2t\,\Big|_0^1 + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

5.3. Некоторые сведения о несобственных интегралах

5.3.1. Несобственный интеграл первого рода

Распространим понятие определенного интеграла на случай бесконечного интервала интегрирования.

Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $[a, +\infty)$. Тогда можно найти интеграл от функции $f(x)$, который взят по любому интервалу $[a, b]$, где $b > a$.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ тем лучше выражает значение, которое надо принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$, чем больше b.

Пусть b неограниченно возрастает, тогда есть две возможности: или $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ имеет предел, или данный интеграл предела не имеет, а это означает, что он или стремится к бесконечности, или колеблется, т. е. не стремится ни к какому пределу.

Теперь дадим определение несобственного интеграла.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$ называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$. Это записывается следующим образом

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (5.13)$$

Если предел (5.13) существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если не существует, то расходящимся.

Если первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ известна, то можно определить, сходится несобственный интеграл или нет. Используем формулу Ньютона-Лейбница и получим:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a).$$

Поэтому если предел первообразной $F(x)$ при $x \to +\infty$ существует, то несобственный интеграл сходится, а если предел не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл в интервале $(-\infty; b)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty).$$

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $(-\infty; +\infty)$, то получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если оба интеграла в правой части последнего выражения сходятся, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а если хотя бы один из них расходится, то и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Если известна первообразная $F(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Сходящиеся несобственные интегралы имеют определенный геометрический смысл. Например, график функции $y = f(x)$ ограничивает криволинейную трапецию с бесконечным основанием (рис. 5.4).

Если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ сходится, то заштрихованная фигура имеет площадь, которая равна этому интегралу. А если интеграл расходится, то говорить о площади фигуры нельзя.

Теперь приведем конкретные примеры решения несобственных интегралов.

Пример 5.34.

Вычислим $\int_{0}^{\infty} e^{-2x} dx$.

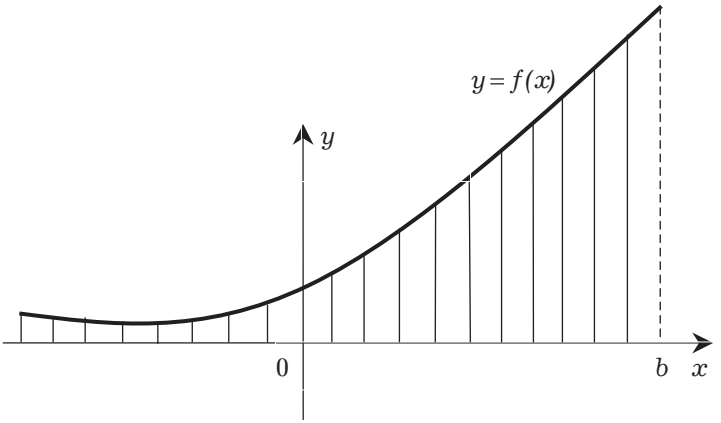


Рис. 5.4

[Делаем замену переменной $-2x = y \Rightarrow x = -\frac{y}{2} \Rightarrow dx = -\frac{dy}{2}$. Затем меняем пределы интегрирования $y(0) = 0$; $y(\infty) = -\infty$.] Тогда получим

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^{y}dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}dy = \frac{1}{2}e^{y}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}\left(e^{0} - \frac{1}{e^{\infty}}\right) = \frac{1}{2}.$$

т. е. несобственный интеграл $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$ сходится и равен $\frac{1}{2}$.

Пример 5.35.

$\int_5^{\infty}\frac{3dx}{x} = 3\int_5^{\infty}\frac{dx}{x} = 3\ln x\Big|_5^{\infty} = 3\ln(\infty) - 3\ln(5) = \infty$, т. е. данный интеграл расходится.

Пример 5.36.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}\sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{b}\sin x dx = \lim_{b\to\infty}(-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{b} =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}(\cos b - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Величина $[-\lim_{b\to\infty}(\cos b - \frac{\sqrt{2}}{2})]$ не стремится к определенному пределу при $b \to \infty$ (колеблется).

Пример 5.37.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3e^x dx = 3e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 3(e^{\infty} - \frac{1}{e^{\infty}}) = \infty,$$

т. е. данный интеграл расходится.

Часто важно знать не конкретное значение несобственного интеграла, а сходится он или расходится. Для этого используются признаки сравнения, которые мы и приводим.

1. Если для $\forall x\ (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и если $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{\infty} f(x)dx$, при этом выполняется неравенство

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Например, проверим сходится ли интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(2+e^x)}.$$

При $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x^2(2+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$.

Теперь рассмотрим, сходится ли несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = 1,$$

т. е. данный интеграл сходится. Поэтому по признаку 1 сходится $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2(2+e^x)}$, и его значения меньше 1.

2. Если для $\forall x\ (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причем $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Например, проверим сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Очевидно, что $\frac{x+5}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Теперь рассмотрим сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = 2\lim_{b\to\infty}(\sqrt{b}-1) = \infty,$$

т. е. данный интеграл расходится. Поэтому по признаку 2 расходится

$$\int_1^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^3}} dx.$$

3. Если несобственный интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$. Последний интеграл в этом случае называется абсолютно сходящимся.

В качестве примера проверим сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

На интервале $[1; \infty)$ подынтегральная функция $\frac{\sin x}{x^3}$ знакопеременная.

Видно, что $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$. Теперь рассмотрим, сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

т. е. данный интеграл сходится. Поэтому по признаку 1 сходится

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx,$$

а, следовательно, по признаку 3 сходится и интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

При использовании признаков сравнения надо иметь запас функций, несобственные интегралы от которых или сходятся, или расходятся и результат этот нам известен заранее. Эти функции мы будем использовать в качестве $\varphi(x)$.

5.3.2. Несобственный интеграл второго рода

Если на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ имеет конечное количество точек разрыва первого рода, то дать определение интеграла для такой функции легко. В этом случае искомый интеграл есть сумма определенных интегралов, взятых по частичным интервалам, на которые разбивается отрезок $[a, b]$ всеми точками разрыва функции $a < c_1 < c_2 \ldots < c_n < b$, где $c_1\ c_2 \ldots\ c_n$ точки разрыва. Тогда будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx.$$

Таким образом, мы дали определение площади криволинейной трапеции, соответствующей функции $y = f(x)$ с конечным числом точек разрыва первого рода на отрезке $[a, b]$ (рис. 5.5).

Площадь этой трапеции есть сумма площадей трапеций, опирающихся на частичные интервалы $[a_1, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ...$[c_n, b]$.

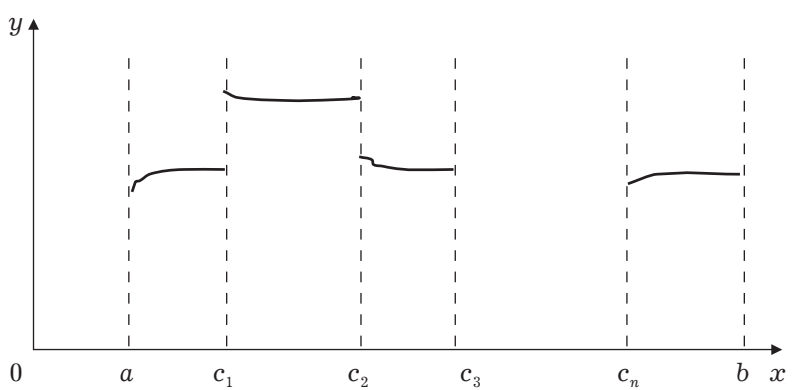


Рис. 5.5

Распространим определение интеграла на функции с бесконечными разрывами.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна для всех значений $a \le x < b$, но в точке b имеет бесконечный разрыв (рис. 5.6).

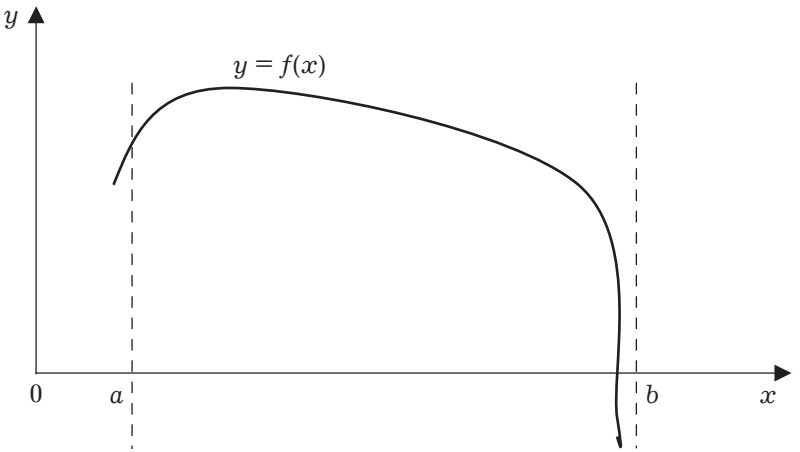


Рис. 5.6

Поэтому определение интеграла в точке b теряет свой смысл. Но если взять обычный интеграл $I = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0$, то можно считать, что функция $y = f(x)$ с уменьшением ε будет все лучше выражать ту величину, которую нужно взять в качестве интеграла от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Устремим ε к нулю, тогда I либо имеет предел, либо не имеет его (стремится к бесконечности либо не стремится ни к какому пределу, колеблется).

Определение. Несобственным интегралом от функции $y = f(x)$, непрерывной при $a \le x < b$ и неограниченной при $x \to b$, называется предел интеграла

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon \to 0.$$

Записывается это следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Если данный предел существует, то несобственный интеграл сходится, а если не существует, то расходится.

Аналогично дается определение несобственного интеграла в том случае, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в левом конце отрезка интегрирования $[a, b]$ (рис. 5.7).

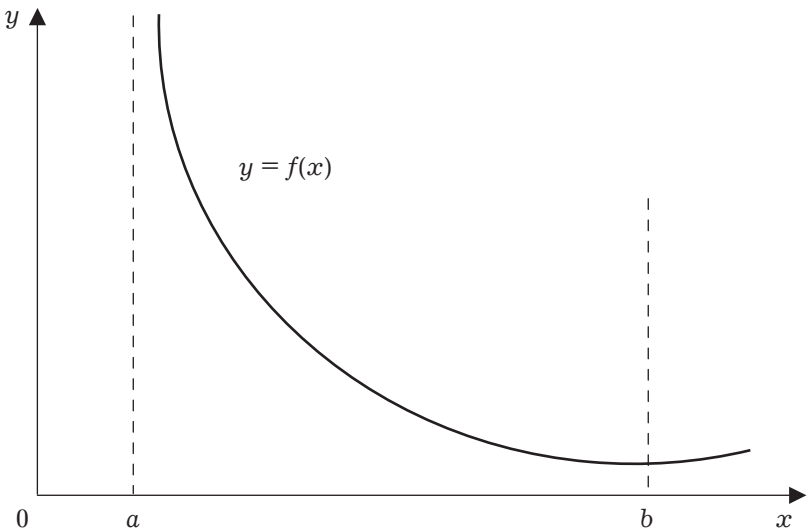


Рис. 5.7

В этом случае имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Если первообразную от функции $y = f(x)$ можно найти, то искомый интеграл в обоих рассмотренных случаях находится по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

В том случае, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в какой-то промежуточной точке $x = c$ отрезка интегрирования $[a, b]$, $a < c < b$ (рис. 5.8), то согласно определению имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

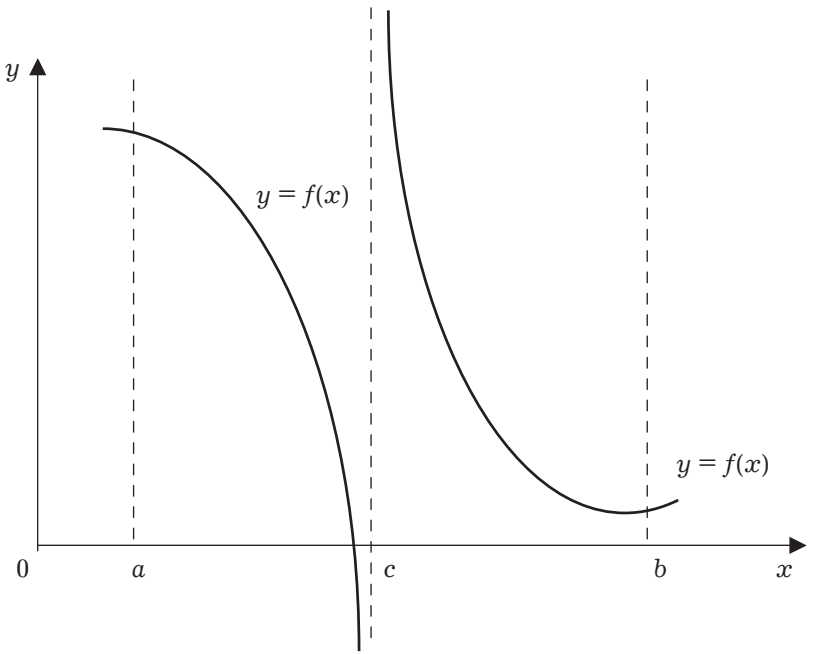


Рис. 5.8

Если оба интеграла в правой части последнего равенства сходятся, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то расходится и исходный интеграл.

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.38.

$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^4 x^{-1/2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{0+\varepsilon}^4 = 2\sqrt{4} = 4$ — интеграл сходится.

Пример 5.39.

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_0^{2-\varepsilon}\frac{d(2-x)}{2-x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln|2-x|)\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{1}{2-x}\right|\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = \infty \text{ — интеграл расходится.}$$

5.4. Некоторые приложения определенного интеграла

5.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Так как определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции, а площадь любой плоской фигуры можно представить как сумму и (или) разность площадей криволинейных трапеций, то, следовательно, определенный интеграл можно использовать для вычисления площадей плоских фигур [9, 35].

Если функция $y = f(x)$ или плоская фигура $ABCD$ находятся выше оси $0x$ (рис 5.9 и рис. 5.10), то имеем $S_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $S_2 = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$.

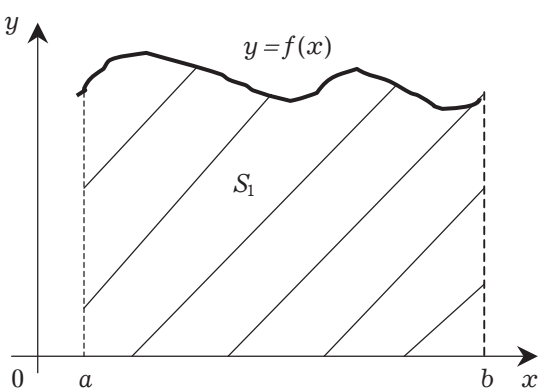


Рис. 5.9

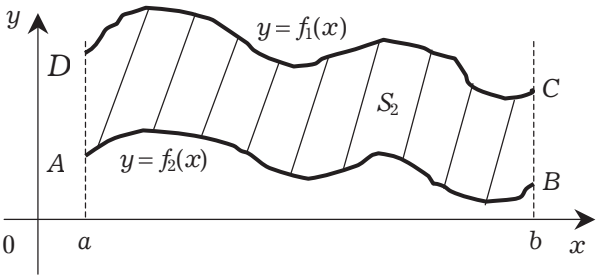


Рис. 5.10

Если функция $y = f(x)$ находится полностью или частично под осью $0x$ (рис. 5.11 и 5.12), то получаем:

$$S_3 = \left| \int_a^b f(x)dx \right|; \; S_4 = \int_a^b f(x)dx + \left| \int_b^c f(x)dx \right|.$$

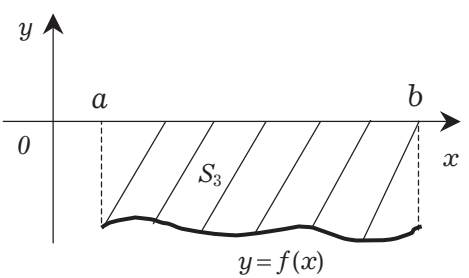


Рис. 5.11

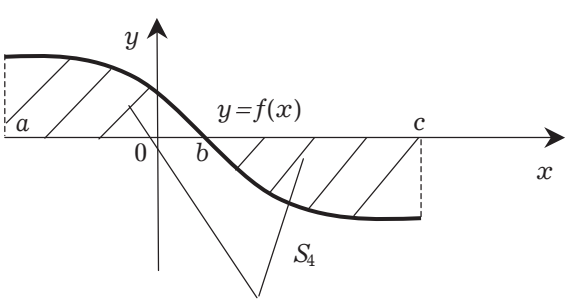


Рис. 5.12

Если функция $x = \varphi(y)$ или плоская фигура $ABCD$ прилегают к оси $0y$, то (рис. 5.13 и 5.14)

$$S_5 = \int_a^b \varphi(y)dy\,;\ S_6 = \int_a^b \left(\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\right)dy.$$

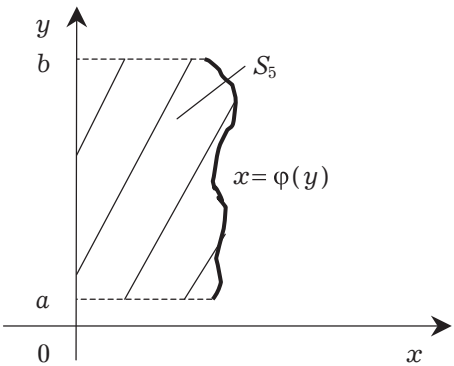


Рис. 5.13

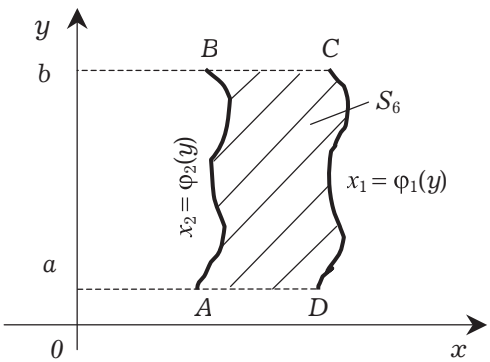


Рис. 5.14

Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующей схеме:

1) В соответствии с условиями задачи делают схематический чертеж.

2) Искомую площадь представляют как сумму и (или) разность площадей криволинейных трапеций.

3) Находят пределы интегрирования.

4) Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и искомую площадь фигуры.

Теперь рассмотрим конкретные примеры вычисления площадей плоских фигур.

Пример 5.40.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = 4 - y^2$, $x = 0$.

Сначала по условиям задачи строим схематический чертеж (рис. 5.15).

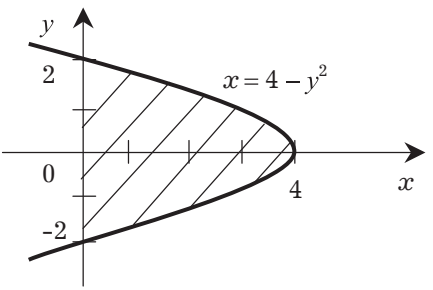


Рис. 5.15

$x = 4 - y^2$ — парабола. Найдем ее вершину $x' = -2y$. $y = 0$, $x = 4$ (max) и точки пересечения с осью $0y$. $4 - y^2 = 0$, $y = 2$, $y = -2$.

$y_1 = -2$ и $y_2 = 2$ являются пределами интегрирования.

Теперь найдем искомую площадь. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс, то можно записать.

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - y^2)\,dy = 2\int_{0}^{2}(4 - y^2)\,dy = 2\left(4y\Big|_0^2 - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2\right) =$$

$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ кв. ед.}$$

Пример 5.41.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 6x + 8;\ y = 0.$$

Построим схематический чертеж искомой фигуры (см. рис. 5.16)

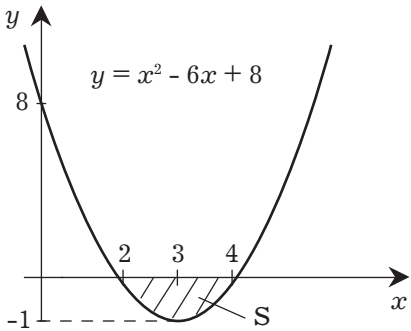


Рис. 5.16

Кривая $y = x^2 - 6x + 8$ есть парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем ее характерные точки.

$y' = 2x - 6;$

$y' = 0;$

$2x - 6 = 0;$

$x = 3, y = -1$ (min);

$x^2 - 6x + 8 = 0;$

$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4;$

$x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4;\ \ x_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ (пределы интегрирования).

Теперь находим искомую площадь (знак модуля ставится, так как фигура находится под осью $0x$).

$$S = \left| \int_2^4 \left(x^2 - 6x + 8\right) dx \right| = \left| \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^4 - 6 \left. \frac{x^2}{2} \right|_2^4 + 8x \Big|_2^4 \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right) - 3(16 - 4) + 8(4 - 2) \right| =$$

$$= \left| \frac{56}{3} - 36 + 16 \right| = \left| \frac{56}{3} - 20 \right| = \frac{4}{3} \text{ кв. ед.}$$

Пример 5.42.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

Построим схематический чертеж (рис. 5.17) и найдем пределы интегрирования:

$$\frac{6}{x} = 7 - x;\ 6 - 7x + x^2 = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

(пределы интегрирования)

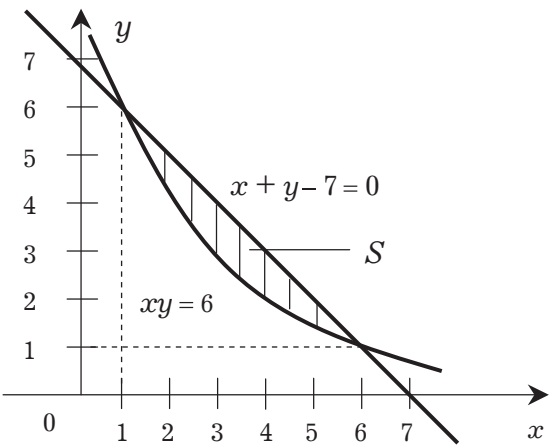


Рис. 5.17

Теперь находим искомую площадь

$$S = \int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) dx = 7x\Big|_1^6 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^6 - 6\ln|x|\Big|_1^6 =$$

$$= (42 - 7) - (18 - \frac{1}{2}) - 6(\ln 6 - \ln 1) =$$

$$= 35 - 17{,}5 - 6\ln 6 = (17{,}5 - 6\ln 6) \text{ кв. ед.}$$

5.4.2. Нахождение длины дуги кривой

Пусть в плоскости $x0y$ уравнением $y = f(x)$ задана кривая линия. Вычислим длину дуги АВ этой кривой, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.18).

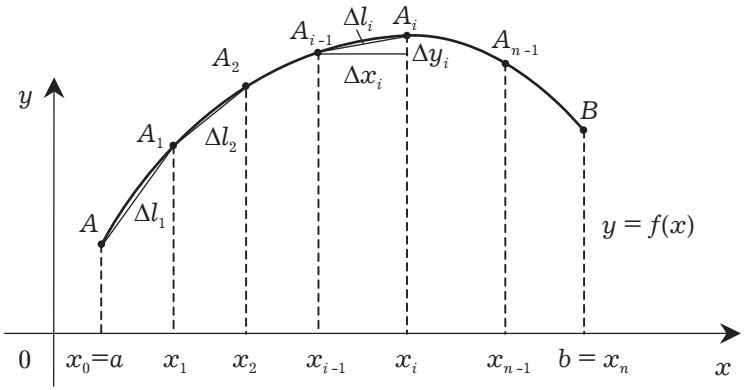


Рис. 5.18

На дуге AB возьмем точки A, A_1, A_2, ..., B с абсциссами $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $b = x_n$. Проведем хорды AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$, длины которых соответственно обозначим Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. В результате получим ломаную линию $A\ A_1\ A_2\ \ldots\ A_{n-1}\ B$, которая вписана в дугу AB. Длина этой ломаной будет равна $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$. А длиной ($l$) дуги AB называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю, т. е.

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

В курсах математического анализа доказывается (см., например, [9, 44, 45]), что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует и длина дуги АВ находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (5.14)$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.43

Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$, отсеченной осью $0x$.

Сначала построим график исходной функции и найдем a и b (рис. 5.19)

$y' = x$.

$\min x = 0; y = -\frac{3}{2}$.

Находим a и b.

$\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 0,\ x^2 = 3, \quad x = \pm\sqrt{3}$.

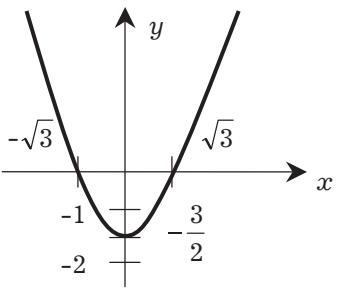


Рис. 5.19

Теперь по формуле (5.14) находим искомую длину дуги.

$l = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx =$ [Так как исходная парабола симметрична относительно оси 0y, то получаем] $= 2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Найдем $l_1 = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{l}{2}$.

Получившийся определенный интеграл можно брать несколькими способами, например, подстановкой $x = \mathrm{sh}\,y$ (где $\mathrm{sh}\,y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ — гиперболический синус) или методом интегрирования по частям, которым мы и воспользуемся. Напомним, что формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

В нашем случае имеем

$$u = \sqrt{1+x^2};\ dv = dx \Rightarrow v = x;$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Тогда получим:

$$l_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(x\sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= 2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ является табличным (см. формулу 17 таблицы интегралов раздела 5.1). Он равен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x + C = \ln\left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C.$$

В нашем случае получаем

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln\left| \sqrt{3}+2 \right|.$$

Поэтому l_1 примет вид:

$$l_1 = 2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx + \ln\left| \sqrt{3}+2 \right|.$$

Переносим $\left(-\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx \right)$ налево, и так как $2l_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx$ окончательно получаем

$$l = 2l_1 = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = 2\sqrt{3} + \ln\left| \sqrt{3}+2 \right|.$$

5.4.3. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, которое образовано вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.20).

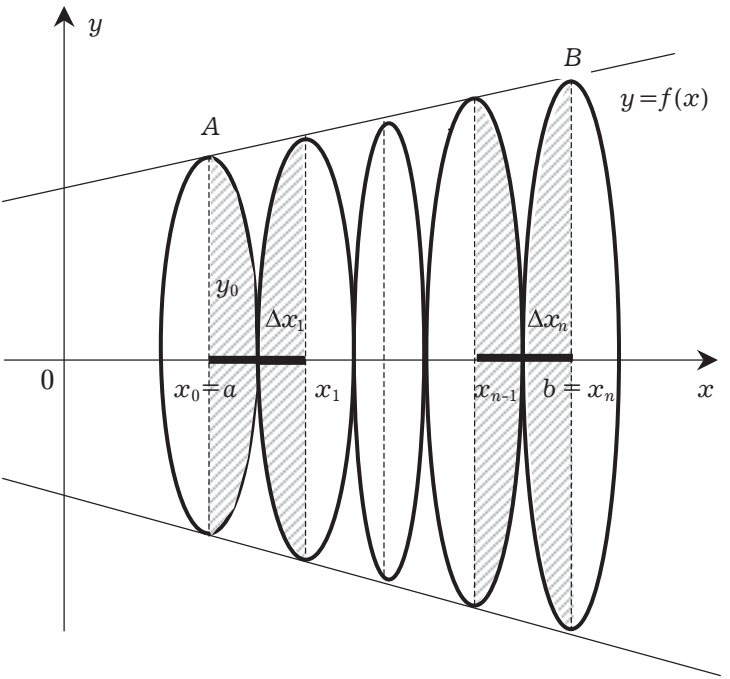


Рис. 5.20

Разобьем полученное тело на слои с помощью секущихся плоскостей, перпендикулярных к оси $0x$ и пересекающих ее в точках $x_0 = a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = b$. Каждый слой заменим прямым цилиндром. Объем каждого из этих цилиндров будет равен $V_i = \pi y^2_{i-1} \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$ [в данном случае поперечные сечения с абсциссами $x_0 = a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = b$ есть окружности].

Поэтому объем n-ступенчатого тела будет равен:

$$V_n = \pi y_0^2 \Delta x_1 + \pi y_1^2 \Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ \pi y_{n-1}^2 \Delta x_n = \pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 \Delta x_i .$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$ и при стремлении $\max \Delta x_i \to 0$ и получаем искомый объем тела вращения [9]:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (5.15)$$

В том случая, если тело образовано вращением вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции $cCDd$, ограниченной функцией $x = \varphi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 5.21), то его объем находится по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \qquad (5.16)$$

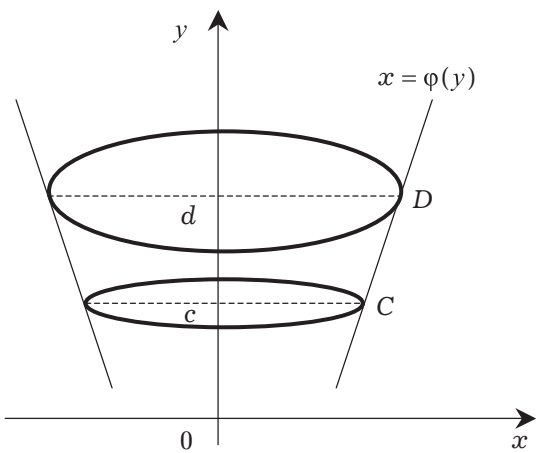


Рис. 5.21

Теперь рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.44.

Найдем объем двухосного эллипсоида вращения, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, где a и b — большая и малая полуоси соответственно (одной из моделей Земли как раз и является двухосный эллипсоид вращения, в России принят рефенц-эллипсоид с параметрами $a = 6378245$ м,

$\alpha = \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{1}{298{,}3}$). Его сечением, в плоскости $x0z$ будет эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ (рис. 5.22).

Таким образом, эллипсоид образован вращением вокруг оси 0x функции $z = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, ограниченной прямыми $x = -a$ и $x = a$, и осью $0x$.

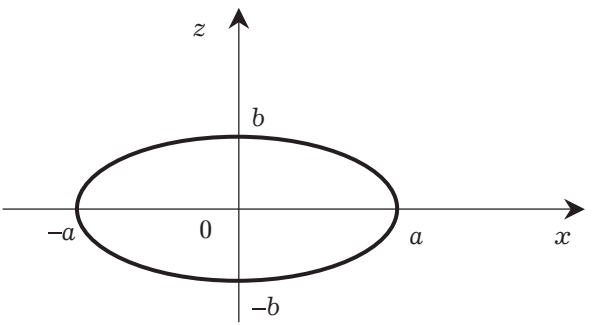


Рис. 5.22

Тогда по формуле (5.15) получаем:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= \pi b^2 \left(\int_{-a}^{a} dx - \frac{1}{a^2} \int_{-a}^{a} x^2 dx \right) = \pi\, b^2 \left(x\Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a} \right) =$$

$$= \pi b^2 \left\{ [a - (-a)] - \frac{1}{a^2} \left[\frac{a^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3} \right) \right] \right\} =$$

$$= \pi b^2 \left(2a - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} \right) = \pi b^2 \left(2a - \frac{2a}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi b^2 a.$$

5.5. Приближенное вычисление определенных интегралов

В тех случаях, когда подынтегральная функция имеет сложный вид и неясно как ее преобразовать к табличной или же первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции, применяют приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Приведем несколько способов приближенного интегрирования, исходя из определения интеграла как предела суммы.

а) Формула прямоугольников.

Пусть на $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Надо вычислить $\int_a^b f(x)dx$. Отрезок $[a, b]$ разделим точками $a = x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n = b$ на n одинаковых частей длины Δx, где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (рис. 5.23).

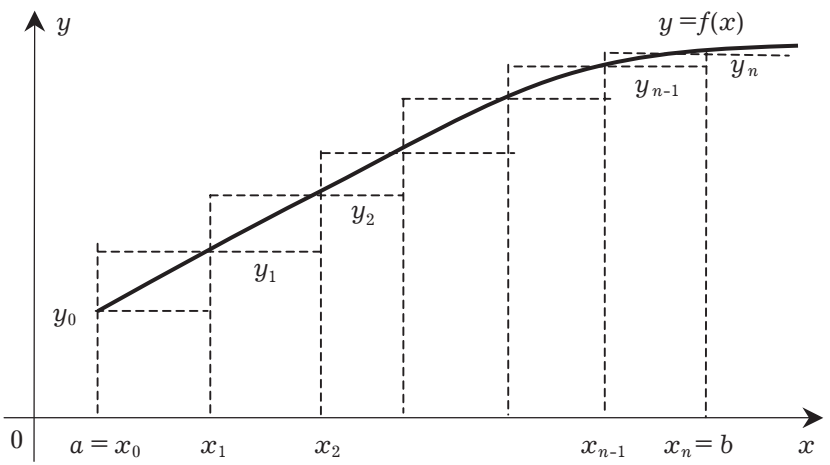


Рис. 5.23

Значения функции $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n$ обозначим через $y_0, y_1, y_2,..., y_{n-1}, y_n$.

Теперь составим две суммы:

$$S_1 = y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + ... + y_{n-1} \Delta x, \qquad (5.17)$$

где S_1 есть суммарная площадь прямоугольников, лежащих ниже $y = f(x)$;

$$S_2 = y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + ... + y_n \Delta x, \tag{5.18}$$

где S_2 есть суммарная площадь прямоугольников, лежащих выше $y = f(x)$.

Истинная площадь фигуры, ограниченная $y = f(x)$, удовлетворяет условию $S_1 < S_{ист} < S_2$.

Поэтому можно записать приближенные равенства [4, 35]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}), \tag{5.19}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n). \tag{5.20}$$

Приближенные равенства (5.19) и (5.20) и есть формулы прямоугольников. Ошибка, которую мы совершаем при вычислении интегралов по формулам (5.19) и (5.20) будет тем меньше, чем больше n. Для того чтобы определить, сколько точек деления надо взять, чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, надо использовать формулу оценки погрешности, которая получается при приближенном вычислении интеграла. Для метода прямоугольников она имеет вид:

$$|\alpha_n| \le \frac{(b-a)^2 M}{2n},$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$ [19].

Приведем конкретный пример.

Пример 5.45.

Используя метод прямоугольников, вычислим приближенно интеграл

$\int_2^6 \frac{dx}{\ln x}$, взяв $n = 10$.

Заметим, что этот интеграл относится к числу неберущихся, т. е. он не выражается в элементарных функциях.

$$y = f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad \frac{b-a}{n} = \frac{6-2}{10} = 0{,}4.$$

Используем для расчета формулу (5.19).

$$y_0 = \frac{1}{\ln 2} = 1{,}443; \quad y_1 = \frac{1}{\ln 2{,}4} = 1{,}142; \quad y_2 = \frac{1}{\ln 2{,}8} = 0{,}971;$$

$$y_3 = \frac{1}{\ln 3{,}2} = 0{,}860; \quad y_4 = \frac{1}{\ln 3{,}6} = 0{,}781; \quad y_5 = \frac{1}{\ln 4} = 0{,}721;$$

$$y_6 = \frac{1}{\ln`4{,}4} = 0{,}675; \quad y_7 = \frac{1}{\ln 4{,}8} = 0{,}638; \quad y_8 = \frac{1}{\ln 5{,}2} = 0{,}607;$$

$$y_9 = \frac{1}{\ln 5{,}6} = 0{,}581.$$

Теперь по формуле (5.19) имеем:

$$S_1 = \int_2^6 \frac{dx}{\ln x} \approx 0{,}4(1{,}443 + 1{,}142 + 0{,}971 + 0{,}860 + 0{,}781 +$$
$$+ 0{,}721 + 0{,}675 + 0{,}638 + 0{,}607 + 0{,}581) \approx 3{,}368.$$

б) Формула трапеций.

Более точное значение определенного интеграла, чем по (5.19) и (5.20), получим, заменив исходную функцию $y = f(x)$ ломаной линией (рис. 5.24).

То есть площадь криволинейной трапеции $aABb$ заменим площадью фигуры, состоящей из прямоугольных трапеций: aAA_1x_1, $x_1A_1A_2x_2$, ..., $x_{n-1}A_{n-1}Bb$. Их площади будут равны: $\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x$; $\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$; ... ; $\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x$. Поэтому определенный интеграл приближенно будут равен:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x\right),$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2}\Delta x + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (5.21)$$

Выражение (5.21) носит название формулы трапеций.

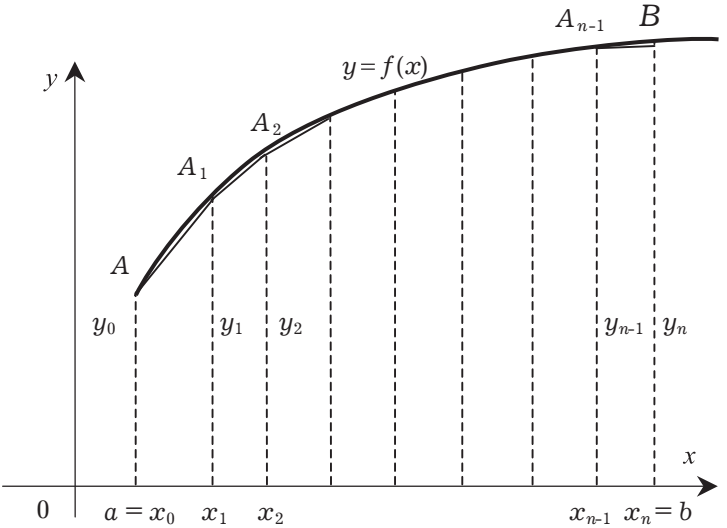


Рис. 5.24

Формула оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла, в этом случае имеет вид [19]:

$$\left|\alpha_n\right| \le \frac{(b-a)^3 M_1}{12n^2},$$

где $M_1 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$.

Приведем конкретный пример вычисления определенного интеграла по формуле (5.21).

Пример 5.46.

Используя метод трапеции приближенно вычислим интеграл $\int\limits_1^4 \frac{e^x}{x} dx$, приняв $n = 10$. Этот интеграл, как и интеграл предыдущего примера, является неберущимся. В данном случае $y = f(x) = \frac{e^x}{x}$; $\frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{10} = 0{,}3$.

$$y_0 = \frac{e^1}{1} = e \approx 2{,}718;\ y_1 = \frac{e^{1{,}3}}{1{,}3} \approx 2{,}823;\ y_2 = \frac{e^{1{,}6}}{1{,}6} \approx 3{,}096;$$

$$y_3 = \frac{e^{1,9}}{1,9} \approx 3,519;\ y_4 = \frac{e^{2,2}}{2,2} \approx 4,102;\ y_5 = \frac{e^{2,5}}{2,5} \approx 4,873;$$

$$y_6 = \frac{e^{2,8}}{2,8} \approx 5,873;\ y_7 = \frac{e^{3,1}}{3,1} \approx 7,161;\ y_8 = \frac{e^{3,4}}{3,4} \approx 8,813;$$

$$y_9 = \frac{e^{3,7}}{3,7} \approx 10,932;\ y_{10} = \frac{e^4}{4} \approx 13,650.$$

Теперь по формуле (5.21) получаем

$$\int_1^4 \frac{e^x}{x} dx \approx 0,3\left(\frac{2,718 + 13,650}{2} + 2,823 + \cdots + 10,932\right) \approx 17,813.$$

в) Формула парабол (формула Симпсона).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разделим $[a, b]$ на четное число частей $n = 2m$. Сущность способа заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси $0y$ (рис. 5.25).

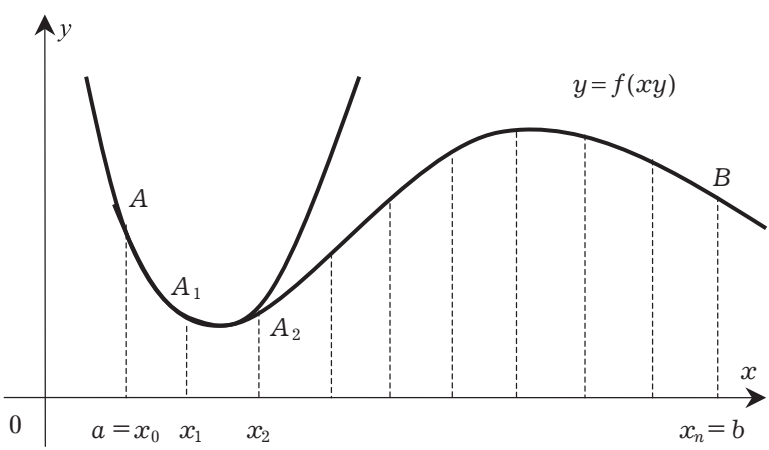


Рис. 5.25

Уравнения таких парабол имеет вид $y = cx^2 + dx + p$. Коэффициенты c, d, p можно однозначно найти по трем точкам, если абсциссы их различны. Дуги парабол проводят через каждую

тройку точек. Криволинейную трапецию $aABb$ заменяют суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол. Площадь первой из таких параболических трапеций равна

$$S_1 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right),$$

площадь второй равна: $S_2 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$.

Площадь n-й равна: $S_n = \frac{\Delta x}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$

Искомая формула Симпсона имеет вид [4, 35]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \cdots y_{n-2}) + \right.$$

$$\left. + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (5.22)$$

Формула оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла, в этом случае имеет вид [19]:

$$\left|\alpha_n\right| \le \frac{(b-a)^5 M_2}{180(2n)^4},$$

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b}\left| f^{(4)}(x)\right|$.

Применение формулы (5.22) значительно повышает точность вычисления определенного интеграла. Метод прямоугольников является наиболее простым и наименее точным способом. Выбор способа приближенного интегрирования зависит от подынтегральной функции и требуемой точности расчета.

Приведем конкретный пример вычисления определенного интеграла по формуле (5.22).

Пример 5.47.

Используя формулу Симпсона приближенно вычислим интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$, приняв $n = 10$. Заметим, что этот интеграл, как и интегралы из двух предшествующих примеров, является неберущимся. В данном случае $y = f(x) = \frac{\cos x}{x}$;

$$\frac{b-a}{3n}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{30}=\frac{\pi}{120};\ \frac{b-a}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{10}=\frac{\pi}{40};$$

$$y_0=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}9003;\ y_1=\frac{\cos\frac{11\pi}{40}}{\frac{11\pi}{40}}\approx 0{,}752;\ y_2=\frac{\cos\frac{12\pi}{40}}{\frac{12\pi}{40}}\approx 0{,}624;$$

$$y_3=\frac{\cos\frac{13\pi}{40}}{\frac{13\pi}{40}}\approx 0{,}512;\ y_4=\frac{\cos\frac{14\pi}{40}}{\frac{14\pi}{40}}\approx 0{,}413;\ y_5=\frac{\cos\frac{15\pi}{40}}{\frac{15\pi}{40}}\approx 0{,}325;$$

$$y_6=\frac{\cos\frac{16\pi}{40}}{\frac{16\pi}{40}}\approx 0{,}246;\ y_7=\frac{\cos\frac{17\pi}{40}}{\frac{17\pi}{40}}\approx 0{,}175;\ y_8=\frac{\cos\frac{18\pi}{40}}{\frac{18\pi}{40}}\approx 0{,}111;$$

$$y_9=\frac{\cos\frac{19\pi}{40}}{\frac{19\pi}{40}}\approx 0{,}053;\ y_{10}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=0.$$

По формуле (5.22) получим:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx\approx\frac{\pi}{120}[0{,}9003+0+2(0{,}624+0{,}413+0{,}246+0{,}111)+$$

$$+4(0{,}752+0{,}512+0{,}325+0{,}175+0{,}053)]\approx 0{,}287.$$

5.6. Понятие о двойном интеграле

Понятие двойного интеграла является расширением понятия определенного интеграла на случай двух аргументов.

На плоскости $x0y$ рассмотрим замкнутую область B (область B называется замкнутой, если она ограничена линией и точки, которые лежат на границе, считаются принадлежащими области B), ограниченную линией L. В этой области зада-

дим непрерывную функцию $z = f(x, y)$. Область B произвольно разобьем на n частей (площадок): $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$. Площади этих частей (площадок) обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. В каждой площадке $b_i (i = \overline{1, n})$ возьмем произвольную точку M_i (эта точка может лежать и на границе площадки). Таким образом, будем иметь n точек: $M_1, M_2, ..., M_n$ (рис. 5.26).

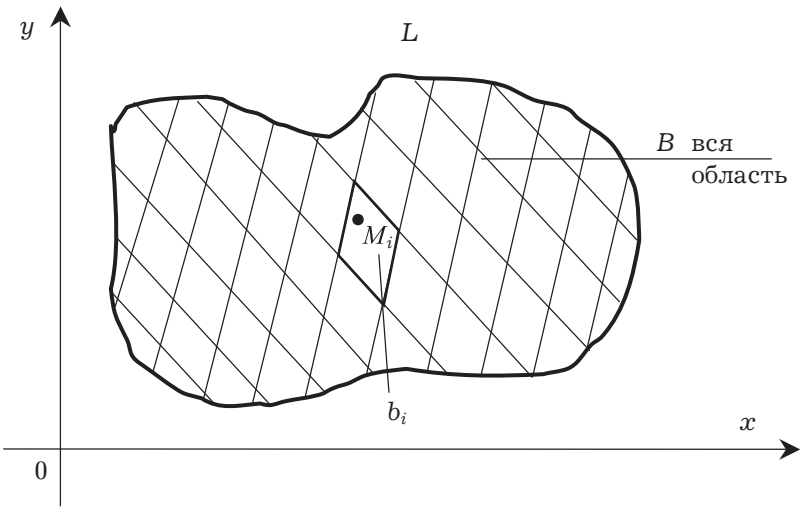


Рис. 5.26

Через $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n)$ обозначим значения функции $z = f(x, y)$ в выбранных нами точках. Затем составим сумму произведений $f(M_i)\Delta S_i$, которую обозначим V_s:

$$V_s = f(M_1)\Delta S_1 + f(M_2)\Delta S_2 + \cdots + f(M_n)\Delta S_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i. \qquad (5.23)$$

Сумма (5.23) называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ в области B [44].

В случае, если $z = f(x, y) \geq 0$ в области B каждое слагаемое $f(M_i)\Delta S_i$ есть объем цилиндра, площадь основания которого ΔS_i, а высота $f(M_i)$. А сумма V_s представляет собой объем некоторого ступенчатого тела (рис. 5.27).

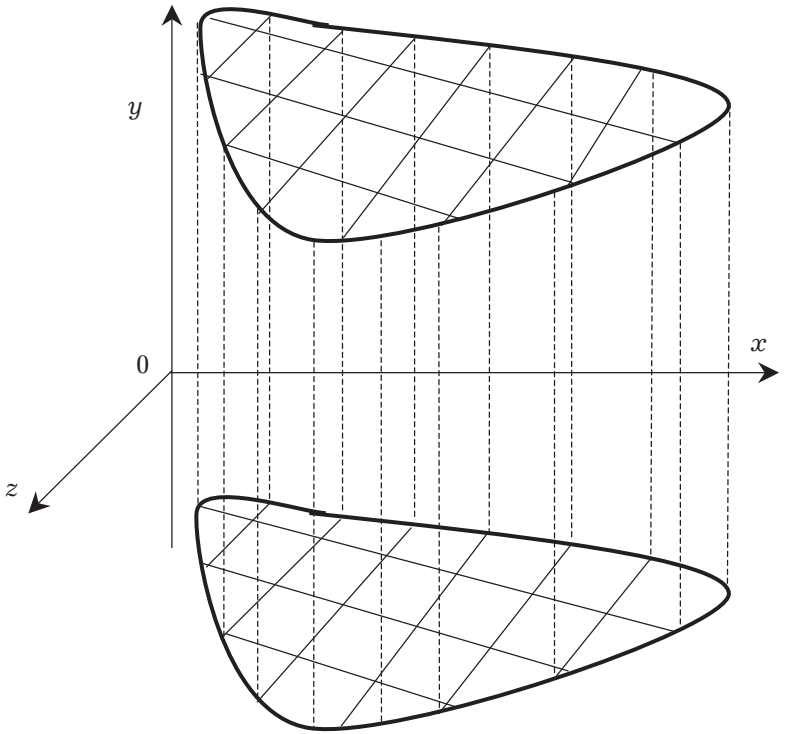


Рис. 5.27

Теперь рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, которые составлены с использованием функции $z = f(x, y)$ для области B:

$$V_{s_1}, V_{s_2}, \ldots, V_{s_k} \tag{5.24}$$

при различных способах разбиении области B на площадки b_i. Потребуем, чтобы максимальный диаметр площадок b_i стремился к нулю ($\max \operatorname{diam} b_i \to 0$) при стремлении к бесконечности количества этих площадок ($n_k \to \infty$). Тогда будет справедлива следующая теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема 5.4. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области B, то существует предел последовательнос-

ти (5.24) интегральных сумм (5.23), если максимальный диаметр площадок $b_i \to 0$, а $n \to \infty$. Этот предел будет одинаков для любой последовательности вида (5.24), т. е. он не зависит ни от способа разделения области B на площадки b_i, ни от выбора в этих площадках точек M_i. Этот предел называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области B и обозначается

$$\iint_B f(x)ds = \iint_B f(xy)dxdy,$$

т. е.

$$\lim_{\max \operatorname{diam} b_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \iint_B f(xy)dxdy.$$

Область B называется областью интегрирования.

Если $z = f(x, y) \geq 0$, двойной интеграл от этой функции по области B равен объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $x0y$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $0z$, а направляющей служит линия L.

Свойства двойного интеграла

1. Если область B разбить на две части B_1 и B_2, то

$$\iint_B f(xy)dxdy = \iint_{B_1} f(xy)dxdy + \iint_{B_2} f(xy)dxdy.$$

Аналогично при разбиении области B на число частей больше двух.

2. Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т. е.

$$\iint_B [f_1(xy) \pm f_2(xy) \pm \cdots \pm f_n(xy)]\,dxdy =$$

$$= \iint_B f_1(xy)dxdy \pm \iint_B f_2(xy)dxdy \pm \cdots \pm \iint_B f_n(xy)dxdy.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т. е.

$$\iint\limits_B cf(xy)\,dxdy = c\iint\limits_B f(xy)\,dxdy,$$

где c — постоянная величина.

Вычисление двойного интеграла

1. Простейший случай.

Область B задана неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, т. е. она является прямоугольником $ADBC$ (рис. 5.28).

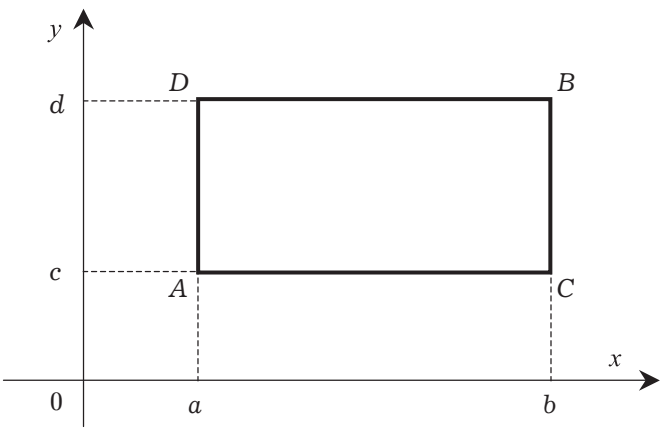


Рис. 5.28

В этом случаи двойной интеграл вычисляется по одной из приводимых ниже формул:

$$\iint\limits_B f(xy)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(xy)\,dx; \tag{5.25}$$

$$\iint\limits_B f(xy)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(xy)\,dy. \tag{5.26}$$

В правых частях формул (5.25) и (5.26) стоят повторные интегралы.

При вычислении по формуле (5.25) сначала находится определенный интеграл $\int\limits_a^b f(xy)dx$, причем y рассматривается как

постоянная, но результат интегрирования рассматривается как функция от y. Второе интегрирование в пределах от c до d выполняется по аргументу y. При использовании формулы (5.26) порядок действий обратный.

Двойной интеграл $\iint\limits_{(ADBC)} f(xy)dxdy$ есть объем призматического тела с основанием $ADBC$. Заметим, что внешние знаки интеграла соответствуют внешним дифференциалам.

Рассмотрим конкретные примеры.

Вычислить интегралы:

Пример 5.48.

$$\int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dy\int_1^2 (x^2+y^2)dx = \int_0^1 dy\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_0^1 dy\left[\frac{8}{3}+2y^2-\frac{1}{3}-y^2\right] = \frac{8}{3}\int_0^1 dy + 2\int_0^1 y^2dy - \frac{1}{3}\int_0^1 dy - \int_0^1 y^2dy =$$

$$= \frac{8}{3}y\Big|_0^1 + \frac{2y^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{3}y\Big|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

Пример 5.49.

$$\int_3^4\int_1^2 \frac{dydx}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx\int_1^2 \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_3^4 dx\left[-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right] = \int_3^4 dx\left(\frac{1}{(x+2)(x+1)}\right) = \int_3^4 \frac{dx}{(x+2)(x+1)} =$$

$$\left[\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)};\right.$$

$1 = Ax + A + Bx + 2B,\ 0 = A + B,\ 1 = A + 2B, B = 1, A = -1]$, получаем

$$= \int_3^4 dx\left[\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}\right] = \int_3^4 dx\left[\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right] = -\int_3^4 \frac{dx}{x+2} + \int_3^4 \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\ln|x+2|\Big|_3^4 + \ln|x+1|\Big|_3^4 = -\ln 6 + \ln 5 + \ln 5 - \ln 4 = \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

2. Общий случай.

а) Если контур области B встречается с любой пересекающей его вертикальной прямой не более чем в двух точках (т. N_1 и т. N_2 на рис. 5.29), то область B задается неравенствами $a \le x \le b$ и $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$,

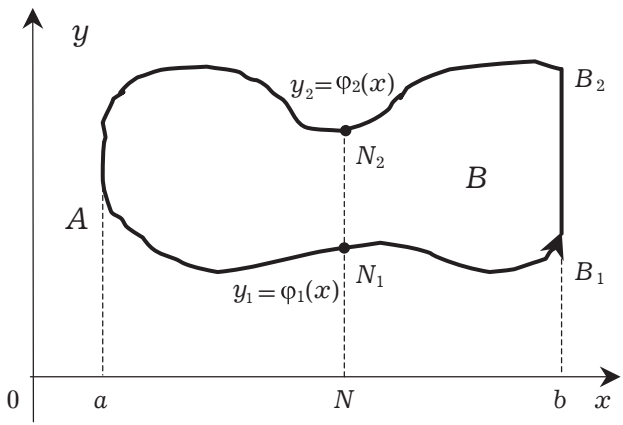


Рис. 5.29

где a и b — крайние абсциссы области B;

$\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — функции, выражающие ординаты нижней и верхней граничных линий AN_1B_1 и AN_2B_2.

В этом случае двойной интеграл находится по формуле [9, 44]:

$$\iint\limits_B f(xy)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(xy)dy. \qquad (5.27)$$

б) Если контур области B встречается не более чем в двух точках с любой пересекающей его горизонтальной прямой, то аналогично случаю а) получаем (рис. 5.30).

$$\iint\limits_B f(xy)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(xy)\,dx. \qquad (5.28)$$

Если контур области В не подходит ни под случай а), ни под случай б), то ее разбивают на несколько частей так, чтобы к каждой части были применимы или формула (5.27) или (5.28).

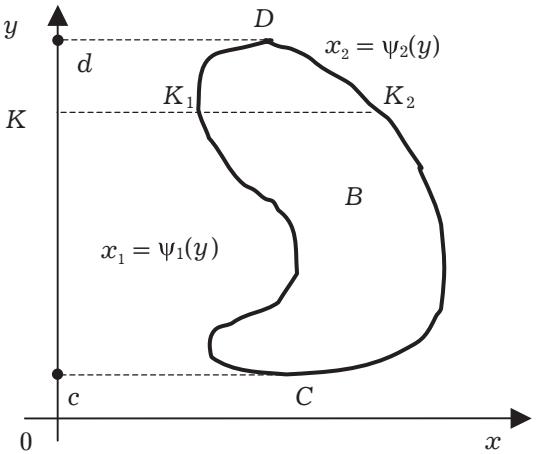


Рис. 5.30

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.50.

Вычислим интеграл $\iint\limits_B (2y^2 + 3x)\,dxdy$, если область B ограничена линиями $y = x^2$, $y^2 = x$ (рис. 5.31). Данная задача подходит под случаи а) и б).

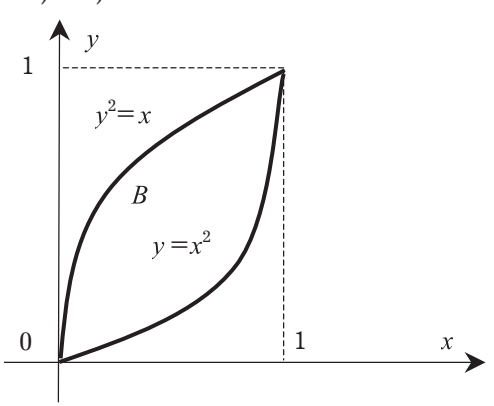


Рис. 5.31

Используем, например, формулу (5.27) (случай а). В данном случае $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$. Поэтому получим:

$$\iint\limits_B (2y^2+3x)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (2y^2+3x)dy = \int\limits_0^1 dx \left(\frac{2}{3}y^3+3xy\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}x^6+3x^3\right)\right] = \int\limits_0^1 \left(\frac{11}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^6-3x^3\right)dx =$$

$$= \frac{11}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1 - \frac{3x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{22}{15}-\frac{2}{21}-\frac{3}{4} \approx$$

$$\approx 1{,}47 - 0{,}09 - 0{,}75 = 0{,}63.$$

Пример 5.51.

Вычислить двойной интеграл $\iint (x+2y)dxdy$, если область B ограничена следующими линиями: $y = x^2$ и $x + y - 2 = 0$.

Строим область интегрирования B (рис. 5.32).

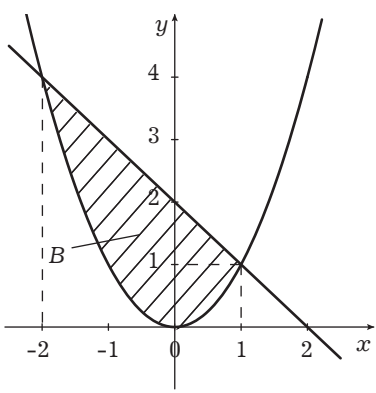


Рис. 5.32

Используя формулу (5.27) получаем:

$$\iint\limits_B (x+2y)dxdy = \int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} (x+2y)dy = \int\limits_{-2}^1 dx[xy+y^2]\Big|_{x^2}^{2-x} =$$

$$= \int\limits_{-2}^1 dx[(2x-x^2+4-4x+x^2)-(x^3+x^4)] = \int\limits_{-2}^1 (4-2x-x^3-x^4)dx =$$

$$=(4x-x^2-x^4/4-x^5/5)\Big|_{-2}^{1}=$$
$$=(4-1-1/4-1/5)-(-8-4-4+32/5)=$$
$$=51/20+48/5=(51+192)/20=243/20=12{,}15.$$

Пример 5.52.

Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_{x^2/9}^{x} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_{x^2/9}^{1} f(x,y)dy.$$

Из исходных данных следует, что область интегрирования B ограничена линиями $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = x^2/9$, $y = x$, $y = 1$. Построим область интегрирования B (рис. 5.33).

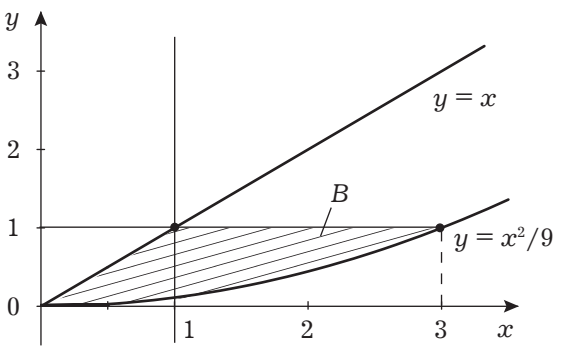


Рис. 5.33

Область интегрирования B является правильной в направлении параллельном направлению оси $0X$, поэтому в соответствии с формулой (5.28) получаем

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{9y}} f(x_i y)dy.$$

Замена переменной в двойном интеграле

К замене переменной прибегают для того, чтобы упростить нахождение двойного интеграла. Предположим, что аргументы x и y функции $z = f(x_i y)$ связаны с переменными U и Vследующими соотношениями: $x = \varphi(U, V)$, $y = \psi(U, V)$, т. е. $z = (\varphi(U, V)$,

$\psi(U, V)$. Кроме этого $\varphi(U, V)$ и $\psi(U, V)$ — непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область B плоскости $0XУ$ в область B' плоскости $0'UV$. При этом определитель Якоби (якобиан) сохраняет постоянный знак в области B.

$$I(U,V)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U} & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U} & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix}. \qquad (5.29)$$

В этом случае верна следующая формула замены переменных в двойном интеграле, которую мы приводим без доказательства:

$$\iint\limits_{B} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{B'} f(\varphi(U,V),\psi(U,V))\cdot|I(U,V)|\cdot dUdV. \qquad (5.30)$$

Пределы в двойном интеграле по области B' расставляются таким же образом, как и в двойном интеграле по области B с учетом геометрии этой области. Рассмотрим отдельно частный случай замены переменных, часто применяемый при вычислении двойного интеграла, а именно переход от декартовых прямоугольных координат (x, y) к полярным координатам (r, φ). Напомним, что прямоугольные и полярные координаты связаны между собой следующими формулами: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Находим якобиан этого преобразования:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=r\cos\varphi$$

Теперь используя формулу (5.29), получаем:

$$I(U,V)=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r.$$

Следовательно, формула перехода от декартовых координат к полярным имеет вид:

$$\iint\limits_{B} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{B'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi, \qquad (5.31)$$

где B' — область в полярной системе координат, соответствующая области B в прямоугольной системе координат.

На практике переход к полярной системе координат осуществляют по формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$. Уравнение линий, ограничивающих область B также преобразуют к полярным координатам. Преобразование области B в область B' не проводят, а совмещая полярную и прямоугольную системы координат находят пределы интегрирования по r и φ. Заметим, что переход от двойных интегралов к повторным в правой части формулы (5.31) приводит к разным пределам в зависимости от того, где находится полюс полярной системы координат. Если полюс (т. 0) полярной системы координат находится вне области B, которая ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha > \beta$) и функциями $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) < r_2(\varphi)$) (рис. 5.34), то двойной интеграл в полярных координатах приводится к повторному по следующей формуле:

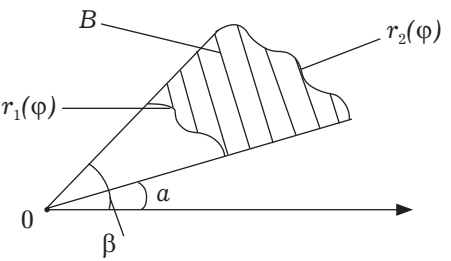


Рис. 5.34

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (5.32)$$

В том случае если полюс (т. 0) находится внутри области B (рис. 5.35) и уравнение границы области в полярной системе координат имеет вид $r(\varphi)$, то в формуле (5.32) $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $r_1(\varphi) = 0$, $r_2(\varphi) = r(\varphi)$ и формула 5.32 принимает вид:

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \int\limits_0^\beta d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (5.33)$$

Когда полюс (т. 0) находится на границе области B и уравнение этой границы в полярной системе координат имеет вид $r(\varphi)$, то в формуле (5.32) $r_1(\varphi) = 0$, $r_2(\varphi) = r(\varphi)$, а углы α и β могут принимать различные значения (рис. 5.36).

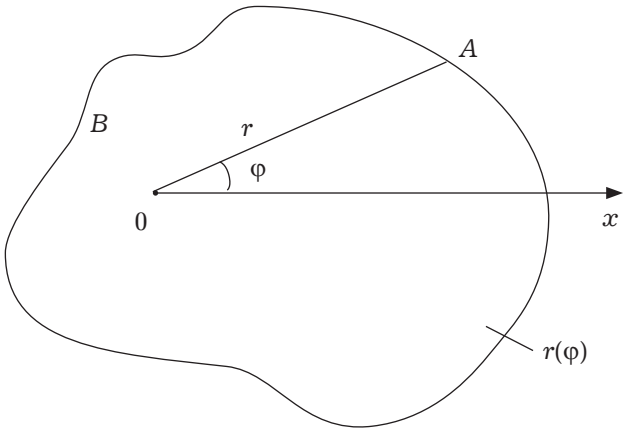


Рис. 5.35

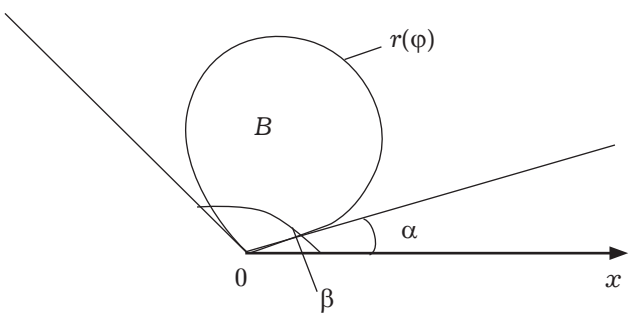


Рис. 5.36

Заметим, что переход к полярным координатам часто используется в том случае, если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$, а область интегрирования B есть круг, кольцо или их части.

В ряде случаев, например, когда область интегрирования B — эллипс или его часть, используют переход от прямоугольных к обобщенным полярным координатам. Связь между этими системами координат осуществляется по формулам: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a \in R$, $b \in R$. Якобиан данного преобразования (см. (5.29)) будет иметь вид:

$$I(U,V)=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix}=abr.$$

Следовательно, искомая формула перехода такова:

$$\iint\limits_{B} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{B'} f(\alpha r\cos\varphi, br\sin\varphi)abrdrd\varphi. \qquad (5.34)$$

B' — область в обобщенной полярной системе координат, соответствующая области B.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 5.53.

Вычислить двойной интеграл $\iint(2x+y)dxdy$, если область B ограничена линиями: $y = 2x - 3$, $y = 2x + 5$, $y = -x + 7$, $y = -x - 1$. Данная область в декартовой системе координат будет иметь вид (рис. 5.37).

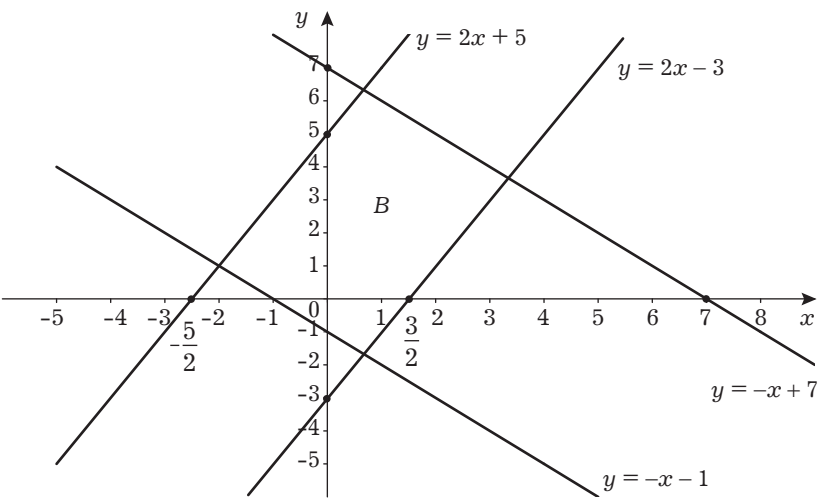


Рис. 5.37

Область интегрирования B данного примера не является правильной ни по направлению оси $0X$, ни по направлению оси $0Y$. Поэтому для того, чтобы облегчить «взятие» исходного интеграла, сделаем замену переменной.

Положим: $U = y - 2x$;
$V = y + x$.

Тогда получим: $U = -3$; $U = 5$;
$V = 7$; $V = -1$.

Область B в системе координат $0XY$ перейдет в область B' в системе координат $0'UV$ (рис. 5.38). Из рис. 5.38 видно, что область B' является простейшей, поэтому для вычисления двойного интеграла по этой области можно использовать или формулу (5.25) или формулу (5.26).

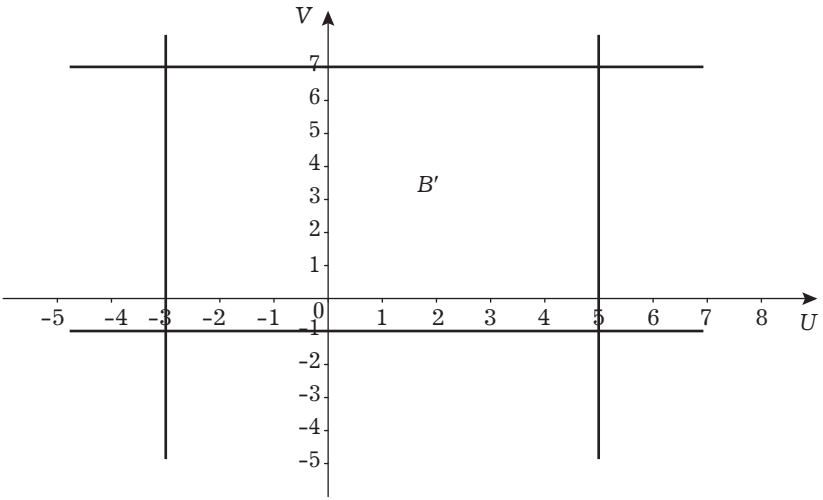


Рис. 5.38

Выражаем x и y через U и V.

Получаем $x = -U/3+V/3$;
$y = U/3 + 2/3 \cdot V$.

Находим якобиан преобразования по формуле (5.29):

$$I(U,V) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

Следовательно, исходный двойной интеграл будет равен:

$$\iint_B (2x+y)dxdy = \iint_{B'}\left(-\frac{2}{3}U+\frac{2}{3}V+\frac{U}{3}+\frac{2}{3}V\right)\cdot\frac{1}{3}dUdV =$$

$$= \iint_{B'}\left(-\frac{1}{3}U+\frac{4}{3}V\right)\frac{1}{3}dUdV = \frac{1}{9}\iint_{B'}(4V-U)dUdV =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{7}dV\int_{-3}^{5}(4V-U)dU = \frac{1}{9}\int_{-1}^{7}dV\left(4VU-\frac{U^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{5} =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{7}\left[\left(20V-\frac{25}{2}\right)-\left(-12V-\frac{9}{2}\right)\right]dV = \frac{1}{9}\int_{-1}^{7}(32V-8)dV =$$

$$= \frac{1}{9}(16V^2-8V)\Big|_{-1}^{7} = \frac{1}{9}\cdot(728-24) = \frac{704}{9}.$$

Пример 5.54.

Вычислить двойной интеграл $\iint_B \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$, если область B интегрирования ограничена линией $x^2 + y^2 \le 25$.

Так как область интегрирования представляет собой окружность (рис. 5.39),то для вычисления исходного интеграла гораздо рациональнее перейти к полярной системе координат. Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $I(U, V) = rA$. Исходный двойной интеграл будет равен:

$$\iint_B \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy = \iint_B \sqrt{(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^3}\,rdrd\varphi =$$

$$= \iint_B \sqrt{r^6}\,rdrd\varphi = \iint_B r^4drd\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^5 r^4dr = \int_0^{2\pi}d\varphi(r^5/5)\Big|_0^5 =$$

$$= 625\int_0^{2\pi}d\varphi = 625\varphi\Big|_0^2 = 1250\pi.$$

Если не переходить к полярным координатам, а воспользоваться формулой (5.27),то будем иметь:

$$\iint_B \sqrt{(x^2+y^2)^3\,dxdy} = \int_{-5}^{5}dx\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dy.$$

Видно, что полученный интеграл будет решаться значительно дольше, а замена переменной сильно упрощает процесс решения.

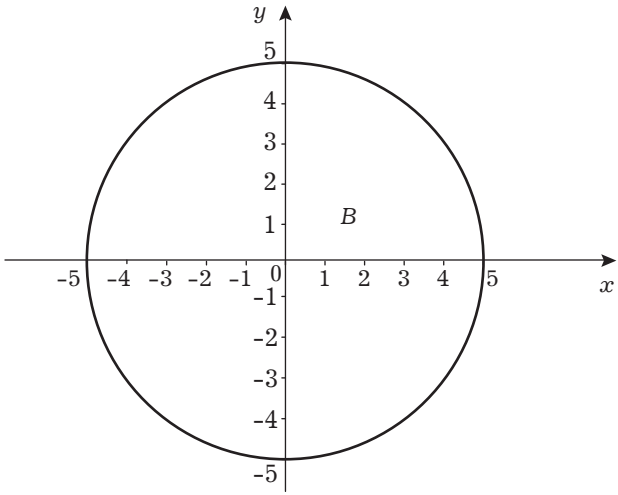


Рис. 5.39

Пример 5.55.

Вычислить двойной интеграл $\iint x^2 y dx dy$, если область B ограничена линией: $x^2/4 + y^2/9 \le 1$.

Область В представляет собой эллипс (рис. 5.40). Для того чтобы упростить решение исходного двойного интеграла, гораздо рациональнее перейти к обобщенной полярной системе координат.

Получим $x = 2r \cdot \cos\varphi$ $(a = 2)$, $y = 3r \cdot \sin\varphi$ $(b = 3)$, $I(U, V) = 6r$, $dxdy = 6rdrd\varphi$. Получим уравнение эллипса в обобщенных полярных координатах:

$$\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} + \frac{9r^2\sin^2\varphi}{9} = 1.$$

$r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = 1.$

$r = 1.$

Следовательно r будет меняться от 0 до 1, а φ от 0 до 2π. Исходный двойной интеграл будет равен:

$$\iint\limits_B x^2 y dx dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 4r^2\cos^2\varphi \cdot 3r\sin\varphi \cdot 6rdr =$$

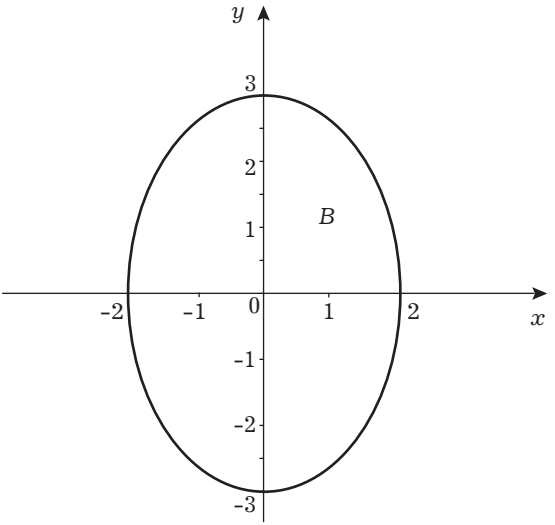


Рис. 5.40

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 72\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot r^4 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi (72\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot r^5/5)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{72}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi = -\frac{72}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot d\cos\varphi = -\frac{72}{5}\cdot \cos^3\varphi/3\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Некоторые приложения двойного интеграла

Мы уже говорили о том, что геометрический смысл двойного интеграла — это объем цилиндрического тела. Поэтому будет верна следующая формула:

$$V = \iint_B f(x,y)dxdy, \tag{5.35}$$

где $f(x, y)$ — уравнение поверхности, которая ограничивает тело; B — проекция поверхности f(x,y) на плоскость $0XУ$.

Если положить в формуле (5.35) $f(x, y) = 1$, то цилиндрическое тело превратится в прямой цилиндр высотой, равной единице. Его объем будет равен площади (S) основания B. Поэтому получаем формулу для определения площади области B:

$$S = \iint\limits_B dxdy. \qquad (5.36)$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 5.56.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$; $y = x$.

Построим фигуру B и найдем пределы интегрирования (рис. 5.41). Используем формулу (5.36) и получаем:

$$S = \iint\limits_B dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 dx(y)\Big|_{x^2-2x}^{x} = \int\limits_0^3 (x - x^2 + 2x)dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{27}{2}\right) - 9 = \frac{9}{2} \text{ кв.ед.}$$

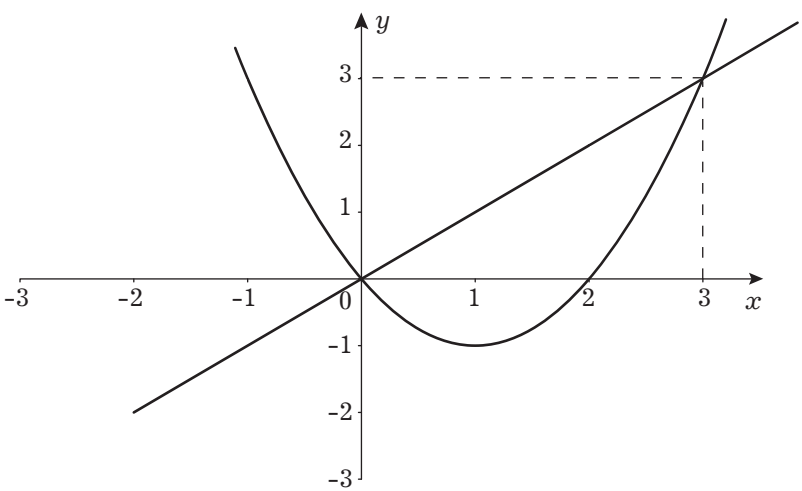


Рис. 5.41

Пример 5.57.

Найдем объем шара, ограниченного сферой радиуса R (рис. 5.42).

Известно, что уравнение шара имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ или $Z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

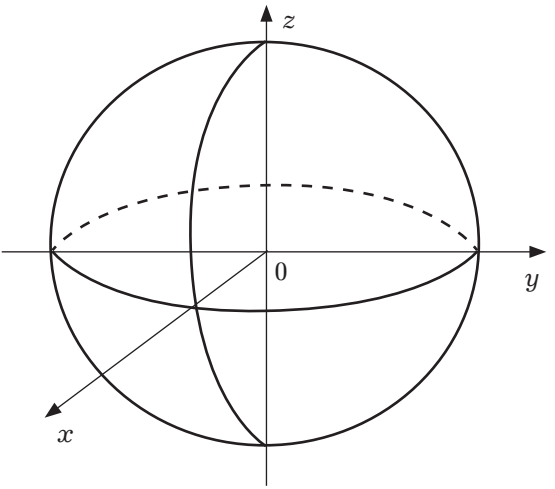


Рис. 5.42

Шар — фигура симметричная. Поэтому вычислим объем 1/8 его части, которая лежит в первом октанте (рис. 5.43).

Проекция на плоскость 0XУ — это окружность $x^2+y^2=R^2$ или $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Теперь по формуле (5.35) получаем:

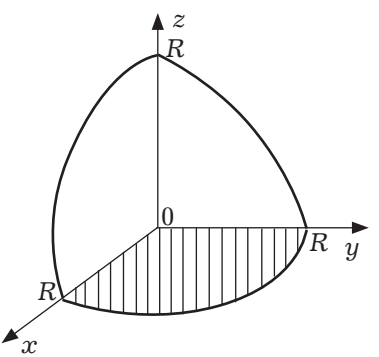


Рис. 5.43

$$\frac{1}{8}V=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy.$$

Чтобы упростить вычисления полученного повторного интеграла, перейдем к полярной системе координат: $y = r\cdot\sin\varphi$, $x = r\cdot\cos\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$.

Тогда получаем:

$$\frac{1}{8}V=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2\cdot\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}\cdot rdr=$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{R^2 - r^2} \cdot d(R^2 - r^2) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (R^2 - r^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^R = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (-R^3) d\varphi = -\frac{1}{3} R^3 \varphi \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{6}.$$

Следовательно, искомый объем шара будет равен $V = 4/3\pi R^3$.

5.7. Некоторые сведения о тройном интеграле

Тройной интеграл является обобщением определенного интеграла на случай функции трех независимых аргументов. К понятию тройного интеграла можно прийти, рассматривая, например, задачу о нахождении массы неоднородного тела.

Предположим, что имеется некоторое тело, которое занимает пространственную область G (рис. 5.44), а плотность распределения массы в этом теле — непрерывная функция координат точек этого тела, т. е. $\rho = \rho(x, y, z)$ [9, 48].

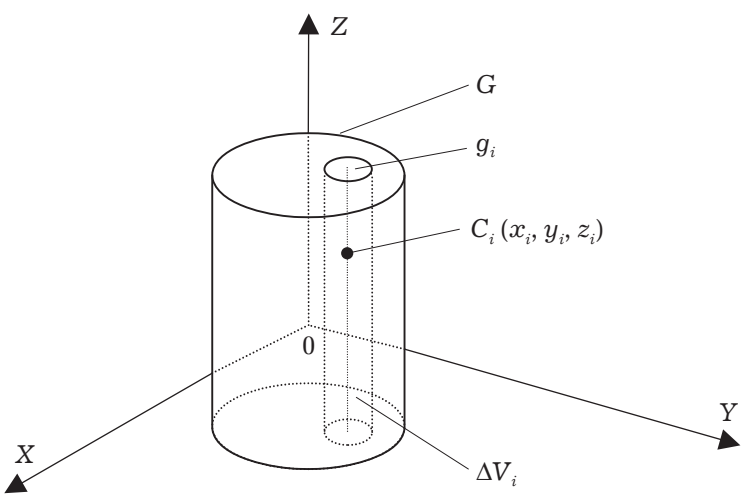


Рис. 5.44

Произвольно разобьем данное тело на n частей $g_1, g_2, ..., g_n$. Их объемы обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Выберем в этих частях

точки $C_1(x_1, y_1, z_1)$, $C_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $C_n(x_n, y_n, z_n)$. Далее, предполагая, что в каждой из частей плотность постоянна и равна ее значению в точке $C_i(i=\overline{1,n})$, запишем приближенную формулу для массы всего тела [9, 48]:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i. \tag{5.37}$$

Предел суммы (5.37) в том случае, если $n \to \infty$ и максимальный диаметр каждой части стремится к нулю, и есть масса исходного тела, т. е.

$$M = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, g_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i. \tag{5.38}$$

Сумма (5.37) называется n-й интегральной суммой, а ее предел (5.38) — тройным интегралом от функции $\rho(x, y, z)$ по области G.

К вычислению тройного интеграла приводит, кроме рассматриваемой нами задачи, и ряд других задач. Теперь рассмотрим непрерывную в области G функцию $W = f(x, y, z)$. Разобьем область G на n частей g_i объемами $\Delta V_i (i=\overline{1,n})$ и в каждой части выберем произвольную точку $C_i(i=\overline{1,n})$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i \tag{5.39}$$

и найдем ее предел при стремлении $n \to \infty$ и максимального диаметра каждой части к нулю.

Этот предел и называют тройным интегралом от функции $W = f(x, y, z)$ по области G и обозначают следующим образом:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, g_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = \iiint_G f(x, y, z) dV, \tag{5.40}$$

где $f(x, y, z)$ — подынтегральная функция;

dV — элемент объема.

Теперь сформулируем теорему о существовании тройного интеграла.

Теорема 5.5. Если функция $W = f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G, то существует предел интег-

ральной суммы (5.39) при $n \to \infty$ и $\max \operatorname{diam} g_i \to 0$ и этот предел (тройной интеграл) не зависит от метода разбиения области G на части g_i и от выбора точек $C_i(x_i, y_i, z_i)$ в них.

Свойства тройных интегралов полностью совпадают со свойствами двойных интегралов, некоторые из которых перечислены в подразд. 5.6.

Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат

Если задан тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, т. е. $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ и область G расположена в системе декартовых координат $0XYZ$, то, разбив область G плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получим частичные области, которые будут параллелепипедами с гранями, параллельными плоскостям $0XY$, $0YZ$, $0XZ$. Элемент объема в этом случае будет равен $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ и поэтому будем иметь $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz.$

1. *Простейший случай*

Если пространственная область G задана неравенствами $a \le x \le b$; $c \le y \le d$; $k \le z \le p$; т. е. представляет собой параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат, то тройной интеграл находится по формуле

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_k^p dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y,z)dx \qquad (5.41)$$

или по одной из аналогичных, так как аргументы x,y,z могут меняться местами, так же как в двойном интеграле (см. подразд. 5.6). Выражение, стоящее в правой части формулы (5.41) называется повторными интегралом. Заметим, что внешний интеграл соответствует внешнему дифференциалу, а внутренний внутреннему.

В формуле (5.41) сначала находится внутренний интеграл по переменной x при постоянных z и y, затем вычисляется средний интеграл по переменной y при постоянной z и наконец определяется внешний интеграл по переменной z.

Приведем конкретный пример применения формулы (5.41).

Пример 5.58.

Найти интеграл

$$\int_0^1\int_0^4\int_0^6 (x^2+y^3+z^4)dxdydz = \int_0^1 dz\int_0^4 dy\int_0^6 (x^2+y^3+z^4)dx =$$

$$= \int_0^1 dz\int_0^4 dy\left[\frac{x^3}{3}+y^3x+z^4x\right]\Bigg|_0^6 = \int_0^1 dz\int_0^4\left(\frac{216}{3}+6y^3+6z^4\right)dy =$$

$$= \int_0^1 dz\left[\frac{216}{3}y+\frac{6y^4}{4}+6z^4y\right]\Bigg|_0^4 = \int_0^1\left(\frac{216\cdot 4}{3}+\frac{3\cdot 256}{2}+24z^4\right)dz =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{864}{3}+384+24z^4\right)dz = \left[\frac{2016}{3}z+24\frac{z^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2016}{3}+\frac{24}{5} =$$

$$= 672+4{,}8 = 676{,}8.$$

2. *Общий случай*

Предположим, что областью интегрирования G является тело, ограниченное снизу поверхностью $\psi_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $\psi_2(x, y)$, причем $\psi_1(x, y) \le \psi_2(x, y)$ и данные функции являются непрерывными в замкнутой области E, которая является проекцией тела на плоскость $0XУ$ (рис. 5.45).

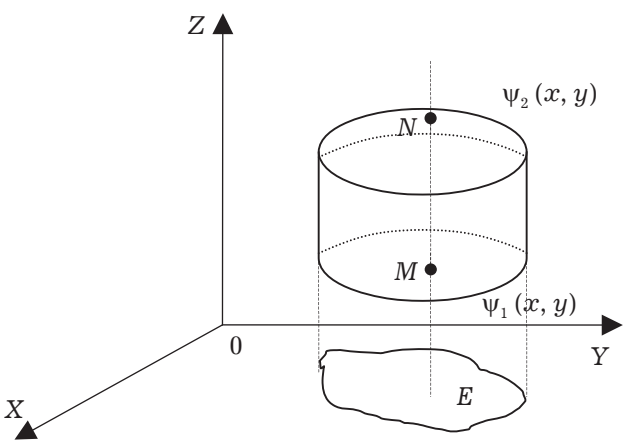


Рис. 5.45

Пусть область G будет правильной в направлении оси $0Z$, т. е. любая прямая, параллельная оси $0Z$, пересекает область не более чем в двух точках. В этом случае для любой непрерывной в области G функции $f(x, y, z)$ будет верна формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_E dxdy \int\limits_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (5.42)$$

Формула (5.42) сводит вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла. Сначала находится внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y. Нижней границей интегрирования будет аппликата точки M — точки входа прямой, параллельной оси $0Z$, в область G, т. е. $\psi_1(x, y)$, а верхней – аппликата точки N — точки выхода прямой из области G, т. е. $\psi_2(x, y)$. Результат нахождения этого интеграла — функция двух аргументов x и y.

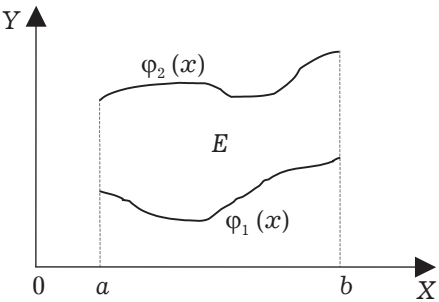


Рис. 5.46

В том случае, если область E ограничена линиями $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_2(x) > \varphi_1(x))$ и данные функции непрерывны на отрезке $[a, b]$ (рис. 5.46), то, переходя от двойного интеграла к повторному, получим формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (5.43)$$

Если область E ограниченна линиями $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = \alpha_1(y)$, $x = \alpha_2(y)$ $(\alpha_2(y) > \alpha_1(y))$ и данные функции непрерывны на отрезке $[c, d]$ (рис. 5.47), то, переходя от двойного интеграла к повторному, получаем формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} dx \int\limits_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (5.44)$$

Если область G является сложной, то ее надо разбить на конечное число правильных областей, к которым можно применить формулы (5.43) и (5.44).

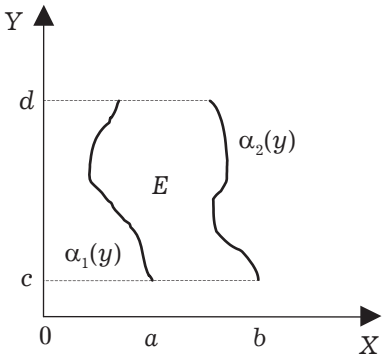


Рис. 5.47

Аналогичные формулы можно получить и для случаев, когда область G будет правильной в направлении осей $0X$ и $0У$.

Пример 5.59.

Найти тройной интеграл $\iiint\limits_G (3x+2y)dxdydz$, если область G ограничена координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскостью $x + y + z = 1$ (рис. 5.48).

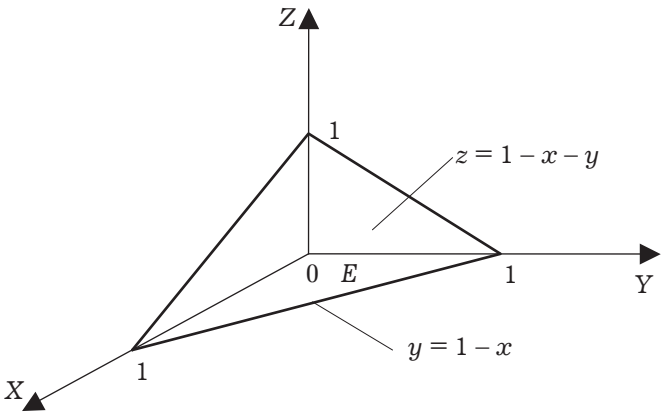


Рис. 5.48

В этом случае интегрирование по z совершается от $z = 0$ до $z = 1 - x - y$. Поэтому, обозначив проекцию области G на плоскость $0XУ$ через E, получим по формуле (5.43):

$$\iint\limits_E dxdy \int\limits_0^{1-x-y}(3x+2y)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y}(3x+2y)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy\left[(3x+2y)z\right]\Big|_0^{1-x-y} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy\left[(3x+2y)(1-x-y)\right] =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3x - 3x^2 - 5xy + 2y - 2y^2) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(-\frac{2y^3}{3} - 3x^2 y - \frac{5xy^2}{2} + y^2 + 3xy \right) \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^3}{6} - 2x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{7x^4}{24} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{5}{24}.$$

Аналогичный результат можно получить, используя формулу (5.44), т. е.

$$\iint_E dx dy \int_0^{1-x-y} (3x + 2y) dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} (3x + 2y) dz =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(3x + 2y) z \right] \Bigg|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(3x + 2y)(1 - x - y) \right] =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (3x - 3x^2 - 5xy + 2y - 2y^2) dx =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^2 y}{2} + 2xy - 2y^2 x \right) \Bigg|_0^{1-y} = \frac{5}{24}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Методом непосредственного интегрирования найти интегралы:

1.1. $\int \frac{x^4 + 2x}{x} dx$; 1.2. $\int \left(3x^3 + \frac{7}{x} \right) dx$;

1.3. $\int (8x^3 + 3\sin x)\, dx$; 1.4. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(1 - x)(1 + x)} dx$.

2. Найти интегралы, использовав метод замены переменной:

2.1. $\int 3x(6x^2 - 7)^5 dx$; 2.2. $\int 5\operatorname{tg} x dx$;

2.3. $\int \frac{3x dx}{\sqrt{x + 5}}$; 2.4. $\int \frac{7 dx}{x + \sqrt{x}}$.

3. Найти интегралы, использовав метод интегрирования по частям:

3.1. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 3.2. $\int 5 \arcsin x\, dx$;

3.3. $\int x^2 \sin x dx$; 3.4. $\int x^3 e^{-x} dx$.

4. Вычислить определенные интегралы:

4.1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\operatorname{tg} x dx$; 4.2. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-5}$; 4.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$;

4.4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin x \cos^2 x dx$; 4.5. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{3x} dx$;

4.6. $\int_2^8 \frac{\ln x}{x^2} dx$; 4.7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$; 4.8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6x dx}{\sin^2 x}$;

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int_0^{+\infty} (5x+1) dx$; 5.2. $\int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^5}$;

5.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 5.4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$.

6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси 0x криволинейной трапеции, ограниченной функцией $xy=4$ и прямыми $x = 1$, $x = 4$ и осью $0x$.

7. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси 0y криволинейной трапеции, ограниченной функцией $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми $y = \pm 2b$.

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y^2 = x^3$, $x = 4$.

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

10. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y = \sin x$ и осью $0x$, вращается вокруг оси $0x$. Найти объем тела вращения.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 10$ и осью $0y$.

12. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

12.1. $y = x^2$, $y^2 = x$; 12.2. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

12.3. $y^3 = x^2$, $y = 1$; 12.4. $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$

13. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 5$.

14. Найти длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

15. Найти длину дуги кривой $x = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$ от $y = 0$ до $y = 3$.

16. Определите длину окружности $x^2 + y^2 = 25$.

17. Используя формулу прямоугольников, вычислить интеграл $\int_1^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, приняв $n = 10$.

18. Используя формулу трапеции, вычислить интеграл $\int_0^6 e^{-x^2} dx$, приняв $n = 10$.

19. Используя формулу Симпсона вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$, приняв $n = 10$.

20. Вычислить двойные интегралы:

20.1. $\int_0^2 \int_y^{y\sqrt{3}} xy dx dy$;

20.2. $\int_0^5 \int_{\frac{x}{3}}^{x} \frac{x dy dx}{x^2 + y^2}$.

21. Вычислить интеграл $\iint_B (3x + y) dx dy$, если область интегрирования B ограничена линиями:

21.1. $x = 2$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 5$;

21.2. $x = 0$, $x = 5$, $y = -2$, $y = 2$.

22. Найти неопределенные интегралы:

22.1. $\int \sin^7 x \cdot \cos^4 x\, dx$; 22.2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$;

22.3. $\int \frac{dx}{6+3\sin x}$; 22.4. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx$

22.5. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{2x} dx$; 22.6. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(x+\sqrt[3]{x})} dx$

23. Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

23.1. $\int_0^2 2\ln x\, dx$; 23.2. $\int_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2-4} dx$;

23.3. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$; 23.4. $\int_5^{10} \frac{dx}{x-5}$

24. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_B f(x,y)dxdy$, если B — круговой сектор OMC с центром в точке O(0; 0), у которого концы дуги M(1; 1), C(-1; 1).

25. Поменять порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{R\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$$

26. Вычислить двойной интеграл $\iint e^{\frac{x}{y}} dxdy$, если область B ограничена линиями: $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

27. Вычислить двойной интеграл $\iint \cos(x+y)dxdy$, если область B ограничена линиями: $x = 0$; $y = \pi$; $y = x$.

28. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $Z = x^2 + y^2 + 1$, $Z = 5$.

29. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $(x^2 + y^2)^2 = = 4(x^2 - y^2)$.

30. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $r = 4(1 + \cos\varphi)$, $r = 4\cos\varphi$.

31. Вычислить тройные интегралы:

31.1. $\int_1^7 \int_3^5 \int_0^6 (5x^2 + \ln y + 5^Z)dxdydz$;

31.2. $\int\limits_0^5\int\limits_1^7\int\limits_3^8(5xy-y^2z+7x^2z)dxdydz.$

32. Найти тройной интеграл

$\iiint\limits_G\frac{dxdydz}{(x+y+z+2)^3}$, если область интегрирования ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

33. Найти неопределенные интегралы:

33.1. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$;

33.2. $\int x^4(5+x^2)^6dx$;

33.3. $\int\frac{\sqrt{3+x^2}}{x^6}dx.$

Вопросы для самопроверки

1. Интеграл какого вида называется интегралом от дифференциального бинома?

2. В каких случаях интеграл от дифференциального бинома можно выразить в элементарных функциях?

3. Какая функция называется первообразной?

4. В чем состоит суть метода интегрирования по частям?

5. В чем состоит суть метода замены переменной?

6. Каков геометрический смысл определенного интеграла?

7. В чем состоит суть метода замены переменной в определенном интеграле?

8. Вывести формулу для объема тела вращения.

9. В каких случаях применяют приближенные методы интегрирования?

10. В чем заключается суть признаков сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами?

11. В чем состоит теорема существования двойного интеграла?

12. Как «берутся» интегралы от иррациональных функций?

13. С помощью каких подстановок решаются интегралы вида $\int \cos^n x \cdot \sin^m x dx$?

14. Дайте определение несобственного интеграла от разрывной функции на конечном участке интегрирования.

15. Как осуществляется замена переменной в двойном интеграле?

16. Как находится масса неоднородного тела по заданной плотности?

17. Сформулировать теорему существования тройного интеграла.

18. Как находятся тройные интегралы в декартовой системе координат?

Глава 6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

6.1. Основные понятия и определения

Дифференциальными называются уравнения, которые содержат искомые функции, их производные и (или) дифференциалы различных порядков, независимые переменные.

Теория дифференциальных уравнений появилась в конце XVIII в. в результате решения некоторых задач механики и физики. Термин дифференциальные уравнения ввел Г. Лейбниц.

Дифференциальные уравнения подразделяются на дифференциальные уравнения в частных производных, неизвестная функция в которых зависит от двух и большего количества неизвестных, и на обыкновенные дифференциальные уравнения, неизвестная функция в которых зависит от одного аргумента.

В данном учебнике кратко рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения следующий:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

или

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Наивысший порядок производных, входящих в дифференциальное уравнение, называется его порядком.

Например, $2xy''+5xy'-7y=0$ это дифференциальное уравнение второго порядка.

Решить дифференциальное уравнение — это значит найти такую функцию, подстановка которой в это дифференциальное уравнение превращает его в тождество.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Геометрически они изображаются семейством интегральных кривых. И эту совокупность решений называют общим решением дифференциального уравнения и записывают так: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

А решения, содержащие конкретные значения постоянных, называются частными решениями дифференциальных уравнений.

6.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

6.2.1. Общие понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию, ее производную и (или) дифференциал.

Его общий вид следующий:

$$F(x, y, y') \text{ или } F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0.$$

Если это уравнение можно разделить относительно производной (y'), то получим одно или несколько уравнений вида:

$$y' = f(x, y).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$y = \varphi(x, C).$$

Для того чтобы получить конкретные частные решения, надо задать начальные условия, т. е. указать пару соответствующих друг другу значений аргумента (x_0) и функции (y_0). Обычно это записывается так: $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Задавая начальные условия, из семейства интегральных кривых выделяем какую-то конкретную кривую.

Вопрос о том, в каком случае можно утверждать, что частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию существует, а также является единственным, становится ясным из следующей теоремы.

Теоремы 6.1. Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $y = f(x, y)$ и ее частная производная по y $\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ непрерывны в некоторой области D на плоскости $x0y$, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого дифференциального уравнения $y = \varphi(x,)$, удовлетворяющее условию при $x = x_0$ и $y = y_0$ [44, 59].

Приведенная теорема была впервые сформулирована и доказана Коши. Поэтому задачу нахождения частного решения по заданным начальным условиям называют задачей Коши.

6.2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

В общем случае такие уравнения имеют вид: $f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$.

Разделим обе части этого дифференциального уравнения на произведение $f_2(y)f_3(x)$, предполагая, что оно не равно нулю.

$$\frac{f_1(x)f_2(y)dx}{f_2(y)f_3(x)} + \frac{f_3(x)f_4(y)dy}{f_2(y)f_3(x)} = 0.$$

Далее получаем

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = -\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy.$$

В полученном дифференциальном уравнении при dx стоят только функции от x, а при dy — только функции от y, т. е. переменные разделены. Интегрируем левую и правую части последнего равенства и получаем:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = -\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy + C.$$

Это и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

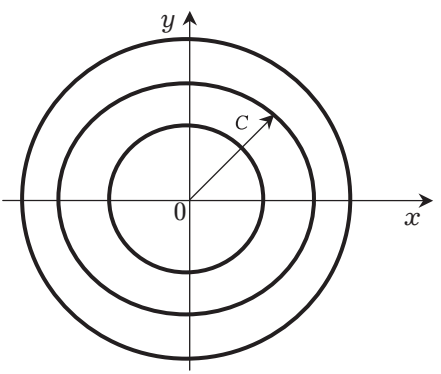
Рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 6.1. Найдем частное решение дифференциального уравнения. $xdx + ydy = 0$, если начальное условие таково $y|_{x=2} = 10$.

$$ydy = -xdx, \int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1, y^2 + x^2 = 2C_{1.}$$

Так как постоянная может быть любой, то примем $2C_1 = C^2$. Тогда получим общее решение исходного дифференциального уравнения $y^2 + x^2 = C^2$.

С геометрической точки зрения это решение представляет собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C (см. рисунок).



Найдем теперь частное решение для заданных начальных условий, т. е. выделим из семейства окружностей одну. Получим $10^2 + 2^2 = C^2 => C^2 = 104, C = \sqrt{104}$.

Поэтому частное решение имеет вид: $y^2 + x^2 = 104$.

Пример 6.2. Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$1 + y' + y + xy' = 0.$$

Перепишем его в виде:

$$1 + \frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(1+y)+\frac{dy}{dx}(1+x)=0.$$

Правую и левую часть домножим на dx.

$$(1+y)dx+dy(1+x)=0.$$

Правую и левую части делим на $(1+x)\neq 0$:

$$\frac{(1+y)dx}{1+x}+dy=0.$$

Правую и левую части делим на $(1+y)\neq 0$:

$$\frac{dx}{1+x}+\frac{dy}{1+y}=0;$$

$$\frac{dy}{1+y}=-\frac{dx}{1+x}.$$

Теперь интегрируем правую и левую части:

$$\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{1+x};\quad \int\frac{d(1+y)}{1+y}=-\int\frac{d(1+x)}{1+x};$$

$$\ln|1+y|=-\ln|1+x|+\ln C;\quad \ln|1+y|=\ln\left|\frac{C}{1+x}\right|;$$

$$1+y=\frac{C}{1+x}.$$

Окончательно получаем $y=\dfrac{C}{1+x}-1$.

Полученное выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.3. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$2xyy'=y^2-1.$$

Перепишем его в виде

$$2xy\frac{dy}{dx}=y^2-1.$$

Домножим правую и левую часть на dx:

$$2xydy=(y^2-1)dx.$$

Разделим правую и левую части на $x\neq 0$:

$$2ydy = \frac{(y^2-1)dx}{x}.$$

Разделим правую и левую части на $y^2 - 1 \neq 0$:

$$\frac{2ydy}{y^2-1} = \frac{dx}{x}$$

Теперь проинтегрируем правую и левую части полученного выражения

$$\int \frac{2ydy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{d(y^2-1)}{y^2-1} = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln|y^2-1| = \ln|xC|, \; y^2 - 1 = xC,$$

$$y^2 = xC + 1, \quad y = \sqrt{xC+1}.$$

Полученное уравнение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.4. Найти частое решение дифференциального уравнения $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$, если задано следующее начальное условие $y|_{x=1} = 5$.

Перепишем исходное дифференциальное уравнение так:

$$(x^2+4)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0.$$

Домножим правую и левую части на dx:

$$(x^2 + 4)dy - 2xydx = 0.$$

Разделим правую и левую части на $x^2 + 4$:

$$dy - \frac{2xydx}{x^2+4} = 0.$$

Разделим правую и левую части на $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{x^2+4} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+4}.$$

Теперь интегрируем обе части полученного выражения.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2+4}, \quad \ln|y| = \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4},$$

$\ln|y| = \ln|x^2 + 4| + \ln C$, $\ln|y| = \ln|C(x^2 + 4)|$.

$y = C(x^2 + 4)$.

Полученное уравнение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения. Геометрически оно представляет собой семейство парабол.

По заданным начальным условиям найдем частое решение, т. е. выделим конкретную параболу из полученного семейства.

$$5 = C\ (1^2+4) \Rightarrow 5 = 5C \Rightarrow C = 1.$$

Поэтому частное решение имеет вид $y = x^2 + 4$.

Рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, которые сводятся к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

6.2.3. Однородные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f\ (x,\ y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно аргументов x и y, если при любом k справедливо равенство

$$f\ (kx,\ ky) = k^n\ f\ (x,\ y).$$

Например, функция $f\ (x,\ y) = 2xy - 3y^2$ является однородной функцией второго измерения, так как

$$2(kx)(ky) - 3(ky)^2 = k^2(2xy - 3y^2).$$

А функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $\dfrac{(kx)^2 - (ky)^2}{(kx)(ky)} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$,

т. е. $$f\ (kx,\ ky) = f\ (x,\ y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.1}$$

называется однородным относительно x и y, если функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

По условию имеем $f(kx, ky) = f(x, y)$, положим $k = \frac{1}{x}$, тогда получим $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$, т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов. Тогда дифференциальное уравнение (6.1) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{6.2}$$

Сделаем замену переменных, обозначим

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т. е. } y = ux,$$

тогда

$$y' = u'x + u = \frac{du}{dx}x + u.$$

После подстановки дифференциальное уравнение (6.2) примет вид

$$\frac{du}{dx}x = f(1, u) - u, \tag{6.3}$$

т. е. пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Преобразуя (6.3), получим

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{6.4}$$

Интегрируя обе части уравнения (6.4), получаем

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C. \tag{6.5}$$

Так как постоянная C может быть любой, можно записать уравнение (6.5) в виде $\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|$.

Интегрируя уравнение (6.5), получаем u, затем делаем обратную замену $u = \frac{y}{x}$ и получаем искомое общее решение однородного дифференциального уравнения. При наличии начальных условий можно найти и частное решение.

Пример 6.5. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$xy'-y=y(\ln y-\ln x),\quad \frac{dy}{dx}x-y=y\ln\left|\frac{y}{x}\right|.$$

Обе части последнего равенства разделим на x, тогда получим

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\ln\left|\frac{y}{x}\right|,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\ln\left|\frac{y}{x}\right|+1\right).$$

т. е. исходное дифференциальное уравнение является однородным.

Для его решения используем замену

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u.$$

После замены дифференциальное уравнение примет вид:

$$u'x+u=u(\ln u+1),\quad \frac{du}{dx}x=u(\ln u+1)-u,$$

$$\frac{du}{dx}x=u\ln u,\quad \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства

$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{d\ln u}{\ln u}=\ln|x|+\ln C,$$

$$\ln(\ln u)=\ln|Cx|,\quad \ln u=Cx\Rightarrow u=e^{Cx}.$$

Делаем обратную замену $u=\dfrac{y}{x}$ и получаем $\dfrac{y}{x}=e^{Cx}$ или $y=xe^{Cx}$ — это и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Предположим, что заданы начальные условия $y_{|x=2}=1$. Тогда находим частное решение заданного дифференциального уравнения

$$1=2e^{2C}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{2C}\Rightarrow\ln\frac{1}{2}=\ln e^{2C}\Rightarrow\ln\frac{1}{2}=2C\ln e\Rightarrow C=\frac{\ln\frac{1}{2}}{2},$$

т. е. частное решение имеет вид:

$$y=xe^{\frac{\ln\frac{1}{2}}{2}x}.$$

Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным дифференциальным уравнениям первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1 x + b_1 y + l_1}{a_2 x + b_2 y + l_2} \right). \tag{6.6}$$

можно свести к однородному дифференциальному уравнению. Возможны два случая:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Делаем замену

$$\begin{cases} x = u + t; \\ y = y + k, \end{cases} \tag{6.7}$$

где t и k постоянные.

После замены дифференциальное уравнение (6.6) принимает следующий вид:

$$y' = f\left(\frac{a_1(u+t) + b_1(v+k) + l_1}{a_2(u+t) + b_2(v+k) + l_2} \right) = f\left(\frac{a_1 u + a_1 t + b_1 v + b_1 k + l_1}{a_2 u + a_2 t + b_2 v + b_2 k + l_2} \right) \tag{6.8}$$

Для того чтобы полученное дифференциальное уравнение стало однородным, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 k + l_1 = 0; \\ a_2 t + b_2 k + l_2 = 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Из решения системы (6.9) получим неизвестные постоянные t и k, подставим их в (6.8) и получим однородное дифференциальное уравнение, метод решения которого мы рассматривали ранее.

2) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

В этом случае используем подстановку $a_1 x + b_1 y = p$, с помощью которой исходное дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 6.6.

Найти общее решение дифференциального уравнения.

$(2x - y + 1)dx + (-x + 2y - 1)dy = 0;$

$(x - 2y + 1)dy = (2x - y + 1)dx.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3,$$

т. е. имеем первый случай. Делаем замену переменной:

$$\begin{cases} x = u + t; \\ y = v + k. \end{cases}$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение примет вид:

$$y' = \frac{2(u+t) - v - k + 1}{u + t - 2(v+k) + 1} = \frac{2u + 2t - v - k + 1}{u + t - 2v - 2k + 1}. \qquad (6.10)$$

Неизвестные постоянные t и k найдем из решения системы:

$$\begin{cases} 2t - k + 1 = 0; \\ t - 2k + 1 = 0. \end{cases}$$

Умножаем второе уравнение системы на (-2) и складываем с первым: $3k - 1 = 0$.

Поэтому $k = 1/3$.

Из второго уравнения системы находим $t = 2k - 1 = 2/3 - 1 = -1/3$.

Подставляем найденные значения k и t в уравнение (6.10) и получаем

$$y' = \frac{2u + 2/3 - v - 1/3 + 1}{u - 1/3 - 2v - 2/3 + 1} = \frac{2u - v}{u - 2v}.$$

Из сделанной нами замены переменных следует, что $dx = du$, а $dy = dv$. Поэтому имеем:

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u - v}{u - 2v} = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - \frac{2v}{u}}.$$

Полученное дифференциальное уравнение является однородным. Для его решения сделаем еще одну замену, обозначим $z = v/u$. Далее получаем $v = z \cdot u$.

$$\frac{dv}{du} = \frac{dz}{du}u + z.$$

После подстановки однородное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{dz}{du} \cdot u + z = \frac{2-z}{1-2z};$$

$$\frac{dz}{du}u = \frac{2-z}{1-2z} - z = \frac{2-z-z(1-2z)}{1-2z} = \frac{2-2z+2z^2}{1-2z}.$$

Полученное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и получаем:

$$\frac{(1-2z)dz}{2z^2-2z+2} = \frac{du}{u}.$$

Интегрируем обе части последнего выражения:

$$\int\frac{(1-2z)dz}{2z^2-2z+2} = \int\frac{du}{u}.$$

Далее получаем:

$$-\int\frac{(2z-1)dz}{2z^2-2z+2} = \ln|u| + \ln|C|.$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(4z-2)dz}{2z^2-2z+2} = \ln|u \cdot C|.$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(2z^2-2z+2)}{2z^2-2z+2} = \ln|u \cdot C|.$$

$$-\frac{1}{2}\ln|2z^2-2z+2| = \ln|u \cdot C|.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2z^2-2z+2}} = u \cdot C.$$

Делаем обратную подстановку и получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\frac{v^2}{u^2} - 2\frac{v}{u} + 2}} = u \cdot C.$$

Теперь надо возвратиться к переменным y и x. Учитывая, что $u = x + 1/3$, а $v = y - 1/3$, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2(y-1/3)^2}{(x+1/3)^2}-\frac{2(y-1/3)}{(x+1/3)}+2}}=(x+1/3)\cdot C$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

Последнее выражение и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.7.

Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y'=\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,$$

т. е. имеем второй случай.

Исходное дифференциальное уравнение представляется в виде

$$y'=\frac{x+2y+1}{2(x+2y)+3}.$$

Делаем замену $x + 2y = p$, дифференцируем p по аргументу x и получаем:

$$\frac{dp}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}.$$

Далее имеем: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2}.$

После подстановки исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2}=\frac{p+1}{2p+3}.$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2(p+1)}{2p+3}+1,$$

т. е. получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя их, получаем:

$$dx = \frac{(2p+3)dp}{4p+5}.$$

Интегрируем обе части последнего выражения и получаем:

$$x + C = \int \frac{(2p+3)dp}{4p+5}.$$

Для взятия интеграла делим числитель подынтегрального выражения на знаменатель, т. е.

$$\begin{array}{r|l} -\quad 2p + 3 & 4p + 5 \\ \cline{2-2} 2p + 2{,}5 & 1/2 \\ \cline{1-1} 1/2 & \end{array}$$

Поэтому получаем:

$$x + C = \int \left(0{,}5 + \frac{0{,}5}{4p+5} \right) dp;$$

$$x + C = 0{,}5 \int dp + 0{,}5 \int \frac{dp}{4p+5};$$

$$x + C = 0{,}5p + 0{,}5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \int \frac{d(4p+5)}{4p+5};$$

$$x + C = \frac{1}{2}p + \frac{1}{8} \cdot \ln|4p+5|.$$

Делаем обратную замену и получаем:

$$x + C = \frac{1}{2}(x+2y) + \frac{1}{8}\ln|4(x+2y)+5|;$$

$$C = \frac{1}{2}(x+2y) + \frac{1}{8}\ln|4x+8y+5| - x.$$

Полученное выражение и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

6.2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

К линейным дифференциальным уравнениям относятся дифференциальные уравнения вида:

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{6.11}$$

т. е. линейное относительно неизвестной функции и ее производной. В уравнении (6.11) $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции аргумента x.

Рассмотрим *метод Бернулли*. По этому методу дифференциальное уравнение (6.11) сводится к двум дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными с помощью следующего приема.

Представим функцию y в виде произведения двух функций $y = uv$. Одной из этих функций можно распорядиться произвольно, а вторая при этом должна быть определена в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло исходному дифференциальному уравнению. Свободой выбора одной из функций u и v надо воспользоваться для упрощения дифференциального уравнения, получающегося после замены.

Из равенства $y = uv$ получим $y' = u'v + v'u$. Это выражение подставим в (6.11) и получим:

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x);$$
$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

В качестве v выберем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + p(x)v = 0. \tag{6.12}$$

Тогда для нахождения u получим дифференциальное уравнение

$$u'v = q(x). \tag{6.13}$$

Из дифференциального уравнения (6.12) находим v.

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Интегрируем обе части последнего выражения

$$\int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx;\quad \ln|v|=-\int p(x)dx;$$
$$v=\exp(-\int p(x)dx). \tag{6.14}$$

Под неопределенным интегралом в выражении (6.14) понимается какая-то одна первообразная от функции $p(x)$, т. е. v есть вполне определенная функция от x.

Теперь, используя найденное значение функции v из уравнения (6.13), находим функцию u.

$$\frac{du}{dx}=\frac{q(x)}{v}\Rightarrow\frac{du}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow du=q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right).$$

Интегрируем обе части последнего выражения и получаем

$$u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C. \tag{6.15}$$

В формуле (6.15) для функции u берутся все первообразные.

Зная функции u и v, находим искомую функцию y.

$$y=uv=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C). \tag{6.16}$$

Выражение (6.16) является общим решением линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 6.8. Найдем общее решение линейного дифференциального уравнения $y'-3\frac{y}{x}=x^3$.

Используем подстановку $y=uv\Rightarrow y'=u'v+v'u$ и получим

$$u'v+v'u-\frac{3}{x}uv=x^3,\quad u'v+u(v'-\frac{3}{x}v)=x^3.$$

В качестве v выберем какое-то частное решение дифференциального уравнения $v'-\frac{3}{x}v=0$, тогда u можно найти из дифференциального уравнения $u'v=x^3$.

Находим функцию v

$$\frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=\frac{3}{x}v\Rightarrow\frac{dv}{v}=$$
$$=3\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|v|=3\ln|x|\Rightarrow v=x^3.$$

Зная v, находим функцию u

$$\frac{du}{dx}v=x^3\Rightarrow\frac{du}{dx}x^3=x^3,\quad\frac{du}{dx}=1\Rightarrow du=dx,\quad u=x+C.$$

Зная функции u и v, находим исходную функцию y

$$y=uv=x^3(x+C). \tag{6.17}$$

Выражение (6.17) есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид таких дифференциальных уравнений следующий:

$$y'+ay=b, \tag{6.18}$$

где $a, b\in R$ [35], т. е. это частный случай уравнения (6.11).

Дифференциальное уравнение вида (6.18) решается разделением переменных, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=b-ay\Rightarrow\frac{dy}{b-ay}=dx.$$

Интегрируем левую и правую части последнего выражения и получаем:

$$\int\frac{dy}{b-ay}=\int dx\Rightarrow-\frac{1}{a}\int\frac{d(b-ay)}{b-ay}=x+C_1\Rightarrow-\frac{1}{a}\ln|b-ay|=x+C_1,$$
$$\ln|b-ay|=-ax-aC_1,\quad b-ay=e^{-ax}e^{-aC_1},$$
$$-ay=e^{-ax}e^{-aC_1}-b,\quad y=-\frac{1}{a}e^{-ax}e^{-aC_1}+\frac{b}{a}.$$

Так как постоянная может быть любая, обозначим $C=-\frac{1}{a}e^{-aC_1}$ и получаем общее решение дифференциального уравнения (6.18)

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}. \qquad (6.19)$$

Пример 6.9.

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y + 5 = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y - 5 \Rightarrow \frac{dy}{(-2y-5)} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{(-2y-5)} = \int dx, \quad -\frac{1}{2}\int \frac{d(-2y-5)}{(-2y-5)} = x + C,$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-2y-5\right| = x + C, \quad \ln\left|-2y-5\right| = -2x - 2C,$$

$$-2y - 5 = \exp(-2x)\exp(-2C), \qquad -2y = \exp(-2x)\exp(-2C) + 5,$$

$$y = -\frac{1}{2}\exp(-2x)\exp(-2C) - \frac{5}{2}.$$

Теперь рассмотрим *метод Лагранжа* решения уравнения (6.11). В соответствии с этим способом сначала рассмотрим дифференциальное уравнение (6.11), но без правой части, оно называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

$$y' + p(x) \cdot y = 0. \qquad (6.20)$$

Перепишем последнее дифференциальное уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя эти переменные, получаем:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx.$$

Интегрируя обе части последнего выражения, имеем:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|;$$

$$\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-\int p(x)dx}, \text{ или } y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx}.$$

Постоянная может быть любой, поэтому обозначим $\pm C_1 = C$ и тогда получим:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (6.21)$$

Метод Лагранжа состоит в том, что постоянную C в полученном решении (6.21) заменяем функцией от x, т. е. полагаем, что $C = C(x)$. А решение исходного дифференциального уравнения (6.11) ищем в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (6.22)$$

Дифференцируем формулу (6.22) по x и получаем:

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)).$$

Подставляем y и y' в исходное дифференциальное уравнение (6.11).

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

$$C' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Последнее дифференциальное уравнение — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя эти переменные, находим:

$$dC(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Интегрируя обе части последнего выражения, определяем неизвестную функцию $C(x)$.

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_0,$$

где C_0 — постоянная.

Подставляем найденное значение $C(x)$ в формулу (6.22) и получаем общее решение дифференциального уравнения (6.11).

$$y = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Это решение, естественно, совпадает с тем, которое мы получили по методу Бернулли.

Пример 6.10.

Найти общее решение или общий интеграл следующего дифференциального уравнения:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}.$$

Используем метод Лагранжа и рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение.

$$y' + \frac{1}{x}y = 0, \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Данное дифференциальное уравнение — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего выражения, получаем:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C_1|;$$

$$y = \pm\frac{C_1}{x},$$

$\pm C_1 = C$, следовательно имеем $y = \dfrac{C}{x}$.

Будем искать решение исходного дифференциального уравнения в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Дифференцируем это выражение и находим:

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Подставляя y и y' в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}.$$

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}.$$

$$C(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_0.$$

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{C_0 - \cos x}{x}.$$

Естественно это решение можно получить и методом Бернулли.

Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $n \in R$, называется уравнением Бернулли. Заметим, что его очевидное решение $y = 0$. При $n = 0$ данное уравнение будет линейным, при $n = 1$ — с разделяющимися переменными, а при любых других n оно сводится к линейному с помощью подстановки $\omega = y^{1-n}$.

Делим все элементы исходного уравнения на y^n и получаем

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Теперь делаем замену $\omega = y^{1-n}$, замечая, что

$$\frac{d\omega}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Тогда получаем:

$$\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{d\omega}{dx} + p(x)\omega = q(x) \text{ или } \frac{d\omega}{dx} + (1-n)p(x)\cdot\omega = (1-n)q(x).$$

Последнее дифференциальное уравнение является линейным; решение таких уравнений мы рассматривали. Находим общий интеграл полученного линейного уравнения и, подставляя вместо ω выражение y^{1-n}, находим общее решение уравнения Бернулли.

Пример 6.11.

Найдем общее решение дифференциального уравнения $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли с $n = 1/2$. Поэтому используем подстановку $\omega = y^{\frac{1}{2}}$. Делим все элементы

исходного уравнения на $y^{\frac{1}{2}}$ и получаем $y^{-\frac{1}{2}}xy' - 4y^{\frac{1}{2}} = x^2$. Разделим обе части этого уравнения на $x \neq 0$.

Тогда получим $y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = x$. Теперь осуществляем подстановку $\omega = y^{\frac{1}{2}}$, замечая, что $\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$.

После этого уравнение принимает вид $2\frac{d\omega}{dx} - \frac{4}{x}\omega = x$, или $\frac{d\omega}{dx} - \frac{2}{x}\omega = \frac{x}{2}$, т. е. получили линейное уравнение, из решения которого и найдем неизвестную функцию ω.

Применим подстановку $\omega = U \cdot V$, тогда $\omega' = U' \cdot V + U \cdot V'$ и линейное уравнение примет вид

$$\frac{dU}{dx}V + \frac{dV}{dx}U - \frac{2}{x}UV = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dU}{dx}V + U\left(\frac{dV}{dx} - \frac{2}{x}V\right) = \frac{x}{2}.$$

В качестве V выберем какое-либо частное решение дифференциального уравнения $\frac{dV}{dx} - \frac{2}{x}V = 0$, тогда U можно найти из дифференциального уравнения $\frac{dU}{dx}V = \frac{x}{2}$.

Определяем функцию V:

$$\frac{dV}{V} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dV}{V} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|V| = 2\ln|x|, \text{ или } V = x^2.$$

Зная V, находим функцию U:

$$\frac{dU}{dx}x^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow dU = \frac{dx}{2x} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

Зная U и V, вычисляем ω:

$$\omega = U \cdot V = (\ln\sqrt{x} + C) \cdot x^2.$$

Теперь находим искомую функцию:

$$y = \omega^2 = (\ln\sqrt{x} + C)^2 \cdot x^4.$$

Это и есть общее решение исходного уравнения Бернулли. Его решением является и ноль, т. е. $y = 0$. Заметим, что уравнение Бернулли можно решить сразу, применив подстановку $y = U \cdot V$.

6.2.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Сначала поясним понятие полного дифференциала функции двух независимых аргументов.

Полный дифференциал функции двух независимых аргументов $W(x, y)$ равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных, т. е.

$$dW = \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}dy.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции W(x,y), т.е. должно выполняться условие:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде $dW = 0$, т. е. решение уравнения в полных дифференциалах имеет вид $W(x, y) = C$, где $C = \text{const}$. Следовательно, для нахождения решения уравнения в полных дифференциалах надо проинтегрировать его левую часть, т. е. найти интеграл от полного дифференциала. Приведем окончательные формулы, не касаясь их вывода, который выходит за рамки этой книги, вывод можно найти, например, в [9].

Итак, общее решение исходного уравнения можно записать в виде

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

или

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

Точку (x_0, y_0) обычно выбирают так, чтобы подынтегральные функции были более простыми. Можно получить общее

решение уравнения в полных дифференциалах и другим методом. Имея в виду, что $\frac{\partial W}{\partial x} = P(x,y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y} = Q(x,y)$, получим $W(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$, где $C(y)$ — произвольная функция от y. Дифференцируем найденную функцию $W(x, y)$ по y и получаем $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + C'(y) = Q(x,y)$. Из последнего уравнения находим $C'(y)$ и, интегрируя, получаем $C(y)$.

Пример 6.12.

Найдем общее решение дифференциального уравнения $(x^2 + 2xy + 4)dx + (x^2 + y^2 - 4)dy = 0$.

В данном случае $P(x, y) = x^2 + 2xy + 4$; $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 4$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

В соответствии с приведенными формулами будем искать общее решение данного уравнения, приняв в качестве точки (x_0, y_0) начало координат ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$):

$$W(x,y) = \int_0^x (x^2 + 2xy + 4)dx + \int_0^y (y^2 - 4)dy = C$$

или

$$W(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + 4x + \frac{y^3}{3} - 4y = C.$$

Последнее выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Если левая часть дифференциального уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не является полным дифференциалом, то иногда удается подобрать такую функцию $\lambda(x, y)$, после умножения на которую всех элементов уравнения его левая часть становится полным дифференциалом. Общее решение полученного таким образом уравнения совпадает с общим решением первоначального уравнения, а функция $\lambda(x, y)$ носит название интегрирующего множителя заданного уравнения.

Для определения $\lambda(x, y)$ умножаем на него обе части исходного уравнения и получаем $\lambda P dx + \lambda Q dy = 0$.

Чтобы это уравнение было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\frac{\partial(\lambda \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda \cdot Q)}{\partial x}, \text{ т. е. } \lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

или

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Таким образом, что для того чтобы найти $\lambda(x, y)$, надо проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных, а это очень непростая задача. Ее можно упростить, если предположить, что λ-функция только одного аргумента (или x, или y).

Например, пусть $\lambda = \lambda(x)$, тогда имеем $-Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ или $\frac{\partial \lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$. Окончательно получаем:

$$\lambda(x) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx\right).$$

Заметим, что в этом выражении подынтегральная функция зависит от x.

Аналогично в случае, если $\lambda = \lambda(y)$, получаем: $\lambda(y) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy\right)$, здесь подынтегральная функция зависит только от y.

Пример 6.13.

Найти общее решение дифференциального уравнения $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

Здесь $P(x, y) = 2y + xy^3$; $Q(x, y) = x + x^2y^2$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 3xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2xy^2$, т. е условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется. Попробуем

найти интегрирующий множитель λ. Будем считать, что он зависит только от аргумента x, т. е. $\lambda = \lambda(x)$. Тогда получаем:

$$\frac{\partial\lambda}{\lambda} = \frac{2+3xy^2-1-2xy^2}{x+x^2y^2}dx = \frac{1+xy^2}{x(1+xy^2)}dx = \frac{1}{x}dx;$$

$\ln|\lambda| = \ln|x|$ или $\lambda = x$.

Умножаем обе части исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель и получаем $(2xy + x^2y^3)dx + (x^2 + x^3y^2)dy = 0$. Находим $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3x^2y^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 3x^2y^2$, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Итак, мы получили дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

Примем в качестве точки (x_0, y_0) начало координат, т. е. $x_0 = 0$; $y_0 = 0$. Тогда получим

$$W(x,y) = \int_0^x (2xy + x^2y^3)dx = C,$$

или

$$W(x,y) = x^2y + \frac{x^3}{3}y^3 = C.$$

Это и есть общее решение заданного дифференциального уравнения.

6.2.6. Уравнения Лагранжа и Клеро

Эти дифференциальные уравнения являются неразрешенными относительно производной.

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y'), \tag{6.23}$$

где $\varphi(y')$ и $\psi(y')$ — известные функции, зависящие от y'.

Делаем замену, обозначим $y' = p$, тогда уравнение (6.23) примет вид

$$y = x \cdot \varphi(p) + \psi(p). \tag{6.24}$$

Продифференцируем уравнение (6.24) по x и получим

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx},$$

или

$$p-\varphi(p)=\frac{dp}{dx}\left(x\cdot\varphi'(p)+\psi'(p)\right). \qquad (6.25)$$

Из данного дифференциального уравнения можно сразу найти некоторые решения, а именно оно будет обращаться в тождество при любом постоянном значении $p = p_0$, которое удовлетворяет условию $p_0 - \varphi(p_0) = 0$.

Видно, что при постоянном значении p производная $\frac{dp}{dx}=0$ и обе части уравнения (6.25) обращаются в ноль. Решение, которое соответствует любому $p = p_0$, будет линейной функцией от x. Чтобы найти эту функцию надо подставить в (6.24) значение $p = p_0$, т. е.

$$y = x\cdot\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Если данное значение не следует из общего решения ни при каком значении произвольной постоянной, то оно является особым решением. Теперь найдем общее решение уравнения Лагранжа. Для этого уравнение (6.25) преобразуем к следующему виду:

$$\left(p-\varphi(p)\right)\cdot\frac{dx}{dp}=x\cdot\varphi'(p)+\psi'(p);$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x\cdot\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Последнее дифференциальное уравнение будет линейным относительно функции x и ее производной по аргументу p. Решая его, определяем $x = \lambda(p, C)$. (6.26)

Далее исключаем параметр p из уравнений (6.24) и (6.26) и находим общее решение уравнения Лагранжа:

$$y = \mu(x, C). \qquad (6.27)$$

Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа и имеет вид

$$y = x \cdot y' + \psi(y'). \tag{6.28}$$

Обозначим $y' = p$ и тогда уравнение (6.28) примет вид

$$y = x \cdot p + \psi(p). \tag{6.29}$$

Дифференцируем это уравнение по x и получаем:

$$\frac{dy}{dx} = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} \cdot \psi'(p)$$

или

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \psi'(p)\right) = 0.$$

Из последнего выражения следует, что, если $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = C$, где C — постоянная. С учетом (6.29) получаем общее решение уравнения Клеро:

$$y = x \cdot C + \psi(C). \tag{6.30}$$

Если $x + \psi'(p) = 0$, то получаем частное решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} y = x \cdot p + \psi(p); \\ x = -\psi'(p). \end{cases} \tag{6.31}$$

Решение (6.31) называется особым решением уравнения Клеро и не содержится в общем решении (6.30). Если параметр p удается исключить, то можно получить особое решение в виде $\eta(x, y) = 0$. Теперь приведем конкретные примеры.

Пример 6.14.

Решить уравнение Лагранжа.

$$y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{4}{y'}\right) = \frac{1}{2}xy' + \frac{2x}{y'}.$$

Полагаем $y' = p$ и тогда получаем:

$$y = \frac{1}{2}xp + \frac{2x}{p}.$$

Дифференцируем последнее выражение по x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}x \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{2}{p} - \frac{2x}{p^2} \cdot \frac{dp}{dx};$$

$$\frac{p}{2}-\frac{2}{p}=\frac{dp}{dx}\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2}\right).$$

Обе части последнего уравнения делим на $\frac{dp}{dx}\neq 0$ и получаем:

$$\frac{p^2-4}{2p}\cdot\frac{dx}{dp}=\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2};$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{xp^2-4x}{2p^2}\cdot\frac{2p}{p^2-4};$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{x(p^2-4x)\cdot 2p}{2p^2(p^2-4)};$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{x}{p}.$$

Разделяем переменные и получаем: $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p}$.

Теперь интегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dp}{p}\Rightarrow \ln|x|+\ln|C|=\ln|p|\Rightarrow x\cdot C=p\Rightarrow x=\frac{p}{C}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}xp+\frac{2x}{p}; \\ x=\frac{p}{C}. \end{cases}$$

Исключим параметр p:

$$y=\frac{1}{2}x\cdot C\cdot x+\frac{2x}{Cx}=\frac{1}{2}x^2C+\frac{2}{C}.$$

Проверяем, есть ли у исходного уравнения особое решение. В то случае, если $\frac{dp}{dx}=0$, $p^2-4=0$. Отсюда имеем $p^2=4\to p=\pm 2$. Следовательно, $\frac{dy}{dx}=\pm 2$, а $y=\pm 2x$.

Это и есть особое решение исходного уравнения Лагранжа.

Пример 6.15.

Решить уравнение Клеро $y = x \cdot y' + \sqrt{1+(y')^2}$.

Делаем замену $y' = p$ и тогда получаем $y = x \cdot p + \sqrt{1+p^2}$.

Последнее равенство дифференцируем по x

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

$$\frac{dp}{dx} \cdot \frac{x+p}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

В том случае, если $\frac{dp}{dx} = 0$ получаем $p = C$ и имеем следующее общее решение исходного уравнения $y = C \cdot x + \sqrt{1+C^2}$.

Если $\frac{x+p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, то получаем особое решение уравнения Клеро в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = x \cdot p + \sqrt{1+p^2}; \\ x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \end{cases} \qquad (6.32)$$

Исключим параметр p. Из первого уравнения системы (6.32) имеем $\sqrt{1+p^2} = y - x \cdot p$.

Из второго уравнения системы (6.32) получаем $\sqrt{1+p^2} = -\frac{p}{x}$.

Следовательно, можно записать $-\frac{p}{x} = y - x \cdot p$.

Учитывая, что $p = y'$, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$-\frac{y'}{x} = y - xy', \text{ или } -\frac{y'}{x} + xy' = y.$$

Далее имеем $y' \cdot \left(\frac{1}{x} - x\right) = y$, или $-\frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{1-x^2}{x}\right) = y$, т. е. получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{1-x^2} \to$ $\to -\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$, или $y = \sqrt{1-x^2}$, т.е. $y^2 + x^2 = 1$.

6.3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

6.3.1. Общие понятия

Дифференциальные уравнения второго порядка имеют следующий вид

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.33}$$

или

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0.$$

Если уравнение (6.33) можно разрешить относительно второй производной, то получим одно или несколько уравнений вида

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{6.34}$$

Простейшим случаем дифференциального уравнения второго порядка является дифференциальное уравнение вида

$$y'' = f(x), \tag{6.35}$$

которое решают двукратным интегрированием, т. е.

$$\frac{dy'}{dx} = f(x) \Rightarrow dy' = f(x)dx;$$

$$\int dy' = \int f(x)dx \Rightarrow y' = F_1(x) + C_1;$$

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x) + C_1 \Rightarrow dy = \left(F_1(x) + C_1\right)dx;$$

$$\int dy = \int \left(F_1(x) + C_1\right)dx \Rightarrow y = F_2(x) + C_1x + C_2.$$

В качестве примера найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + C_1, \quad y = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2.$$

Заметим, что дифференциальное уравнение вида (6.34) имеет бесконечное множество решений, которые задаются формулой

$$y = \varphi(x, c_1, c_2), \tag{6.36}$$

содержащей две произвольные постоянные. Выражение вида (6.36) называется общим решением дифференциального уравнения (6.34).

Частное решение дифференциального уравнения (6.34) находится при помощи задания начальных условий:

$$y_{|x=x_0} = y_0 \text{ и } y'_{|x=x_0} = y'_0.$$

Найдем частные решения рассмотренного дифференциального уравнения $y''=x^2$ при следующих начальных условиях

$$y_{|x=2} = 2 \text{ и } y'_{|x=2} = 4.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений для нахождения постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{2^3}{3} + C_1 \\ 2 = \dfrac{2^4}{12} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{4}{3} \\ C_2 = -2 \end{cases}.$$

Поэтому частное решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{4}{3}x - 2.$$

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки с координатами (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, задают еще угловой коэффициент касательной (y'_0) к этой кривой. Так как общее решение дифференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит бесконечное множество интегральных кривых, но одна из них имеет заданный угловой коэффициент (y'_0).

Будем считать, что правая часть дифференциального уравнения (6.34) $f(x, y, y')$ является функцией трех независимых аргументов, так как при задании начальных условий координаты x_0, y_0 и угловой коэффициент касательной y'_0 ничем между собой не связаны.

Тогда сформулируем теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения вида (6.34).

Теорема 6.2. Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, то дифференциальное уравнение вида (6.34) имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$. Если кроме этого непрерывны и частные производные

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'},$$

то это решение единственное [9, 44, 59].

Как и для дифференциального уравнения первого порядка, задача отыскания частного решения по начальным условиям называется задачей Коши.

Для дифференциальных уравнений второго порядка выделение частного решения можно проводить путем задания так называемых краевых условий. В этом случае задаются значения функции y в двух различных точках

$$y_{|x=x_1} = y_1 \text{ и } y_{|x=x_2} = y_2.$$

В качестве примера найдем частное решение дифференциального уравнения $y''=x^2$ при следующих краевых условиях: $y_{|x=1} = 0$ и $y_{|x=2} = 1$.

Подставляя эти значения в общее решение исходного уравнения, получим систему уравнений для нахождения неизвестных постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{12} + C_1 + C_2 \\ 1 = \dfrac{4}{3} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{4}; \\ C_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}.$$

В рассмотренном случае получилось одно частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям, но так бывает не всегда. Дифференциальное уравнение вида (6.34) может не иметь решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям или иметь бесконечное множество таких решений.

В этом состоит коренное отличие задания краевых условий от задания начальных условий.

6.3.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, решаемые с помощью понижения порядка

Сущность данного способа состоит в том, что, используя замену переменной, исходное дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений, которые допускают понижение порядка.

1) $y'' = f(y)$.

Данное дифференциальное уравнение интегрируется с помощью подстановки $y' = p$, (6.37)
которая приводит исходное дифференциальное уравнение к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Получаем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Поэтому имеем $\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y)$. Далее, разделяя переменные, получаем

$$p \cdot dp = f(y)dy.$$

Из полученного уровнения получаем p, а из уравнения $\frac{dy}{dx} = p$ находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения $f(x, y, C_1, C_2) = 0$.

2) $y'' = f(y')$.

Данное дифференциальное уравнение с помощью подстановки

$$y' = p \qquad (6.37)$$

приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}$, т. е. $\frac{dp}{dx} = f(p)$, а далее, разделяя переменные, получаем $\frac{dp}{f(p)} = dx$.

3) $y'' = f(x, y')$.

Используем подстановку (6.37) и приводим данное дифференциальное уравнение к следующему виду:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Решая данное уравнение, определяем неизвестную функцию p.

4) $y'' = f(y, y')$

Применяя замену переменной (6.37), приводим это дифференциальное уравнение к виду $\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p)$, где y является аргументом.

Теперь рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 6.16.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - \frac{2}{x} \cdot y' = 2x^3.$$

Это уравнение вида 3. Поэтому используем подстановку $y' = p$ и получаем

$$\frac{dp}{dx} - \frac{2}{x} \cdot p = 2x^3.$$

Полученное дифференциальное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения применим метод Бернулли.

$p = U \cdot V$; $p' = U' \cdot V + V' \cdot U$.

Используя данную подстановку, получаем:

$$U' \cdot V + V' \cdot U - \frac{2}{x} \cdot U \cdot V = 2x^3;$$

$$U' \cdot V + U\left(V' - \frac{2}{x} \cdot V\right) = 2x^3.$$

В качестве функции V примем какое-то конкретное дифференциального уравнения:

$V' - 2/x \cdot V = 0$

Тогда функцию U найдем из дифференциального уравнения

$U' \cdot V = 2x^3$;

$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{x} \cdot V$, или $\int \frac{dV}{V} = \int \frac{2}{x} dx$.

Интегрируя, получаем $\ln|V| = 2\ln|x|$, или $V = x^2$.

Зная функцию V, ищем функцию U.

$\frac{dU}{dx} \cdot x^2 = 2x^3$, или $\int dU = \int 2x dx$.

Из последнего выражения находим

$U = x^2 + C_1$.

Следовательно, $p = (x^2 + C_1) \cdot x^2 = x^4 + C_1 \cdot x^2$.

Учитывая, что $p = \frac{dy}{dx}$, находим $\frac{dy}{dx} = x^4 + C_1 x^2$;

$\int dy = \int (x^4 + C_1 x^2) dx$;

$y = \frac{x^5}{5} + C_1 \cdot \frac{x^3}{3} + C_2$.

Последнее выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.17.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$1 + (y')^2 - 2y \cdot y'' = 0$.

Это дифференциальное уравнение вида 4. Поэтому, используя подстановку $y' = p$, получаем

$1 + p^2 - 2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = 0$.

$2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = 1 + p^2$;

$\int \frac{2p dp}{1 + p^2} = \int \frac{dy}{y}$;

$\ln|1+p^2| = \ln|y| + \ln|C_1|$;

$1 + p^2 = y \cdot C_1$;

$p = \sqrt{y \cdot C_1 - 1}$.

Учитывая, что $p = \frac{dy}{dx}$ получаем $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y \cdot C_1 - 1}$, или

$\frac{dy}{\sqrt{y \cdot C_1 - 1}} = \int dx$.

$$\frac{1}{C_1}\int\frac{d(y\cdot C_1-1)}{\sqrt{y\cdot C_1-1}}=x+C_2;$$

$$\frac{1}{C_1}\cdot 2\sqrt{y\cdot C_1-1}=x+C_2;$$

$$x=\frac{2\sqrt{y\cdot C_1-1}}{C_1}-C_2.$$

Это выражение и есть общее решение исходного диффиринциального уравнения.

Пример 6.18.

Найти частное решение диффиринциального уравнения $y''=y'\cdot\ln y'$, если заданы начальные условия $y\big|_{x=0}=0$; $y'\big|_{x=0}=1$.

Это уравнение 2. Поэтому используем подстановку $y'=p$. Исходное дифференциальное уравнение запишется в виде $\frac{dp}{dx}=p\cdot\ln p$, или

$$\int\frac{dp}{p}\cdot\ln p=\int dx.$$

Далее $\int\frac{d\cdot\ln p}{\ln p}=x+C_1$; $\ln(\ln p)=x+C_1$; $\ln p=e^{x+C_1}=e^x\cdot e^{C_1}$;

$p=e^{e^x\cdot e^{C_1}}=e^{e^x}\cdot e^{e^{C_1}}$.

Так как постоянная может быть любой, обозначим $e^{e^{C_1}}=C_2$ и тогда получаем $p=C_2e^{e^x}$.

Имея в виду, что $p=\frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx}=C_2e^{e^x}$. Делаем подстановку $e^x=z$, $x=\ln z$, $dx=dz/z$.

Тогда получаем $\int dy=C_2\int e^{e^x}dx$.

$$y=C_2\int\frac{e^z dz}{z}.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего выражения, является “неберущимся”, т. е. он не выражается в элементарных функциях. Для его решения надо использовать численные методы, например разложить в ряд подынтегральную функцию e^z.

Мы же воспользуемся тем, что надо найти не общее, а частное решение исходного дифференциального уравнения. Опре-

делим это частное решение без нахождения общего, используя заданные начальные условия.

Используем начальное условие $y'|_{x=0}=1$ к уравнению $y'=e^{e^{C_1}}\cdot e^{e^x}=e^{e^{C_1}\cdot e^x}$. Обозначим $e^{C_1}=C_3$ и получим $y'=e^{C_3e^x}$.

После подстановки начальных условий имеем $1=e^{C_3e^0}\Rightarrow$ $\Rightarrow C_3=0$. Поэтому имеем $y'=1$ или $y=x+C_4$.

Для нахождения постоянной C_4 используем начальное условие $y|_{x=0}=0$ и получаем $C_4=0$.

Поэтому получаем частное решение $y=x$, удолетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 6.19.

Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\dfrac{6}{y^3}$. Это уравнение вида 1, поэтому применяем замену $y'=p$ и получаем $\dfrac{dp}{dy}\cdot p=\dfrac{6}{y^3}$.

Разделяем переменные и имеем $\int p\cdot dp=\int\dfrac{6dy}{y^3}$;

$$\frac{p^2}{2}=6\left(-\frac{1}{2y^2}\right)+C_1=-\frac{3}{y^2}+C_1;$$

$$p=\sqrt{2C_1-\frac{6}{y^2}}=\sqrt{\frac{2C_1y^2-6}{y^2}}=\frac{\sqrt{2C_1y^2-6}}{y}.$$

Учитывая, что $\dfrac{dy}{dx}=p$, имеем $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{2C_1y^2-6}}{y}$. Разделяя переменные, получаем $\int\dfrac{ydy}{\sqrt{2C_1y^2-6}}=\int dx$.

$$\frac{1}{4}C_1\int\frac{d(2C_1y^2-6)}{\sqrt{2C_1y^2-6}}=x+C_2,$$

$$\frac{1}{4}C_1\cdot 2\sqrt{2C_1y^2-6}=x+C_2,\ x=\frac{\sqrt{2C_1y^2-6}\cdot C_1}{2}-C_2.$$

Последнее выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

6.3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

К ним относятся дифференциальные уравнения вида

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{6.38}$$

где $a \in R$, $b \in R$.

Приведем без доказательства теоремы, помогающие находить общее решение дифференциального уравнения вида (6.38).

Теорема 6.3. Если функция $y = y_1$ — это решение дифференциального уравнения (6.38), то и функция $y = Cy_1$ ($C = \text{const}$) также решение дифференциального уравнения (6.38).

Теорема 6.4. Если функции $y = y_1$ и $y = y_2$ есть решения дифференциального уравнения (6.38), то и функция $y = y_1 + y_2$ также решение дифференциального уравнения (6.38).

При этом y_1 и y_2 называются частными решениями (6.38).

Два частных решения дифференциального уравнения (6.38) называют линейно независимыми, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный коэффициент C, т. е. $y_2 \neq Cy_1$.

Теорема 6.5. Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения уравнения (6.38), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{6.39}$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (6.38), имеющее вид (6.39), надо найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Л. Эйлер предложил искать частное решение уравнения (6.38) вида $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$ и k необходимо подобрать [9, 44, 59].

Чтобы найти значение k, при котором $y = e^{kx}$ будет решением дифференциального уравнения (6.38), подставим $y = e^{kx}$ и ее производные первого и второго порядка в это дифференциальное уравнение. Получим

$$y' = ke^{kx};\ y'' = k^2e^{kx},$$

$$k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0.$$

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0,$$

$$e^{kx} \neq 0 \text{ для } \forall x,$$

значит

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{6.40}$$

Уравнение (6.40) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (6.38). Решая его, можно найти неизвестные постоянные k_1 и k_2.

При решении уравнения (6.40) возможны три случая:

1. $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, общее решение уравнения (6.38) имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \tag{6.41}$$

2. $D = 0$, $k_1 = k_2 = k$. В этом случае $y_1 = e^{kx}$ и можно доказать, что $y_2 = xe^{kx}$, а общее решение уравнения (6.38) имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + xC_2e^{k_2x}. \tag{6.42}$$

3. $D < 0$, k_1 и k_2 — комплексно-сопряженные корни вида

$$k_1 = c + ip;\ k_2 = c - ip,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Частные решения дифференциального уравнения (6.38) в этом случае имеют вид:

$$y_1 = e^{(c+ip)x};\ y_2 = e^{(c-ip)x}.$$

Как правило, чтобы не иметь мнимых величин в показателе степени, эти решения преобразуют, используя формулы Л. Эйлера.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x;\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Для рассматриваемого случая получаем:

$$y_1 = e^{(c+ip)x} = e^{cx}e^{ipx} = e^{cx}(\cos px + i\sin px);$$
$$y_2 = e^{(c-ip)x} = e^{cx}e^{-ipx} = e^{cx}(\cos px - i\sin px).$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (6.38) имеет вид:

$$y = C_Ie^{cx}(\cos px + i\sin px) + C_{II}e^{cx}(\cos px - i\sin px) =$$
$$= C_Ie^{cx}\cos px + iC_Ie^{cx}\sin px + C_{II}e^{cx}\cos px - iC_{II}e^{cx}\sin px =$$

$= e^{cx}\cos px(C_I + C_{II}) + ie^{cx}\sin px(C_I - C_{II})$.

Введем следующие обозначения:

$$C_1 = C_I + C_{II} \text{ и } C_2 = i(C_I - C_{II})$$

и окончательно получим:

$$y = e^{cx}(C_1\cos px + C_2\sin px). \qquad (6.43)$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 6.20.

Найдем частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

при следующих начальных условиях $y_{|x=0} = 8;\ y'_{|x=0} = 0$.

Сначала будем искать общее решение исходного дифференциального уравнения.

$$k^2e^{kx} - 2ke^{kx} - 3e^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}(k^2 - 2k - 3) = 0,$$
$$e^{kx} \neq 0;\ k^2 - 2k - 3 = 0,$$
$$D = 4 - 4\cdot(-3) = 16,$$
$$k_1 = \frac{2+4}{2} = 3;\ k_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}.$$

Теперь находим частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Вначале находим

$$y' = 3C_1e^{3x} - C_2e^{-x},$$

затем получаем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 8 = C_1e^0 + C_2e^0 \\ 0 = 3C_1e^0 - C_2e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = C_1 + C_2 \\ 0 = 3C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 6 \end{cases}.$$

Поэтому частное решение имеет вид:

$$y = 2e^{3x} + 6e^{-x}.$$

Пример 6.21.

Найдем общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Перепишем исходное дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$k^2e^{kx} - 6ke^{kx} + 9e^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}(k^2 - 6k + 9) = 0,$$
$$e^{kx} \neq 0;\ (k^2 - 6k + 9) = 0,$$
$$D = 36 - 4\cdot 1\cdot 9 = 0,$$
$$k_1 = k_2 = k = \frac{6}{2} = 3.$$

Частными решениями данного уравнения являются:

$$y_1 = e^{kx} = e^{3x} \text{ и } y_2 = xe^{kx} = xe^{3x}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{3x} + xC_2e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

Пример 6.22.

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$
$$k^2e^{kx} - 4ke^{kx} + 13e^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}(k^2 - 4k + 13) = 0,$$
$$e^{kx} \neq 0;\ (k^2 - 4k + 13) = 0,$$
$$D = 16 - 4\cdot 1\cdot 13 = -36,$$
$$k_1 = \frac{4 + i6}{2};\quad k_2 = \frac{4 - i6}{2}.$$
$$k_1 = 2 + 3i;\ k_2 = 2 - 3i.$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

6.3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид таких дифференциальных уравнений следующий:

$$y'' + ay' + by = f(x). \tag{6.44}$$

Общее решение такого дифференциального уравнения получается суммированием общего решения соответствующего

однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + ay' + by = 0$ и какого-то частного решения дифференциального уравнения (6.44).

Так как нахождение общего решения дифференциального уравнения вида (6.38) мы рассмотрели раньше, то остается найти любое частное решение дифференциального уравнения (6.44).

Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

1. Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (6.44) имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^{nx}. \qquad (6.45)$$

где $P_1(x)$ — многочлен.

Тогда дифференциальное уравнение (6.44) имеет частное решение вида $y = x^m P_2(x)e^{nx}$, где $P_2(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_1(x)$, причем если число n не является корнем характеристического уравнения $k^2 + ak + b = 0$, то $m = 0$, а если является, то m — кратность этого корня.

Взяв решение в указанной форме, находим неизвестные коэффициенты многочлена $P_2(x)$ по способу неопределенных коэффициентов. Правило сохраняется и в том случае, когда $n = 0$, т. е. в правой части стоит только многочлен $P_1(x)$ (в этом случае надо проверить, не является ли ноль корнем характеристического уравнения, в частном случае многочлен $P_1(x)$ может быть нулевой степени, т. е. постоянной величиной).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.23.

Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' - 4y = 4 + x.$$

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1(-4) = 25$$

$$k_1 = \frac{-3+5}{2} = 1;\ k_2 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Значит общее решение однородного дифференциального уравнения будет равно $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

Правая часть рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид $P_1(x)e^{nx}$, причем $n = 0$, а $P_1(x) = 4 + x$.

Так как ноль не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 3k - 4 = 0$, то частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_2 = Ax + B$, где A и B — постоянные, которые нужно найти. Находим $y'_2 = A$; $y''_2 = 0$ и подставляем в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$3A - 4Ax - 4B = 4 + x;$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 3A - 4B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{3}{4} - 4 = 4B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{19}{8} \end{cases}$$

Поэтому частным решением заданного дифференциального уравнения будет функция

$$y_2 = -\frac{1}{4}x - \frac{19}{8}.$$

А его общим решением — функция

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{19}{8}.$$

2. Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (6.44) имеет вид

$$f(x) = a\cos nx + b\sin nx. \qquad (6.46)$$

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то дифференциальное уравнение (6.44) имеет частное решение вида

$$y = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ есть корни характеристического уравнения, то частное решение (6.44) имеет вид

$$y = x(A\cos nx + B\sin nx).$$

В тех случаях, когда или $a=0$, или $b=0$ решение нужно искать в указанном виде.

Пример 6.24. В качестве примера найдем общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 3\cos 2x$.

Сначала находим общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$(k^2 + 4k + 13) = 0;$$

$$D = -36;$$

$$k_1 = -2 + 3i;\ k_2 = -2 - 3i.$$

А его общее решение таково

$$y_1 = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Теперь находим частное решение исходного дифференциального уравнения. Его правая часть имеет вид (6.46), причем $a = 3$; $b = 0$; $n = 2$. Числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение заданного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A и B — неизвестные коэффициенты, которые надо найти.

Дважды дифференцируем y_2 и результаты подставляем в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$y'_2 = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$

$$y''_2 = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 3\cos 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$

$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 3\cos 2x.$$

Теперь приравниваем друг к другу одноименные коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ и получаем:

$$\begin{cases} -4A + 8B + 13A = 3 \\ -4B - 8A + 13B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A + 8B = 3 \\ 9B = 8A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A + \dfrac{64}{9}A = 3 \\ B = \dfrac{8}{9}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{27}{145} \\ B = \dfrac{24}{145} \end{cases}$$

И частное решение исходного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y_2 = \frac{27}{145}\cos 2x + \frac{24}{145}\sin 2x.$$

Поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y = y_1 + y_2 =$$

$$= e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{27}{145}\cos 2x + \frac{24}{145}\sin 2x.$$

3. Пусть правая часть дифференциального уравнения (6.44) имеет вид

$$f(x) = e^{mx}\,[P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx], \qquad (6.47)$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ многочлены.

Если числа m±in не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение уравнения (6.44) ищут в виде

$$y = e^{mx}\,[R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx].$$

Если же числа $m \pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение уравнения (6.44) ищут в виде

$$y = xe^{mx}\,[R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx],$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Пример 6.25.

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 4x \sin x$;

$m = 0$;

$P_1(x) = 0$; $P_2(x) = 4x$;

$n = 1$.

Этот пример дается в качестве самостоятельного задания.

Можно убедиться, что общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(-x\cos x + \sin x)$

Теперь приведем **метод Лагранжа** (способ вариации произвольных постоянных), который позволяет находить общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

где $f(x)$ — любая функция.

Чтобы применить описываемый метод, надо знать общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{6.48}$$

где a и b могут быть как числами, так и некоторыми функциями от x. Будем считать, что a и b — числа.

Предположим, что дифференциальное уравнение (6.48), соответствующее дифференциальному уравнению (6.44), имеет общее решение:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать общее решение дифференциального уравнения (6.44) в виде

$$y = k_1(x) y_1 + k_2(x) y_2. \tag{6.49}$$

Здесь $k_1(x)$ и $k_2(x)$ — неизвестные функции, которые надо определить, а y_1 и y_2 — известные частные решения дифференциального уравнения (6.48).

Продифференцируем (6.49) и получим:

$$y' = k'_1(x) y_1 + k_1(x) y'_1 + k'_2(x) y_2 + k_2(x) y'_2.$$

Так как надо найти две функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$, то одним из соотношений между ними можно распорядиться произвольно.

Поэтому положим

$$k'_1(x) y_1 + k'_2(x) y_2 = 0. \tag{6.50}$$

Тогда $y' = k_1(x) y'_1 + k_2(x) y'_2$.

Последнее выражение продифференцируем второй раз и получим:

$$y'' = k'_1(x) y'_1 + k_1(x) y''_1 + k'_2(x)\, y'_2 + k_2(x) y''_2.$$

Теперь подставим в левую часть дифференциального уравнения (6.44) y, y', y'' и получим:

$$k'_1(x)y'_1 + k_1(x)y''_1 + k'_2(x)y'_2 + k_2(x)y''_2 + ak_1(x)\,y'_1 + ak_2(x)y'_2 +$$
$$+\, bk_1(x)y_1 + bk_2(x)y_2 = k'_1(x)y'_1 + k'_2(x)y'_2 + k_1(x)(y''_1 +$$
$$+\, ay'_1 + by_1) + k_2(x)(y''_2 + ay'_2 + by_2) = f\,(x);$$
$$y''_1 + ay'_1 + by_1 = 0;\; y''_2 + ay'_2 + by_2 = 0,$$

так как y_1 и y_2 есть частные решения дифференциального уравнения (6.48).

Поэтому для того, чтобы функция (6.49) была общим решением (6.44) необходимо выполнения двух условий.

$$\begin{cases} k'_1\,(x)y_1 + k'_2\,(x)y_2 = 0; \\ k'_1\,(x)y'_1 + k'_2\,(x)y'_2 = f(x). \end{cases} \qquad (6.51)$$

Для того чтобы система (6.51) имела решения, необходимо, чтобы ее определитель не был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Заметим, что этот определитель называется определителем Вронского.

Из системы (6.51) сначала находим $k'_1(x)$ и $k'_2(x)$, а затем интегрированием определяем сами функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$. Если при интегрировании $k'_1(x)$ и $k'_2(x)$ ввести произвольные постоянные, то сразу получим общее решение дифференциального уравнения (6.44).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.26.

$$y''+2y = \operatorname{ctg}\sqrt{2}x.$$

Исходному дифференциальному уравнению соответствует однородное дифференциальное уравнение $y'' + 2y = 0$, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$k^2 + 2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm i\sqrt{2}; \quad y_1 = \cos\sqrt{2}x; y_2 = \sin\sqrt{2}x.$$

Поэтому запишем общее решение исходного дифференциального уравнения в виде

$y = k_1\cos\sqrt{2}x + k_2\sin\sqrt{2}x$, здесь k_1 и k_2 — функции от x.

А затем составим систему уравнений (6.51) для нахождения k'_1 и k'_2

$$\begin{cases} k'_1 \cos\sqrt{2}x + k'_2 \sin\sqrt{2}x = 0; \\ -\sqrt{2}k'_1 \sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}k'_2 \cos\sqrt{2}x = \operatorname{ctg}\sqrt{2}x. \end{cases}$$

Решаем систему и получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}x & \sin\sqrt{2}x \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{vmatrix} = \sqrt{2}\cos^2\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin^2\sqrt{2}x = \sqrt{2};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\sqrt{2}x \\ \operatorname{ctg}\sqrt{2}x & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg}\sqrt{2}x \cdot \sin\sqrt{2}x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}x & 0 \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x & \operatorname{ctg}\sqrt{2}x \end{vmatrix} = \cos\sqrt{2}x \cdot \operatorname{ctg}\sqrt{2}x;$$

$$k'_1 = \frac{-\operatorname{ctg}\sqrt{2}x \cdot \sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}; \; k'_2 = \frac{\cos\sqrt{2}x \cdot \operatorname{ctg}\sqrt{2}x}{\sqrt{2}};$$

$$k'_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x; \quad k'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos^2\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{2}x}.$$

Интегрируем k'_1, k'_2 и находим

$$k_1 = -\int \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x dx = \left[\sqrt{2}x = t, x = \frac{t}{\sqrt{2}}; dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos t dt = -\frac{1}{2}\sin t + C_1 = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}x + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos^2\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{2}x} dx = \left[\sqrt{2}x = t, x = \frac{t}{\sqrt{2}}; dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{\sin t} + \cos t\right) = \left[u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}; dt = \frac{2du}{1+u^2}; \sin t = \frac{2u}{1+u^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{du}{u} + \cos t \right) = \frac{1}{2}\left(\ln|u| + \cos t\right) + C_2 = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + \cos t \right) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}x}{2}\right| + \cos\sqrt{2}x \right) + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Теперь общее решение исходного дифференциального уравнения мы запишем в виде:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}x + C_1 \right) \cdot \cos\sqrt{2}x +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{\sqrt{2}x}{2}\right| + \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}x \right) + C_2 \right] \cdot \sin\sqrt{2}x.$$

6.4. Понятие о системах обыкновенных дифференциальных уравнений

При решении некоторых задач физики, механики, экономики часто надо находить функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих искомые функции y_1, y_2, …, y_n, независимую переменную x и производные и (или) дифференциалы искомых функций. В настоящем учебнике кратко рассмотрим системы дифференциальных уравнений первого порядка. Они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (6.52)$$

Система вида (6.52), правые части которой не содержат производных искомых функций, называется нормальной. Про-

интегрировать систему дифференциальных уравнений — значит найти функции y_1, y_2, …, y_n,, удовлетворяющие (6.52) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0, \tag{6.53}$$

если они заданы.

Интегрирование системы (6.52) проводят следующим образом.

Дифференцируем по x первое уравнение системы (6.52) и получаем:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя в этом уравнении производные $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями из (6.52) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \Phi_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Дифференцируем его по x и, поступая аналогично предыдущему, найдем:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \Phi_3(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Продолжая далее также, придем к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Поэтому исходная система дифференциальных уравнений (6.52) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= \Phi_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} &= \Phi_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (6.54) получаем y_2, y_3, …, y_n, выразив их через $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

Подставляем выражения для y_2, y_3, …, y_n из (6.55) в последнее уравнение системы (6.54) и получаем дифференциальное уравнение n-го порядка для определения y_1, т. е.

$$\frac{dy_1^n}{dx^n} = F(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \tag{6.56}$$

Решаем уравнение (6.56) и находим y_1

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{6.57}$$

Далее дифференцируем уравнение (6.57) $(n-1)$ раз и находим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от x, C_1, C_2, …, C_n. Затем подставляем их в (6.55) и находим искомые функции y_2, y_3, …, y_n, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_3 &= \psi_3(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

Для того чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (6.53) надо найти из (6.57) и (6.58) соответствующие постоянные C_1, C_2, …, C_n.

Теперь приведем конкретный пример решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 6.27. Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ &\frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

Из второго уравнения системы находим

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - y$$

и, подставив в первое уравнение этой системы, получим

$$4\cos t - 4y - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t$$

или

$$\frac{dy}{dt} = 4\cos t - 4y + 3x - \sin t. \qquad (6.60)$$

Продифференцируем по t уравнение (6.60):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt} - 4\sin t - \cos t.$$

Подставим в это уравнение вместо $\frac{dy}{dt}$ его значение из (6.60), а вместо $\frac{dx}{dt}$ его значение из (6.59):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\cos t - 3y - 16\cos t + 16y - 12x + 4\sin t - 4\sin t - \cos t.$$

После преобразований получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -14\cos t + 13y - 12x. \qquad (6.61)$$

Найдем x из дифференциального уравнения (6.60):

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} - 4\cos t + 4y + \sin t\right)$$

и подставим его значение в (6.61). Тогда получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2\cos t - 4\sin t. \qquad (6.62)$$

Уравнение (6.62) — это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которые рассматривались в п. 6.3.4. Решив уравнение (6.62), найдем неизвестную функцию y.

Вначале найдем общее решение дифференциального уравнения без правой части, т. е. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 4k + 3 = 0;\ k_1 = -1;\ k_2 = -3.$$

А общее решение следующее:

$$y_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t},$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Теперь найдем любое частное решение дифференциального уравнения (6.62):

$$f(x) = 3\cos t - 4\sin t.$$

Так как числа $\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение (6.62) ищем в виде

$$y_2 = A\cos t + B\sin t,$$

где A и B неизвестные постоянные, которые необходимо определить.

Находим y_2' и y_2'':

$$y_2' = -A\sin t + B\cos t$$
$$y_2'' = -A\cos t - B\sin t.$$

Поставляем y_2; y_2'; y_2'' в (6.62) и получаем:

$$-A\cos t - B\sin t - 4A\sin t + 4B\cos t + 3A\cos t + 3B\sin t =$$
$$= 2\cos t - 4\sin t$$

или

$$2A\cos t + 4B\cos t + 2B\sin t - 4A\sin t = 2\cos t - 4\sin t,$$

или

$$\cos t\,(2A + 4B) + \sin t\,(2B - 4A) = 2\cos t - 4\sin t,$$
$$2A + 4B = 2 \to A = 1,$$
$$2B - 4A = -4 \to B = 0.$$

Следовательно,

$$y_2 = \cos t.$$

А общее решение дифференциального уравнения (6.62) имеет вид:

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-t} + C_2^{-3t} + \cos t. \qquad (6.63)$$

Теперь определим неизвестную функцию x по формуле

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} - 4\cos t + 4y + \sin t\right). \qquad (6.64)$$

Дифференцируя по t уравнение (6.63) находим

$$\frac{dy}{dt} = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t} - \sin t.$$

Подставляя в (6.64) найденные значения dy/dt и значение y из формулы (6.63), получаем искомую функцию x, т. е.

$$x = \frac{1}{3}(-C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t} - \sin t - 4\cos t + \sin t + 4C_1 e^{-t} +$$

$$+ 4C_2 e^{-3t} + 4\cos t) = \frac{1}{3}\left(3C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}\right) = C_1 e^{-t} + \frac{1}{3} C_2 e^{-3t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $(x + 5)dy - (y + 10)dx = 0$;

б) $(3xy^2 + 2x)dx + (2y + x^2 y)dy = 0$;

в) $y' = \dfrac{10}{x^2 - 4}$;

г) $2\sin x dx + \dfrac{3dy}{\sqrt{2y}} = 0$;

д) $2y\cos y - \sin^5 x dy = 0$.

2. Предположим, что темп изменения производительности труда характеризуется функцией $f(t)$. Найти функцию производительности труда $y = y(t)$, если:

а) $f(t) = \dfrac{5t}{\sqrt{t^2 + 4}}$; $\quad y_{|t=0} = 0$;

б) $f(t) = \dfrac{\ln t}{6t}$; $\quad y_{|t=e} = 1$;

3. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений:

а) $(y - x)dx + (y + x)dy$;

б) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$;

в) $(6y + 4x)dx + (3y + 8x)dy = 0$;

г) $x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx)$.

4. Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений и частные решения там, где заданы начальные условия:

а) $y'+\frac{2x}{1-x^2}y=1$;

б) $y'-7ytgx=\frac{5x}{\cos x}$;

в) $2xy'-3x^2y=\frac{e^{x^2}}{x+\frac{1}{x}}$, $y_{|x=0}=1$;

г) $2xy'+\frac{1}{\ln x}y=\frac{x^2+7}{\ln x}$, $y_{|x=e}=e^2$.

5. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'-2y+7=0$;

б) $3y'-6y+9=0$.

6. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y''=5x$;

б) $y''=\cos x$;

в) $y''=18x^2+2$;

г) $y''=10x^2+2x$.

7. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений:

а) $y''=\frac{1}{x^2}-1$ при $y_{|x=1}=-1$; $y'_{|x=1}=1$;

б) $y''=\sin x$ при $y_{|x=0}=0$; $y'_{|x=0}=1$

8. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y''-5y'+6=0$;

б) $y''-3y'+16=0$;

в) $y''-22y'+12=0$;

г) $6y''-10y'-7=0$;

9. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y''+4y'+3=0$, если $y_{|x=0}=-1$; $y'_{|x=0}=4$

б) $y''-10y'+25=0$, если $y_{|x=1}=2$; $y_{|x=1}=6$

10. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 2y' + 2y = 3e^{4x}$;

б) $y'' - y' - 2y = e^{7x}$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 3x - 16$;

г) $y'' + 4y' + 4y = 3\sin 3x + 2\cos 3x$;

д) $y'' - 12y' + 36y = 3\sin x$;

е) $y'' - 4y' - 5y = \cos 3x$.

11. Решить системы дифференциальных уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4y + 3x; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + 2x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + y + 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 2z. \end{cases}$

12. Найти общее решение уравнений Бернулли:

а) $y' + \dfrac{2y}{x} = -xy^2$;

б) $y' + 4xy = x^3y^2$.

13. Проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах:

а) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$;

б) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$.

14. Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\lambda = \lambda(x)$ или $\lambda = \lambda(y)$:

а) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$;

б) $(y + xy^2)dx - xdy = 0$.

15. Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений:

а) $(x - 2y + 5)dy + (2x + y - 3)dx = 0$;

б) $(x - y + 7)dy + (x + y - 9)dx = 0$.

16. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y' + \frac{5}{x}y = \frac{5}{x^2}$, используя метод Лагранжа. Затем определить его частное решение, используя следующее начальное решение: $y = 0$; $x = 1$.

17. Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

а) $5xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

б) $y'' - \left(\frac{y'}{x} - 1\right) = 3x(x-1)$;

в) $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$

г) $2(y')^2 + y \cdot y'' = yy'$.

18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 8y = e^{3x} \cdot (x\sin x + x^2 \cdot \cos x)$.

19. Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений

а) $y = 5xy' - (e^y)'$;

б) $y = x(y')^2 + 2(y')^2$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?

2. Что такое общее решение дифференциального уравнения первого порядка?

3. Что такое частное решение и в чем суть начальных условий для дифференциального уравнения первого порядка?

4. Дать формулировку теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

5. Что является геометрической иллюстрацией общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка?

6. Что такое дифференциальное уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и каким методом его можно решить?

7. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются однородными, каков их метод решения?

8. Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются линейными, каков их метод решения?

9. В чем состоит метод Лагранжа решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка?

10. Какие функции называются однородными функциями n-го измерения?

11. Как найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами?

12. Чем отличается задание краевых условий от задания начальных условий в дифференциальных уравнениях второго порядка?

13. Какие дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами называются однородными?

14. Как найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

15. Как найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

16. Что называется системой дифференциальных уравнений и ее решением?

17. Как система дифференциальных уравнений сводится к одному дифференциальному уравнению высшего порядка?

18. Какое уравнение называется уравнением Бернулли и каков метод его решения?

19. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением в полных дифференциалах?

20. Каковы методы решения уравнений в полных дифференциалах?

21. Что такое интегрирующий множитель и каков метод его нахождения?

Глава 7. РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Выражение $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$,

где $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ — некоторые числа, называют числовым рядом; $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ — это члены ряда.

Для любого числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ можно построить последовательность его частичных сумм S_n:

$S_1 = w_1$;

$S_2 = w_1 + w_2$;

$S_3 = w_1 + w_2 + w_3$;

.....

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.1)$$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда и говорят, что этот ряд сходится. Если этот предел не существует, то говорят, что ряд (7.1) расходится и суммы не имеет.

Приведем конкретные примеры.

Пример 7.1.

Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Пример 7.2.

Геометрическая прогрессия

$w + wq + wq^2 + \ldots + wq^{n-1} + \ldots\ (w \neq 0)$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Если $|q| < 1$, то $w + wq + wq^2 + \ldots + wq^{n-1} + \ldots = \dfrac{w}{1-q}$.

Пример 7.3.

Обобщенно гармонический ряд $\dfrac{1}{1^a} + \dfrac{1}{2^a} + \ldots + \dfrac{1}{n^a} + \ldots$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leq 1$.

Пример 7.4.

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e - 1,$$

т. е. данный ряд сходится и его сумма равна $(e - 1)$.

При исследовании рядов одним из важнейших вопросов является вопрос о том, сходится изучаемый ряд или расходится. Далее рассмотрим достаточные признаки, на основании которых можно решить этот вопрос. Сейчас же приведем необходимый признак сходимости рядов, т. е. условие, при невыполнении которого ряды расходятся.

Теорема 7.1. Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Следствие. Если n-й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится. Данный признак не является достаточным, т. е. он может выполняться, а ряд будет расходиться. Например, гармонический ряд из примера 7.1 расходится, несмотря на то, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

Основные свойства сходящихся числовых рядов

1. Сходимость числового ряда не нарушится, если приписать или отбросить конечное число его членов.

2. Если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число k, то его сходимость не нарушится.

3. Два сходящихся ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S_1$; $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = S_2$ можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$ будет сходится, а его сумма будет равна $S_1 \pm S_2$.

Признаки сравнения

Если все члены рядов

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (7.2)$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (7.3)$$

неотрицательны и $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то из сходимости ряда (7.3) следует сходимость ряда (7.2). Из расходимости ряда (7.2) следует расходимость ряда (7.3).

Если все члены рядов (7.2) и (7.3) положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = C, 0 < C < +\infty$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 7.5.

Ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$ расходится, так как гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}:\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$.

Пример 7.6.

Ряд $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ расходится, так как его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов гармонического ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, который расходится.

Признак Коши

Если все члены ряда $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ неотрицательны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n} = b$, то при $b < 1$ этот ряд сходится, а при $b > 1$ расходится (при $b = 1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда).

Пример 7.7.

Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Применяем к данному ряду признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

и видим, что он сходится.

Признак Даламбера

Если все члены ряда $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=l$, то при $l < 1$ этот ряд сходится, а при $l > 1$ этот ряд расходится (при $l = 1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда).

Пример 7.8. Исследуем сходимость ряда

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$$

Применяем к данному ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}:\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

и видим, что он сходится.

Интегральный признак сходимости Коши

Если $W_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $f(n)$ — значение при $x = n$ некоторой функции $f(x)$, непрерывной, положительной и не возрастающей при $x \geq 1$, то ряд $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ сходится или расходится в зависимости от того, существует или нет конечный $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b f(x)dx$.

Пример 7.9.

Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots .$$

Применяем к данному ряду интегральный признак сходимости Коши, положив $f(x)=\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = 1,$$

т. е. ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов

Числовой ряд

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \tag{7.4}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots \tag{7.5}$$

Абсолютно сходящийся ряд всегда сходится. Если ряд (7.4) сходится, а ряд (7.5) расходится, то говорят, что ряд (7.4) сходится условно.

Теперь приведем теорему Лейбница, которая применяется для знакочередующихся рядов; т. е. рядов, у которых положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Теорема 7.2. Ряд

$$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \ldots + (-1)^{n-1}w_n + \ldots,$$

где все $w_n > 0$, сходится, если все его члены таковы, что $w_1 > w_2 > > w_3 > \ldots > w_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, а его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1. Если ряд сходится абсолютно, то новый ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

2. Если ряд сходится условно, то какое бы число S ни взять, можно так переставить члены в этом ряде, чтобы сумма преобразованного ряда была равна именно S.

3. Если ряд сходится условно, то можно так переставить члены в этом ряде, что новый ряд будет расходиться.

7.2. Функциональные ряды

Выражение вида

$$W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x), \tag{7.6}$$

где $W_1(x)$, $W_2(x)$, ..., $W_n(x)$, ... — некоторые функции, определенные на одном и том же множестве D, называется функциональным рядом.

Множество $E \subseteq D$ всех значений x, при которых функциональный ряд (7.6) сходится (как числовой ряд), называется областью сходимости этого ряда. Функция $S(x)$, $x \in E$ является суммой ряда (7.6), если

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x)$.

Если функция $S(x)$, $x \in P (P \subseteq E)$ является суммой ряда (7.6), то говорят, что этот ряд сходится на множестве P к функции $S(x)$.

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве P к функции $S(x)$, если для $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n \geq N$ сразу для всех $x \in P$ выполняется неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Если функциональный ряд сходится на множестве P, то на этом множестве сходимость не обязана быть равномерной, но на некотором подмножестве множества P сходимость может оказаться равномерной.

Приведем признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Если члены функционального ряда

$$W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots$$

удовлетворяют на множестве P неравенствам

$$|W_n(x)| \leq W_n \ (\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots),$$

где W_n — члены сходящегося числового ряда

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n + \ldots,$$

то функциональный ряд сходится на множестве P равномерно.

Пример 7.10.

Ряд $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ сходится на $P = (-\infty; +\infty)$ равномерно, так как всегда $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Если функции $W_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, а составленный из них ряд $W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots$ сходится равномерно на этом отрезке к функции $S(x)$, то:

1) функция $S(x)$ на $[a, b]$ непрерывна;

2) $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b W_1(x)dx + \int_a^b W_2(x)dx + \ldots + \int_a^b W_n(x)dx + \ldots$

Пример 7.11.

Ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ сходится равномерно к функции $\frac{1}{1-x}$, поэтому

$$\int_0^{1/2} 1 \cdot dx + \int_0^{1/2} x dx + \ldots + \int_0^{1/2} x^{n-1} dx + \ldots = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x}$$

или $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots = \ln 2.$

Если функции $W_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке:

1) ряд $W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots$
сходится к функции $S(x)$;

2) ряд $W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x) + \ldots$
сходится равномерно, то $S(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и

$$S'(x) = W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x) + \ldots .$$

7.3. Степенные ряды

Функциональный ряд.

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n, \qquad (7.7)$$

где $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и x_0 — некоторые числа, называют степенным рядом с центром в точке x_0.

Возможны следующие три случая:

1) степенной ряд (7.7) сходится только при $x = x_0$ (везде расходящийся ряд);

2) степенной ряд (7.7) сходится (причем абсолютно) при любых значениях (всюду сходящийся ряд);

3) существует число $R > 0$ такое, что ряд (7.7) сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$ (радиус сходимости ряда). $R = 0$ для всюду расходящегося ряда и $R = \infty$ для всюду сходящегося ряда.

Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда (7.7). При этом на концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 7.12.

Найдем область сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{x^m}{n \cdot 2^n} + \ldots .$$

Положим $W_n = \dfrac{|x|^n}{n \cdot 2^n}$; $W_{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$.

Тогда по признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}|x|^n} = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2},$$

следовательно, данный степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 2$ и расходится при $|x| > 2$, а радиус его сходимости равен 2 ($R = 2$).

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости: при $x = 2$ ряд $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится, а при $x = -2$ ряд $-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ сходится. Поэтому область сходимости исходного степенного ряда $E = [-2; 2)$.

Основные свойства степенных рядов

1. Если степенной ряд не является всюду расходящимся, то его сумма непрерывна в каждой точке области сходимости.

2. Степенной ряд внутри его области сходимости можно интегрировать почленно, так что если

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots + \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots = S(x),\ x \in E,$$

то

$$\alpha_0(x-x_0)+\alpha_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\alpha_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+\ldots+$$
$$+\alpha_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+\ldots=\int_0^x S(x)dx.$$

3. Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно, так что если

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots + \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots = S(x),$$
$$x \in (x_0 - R, x_0 + R),\ R > 0,$$

то

$$\alpha_1 + 2\alpha_2(x - x_0) + \ldots + n\alpha_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots = S'(x),$$
$$x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Это свойство сохраняет силу и для конца интервала сходимости, если только последний ряд на этом конце сходится.

4. Если степенной ряд

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots + \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots$$

не является всюду расходящимся, то его сумма $S(x)$ имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков. При этом

$$\alpha_0 = S(x_0);\ \alpha_1 = S'(x_0),\ \alpha_2 = \frac{S''(x_0)}{2!}, \ldots, \alpha_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots .$$

Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков при $x = x_0$, то степенной ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{7.8}$$

называют рядом Тейлора для функции $f(x)$. При $x_0 = 0$ получают частный случай ряда Тейлора

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \tag{7.9}$$

который часто называют рядом Маклорена.

Для того чтобы ряд (7.8) сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, где $R_n(x)$ — остаточный член ряда Тейлора.

Приведем теорему, которая позволяет устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при неограниченном возрастании n или нет, т. е., разлагается ли функция $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

Теорема 7.3.

Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет $(n + 1)$-ю производную $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этого интервала имеет вид

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\eta)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где η заключено между x_0 и x (см. гл. 4).

Приведем разложения в степенной ряд некоторых функций:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sin x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\cos x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=arctgx, \ |x|\le 1;$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\ln(x+1), \quad x\in(-1;1].$$

7.4. Некоторые приложения степенных рядов

7.4.1. Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть необходимо найти интеграл $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ и известно разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора или Маклорена, а верхний и нижний пределы данного интеграла лежат внутри интервала сходимости (-R; R). В этом случае можно интегрировать ряд поэлементно. Получим ряд Тейлора или Маклорена для функции $F(x)$, который имеет тот же радиус сходимости, что и ряд для подынтегральной функции $f(x)$. Если интеграл $\int_a^x f(x)dx$ выражается через элементарную функцию $F(x)$, то находим ее разложение в ряд Тейлора или Маклорена. Если интеграл $\int_a^x f(x)dx$ является “неберущимся”, т. е. не выражается в элементарных функциях, то полученный ряд может служить выражением для неэлементарной функции $F(x)$ через элементарные степенные функции. Выражение это будет бесконечным.

Пример 7.13.

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ с точностью до 0,1.

Данный интеграл является “неберущимся”, поэтому разложим функцию e^x в ряд Маклорена (это разложение было проведено в подразд. 7.3). Получим:

$$\int_1^2 (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+...)\frac{dx}{x}=$$

$$=\int_1^2 (\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+...)dx=$$

$$=\int_1^2 \frac{dx}{x}+\int_1^2 dx+\frac{1}{2}\int_1^2 xdx+\frac{1}{6}\int_1^2 x^2dx+\frac{1}{24}\int_1^2 x^3dx+\frac{1}{120}\int_1^2 x^4dx+...=$$

$$=\ln|x|\Big|_1^2+x\Big|_1^2+\frac{x^2}{4}\Big|_1^2+\frac{x^3}{18}\Big|_1^2+\frac{x^4}{96}\Big|_1^2+\frac{x^5}{600}\Big|_1^2+...=$$

$$=\ln 2+1+\frac{3}{4}+\frac{7}{18}+\frac{15}{96}+\frac{31}{600}+...\approx$$

$$\approx 0{,}693+1+0{,}75+0{,}389+0{,}156+0{,}052+...\approx 3{,}04.$$

Пример 7.14.

В теории вероятностей большую роль играет специальная функция $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$, которую называют нормированной функцией Лапласа. Интеграл, которым выражается эта функция, является “неберущимся”. Поэтому разложим подынтегральную функцию $e^{-x^2/2}$ в ряд, использовав разложение в ряд Маклорена функции e^x, подставив туда вместо x $\left(\frac{-x^2}{2}\right)$. Тогда получим:

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2!}-\frac{x^6}{8\cdot 3!}+\frac{x^8}{16\cdot 4!}-...\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^x dx-\frac{1}{2}\int_0^x x^2dx+\frac{1}{8}\int_0^x x^4dx-\frac{1}{8\cdot 3!}\int_0^x x^6dx+\frac{1}{16\cdot 4!}\int_0^x x^8dx-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{56\cdot 3!}+\frac{x^9}{144\cdot 4!}-\ldots\right).$$

Полученный нами ряд сходится на всей числовой оси, сходится быстро, поэтому значения нормированной функции Лапласа удобно вычислять. Заметим, что для нахождения значений функции $\Phi_0(x)$ составлены таблицы.

7.4.2. Приближенное решение дифференциальных уравнений

В том случае, если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции или метод его решения слишком сложен, для его приближенного решения можно использовать ряд Тейлора.

Предположим, что надо решить дифференциальное уравнение

$$y''=f(x,y,y'), \tag{7.10}$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0;\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0'. \tag{7.11}$$

Для нахождения частного решения используем метод последовательного дифференцирования.

Предположим, что решения дифференциального уравнения в окрестности точки x_0, в которой заданы начальные условия, можно разложить в ряд Тейлора.

$$y=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{7.12}$$

Первые два коэффициента в ряде (7.12) можно определить по начальным условиям (7.11). Затем подставляем в исходное дифференциальное уравнение (7.10) значение $x = x_0$, $y = y_0$,

$y' = y'_0$ и определяем третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0)$. Значение последующих коэффициентов $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$, ..., $y^{(n)}(x_0)$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения (7.10) по x и нахождение производных соответствующего порядка при $x = x_0$. Затем найденные значения производных подставляют в ряд (7.12).

Он и является частным решением исходного дифференциального уравнения (7.10) для тех значений x, для которых он сходится. Частичная сумма этого ряда есть приближенное решение уравнения (7.10) при начальных условиях (7.11).

Данный метод можно применять решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример 7.15.

Используя метод последовательного дифференцирования найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = x \times \times \sin y'$, если начальные условия таковы $y\big|_{x=1} = 0$; $y'\big|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$.

Будем искать решение данного дифференциального уравнения в виде ряда Тейлора:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$

$$+ \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

Используя заданные начальные условия, определяем: $y(1) = 0$; $y'(1) = \frac{\pi}{2}$. Затем находим $y''(1)$. Для этого подставляем в исходное дифференциальное уравнение $x = 1$ и $y' = \frac{\pi}{2}$ и получаем: $y''(1) = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем по x заданное дифференциальное уравнение и получаем:

$$y''' = \sin y' + x \cdot \cos y' \cdot y'',$$

$$y^{(4)} = \cos y' \cdot y'' + \cos y' \cdot y'' + x \cdot y'' \cdot (-\sin y') \cdot y'' + x \cdot \cos y' \cdot y''' =$$

$$= 2\cos y' \cdot y'' - x \cdot (y'')^2 \cdot \sin y' + xy''' \cdot \cos y' \text{ и т. д.}$$

Далее имеем:

$$y'''(1)=\sin\frac{\pi}{2}+1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=1.$$

$$y^{(4)}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot 1-1\cdot(1)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2}+1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=-1 \text{ и т. д.}$$

Подставляем значения найденных производных в ряд и получаем искомое приближенное частное решение заданного дифференциального уравнения.

$$y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4+\ldots$$

7.5. Понятие о рядах Фурье

Сначала напомним, что функция $f(x)$, которая определена при всех значениях x, называется периодической, если есть такое число $T \neq 0$, что при любом значении x выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.

В этом случае T называется периодом функции.

Приведем некоторые свойства периодических функций:

1. Сумма, разность, произведение, частное периодических функций с периодом T есть периодические функции периода T.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(bx)$ имеет период T/b.

3. Если $f(x)$ есть периодическая функция с периодом T, то равны два любые интеграла от этой функции, взятые по промежутку длины T (предполагается, что эти интегралы существуют), т. е.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_c^{c+T} f(x)dx.$$

Дадим также понятия о гармонических колебаниях.

Простое гармоническое колебание описывается функцией

$$y = A\cdot\sin(\omega t + \alpha_0),$$

где y — отклонение колеблющейся точки от положения равновесия;

A — амплитуда колебания;

$\omega = 2\pi/T$ — круговая частота;

α_0 — начальная фаза.

Функция $A \cdot \sin(\omega t + \alpha_0)$ и ее график называется простой гармоникой. Ее можно представить в виде $A \cdot (\sin\omega t \cdot \cos\alpha_0 + \cos\omega t \cdot \sin\alpha_0)$.

То есть простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

Колебания, которые получаются в результате сложения нескольких или бесконечно многих простых гармонических колебаний, тоже будут описываться функциями вида $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

С помощью так называемого тригонометрического ряда практически любую периодическую функцию можно разложить на простые гармоники.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0/2 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots +$$

$$+ a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad (7.13)$$

где a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n — коэффициенты тригонометрического ряда.

Если ряд (7.13) сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом 2π, так как такой период имеют функции $\sin nx$ и $\cos nx$.

Поэтому $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Предположим, что функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$, т. е. является суммой этого ряда и записывается следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \quad (7.14)$$

Если коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad (7.15)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \qquad (7.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \qquad (7.17)$$

то они называются коэффициентами Фурье, а тригонометрический ряд (7.13) с такими коэффициентами называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Теперь сформулируем теорему, которая дает достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

Теорема 7.4 (теорема Дирихле).

Пусть функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, или этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов таким образом, что на каждом из них функция будет монотонна;

2) $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на данном отрезке и при этом:

а) в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией, т. е. $S(x) = f(x)$;

б) в каждой точке разрыва (x_0) функции $f(x)$ сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т. е. она равна среднему арифметическому от правого и левого пределов в этой точке;

в) на концах отрезка в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Теореме Дирихле удовлетворят большинство функций, встречающихся в математике. Есть функции, которые не удовлетворяют условиям Дирихле, но разлагающиеся в ряд Фурье,

так как теорема 7.4 дает только достаточное условие разложимости.

Приведем конкретный пример разложения функции в ряд Фурье.

Пример 7.16.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π определена следующим образом: $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi]$.

Данная функция является кусочно-монотонной и ограниченной, т. е. она может быть разложена в ряд Фурье. Применяем формулы (7.15)–(7.17) и находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \begin{pmatrix} U = x;\ du = dx \\ dv = \cos nx dx \\ V = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right] = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \begin{pmatrix} U = x;\ du = dx \\ dv = \sin nx dx \\ V = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Поэтому получаем ряд

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Данное равенство имеет место во всех точках, за исключением точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда есть среднее арифметическое от ее пределов слева и справа, т. е. равна нулю.

Задачи для самостоятельного решения

1. С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^{2n}+2}$; 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+1}$;

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n-1}$.

2. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

2.1. $1+\frac{2!}{5}+\frac{3!}{5^2}+\frac{4!}{5^3}+\ldots$;

2.2. $\frac{1}{(\ln 2)^3}+\frac{1}{2!(\ln 3)^3}+\frac{1}{3!(\ln 4)^3}+\ldots$;

3. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши:

3.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$;

3.2. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n^2}$.

4. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$; 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{5n^4+2}$.

5. Исследовать абсолютную или условную сходимость рядов:

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^3}$; 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$;

5.3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$; 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)\cdot 4^n}$

6. Найти области сходимости степенных рядов:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{3n}$; 6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$;

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; 6.4. $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \ldots$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π.

7.1. $f(x) = |x|$, где $x \in (-\pi, \pi)$.

7.2. $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{где } x \in (-\pi; 0];\\ 4x, & \text{где } x \in (0; \pi).\end{cases}$

8. Вычислить определенный интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos x}{x}dx$ с точностью до 0,01.

9. Используя метод последовательного дифференцирования, найти приближенное частное решение дифференциального уравнения $y''=5x+2y'$, если начальные условия имеют вид: $y\big|_{x=1}=0,\ y'\big|_{x=1}=1$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовым рядом?
2. Что такое сумма ряда? Дать определение сходящегося и расходящегося рядов.
3. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
4. В чем суть признаков Даламбера и Коши?
5. В чем суть интегрального признака Коши?
6. Какой ряд называется знакочередующимся?
7. В чем сущность признака Лейбница?
8. Что называется абсолютной и условной сходимостью ряда?
9. Какой ряд называется функциональным?
10. Что называется областью сходимости функционального ряда?
11. Какой ряд называется степенным?
12. Каковы основные свойства степенных рядов?
13. Какой ряд называется тригонометрическим?

14. Сформулируйте достаточный признак разложения функции в ряд Фурье.

15. В каких случаях используют ряды для вычисления определенных интегралов?

16. В чем состоит способ последовательного дифференцирования?

Глава 8. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Общие понятия и определения

Теория вероятностей — раздел математики, который занимается изучением закономерностей в случайных явлениях.

Случайное явление — это явление, которое при многократном проведении одного и того же опыта (эксперимента) каждый раз протекает несколько по-иному. Теория вероятностей рассматривает не сами явления, а их математические модели. Математическая модель описывает изучаемое явление при помощи определенных символов и операций над ними.

Под опытом (экспериментом) будем понимать некоторую воспроизводимую совокупность условий, в которых наблюдается изучаемое явление. Если результат опыта может варьироваться при его повторении, то говорят об опыте со случайным исходом. Основные условия, при которых протекает опыт, должны сохраняться. Опыт не обязательно должен быть поставлен людьми, человек может выступать и в качестве наблюдателя. Примерами случайных явлений являются: курс национальной валюты, выпадение грани с цифрой шесть при бросании игральной кости, выигрыш на рулетке в казино, результат измерения горизонтального угла с помощью теодолита, длительность работы стиральной машины и т. д.

8.2. Классификация событий

Если событие всегда происходит в результате опыта со случайным исходом, то оно называется достоверным. Такие события мы будем обозначать буквой U. Если в урне лежат только красные шары, то появление красного шара из урны есть достоверное событие. Надо иметь в виду, что в реальной действительности мы имеем дело с почти достоверными событиями.

Если событие никогда не происходит в результате опыта со случайным исходом, то оно называется невозможным и обозначается $\varnothing$. Если в урне лежат только белые шары, то появление красного шара из урны есть невозможное событие. В реальной жизни мы имеем дело с почти невозможными событиями.

Случайным событием называется событие, которое в результате опыта со случайным исходом может произойти, а может и не произойти. Случайные события мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C,... Например, выпадение решки при бросании монеты — случайное событие.

Событием, противоположным событию A, является событие $\overline{A}$, которое происходит тогда, когда не происходит событие A.

Например, производится стрельба по мишени. Событие A — попадание в мишень, а событие $\overline{A}$ — промах.

Непосредственный исход опыта называется элементарным событием и обозначается ω.

Множество всех элементарных событий данного конкретного опыта называется пространством элементарных событий этого опыта и обозначается Ω.

Например, в опыте бросания игральной кости шесть элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$, т. е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Событие удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера. Достоверное событие U мы будем изображать прямоугольником, случайное событие A — кругом внутри прямоугольника, а противоположное к нему событие $\overline{A}$ — область внутри прямоугольника, но вне круга (рис. 8.1).

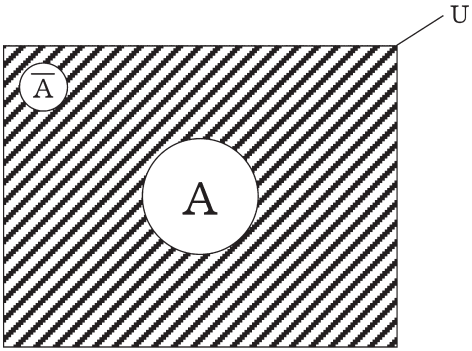


Рис. 8.1

8.3. Алгебра событий

Введем понятия суммы и произведения событий.

Определение. Суммой (объединением событий) A_1, A_2,... A_n называется событие, происходящее только в том случае, когда происходит хотя бы одно из данных событий (или A_1 или A_2, ..., или A_n, или все вместе). Обозначают сумму событий так:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

На рис. 8.2. показано изображение суммы двух событий A+B с помощью кругов Эйлера.

Определение. Произведением (пересечением) событий A_1, A_2,... A_n называется событие, которое происходит только в том случае, когда все указанные события появляются одновременно, т. е. происходит и событие A_1, и A_2... и A_n. Обозначается произведение событий следующим образом:

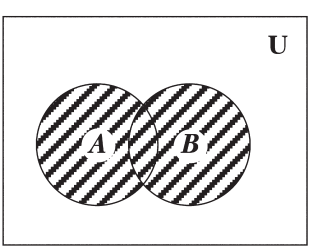


Рис. 8.2

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

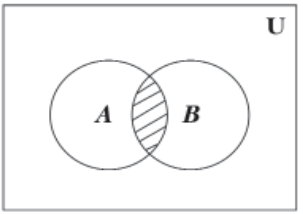


Рис. 8.3

На рис. 8.3. показано изображение произведения двух событий $A \times B$ с помощью кругов Эйлера.

Определение. События A_1, A_2, ... A_n называются несовместными, если их произведение есть невозможное событие, т. е. $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \varnothing$. Заметим, что если события попарно несовместны, то они несовместны в совокупности. Несовместными являются все элементарные события некоторого опыта со случайным исходом, например $A \times \overline{A} = \varnothing$.

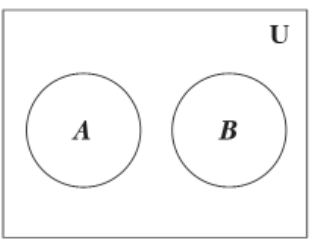


Рис. 8.4

На рис. 8.4. показаны два несовместных события A и B.

Определение. Полной группой событий называется множество попарно несовместных событий, одно из которых обязательно произойдет в результате опыта со случайным исходом, т. е. сумма которых есть достоверное событие.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \qquad A_i A_j = \varnothing, \qquad i \neq j$$

Все элементарные события ω_i пространства элементарных событий Ω составляют полную группу событий. Например, полную группу событий составляют события A и $\overline{A}$, т. е. $A + \overline{A} = U$. Поэтому часто достоверные события U обозначают символом Ω, так же как пространство элементарных событий.

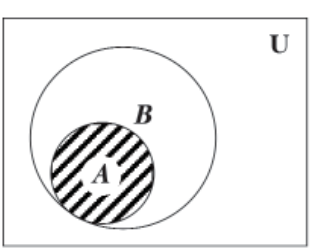


Рис. 8.5

Определение. Событие A называется частным случаем события B, если при появлении события A появляется и событие B, т. е. A влечет B. Обозначается этот факт следующим образом: $A \subset B$. На кругах Эйлера A есть собственное подмножество множества *B* (рис. 8.5).

Приведем некоторые правила алгебры событий:

1) $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$;

2) $A + U = U$; $A + \varnothing = A$; $A + A = A$;

3) $A \times B = B \times A$; $A \times U = A$; $A \times \varnothing = \varnothing$;

4) $A \times A = A$; $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$; $\overline{\overline{A}} = A$.

Приведенные правила следуют из определения суммы, произведения событий и противоположного события. С помощью них можно, например, доказать, что сумму двух любых событий можно представить в виде суммы двух несовместных событий, т. е. $A + B = A + \overline{A} \times B$ (рис. 8.6).

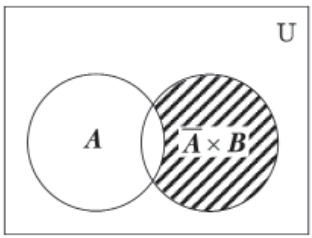


Рис. 8.6

8.4. Вероятность события

Вероятность события — это мера его объективной возможности. Но данное определение вероятности не является математическим, так как не дает возможности оценить вероятность количественно. Существует несколько математических определений вероятности. Самыми старыми из этих определений являются статистическое и классическое определения.

Статистическое определение вероятности. Предположим, что мы можем проводить некоторый опыт со случайным исходом (например, бросание монеты на некоторую поверхность) неоднократно, примерно в одних и тех же условиях. В результате этого опыта может появиться событие A = {выпал герб}.

Определение. Относительной частотой (или, как говорят в статистике, частостью) события A (f(A)) называется отношение числа опытов μ (его называют в статистике частотой события A), в которых появилось событие A, к общему числу проведенных опытов (n), т. е.

$$f(A) = \frac{\mu}{n}. \qquad (8.1)$$

Практика показывает, что для широкого круга случайных явлений при неограниченном увеличении числа опытов, т. е. при $n \to \infty$, относительная частота события А стабилизируется и по вероятности приближается к некоторому неслучайному числу. Например, при бросании монеты относительная частота появления орла при неограниченном увеличении числа опытов стремится к числу 0,5. Приведем свойства относительной частоты события А.

1) $f(U) = 1$, так как $\mu = 1$.

2) $f(\varnothing) = 0$, так как $\mu = 0$.

3) $0 \le f(A) \le 1$, т. е. относительная частота случайного события заключена между нулем и единицей и в частном случае может быть нулем или единицей.

4) Если события A_1, A_2, ... A_n несовместны, то выполняется равенство

$$f(A_1 + A_2 + ... + A_n) = f(A_1) + f(A_2) + ... + f(A_n).$$

Статистическое определение вероятности. Вероятностью события А ($P(A)$) называется число, около которого колеблется относительная частота события А ($f(A)$) при неограниченном увеличении числа опытов ($n \to \infty$). То есть можно записать

$$P(A) \approx f(A) = \frac{\mu}{n} \tag{8.2}$$

или

$$\lim_{n \to \infty} P\{|f(A) - P(A)| < \varepsilon\} = 1, \tag{8.3}$$

где $\varepsilon > 0$ — малое положительное число.

Устойчивость относительных частот при большом количестве испытаний является следствием закона больших чисел.

Характер приближения относительной частоты к вероятности при $n \to \infty$ отличается “от стремления к пределу” в математическом анализе.

Нет ничего невозможного в том, что относительная частота события при $n \to \infty$ сильно отклонится от ее вероятности, но такое отношение настолько маловероятно, что его можно не принимать в расчет.

Заметим, что все свойства относительных частот верны и для вероятностей.

Классическое определение вероятности. Оно было впервые четко сформулировано в работе швейцарского математика Якоба Бернулли, опубликованной в 1713 г. Введем понятие равновозможного события. События называются равновозможными, если по условиям обыта ни одно из них не является предпочтительным по отношению к другим с точки зрения возможности их появления.

В этом случае опыт будет обладать симметрией исходов по отношению к этим событиям.

Классическое определение вероятности можно использовать только в том случае, если опыт будет классическим. Опыт называется классическим, если он приводит к множеству событий, которые удовлетворяют условиям:

1) они попарно несовместны;

2) равновозможны;

3) образуют полную группу событий.

Такие события называются случаями и обозначаются ω. Заметим, что они могут быть элементарными событиями.

Определение. Если опыт является классическим, то вероятность события А (P(А)) находится как отношение числа случаев, благоприятствующих событию А (m), к общему числу случаев (n_1).

$$P(A)=\frac{m}{n_1}. \tag{8.4}$$

Формула (8.4) дает возможность непосредственно вычислять вероятности, но недостатком ее является то, что в реальной действительности классические опыты встречаются редко в искусственно созданных ситуациях. Примером классического опыта является игра в кости, которые перед каждым броском тщательно перемешиваются, чтобы соблюдалась равновозможность наблюдаемых событий. Если мы бросаем одну игральную кость, то вероятность появления каждой ее грани равна 1/6.

Классический опыт может быть организован по так называемой урновой схеме. Под урной понимают некоторый ящик, в

котором находятся одинаковые по весу и размерам шары различных цветов. После перемешивания шары вынимаются из урны случайным образом. Поэтому вероятность вытащить какой-либо шар из n шаров будет равна $1/n$.

Для подсчета числа возможных исходов классического опыта часто используют формулы комбинаторики, в частности формулы числа сочетаний из n элементов по m:

– без повторений:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{8.5}$$

где $n!$ — читается n-факториал и вычисляется по формуле $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$;

– с повторениями:

$$(C_n^m)_{повт} = C_{n+m-1}^m.$$

Пример 8.1.

Предположим, что в урне находятся 9 шаров: четыре красных шара и пять синих шаров. Из нее вынимаются два шара. Надо найти вероятность того, что оба они будут красными.

Введем событие А = {оба шара красные} и используем формулу (8.4):

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{\frac{4\times 3}{1\times 2}}{\frac{9\times 8}{1\times 2}} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6} \quad \left(C_n^m = C_n^{n-m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \right).$$

Здесь $m = C_4^2$ — количество исходов, благоприятствующих событию А; $n_1 = C_9^2$ — общее количество исходов.

Аксиоматическое определение вероятности. Как и другие разделы математики, теорию вероятностей можно развивать аксиоматическим методом.

Аксиоматическое построение теории вероятностей было осуществлено в 30-х гг. XX в. А. Н. Колмогоровым. Приведем его упрощенное определение.

Вероятностью называется функция событий, которая порождена некоторым опытом и имеет следующие свойства:

1) вероятность достоверного события равна единице $P(U) = 1$;

2) вероятность невозможного события равна нулю $P(\varnothing) = 0$;

3) вероятность случайного события лежит между нулем и единицей, в частности принимая значение ноль и единица $0 \le P(A) \le 1$;

4) если события A_1, A_2,... A_n попарно несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

5) если счетное бесконечное число событий A_1, A_2,... A_n, ... попарно несовместно, то вероятность их суммы равна суме их вероятностей, т. е.

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Аксиома 5 вводится отдельно, так как она не выводится из четвертой.

Кроме приведенного существуют и другие аксиоматические определения вероятности.

Аксиоматическое определение, в отличие от статистического и классического, не позволяет непосредственно вычислять значение вероятности, но из него вытекает ряд следствий. Например, можно получить формулу (8.4), установить, что сумма вероятностей полной группы событий равна единице, т. е.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1.$$

В частности получаем

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \qquad (8.6)$$

т. е. сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Субъективное определение вероятности. В тех случаях, когда проводимый опыт не является классическим и отсутствуют данные статистических наблюдений или их недостаточное количество для оценки вероятности, прибегают к экспертному оцениванию вероятности на основе мнения экспертов.

Определение. Субъективным определением вероятности называются вероятности, удовлетворяющие аксиомам 1–5 аксиоматического определения, которые приписываются событиям на основе мнения экспертов.

Как правило, в оценке вероятности события участвуют несколько экспертов, и их мнения усредняют, учитывая опыт каждого из них. Оценка экспертов важна в тех случаях, если планируемый исход связан с большими материальными затратами.

8.5. Алгебра вероятностей

Рассмотрим правила, которые позволяют по вероятностям одних событий находить вероятности других событий.

Сначала введем понятие условной вероятности. Предположим, что A и B — события, являющиеся результатом некоторого опыта, причем наступление события A зависит от появления события B. Понятие условной вероятности вводится для характеристики зависимости одних событий от других.

Определение. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется отношение вероятности произведения событий A и B к вероятности события B, если последняя отлична от нуля. Обозначается условная вероятность события A следующим образом: P(A\B). И согласно определению, она равна

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \times B)}{P(B)}, \qquad (8.7)$$

$$P(\mathrm{B}) \neq 0.$$

Аналогично условная вероятность события B при условии, что произошло событие A обозначается следующим образом: $P(B \setminus A)$ и находится по формуле

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \times B)}{P(A)}, \qquad (8.8)$$

$$P(A) \neq 0.$$

Из формул (8.7.) и (8.8) следует правило умножения вероятностей для двух любых событий:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B \backslash A) = P(B) \times P(A \backslash B), \qquad (8.9)$$

т. е. вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Используя формулу (8.9), получим правило умножения вероятностей для трех событий A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned} P(A_1 \times A_2 \times A_3) &= P((A_1 \times A_2) \times A_3) = \\ &= P(A_1 \times A_2) \times P(A_3 \backslash A_1 \times A_2) = \\ &= P(A_1) \times P(A_2 \backslash A_1) \times P(A_3 \backslash A_1 \times A_2) \end{aligned} \qquad (8.10)$$

В формуле (8.10) $P(A_3 \backslash A_1 \times A_2)$ означает условную вероятность события A_3, если произошли события A_1и A_2.

Используя принцип математической индукции, можно обобщить формулу (8.10) на любое конечное количество событий.

В результате получаем

$$\begin{aligned} &P(A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2 \backslash A_1) \times \\ &\times P(A_3 \backslash A_1 \times A_2) \times \ldots \times P(A_n \backslash A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_{n-1}). \end{aligned} \qquad (8.11)$$

Правило умножения вероятностей значительно упрощается, если события, образующие произведение, независимы.

Событие B называется независимым от события A, если его условная вероятность равна безусловной, т. е. $P(B \backslash A) = P(B)$.

Аналогично, событие A называется независимым от события B, если его условная вероятность равна безусловной, т. е. $P(A \backslash B) = P(A)$.

Лемма. Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависти от события B.

Если события A и B независимы, то правило умножения вероятностей (8.9) примет вид

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B), \qquad (8.12)$$

т. е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Определение. События A_1, A_2, A_3 ... A_n называются независимыми в совокупности, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных и от каждого в отдельности.

Правило умножения вероятностей (8.11) в этом случае примет вид:

$$P(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_n),$$

или более кратко

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (8.13)$$

т. е. вероятность произведения конечного числа независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 8.2.

Предположим, что студентка основательно проштудировала 70 из 90 вопросов к экзамену по теории вероятностей и математической статистике. В каждом билете содержатся 3 вопроса. Найти вероятность того, что в билете, который вытащит студентка, она будет знать ответы на все три вопроса.

Введем 3 события:

A_1 = {студентка знает ответ на первый вопрос билета}.

$A_2 \backslash A_1$ = {студентка знает ответ на второй вопрос билета при выполнении события A_1}.

$A_3 \backslash A_1 \times A_2$ = {студентка знает ответ на третий вопрос билета при выполнении событий A_1 и A_2}.

Используя формулу (8.10) находим

$$P(A_1 \times A_2 \times A_3) = P(A_1) \times P(A_2 \setminus A_1) \times P(A_3 \setminus A_1 \times A_2) =$$

$$= \frac{70}{90} \times \frac{69}{89} \times \frac{68}{88} \approx 0{,}466.$$

Вероятности $P(A_1)$; $P(A_2 \backslash A_1)$; $P(A_3 \backslash A_1 \times A_2)$ находятся по формуле (8.4).

Теперь получим правило сложения для совместных событий.

Если рассматриваемые события попарно несовместны, то для нахождения вероятности их суммы используется четвертая аксиома аксиоматического определения вероятности.

Сначала рассмотрим правила сложения для двух совместных событий.

Теорема 8.1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) — P(A \times B) \tag{8.14}$$

Доказательство этой теоремы не приводим, его можно найти в любом учебнике по теории вероятности, например [12, 46]. Используя формулу (8.14), получим правило сложения для трех совместных событий A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned}&P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1 + A_2) + P(A_3) - \\ &- P((A_1 + A_2) \times A_3) = P(A_1) + P(A_2) - \\ &- P(A_1 \times A_2) + P(A_3) - (P(A_1 \times A_3) + \\ &+ P(A_2 \times A_3)) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \times A_2) - \\ &- P(A_1 \times A_3) - P(A_2 \times A_3) + P(A_1 \times A_2 \times A_3).\end{aligned} \tag{8.15}$$

Используя метод математической индукции, получим правило сложения вероятностей для любого конечного количества совместных событий.

$$\begin{aligned}&P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \\ &+ P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) — (P(A_1 \times A_2) + \\ &+ P(A_1 \times A_3) + \ldots + P(A_{n-1} \times A_n)) + \\ &+ P(A_1 \times A_2 \times A_3) + P(A_1 \times A_2 \times A_4) + \ldots + \\ &+ P(A_{n-2} \times A_{n-1} \times A_n)) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)\end{aligned} \tag{8.16}$$

Часто при больших n вместо формулы (8.16) используют равенство

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i), \tag{8.17}$$

где $\overline{A}_i$ — событие, противоположное событию A_i.

Если события A_1, A_2,... A_n взаимно независимы, то равенство (8.17) примет вид

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i). \tag{8.18}$$

Пример 8.3. Задача де Мере.

Найти вероятность выпадения хотя бы один раз двух шестерок при 24 бросаниях пары игральных костей.

Данный опыт является классическим, поэтому вероятность выпадения двух шестерок при одном бросании пары игральных костей будет равна $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Перейдем к противоположному событию, т. е. найдем вероятность того, что при одном бросании пары игральных костей две шестерки не выпадут.

По формуле (8.6) получим $(1 - 1/36)$. А вероятность того, что это событие не случится ни разу при 24 бросаниях в соответствии с формулой (8.13) будет равна

$$(1 - 1/36)^{24} \approx 0{,}507.$$

Поэтому по формуле (8.18) вероятность того, что две шестерки выпадут хотя бы один раз при 24 бросаниях, будет равна $1 - (1 - 1/36)^{24} \approx 1 - 0{,}507 = 0{,}493$.

8.6. Случайные величины

Понятие случайные величины является одним из важнейших в теории вероятностей. Под случайной величиной понимают величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.

Случайные величины будем обозначать заглавными латинским буквами X, Y, Z, ..., а принимаемые ими значения — малыми буквами x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ..., z_1, z_2,... Все возможные значения некоторой случайной величины образуют множество E, которое назовем множеством возможных значений этой случайной величины.

Примерами случайных величин являются:

1. Опыт — бросание игральной кости; случайная величина X — число выпавших очков; множество возможных значений $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Опыт — выборы; случайная величина Y — число голосов, которое набрал некоторый кандидат; множество E — це-

лые положительные числа, максимальное значение не превышает числа избирателей.

3. Опыт — измерение длины линии светодальномером; случайная величина Z — результат измерения, выраженный в сантиметрах; множество возможных значений — некоторый участок действительной оси 0Z, $Z > 0$.

Из приведенных примеров видно, что случайные величины бывают двух типов: у одних множество значений E конечно или счетно (примеры 1 и 2), а у других оно занимает какой-то участок числовой оси, границы которого могут быть как фиксированными (теоретически это пример 3), так и нефиксированными, а множество E является несчетным. Случайные величины первого типа называют дискретными, а второго — недискретными. Недискретные случайные величины подразделяются на непрерывные, у которых множество возможных значений несчетно, и смешанные, которые являются промежуточной разновидностью между дискретными и непрерывными случайными величинами. Их мы в дальнейшем рассматривать не будем, а желающие могут ознакомиться с ними, например, в книге [12].

В принятой в теории вероятностей теоретико-множественной трактовке случайная величина X является функцией элементарного случайного события, т. е. $X = \varphi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$; Ω — пространство элементарных событий. Множество E возможных значений случайной величины X состоит из всех значений, которые принимает функция $\varphi(\omega)$. Если множество E конечно или счетно, то случайная величина X называется дискретной, а если несчетно — непрерывной.

Реально значения случайной величины, полученные в результате некоторого опыта, выражаются в определенных единицах: метрах, градусах, тоннах, амперах и измеряются с определенной точностью, поэтому в реальной действительности мы имеем дело с дискретными случайными величинами. Но в тех случаях, когда точность измерения высока, количество измерений велико и они расположены очень тесно на числовой оси, проще рассматривать данную величину как непрерывную,

а множество ее возможных значений — сплошной отрезок (несчетное множество) числовой оси.

Для полного описания случайной величины необходимо знать ее закон распределения. Законом распределения случайной величины называется любое правило (таблица, график, функция), которое позволяет находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. Закон распределения случайной величины имеет ряд форм. Рассмотрим эти формы.

Для дискретной случайной величины в качестве закона распределения можно использовать ряд распределения.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в верхней строке которой расположены по возрастанию все возможные значения случайной величины X: $x_1, x_2, x_3..., x_n$, а в нижней — соответствующие им вероятности: $P_1, P_2, P_3..., P_n$, где $P_i = P\{X = x_i\}$ — вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X:	x_1	x_2	x_3	...	x_n
	P_1	P_2	P_3	...	P_n

Так как события $\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$, n попарно несовместны и образуют полную группу событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1,$$

т. е. единица распределена между всеми возможными значениями случайной величины.

Графическим изображением ряда распределения является многоугольник распределения. На оси абсцисс откладываются все возможные значения случайной величины X, а на оси ординат — соответствующие им значения вероятностей (рис. 8.7).

Недостатком ряда распределения является то, что он может быть построен только для дискретных случайных величин.

Наиболее универсальной формой закона распределения, которая может использоваться и для дискретных, и для не-

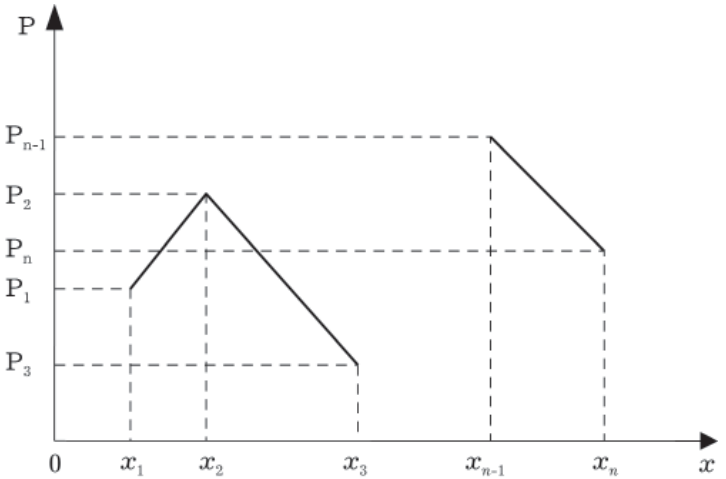


Рис. 8.7

прерывных случайных величин, является функция распределения.

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что данная случайная величина примет значение меньшее, чем некоторое заданное x, т. е.

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{8.19}$$

Функцию $F(x)$ иногда называют интегральной функцией распределения. Геометрически формула (8.19), интерпретируемая как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки x, показана на рис. 8.8.

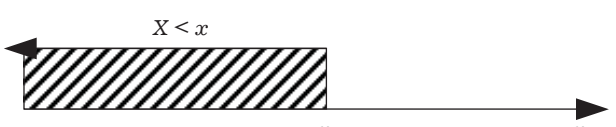


Рис. 8.8

Из геометрической интерпретации можно получить основные свойства функции распределения:

1) $F(x)$ является неубывающей функцией своего аргумента, т. е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$;

2) $F(-\infty) = 0$;

3) $F(+\infty) = 1$;

4) вероятность попадания на промежуток $[a,b]$ равна приращению функции распределения на этом промежутке, т. е. $P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a)$;

5) множество значений функции распределения располагается на отрезке $[0;1]$, т. е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Формула для вероятности отдельного значения случайной величины X через функцию распределения имеет вид:

$$P\{X = a\} = \lim_{b \to a}(F(b) - F(a)). \qquad (8.20)$$

Значение предела (8.20) зависит от того, непрерывна функция $F(x)$ в точке a или разрывна. Если функция $F(x)$ в некоторой точке a непрерывна, то предел (8.20) равен нулю. Если же функция распределения в точке a имеет разрыв первого рода, то предел (8.20) равен величине этого скачка. Но в любом случае вероятность события $\{X = a\}$ равна величине скачка функции распределения в точке a (равен этот скачок нулю или нет). В этом случае, если функция распределения на своей области определения непрерывна, вероятность каждого отдельного значения случайной величины X равна нулю.

Заметим, что отрезок $[a, b]$ содержит несчетное количество элементов, а аксиомы Колмогорова вводились для счетного количества событий. Поэтому из того, что событие $\{X = a\}$ имеет вероятность, равную нулю, не следует, что это событие не появится, оно при неоднократном воспроизведении опыта будет появляться, но достаточно редко.

Если известен ряд распределения случайной величины X, можно получить ее функцию распределения, и наоборот. Для этого можно использовать формулу

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P_i. \qquad (8.21)$$

Пример 8.4.

Дан ряд распределения случайной величины X:

X:	x	1	2	3	4	5
	P	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

Используя формулу (8.21) найдем функцию распределения и изобразим ее на рис. 8.9.

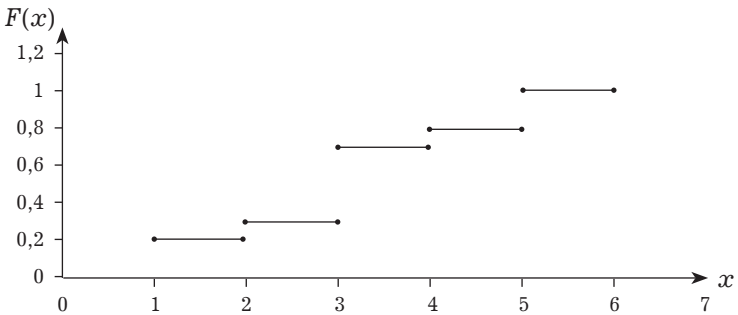


Рис. 8.9

Можно сделать вывод, что функция распределения любой дискретной случайной величины — это разрывная ступенчатая функция, скачки которой находятся в точках, которые соответствуют возможным значениям случайной величины X, и равны вероятностям этих значений.

Если число возможных значений дискретной случайности величины X велико, а интервалы между этими значениями малы, то число скачков функции распределения увеличивается, а сами эти скачки уменьшаются. Ступенчатая функция распределения будет приближаться к плавной кривой. Поэтому естественно аппроксимировать функцию распределения непрерывной кривой. Условимся также считать функцию распределения $F(x)$ не только непрерывной в каждой точке своей области определения, но и дифференцируемой везде, кроме отдельных точек. График непрерывной функции распределения показан на рис. 8.10.

Так как непрерывная функция $F(x)$ не имеет скачков, то вероятность любого значения непрерывной случайной величины равна нулю, т. е. $P\{X = a\} = 0$ для $\forall a$. Поэтому для непрерыв-

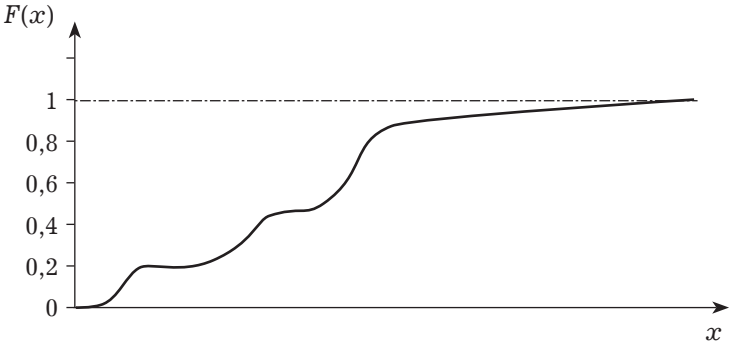


Рис. 8.10

ной случайной величины вводится специальная разновидность закона распределения — плотность распределения вероятностей (плотность распределения, плотность вероятностей), которую мы обозначим $f(x)$. Она равна производной от функции распределения, т. е.

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \qquad (8.22)$$

Функцию $f(x)$ часто называют дифференциальной функцией распределения. График плотности распределения называется кривой распределения (рис. 8.11).

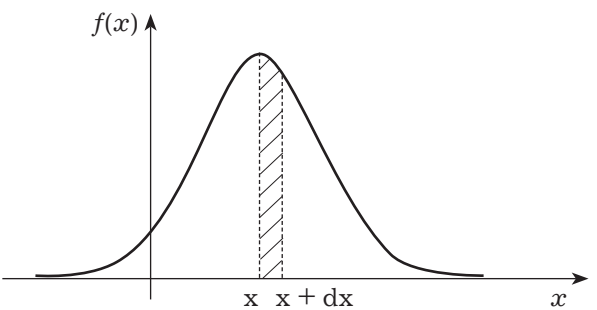


Рис. 8.11

На рис. 8.11 dx — это элементарный участок, который примыкает к точке x. Вероятность попадания случайной величины x на участок dx с точностью до бесконечно малых высших

порядков равна $f(x)dx$. Величина $f(x)dx$ называется элементом вероятности для точки x и геометрически равна площади элементарного заштрихованного прямоугольника. Приведем некоторые основные свойства плотности распределения:

1. $f(x)$ — неотрицательная функция своего аргумента x, т. е. $f(x) \geq 0$.

2. Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс равна единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{8.23}$$

3. Вероятность попадания случайной величины в интервал $(a;b)$ будет выражаться через плотность распределения следующим образом:

$$P\{a < x < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{8.24}$$

Так как для непрерывной случайной величины вероятность события $\{X = a\}$ равна нулю, то мы ставим строгое неравенство в формуле (8.24).

4. Функция распределения выражается через плотность распределения следующим образом:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{8.25}$$

Данное равенство следует из формулы (8.24). Замети, что функция распределения размерности не имеет, а размерность плотности распределения обратна размерности случайной величины X.

Закон распределения полностью характеризует изучаемую случайную величину. Например, известно, что случайные ошибки астрономических или геодезических измерений подчиняются нормальному закону. Но очень часто мы не знаем закона распределения изучаемой случайной величины. В этом случае мы можем охарактеризовать изучаемую случайную величину набором числовых параметров, которые характеризуют наиболее существенные черты закона распределения случайной ве-

личины. Эти параметры и называют числовыми характеристиками случайной величины.

Сначала рассмотрим характеристики положения, которые фиксируют положение случайной величины на числовой оси. К ним относятся математическое ожидание, мода, медиана.

Математическиv ожиданием, или средним взвешенным значением дискретной случайной величины X, называется сумма произведений всех ее значений на вероятность этих значений, т. е.

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (8.26)$$

Вместо обозначения $M[x]$ часто применяется M_x, m_x, m.

Например, для данных примера 8.4 получим:

$$M[x] = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}2 = 3.$$

Если случайная величина X непрерывна, то ее математическое ожидание находится по формуле

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \qquad (8.27)$$

Математическое ожидание случайной величины тесно связано со средним арифметическим ее наблюдаемых значений при большем числе наблюдений. При большом числе опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины приблизительно приравнивается к ее математическому ожиданию. Это одно из проявлений закона больших чисел.

Модой случайной величины X называются ее наиболее вероятные значения, т. е., то значение, для которого вероятность P_i или плотность распределения $f(x)$ достигает максимального значения. Мода будет обозначена Mo. Для данных примера 8.4 мода равна 3, т. е. $Mo = 3$.

В том случае, если вероятность или плотность распределения достигает максимума не в одной, а в нескольких точках, распределение называют полимодальным (рис. 8.12).

Медиана, которую мы будем обозначать Me, применяется, как правило, для непрерывных случайных величин. Медианой

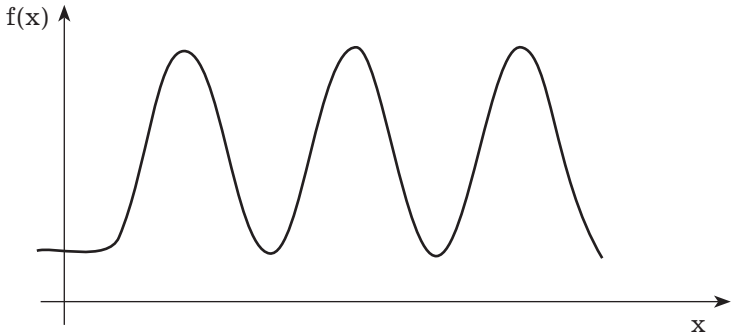


Рис. 8.12

случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется равенство

$$P\{X < Me\} = P\{X > Me\} = \frac{1}{2}. \qquad (8.28)$$

Геометрически медиана — абсцисса такой точки на оси 0X, для которой площади под кривой распределения слева и справа от нее одинаковы и равны 1/2 (рис. 8.13).

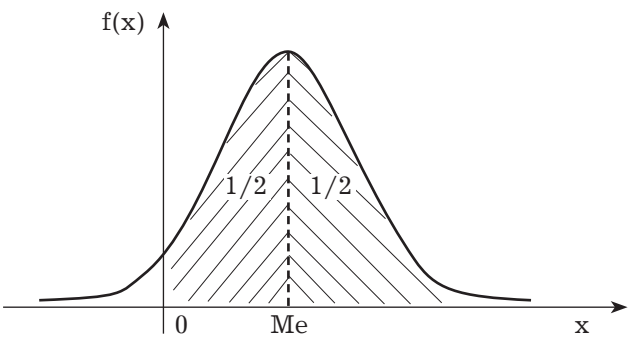


Рис. 8.13

Если распределение симметрично, то математическое ожидание, мода и медиана совпадают.

Кроме характеристик положения используются начальные и центральные моменты различных порядков.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой величины, т. е.

$$\alpha_k = \mathrm{M}[X^k]. \tag{8.29}$$

Если рассматриваемая случайная величина дискретна, то ее начальный момент k-го порядка находится по формуле

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i. \tag{8.30}$$

Если случайная величина непрерывна, то

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx. \tag{8.31}$$

Из приведенных формул (8.30) и (8.31) видно, что математическое ожидание — это начальный момент первого порядка, т. е.

$$\alpha_1 = \mathrm{M}[X].$$

Введем понятие центрированной случайной величины, которую будем обозначать $\overset{0}{X} = X - M[X]$, т. е. центрированная случайная величина $\overset{0}{X}$ есть отклонение случайной величины X от ее математического ожидания. Математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю, т. е.

$$M[\overset{0}{X}] = M[X - M[X]] = \sum_{i=1}^{n}(x - M[X])p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - M[X]\sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Моменты центрированной случайной величины называются центральными моментами. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\overset{0}{X}$, т. е.

$$\mu_k = [M[\overset{0}{X}{}^k] = M[(X - M[X])^k]. \tag{8.32}$$

Если рассматриваемая случайная величина X дискретна, то для нахождения центрального момента k-го порядка используется формула

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^k p_i, \tag{8.33}$$

а если непрерывна, то применяется формула

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^k f(x) dx. \tag{8.34}$$

Для любой случайной величины первый центральный момент равен нулю, т. е.

$$\mu_1 = M[X - M[X]] = 0.$$

Начальные и центральные моменты можно выражать друг через друга. Например, для второго центрального момента имеем:

$$\mu_2 = \alpha_2 - (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2. \tag{8.35}$$

Особое значение имеет второй центральный момент μ_2. Он называется дисперсией случайной величины и обозначается следующим образом

$$\mu_2 = D[X] = D_x.$$

Согласно формуле 8.32 дисперсия находится по формуле

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \tag{8.36}$$

То есть дисперсия — это математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины. Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Из формул (8.33) и (8.34) следует, что для дискретной случайной величины она находится из выражения

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i, \tag{8.37}$$

а для непрерывной случайной величины — из соотношения

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx. \tag{8.38}$$

Часто для вычисления дисперсии используют формулу (8.35).

Размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины, а для характеристики рассеивания удобно иметь параметр, который бы имел ту же размерность, что и изучаемая величина. Поэтому из дисперсии извлекают арифметический квадратный корень и получают еще одну числовую характеристику, называемую средним квадратическим отклонением (стандартом), которую обозначаем $\sigma[X] = \sigma_x$.

Следовательно, имеем

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{D_x}. \qquad (8.39)$$

Зная $M[X]$ и $\sigma[X]$ изучаемой случайной величины X, можно приблизительно судить о разбросе ее возможных значений. Значения случайной величины X достаточно редко выходят за пределы интервала

$$M[X] \pm 3\sigma[X]. \qquad (8.40)$$

Выражение (8.40) называется “правило трех сигм” и следует из закона больших чисел. Часто в качестве характеристики степени случайности изучаемой случайной величины применяют коэффициент вариации

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}. \qquad (8.40а)$$

Например, для рассмотренного нами примера 8.4 имеем:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{5} (x_i - M[X])^2 \times p_i = (1-3)^2 \times 0{,}2 + (2-3)^2 \times 0{,}1 +$$

$$+ (3-3)^2 \times 0{,}4 + (4-3)^2 \times 0{,}1 + (5-3)^2 \times 0{,}2 =$$

$$= 0{,}8 + 0{,}1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}8 = 1{,}8;$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}34;$$

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = \frac{1{,}34}{3} \approx 0{,}45.$$

Для более полного описания распределения используют моменты высших порядков. Для характеристики асимметрии

(скошенности) распределения используют центральный момент третьего порядка. Заметим, что если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка равны нулю, а так как первый центральный момент всегда равен нулю, то и используют третий центральный момент. Его размерность равна кубу размерности изучаемой случайной величины, поэтому, для того чтобы получить безразмерный коэффициент μ_3 делят на $(\sigma[X])^3$ и получают коэффициент асимметрии или скошенности.

$$A_x = \frac{\mu_3}{(\sigma[X])^3}. \qquad (8.41)$$

Коэффициент A_x может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 8.14).

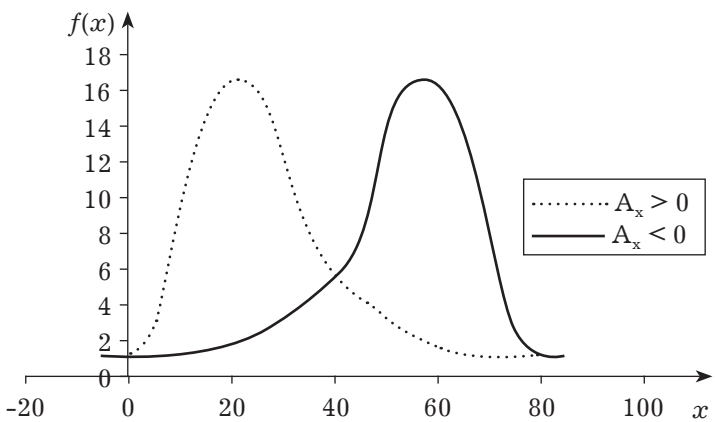


Рис. 8.14

Четвертый центральный момент применяется для характеристики “островершинности” распределения. С его помощью вычисляют так называемый коэффициент эксцесса

$$Ex = \frac{\mu_4}{(\sigma[X])^4} - 3. \qquad (8.42)$$

Число 3 вычитается из отношения $\frac{\mu_4}{(\sigma[X])^4}$, так как для нормального распределения, очень важного в теории вероятнос-

тей, отношение $\frac{\mu_4}{(\sigma[X])^4} = 3$ и, следовательно, для нормального распределения $Ex = 0$.

Если изучаемое распределение более островершинное, то для него $Ex > 0$, а если плосковершинное, то $Ex < 0$ (рис. 8.15).

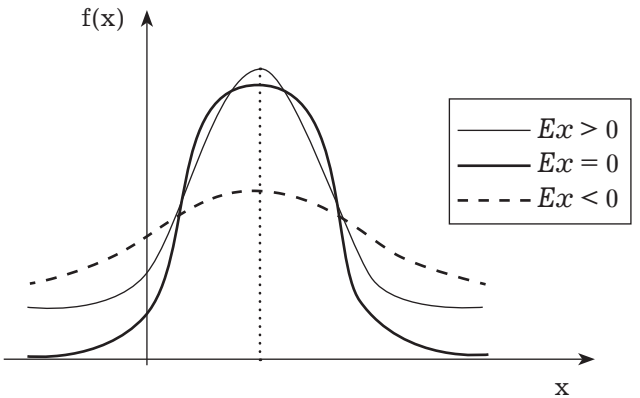


Рис. 8.15

8.7. Понятие о нормальном распределении

Нормальное распределение, или закон Гаусса, играет очень важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Закон Гаусса является предельным законом, к которому приближаются при соблюдении определенных условий другие законы. Он наиболее часто встречается на практике.

Доказывается, что сумма достаточно большого количества независимых или слабозависимых случайных величин, сравнимых по степени своего влияния на рассеивание суммы, распределена приблизительно по нормальному закону, несмотря на то что составляющие этой суммы подчинены любым законам распределения. Большое количество встречающихся на практике случайных величин, например случайные ошибки наблю-

дений в естественных и технических науках, ошибки стрельбы и др., могут быть представлены как сумма большого числа слагаемых, каждое из которых вызвано действием какой-то одной причины, не зависящей от остальных. Составляющие суммы имеют различные распределения, но их сумма неограниченно приближается к нормальному. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m и σ, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (8.43)$$

Кривая распределения имеет холмообразный симметричный вид (рис. 8.16)

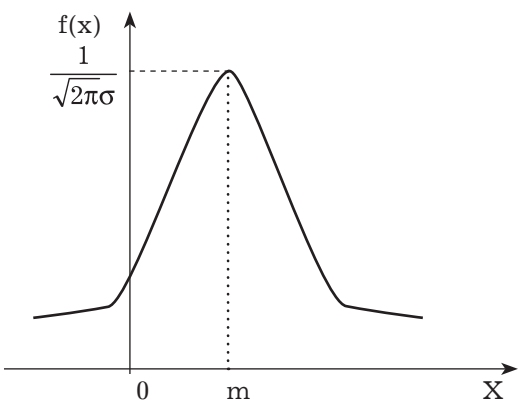


Рис. 8.16

Максимум функции распределения $f(x)$ достигается в точке с координатами $(m, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})$. Этот результат можно получить, используя методы дифференциального исчисления. Следовательно, мода нормального распределения равна m. Используя формулы (8.31) и (8.38) можно доказать (см., например, [12]), что $M[X] = m$, а $D[X] = \sigma^2$, т. е. параметр m — это математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X,

а дисперсия случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равна σ^2.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X попадает на интервал $(a; b)$, равна

$$P\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \qquad (8.44)$$

В формуле (8.44) $\Phi_0(x)$ — нормированная функция Лапласа, вычисляемая по формуле

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt. \qquad (8.45)$$

Для функции $\Phi_0(x)$ составлены таблицы. Нормированная функция Лапласа $\Phi_0(x)$ имеет следующие свойства:

1) $\Phi_0(0) = 0$;

2) $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$;

3) $\Phi_0(+\infty) = 0{,}5$;

4) $\Phi_0(-\infty) = -0{,}5$.

Очень просто через нормированную функцию Лапласа выражается вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал длиной $2d$, симметричный относительно m (рис. 8.17).

Искомая формула имеет вид:

$$P\{m-d < x < m+d\} = P\{|X-m| < d\} = 2\Phi_0\left(\frac{d}{\sigma}\right). \qquad (8.46)$$

Через функцию Лапласа можно выразить и функцию распределения нормально распределенной случайной величины X.

Имея в виду формулу (8.44) и учитывая, что $\Phi_0(-\infty) = -0{,}5$, получим:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \qquad (8.47)$$

Если $m = 0$, а $\sigma = 1$, то формула для плотности нормального распределения (8.43) примет вид:

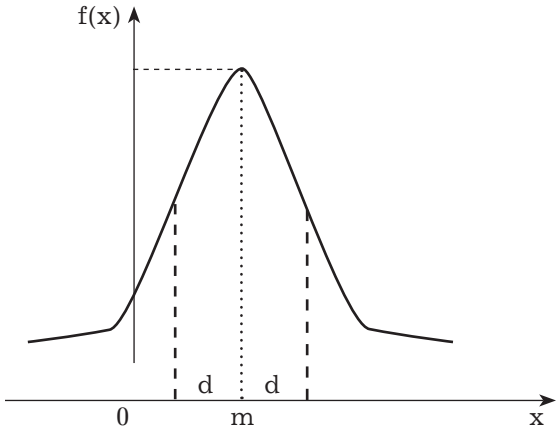


Рис. 8.17

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Она называется функцией Гаусса и для нее составлены таблицы.

8.8. Системы случайных величин

Часто при изучении случайных явлений приходится иметь дело не с одной случайной величиной, а с двумя, тремя и более. Совместное изучение конечного числа случайных величин приводит к системе случайных величин. Приведем некоторые примеры систем случайных величин:

1. Точка приземления космического аппарата многоразового использования Спейс Шаттл характеризуется системой трех случайных величин: широтой (φ), долготой (λ), высотой (H).

2. Успеваемость наудачу выбранной студентки характеризуется системой n случайных величин (X_1, X_2, …, X_n) — отметками, проставляемыми в приложении к диплому.

Упорядоченный набор случайных величин (X_1, X_2, …, X_n), заданных на пространстве элементарных событий Ω, называ-

ется системой n случайных величин. Ее удобно рассматривать как координаты случайного вектора в n-мерном пространстве. Система n случайных величин является функцией элементарного события, т. е.

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \varphi(\omega). \qquad (8.48)$$

Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие n действительных чисел — значения, принятые случайными величинами $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в результате опыта.

Случайные величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, входящие в систему, могут быть дискретными и недискретными (непрерывными и смешанными). На них распространяются практически без изменений все основные определения понятия одной случайной величины.

Рассмотрим систему двух случайных величин $(X;Y)$. Ее основные понятия легко обобщаются на случай большего числа компонентов. Систему двух случайных величин $(X;Y)$ можно изобразить случайной точкой на плоскости 0XY (рис. 8.18) или случайным вектором (рис. 8.19).

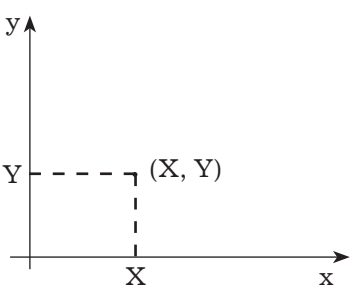


Рис. 8.18

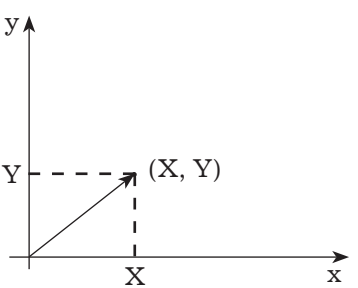


Рис. 8.19

Полной характеристикой системы случайных величин является ее закон распределения, который имеет различные формы:

- матрица распределения;
- функция распределения;
- плотность распределения.

Аналогом ряда распределения дискретной случайной величины X для системы двух случайных величин (X,Y) является матрица распределения — прямоугольная таблица, в которой располагаются вероятности $P_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\}$, $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$. Событие $\{X = x_i; Y = y_j\}$ — есть произведение событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$.

Матрица распределения двух дискретных случайных величин имеет вид:

$(X;Y)$:

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	P_{11}	P_{12}		P_{1m}
x_2	P_{21}	P_{22}		P_{2m}
x_n	P_{n1}	P_{n2}		P_{nm}

(8.49)

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1.$$

На рис. 8.20 приведен график распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y).

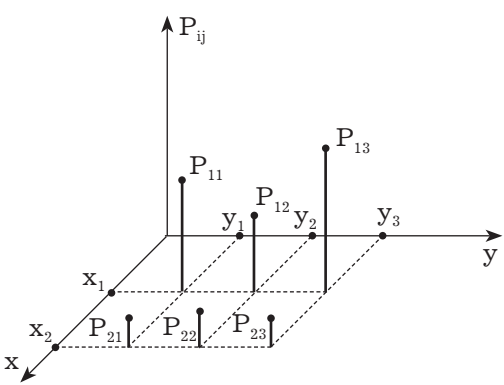


Рис. 8.20

Зная матрицу распределения двумерной дискретной случайной величины (X,Y) можно определить ряды распределения каждой из компонент (обратное в общем случае невозможно).

Искомые формулы имеют вид:

$$Px_i = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}; \tag{8.50}$$

$$Py_j = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}. \tag{8.51}$$

Наиболее универсальной формулой закона распределения для системы двух случайных величин является функция распределения, которую мы обозначаем $F(x, y)$.

Функцией распределения двух случайных величин (X,Y) называется вероятность совместного выполнения неравенства: $X < x$ и $Y < y$, т. е.

$$F(x, y) = \{X < x, Y < y\}. \tag{8.52}$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y), который располагается левее и ниже ее (рис. 8.21).

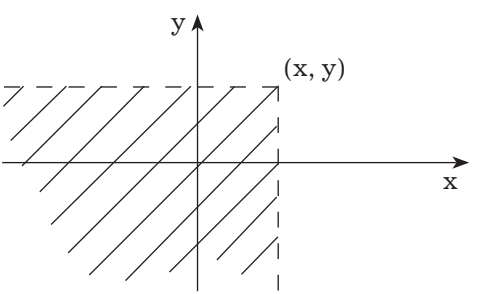


Рис. 8.21

Заметим, что верхняя и правая границы квадрата в него не включаются.

Если задана матрица распределения двух дискретных случайных величин (8.49), то функция распределения двумерной случайной величины определяется по формуле

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y}P_{ij}. \qquad (8.53)$$

Приведем некоторые свойства функции распределения двумерной случайной величины.

1. Множество значений функции распределения $F(x, y)$ принадлежит отрезку [0,1] т. е. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. Функция распределения $F(x, y)$ является неубывающей функцией обоих своих аргументов, т. е

при $x_2 > x_1$ $\quad F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$;
при $y_2 > y_1$ $\quad F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

3. Если хотя бы один из аргументов функции распределения $F(x, y)$ обращается в $-\infty$, то функция распределения обращается в ноль, т. е.

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0.$$

4. Если оба аргумента функции распределения $F(x, y)$ обращаются в $+\infty$, то она становиться равной единице, т. е. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5. Если один из аргументов функции распределения обращается в $+\infty$, то функция распределения системы двух случайных величин становятся функцией распределения случайной величины, которая соответствует другому аргументу, т. е.

$$F(x, +\infty) = F_1(x), \qquad F(+\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y соответственно.

6. Функция распределения системы двух случайных величин $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому своему аргументу, т. е.

$$\lim_{x\to x_{0^-}} F(x,y)=F(x_0,y);$$

$$\lim_{y\to y_{0^-}} F(x,y)=F(x,y_0).$$

Зная функцию распределения $F(x, y)$, можно найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник G со сторонами, параллельными осям координат, ограниченного абсциссами a, b и ординатами c и d, причем левая и нижняя гра-

ницы включаются в G, а правая и верхняя — не включаются (рис. 8.22).

$$P\{(X, Y)\} \in G\} = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \qquad (8.54)$$

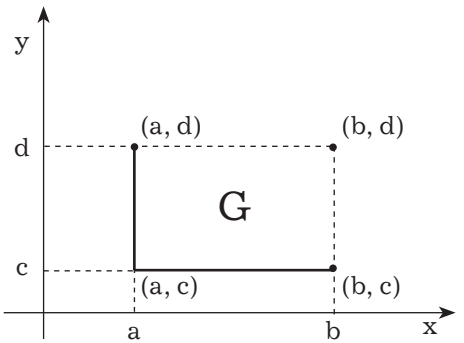


Рис. 8.22

Если функция распределения $F(x, y)$ непрерывна и дифференцируема по каждому из аргументов, то система двух случайных величин (X, Y) является непрерывной, причем составляющие этой системы — непрерывные случайные величины.

Для непрерывных двумерных случайных величин в качестве закона распределения вводится понятие плотности распределения (или совместной плотности распределения) $f(x, y)$, которая является второй смешенной частной производной от функции распределения, т. е.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}. \qquad (8.55)$$

Плотность распределения $f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность, которую называют поверхностью распределения (рис. 8.23).

Плотность распределения $f(x, y)$ имеет следующие свойства:

1) плотность распределения является неотрицательной функцией, т. е. $f(x, y) \geq 0$;

2) объем, ограниченный поверхностью распределения и плоскостью 0xy, равен единице, т. е.

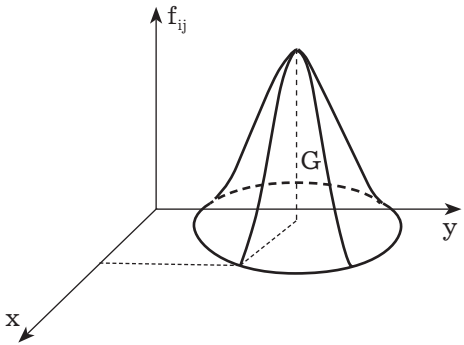


Рис. 8.23

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

3) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область G определяется формулой

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy. \qquad (8.56)$$

4) функция распределения системы двух случайных величин (X, Y) выражается через совместную плотность распределения следующим образом:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (8.57)$$

Как и в случае одной случайной величины введем понятие элемента вероятности для системы двух непрерывных случайных величин: $f(x, y)dxdy$. С точностью до бесконечно малых высших порядков элемент вероятности $f(x, y)dxdy$ равен вероятности попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник с размерами dx и dy, примыкающий к точке (x, y) (рис. 8.24).

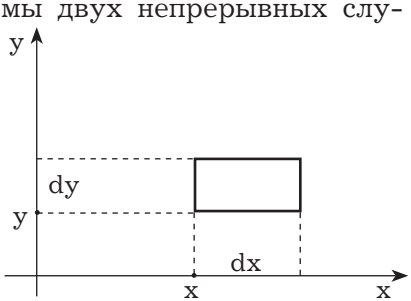


Рис. 8.24

Эта вероятность приблизительно равна объему элементарного параллелепипеда с высотой $f(x, y)$, который опирается на данный прямоугольник.

Плотности распределения одномерных составляющих X и Y двумерной непрерывной случайной величины находятся по формулам

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_1(x); \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = f_2(y). \end{cases} \tag{8.58}$$

Зная совместную плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f(x, y)$, можно найти функцию распределения каждой из ее составляющих:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = F_1(x); \tag{8.59}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = F_2(y). \tag{8.60}$$

Если известны законы распределения случайных величин X и Y, которые входят в систему (X, Y), то можно определить закон распределения системы только в том случае, если случайные величины X и Y независимы. Две случайные величины X и Y будут независимы только в том случае, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения принимает другая. В противном случае величины X и Y будут зависимыми.

Приведем без доказательств условия независимости двух случайных величин.

Теорема 8.2. Для того чтобы две дискретные случайные величины X и Y, образующие систему (X,Y), были независимыми, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \times P\{Y = y_j\} \tag{8.61}$$

для $\forall i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$.

Теорема 8.3. Для того чтобы случайные величины X и Y, входящие в систему (X, Y), были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы была равна произведению функций распределения ее составляющих, т. е.

$$F(x, y) = F_1(x) \times F_2(y). \tag{8.62}$$

Теорема 8.4. Для того чтобы непрерывные случайные величины X и Y, входящие в систему (X, Y), были независимыми, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$f(x, y) = f_1(x) \times f_2(y), \tag{8.63}$$

т. е. совместная плотность распределения системы (X, Y) должна быть равна произведению плотностей распределения ее составляющих.

В том случае, если случайные величины X и Y, образующие систему, являются зависимыми, для характеристики их зависимости вводятся понятия условных законов распределения случайных величин.

Условных законов распределения в данном учебнике касаться не будем. Желающие могут ознакомиться с ними, например, в [12, 46].

Так же, как и одна случайная величина X, систему двух случайных величин (X, Y) можно задать числовыми характеристиками. В качестве таковых обычно используются начальные и центральные моменты различных порядков.

Начальным моментом порядка $(k + s)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s, т. е.

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s]. \tag{8.64}$$

Центральным моментом порядка $(k + s)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется математическое ожидание произведения $\overset{0}{X}{}^k$ на $\overset{0}{Y}{}^s$, т. е.

$$\mu_{ks} = M[\overset{0}{X}{}^k \overset{0}{Y}{}^s], \tag{8.65}$$

где $\overset{0}{X} = X - M[X]$, $\overset{0}{Y} = Y - M[Y]$ — центрированные случайные величины.

Напомним, что порядком начального и центрального моментов является сумма его индексов, т. е. $(k + s)$.

Приведем формулы для нахождения начального и центрального моментов.

Для системы двух дискретных случайных величин, имеем

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s P_{ij}; \tag{8.66}$$

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - M[X])^k (y_j - M[Y])^s P_{ij}. \tag{8.67}$$

Напомним, что $P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Для системы двух непрерывных случайных величин получаем

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy. \tag{8.68}$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M[X])^k (y_j - M[Y])^s f(x,y)dxdy. \tag{8.69}$$

На практике чаще всего используют начальный и центральный моменты первого и второго порядков.

Имеются два начальных момента первого порядка:

$$\begin{cases} \alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X]; \\ \alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y]. \end{cases} \tag{8.70}$$

Они являются математическими ожиданиями случайных величин X и Y.

Точка с координатами $(M[X], M[Y])$ на плоскости 0XY — характеристика положения случайной точки (X, Y), т. е. ее разброс происходит вокруг точки $(M[X], M[Y])$.

Оба центральных момента первого порядка равны нулю, т. е.

$$\mu_{1,0} = M[\overset{0}{X}{}^1 \overset{0}{Y}{}^0] = 0; \quad \mu_{0,1} = M[\overset{0}{X}{}^0 \overset{0}{Y}{}^1] = 0.$$

Имеются три начальных момента второго порядка:

$$\begin{cases} \alpha_{2,0} = M[X^2Y^0] = M[X^2]; \\ \alpha_{0,2} = M[X^0Y^2] = M[Y^2]; \\ \alpha_{1,1} = M[XY]. \end{cases} \tag{8.71}$$

Момент $\alpha_{1,1}$ часто встречается в приложениях. Из выражений (8.66) и (8.68) следуют формулы для его вычисления:

– для системы двух дискретной случайной величин

$$\alpha_{1,1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P_{ij}; \tag{8.72}$$

– для системы двух непрерывных случайных величин

$$\alpha_{1,1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy. \tag{8.73}$$

Имеются три центральных момента второго порядка:

$$\begin{cases} \mu_{2,0} = M[\overset{0}{X}{}^2\,\overset{0}{Y}{}^0] = D[X]; \\ \mu_{0,2} = M[\overset{0}{X}{}^0\,\overset{0}{Y}{}^2] = D[Y]; \\ \mu_{1,1} = M[\overset{0}{X}\,\overset{0}{Y}]. \end{cases} \tag{8.74}$$

Первые два момента в формулах (8.74) — это дисперсии. А момент $\mu_{1,1}$ называется ковариацией, или корреляционным моментом системы случайных величин (X,Y). Для него вводится специальное обозначение $K[X,Y] = K_{xy}$. Из выражений (8.67) и (8.69) следуют формулы для его вычисления:

– для системы дискретных случайных величин

$$K[XY] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M[X])(y_j - M[Y])P_{ij}; \tag{8.75}$$

– для систем непрерывных случайных величин

$$K[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i - M[X])(y_j - M[Y])f(x,y)dxdy. \tag{8.76}$$

Центральные моменты можно выражать через начальные и наоборот. Поэтому часто ковариацию выражают через начальные моменты.

$$K[XY] = M[XY] - M[X] \times M[Y] \qquad (8.77)$$

т. е. ковариация системы двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение их математических ожиданий.

Приведем некоторые свойства ковариации:

1. Ковариация симметрична, т. е. при перемене индексов местами она не меняется:

$$K[XY] = K[YX].$$

2. Дисперсия случайной величины — это ее ковариация сама с собой, т. е.

$$K[XX] = D[X], \qquad K[YY] = D[Y].$$

3. Если случайные величины X и Y независимы, то ковариация равна нулю:

$$K[XY] = 0.$$

Размерность корреляционного момента равна произведению размерностей случайных величин X и Y. Удобнее пользоваться безразмерным коэффициентом, характеризующим только зависимость между случайными величинами X и Y. Поэтому ковариацию делят на произведение средних квадратических отклонений $\sigma[X] \times \sigma[Y]$ и получают коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{K[XY]}{\sigma[X]\sigma[Y]}. \qquad (8.78)$$

Данный коэффициент характеризует степень зависимости случайных величин X и Y, причем не любой зависимости, а только линейной. Для любых двух случайных величин X и Y выполняется неравенство

$$|r_{xy}| \le 1. \qquad (8.79)$$

Если $r_{xy} = 0$, то линейной зависимости между случайными величинами X и Y нет и они называются некоррелированными. Если $r_{xy} \ne 0$, то случайные величины X и Y называются коррелированными.

Чем ближе r_{xy} к ± 1, тем более тесная линейная связь существует между случайными величинами X и Y. Если $r_{xy} = \pm 1$, то между случайными величинами X и Y существует жесткая функциональная линейная связь вида

$$y = \pm kx + b.$$

Из независимости случайных величин X и Y следует их некоррелированность. Но обратное положение в общем случае неверно, т. е. если $r_{xy} = 0$, то это говорит только об отсутствии линейной связи между случайными величинами. Они могут быть связаны между собой криволинейной зависимостью.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 8.5.

Задана матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y).

x \ y	1	2	3
0	0,2	0	0,1
1	0	0,3	0
4	0,2	0,1	0,1

Найти числовые характеристики системы (X,Y): $M[X]$, $M[Y]$, $D[X]$, $D[Y]$, $\sigma[X]$, $\sigma[Y]$, $K[XY]$, r_{xy}. Сделать вывод о наличии или отсутствии линейной зависимости между случайными величинами X и Y.

Сначала по формулам (8.50) и (8.51) получим ряды распределения для случайных величин X и Y. В нашем случае они будут иметь вид:

X:

x	0	1	4
p	0,3	0,3	0,4

Y:

y	1	2	3
p	0,4	0,4	0,2

Используя формулы (8.26) для каждого ряда находим математическое ожидание:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}4=1{,}9;$$

$$M[Y]=\sum_{j=1}^{3}y_j p_j=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}2=1{,}8.$$

Для нахождения дисперсии используем формулу (8.37):

$$D[X]=\sum_{i=1}^{3}(x_i-M[X])^2 p_i=$$

$$=(0-1{,}9)^2\cdot 0{,}3+(1-1{,}9)^2\cdot 0{,}3+(4-1{,}9)^2\cdot 0{,}4=3{,}09;$$

$$D[Y]=\sum_{j=1}^{3}(y_j-M[Y])^2 p_j=$$

$$=(1-1{,}8)^2\cdot 0{,}4+(2-1{,}8)^2\cdot 0{,}4+(3-1{,}8)^2\cdot 0{,}2=0{,}56.$$

Теперь найдем средние квадратичные отклонения по формуле (8.39):

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{3{,}09}\approx 1{,}76;$$

$$\sigma[Y]=\sqrt{D[Y]}=\sqrt{0{,}56}\approx 0{,}75.$$

Для нахождения ковариации используются формула

$$K[XY] = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Сначала вычисляем начальный момент 2-го порядка по формуле (8.72)

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}=$$

$$= 0\cdot 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 3\cdot 0{,}1 + 1\cdot 1\cdot 0 +$$
$$+ 1{,}2\cdot 0{,}3 + 1{,}3\cdot 0 + 4\cdot 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 3\cdot 0{,}1 =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}8 + 1{,}2 = 3{,}4.$$

Поэтому ковариация будет равна

$$K[XY] = 3{,}4 - 1{,}9\cdot 1{,}8 = -0{,}02.$$

А теперь по формуле (8.78) находим коэффициент корреляции:

$$r_{xy}=\frac{-0{,}02}{1{,}76\cdot 0{,}75}\approx -0{,}015.$$

Из полученного значения коэффициент корреляции делаем вывод о том, что линейная зависимость между случайными величинами практически отсутствует и их можно считать независимыми.

8.9. Понятие о предельных теоремах

Кратко рассмотрим предельные теоремы, которые устанавливают связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве опытов. Предельные теоремы подразделяют на две группы:

1) группа закона больших чисел;

2) группа центральной предельной теоремы.

Кратко рассмотрим группу закона больших чисел. Его физическое содержание можно сформулировать следующим образом: при большом числе случайных явлений их средний результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В узком смысле слова под законом больших чисел понимается ряд теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближений средних характеристик большого числа экспериментов к определенным неслучайным величинам.

Все теоремы закона больших чисел опираются на неравенство Чебышева, которое мы и проводим.

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$, то для $\forall \varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (8.80)$$

Неравенство (8.80) отграничивает вероятности больших отношений случайной величины X от ее математического ожидания.

Для противоположного события неравенство Чебышева принимает вид:

$$P\{|X - M[X]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (8.81)$$

Неравенства (8.80) и (8.81) можно использовать для нахождения оценок вероятности отклонения наблюдаемой случайной величины от своего математического ожидания, если неизвестен закон распределения.

Пример 8.6.

Определить вероятность того, что случайная величина X, имеющая произвольный закон распределения, отклонится от своего математического ожидания на величину, не выходящую за пределы $\pm 3\sigma[X]$.

Принимая в формуле (8.81) $\varepsilon = 3\sigma[X]$ получаем

$$P\{|X - M[X]| < 3\sigma[X]\} \geq 1 - \frac{D[X]}{(3\sigma[X])^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Для любой случайной величины X вероятность выполнения правила $3\sigma[X]$ будет не ниже $8/9$.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность попадания случайной величины в интервал $|X - M[X]| \leq 3\sigma[X]$ будет равна 0,997.

Теорема Чебышева (иногда ее называют законом больших чисел).

Предположим, что производится n независимых измерений случайной величины X, которая имеет конечные математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$. Измерения равноточны и не имеют систематических ошибок. В этом случае при неограниченном увеличении количества измерений n среднее арифметическое результатов измерений x_i сходится по вероятности к математическому ожиданию этой случайной величины, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - M[X]| < \varepsilon\} = 1, \qquad (8.82)$$

где $\varepsilon > 0$.

Из формулы (8.82) следует, что при достаточно большом количестве наблюдений n существенные отклонения по абсолют-

ной величине среднего арифметического результатов измерений от математического ожидания маловероятны. Поэтому при большом количестве наблюдений можно заменять неизвестное математическое ожидание средним арифметическим.

Теорема Бернулли. Это теорема доказывает устойчивость относительной частоты случайного события, а это позволяет применять на практике статистическое определение вероятности наступления события.

При неограниченном возрастании числа независимых опытов n, производимых в одних и тех же условиях, относительная частота события А ($f(A)$) сходится по вероятности к вероятности этого события $P(A)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\{|f(A)-P[A]|<\varepsilon\}=1, \qquad (8.83)$$

где $\varepsilon > 0$.

Из теоремы Бернулли следует, что при большом количестве наблюдений относительную частоту появления случайного события можно принимать за вероятность этого события.

Теперь кратко рассмотрим группу теорем центральной предельной теоремы. Она имеет ряд форм, которые устанавливают связь между законом распределения суммы случайных величин и ее предельной формой — нормальным законом распределения.

Различные формы центральной предельной теоремы различаются между собой условиями, накладываемыми на распределения образующих сумму случайных слагаемых $X_1, X_2, ..., X_n$. Чем эти условия жестче, тем проще доказывается теорема.

Теорема. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые случайные величины, которые имеют одно и то же распределение с математическим ожиданием $M[X]$ и дисперсией $D[X]$, то при увеличении n закон распределения суммы случайных величин $\sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Ляпунова. Предположим, что $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M[X_1]$, $M[X_2]$,..., $M[X_n]$ и дисперсиями $D[X_1]$, $D[X_2]$,..., $D[X_n]$, причем $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|X_i - M[X_i]|^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} D[X_i]\right)^{3/2}} = 0. \qquad (8.84)$$

Ляпунов доказал, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины $\sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Смысл условия (8.84) состоит в том, чтобы в сумме не было слагаемых, влияние которых на рассеивание суммы было бы велико по сравнению с влиянием всех остальных. Также не должно быть большого числа случайных слагаемых, влияние которых на рассеивание суммы очень мало по сравнению с суммарным влиянием остальных.

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеются две урны. В первой находится шесть красных шаров и три синих шара, а во второй — пять красных шаров и семь синих шаров. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что эти шары разных цветов.

2. Игральная кость подбрасывается восемь раз. Найти вероятность того, что грань с цифрой четыре выпадет хотя бы один раз.

3. Имеется колода карт (52 листа). Из нее случайным образом извлекается пять карт. Найти вероятность того, что среди них есть две дамы и один валет.

4. Дан ряд распределения случайной величины X:

x	2	3	4	5	6	7
p	0,05	0,15	0,3	0,2	0,1	0,2

Построить функцию распределения случайной величины X ($F(x)$), вычислить основные числовые характеристики случайной величины X: $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le 0;\\ (1-\cos x)/2 \text{ при } 0 < x \le \pi;\\ 1 \text{ при } x > \pi.\end{cases}$$

Определить плотность распределения случайной величины $X(f(x))$, а также $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$.

6. Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f(x) = \alpha/(1 + x^2)$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Найти коэффициент α и $P\{0 < x < \pi/4\}$.

7. Матрица распределения системы двух случайных величин (x, y) имеет вид (X, Y):

x_i \ y_i	7	11	12
2	0,3	0,15	0,05
3	0,15	0,1	0,05
8	0,05	0,05	0,05
10	0,05	0	0

Найти коэффициент корреляции r_{xy} и сделать вывод о наличии линейной зависимости между случайными величинами x и y.

Вопросы для самопроверки

1. Каков предмет теории вероятностей?
2. Дайте определение суммы и произведения нескольких случайных событий.
3. Приведите классическое определение вероятности.
4. Приведите статистическое определение вероятности.
5. Приведите аксиоматическое определение вероятности.
6. Каковы правила действия с вероятностями?
7. Дайте определение случайной величины.
8. Что такое функция распределения случайной величины?
9. Что такое плотность распределения случайной величины?
10. Расскажите о числовых характеристиках случайной величины.

11. От каких параметров зависит нормальное распределение?

12. Дайте определение системы случайных величин.

13. Какие формы закона распределения случайных величин вы знаете?

14. Какие числовые характеристики системы случайных величин вы знаете?

15. В чем состоит суть закона больших чисел?

16. В чем состоит суть центральной предельной теоремы?

Глава 9. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

9.1. Постановка задачи линейного программирвоания

Задача линейного программирования (ЛП) ассоциируется с задачей распределительного типа, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам деятельности. Интерпретация задачи ЛП в этом случае состоит в следующем. Моделируемая экономическая информационная система (ЭИС) характеризуется наличием нескольких видов деятельности j (j = 1, ..., n), для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве различные ресурсы b_i, (i = 1, ..., m). Интенсивность расходования каждого из ресурсов на каждый из видов деятельности ЭИС известна и равна a_{ij}. Результативность или ценность каждого j-го вида деятельности ЭИС характеризуется величиной c_j. Цель построения модели заключается в определении уровней каждого вида деятельности ЭИС x_j, при которых оптимизируется общий результат деятельности ЭИС в целом при выполнении ограничений, накладываемых на использование ресурсов, т. е. $\leq b_i$, i = 1, ..., m. Структура целевой функции (ЦФ) y(u) отражает вклад каждого вида деятельности ЭИС в общий результат. При максимизации c_j представляет собой “полезность” j-го вида деятельности (ущерб, наносимый конкуренту по бизнесу; предотвращенный ущерб), а в случае минимизации характеризует затраты (потери собственные; расход материальных средств).

Линейность модели выявляется или принимается в качестве допущения на этапе формализации задачи. Линейность предполагает наличие двух свойств — пропорциональности и аддитивности, присущих как целевой функции, так и ограничениям. *Пропорциональность целевой функции* означает, что вклад каждой управляемой переменной в целевую функцию пропорционален величине этой переменной. *Аддитивность* же *целевой функции* заключается в том, что целевая функция представляет собой сумму вкладов от различных управляемых переменных. *Пропорциональность ограничений* проявляется в том, что общий объем потребляемых ресурсов прямо пропорционален величинам управляемых переменных. *Аддитивность ограничений* состоит в том, что величина ресурса должна представлять собой сумму расходов по видам деятельности, каждое слагаемое которой пропорционально величине соответствующей управляемой переменной.

В формализованном виде задачу ЛП можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r} \textit{определить } u^* = \arg\limits_{u \in U} extr\ y(u) \\ \text{где } y(u) = f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j,\ U = \{u = (x_1, x_2,.,x_n) \mid \\ (\le, = \textit{ или } \ge)\ b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x_j > 0\}. \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Условие неотрицательности, накладываемое на переменные x_j, означает, что ни одному виду деятельности ЭИС не может быть приписан отрицательный уровень.

Ограничение типа ≥ нельзя рассматривать как ограничение в буквальном смысле этого слова. Наличие такого неравенства предполагает необходимость обязательного выполнения каких-либо планов, заданий, нормативов.

Математическая формулировка задачи ЛП выглядит следующим образом: *необходимо определить значения управляемых переменных x_j, доставляющих экстремум целевой функции $y(u)$ на всем множестве стратегий $U = \{u\}$ и удовлетворяющих всем имеющимся в задаче ограничениям*. Этой формулировкой задача ЛП считается поставленной математи-

чески, что позволяет осуществлять поиск ее оптимального решения известными математическими методами.

Формальную постановку задачи ЛП (9.1) для удобства можно представить в упрощенном виде:

определить max (или min) W(x) = при ограничениях:

(≤, = или ≥) b_i, i = 1, ..., m; $x_j \geq 0$,

где W(x) — новое обозначение ЦФ, т. е. W(x) = y(u) = f(x).

Для решения задач ЛП разработано множество методов, но наиболее популярными из них являются графический и симплексный методы, позволяющие получить гораздо больше информации, нежели просто найденное оптимальное решение.

9.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод решения задач ЛП основан на их геометрической интерпретации и применяется для задач, имеющих две переменные. В случае трех переменных графическое решение задачи ЛП становится менее наглядным, а при большем числе переменных вообще невозможным.

Графическим методом решение получают в результате последовательно выполняемых шагов, содержание которых составляют:

1) построение области допустимых решений (ОДР);

2) поиск точки ОДР, соответствующей оптимальному решению;

3) определение координат этой точки.

1. *Построение области допустимых решений.* Область допустимых решений представляет собой часть плоскости (в многомерном случае — часть гиперпространства), все точки которой удовлетворяют всем ограничениям, имеющимся в данной задаче ЛП. Условие неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ограничивает область их допустимых значений первым квадрантом. Другие границы ОДР на плоскости $x_1 0\, x_2$ изображаются прямыми линиями, построенными на основе ограниче-

ний при замене в них знаков неравенства знаками равенства. Каждая линия определяет на плоскости две области: в одной из них все точки удовлетворяют заданным ограничениям, в другой — нет. Ту область, в которой выполняются ограничения в виде неравенств, указывают стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Кроме того, для удобства восприятия возле каждой линии проставляют номер соответствующего ограничения.

В каждой точке ОДР, принадлежащей внутренней области или границе образовавшегося выпуклого многоугольника, все ограничения выполняются. Поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются *допустимыми*. С содержательной точки зрения каждая точка ОДР представляет собой конкретную стратегию проведения операции $u = (x_1, x_2)$, а множество всех точек ОДР — множество всех возможных стратегий $U = \{u\}$.

2. *Поиск оптимальной точки ОДР*. Построенная ОДР представляет собой выпуклый многоугольник. В теории линейного программирования доказывается, что своего оптимального значения ЦФ достигает в *угловой* (или *экстремальной*) точке выпуклого многоугольника решений. Если ЦФ задавать некоторые фиксированные возрастающие значения $W(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, то полученные уравнения на плоскости определят семейство параллельных прямых линий. Вектор $C = (c_1, c_2)^т$, перпендикулярный этим линиям, указывает направление наискорейшего возрастания ЦФ, т. е. является вектором *градиента* ЦФ. Соответственно, направление, противоположное направлению, указываемому вектором градиента, характеризует направление убывания ЦФ (при решении задач ее минимизации).

Для практического осуществления поиска оптимальной точки ОДР необходимо:

1) определить вектор градиента ЦФ $\nabla W(x) = (\partial W(x)/\partial x_1; \partial W(x)/\partial x_2)^т = (c_1, c_2)^т$. Длина вектора градиента не связана со значением ЦФ, поэтому достаточно указать лишь его направление;

2) построить прямую, перпендикулярную вектору градиента;

3) перемещая эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора градиента дойти до угловой точки ОДР, где ЦФ достигает максимального допустимого значения.

3. *Определение значений управляемых переменных*. Решение задачи ЛП составляют координаты (x_1, x_2) угловой точки ОДР, через которую проходит линия, соответствующая уравнению ЦФ. Числовые значения этих переменных получают из решения системы линейных уравнений, которым на графике соответствуют пересекающиеся линии.

Пример 9.1.

Определить max $W(x) = x_1 + 4x_2$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4; \\ -x_1 + x_2 &\le 2; \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Графическое решение задачи представлено на рис. 9.1.

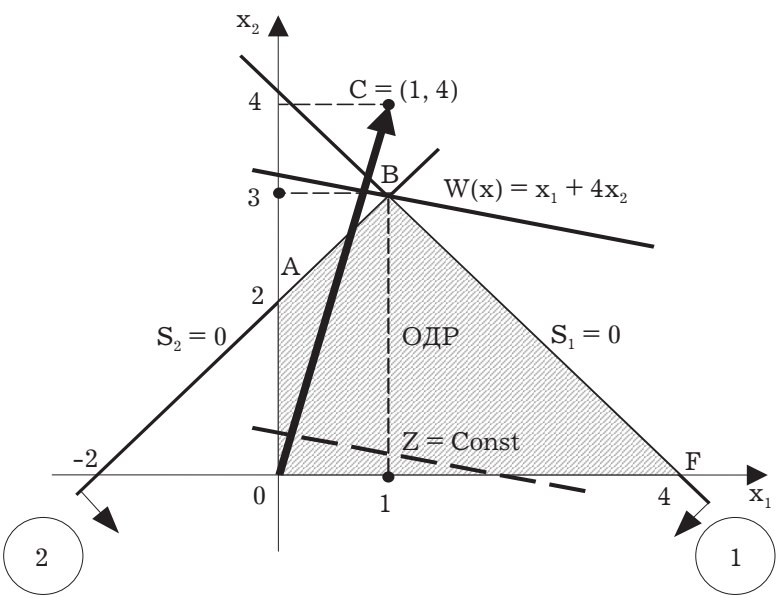


Рис. 9.1. Графическое решение задачи ЛП

Решение задачи составляют:

1) значение целевой функции $W(x) = 13$;

2) координаты экстремальной точки $u = \{x_1 = 1, x_2 = 3\}$.

Нахождение решения задачи ЛП на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения, которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.
4. Строят вектор $C = (c_1; c_2)$.
5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений.
6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора C, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример 9.2.

Для производства двух видов изделий (A и B) предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 9.1. В ней же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 9.1

Вид сырья	**Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие**		**Общее количество сырья (кг)**
	A	**B**	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия	30	40	

Учитывая, что изделия А и В могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен),требуется составить такой план, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В. Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В составит $W(x) = 30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы переходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств следует найти такое, при котором функция W(x) принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим знаками точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & \text{(I)} \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & \text{(II)} \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & \text{(III)} \\ x_1 = 0, & \text{(IV)} \\ x_2 = 0. & \text{(V)} \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 9.2.

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удов-

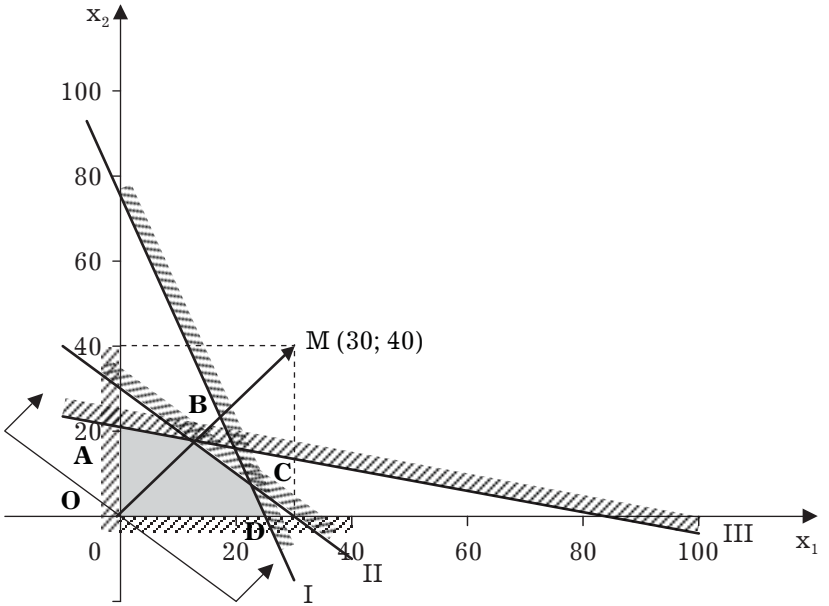


Рис. 9.2

летворяют исходному неравенству, а другой нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае — другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 \leq 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух плоскостей, например точку O(0;0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O(0;0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \leq 300$. Это и показано стрелками на рис. 9.2.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 9.2, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция W(x) принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор C = (30; 40) и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$, где h — некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, h = 480 и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$.

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий A и B, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ в направлении вектора C, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка B. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1 = 12$, $x_2 = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A

и 18 изделий вида В, то оно получит максимальную прибыль, равную $W(x)_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ руб.

Содержательная интерпретация полученных результатов приводит к следующим выводам:

1) изделий первого вида должно быть произведено 12 единиц; изделий второго вида — 18 единиц;

2) на производство изделий задействовано полностью сырье 3-го и 2-го вида; при этом будет сэкономлено 216 единиц сырья 1-го вида;

выручка, соответствующая оптимальной организации производства, составит 1080 у.д.е.

9.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

9.3.1. Стандартная форма задач линейного программирования

Симплекс-метод (СМ) решения задач ЛП относится к числу *итерационных* методов, а это означает, что в процессе поиска оптимального решения выполняемые в определенной последовательности однотипные вычислительные процедуры повторяются до тех пор, пока это решение не будет получено.

В основе построения СМ лежит положение о том, что оптимальному решению всегда соответствует одна из *угловых* (или *экстремальных*) точек области допустимых решений. Исходя из этого в вычислительной процедуре СМ реализуется упорядоченный процесс, при котором начиная с некоторой *начальной допустимой* угловой точки осуществляются переходы от одной *допустимой* угловой точки ОДР к другой. Каждый очередной переход осуществляется только в смежную (соседнюю) точку, при этом переход к предшествующей, уже пройденной экстремальной точке производиться не может. Перед каждым очередным переходом в смежную точку выполняется проверка на *оптимальность* той точки, которая в данный момент достигнута процедурой поиска оптимального решения СМ.

Одна из главных трудностей, возникающих при организации поиска СМ, заключается в определении *начальной допустимой* точки. С целью уменьшения этой трудности задачу ЛП приводят к стандартной форме, которая предполагает следующее:

1. Все ограничения-неравенства представляются в виде равенств с *неотрицательной* правой частью. Для приведения ограничений, записанных в виде неравенств типа ≤ или ≥, к равенствам необходимо прибавить остаточную переменную к левой части ограничения типа ≤ или вычесть избыточную переменную из левой части ограничения типа ≥. С содержательной точки зрения *остаточная* переменная представляет собой остаток, неизрасходованную часть какого-то ресурса, а *избыточная* переменная — превышение результатов деятельности над нормативными или плановыми заданиями. И на *остаточные*, и на *избыточные* переменные также накладывается условие неотрицательности.

Правые части сформированных таким образом равенств всегда можно сделать неотрицательными, умножив обе части равенств на (-1).

Пример 9.3. Даны ограничения-неравенства задачи ЛП:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le -b_3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Результатом приведения к стандартному виду является следующая система линейных равенств:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - s_2 = b_2,$$
$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - s_3 = b_3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0, s_1, s_2, s_3 \ge 0.$$

2. На значения всех переменных задачи накладывается условие *неотрицательности*. Если какая-либо из переменных не имеет ограничения в знаке, то ее представляют в виде раз-

ности двух неотрицательных переменных: $x_i = x_i' - x_i''$, где x_i', $x_i'' \geq 0$. Представленную таким образом переменную подставляют во все ограничения и в целевую функцию.

Пример 9.4. Дана задача ЛП: найти max $W(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при ограничениях

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$,
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2$,
$x_1 \geq 0$, x_2 — не ограничена в знаке.

Выполнение условия неотрицательности всех переменных приводит к следующей задаче: найти max $W(x) = c_1x_1 + c_2x'_2 - c_2x''_2$ при ограничениях:

$a_{11}x_1 + a_{12}x'_2 - a_{12}x''_2 \leq b_1$,
$a_{21}x_1 + a_{22}x'_2 - a_{22}x''_2 \geq b_2$,
$x_1 \geq 0$, x'_2, $x''_2 \geq 0$.

в) целевая функция задачи ЛП, представленной в стандартной форме, может подлежать как максимизации, так и минимизации. Исходную ЦФ в ряде случаев можно изменить: максимизация некоторой ЦФ эквивалентна минимизации той же ЦФ, взятой с противоположным знаком, и наоборот. Например, задача максимизации ЦФ $W(x) = x_1 + 4x_2$ эквивалентна задаче минимизации ЦФ $(-W(x)) = (-1)x_1 + (-4)x_2$.

9.3.2. Основные понятия симплекс-метода

Если задача ЛП имеет ограничения только типа ≤, трудностей в получении начального допустимого решения не возникает. В результате приведения задачи ЛП к стандартной форме ограничения задачи образуют систему линейных уравнений с n неизвестными, образующими векторное пространство, размерность которого m определяется количеством ограничений исходной задачи. При $m = n$ система уравнений имеет единственное решение, при $m > n$ в задаче ЛП возникает избыточность (часть уравнений оказывается лишней), и при $m < n$ задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений. Именно

этот последний случай и рассматривается в теории линейного программирования.

Пример 9.5. Задача ЛП из примера 9.1 после приведения к стандартной форме приобретает вид:

найти max $W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$

при ограничениях:

$x_1 + x_2 + s_1 = 4,$

$- x_1 + x_2 + s_2 = 2,$

$x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2 \geq 0.$

Для этой задачи $m = 2$, а $n = 4$.

Всякая угловая точка ОДР соответствует *базисному решению* задачи ЛП, представленной в стандартной форме. Для определения понятия *базисного решения* рассмотрим систему линейных уравнений из примера 9.5. Коэффициенты при переменных и правые части ограничений этой системы являются координатами m-мерных векторов: $P_1 = (1; -1)^т$, $P_2 = (1; 1)^т$, $P_3 = (1; 0)^т$, $P_4 = (0; 1)^т$, $B = (4; 2)^т$. Систему линейных уравнений можно записать в векторной форме:

$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3s_1 + P_4s_2 = B.$

Каждая остаточная переменная вводится только в одно ограничение, поэтому в остальных ограничениях коэффициенты при этой переменной, естественно, будут равны нулю. По этой причине в рассматриваемой системе линейных уравнений векторы P_3, P_4 являются линейно независимыми единичными векторами, т. е. составляют базис всей приведенной системы векторов. Переменные s_1, s_2, в данном случае соответствующие векторам базиса, называются базисными, а переменные x_1, x_2 — небазисными, или свободными. С геометрической точки зрения роль *базисных переменных* состоит в том, что они определяют величину проекции вектора B на направления векторов базиса (рис. 9.3).

С введением остаточных переменных базисное решение получить нетрудно. Базисным решением является такое частное решение системы линейных уравнений, которое получено следующим образом: все $(n - m)$ *свободных переменных* при-

равниваются нулю, а m *базисных переменных*, в качестве которых и выступают остаточные переменные, приравниваются правым частям уравнений.

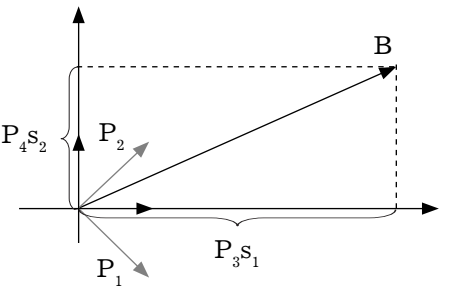


Рис. 9.3. Векторное представление ограничений задачи ЛП

Если базисное решение удовлетворяет условию неотрицательности правых частей, то оно называется допустимым базисным решением. Исходной точкой поиска в СМ является начало координат. Решение, удовлетворяющее этой точке, называется начальным. Для задачи ЛП из примера 9.5 *начальным допустимым базисным решением* является следующее: в качестве *базисных* принимаются остаточные переменные, которые принимают значения $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, остальные переменные x_1, x_2 являются в этом случае *свободными* и приравниваются нулю. Таким образом, для задачи ЛП, имеющей ограничения только типа ≤, *начальное допустимое базисное решение* получается после приведения ее к стандартному виду.

С помощью метода исключений Жордана — Гаусса можно найти все базисные решения системы уравнений, последовательно переходя от одного единичного базиса к другому. Общее количество таких базисных решений определяется количеством сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, которое по своей сути отражает максимальное количество итераций, которое может быть выполнено при решении задачи ЛП симплекс-методом. Однако на самом деле количество таких итераций гораздо меньше, поскольку в симплекс-методе реализуется такой целенаправлен-

ный процесс перехода от одной экстремальной точки к другой, что в результате происходит увеличение значения ЦФ (в задаче ее максимизации).

Смежные экстремальные точки ОДР различаются только одной переменной в каждой группе базисных и свободных переменных. Например, на рис. 9.1 началу координат соответствуют базисные переменные s_1, s_2 и небазисные x_1, x_2. Для соседней точки F группу базисных переменных составляют x_1 и s_2, а группу небазисных — x_2 и s_1. Как видно, группы базисных и небазисных переменных в точках O и F действительно различаются лишь одной компонентой. Это свойство экстремальных точек позволяет определить каждую последующую смежную экстремальную точку путем замены одной из текущих небазисных переменных текущей базисной переменной.

Для рассмотрения этого процесса взаимной замены переменных вводятся понятия включаемой и исключаемой переменных. *Включаемая* переменная — это небазисная в данный момент переменная, но которая будет включена в состав базисных на следующей итерации. *Исключаемая* переменная — это переменная, которая на следующей итерации будет исключена из состава базисных.

9.3.3. Алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим задачу ЛП примера 9.5. Процедуру решения задачи с использованием СМ удобнее представить с помощью табл. 9.2, которая является реализацией обычной жордановой таблицы.

В левом столбце таблицы отображаются номер итерации и указываются включаемые и исключаемые на очередной итерации переменные. В столбце “Базис. перем” вписываются базисные на данной итерации переменные. Столбец “Решения” содержит правые части ограничений задачи ЛП на нулевой итерации, базисные решения, получаемые в ходе очередной итерации, в этом же столбце будет находиться и оптимальное решение задачи. В столбце “Условия допустимости” содержит-

ся отношение, с помощью которого осуществляется проверка условий *допустимости* при выборе переменной, исключаемой из состава базисных. Столбец “Контрольная сумма” служит для проверки правильности проводимых расчетов и в каждой клеточке содержит арифметическую сумму всех чисел соответствующей строки. Остальные столбцы содержат в заголовке имена всех базисных и небазисных переменных.

Шаг 0. Используя стандартную форму задачи ЛП определить начальное допустимое базисное решение (НДБР), приравняв нулю (n – m) свободных переменных. На этом шаге строится исходная таблица и в нее заносятся все базисные переменные, коэффициенты при переменных в ограничениях, а также их правые части. Для ЦФ в таблице вводится отдельная строка (W(x)-строка). Для включения в таблицу ЦФ преобразуют путем переноса ее правой части влево от знака равенства, например, $W(x) - x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$.

Таблица 9.2

Номер итерации	**Базис. перем**	x_1	x_2	s_1	S_2	**Решение**	**Условие допустимости**	**Контрольная сумма**
0 (x_2 вкл., s_2 искл.)	Z	-1	-4	0	0	0	0	-5
	s_1	1	1	1	0	4	4/1 = 4	7
	s_2	-1	1	0	1	2	2/1 = 2	3
1 (x_1 вкл., s_1 искл.)	Z	-5	0	0	4	8		7
	s_1	2	0	1	-1	2	2/2 = 1	4
	x_2	-1	1	0	1	2	—	3
2 (оптимум)	Z	0	0	5/2	3/2	13		17
	x_1	1	0	1/2	-1/2	1		2
	x_2	0	1	1/2	1/2	3		5

Шаг 1. Из числа текущих небазисных переменных выбирается включаемая в базис новая переменная, положительное приращение которой приводит к увеличению ЦФ. На этом шаге проверяется условие оптимальности: в задачах максимизации ЦФ, включаемой в состав базисных, является переменная, которая имеет наибольший отрицательный коэффициент в

Z–строке симплекс-таблицы. Если все коэффициенты Z–строки оказались положительными, то это свидетельствует о достижении ЦФ ***оптимального*** значения. В задачах минимизации ЦФ признаком оптимальности решения является отрицательность всех коэффициентов Z–строки. Переменная, включаемая в состав базисных, определяет *ведущий* столбец таблицы.

Шаг 2. Из числа переменных текущего базиса выбирается исключаемая переменная, которая должна принять нулевое значение. На этом шаге проверяется условие допустимости: в задачах и максимизации, и минимизации ЦФ исключаемой выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к *положительному* коэффициенту ведущего столбца минимально, т. е. $s_i = \min\{b_1/a_{11};\ b_2/a_{21}\}$. Существо этой проверки состоит в том, что следующая экстремальная точка, в которую будет осуществлен переход, должна принадлежать ОДР. Величина отношения определяет приращение, которое получает включаемая в состав базисных переменная. Переменная, исключаемая из состава базисных, определяет *ведущую* строку.

Шаг 3. Находится новое базисное решение, соответствующее новым базисным и небазисным переменным. Элемент таблицы на пересечении ведущей строки и ведущего столбца называется *ведущим.* Очередная итерация проводится по следующей схеме:

1) все элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент;

2) все элементы ведущего столбца заменяются нулями, а сам ведущий элемент — единицей;

3) все остальные элементы симплекс-таблицы, включая Z-строку и элементы столбцов “Решение” и “Контрольная сумма”, вычисляются по правилу “прямоугольника”

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}}{a_{ks}},$$

где a_{ks} — ведущий элемент.

Осуществляется переход к шагу 1.

a_{is}	...	a_{ij}
...	...	...
a_{ks}	...	a_{kj}

9.3.4. Метод искусственных переменных

Задачи ЛП с использованием СМ легко решаются лишь при ограничениях типа ≤. При ограничениях-равенствах или ограничениях типа ≥, когда имеют дело с остаточными переменными, возникают трудности, связанные с получением *начального допустимого базисного решения.*

Для получения этого решения используются искусственные переменные, которые включаются в левые части уравнений, не содержащих очевидных базисных решений.

Обеспечивая получение НДБР, эти переменные играют роль остаточных переменных, но, не имея физического смысла, в процессе оптимизации они должны оказаться равными нулю.

С применением искусственных переменных связаны два основных метода: метод больших штрафов (М-метод) и двухэтапный метод.

Метод больших штрафов. В этом методе в задачу ЛП вводится обратная связь, которая обеспечивает получение оптимального решения при нулевых искусственных переменных. В качестве такой обратной связи используется *штраф*, накладываемый на ЦФ за использование искусственных переменных.

Пример 9.6. Рассмотрим задачу ЛП примера 9.1, введя в условия дополнительное ограничение:

определить $\max W(x) = x_1 + 4x_2$

при ограничениях: $x_1 + x_2 \le 4$

$-x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + 3x_2 \ge 3$

$x_1, x_2 \ge 0.$

После приведения задачи ЛП к стандартному виду, получим:

найти max $W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 4; \\ -x_1 + x_2 \qquad + s_2 \qquad &= 2; \\ x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - s_3 &= 3; \\ x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

При обычном подходе для получения начального допустимого базисного решения необходимо приравнять нулю небазисные переменные x_1, x_2, а базисные переменные s_1, s_2, s_3 приравнять правым частям уравнений. Однако в этом случае переменная s_3 имеет отрицательное значение, что противоречит условию неотрицательности всех переменных задачи ЛП. Введем в третье уравнение искусственную переменную R_1, которая будет играть роль остаточной переменной. За использование этой переменной в ЦФ вводится штраф — достаточно большой отрицательный коэффициент M. В задачах минимизации ЦФ этот коэффициент является положительным. В результате задача ЛП приводится к следующему виду:

найти max $W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_1$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 4; \\ -x_1 + x_2 \qquad + s_2 \qquad &= 2; \\ x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - s_3 + R_1 &= 3; \\ x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3, R_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Система линейных равенств содержит $m = 3$ уравнения и $n = 6$ переменных, поэтому начальное базисное решение должно содержать $n - m = 3$ нулевых переменных и 3 базисных переменных. Если положить равными нулю свободные переменные x_1, x_2, s_3, то сразу будет получено требуемое начальное базисное решение: $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, $R_1 = 3$.

После этого условия задачи переформулируются таким образом, чтобы процесс решения можно было представить в удобной табличной форме (табл. 9.3).

Таблица 9.3

№ итерации	Базис. перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	Решение	Условие допустимости
0 (x_2 вкл., R_1 искл.)	Z	-1-M	-4-M	0	0	M	0	-M	
	s_1	1	1	1	0	0	0	4	4
	s_2	-1	1	0	1	0	0	2	2
	R_1	1	1	0	0	-1	1	1	1
1 (s_3 вкл., s_2 искл.)	Z	3	0	0	0	-4	4+M	4	
	s_1	0	0	1	0	1	-1	3	3
	s_2	-2	0	0	1	1	-1	1	1
	x_2	1	1	0	0	-1	1	1	-
2 (x_1 вкл., S_1 искл.)	Z	-5	0	0	4	0	M	8	
	s_1	2	0	1	-1	0	0	2	1
	s_3	-2	0	0	1	1	-1	1	-
	x_2	-1	1	0	1	0	0	2	-
3 (оптимум)	Z	0	0	5/2	1/2	0	M	13	
	x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1	
	s_3	0	0	1	0	1	-1	7	
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	3	

Для этого необходимо, чтобы начальное решение в явном виде присутствовало в столбце, характеризующем правые части всех уравнений задачи. С этой целью в уравнение ЦФ подставляется выражение для искусственной переменной, полученное из соответствующего ограничения: $R_1 = 3 - x_1 - 3x_2 + s_3$. В результате получается следующее выражение для ЦФ:

$$W(x) = x_1 + 4x_2 - M(3 - x_1 - 3x_2 + s_3).$$

После приведения подобных членов Z-уравнение в симплекс-таблице будет иметь вид: $W(x) - (1 + M)x_1 - (4 + 3M)x_2 + Ms_3 = -3M$.

Последовательность решения задачи представлена в табл. 9.3.

Оптимальному решению соответствует точка $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, где ЦФ $W(x) = 13$. Так как в решении отсутствует искусственная переменная, то оно является допустимым оптимальным решением задачи.

Двухэтапный метод. Недостаток М-метода обусловлен большой величиной штрафа М, что зачастую приводит к ошибкам в вычислениях из-за процедуры округления чисел. В двухэтапном методе штраф не используется, поэтому он лишен такого недостатка. Процедура поиска оптимального решения здесь организована как бы в два этапа (отсюда и название этого метода).

На *первом этапе* вводятся искусственные переменные, необходимые для получения стартовой точки; формируется фиктивная ЦФ φ как сумма искусственных переменных, выраженных из соответствующих ограничений. Решается задача минимизации функции φ. Если минимальное значение функции φ равно нулю, то исходная задача имеет допустимое решение, в противном случае задача решения не имеет. Основная цель первого этапа — получение начального решения исходной задачи.

На *втором этапе* решается исходная задача, при этом в качестве начального решения используется оптимальное решение, полученное на первом этапе.

В симплекс-таблице для двухэтапного метода вводится еще одна строка для фиктивной ЦФ φ. На первом этапе условие оптимальности проверяется только по элементам φ-строки, а с элементами Z-строки выполняются обычные для симплекс-метода процедуры расчетов. С достижением нулевого значения функции φ-строка, соответствующая этой функции, из симплекс-таблицы исключается и дальнейшие итерации, составляющие второй этап, осуществляются с использованием элементов Z-строки.

Пример 9.7. Рассмотрим задачу примера 9.6. После приведения исходной задачи ЛП к стандартному виду и введения искусственной переменной формируется фиктивная ЦФ:

$$\varphi = R_1 = 3 - x_1 - 3x_2 + s_3.$$

Для включения в симплекс-таблицу функция приводится к виду: $\varphi + x_1 + 3x_2 - s_3 = 3$.

Решение задачи симплекс-методом представлено в табл. 9.4.

Таблица 9.4

№ итерации	Базис. перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	Решение	Условие допустимости
0 (x_2 вкл., R_1 искл.)	Z	-1	-4	0	0		0	0	
	φ	1	3	0	0	-1	0	3	
	s_1	1	1	1	0	0	0	4	4
	s_2	-1	1	0	1	0	0	2	2
	R_1	1	1	0	0	-1	1	1	1
1 (s_3 вкл., s_2 искл.)	Z	1/3	0	0	0	-4/3	4/3	4	
	φ	0	0	0	0	0	-1/3	0	
	s_1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3	3	3
	s_2	-4/3	0	0	1	1/3	-1/3	1	1
	x_2	1/3	1	0	0	-1/3	1/3	1	-
2 (x_1 вкл., s_1 искл.)	Z	-5	0	0	4	0	0	8	
	s_1	2	0	1	-1	0	0	2	1
	s_3	-4	0	0	3	1	-1	3	-
	x_2	-1	1	0	1	0	0	2	-
3 (оптимум)	Z	0	0	5/2	1/2	0	0	13	
	x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1	
	s_3	0	0	1	0	1	-1	7	
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	3	

Количество необходимых итераций М-метода и двухэтапного метода всегда одинаково. Преимуществом двухэтапного метода является то, что при его применении не требуется использование в расчетах постоянной М.

9.4. Двойственная задача линейного программирования

Двойственная задача — это вспомогательная задача ЛП, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной задачи, которая в этом случае называется *прямой* задачей ЛП (ПЗЛП).

Необходимость изучения двойственной задачи ЛП (ДЗЛП) обусловлена следующими причинами. Во-первых, трудности в

решении задач ЛП зависят не от количества переменных n, а от количества ограничений m, определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если ПЗЛП, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений ($m > n$), то в этом случае целесообразно перейти к ДЗЛП. Сформированная ДЗЛП будет иметь m переменных и n ограничений, т. е. количество итераций при этом уменьшится. Во-вторых, наличие связей между оптимальными решениями ПЗЛП и ДЗЛП позволили разработать *двойственный симплекс-метод*, который находит применение при анализе чувствительности задач ЛП и в процедурах целочисленного линейного программирования.

При переходе к ДЗЛП в качестве исходной принимается стандартная форма прямой задачи ЛП. ДЗЛП формируется по следующим правилам:

1) каждому ограничению ПЗЛП соответствует переменная ДЗЛП y_i, $i = 1, ..., m$; правая часть ограничения ПЗЛП b_i становится коэффициентом ЦФ $W(x)$ ДЗЛП при переменных y_i;

2) каждой переменной ПЗЛП x_j, $j = 1, ..., n$, соответствует ограничение ДЗЛП; коэффициенты ЦФ Z ПЗЛП c_j становятся правыми частями ограничений ДЗЛП;

3) коэффициенты a_{ij} при переменных x_j в ПЗЛП становятся коэффициентами при переменных y_i в ДЗЛП.

При переходе к ДЗЛП происходит изменение направления оптимизации, ограничений и переменных, что отражено в табл. 9.5.

Таблица 9.5

Прямая задача ЛП в стандартной форме	**Двойственная задача ЛП**		
	ЦФ	**Ограничения**	**Переменные**
max	min	≥	Не имеют ограничений в знаке
min	max	≤	

Пример 9.8. Дана прямая задача ЛП:
найти $\max W(x) = x_1 + 2x_2$

при ограничениях: $x_1 + x_2 \le 8;$
$- x_1 + x_2 \le 2;$
$x_1 + x_2 \ge 4;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

Необходимо сформировать двойственную задачу ЛП.

Для построения ДЗЛП требуется прямую задачу привести к стандартной форме:

найти $\max W(x) = x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_3$

при ограничениях:

$$\begin{array}{lllllll} x_1 + & x_2 + & s_1 & & & = 8 \to y_1; \\ - x_1 + & x_2 + & & s_2 & & = 2 \to y_2; \\ x_1 + & x_2 - & & s_3 + & R_3 & = 4 \to y_3; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2 \ge & 0, & s_1, & s_2, & s_3 \ge & 0. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{1-е} & \text{2-е} & \text{3-е} & \text{4-е} & \text{5-е} & \text{6-е} & W(x) \\ \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \end{array}$$

В соответствии с приведенными выше правилами сформированная ДЗЛП имеет вид:

найти $\min W(x) = 8y_1 + 2y_2 + 4y_3$

при ограничениях: $y_1 - y_2 + y_3 \ge 1,$
$y_1 + y_2 + y_3 \ge 2,$
$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, -y_3 \ge 0 \ (y_3 \le 0), y_3 \ge -M.$

По правилам, приведенным в табл. 9.5, двойственные переменные y_1, y_2, y_3 не ограничены в знаке, однако введение остаточных переменных в ПЗЛП приводит к появлению более жестких условий: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$ — неотрицательности переменных. Для переменной y_3 условие неограниченности в знаке остается в силе. Дело в том, что величина M имеет большое положительное значение, поэтому ограничение $y_3 \ge -M$ равносильно неограниченности переменной y_3 как в знаке, так и в значении.

При решении ДЗЛП ее необходимо представить в виде разности двух неотрицательных переменных: $y_3 = y_3' - y_3''$, $y_3' \ge 0$, $y_3'' \ge 0$.

Между оптимальными решениями прямой и двойственной задачами ЛП существует тесная взаимосвязь. Это означает,

что решение одной из этих задач без каких-либо дополнительных вычислений может быть получено из итоговой оптимальной симплекс-таблицы другой задачи.

Рассмотрим эту связь на прямой и двойственной задачах примера 9.8. В табл. 9.6 и 9.7 приведены оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач ЛП. Из сравнения таблиц можно установить следующее. Во-первых, в точке, соответствующей оптимальным решениям обеих задач, выполняется равенство: max W(x) = min W(x). В задаче максимизации ЦФ последовательно увеличивается от начального значения до оптимального W(x) = 13. В задаче минимизации ЦФ уменьшается от начального значения до оптимального W(x) = 13. Из этого следует, что процессы максимизации и минимизации сходятся в некоторой "точке равновесия", после достижения которой ЦФ задач улучшить невозможно. Такая точка достигается при равенстве значений ЦФ и соответствует их оптимальным значениям. Во-вторых, базисные решения ПЗЛП можно получить непосредственно из оптимальной симплекс-таблицы ДЗЛП, и наоборот. В табл. 9.4 темным цветом выделены переменные начального базиса прямой задачи и коэффициенты при них в Z-строке. Этим переменным соответствуют 3-е, 4-е и 6-е ограничения ДЗЛП ($y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq -M$).

Двойственные переменные определяются по следующему правилу: коэффициент при начальной базисной переменной в оптимальном Z-уравнении ПЗЛП равен разности между левой и правой частями ограничения ДЗЛП, ассоциированного с данной начальной переменной. В данном случае $3/2 = y_1 - 0$, $1/2 = y_2 - 0$, $M = y_3 + M$. Отсюда, $y_1 = 3/2$, $y_2 = 1/2$ и $y_3 = 0$, в справедливости чего можно убедиться, сравнив эти значения двойственных переменных с оптимальным решением ДЗЛП в табл. 9.6.

Аналогичным образом могут быть получены значения переменных ПЗЛП из оптимальной симплекс-таблицы ДЗЛП. В табл. 9.7, где приведено оптимальное решение ДЗЛП, выделены темным цветом переменные начального базиса ДЗЛП и коэффициенты при них в оптимальной Z-строке. Очевидно, что двойственной к ДЗЛП будет являться исходная ПЗЛП. Поэтому

при построении двойственной к ДЗЛП задачи переменной R_1 будет соответствовать переменная x_1 прямой задачи, а переменной R_2 — переменная x_2 прямой задачи с условиями $x_1 \geq M$ и $x_2 \geq M$.

Таблица 9.6

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_3	**Решение**
Z	0	0	3/2	1/2	0	M	13
s_3	0	0	1	0	1	-1	4
x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	5
x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	3

Значения переменных ПЗЛП определяются по следующему правилу: коэффициенты в оптимальном Z-уравнении равны разности между левыми и правыми частями соответствующих ограничений прямой задачи, ассоциированных с начальными переменными ДЗЛП. В данном случае имеем: $3 - M = x_1 - M$, $5 - M = x_2 - M$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = 5$, что соответствует оптимальному решению ПЗЛП в табл. 9.7.

Таблица 9.7

Базис	y_1	y_2	y_3'	y_3''	s_1	R_1	s_2	R_2	**Решение**
Z	0	0	0	0	-3	3 – M	-5	5 – M	13
y_1	1	0	-1	0	-1/2	1/2	-1/2	1/2	3/2
y_2	0	1	0	-1	1/2	-1/2	-1/2	1/2	1/2

Соотношения двойственности задач ЛП позволили разработать *двойственный симплекс-метод*, при котором сначала получается недопустимое, но лучшее, чем оптимальное решение, а затем осуществляется систематическое приближение его к области допустимых решений. Этот метод используется для определенного класса задач ЛП, в которых уже на начальной итерации можно получить оптимальное, но недопустимое решение. Но еще важнее то, что он используется при анализе чувствительности задач ЛП. Применение двойственного симплекс-метода предусматривает выполнение следующих действий:

1) преобразование всех ограничений задачи ЛП в ограничения типа ≤, при этом часть ограничений будет иметь отри-

цательные правые части; для всех ограничений вводятся остаточные переменные;

2) проверка условий допустимости, которая заключается в выявлении переменной, исключаемой из состава базисных на очередной итерации. В качестве исключаемой выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная базисная переменная. Если все базисные переменные неотрицательны, то это свидетельствует о получении оптимального и допустимого решения;

3) проверка условия оптимальности, которая заключается в выборе переменной, включаемой в состав базисных на очередной итерации. Для этого вычисляются отношения коэффициентов Z-строки к соответствующим коэффициентам ведущей строки. Отношения с положительным или нулевым значением знаменателя не учитываются. В задаче минимизации ЦФ вводимой переменной должно соответствовать наименьшее из указанных отношений, а в задачах максимизации ЦФ — отношение, наименьшее по абсолютной величине. Задача ЛП не имеет решения, если знаменатели всех отношений равны нулю или положительны;

4) после выбора включаемой и исключаемой переменных осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Пример 9.9. Найти $\min W(x) = 2x_1 + x_2$

при ограничениях
$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 \geq 3;\\ &4x_1 + 3x_2 \geq 6;\\ &x_1 + 2x_2 \leq 3;\\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

После преобразований получим следующую задачу:

найти $\min W(x) = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + s_1 &= -3;\\ 4x_1 + 3x_2 + s_2 &= -6;\\ x_1 + 2x_2 + s_3 &= 3;\\ x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Начальная симплекс-таблица представлена в табл. 9.8.

В соответствии с условием допустимости в качестве исключаемой из состава базисных выбирается переменная s_2, поскольку имеет наибольшее отрицательное значение.

Таблица 9.8

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решение**
Z	-2	-1	0	0	0	0
s_1	-3	-1	1	0	0	-3
s_2	-4	-3	0	1	0	-6
s_3	1	2	0	0	1	3

Включаемой в состав базисных является переменная x_2, для которой характерно минимальное отношение коэффициента Z-строки к коэффициенту ведущей строки — 1/3 (для переменной x_1 это отношение составляет $1/2 > 1/3$). Далее выполняется процедура пересчета симплекс-таблицы.

9.5. Анализ чувствительности задачи линейного программирования

Задача ЛП имеет *статическое* оптимальное решение, поэтому, как только изменяются исходные условия, полученное решение теряет свою актуальность. Анализ чувствительности задачи ЛП как раз и связан с исследованием возможных изменений полученного оптимального решения в результате изменений исходных данных задачи. Анализ чувствительности — это процесс, который реализуется после того, как получено оптимальное решение.

Для проведения такого анализа используется итоговая симплекс-таблица, из которой либо непосредственно, либо при помощи простых вычислений получают важную и существенную информацию относительно

1) оптимального решения,

2) статуса ресурсов,

3) ценности каждого ресурса,

4) чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов,

5) чувствительности к вариациям коэффициентов ЦФ.

Оптимальное решение. С точки зрения практического применения результатов решения задачи ЛП классификация переменных на базисные и небазисные не имеет значения, поэтому ее можно не учитывать. Переменные, которые отсутствуют в столбце “Базис”, имеют нулевые значения, значения же остальных переменных и значение ЦФ приводятся в столбце “Решение”.

Определение статуса ресурсов. Определение статуса ресурсов предусматривает отнесение ресурсов задачи ЛП к разряду *дефицитных* или *недефицитных*. К дефицитным относятся ресурсы, если в оптимальном решении предусматривается их полное использование; если же ресурс используется неполностью, то такой ресурс следует отнести к недефицитным. Статус ресурсов любой задачи ЛП определяется на основании значений остаточных переменных. Если остаточная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном использовании ресурса, т. е. ресурс является дефицитным. Если же остаточная переменная не равна нулю, то это означает, что ресурс использован неполностью и относится, таким образом, к недефицитным.

Ценность ресурсов. Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения ЦФ, приходящегося на единицу прироста объема рассматриваемого ресурса. В итоговой симплекс-таблице ценность ресурсов можно определить по значениям коэффициентов при остаточных переменных s_i, $i = 1, ..., m$, начального базиса, фигурирующих в z-уравнении оптимальной симплекс-таблицы. Поскольку переменная s_i всегда связана только с ресурсом i, то идентификация ресурса происходит однозначно. Столбцы итоговой симплекс-таблицы, связанные с искусственными переменными, при анализе чувствительности могут быть удалены как не содержащие полезной информации.

Пример 9.10. Рассмотрим задачу ЛП, придав ей экономическое содержание:

найти max $W(x) = 4x_1 + 3x_2$

при ограничениях: $3x_1 + 8x_2 \le 24$ (ресурс 1);
$2x_1 + x_2 \le 8$ (ресурс 2);
$-x_1 + x_2 \le 2$ (ресурс 3);
$x_1, x_2 \ge 0$.

Предположим, что речь идет об определении объемов производства продукции двух типов: x_1 (прод. 1) и x_2 (прод. 2). Для их производства используются три вида ресурсов, запасы которых ограничены и представлены правыми частями ограничений. Коэффициенты при переменных в ограничениях характеризуют интенсивность расходования ресурсов на единицу каждого вида продукции. Коэффициенты ЦФ имеют смысл стоимости продукции каждого вида (например, тыс. руб./прод. j), а ЦФ в этом случае — прибыль от реализации изготавливаемой продукции (тыс. руб.).

Итоговая симплекс-таблица задачи ЛП представлена в табл. 9.9.

Таблица 9.9

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решение**
Z	0	0	1/6	4/7	0	18
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2
x_2	0	1	-1/12	5/8	0	3
s_3	0	0	-1/4	7/8	1	2

Из таблицы видно, что переменная $s_3 = 2$, а переменные s_1, s_2, будучи небазисными, равны нулю. Это означает, что ресурс 3 является недефицитным, а ресурсы 1 и 2 — дефицитными, т. е. расходуемыми полностью без остатка.

Ценность ресурсов определяется только для дефицитных ресурсов. В данном случае эта информация содержится в Z-строке для переменных s_1 и s_2. Размерность каждого элемента итоговой симплекс-таблицы устанавливается отношением единиц измерения элементов столбца “Решение” к единицам

измерения каждой из переменных, сопоставленных со столбцами. Поэтому, элемент в столбце для s_1 имеет размерность [тыс. руб./ресурс 1] и характеризует интенсивность улучшения оптимального значения ЦФ при увеличении на единицу запасов ресурса 1. Величины, характеризующие ценность ресурсов, называют еще *теневыми ценами* или *издержками производства*. Учитывая, что значения двойственных переменных определяются с помощью коэффициентов в Z-строке, можно сделать следующий вывод: двойственные переменные характеризуют издержки производства. Любое ограничение ДЗЛП ≥ (или ≤) c_j отражает суммарные издержки на производство j-го вида продукции.

Анализ чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов. Для проведения такого анализа используется следующий прием: вводится некоторая величина Δ_i в правую часть для ресурса b_i. Допустим, что такая величина введена для ресурса 2 в исходную задачу ЛП. Если провести вновь все алгебраические преобразования и выполнить все итерации, то в итоговой симплекс-таблице величина Δ_2 будет фигурировать только в столбце "Решение", так как этот столбец не может быть ведущим. Коэффициенты при Δ_2 равны коэффициентам столбца для переменной s_2, соответствующей ресурсу 2. Эти результаты представлены в табл. 9.10.

Таблица 9.10

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решения**	
Z	0	0	1/6	4/7	0	18 +	$4/7\Delta_2$
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2 –	$1/4\Delta_2$
x_2	0	1	-1/12	5/8	0	3 +	$5/8\Delta_2$
s_3	0	0	-1/4	7/8	1	2 +	$7/8\Delta_2$

Так как введение Δ_2 сказывается только на правой части симплекс-таблицы, то изменение запасов ресурса может повлиять только на допустимость решения. Поэтому Δ_2 не может быть отрицательной и должна быть ограничена таким интервалом значений, при которых выполняется условие неотрица-

тельности правых частей ограничений (или неотрицательности переменных), т. е.

$$x_1 = 2 - 1/4\Delta_2 \geq 0,$$
$$x_2 = 3 + 5/8\Delta_2 \geq 0,$$
$$s_3 = 2 + 7/8\Delta_2 \geq 0.$$

Решение этой системы неравенств приводит к результату: $-16/7 \leq \Delta_2 \leq 8$. Любое значение Δ_2, выходящее за пределы указанного интервала (т. е. уменьшение запаса ресурса 2 на 16/7 единиц или увеличение его на 8 единиц), приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных. При известных границах изменения Δ_2 устанавливаются реальные границы изменения запасов ресурса 2:

$$24 + \Delta_{2\min} \leq b_2 \leq 24 + \Delta_{2\max}.$$

Аналогичная процедура выполняется для всех остальных ресурсов, являющихся дефицитными.

Анализ чувствительности к вариациям коэффициентов ЦФ. Существо анализа сводится к установлению допустимых границ изменения коэффициентов ЦФ, при которых оптимальные значения переменных задачи ЛП остаются неизменными (хотя значение ЦФ при этом меняется).

Для установления таких границ, например, коэффициета c_1, вводится величина изменения δ_1 этого коэффициента в уравнение ЦФ. Поскольку уравнение ЦФ не может быть в процессе преобразований ведущей строкой, то приращение δ_1 будет фигурировать только в Z-строке итоговой симплекс-таблицы. ЦФ в этом случае принимает вид: $W(x) = (4 + \delta_1)x_1 + 3x_2$. Если провести вновь все преобразования, то получим следующие изменения в симплекс-таблице (табл. 9.11).

Таблица 9.11

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решение**
Z	0	0	$1/6 + 1/6\delta_1$	$4/7 - 1/4\delta_1$	0	$18 + 2\delta_1$
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2

Коэффициенты при δ_1 в Z-строке равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке для x_1, поскольку

именно для этой переменной была введена величина δ_1 в исходное уравнение ЦФ.

По условиям оптимальности для задачи максимизации ЦФ все элементы Z-строки должны быть неотрицательными, поэтому составляется система неравенств:

$$1/6 + 1/6\delta_1 \geq 0;$$
$$4/7 - 1/4\delta_1 \geq 0.$$

Решая систему неравенств, получим: $-1 \leq \delta_1 \leq 16/7$. Эти результаты определяют пределы изменения коэффициента c_1 в ЦФ: $4 + \delta_{1min} \leq c_1 \leq 4 + \delta_{1max}$. Таким образом, при уменьшении коэффициента ЦФ до значения $4 + (-1) = 3$ и при увеличении его до значения $4 + 16/7 = 44/7$ оптимальные значения базисных переменных остаются неизменными, хотя значение ЦФ изменяется в соответствии с выражением $18 + 2\delta_1$.

Аналогичным образом определяются границы изменения остальных коэффициентов ЦФ при переменных задачи ЛП.

9.6. Классификация методов решения задач целочисленного линейного программирования

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) — раздел математического программирования, ориентированный на решение задач, в которых на все или на некоторые переменные наложено требование целочисленности. В соответствии с этим определением все задачи ЦЛП подразделяются на полностью целочисленные и частично целочисленные. В *полностью целочисленных* задачах требование целочисленности накладывается на все переменные, а в *частично целочисленных* задачах — только на часть переменных.

Основные трудности решения задач ЦЛП связаны с эффектом округления чисел, возникающим при использовании ЭВТ. Округление чисел неприемлемо для получения решения задачи ЦЛП по следующим причинам:

1) решение в результате округления может быть получено в точке, не являющейся на самом деле оптимальной. Например, если значение одной из базисных переменных в оптимальном решении равно 10,1, то округление ее до 10 может привести к недопустимости решения, т. е. к выходу из области допустимых решений;

2) округление не имеет смысла в том случае, если переменные задачи ЦЛП — булевы, т. е. могут принимать только два значения: 0 или 1;

3) округление невозможно в том случае, если в задаче речь идет о неделимых объектах, например о предприятиях, наручных часах, людях и т. д.

Существуют следующие методы решения задач ЦЛП:

1. ***Методы отсечений.*** К этой группе методов относятся методы отсекающих плоскостей Гомори, которые разработаны для решения как частично, так и полностью целочисленных задач. Существо метода состоит в следующем: сначала решается задача ЦЛП как задача линейного программирования без учета требования целочисленности, а затем вводятся дополнительные ограничения, которые отсекают от области допустимых решений части плоскости, не содержащие целочисленных значений переменных.

2. ***Комбинаторные методы.*** К этой группе методов относится метод ветвей и границ. Существо метода заключается в переборе всех допустимых целочисленных решений. Основная трудность реализации метода состоит в формировании множества приемлемой мощности допустимых целочисленных решений.

3. ***Комбинированные методы.*** Эти методы используются только тогда, когда целочисленные переменные являются булевыми. Булевы свойства переменных значительно упрощают процесс решения задачи ЦЛП, поэтому существуют специальные процедуры приведения таких задач к виду, где целочисленные переменные преобразуются в булевые. К этой группе методов может быть отнесен метод частичного перебора.

9.7. Метод отсекающих плоскостей Гомори

Идея метода заключается в преобразовании многогранника области допустимых решений, полученного при решении задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных, в выпуклый многогранник, экстремальная точка которого является искомым решением задачи ЦЛП.

9.7.1. Метод Гомори для полностью целочисленных задач

Необходимым условием применения этого алгоритма является целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений. Невыполнение этого условия не позволяет получить целочисленного решения. Дело в том, что требование целочисленности распространяется и на дополнительные переменные задачи ЦЛП, а наличие дробных коэффициентов в ограничениях приводит к нарушению этого требования.

Рассмотрим алгоритм решения полностью целочисленной задачи ЛП.

1. *Решение задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных.* Такая задача ЛП называется задачей с ослабленными ограничениями. Если все базисные переменные задачи целочисленны, то решение считается полученным и выполнение дальнейших процедур не имеет смысла.

2. *Формирование уравнения отсекающих плоскостей Гомори.* Из итоговой симплекс-таблицы выбираются строки, которые соответствуют нецелочисленным значениям базисных переменных. Такие строки называются *производящими.* Все последующие действия основаны на том положении, что любое нецелое число может быть представлено в виде суммы ближайшего наибольшего целого числа и дробной части:

$$\alpha = [\alpha] + f,$$

где $[\alpha]$ — наибольшее целое число, меньшее или равное α ($[\alpha] \le \alpha$), f — дробная часть числа, $0 \le f < 1$. Примеры: $3\frac{5}{7} = 3 + \frac{5}{7}$; $-2\frac{2}{9} = -3 + \frac{7}{9}$.

Производящую строку записывают в виде следующего уравнения:

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \beta_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

где β_i — нецелое число, расположенное в столбце “Решение”,

q_j — дополнительная (остаточная или избыточная) переменная,

α_{ij} — коэффициент при дополнительной переменной.

Фигурирующие в этом уравнении величины α_{ij} и β_i представляют также в виде суммы целого и дробного чисел:

$$\alpha_{ij} = [\alpha_{ij}] + f_{ij},\ 0 \le f_{ij} < 1;$$
$$\beta_i = [\beta_i] + f_i,\ 0 \le f_i < 1.$$

После подстановки в исходное уравнение получают следующее выражение:

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] q_j + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = [\beta_i] + f_i.$$

После переноса вправо целых частей уравнение приобретает следующий вид:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = x_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] q_j - [\beta_i]. \qquad (9.2)$$

Так как x_i и q_j должны быть целочисленными, то правая часть этого выражения также должна быть целочисленной. Но исходя из имеющегося равенства следует вывод о том, что и левая часть этого выражения тоже должна быть целочисленной.

Поскольку $q_j \ge 0$ по условиям задачи ЛП, а $f_{ij} \ge 0$ по представлению дробного числа, то $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \ge 0$. Из этого следует, что левая часть последнего равенства может быть представлена в виде

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \le f_i.$$

Учитывая то условие, что $0 < f_i < 1$, неравенство приобретает вид

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j < 1.$$

Левая часть этого неравенства не может быть равной 1, поэтому, делая логическое заключение, можно записать:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \le 0. \qquad (9.3)$$

Это неравенство является выражением необходимого условия целочисленности и одновременно его можно рассматривать как дополнительное ограничение задачи линейного программирования.

В соответствии с процедурами решения задачи ЛП неравенство (9.3) приводится к стандартному виду введением остаточной переменной s_{n+1}:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j + s_{n+1} = 0.$$

Из нескольких производящих строк, имеющихся в итоговой симплекс-таблице, выбирается та, которая характеризуется максимальным значением дробной части базисной переменной f_i.

Величина f_i определяет вклад дробной части в приближение решения задачи ЦЛП к оптимальной целочисленной точке ОДР: чем больше дробная часть, тем ближе значение базисной переменной к целочисленному оптимальному решению.

После выбора производящей строки формируется уравнение отсечения:

$$s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = -f_i. \qquad (9.4)$$

Такая форма представления уравнения необходима для удобства его записи в итоговую симплекс-таблицу. Это ограничение-равенство определяет отсечение Гомори для полностью целочисленных задач.

Уравнение (9.4) является математической формой описания плоскости, отсекающей от ОДР ту ее часть, которая не содержит целочисленных значений. Это уравнение можно получить, выразив небазисные переменные q_j из исходных ограничений стандартной задачи ЛП и подставив их в уравнение (9.4).

3. *Формирование и решение дополнительной задачи ЛП.* Для решения этой задачи используется двойственный симплекс-метод, описанный в подразд. 9.4.

Результатом решения дополнительной задачи ЛП может быть целочисленное значение всех переменных, тогда задача считается решенной, В противном случае осуществляется переход к п. 2 алгоритма.

Количество шагов в методе отсечений Гомори не может быть больше количества переменных исходной задачи, куда входят как переменные задачи линейного программирования (ЗЛП), так и дополнительные переменные (n + m).

Пример 9.11. Рассмотрим следующую задачу ЦЛП:

Найти $\max Z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях:

$$3/2x_1 + 1/2x_2 \le 7/2,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 7,$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые.}$$

Решение.

Учитывая требование целочисленности коэффициентов при переменных в линейных ограничениях, необходимо обе части первого ограничения умножить на наименьший общий знаменатель. В результате выполнения этой процедуры исходная задача ЦЛП приобретает вид:

найти $\max Z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях:

$$3x_1 + x_2 \le 7,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 7,$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые.}$$

После приведения к стандартному виду задача представляется следующим образом:

найти $\max Z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях:

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 7;$$
$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 7;$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0, \text{ целые.}$$

Решение этой задачи без учета целочисленности переменных, т. е. задачи с ослабленными ограничениями, приводит к следующей итоговой симплекс-таблице (табл. 9.12).

Таблица 9.12

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	**Решение**
z	0	0	1/8	5/8	21/4
x_1	1	0	3/8	-1/8	7/4
x_2	0	1	-1/8	3/8	7/4

Как видно из таблицы, базисные переменные имеют нецелочисленные значения, поэтому следующим шагом является формирование отсекающей плоскости Гомори, для чего из симплекс-таблицы выбирается производящая строка. Поскольку при целочисленных значениях переменных значение ЦФ тоже будет целочисленным, то в качестве производящей строки может выбираться и Z-строка симплекс-таблицы. Выбор строки осуществляется по максимуму дробной части f_i тех чисел, что представлены в столбце “Решение”. В данном случае максимальные и равные значения дробной части $f_1 = f_2 = 3/4$ имеют числа, соответствующие базисным переменным x_1 и x_2. Поэтому любая из этих строк может быть выбрана в качестве производящей. Допустим, в качестве производящей выбрана строка, соответствующая базисной переменной x_1.

Отсечение Гомори строится на основании равенства (9.4):

$$s_3 = 3/8s_1 - 1/8s_2 - 3/4, \text{ или}$$
$$s_3 - 3/8s_1 + 1/8s_2 = -3/4.$$

Подстановка этого уравнения в итоговую симплекс-таблицу и последующее выполнение итераций двойственного симплекс-метода приводят к таблице с целочисленными значениями базисных переменных (табл. 9.13):

Таблица 9.13

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение
z	0	0	1/8	5/8	0	5 1/4
x_1	1	0	3/8	-1/8	0	1 3/4
x_2	0	1	-1/8	3/8	0	1 3/4
s_3	0	0	-3/8	1/8	1	-3/4
z	0	0	0	2/3	1/3	5
x_1	1	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1/3	-1/3	2
s_1	0	0	1	- 1	-8/3	2

В том, что составленное выше отсечение Гомори действительно исключает некоторые области многогранника допустимых решений, можно убедиться следующим образом. Для этого в уравнение отсечения Гомори вместо переменных s_1 и s_2 необходимо подставить их выражения, полученные из ограничений стандартной задачи ЛП:

$$s_3 - 3/8(7 - 3x_1 - x_2) + 1/8(7 - x_1 - 3x_2) = -3/4$$

или $s_3 + x_1 = 1$. Это уравнение эквивалентно неравенству $x_1 \le 1$, которое может рассматриваться как дополнительное, третье, ограничение исходной задачи ЦЛП.

Графическое решение задачи представлено на рис. 9.4. Жирными точками на рисунке показаны точки ОДР, характеризующиеся целочисленными значениями переменных, а штриховой линией — линия, соответствующая третьему ограничению. Как видно, этим ограничением от ОДР отсекается та ее часть, которая не содержит целочисленных значений переменных (на рисунке она заштрихована). Оптимальное целочисленное решение рассматриваемой задачи достигается в точке Е.

9.7.2. Метод Гомори для частично-целочисленных задач

Для частично-целочисленных задач характерно то, что требование целочисленности накладывается только на часть

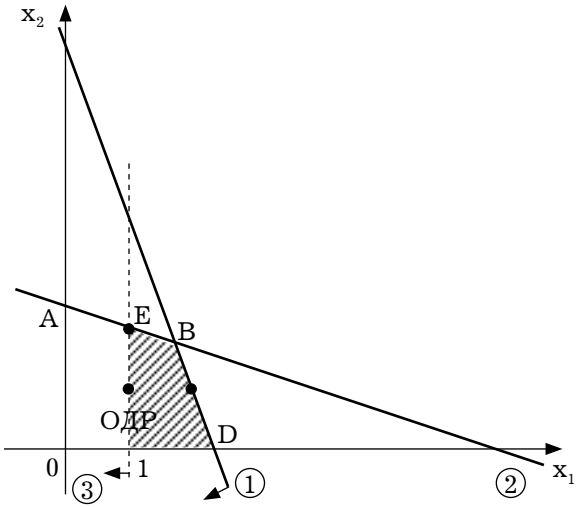


Рис. 9.4. Графический метод решения задач

переменных. В целом последовательность решения этих задач такова же, как и полностью целочисленных задач, а именно:

1) решается задача ЦЛП с ослабленными ограничениями;

2) на основе итоговой симплекс-таблицы выбирается производящая строка и формируется уравнение отсечения Гомори;

3) решается дополнительная задача ЛП с применением двойственного симплекс-метода. Различие с первым алгоритмом состоит лишь в способе формирования уравнения отсечения Гомори.

Допустим, что получено решение задачи ЦЛП с ослабленными ограничениями. Из итоговой симплекс-таблицы выписывается производящая строка для той переменной x_k, на которую наложено требование целочисленности:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = \beta_k,$$

где q_j — небазисная переменная, на которую в общем случае условие целочисленности может быть и не наложено.

Правую часть равенства представляют в виде суммы целой и дробной частей числа:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = [\beta_k] + f_k.$$

После группирования целых и дробных частей получают:

$$x_k - [\beta_k] = f_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j.$$

Здесь возможны две ситуации. Если $x_k \le [\beta_k]$, то $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k$; если же $x_k \ge [\beta_k] + 1$, тогда $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \le f_k - 1$.

Поскольку нецелочисленные коэффициенты α_{kj} могут быть как положительными, так и отрицательными, то их разделяют следующим образом. Вводят J^+ — множество индексов j, для которых $\alpha_{kj} \ge 0$, и J^- — множество индексов, для которых $\alpha_{kj} < 0$. После небольших преобразований:

$$\sum_{j \in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_i \ge f_k, \quad \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k,$$

либо составляют совместное уравнение

$$-\left\{ \sum_{j \in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_j + \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \right\} \le f_k$$

либо, добавляя остаточную переменную, формируют уравнение отсекающей плоскости:

$$\left\{ s_{n+1} - \sum_{j \in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_j - \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \right\} = f_k.$$

Это уравнение определяет искомое отсечение Гомори для частично-целочисленных задач и представляет собой необходимое условие целочисленности переменной x_k.

Далее решается дополнительная задача ЛП (с расширенной симплекс-таблицей) двойственным симплекс-методом и определяется целочисленное значение рассматриваемой переменной.

Основным недостатком метода отсекающих плоскостей Гомори является невозможность решения целочисленных задач большой размерности.

9.8. Метод ветвей и границ

Этот метод так же, как и метод отсечений Гомори, применим для решения как полностью, так и частично-целочисленных задач и тоже основан на первоначальном решении задачи ЛП с ослабленными ограничениями. Идея метода основана на переборе всех возможных комбинаций целочисленных значений переменных задачи. Однако при большой размерности задачи ЦЛП подобный перебор может потребовать много времени, а иногда и вообще невозможен. Рациональность этого процесса обеспечивается рядом процедур, которые существенно снижают количество просматриваемых комбинаций.

Процесс решения задачи состоит из нескольких последовательно выполняемых шагов.

1. *Решение задачи ЛП с ослабленными ограничениями.* Если ЦФ и переменные удовлетворяют требованию целочисленности, то полученное решение рассматривается в качестве оптимального. В противном случае переходят к шагу 2.

2. *Формирование ветвей исследования.* Допустим, условию целочисленности не удовлетворяют переменные x_k, x_r. Тогда на основе дробного значения, например, x_k формируются две не связанные между собой подзадачи:

а) $x_k \le [x_k]$;

б) $x_k \ge [x_k] + 1$.

В общем случае выбор переменной, на основе которой организуется процесс ветвления, влияет на эффективность решения задачи. Для такого выбора существуют специальные эмпирические или эвристические процедуры.

3. *Решение подзадачи* а). Решение осуществляется на основе итоговой симплекс-таблицы. Рассматриваемое неравенство

приводится к стандартному виду путем добавления остаточной переменной, которая вводится в задачу как базисная:

$$x_k + s_{n+1} = [x_k].$$

Базисная переменная x_k из симплекс-таблицы выражается через небазисные переменные и подставляется в последнее выражение, в результате чего получается:

$$s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} q_j \geq 0 = -f_i.$$

Выполняется очередная итерация двойственного симплекс-метода, позволяющая получить целочисленное значение переменной x_k.

Если полученное решение удовлетворяет условиям целочисленности, то его следует рассматривать как нижнюю (в задаче максимизации ЦФ) границу задачи. Она характеризуется, таким образом, целочисленностью всех или части переменных и наилучшим в сравнении с другими подзадачами значением ЦФ. Граница вводится для повышения эффективности вычислений в том смысле, что, если в результате разрешения очередной подзадачи получено худшее, чем граница, решение, дальнейшее ветвление задачи в этом направлении нецелесообразно. Тем самым исключаются из рассмотрения те комбинации целочисленных значений переменных, которые заведомо будут иметь худшее в сравнении с границей значение ЦФ. Если в результате решения очередной подзадачи будет получено лучшее, чем граница, значение ЦФ, то тогда устанавливается новое значение границы.

4. *Решение подзадачи* б). Решение осуществляется аналогично пункту 3.

Пример 9.12. Рассмотрим задачу ЦЛП из примера 9.11. Из табл. 9.12 видно, что обе переменные являются нецелочисленными, поэтому на основе одной из них, например x_2, организуется ветвящийся процесс поиска целочисленных значений. Дерево подзадач, порождаемых в процессе применения метода ветвей и границ, представлено на рис. 9.5.

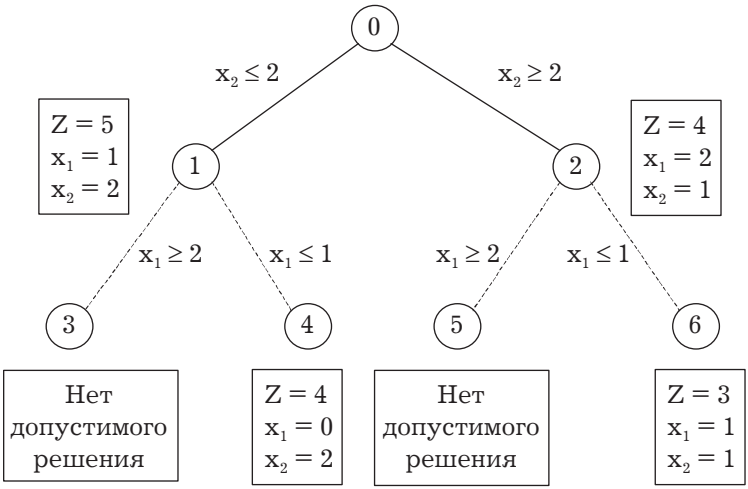


Рис. 9.5. Дерево подзадач

Исходя из значения выбранной переменной $x_2 = 1\ 3/4$ формируются две подзадачи: $x_2 \le 2$ и $x_2 \ge 1$. Результат решения второй подзадачи: $Z = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Это решение удовлетворяет требованию целочисленности, поэтому оно может рассматриваться в качестве *границы*. Дальнейшее ветвление задачи нецелесообразно, поскольку оно приведет к худшему решению. Действительно, если продолжить ветвление и рассмотреть подзадачу $x_1 \le 1$, то ее решением будет: $Z = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Допустимого же решения подзадачи $x_1 \ge 2$ вообще не существует.

Первая подзадача имеет решение: $Z = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Как видно, это решение лучше того, что было принято в качестве границы. Поэтому решение второй подзадачи должно быть принято в качестве *новой границы* задачи. Дальнейшее ветвление также нецелесообразно, поскольку приведет к ухудшению значения ЦФ. На рис. 9.5 штриховыми линиями показаны те ветви, для которых соответствующие им подзадачи нецелесообразны для решения.

Таким образом, введением *границ* удается существенно уменьшить количество решаемых подзадач в ходе поиска оптимального целочисленного решения.

В настоящее время метод ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач.

Задачи для самостоятельного решения

Используя рассмотренные методы найти решение следующих задач:

9.1. $F = 7x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 110, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 5}).$$

9.2. $F = -5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 + 6x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leq 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 30, \\ -4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 60, \end{cases}$$

$$0 \leq x_j \leq 10,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 6}).$$

9.3. $F = 60x_1 + 70x_2 + 120,\ 4x_3 + 130x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 1{,}85x_2 + x_3 + x_4 \leq 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10, \\ 4x_1 + 6{,}9x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100, \\ 6{,}3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 100, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 4}).$$

9.4. $F = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 5x_6 = 11, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_5 + 3x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 6}).$$

Используя метод Гомори для частично-целочисленных задач, необходимо определить:

9.5. $F = \dfrac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0.$$

9.6. $F = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0.$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит смысл постановки и решения задачи линейного программирования?

2. Как осуществляют вербальную и математическую постановку задачи линейного программирования?

3. Дайте характеристику основных методов решения задачи линейного программирования.

4. В чем суть геометрического метода решения задачи линейного программирования?

5. В чем состоит алгоритм симплекс-метода решения задачи линейного программирования?

6. В чем состоит суть метода искусственного базиса?

7. Дайте определение двойственной задачи линейного программирования.

8. В чем состоит суть решения задачи целочисленного линейного программирования?

9. В чем заключается идея метода Гомори для полностью целочисленных задач линейного программирования?

10. В чем состоит сущность метода ветвей и границ?

Глава 10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

10.1. Вербальная и математическая постановка транспортной задачи линейного программирования

Сфера применения общих методов линейного программирования очень обширна, однако решение практических задач связано с большим количеством переменных, что приводит к значительным вычислительным трудностям. Учитывая специфику конкретной решаемой задачи, трудности эти можно преодолеть, представляя совокупность неизвестных матрицей. Наиболее характерной и актуальной, довольно изученной задачей является так называемая задача транспортного типа.

Под транспортной задачей в настоящее время понимается целый комплекс задач, имеющий специфическую постановку и алгоритм решения.

Транспортная задача представляет собой задачу обоснования решения по скалярному показателю. По существу она является задачей линейного программирования, которую можно решать симплекс — методом. Однако специфическая структура условий задачи позволяет разработать более эффективный вычислительный метод.

Транспортная модель, как правило, используется для составления наиболее экономичного плана перевозок из нескольких пунктов (поставщиков) в пункты доставки (потребители). При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок, либо минимальное вре-

мя его доставки. Транспортную модель можно применять для решения задач, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, распределением сил и средств и т. д.

Рассмотрим вербальную постановку транспортной задачи и планирование перевозок материально-технических средств.

Вербальная постановка задачи

Планируются перевозки одного вида материально-технических средств (МТС) от нескольких поставщиков нескольким потребителям. Известны запасы материально-технических средств поставщиков и потребности в МТС потребителей. Известна или может быть вычислена стоимость перевозки единицы МТС из каждого исходного пункта (каждого поставщика) в каждый пункт назначения (каждому потребителю). Величина транспортных расходов на любом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимых МТС. Потребности каждого потребителя могут удовлетворяться за счет нескольких поставщиков. Цель планирования состоит в определении количества МТС, которые следует перевезти от каждого поставщика каждому потребителю, с тем чтобы общие транспортные расходы были минимальными (рис. 10.1).

Неотрицательные переменные x_{ij} можно записать в виде матрицы:

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (10.1)$$

которую можно обозначить $\|X_{ij}\|$.

Совокупность неизвестных X_{ij} (10.1), удовлетворяющая ограничениям первой и второй групп в (10.2), называется планом перевозок. План, для которого достигается минимум первого выражения в (10.2), называется оптимальным. Величины же X_{ij} называются перевозками.

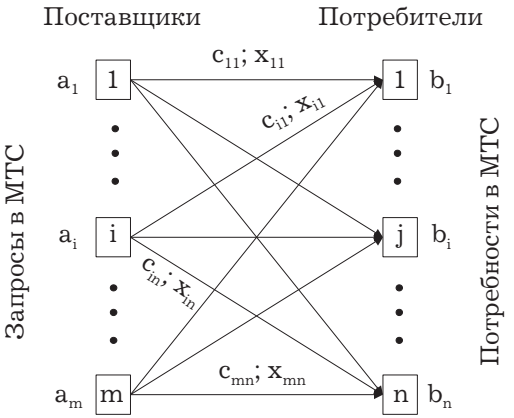


Рис. 10.1. Организация перевозок МТС:

m — количество поставщиков; n — количество потребителей; a_i — запасы МТС i-го поставщика; b_j — потребности в МТС j-го потребителя; c_{ij} — стоимость перевозок; x_{ij} — количество перевозимых МТС

В нашем случае *математическая постановка транспортной задачи* линейного программирования в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} x^*: \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{при ограничениях} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} \ge 0 \text{ для всех } i \text{ и } j \end{array}\right\} \qquad (10.2)$$

Первая группа ограничений указывает, что суммарный объем перевозимых МТС от некоторого поставщика не может превышать сосредоточенных в нем запасов МТС. Вторая группа ограничений требует, чтобы суммарные перевозки

МТС некоторому потребителю полностью удовлетворяли бы его спрос.

Если в задаче (10.2) все неравенства выполняются как равенства, т. е. суммарный объем запасов МТС равен суммарному спросу, то транспортную модель называют сбалансированной транспортной моделью. Именно для сбалансированной транспортной модели разработаны эффективные методы решения.

Если суммарный спрос меньше суммарных запасов, т. е.:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

то переход к сбалансированной модели осуществляют путем введения в рассмотрение фиктивного потребителя с номером n+1 с заявкой:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

При этом стоимость перевозки МТС фиктивному потребителю принимается равной нулю ($c_{i,\,n+1} = 0,\ \forall_i$).

Если суммарные запасы меньше суммарного спроса, т. е.:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

то вводят фиктивного поставщика с номером m + 1 и запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

при нулевой стоимости перевозок МТС от этого поставщика ($c_{m+1,\,j} = 0,\ \forall_j$).

Следует заметить, что в оптимизационной задаче (10.2) маршруты перевозок должны быть маршрутами “минимальной стоимости”.

Для более компактного представления транспортной модели используют так называемую транспортную таблицу, которая может иметь следующий вид:

Поставщики	Потребители		
	1	...	n
1	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}
...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mn} x_{mn}
Потребности	b_1	...	b_n

Приведем наглядный пример: необходимо со склада города (гор.) и области (обл.) перевезти потребное число МТС потребителям (потр.). Тогда транспортная таблица будет иметь следующий вид (табл. 10.1):

Таблица 10.1

Поставщик	Потребитель			ВП*
	1	2	3	
Склад города	3	5	6	40
Склад области	10	9	12	60
Потребности	25	45	30	

*ВП — возможности поставщиков.

Стоимость перевозки будет иметь вид:

$$C_{ij} = \nu_{ij} \cdot L_{ij},$$

где L_{ij} — расстояние между i и j пунктами;

ν_{ij} _ стоимость перевозки 1 условной единицы груза на 1 единицу расстояния.

Если $\nu_{ij} = 1$ условной единице, то $C_{ij} = L_{ij}$.

10.2. Решение транспортной задачи

Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то основные этапы ее решения будут таки-

ми же, как и при решении задачи линейного программирования симплекс-методом, а именно:

I этап. Нахождение начального допустимого решения.

II этап. Выделение из небазисных переменных вводимой в базис переменной (метод потенциалов). Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности, то следует закончить вычисления; в противном случае — перейти к III этапу.

III этап. Выбор выводимой из базиса переменной (используя условия допустимости) из числа переменных текущего базиса; затем нахождение нового базисного решения и возвращение ко II этапу.

Рассмотрим подробнее каждый этап решения транспортной задачи, учитывая ее специфику.

I этап. Определение начального допустимого решения

Для сбалансированной транспортной задачи существует только $m + n - 1$ независимых уравнений. Таким образом, как и в симплекс-методе, начальное базисное допустимое решение должно иметь $m+n-1$ базисных переменных.

Начальное базисное решение транспортной задачи получают непосредственно из транспортной таблицы. Для этого можно использовать три процедуры.

1. ***Правило "северо-западного угла"***

При нахождении опорного плана транспортной задачи методом "северо-западного угла" на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение транспортной таблицы начинается с левого верхнего угла (северо-западного), двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз (увеличение i, увеличение j). Переменной X_{11} приписывают максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и запасы.

После этого вычеркивают соответствующий столбец или строку, фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. Если ограничения выполняются одновременно, то можно вычеркнуть либо

строку, либо столбец. Процесс завершается тогда, когда будет присвоено значение переменной x_{mn}.

Исходный опорный план, построенный по правилу “северо-западного угла”, обычно оказывается весьма далеким от оптимального, так как при его формировании не учитывается стоимость перевозок (величина c_{ij}). Более совершенным правилом является правило “минимального элемента”.

2. ***Правило “минимального элемента”***

В методе “северо-западного угла” на каждом шаге потребность первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворяется за счет запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, что выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на стоимость перевозок, а именно на каждом шаге следует выбирать какую-либо клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбирать любую из них), и рассматривать пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке.

Правило “минимального элемента” заключается в том, чтобы перевозить максимально возможные объемы из пунктов отправления маршрутами минимальной стоимости. Заполнение таблицы начинаем с клетки, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки (элемент c_{ij}) из всей таблицы. Переменной этой клетки x_{ij} присваивается максимально возможное значение с учетом ограничений. Затем остаток по столбцу или строке помещается в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ij} и т. д. Иными словами, последовательность заполнения клеток определяется по величине c_{ij}, а помещаемая в этих клетках величина x_{ij} такая же, как и в правиле “северо-западного угла”.

Нахождение опорного плана по этим двум процедурам будет выполнено в подразд. 10.3.

3. ***Метод аппроксимации Фогеля***

При определении оптимального плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итера-

ции по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце условий задачи. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке (или столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Этот метод дает наилучшее начальное приближение, часто оказывающееся оптимальным планом.

Алгоритм решения транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля следующий:

I этап. Определение начального допустимого плана.

1. Для каждой строки таблицы необходимо упорядочить элементы стоимости перевозок c_{ij} по возрастанию. Определить величину "штрафа" строки как разность значений второго и первого элемента в ранжированном ряду.

2. Для каждого столбца таблицы необходимо упорядочить элементы стоимости перевозок c_{ij} по возрастанию. Далее необходимо определить величину штрафа столбца.

3. Определить строку (или столбец), имеющую (имеющий) наибольший штраф по всем штрафам строк и столбцов, а в ней (в нем) — элемент с минимальной величиной стоимости перевозок c_{ij}. Зафиксировать индексы (i, j) этого элемента.

4. Присвоить наибольшее значение из допустимых (с учетом ограничений) переменной x_{ij}, индексы которой соответствуют шагу 3.

5. Скорректировать величины a_i и b_j и вычеркнуть строку i, если $a_i = 0$, или столбец j, если $b_j = 0$.

6. Проверить, все ли величины a_i и b_j равны нулю, если да, то окончить вычисления; в противном случае взять в качестве исходной оставшуюся часть таблицы и перейти к шагу 3.

Как правило, применение метода аппроксимации Фогеля позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план.

II этап. Определение вводимой в базис переменной (“метод потенциалов”).

Отметим, что “метод потенциалов” эквивалентен принципу решения задачи линейного программирования и использованию условия оптимальности в симплекс-методе. Сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его улучшают до получения “оптимального плана”. Содержание “метода потенциалов” заключается в следующем:

1. Каждой строке i и столбцу j транспортной таблицы ставится в соответствие числа u_i и v_j, называемые потенциалами. Они должны для каждой базисной переменной x_{ij} текущего решения удовлетворять условию $u_i + v_j = c_{ij}$. Эти условия приводят к системе, состоящей из $m + n - 1$ уравнений (так как имеется всего $m + n - 1$ базис-переменных), в которых фигурируют $m + n$ неизвестных. Значение потенциалов определяют из этой системы уравнений, придавая одному из них произвольное значение (например, $u_1 = 0$).

2. Определяются оценки $\overline{c}_{pq}$ для небазисных переменных в соответствии с соотношением:

$$\overline{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}.$$

3. Если все оценки $\overline{c}_{pq}$ неположительны, то найденное решение оптимально, в противном случае необходимо определить новую вводимую в базис переменную.

4. Вводимой в базис переменной является небазисная переменная, имеющая самую большую положительную оценку $\overline{c}_{pq}$.

Наиболее эффективным методом определения вводимой переменной является метод дифференциальных рент. Если при определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находился какой-нибудь ее опорный план, а затем он последовательно улучшался, то при нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое *условно оптимальное распределение)* и на последующих итера-

циях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок.

Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными. Эти строки иногда называют также отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны неполностью, считаются избыточными. Иногда их называют также положительными.

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов находят разности между числом в кружке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в кружке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется *промежуточной рентой*. После определения промежуточной ренты переходят к новой таблице. Эта таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная

клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в кружки. Заключены в кружки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице, была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, то при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом, которое состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку). После этого берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец). Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены кружки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных

задач с использованием электронно-вычислительных машин (ЭВМ) применяется метод дифференциальных рент.

III этап. Определение переменной, выводимой из базиса (построение цикла).

Процедура построения цикла эквивалентна использованию условия допустимости в симплекс-методе.

1. Строится замкнутый цикл, соответствующий вводимой переменной. Он состоит из последовательности горизонтальных и вертикальных связанных отрезков, концами которых должны быть базисные переменные (за исключением тех концов, которые относятся к вводимой в базис переменной). Для каждого базисного решения и соответствующей небазисной переменной можно построить лишь один цикл.

2. Нечетным вершинам цикла (начиная с вводимой в базис переменной) присваивается знак “+”, четным — “–” (будем называть эти клетки плюсовыми и минусовыми).

3. Определяется выводимая из базиса переменная, которой является одна из базисных переменных, расположенных в вершинах цикла, отмеченных знаком “–” и имеющих наименьшее значение.

4. Формируется новое допустимое базисное решение. Для этого переменные, находящиеся в вершинах цикла, соответствующим образом корректируются, а именно уменьшаются или увеличиваются на величину вводимой в базис переменной в зависимости от знака вершины цикла.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому ее опорному плану называется сдвигом по циклу пересчета. Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным и равным $(n + m - 1)$.

Однако при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым числом ε и решать задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать $\varepsilon = 0$.

Пример 10.1. Найти квазиоптимальное решение транспортной задачи по методу Фогеля.

Матрица транспортной задачи представлена таблицей вида:

	B1: 30 т	**B2: 40 т**	**B3: 60 т**	**B4: 20 т**
A1: 90 т	(0,4)	(4,0)	(2,7)	(4,8)
A2: 35 т	(0,6)	(3,2)	(1,9)	(4,0)
A3: 25 т	(4,6)	(1,0)	(2,2)	(1,1)

В скобках в клетках таблицы представлены цены перевозок.

Найти план по методу Фогеля.

Решение

1. **Справка**

Поиск квазиоптимального решения транспортной задачи по алгоритму Фогеля включает выполнение следующих шагов:

a) Для каждой строки таблицы упорядочить элементы цен перевозок c_{ij} по возрастанию. Вычислить величину так называемого штрафа строки как разность значений второго и первого элемента в ранжированном ряду.

b) Для каждого столбца таблицы упорядочить элементы цен перевозок c_{ij} по возрастанию и вычислить величину “штрафа столбца” аналогично шагу 1.

c) Найти строку или столбец, имеющую (имеющий) наибольший штраф по всем штрафам строк и столбцов, а в ней (в нем) — элемент с минимальной величиной стоимости перевозок c_{ij}. Зафиксировать индексы (i, j) этого элемента.

d) Присвоить переменной x_{ij}, индексы которой соответствуют шагу c, наибольшее из допустимых для нее значений (с учетом ограничений задачи).

e) Скорректировать величины a_i и b_j и вычеркнуть строку i, если оказалось, что $a_i = 0$, или столбец j, если $b_j = 0$.

f) Проверить, все ли величины a_i и b_j равны нулю. Если да, то окончить вычисления; в противном случае взять в качестве исходной оставшуюся часть таблицы и перейти к шагу c алгоритма.

2. Вычисляем штрафы строк:

Ранжированные цены в строках:	Штрафы строк:
(0,4; 2,7; 4,0; 4,8)	2,3
(0,6; 1,9; 3,2; 4,0)	1,3
(1,0; 1,1; 2,2; 4,6)	0,1

3. Вычисляем штрафы столбцов:

Штрафы столбцов:	Разности штрафов столбцов:
(0,4; 0,6; 4,6)	0,2
(1,0; 3,2; 4,0)	2,2
(1,9; 2,2; 2,7)	0,3
(1,1; 4,0; 4,8)	2,9

4. Определяем максимальный штраф. Он составляет 2,9 и находится в четвертом столбце. Фиксируем элемент с наименьшей ценой перевозок в четвертом столбце: это элемент с координатами (3, 4).

5. Присвоим переменой x_{34} наибольшее из допустимых для нее значений 20.

6. Корректируем содержимое исходной таблицы, уменьшив запас на складе А3 на 20 т и вычеркнув четвертый столбец:

	B1: 30 т	**B2: 40 т**	**B3: 60 т**
A1: 90 т	(0,4)	(4,0)	(2,7)
A2: 35 т	(0,6)	(3,2)	(1,9)
A3: 5 т	(4,6)	(1,0)	(2,2)

7. Вычисляем штрафы строк:

Ранжированные цены в строках:	Штрафы строк:
(0,4; 2,7; 4,0)	2,3
(0,6; 1,9; 3,2)	1,3
(1,0; 2,2; 4,6)	1,2

8. Вычисляем штрафы столбцов:

Штрафы столбцов:	Разности штрафов столбцов:
(0,4; 0,6; 4,6)	0,2
(1,0; 3,2; 4,0)	2,2
(1,9; 2,2; 2,7)	0,3

9. Определяем максимальный штраф. Он составляет 2,3 и находится в первой строке. Фиксируем элемент с наименьшей ценой перевозок в первой строке: это элемент с координатами (1, 1).

10. Присвоим переменой x_{11} наибольшее из допустимых для нее значений 30.

11. Продолжая действовать таки образом, окончательно получим квазиоптимальный план перевозок:

	B1: 30 т	**B2: 40 т**	**B3: 60 т**	**B4: 20 т**
A1: 90 т	30	35	25	
A2: 35 т			35	
A3: 25 т		5		20

Можно проверить, что полученное решение оказалось оптимальным.

10.3. Практическое решение задачи оптимального планирования

Перевозки товаров различными транспортными средствами в ряде случаев приводят к таким нежелательным явлениям, как порожние пробеги, простои, встречные и нерациональные перевозки. Для их исключения используются методы оптимального планирования перевозок, в частности такая экономико-математическая модель, как транспортная задача.

Простейшим примером транспортной задачи является задача о планировании перевозок некоторого продукта из конечного числа пунктов отправления в конечное число пунктов назначения при обеспечении минимальных затрат на выполнение данной операции.

Постановку и методику решения подобных задач рассмотрим с использованием следующего примера:

Пример 10.2. Три поставщика некоторого товара располагают следующими запасами: первый — 120 единиц, второй — 100 единиц, третий — 80 единиц. Товар должен быть перевезен трем потребителям: спрос первого — 90 единиц; спрос второго — 90 единиц; спрос третьего — 120 единиц. Известны также

показатели затрат (c_{ij}) на перевозку единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю.

Требуется составить оптимальный план перевозок, приводящий к наименьшим затратам на выполнение данной операции.

Под планом перевозок понимается матрица

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{Vmatrix},$$

в которой x_{ij} — количество единиц товара, планируемого к перевозке от поставщика с номером i к потребителю с номером j.

Для решения задачи исходные данные удобно свести в табл. 10.2.

Таблица 10.2

Поставщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**		
		1	**2**	**3**
		90	**90**	**120**
1	120	7	6	4
2	100	3	8	5
3	80	2	3	7

Каждую клетку таблицы пометим двойным индексом (i, j). Первый (i) — номер поставщика, второй (j) — номер потребителя.

В табл. 10.2. числа 7, 6, 4 и т. д. обозначают стоимости перевозок $c_{ij.}$

Математическая постановка данной задачи имеет вид:

найти минимум целевой функции (показателя эффективности)

$Z = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + +2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33}$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 120; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = 100; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{3j} = 80;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = 90; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i2} = 90; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i3} = 120; \quad x_{ij} \geq 0$$

Транспортная задача относится к классу задач линейного программирования. Решение таких задач обычно связано с

получением опорного (допустимого) плана и последующим его улучшением.

Опорный план может быть получен различными методами. Рассмотрим два из них: *метод минимального элемента,* или *метод наименьших затрат* и *метод “северо-западного” угла*.

В соответствии с методом наименьших затрат выберем в таблице клетку, имеющую наименьший показатель затрат, т. е. клетку (3, 1). Произведем поставку в эту клетку, равную 80 единицам, поскольку первому потребителю требуется 90 единиц, а у третьего поставщика в наличии лишь 80 единиц. Первому потребителю необходимо еще 10 единиц товара. Он может получить их или от первого, или от второго поставщика. Так как показатель затрат в клетке (2, 1) меньше, чем в клетке (1, 1), то записываем 10 единиц в клетку (2, 1).

Второй поставщик, отдав 10 единиц, будет располагать 90 единицами. Их можно направить второму или третьему потребителю. В связи с тем, что показатель затрат в клетке (2, 3) меньше, чем в клетке (2, 2), направим их третьему потребителю. Недостающие 30 единиц третий потребитель получит от первого поставщика.

Оставшиеся у первого поставщика 90 единиц запишем в клетку (1, 2) и, тем самым, удовлетворим спрос второго потребителя.

На этом распределение можно считать законченным. Приведенную выше последовательность действий и результаты распределения иллюстрирует табл. 10.3.

Таблица 10.3

B_j		**2**	**6**	**4**	
Поставщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**			**A_i**
		1	**2**	**3**	
		90	**90**	**120**	
1	120	7 2	6 — 90	4 + 30	0
2	100	3 + 10	8 7	5 — 90	1
3	80	2 — 80	3 + 6	7 4	0
	B_j	**2**	**6**	**4**	

Пример 10.3. Теперь решим задачу поиска опорного плана ***методом “северо-западного” угла.***

При этом методе не обращают никакого внимания на показатели затрат. Начав заполнение таблицы с клетки (1, 1) — “северо-западный” угол таблицы, последовательно ступенями спускаются вниз до клетки (3, 3). Полученный опорный план представлен в табл. 10.4.

Таблица 10.4

Поставщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**			A_i
		1	**2**	**3**	
		90	**90**	**120**	
1	120	7 90	6 30	4 3	0
2	100	3 9	8 60	5	2
3	80	2 11	3 10	7 80	4
B_j		7	6	3	

Получив опорный план, необходимо оценить соответствующую ему стоимость перевозок (показатель эффективности или целевую функцию). Для плана, полученного методом наименьших затрат, Z = 1300 ед. Во втором случае имеем 2050 ед.

Следующим этапом решения задачи, независимо от того, каким методом был найден опорный план, является последовательное его улучшение до получения оптимального распределения.

С этой целью каждому поставщику товаров поставим в соответствие потенциалы A_1, A_2, A_3 и запишем их в дополнительном столбце табл. 10.3; 10.4, а каждому потребителю — потенциалы B_1, B_2, B_3, которые запишем в дополнительной строке. Один из потенциалов, например A_1, приравняем к нулю, а остальные найдем с использованием зависимости (решение производится для первого опорного плана):

$$C_{ij} = A_i + B_j.$$

Запишем данное соотношение для всех заполненных клеток ($X_{ij} > 0$) и определим A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Для незаполненных клеток ($X_{ij} = 0$) запишем аналогичную зависимость

$$\overline{C}_{ij} = A_i + B_j,$$

левую часть которой принято называть *псевдостоимостью*.

Условие оптимальности плана заключается в том, что для каждой свободной клетки ($X_{ij} = 0$)

$$\overline{C}_{ij} < C_{ij}.$$

Найдем для свободных клеток разности $\hat{\Delta}_{ij} = C_{ij} - \overline{C}_{ij}$. Поскольку одна из разностей, соответствующая клетке (3, 2) табл. 10.3, отрицательна, то улучшение плана начинаем именно с нее.

Заметим, что если отрицательных разностей несколько, то первой выбирается клетка, для которой разность по абсолютной величине больше.

Догрузим клетку (3, 2), поставив в нее знак плюс (+), и составим цепь пересчета по правилу: цепь пересчета строится в виде прямоугольника, одна из вершин которого находится в свободной клетке (3, 2), а остальные — в занятых; все углы должны быть прямыми; в одной строке и в одном столбце не должно быть более двух вершин; всем вершинам приписываются чередующиеся знаки (плюс — догрузить, минус — разгрузить).

Из клеток со знаком минус (–) выбирается наименьшая величина груза min (80, 90, 90) = 80 и перемещается последовательно по клеткам построенной цепи: 80 единиц добавляются в клетки со знаком плюс и изымаются из клеток со знаком минус.

Таким образом, получаем новый план перевозок. Применив к нему рассмотренную выше методику, можно убедиться, что этот план является оптимальным.

Ниже приведена табл. 10.5, иллюстрирующая методику решения задачи (для опорного плана, полученного методом наименьших затрат):

Таблица 10.5

	90	90	120
120	7	6 – 10	4 + 110
100	3 – 90	8	5 – 10
80	2	3 + 80	7

В общем случае математическая постановка транспортной задачи имеет вид

$$W(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m_i; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n_j; x_{ij} \geq 0.$$

В рассмотренном примере

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} n_j,$$

т. е. возможности поставщиков равны суммарному спросу потребителей. Транспортные задачи подобного вида называют *закрытыми*. Задачи, для которых это условие не выполняется, представляют собой *открытые* задачи.

Для решения открытых задач их приводят к закрытому виду путем введения фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с возможностями по поставке или спросом, определяемыми по формуле

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} n_j.$$

В остальном методика решения задачи остается неизменной.

Рассмотрим пример решения открытой задачи.

Пример 10.4. Пусть требуется найти оптимальное распределение поставок в следующей задаче:

найти минимум целевой функции (показателя эффективности)

$$W(x) = 4x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + \\ + 7x_{24} + 4x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 3x_{34}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 40; \ \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = 60; \ \sum_{j=1}^{n} x_{3j} = 90;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = 45; \ \sum_{i=1}^{m} x_{i2} = 35; \ \sum_{i=1}^{m} x_{i3} = 55; \ \sum_{i=1}^{m} x_{i4} = 65;$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Введем фиктивного поставщика с возможностями по поставкам

$$|(45+35+55+65) - (40+60+90)| = 10.$$

Для этого исходную таблицу дополним фиктивной строкой и проведем первоначальное распределение поставок (табл. 10.6).

Таблица 10.6

	45	**35**	**55**	**65**
40	4	1 35	3 5	5
60	2 10	2	3 50	7
90	4 35	4	5	3 55
Ф(10)	0	0	0	0 10

Полученное распределение поставок неоптимально.

Выполнив по приведенной выше методике необходимые действия, можно установить, что для клетки (4, 3) разность Δ_{43}

отрицательна и среди отрицательных разностей наибольшая по абсолютной величине. Следовательно, улучшение плана следует начать именно с нее. Ниже приведена соответствующая цепь пересчета (табл. 10.7):

Таблица 10.7

	45	**35**	**55**	**65**
40	4	1 35	3 5	5
60	2 20	2	3 40	7
90	4 25	4	5	3 65
Ф(10)	0	0	0 10	0

Данная таблица уже не содержит отрицательных разностей Δ_{ij}. Следовательно, приведенное в ней распределение поставок — *оптимальное.*

В заключение отметим, что оптимизация перевозок может осуществляться не только по затратам, но также и по другим показателям, например времени. Кроме того, следует помнить о том, что задачи линейного программирования вообще и транспортная задача в частности в настоящее время решаются с использованием ЭВМ и соответствующего пакета прикладных программ для них.

10.4. Многопродуктовая транспортная задача

Многие задачи линейного программирования относятся к классу задач, которые называют распределительными, или λ — задачами (лямбда-задачами), а также обобщенными транспортными задачами. В терминах перевозок распределительную задачу можно сформулировать следующим образом: пусть имеются запасы МТС, сконцентрированные в пунктах

отправления, причем в различных пунктах имеются различные виды запасов. Все эти запасы или часть их требуется доставить потребителям, причем для каждого потребителя указано количество запасов МТС. Расходы на перевозку МТС считаются известными. Задача заключается в нахождении плана перевозок, обращающего в минимум суммарные расходы на транспортировку.

Ранее рассматривалась транспортная задача, в которой фигурировал один вид МТС (один продукт). А как быть, если необходимо спланировать перевозку нескольких видов МТС (несколько продуктов)? Для решения данной задачи можно сформулировать два пути:

1. Сформировать по каждому виду перевозимых МТС свою транспортную задачу (однопродуктовую). Частные решения этих задач и будут представлять оптимальный план перевозок.

2. Сформировать одну (многопродуктовую) транспортную задачу.

Рассмотрим более подробно второй путь.

Пример 10.5. Для трех пользователей необходимо пополнить запасы бензина АИ–76 и АИ–92. Пополнение запасов может производиться из хранилища города (гор.) и области (обл.). Запасы и потребности бензина представлены в табл. 10.8 и 10.9. Возможности поставщиков (гор. и обл.) и спрос потребителей указаны в табл. 10.10.

Таблица 10.8

Бензин	**Склад гор.**	**Склад обл.**
АИ–76	40	60
АИ–93	20	30

Таблица 10.9

Бензин	**1 потр.**	**2 потр.**	**3 потр.**
АИ–76	25	45	30
АИ–93	15	35	—

Протяженность маршрутов представлена в табл. 10.10.

Таблица 10.10

Хранилище	1 потр.	2 потр.	3 потр.
Склад гор.	30	50	60
Склад обл.	100	90	120

В целях упрощения вычислений предположим, что $C_{ij} = L_{ij}$, где C_{ij} — стоимость перевозки между пунктами i и j; L_{ij} — протяженность маршрута между пунктами i и j.

Для того чтобы учесть многопродуктовый характер задачи, сформируем транспортную модель следующим образом. Вместо того чтобы рассматривать каждого поставщика как один исходный пункт, разобьем его на несколько пунктов в соответствии с количеством видов перевозимых горюче-смазочных материалов (ГСМ). Аналогично поступим и с пунктами назначения (потребителями). В результате для нашего примера получим 4 поставщика и 5 потребителей (рис. 10.2).

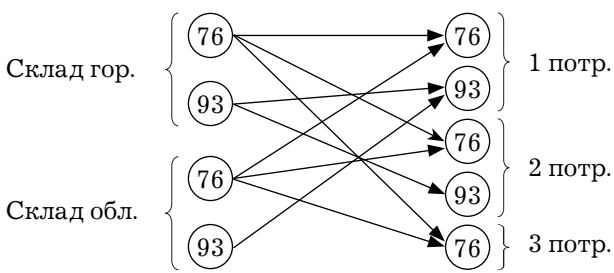


Рис. 10.2. Схема реализации многопродуктовой задачи

Заметим, что некоторые маршруты недопустимы, поскольку в данной постановке задачи не допускается взаимная компенсация различных марок бензина. Это необходимо учесть при построении транспортной таблицы, а именно запрещенным маршрутам приписывают очень высокую стоимость перевозки.

Транспортная таблица для многопродуктовой транспортной задачи в условиях нашего примера имеет следующий вид (табл. 10.11):

Таблица 10.11

Поставщик	Потребитель					Продукт	
	1 потр.		2 потр.		3 потр.	АИ-76	АИ-93
Склад гор.	3	М	5	М	6	40	20
	М	3	М	5	М		
Склад обл.	10	М	9	9	12	60	30
	М	10	М	М	М		
АИ-76	25		45		30		
АИ-93		15		35	—		

М — недопустимые маршруты

Данную транспортную таблицу можно разбить на несколько таблиц по видам продуктов (в нашем случае на две). Следует заметить, что с вычислительной точки зрения небольшие подзадачи решать проще, чем одну сложную. Но разбиение многопродуктовой модели на однопродуктовые можно осуществлять только в том случае, если нет взаимной связи между отдельными видами продуктов. Если такая связь существует, то многопродуктовую модель не удается столь просто разбить на однопродуктовые.

Пример 10.6. В условиях предыдущего примера предположим, что в 1 потр. возможна взаимная компенсация АИ–76 и АИ–93 на 10%, во 2 потр. — на 20%. При построении транспортной таблицы необходимо в 1-й и 2-й потр. добавить по одному потребителю, величины спроса которых определим из данных о процентном соотношении заменяемых видов ГСМ.

$$\text{1 потр.:}\quad \left.\begin{array}{l} 25 \times 0{,}1 = 2{,}5 \\ 15 \times 0{,}1 = 1{,}5 \end{array}\right\} \quad \Sigma = 4;$$

$$\text{2 потр.:}\quad \left.\begin{array}{l} 45 \times 0{,}2 = 9 \\ 35 \times 0{,}2 = 7 \end{array}\right\} \quad \Sigma = 16.$$

Σ — сумма спросов первого и второго потребителей.

Далее необходимо сформировать транспортную таблицу следующего вида (табл. 10.12):

Таблица 10.12

Поставщик		Потребитель							
Продукт		1 потр.			2 потр.			3 потр.	
		АИ-76	АИ-93	АИ-76, АИ-93	АИ-76	АИ-93	АИ-76, АИ-93	АИ-76	
Склад гор.	АИ-76	3	М	3	5	М	5	6	40
	АИ-93	М	3	3	М	5	5	М	20
Склад обл.	АИ-76	10	М	10	9	М	9	12	60
	АИ-93	М	10	10	М	9	9	М	30
		22,5	13,5	4	36	28	16	30	

10.5. Транспортная модель с промежуточными пунктами

В стандартной транспортной модели предполагается, что прямой маршрут между поставщиком и потребителем является маршрутом минимальной стоимости. Это означает, что определению стоимостей перевозок единицы продукта в стандартной транспортной модели должна предшествовать предварительная работа, связанная с выявлением кратчайших маршрутов (применяются математические методы нахождения кратчайшего пути).

Другой метод определения минимальной стоимости прямой перевозки связан с постановкой транспортной задачи как задачи с промежуточными пунктами. При этом допускается перевозка груза (частично или полностью) через другие поставщики или потребители транзитом, прежде чем он достигнет установленного потребителя. В задаче с промежуточными пунктами автоматически отыскивается маршрут минимальной стоимости между поставщиком и потребителем без предварительного определения кратчайшего маршрута.

Введение промежуточных пунктов дает возможность перевозить весь объем МТС от поставщиков через любого другого поставщика или потребителя. Это означает, что любую вершину транспортной сети (как исходный пункт, так и пункт назначения) можно рассматривать, как транзитный пункт. Поскольку априори неизвестно, какие вершины будут обладать этим свойством, можно сформулировать задачу таким образом, чтобы каждую вершину можно было рассматривать и как поставщика, и как потребителя. Другими словами, число поставщиков, так же как и число потребителей в задаче с промежуточными пунктами, равно сумме поставщиков и потребителей в стандартной задаче.

Пример 10.7. Рассмотрим задачу из примера 10.6 и сделаем поясняющий рисунок (при стоимости буфера B = 100) спроса или суммарных запасов стандартной транспортной задачи (рис. 10.3), т. е.

$$B \geq \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

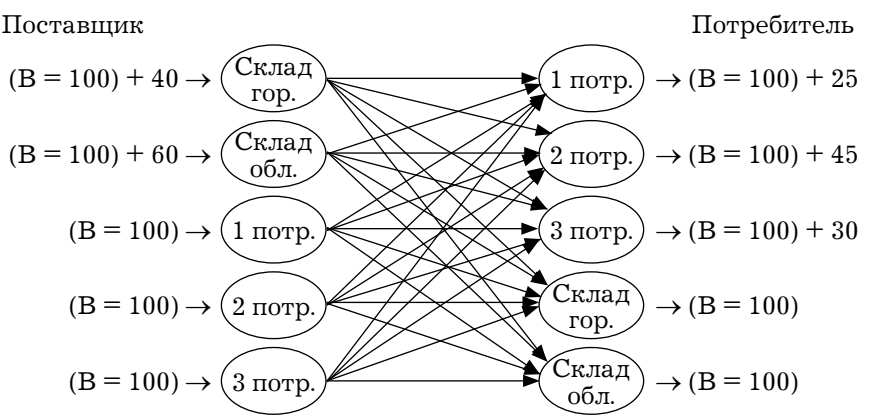


Рис. 10.3. Схема реализации

Стоимости в расчете на единицу груза оцениваются на основании данных о маршрутах. При этом очевидно, что коэффициент стоимости перевозки между первоначально заданными

поставщиками и потребителями остаются такими же, как в стандартной транспортной модели. Необходимо заметить, что стоимость перевозки из некоторого пункта в него же равна нулю и стоимость перевозки может меняться в зависимости от направления движения.

В табл. 10.13 представлено оптимальное решение рассмотренной выше задачи с промежуточными пунктами, в которой емкость буфера равна 100.

Таблица 10.13

	Склад города	**Склад области**	**Потребитель**			
			1 потр.	**2 потр.**	**3 потр.**	
Склад города	100		(40)			140
Склад области		100	0	(60)	2	160
1 потр.		0	85	(15)		100
2 потр.				70	(30)	100
3 потр.		2			100	100
	100	100	125	145	130	

Из таблицы видно, что диагональные элементы получены в результате использования буфера. Они не дают никакой информации об окончательном решении. Внедиагональные элементы обеспечивают получение решения, которое представлено на рис. 10.4.

Решение как однопродуктовой, так и многопродуктовой транспортных задач линейного программирования может быть проведено с использованием персональной электронно-вычислительной машины (ПЭВМ). Для этого необходимо подготовить исходные данные для пакета прикладных программ (ППП) ПЭВМ, ввести их и осуществить управление процессом решения задачи, обеспечив выдачу необходимых результатов, по которым принимается решение.

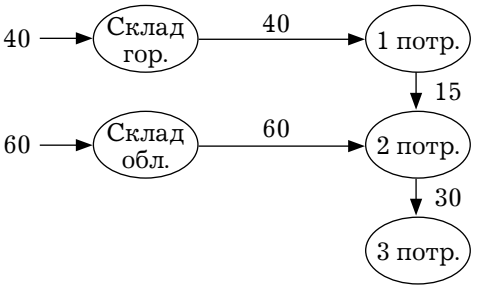


Рис. 10.4. Схема решения задачи

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Решить транспортную задачу:

A = (100, 150, 50);

B = (75, 80, 60, 85);

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix},$$

где A — вектор мощностей поставщиков;

B — вектор мощностей потребителей;

C — матрица транспортных издержек на единицу груза.

10.2. Решить транспортную задачу:

A = (300, 350, 150, 200);

B = (400, 400, 200);

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

где A — вектор мощностей поставщиков;

B — вектор мощностей потребителей;

C — матрица транспортных издержек на единицу груза.

10.3. Решить транспортную задачу:

A = (20, 30, 40, 20);

B = (40, 40, 20);

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

где A — вектор мощностей поставщиков;

B — вектор мощностей потребителей;

C — матрица транспортных издержек на единицу груза.

Вопросы для самопроверки

1. Поясните суть транспортной задачи и приведите ее математическую модель.

2. Какие методы существуют для нахождения опорного плана транспортной задачи?

3. В чем суть закрытой и открытой транспортных задач?

4. Как решать закрытую транспортную задачу методом потенциалов?

5. Каков алгоритм решения многопродуктовой транспортной задачи?

6. Каковы постановки транспортной задачи с промежуточными пунктами?

7. Какими методами можно решать транспортные задачи с промежуточными пунктами?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агекян Т. А.* Теория вероятностей для астрономов и физиков. — М.: Наука, 1974.

2. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1993.

3. *Алехова О. И. и др.* Типовой расчет. Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений. Элементы линейной алгебры. — М.: МГАВТ, 2001.

4. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994.

5. *Асеев Г. Г., Абрамов О. М., Ситников Д. Э.* Дискретная математика. – Ростов н/Д: Феникс, 2003.

6. *Балдин К. В., Башлыков В. Н., Рукосуев А. В.* Математика. — М.: ЮНИТИ, 2006.

7. *Балдин К. В., Быстров О. Ф.* Математические методы в экономике. Теория, примеры, варианты контрольных работ. — Москва-Воронеж, 2003.

8. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1989.

9. *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1969.

10. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика: В 3 т. — М.: Дрофа, 2003.

11. *Булдык Г. М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике. — Минск: Юнипресс, 2002.

12. *Венцтель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1989.

13. *Верещагин Н. К., Шень А.* Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 1999.

14. *Власов В. Г.* Конспект лекций по высшей математике. — М.: АЙРИС, 1997.

15. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. — М.: ДЖАНГАР—Большая медведица., 2001.

16. *Гончарова Г. А., Мочалин А. А.* Элементы дискретной математики. — М.: ФОРУМ—ИНФРА-М, 2003.

17. *Грес П. В.* Математика для гуманитариев. — М.: ЮРАЙТ, 2000.

18. *Грешилов А. А.* Прикладные задачи математического программирования. — М.: МГТУ, 1990.

19. *Гусак А. А.* Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. — Минск: ТетраСистемс, 1998.

20. *Гусак А. А.* Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Минск: ТетраСистемс, 2003.

21. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б. П. Демидовича. — М.: Астрель· АСТ, 2006.

22. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1989.

23. Справочник по математике для эономистов / Под ред. В. И. Ермакова. — М.: Высшая школа, 1987.

24. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1969.

25. *Идельсон А. В., Блюмкина И. А.* Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. — М.: ИНФРА—М, 2000.

26. *Клименко Ю. И.* Высшая математика для экономистов. Теория, примеры, задачи. — М.: Экзамен, 2005.

27. *Клиот-Дашинский М. И.* Алгебра матриц и векторов. — СПб.: Лань, 2001.

28. *Коваленко Н. С., Чепелева Т. И.* Высшая математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. — Минск: ЧУП Изд-во Юнипресс, 2006.

29. *Кострикина Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов. — М.: Просвещение, 1991.

30. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. — М.: URSS, 2005.

31. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. — М.: Наука,1989.

32. *Кук Д., Бейз Г.* Компьютерная математика. — М.: Наука,1990.

33. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970.

34. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: ГИФМЛ, 1962.

35. *Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л.* Математика. — М.: Высшая школа, 1991.

36. *Лунеев В. В.* Юридическая статистика. — М.: ЮРИСТЪ, 1999.

37. *Максимов Ю. Д. и др.* Курс высшей математики для гуманитарных специальностей. — СПб.: Специальная литература, 1999.

38. Математика для бакалавров технических специальностей: Т. 1. Общие разделы / Под общ. ред. Ю. Д. Максимова. — СПб.: Специальная литература, 1999.

39. *Марков Л. Н., Размыслович Г. П.* Высшая математика: Ч. 1. Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии. — Минск: Амалфея, 1999.

40. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — М.: Наука,1976.

41. *Мордкович А. Г., Солодовников А. С.* Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1990.

42. *Немыцкий В. В. и др.* Курс математического анализа: В 2 т. — М.: ГИТГЛ, 1957.

43. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1968.

44. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. — М.: Наука,1964.

45. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. — М.: АЙРИС ПРЕСС, 2005.

46. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. — М.: АЙРИС ПРЕСС, 2004.

47. *Подольский В. А., Суходский А. М.* Сборник задач по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1974.

48. Курс высшей математики / Под ред. П.И. Романовского. — М.: Высшая школа, 1964.

49. *Рублев А. Н.* Линейная алгебра. — М.: Высшая школа, 1968.

50. Индивидуальные задания по высшей математике. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / Под общ. ред. А. П. Рябушко. — Минск: Вэшэйшая школа, 2005.

51. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.

52. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984.

53. Общая алгебра: Т. 1. / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1990.

54. *Смолич Б. А.* Уравнительные вычисления. — М.: Недра, 1989.

55. *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Элементы дискретной математики. — М.: ИНФРА—М, 2002.

56. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.

57. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М.; Л.: Физматгиз, 1963.

58. *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. — М.: Наука, 1966.

59. *Эльсгольц Л. Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб.: Лань, 2002.

Главный редактор — *А. Е. Илларионова*
Редактор — *В. Н. Рогожкин*
Художник — *В. А. Антипов*
Верстка — *Н. В. Байкова*
Корректоры — *В. Ш. Мерзлякова, Г. М. Мубаракшина*

Ответственный за выпуск — *А. Ф. Пилунова*

Учебное издание

Краткий курс высшей математики

Под общей редакцией доктора экономических наук,
профессора К. В. Балдина

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 30.01.2013. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная. Печ. л. 32.
Тираж 1000 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
Для писем: 129347, Москва, п/о И-347
Тел./факс: (499) 182-01-58, 182-11-79, 183-93-01
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж
office@dashkov.ru — офис;
http://www.dashkov.ru

Отпечатано в ГУП Академиздатцентр «Наука» РАН,
ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ»-«Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: 554-21-86, 554-25-97, 974-69-76.