

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА	5
ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ	7
ПРЕДИСЛОВИЕ	9
ЧАСТЬ I. ГРАНИЦЫ ХАОСА	17
СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ	39
1. Динамика Ферхюльста	39
2. Множества Жюлиа и их компьютерное построение	43
3. Классификация критических точек Салливана	60
4. Множество Мандельброта	63
5. Внешние углы и деревья Хаббарда	70
6. Тан Лей. Замечания о подобии между множествами Мандельброта и множествами Жюлиа	83
7. Метод Ньютона для комплексных полиномов: проблема Кэли .	92
8. Метод Ньютона для действительных уравнений.....	101
9. Дискретная системы Вольтерра—Лотки	107
Часть II. МАГНЕТИЗМ И КОМПЛЕКСНЫЕ ГРАНИЦЫ	111
СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ.....	121
10. Нули Янга—Ли	121
11. Перенормировка	123
ЛИТЕРАТУРА	128
ЧАСТЬ III. СТАТЬИ ПРИГЛАШЕННЫХ АВТОРОВ	131
Б. Б. Мандельброт. Фракталы и возрождение теории итераций	131
А. Дуади. Множества Жюлиа и множество Мандельброта	141
Г. Айленбергер. Свобода, наука и эстетика	155
Г. Франке. Преломление науки в искусстве	161
СДЕЛАЙТЕ ЭТО САМИ	169
ПРИЛОЖЕНИЕ	173

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

С большим удовольствием представляю читателям эту не совсем обычную книгу, которая, я уверен, привлечет внимание не только математиков и физиков, но и тех, чьи интересы далеки от математики и ее проблем. Эта книга, как отмечает А. Дуади в журнале «В мире науки» № 1, 1988, «... с равным успехом может служить и математическим учебным пособием и украшением журнального столика».

До сих пор «сухая» математика чаще всего оставляла совершенно равнодушным каждого непосвященного. Сейчас, с появлением компьютеров ситуация изменяется, наступает «золотой век» вычислительной математики. И не только как эффективного инструмента, помогающего справиться с многочисленными задачами, от простых до самых сложных, которыми так богата жизнь. Математика, воплощающая в себе труд многих поколений ученых, начинает непосредственно участвовать в создании истинных эстетических ценностей. Авторы настоящей книги вложили немало труда, намечая будущие пути между математикой и искусством. Можно, конечно, при этом спорить, в какой степени создаваемые с помощью компьютеров картины можно считать произведением искусства. Во всяком случае, фотографии с дисплея компьютера, которых немало в этой книге, — это прекрасное сочетание порядка и хаоса, вряд ли кого-нибудь оставят равнодушными.

Мне хочется здесь просто процитировать автора одной из статей этой книги Г. Айленбергера: «Наше ощущение прекрасного возникает под влиянием гармонии порядка и беспорядка в природных объектах — тучах, деревьях, горных грядках или кристалликах льда. Их очертания — это динамические процессы, застывшие в физических формах... наука и эстетика согласны в том, что именно теряется в технических объектах по сравнению с природными: роскошь некоторой нерегулярности, беспорядка и непредсказуемости. Понимание этого может здорово помочь нам в придании человеческого лица технологии, от которой все больше и больше зависит наше выживание».

Несколько слов о том, чему собственно посвящена книга. С точки зрения математики в ней идет речь о теории динамических систем, и, более конкретно, об итерациях рациональных функций. В основном рассматривается самая простая нелинейная функция $f(z) = z^2 + c$, с которой все должны быть знакомы еще по школьной математике. Правда, здесь переменная величина z и параметр c предполагаются не вещественными, а комплексными, так что отображение $z \mapsto z^2 + c$ задает динамическую систему на плоскости (x, y) ($x + iy = z$). Происходящая в системе эволюция естественным образом выделяет различные множества в фазовом пространстве и пространстве параметров. Даже для самых простых динамических систем среди таких множеств имеются совершенно удивительные объекты. Два из них — множество Мандельброта и множество Жюлиа — представлены в этой книге.

Прошло уже довольно много времени со дня выхода первого издания этой книги на английском языке и даже с того момента, как был закончен ее перевод. Сейчас на русском языке имеется уже целый ряд статей в научно-популярных журналах, в которых так или иначе идет речь о фракталах, о множествах Жюлиа и Мандельброта. Алгоритмы для воспроизведения как множества Мандельброта, так и множеств Жюлиа, сами по себе весьма простые, и теперь многие, кто имеет возможность общаться с персональными компьютерами, могут при желании любоваться прекрасными картинками на экранах своих компьютеров.

В последнее время возникла небольшая дискуссия вокруг того, как, где и когда впервые появились те объекты, которым посвящена настоящая книга. Об этом, в частности, идет речь в заметке, помещенной в журнале «В

мире науки» (1990, № 6), к которой мы и отсылаем интересующихся этим вопросом.

Издание на русском языке подготовлено в сотрудничестве с авторами и издательством «Шпрингер». По предложению авторов добавлен новый раздел (это разд. 6), написанный молодым китайским математиком Тан Лей. Этот раздел является, пожалуй, наиболее теоретическим, — он содержит даже теоремы. В нем объясняется то, что мы видим на компьютерных изображениях двух основных объектов — множества Мандельброта и различных множеств Жюлиа, а именно подобие множества Мандельброта в окрестности некоторых его точек «кодируемым» им множествам Жюлиа, а также самоподобие последних.

На русский язык книгу перевели сотрудники Института математики АН СССР А. Г. Сивак (раздел «Границы хаоса» и примыкающие к нему специальные разделы 1—9) и П. В. Малышев (раздел «Магнетизм и комплексные границы», специальные разделы 10, 11 а также очерки, написанные Б. Мандельбротом, А. Дуади, Г. Айленбергером и Г. Франке).

А. Н. Шарковский

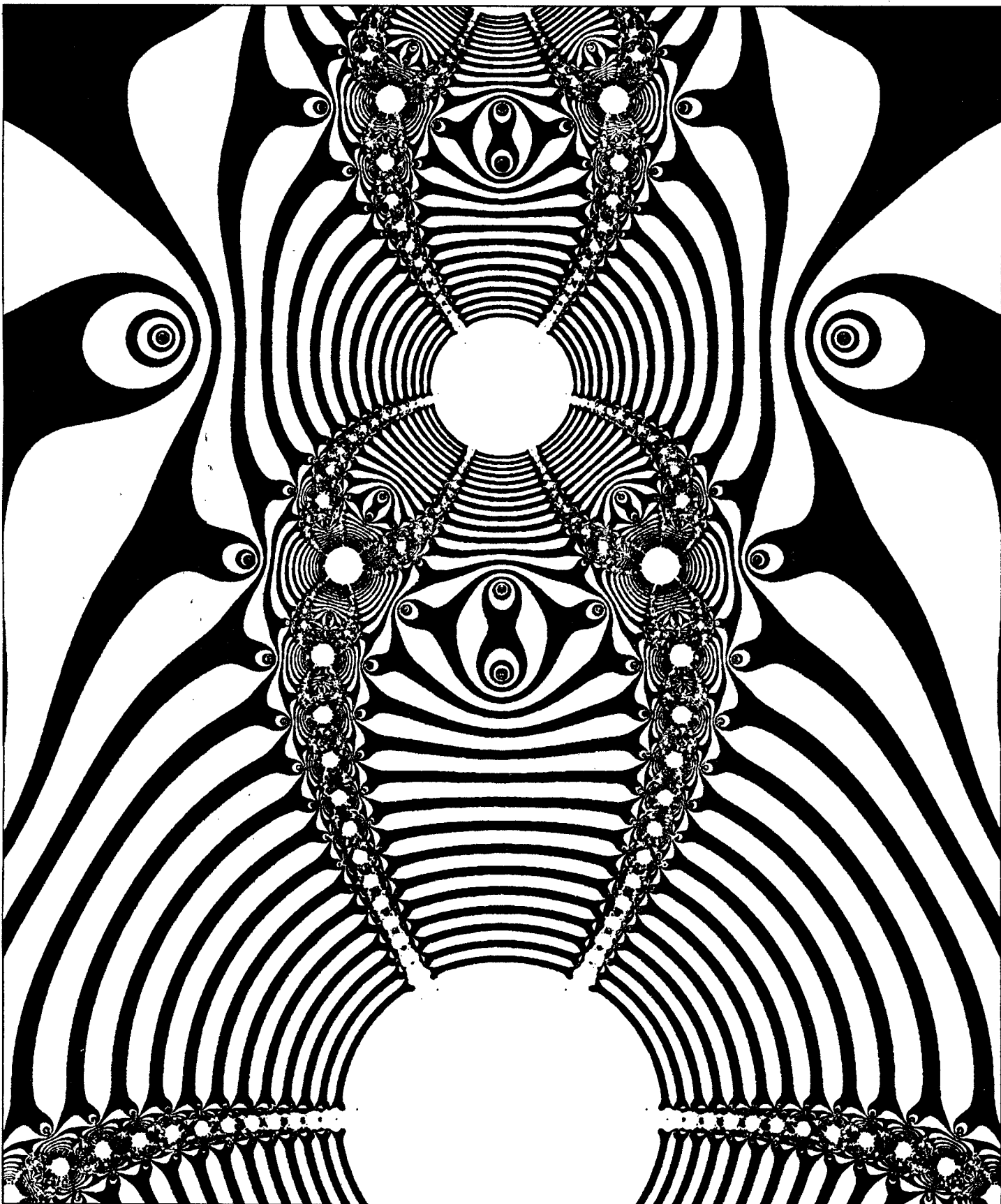
ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Для нас большая честь увидеть книгу в переводе на русский язык. Мы очень признательны профессору В. И. Арнольду, который счел целесообразным сделать «Красоту фракталов» доступной читателям в Советском Союзе, и профессору А. Н. Шарковскому, который взял на себя труд по подготовке перевода. Мы также в долгу у доктора Й. Хайнце из издательства Шпрингер в Гейдельберге за его активную роль в осуществлении этого предприятия.

Надеемся, что с помощью этой книги мы сможем содействовать сокращению расстояния между общественностью на Востоке и Западе, проявляющей интерес к науке. Выступая в этой роли, мы ощущаем чувство гордости, поскольку испытываем глубочайшее уважение к великим достижениям советских математиков и физиков. Наша книга предназначена не столько для того, чтобы пополнить знания, сколько для того, чтобы доставить удовольствие.

*Хайнц-Отто Пайтген
Петер Х. Рихтер*

Бремен, апрель 1989



ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1953 году я понял, что прямая линия ведет человечество к упадку. Тирания прямой стала абсолютной. Прямая линия — это нечто трусливое, прочерченное по линейке, без эмоций и размышлений; это линия, не существующая в природе. И на этом насквозь прогнившем фундаменте построена наша обреченная цивилизация. Если даже и возникает где-то мысль, что прямая линия напрямик ведет к гибели, ее курсу все равно продолжают следовать дальше... Любой дизайн, основанный на прямой линии, будет мертворожденным. Сегодня мы являемся свидетелями триумфа рационалистических знаний и одновременно обнаруживаем, что оказались в пустоте. Эстетический вакуум, пустыня однообразия, преступное бесплодие, утрата созидательных возможностей. Стандартизируется даже творчество. Мы стали бессильными. Мы больше не способны творить. В этом наше невежество.

Фриденсрайх Хундертвассер

Фракталы вокруг нас повсюду, и в очертаниях гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции. Человеку, не связанному с наукой, может показаться странным то, что такие привычные всем вещи с недавних пор оказались в фокусе интенсивных научных исследований. Но привычность какого-либо явления совсем не означает, что ученые могут правильно его объяснить. Ребенку тоже привычны и его голубая колыбель, и голубое небо задолго до того, как он осознает, что голубой цвет есть общее качество совсем разных вещей. В его познавательном развитии наступит момент, когда он уже сможет воспринять понятие цвета; он слышит, что небо является голубым и вдруг «открывает», что и некоторые другие вещи тоже являются голубыми.

Развитие нашего научного понимания мира происходит по такой же схеме. Да, многие фракталы нам знакомы, но до самого последнего времени в нашем научном представлении о мире им не находилось места. Это представление восходит еще к Галилео Галилею, чье мастерство владения абстракцией, вступающей в противоречие с интуицией, дает пример современного научного рассуждения. Его кредо, сформулированное им самим в 1623 году, гласит:

Вся наука записана в этой великой книге — я имею в виду Вселенную, — которая всегда открыта для нас, но которую нельзя понять, не научившись понимать язык, на котором она написана. А написана она на языке математики, и ее буквами являются треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых человеку невозможно разобрать ни одного ее слова; без них он подобен блуждающему во тьме.

Понадобилось почти 350 лет, чтобы выйти за рамки галилеевского представления — до тех пор, пока Бенуа Мандельброт не разработал понятие фрактала. Бросая взгляд в прошлое, он размышлял в 1984 году:

Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака — это не сферы, горы — это не конусы, линии берега — это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно.

Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, — задачи исследования морфологии аморфного. Математики, однако, пренебрегли этим вызовом и предпочли все больше и больше отдаляться от природы, изобретая теории, которые не соответствуют ничему из того, что можно увидеть или почувствовать.

Математическое понятие фрактала выделяет объекты, обладающие структурами различных масштабов, как больших, так и малых, и, таким образом, отражает иерархический принцип организации. В основе этого понятия содержится одна важная идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т. е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их через микроскоп с любым увеличением. Хотя эта идеализация и может оказаться слишком большим упрощением действительности, она на порядок увеличивает глубину нашего математического описания природы. Исследования Мандельброта получили широкую известность после открытия им в 1980 году множества, носящего теперь его имя. Он обнаружил принцип, с помощью которого несколько неожиданным путем образуется целый мир самоподобных структур. Причудливая форма, изображенная на переплете этой книги, может оказаться одним из ключевых элементов некоторой новой «натуральной» математики, так же, как прямая линия является одним из основных элементов евклидовой геометрии.

Возможно, наиболее убедительный аргумент в пользу изучения фракталов — это их бросающаяся в глаза красота. Издавая эту книгу, мы бы хотели поделиться своим восхищением с широкой аудиторией. Мы осмелились на этот шаг под воздействием той чрезвычайно положительной реакции, которую до сих пор вызывали наши картины на ряде выставок, сначала в Германии, а в последнее время и за ее пределами, проводившихся при содействии Института Гёте.

Наши картины — это не попытка имитировать природу. Для этого нашлись бы и более подходящие изображения искусственных пейзажей, которые, будучи представленными в виде фильма, с успехом могли бы заменить настоящие. Изображения фракталов в книге подбирались по их значимости для нашей научной работы. Как свидетельствуют дополняющие книгу статьи, эти изображения — часть результатов усилий специалистов разных стран, направленных на разгадку некоторых секретов сложных динамических систем.

Когда мы, математики и физики Бременского университета, впервые провели семинар по хаотической динамике осенью 1981 года, мы, конечно, не могли предвидеть, к чему приведет в конце концов наше сотрудничество. Но нам было ясно одно: заглянуть в глубины сложности нелинейных систем можно главным образом с помощью вычислительного эксперимента.

Чтобы это сделать, нам потребовалось соответствующее оборудование. Молодой и растущий Бременский университет предоставил в наше распоряжение все имеющиеся возможности. Кроме того, некоторые из нас побывали в Университете штата Юта в Солт-Лейк-Сити и ознакомились там с великолепным оборудованием университетского Отделения вычислительных наук. С помощью субсидии, полученной из Фонда Фольксвагена, мы смогли спланировать и наладить работу своей собственной лаборатории компьютерной графики «Динамические Системы», и именно здесь, в Бремене, были получены все картины для нашей выставки.

Идея организации публичной выставки появилась в процессе обсуждения нами слайдов и видеозаписей, которые мы привезли из Солт-Лейк-Сити. На тех photographиях была представлена динамика отображений, сохраняющих площади, с которых собственно и началось наше сотрудничество, а также восхитительные множества Жюлиа, порожденные алгоритмом Ньютона отыскания корней.

Наша идея приобрела свой законченный вид, когда сенатор *Рольф Спекманн* и *Ганс-Кристиан Бёмерс* из Шпаркассе в Бремене (оба они известны своим активным содействием искусству и научным исследованиям) предложили нам выставить наши произведения на более широкое обозрение в парадном зале своего банка.

Покинув ради этой первой выставки свою башню из слоновой кости, мы получили взамен бесценный для нас опыт. Мы оказались лицом к лицу с проблемами, весьма отличными от тех, с которыми мы привыкли иметь дело в своей профессиональной деятельности. Прежде всего это касалось каталога, в котором бы для широкой публики объяснялось научное содержание наших картин. Не имея никакого опыта в делах такого рода, мы выпустили брошюру «Гармония хаоса и порядка», которая приобрела значительно большую популярность — в том числе и среди наших коллег, — чем любая из наших чисто научных публикаций.

Успех первой выставки в январе 1984 года поставил нас в затруднительное положение. Для того чтобы расширить аудиторию, материал для выставки следовало доработать и дополнить. В тот момент весьма существенным для нас оказалось то, что наши бывшие учителя *Фридрих Хирцебрух* из Бонна и *Манфред Эйген* из Гёттингена поддержали эту, казалось бы, странную деятельность и предложили нам выставить наши материалы в отделениях Института Макса Планка, в которых они работали. Их предложения подтолкнули нас к созданию почти целиком новой экспозиции с новым каталогом «Морфология комплексной плоскости» — и это спустя всего четыре месяца после нашей первой бременской авантюры!

Третье поколение наших картин появилось снова в качестве материала для выставки «Границы хаоса», подготовленной в сотрудничестве с Институтом Гёте. Мы были счастливы возможности выхода за границу и бесконечно благодарны нашим многочисленным друзьям за их активное содействие нашему предприятию. *Арнольд Манделл*, психиатр из Сан-Диего, обеспечил нас важными для нас связями, заразив своим восхищением нашими работами заместителя директора Музея изобразительных искусств в Сан-Франциско *Томаса К. Селигманна*, а также бывшего директора Эксплораториума *Франка Оппенгеймера*. Институт Гёте включил нас в свою культурную программу осенью 1984 года, и за это мы особенно обязаны *Манфреду Тришу* из отделения Института в Сан-Франциско, а также *Фритьофу Корну* и *Манфреду Брённеру* из дирекции Института в Мюнхене.

В своем первоначальном виде выставка включала не только отпечатанные с помощью CIBACHROME картины, слайды и видеофильм, но и 108-страничный каталог на немецком и английском языках, в котором в гораздо большей степени, чем в двух предыдущих брошюрах, отразилось наше шатание между наукой и искусством. Первое его издание было распродано в течение нескольких месяцев. Мы очень признательны издательству Шпрингер за оказанное нам доверие и выпуск в свет этой книги, призванной документировать и пополнить нашу выставку. В этой книге дополнительно представлен целый ряд цветных фотографий, не вошедших в каталог, а также расширено обсуждение их научного содержания.

Части «Границы хаоса» и «Магнетизм и комплексные границы» призваны объяснить существо дела неспециалисту, поэтому в них нам пришлось отказаться от математической строгости. Это иногда приводит к определенным трудностям, из-за того, что бывает нелегко понять, какие рассуждения опираются на точные факты, а какие — на интуицию, основанную на экспериментальных результатах. Такое положение дел особенно нежелательно в тех случаях, когда с помощью точных рассуждений можно было бы полностью разобраться в самой сути задачи. Во избежание таких случаев мы включили в текст книги десять специальных разделов. Их чтение требует определенных навыков математического и физического мышления. Неспециалист эти разделы может просто проигнорировать, между тем как



Стоят:

Хартмут Юргенс, Петер Х. Рихтер и
Хайнц-Отто Пайтген

Сидят:

Михаэль Прюфер и Дитмар Заупе.

изучающие комплексную динамику могут найти в них справочный материал по соответствующим темам.

Мы счастливы, что четверо из наших наиболее выдающихся коллег согласились подготовить для этой книги свои оригинальные статьи, составившие третью часть книги. Каждый из этих авторов определенным образом повлиял на формирование и развитие науки о фракталах и их участие в создании книги значительно повышают ее научную ценность.

Бенуа Б. Мандельброт рассказывает об открытии им множества, названного его именем, которое играло главную роль в выставке. Кроме того, он излагает свой взгляд на историю фрактальной геометрии и на его собственную роль добровольного скитальца, блуждающего между математикой и другими науками.

Адриен Дуади, один из ведущих знатоков множества Мандельброта, подробно объясняет, что уже известно об этом объекте удивительной сложности, а что до сих пор остается тайной. Технические отступления в его статье, естественно, пересекаются с содержанием некоторых наших специальных разделов, но мы надеемся, что заинтересованный читатель увидит в этом скорее пользу, нежели досадную оплошность.

Герт Айленбергер, физик, обсуждает то символическое значение, которое могли бы иметь наши картины для формирования нового мировоззрения. Его дружеская критика неизменно сопровождает нашу деятельность все эти годы, являясь желанным источником поддержки.

Герберт В. Франк, один из пионеров компьютерной графики, рассказывает о своем собственном опыте и приводит целый ряд основанных на нем выводов.

Большинство картин, вошедших в это издание, демонстрировалось на выставке «Границы Хаоса». Они были выбраны после нескольких сотен экспериментов, проведенных в 1984 году в нашей бременской лаборатории. Часто результаты одного и того же эксперимента показаны в различных вариантах раскраски. Возможность использования широкой цветовой гаммы

оказалась очень важным средством, позволившим проникнуть в глубину сложных структур. Выбор и композиция цветов произвольны примерно так же, как и оркестровка музыкальной пьесы: хотя выбор конкретных музыкальных инструментов сам по себе не является существенным по отношению к основной идее произведения, он оказывает существенное влияние на восприятие слушателя. По этой причине краски следует подбирать весьма тщательно. В этом отношении нашу графику можно считать как результатом подлинного и тонкого математического эксперимента, так и результатом индивидуального творчества.

Те, у кого созерцание наших работ вызывает меньший интерес, чем построение своих собственных, в самом конце книги могут найти некоторую интересную для них информацию.

Перевод с немецкого языка на английский выполнили Говард и Ирена Шультенс. Мы благодарим Нэнси Голломон и Юджина Аллговера за критическое чтение рукописи.

Невозможно упомянуть всех, способствовавших тому, чтобы и выставка, и эта книга имели успех или по крайней мере были приемлемыми. Прежде всего мы обязаны нашим сотрудникам по «Графической лаборатории динамических систем» Хартмуту Юргенсу, Михаэлю Прюферу, Дитмару Заупе и одному из наших студентов Хайнцу-Вернеру Рамке. В вычислительном центре Бременского университета при печати черно-белых изображений на лазерном принтере нам очень помог *Георг Хейгстер*.

Большое значение имела и та дружеская поддержка, которую мы нашли в нашем бременском окружении как среди частных лиц, так и в деловых кругах. Нас поддерживали Бременский университет и Сенат земли Бремен; поддержка многих наших научных коллег оказалась полезной и ободряющей.

Нам бы хотелось особенно поблагодарить сэра *Майкла Атья* из Оксфордского университета за его инициативу и многочисленные идеи, позволившие подготовить материал к показу в Великобритании, что обеспечило ему международный резонанс.

И последнее, но не менее важное, мы благодарим членов наших семей за их неиссякаемое терпение.

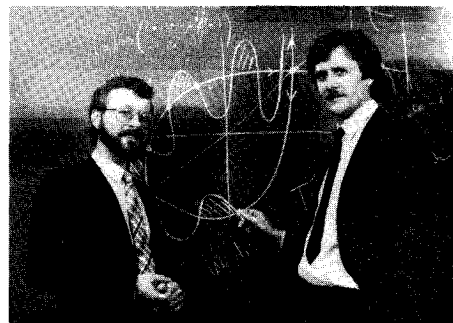
Мы посвящаем эту книгу Карин и Кристиан.

Х.-О. Пайтген и П. Х. Рихтер

Бремен, май 1986

Петер Х. Рихтер

* 1945, Фаллингбостель. Изучал физику в Геттингене и Марбурге. В 1971 году под руководством С. Гроссмманна получил степень доктора естественных наук. Исследования по статистической физике неравновесных систем в Геттингене, Кембридже (шт. Массачусетс) и Стэнфорде. С 1980 года является профессором физики Бременского университета; в 1985/86 — приглашенный профессор Бостонского университета.



Хайнц-Отто Пайтген

* 1945, Брух. Изучал математику, физику и экономику в Бонне. В 1973 году получил степень доктора естественных наук в Бонне. Исследования по нелинейному анализу и динамическим системам в Бонне и Солт Лейк Сити. С 1977 года является профессором математики Бременского университета, с 1985 — профессором математики Калифорнийского университета в Санта Круз. Приглашенный профессор в Бельгии, Италии, Мексике и США.

Бенуа Б. Мандельброт

* 1924, Варшава. Переехал в Париж в 1936 году, с 1945 по 1947 год — Политехническая школа. В 1948 г. получил степень магистра аэроаук в Калифорнийском технологическом институте, Пасадена. В 1952 г. — степень доктора философии по математике в Парижском университете. До того, как переехал в США в 1958 г., был приглашенным ученым в Принстоне, Женеве, Париже. Член исследовательского совета и совета фирмы ИБМ (1974 г.) в Йорктаун Хейтс, шт. Нью-Йорк. С 1984 г. является профессором прикладной математики Гарвардского университета.



Адриен Дуади

* 1935, Гренобль. Высшая нормальная школа, Париж. Должность преподавателя, 1957 г.; степень доктора, 1965 г. Профессор математики Университета в Ницце (1965—1970), а затем в Пари-сюд (Орсэ) и в Высшей нормальной школе. Исследования по комплексной аналитической геометрии. Стал интересоваться голоморфной динамикой с 1980 г. под влиянием своего бывшего ученика Дж. Х. Хаббарда, а также Д. Салливана.





Герт Айленбергер

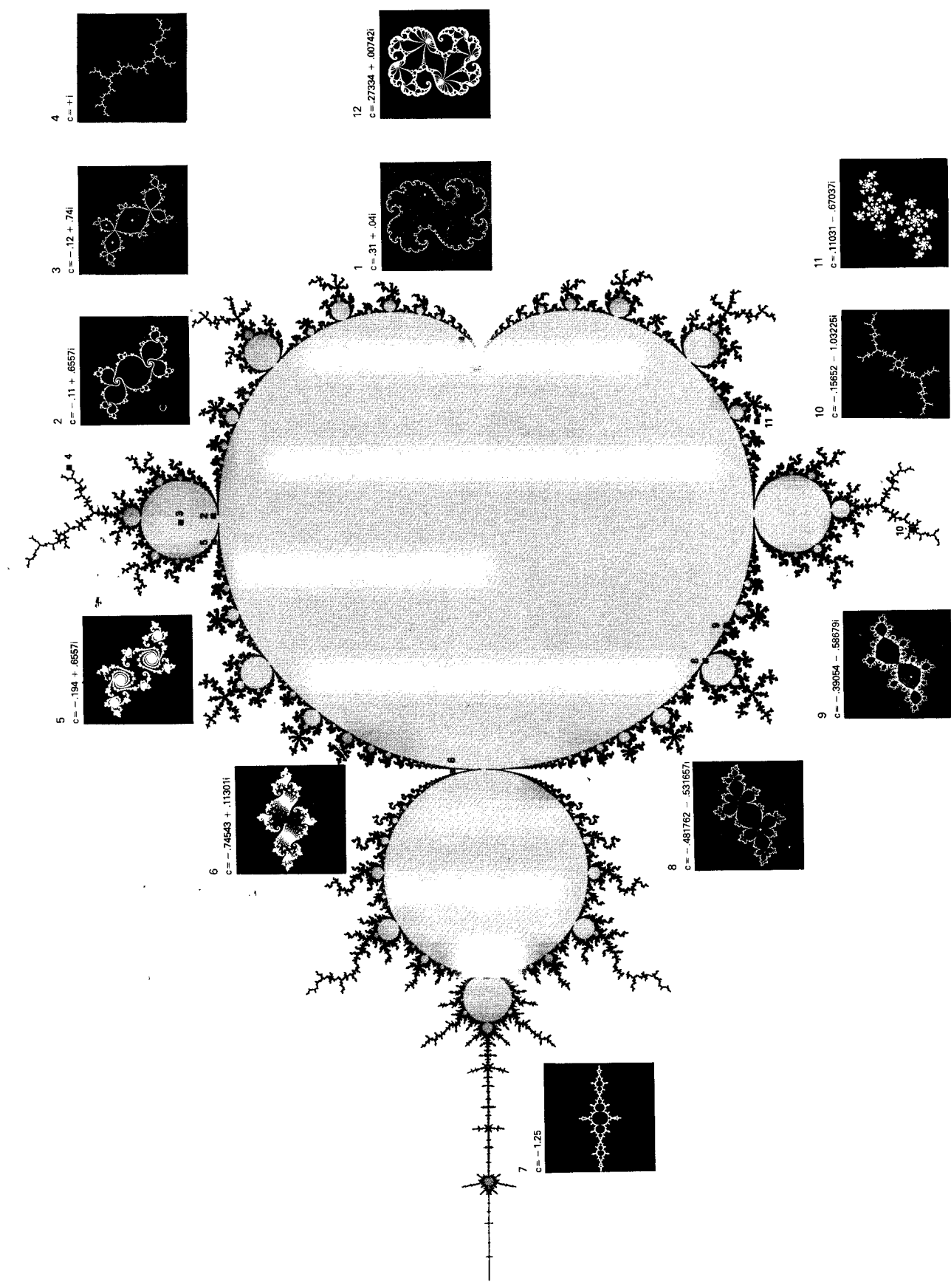
* 1936, Гамбург. В 1961 г. под руководством Ф. Хунда получил степень доктора естественных наук. Исследования по физике твердого тела, в частности, сверхпроводимости, и нелинейным явлениям. С 1970 г. профессор Кельнского университета и директор Института твердого тела (KFA, Jülich).

Убежден, что рационализм науки, развитый должным образом, является для человечества единственным и всеобъемлющим источником познания, единственной религией просвещенного будущего.



Герберт В. Франке

* 1927, Вена. Промышленные исследования, публицистика. С 1955 г. заинтересовался рациональной эстетикой, с 1961 года считается самым известным немецким автором научной фантастики. С 1970 г. занимается разработкой компьютерной графики для цифровых ЭВМ. Франке является одним из самых активных поборников технически вооруженного искусства.



ЧАСТЬ I

ГРАНИЦЫ ХАОСА

Там, где окружающий нас мир перестает быть ареной личных надежд и желаний, где мы как свободные существа, сомневаясь и размышляя, созерцаем его в изумлении, там мы вступаем в царство искусства и науки. Если мы описываем увиденное и известное по опыту на языке логики — это наука; если же представляем в формах, внутренние взаимосвязи которых недоступны нашему сознанию, но которые интуитивно воспринимаются как осмысленные, — это искусство. И для искусства, и для науки общим является увлечение чем-то стоящим выше личного, свободным от улового.

А. Эйнштейн

Наука и искусство — два дополняющих друг друга способа познания природы, аналитический и интуитивный. Мы привыкли считать их противоположными полюсами, но не зависят ли они друг от друга? Мыслитель, пытающийся постигнуть в своем сознании явления природы, стараясь свести всю их сложность к небольшому числу фундаментальных законов — не является ли он также мечтателем, погружающимся в богатство форм и воспринимающим себя частью извечного хоровода природных явлений?

Это ощущение общности, которое может испытать каждый из нас, не находит отражения в истории культуры последних двух столетий. Как будто чувствуя себя слишком стесненными рамками единой души, дух искусства и дух науки разделились. *Единый* Фауст стал двумя одномерными существами. Это разделение кажется необратимым, и сегодня уже не принимается во внимание то, что обе части вместе способствовали развитию в эпоху просвещения. Смелость в использовании своих собственных аргументов превратилась в самонадеянность. Холодный рационализм науки и технологии широко распространился и трансформировал мир до такой степени, что само существование человека оказалось под угрозой. Искусство перед этим оказалось, к сожалению, беспомощным.

Безусловно, эта напряженность оказывает воздействие и на естествознание. Многие крупные мыслители в конце концов осознавали неадекватность укоренившегося способа мышления. Несмотря на грандиозные успехи физики элементарных частиц или анализа гомологических рядов в молекулярной генетике, кредо «фундаменталистов» уже утратило свою исключительную привлекательность. Теперь уже недостаточно открыть основные законы и понять, как работает мир «в принципе». Все более и более важным становится выяснение того, каким способом эти принципы проявляют себя в реальности. Самые точные фундаментальные законы действуют в реально существующем мире. Любой нелинейный процесс приводит к ветвлению, к развилке на пути, в которой система может выбрать ту или иную ветвь. Мы имеем дело с выбором решений, последствия которых предсказать невозможно, поскольку для каждого из этих решений характерно усиление.

Самые незначительные неточности раздуваются и имеют далеко идущие последствия. В каждый отдельный момент причинная связь сохраняется, но после нескольких ветвлений она уже не видна. Рано или поздно начальная информация о состоянии системы становится бесполезной. В ходе эволюции любого процесса информация генерируется и запоминается. Законы природы допускают для событий множество различных исходов, но наш мир имеет одну-единственную историю.

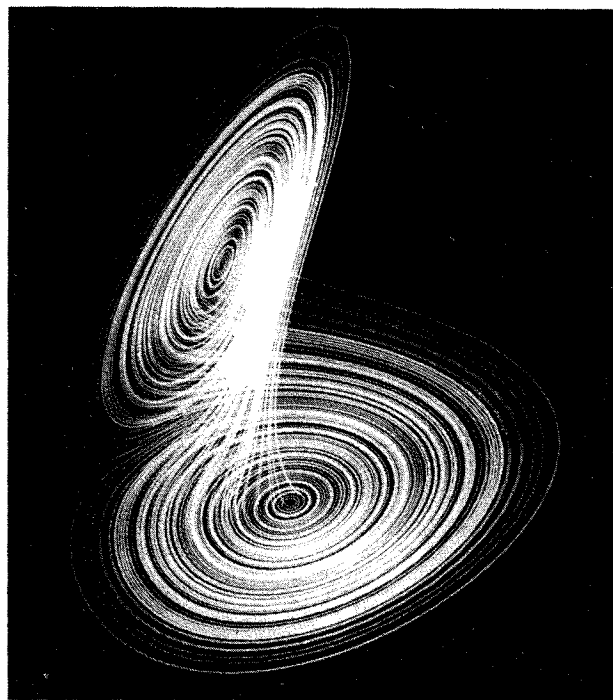
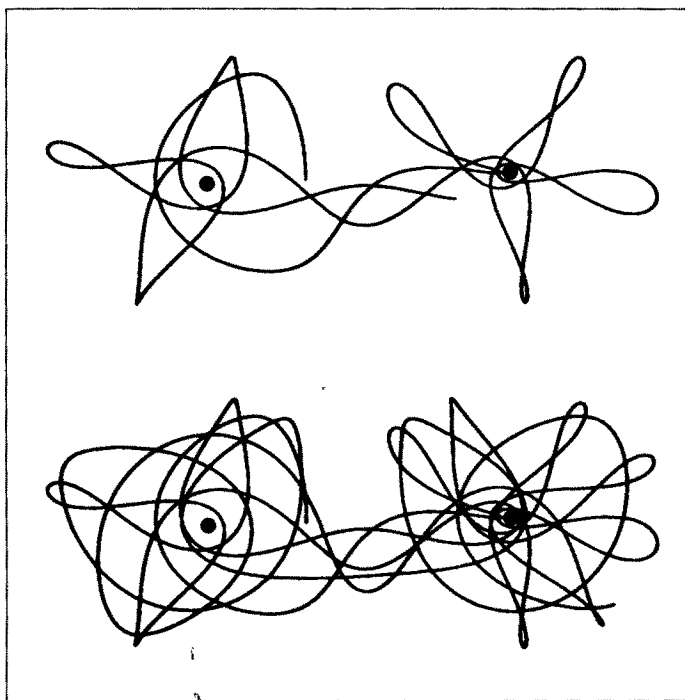


Рис. 1. Типичная траектория решения задачи трех тел в небесной механике. Вверху показано начало, а внизу — дальнейшая эволюция хаотического движения малой планеты вокруг двух светил с равной массой. Справа: аттрактор Лоренца: хаотическое движение в диссипативной системе. В отличие от движения планеты, это движение направляется к аттрактору силой трения. Но «странные аттракторы» допускают существование сложных движений, прыжки вперед и назад между двумя центрами.

Даже в астрономии, старейшей из естественных наук, следует пересмотреть прежние представления. Когда Кеплер и Ньютон, а затем более точно Эйнштейн, объяснили раз и навсегда то, как отдельные планеты движутся вокруг солнца по своим эллиптическим орбитам, создалось впечатление, что для полного описания движения системы трех или более тел требуется просто увеличить интенсивность вычислений. Верно, что наши космические корабли могут полагаться на ньютоновы законы движения и что современные компьютеры направляют их к нужным целям, но остается верным и то, что по истечении *достаточно большого периода времени* траектории их движения становятся непредсказуемыми. До сих пор не получен ответ на старый вопрос об устойчивости солнечной системы. На рубеже XVIII—XIX в. считалось, что она должна быть устойчивой. В начале XX в. — после Пуанкаре — имелись основания предполагать обратное. Сегодня мы уже допускаем, что долгосрочный прогноз поведения солнечной системы (даже если ограничиться только гравитационным взаимодействием) невозможен: как говорят специалисты, уравнения являются «неинтегрируемыми». Любая самая малая неточность в начальных условиях может позже очень сильно повлиять на последующее движение. Та сложность, которая заключается, казалось бы, в простых уравнениях (рис. 1), привела в замешательство и специалистов, и неспециалистов.

Аналогичные проблемы возникают почти во всех других дисциплинах. Одна из причин того, почему мы до сих пор не можем управлять термоядерной реакцией, заключается в том, что мы не имеем адекватного пред-

ставления о хаотическом движении заряженной частицы в системе магнитных зеркал. Изучение развития яиц насекомых показывает, что и морфогенез невозможно понять, опираясь только на знание соответствующего генома и его молекулярного строения. Феноменология имеет свои собственные законы. На каждой новой ступени организации вступают в силу новые правила.

Все это не означает, что известные до сих пор законы природы неверны; это лишь означает, что трудно обнаружить все скрытое в них. Эти трудности являются общими и для небесной механики, и для физики элементарных частиц, для биологии развития и экономики. Это хорошо известно нам из повседневной жизни, но это требует совершенно новых взглядов в науке. Фундаментальные науки, смотрящие сверху вниз, должны перевести свой взгляд вверх, от основ к явлениям. Для этого требуются новые концепции, модели, которые показывали бы суть имеющихся проблем и прокладывали бы новые пути нашему мышлению. «Моделей мира», которые превращаются в сотни уравнений при обсуждении конкретных вопросов, совершенно недостаточно. Они лишь затемняют те проблемы, которые им следовало бы осветить. Знание добывается в борьбе ради того, чтобы отыскать существенное и представить его «в двух словах».

Мышление в образах

Как это можно было бы осуществить, если бы диагноз Фауста оказался правильным?

... Но у природы крепкие затворы.

То что она желает скрыть в тени
таинственного своего покровы,
Не выманить винтами шестерни,
Ни силами орудья никакого.¹⁾

... но, может быть, это возможно сделать с помощью дьявола?

Многие, и ученые в не меньшей степени, чем люди искусства и обеспокоенные родители, воспринимают компьютер как дьявольский инструмент. Некоторые с первого же взгляда на машину становятся ее рабами. Должна же быть на это какая-то причина.

В самом деле, это новое средство познания позволяет увидеть связи и значения, которые до сих пор были скрыты от нас. Главным образом это относится к компьютерной графике, переживающей сегодня период интенсивного развития и обогатившей наши возможности в такой степени, которая редко достигалась другими средствами науки. Она, несомненно, может подарить нам фантастические миры, окружить нас искусственными пейзажами и заставить забыть действительность. Но если использовать ее не бездумно, то она может нам помочь приподнять покров над тайнами природы.

Там, где предыдущие поколения ученых были вынуждены существенным образом упрощать свои уравнения или вообще отказываться от них, мы можем увидеть их суть на экране дисплея. Естественные процессы, представленные графически, можно постичь во всей их сложности, опираясь на нашу интуицию. При этом стимулируются новые идеи, новые ассоциации и у каждого, кто мыслит в образах, пробуждается творческий потенциал.

Математики, и особенно физики, всегда мыслили образами; даже более того, они использовали эстетические категории в качестве критерия, если не истины, то по крайней мере завершенности. Герман Вейль, один из наиболее выдающихся немецких математиков, 100-летие со дня рождения которого отмечалось в 1985 году, откровенно признавался:

¹⁾ И. В. Гёте. Фауст, перевод Б. Л. Пастернака. — *Прим. ред.*

«В своей работе я всегда пытался объединить истину с красотой, а когда мне приходилось выбирать между ними, я обычно выбирал красоту».

В подобных высказываниях содержится глубокая вера в единство науки и искусства. В отзывах на наши картины довольно часто выражалась надежда на то, что это единство станет более наглядным, не похожим на ту далеко упрятанную красоту, которая доступна лишь небольшому числу посвященных, как, например, в случае теории гравитации Эйнштейна. Является ли это упрощением? Возможно. Но не в первый раз ремесло служит духу.

Преобразование уже началось. Границы между традиционными дисциплинами утрачивают отчетливость. Уже возникли центры по изучению «сложной динамики», «нелинейных явлений» и других подобных вещей, предусмотрительно не уточняющие, какие явления — физики, химии, биологии или совершенно других областей — они рассматривают. На семинарах в этих центрах изучаются как метаморфозы растений и животных, так и проблемы физики плазмы, психологии восприятия или социального поведения. Растет уверенность в том, что процессы образования структур и самоорганизация развиваются в соответствии с небольшим числом сценариев, не зависящих от конкретной системы. В ФРГ, например, Герман Хакен из Штутгартского университета с конца 60-х годов направлял свою деятельность на создание «синергетики». Являясь одним из основателей теории лазеров, он обнаружил, что образование внутренних структур в лазере происходит в соответствии с законами, очень напоминающими конкуренцию молекулярных видов, которую описал Манфред Эйген (Институт Макса Планка в Геттингене) в своих исследованиях ранней эволюции жизни. Синергетика целенаправленно пытается отыскивать правила, по которым возникает порядок в сложных системах.

Наши рисунки относятся к этому направлению. Они касаются хаоса и порядка, их конкуренции или сосуществования. Они показывают переход от одного к другому и то, какой изумительно сложной является область перехода вообще. И восхищение, вызываемое красотой изображенных на картинах областей, не может отвлечь нас от центрального вопроса о том, как структура границ зависит от параметров. Это приводит нас к границам другого уровня и открывает закономерности, о существовании которых несколько лет назад никто и не подозревал.

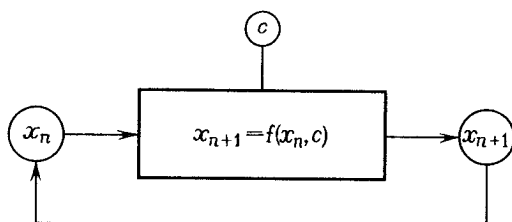
Рассматриваемые здесь процессы возникают в различных физических и математических задачах. Все они имеют одно общее — это конкуренцию нескольких центров за доминирование на плоскости. Простые границы между территориями в результате такого соперничества возникают редко. Чаще имеет место нескончаемое филигранное переплетение и непрекращающаяся борьба даже за самые малые участки.

Именно в этой пограничной области происходит переход от одной формы существования к другой: от порядка к беспорядку, от намагниченного состояния к ненамагниченному в зависимости от интерпретации тех сущностей, которые примыкают к границе. Пограничные области в большей или меньшей мере замысловато зависят от условий, характеризующих изучаемый процесс. Порой возникает третий конкурент, который пользуется разногласиями двух других и насаждает свою область влияния. Может случиться, что один центр захватит всю плоскость, но и его власть имеет «границы» в виде изолированных точек, которые неподвластны его притяжению. Это так сказать «диссиденты», не желающие «принадлежать».

Рисунки представляют процессы, являющиеся, конечно, весьма упрощенной идеализацией действительности. Они преувеличивают некоторые свойства, чтобы сделать их более ясными. Например, нет ни одной реальной структуры, которую можно было бы последовательно увеличивать бесконечное число раз и которая выглядела бы при этом неизменной. Тем не

менее принцип самоподобия в приближенном виде имеется в природе: в линиях берегов морей и рек, в очертаниях облаков и деревьев, в турбулентном потоке жидкости и в иерархической организации живых систем. А открыл нам глаза на эту *фрактальную геометрию природы* Бенуа Б. Мандельброт.

На самом деле процессы, порождающие такие структуры, довольно давно изучаются в математике и физике. Это обычные процессы с обратной связью, в которых одна и та же операция выполняется снова и снова, когда результат одной итерации является начальным значением для следующей:



Единственное, что при этом требуется, — нелинейная зависимость между результатом и начальным значением, т. е. *динамический закон* $x_{n+1} = f(x_n)$ должен быть более сложным, чем простая пропорциональность $x_{n+1} = kx_n$. Схематическая диаграмма указывает на то, что правило $x \mapsto f(x)$ зависит от параметра c , влияние которого будет обсуждаться ниже.

Если начать итерационный процесс указанного вида с некоторого произвольного значения x_0 , то его результатом будет последовательность x_1, x_2, \dots , поведение которой по истечении достаточно большого периода времени и будет составлять предмет нашего интереса. Будет ли последовательность сходиться к некоторому предельному значению X , стремясь к состоянию покоя? Придет ли она к некоторому циклу значений, которые будут повторяться вновь и вновь? Или эта последовательность все время ведет себя беспорядочно, хотя и определена динамическим законом и конкретным начальным значением, но тем не менее непредсказуема?

Процессы указанного вида обнаруживаются в любой точной науке. Так, описание явлений природы с помощью дифференциальных уравнений, которое ввели около 300 лет назад Исаак Ньютон и Готтфрид В. Лейбниц, основано на принципе обратной связи. Динамический закон определяет положение и скорость частицы в данный момент времени через их значения в предыдущий момент. Движение частицы понимается как реализация этого закона. Несущественно, будет ли процесс дискретным, т. е. осуществляемым по шагам, либо непрерывным. Физикам нравится мыслить в терминах инфинитезимальных единиц времени: *natura non facit saltus*¹⁾. Биологи, напротив, часто предпочитают рассматривать изменения от года к году или от поколения к поколению. Очевидно, допустимы обе точки зрения, а выбор подходящего описания определяется обстоятельствами.

Сценарий проникновения в хаос

Рассмотрим пример. Рост некоторой популяции за несколько лет обычно описывают при помощи коэффициента прироста, т. е. отношения ежегодного прироста численности популяции к ее общей численности. Если эта величина остается постоянной в течение всего периода времени, то говорят, что закон роста является линейным, а сам рост называют экспоненциальным. Например, при коэффициенте прироста в 5% популяция удваивает свою численность каждые 14 лет. Законы такого типа, однако, применимы толь-

¹⁾ Природа не делает скачков (лат.). — Прим. ред.

ко на ограниченных промежутках времени. Для роста всегда существуют пределы.

Одним из первых обратил на это внимание П. Ф. Ферхюльст, сформулировав в 1845 году закон, содержащий ограничение на рост. Он объяснил это тем, что любая экологическая ниша может обеспечить существование популяции только определенного максимального размера X и что коэффициент прироста должен снижаться, когда размеры популяции приближаются к X . Таким образом, он пришел к необходимости рассматривать переменный коэффициент прироста. В результате этого процесс становился *нелинейным*, что коренным образом изменило его динамическое поведение.

Прошло более ста лет, прежде чем были осознаны все вытекающие из этого проблемы. При малых коэффициентах прироста, очевидно, ничего особенного не произойдет: численность популяции будет просто регулироваться так, чтобы достичь оптимального значения X , увеличиваясь когда она меньше его, и уменьшаясь, когда больше. Однако, как только коэффициент превысит 200%, нас ожидают сюрпризы.

Существуют ли в природе такие большие коэффициенты прироста? Конечно, человеческая популяция так быстро не растет, но для определенных видов насекомых такой коэффициент не является необычным. Важно то, что в последние 20 лет закон Ферхюльста нашел применение для значительно более широкого круга явлений, чем представлял себе сам Ферхюльст. Эдвард Н. Лоренц, метеоролог из Массачусетского технологического института, обнаружил в 1963 году, что именно этот закон описывает некоторые свойства турбулентного потока, в частности когда коэффициент велик. Затем теоретические исследования по лазерной физике, гидродинамике и кинетике химических реакций продемонстрировали принципиальный характер этого закона, и предсказанные им сценарии были обнаружены в экспериментах.

Но как же ведет себя процесс Ферхюльста, когда коэффициент становится большим? Подробный анализ дан в специальном разд. 1.

Упомянем только наиболее важные результаты. Когда параметры роста превысят 200%, становится невозможным достижение оптимальной численности X . Когда популяция мала, энергичный рост неизменно приводит к превышению оптимального размера, что вызывает ответную реакцию, в результате которого популяция уменьшается до размеров, значительно меньших X . После этого появляются устойчивые колебания между двумя размерами, большим и меньшим (см. рис. 18).

Когда параметр роста превысит 245%, происходит дальнейшее усложнение поведения. Колебания происходят сначала между 4, затем 8, затем 16 различными величинами численности популяции и так далее, до тех пор пока для параметров, больших 257%, не *возникает хаос*.

Что мы понимаем под хаосом? Попросту говоря, система выходит из-под контроля. Не существует способа предсказать ее поведение на длительное время. Беспорядочные скачки вверх и вниз на рис. 20 упорно продолжают и никогда не превратятся в упорядоченную последовательность. Чтобы понять удивление, которое испытал Лоренц при этом открытии, напомним, что никакой неопределенности не предполагается. Процесс по-прежнему описывается законом Ферхюльста, последовательность *определена* своим начальным значением — и все же ее поведение *невозможно* предсказать, остается предоставить процессу развиваться самому по себе.

Эта очень тонкая ситуация требует некоторого более подробного объяснения. Утверждение о том, что последовательность определена своим начальным значением, подразумевает возможность определения последующих значений с бесконечной точностью. Это является верным только «в принципе». Любое реальное описание начальной величины, например ее представление в компьютере, можно получить только с конечной точностью. Изучаемый процесс можно сравнить с получением информации: чем дольше мы

его будем наблюдать, тем лучше будем знать в ретроспективе точную величину начального значения.

И все же наиболее впечатляющим в динамике Ферхюльста является не хаос как таковой, а *сценарий, по которому порядок превращается в хаос*. Имеет ли смысл точно определять значения параметров роста, при которых происходят бифуркации от колебаний периода 2^n к колебаниям периода 2^{n+1} ? Кому это нужно?

Но педантичность часто стояла у колыбели важных открытий. Иоганн Кеплер не открыл бы эллиптической формы орбит движения планет, если бы не был обеспокоен небольшим отклонением в 8 угловых минут орбиты Марса от предсказаний теории Птолемея. Фридрих Вильгельм Бессель не смог бы определить расстояние от Солнца до ближайших неподвижных звезд, не научившись точнейшему использованию чисел и таблиц во время своего ученичества у одного из бременских торговцев. Научная работа всегда зависит от самого скрупулезного внимания к деталям даже тогда, когда становится ясной качественная сторона. А как известно всем, кому приходилось искать ошибки в какой-либо программе, для этого нет лучшего инструмента, чем компьютер.

При точном анализе точек бифуркации в процессе Ферхюльста обнаруживается закономерность, имеющая исключительное значение в мире нелинейных явлений. Закономерность касается длин интервалов значений параметра, при которых устойчивым является периодическое движение с некоторым определенным периодом. Эти интервалы сокращаются при каждом удвоении периода, причем множитель, характеризующий сокращение, приближается к *универсальному* значению

$$\delta = 4.669201660910\dots,$$

когда период растет.

Это число, первые десятичные знаки которого были впервые опубликованы Гроссманном и Томэ в 1977 году, появляется снова и снова во многих других процессах. Оно является такой же характеристикой для сценариев удвоения периодов, как число π для отношения длины окружности к ее диаметру. Это число называют теперь «числом Фейгенбаума». Митчел Фейгенбаум проделал вычисления на своем калькуляторе в Лос Аламосе для целого ряда различных процессов и получил в каждом случае один и тот же множитель. Он открыл универсальность этого числа.

Это открытие вызвало невероятную активность ученых во многих областях науки. Было поставлено огромное число экспериментов, показавших, что сценарий удвоения периода действительно наблюдается во многих естественных системах. Это и начало турбулентности в потоке жидкости, и нелинейные колебания в химических или электрических сетях, и даже переход нормального ритма сердца в угрожающую жизни фибрилляцию. И мы просто не в состоянии перечислить все группы в США, Франции, ФРГ или где-либо еще, продемонстрировавшие, что существенные аспекты динамики сложных систем можно свести к поведению, пример которого дает уравнение Ферхюльста.

На теорию это оказало не менее сильное воздействие. Математики все еще пытаются до конца понять эту неожиданную универсальность. Но, по видимому, более важно, что она породила надежду на то, что нелинейные явления не лежат за пределами систематизации и научной классификации.

Одним из первых, кто осознал важность изучения процесса Ферхюльста, был биолог Роберт М. Мэй. Еще в 1976 году он писал:

Поэтому я настоятельно советую, чтобы люди познакомились, скажем (с уравнением Ферхюльста), на раннем этапе своего обучения математике. Это уравнение можно изучать феноменологически, итерируя его на калькуляторе или даже вручную. Его изучение даже не требует всего множества сложных понятий, какие используются в элементарном анализе. Такое изу-

чение очень обогащало бы интуитивные представления учащегося о нелинейных системах.

Для всех нас было бы лучше, если бы не только в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно больше людей поняло, что простые нелинейные системы не всегда обладают простыми динамическими свойствами.

Пограничные стычки: хаос, возникающий из конкуренции

Для понимания нелинейных явлений бифуркационный сценарий приобретает фундаментальное значение. Анализ процесса Ферхюльста превратил идею детерминированного хаоса в важный предмет обсуждения и выявил некоторые универсальные свойства сложных динамических процессов. Универсальность следует истолковывать правильно. Конечно, существуют и другие пути к хаосу; на самом деле были открыты и другие сценарии столь же общего характера. Понятие универсальности отчасти отражает тенденцию физиков и математиков использовать слова, звучащие многозначительно. На самом деле оно означает, что некоторое поведение является *типичным*, и это более или менее удивительная находка среди всего многообразия систем.

Крайне желательно установить принципы, характеризующие соотношения между индивидуальными сценариями Бенуа Б. Мандельброту это удалось сделать в 1980 году, когда он обнаружил множество, носящее теперь его имя. Это не просто причудливая фигура, которая кому-то кажется прекрасной, а кому-то безобразной; множество Мандельброта воплощает в себе более общий, чем универсальность Фейгенбаума, принцип перехода от порядка к хаосу. Здесь, как это часто бывает в математике, обнаруживается связь эстетической привлекательности с фундаментальным значением.

Идея, использованная Мандельбротом, состояла в том, чтобы вместо действительных чисел рассмотреть *комплексные* и наблюдать процесс $x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \dots$ не на прямой, а в плоскости. Читателю, не знакомому с комплексными числами, отчаиваться здесь не стоит: достаточно лишь представить себе, что правило $x_n \mapsto f(x_n)$ указывает, куда должна переместиться точка в *плоскости*, а не на прямой. Конкретный вид правила не является существенным, поскольку, как мы увидим, различные правила могут порождать то же самое множество Мандельброта. Более важным является то, что переход от порядка к хаосу описывается с более общей точки зрения. В центре внимания оказалась природа *границ* между различными областями. Можно представить себе центры — *аттракторы*, — которые ведут борьбу за влияние на плоскости; любая начальная точка x_0 либо в течение процесса приходит к тому или другому центру, либо лежит на границе и не может принять определенное решение. С изменением параметра изменяются и области, принадлежащие аттракторам, а вместе с ними и границы. Может случиться, что граница превратится в пыль, и такой распад представляет собой один из наиболее важных сценариев.

Процесс Мандельброта математически эквивалентен процессу Ферхюльста. Формула такая же простая:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 + c.$$

Выбрав произвольное число x_0 , возведем его в квадрат и прибавим константу c для того, чтобы получить x_1 ; затем повторим вычисления для того, чтобы получить x_2 , x_3 , и т. д. Это под силу каждому. Но никто не ожидал, что в таком итерировании может скрываться столько загадочной красоты.

Давайте начнем с простейшего из возможных значений константы c , а именно $c = 0$. Тогда при каждой итерации вычисляется точный квадрат числа: $x_0 \mapsto x_0^2 \mapsto x_0^4 \mapsto x_0^8 \mapsto \dots$. Для этой последовательности в зависимости от x_0 имеются три возможности:

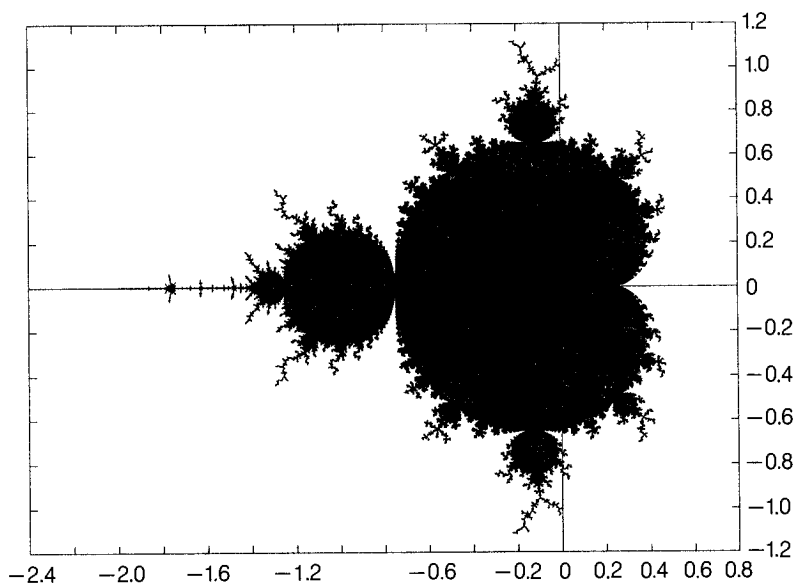


Рис. 2. Множество Мандельброта для процесса $x \rightarrow x^2 + c$. Показана часть комплексной c -плоскости $-2.25 < \operatorname{Re} c < 0.75$, $-1.5 < \operatorname{Im} c < 1.5$. Изображенная фигура отражает соответствие различным значениям параметра c различным типам границ.

1. Числа получаются все меньшими и меньшими, их последовательность приближается к нулю. Мы говорим, что нуль является *аттрактором* для процесса $x \rightarrow x^2$. Все точки, находящиеся на расстоянии меньше 1 от этого аттрактора, движутся к нему.

2. Числа становятся все большими и большими, стремясь к бесконечности. Мы говорим, что бесконечность также является аттрактором для этого процесса. Все точки, лежащие на расстоянии больше 1 от нуля, движутся к бесконечности.

3. Точки находятся и продолжают оставаться на расстоянии 1 от нуля. Их последовательности лежат на границе двух областей притяжения, в данном случае на окружности единичного радиуса с центром в нуле.

Ситуация ясна. Плоскость делится на две зоны влияния, а границей между ними является просто окружность.

Сюрпризы начнутся, когда мы выберем ненулевое значение c , например $c = -0.12375 + 0.56508i$. Здесь для последовательности $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ также имеются три из перечисленных выше возможностей, но внутренний аттрактор (отмеченный точкой на рис. 3) уже не является нулем, а граница уже не является гладкой. На рис. 3 видно, что эта граница сильно изломана. Причем под лупой она выглядит столь же изломанной, как и без нее. Именно это Б.Мандельброт назвал *фрактальной структурой* такой границы. Она напоминает линию морского берега, многие естественные границы, которые становятся явно тем длиннее, чем более мелкий масштаб используется для их измерения. Одной из характерных особенностей этой границы является ее самоподобие. Если взглянуть на любой из ее поворотов или заливов, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет разные размеры.

Границы такого рода в математике называют *множествами Жюлиа*. Во время первой мировой войны французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату изучали их свойства для более общего случая рациональных отображений в комплексной плоскости (см. специальный разд. 2).

Их увлекательная деятельность оставалась в основном неизвестной даже

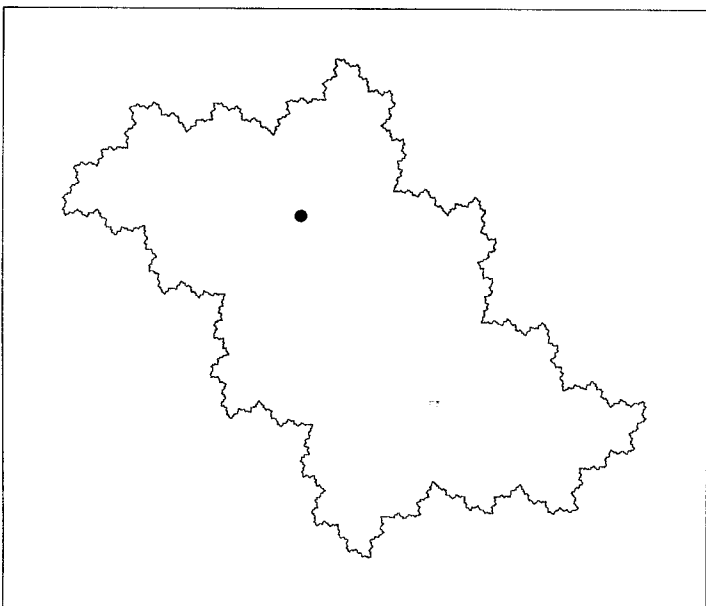


Рис. 3. Бассейн притягивающей неподвижной точки.

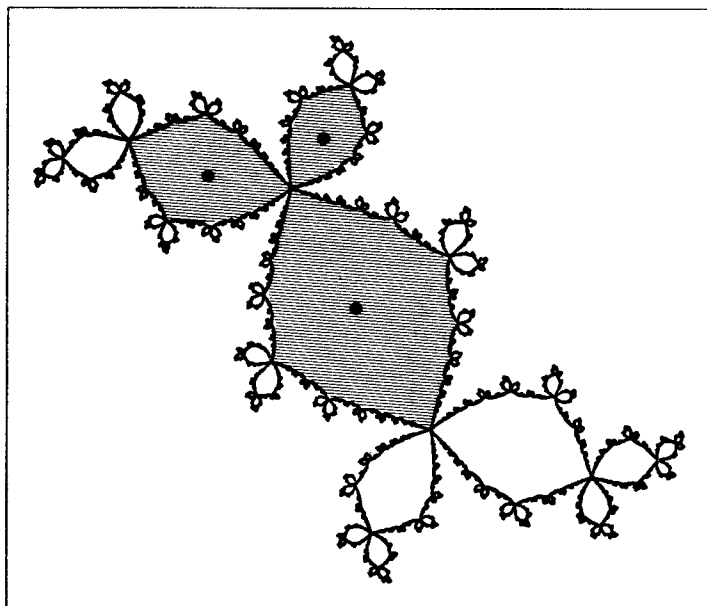


Рис. 4. Бассейн притягивающего цикла периода 3.

для большинства математиков, поскольку в отсутствие современной компьютерной графики было почти невозможным передать их тонкие идеи. Например, Жюлиа и Фату было хорошо известно о самоподобии, они установили, что всю границу можно восстановить по любой произвольно малой ее части, используя конечное число итераций формулы $x \mapsto x^2 + c$ (ср. со свойством (2.8)). Но насколько проще понять это свойство, глядя на изображения, подобные показанным на рис. 3, 4, 6—15, чем с помощью рассуждений о смысле такого утверждения.

Другой общей чертой множеств Жюлиа является то, что они заключают в себе невероятно сложную динамику. На границе процесс хаотичен настолько, насколько возможно. Этого нельзя увидеть при помощи статического изображения на рис. 3, но цветное изображение на фото 20 дает большее представление об этом. Множество Жюлиа содержит неустойчивую неподвижную точку отображения $x \mapsto x^2 + c$ вместе со всеми ее прообразами; оно содержит и бесконечное число неустойчивых периодических последовательностей также вместе с прообразами, и, кроме всего этого, оно содержит хаотические последовательности точек, которые никогда не стремятся к какой-нибудь регулярности. Это можно только целиком наблюдать на дисплее компьютера «in vivo». Можно также перевести изображение в звуки и испытать на себе влияние этой «музыки». Одним из очаровывающих эффектов является так называемая *прерывность*, которая возникает, когда процесс попадает в окрестность периодической точки: одна и та же тема повторяется более или менее часто. Когда она наконец прекращается, ухо ощущает особую напряженность. Соответствующий зрительный эффект не является таким сильным.

Если опять выбрать новое значение c , скажем $c = -0.12 + 0.74i$, то получим рис. 4. Здесь множество Жюлиа уже представляет собой не единственную деформированную окружность, а состоит из бесконечного числа деформированных окружностей, образующих, однако, связное множество. Внутренние точки этого множества притягиваются не одной неподвижной точкой, а циклом из трех точек, отмеченных на рисунке более крупно.

Существует правило, указывающее, какой вид имеет множество Жюлиа

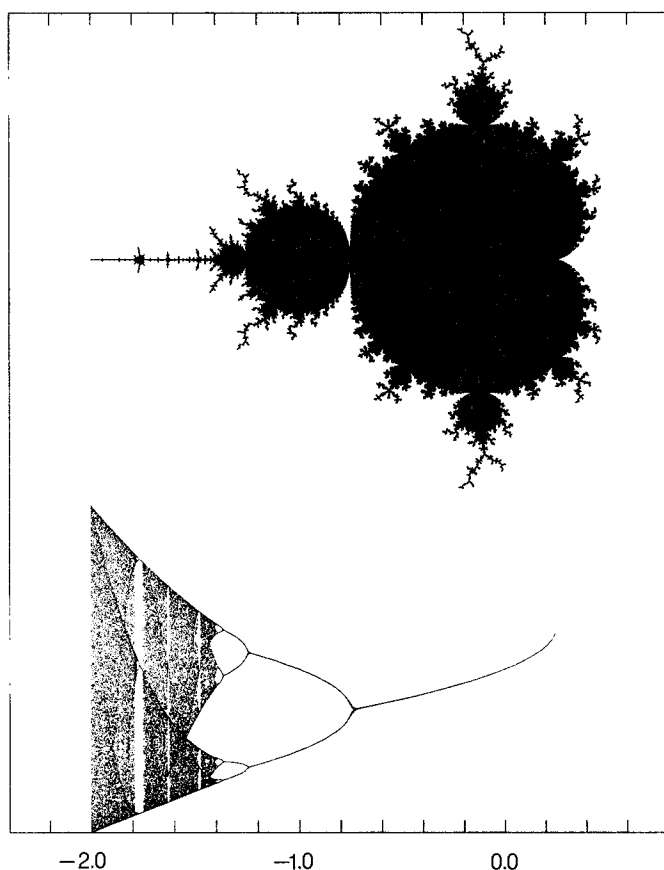


Рис. 5. Связь между множеством Мандельброта и сценарием удвоения периода, который будет наблюдаться, если менять c как действительный параметр. Бифуркации соответствуют прорастанию почек, периодические окна, разрывающие хаотическую пелену, соответствуют малым копиям множества Мандельброта, расположенным на главной антенне.

при каждом конкретном выборе c . Это правило и приводит к множеству Мандельброта M . Оно представлено на рис. 2 как закрашенная черным цветом часть комплексной c -плоскости. Каждое комплексное число c либо принадлежит черной структуре M , либо нет. Соответствующие множества Жюлиа процесса $x \mapsto x^2 + c$ существенно различаются. Они представляют собой связные структуры, когда c лежит внутри M , и рассыпаются на бесконечное число кусочков, когда c лежит снаружи. Поэтому граница множества M вызывает исключительный интерес. Представим себе некоторый путь в c -плоскости, начинающийся внутри M и заканчивающийся вне его. Если менять c , двигаясь вдоль этого пути, то самые драматические качественные изменения происходят с соответствующими множествами Жюлиа тогда, когда c пересекает границу M : они, как будто взорвавшись, превращаются в облако из бесконечного числа точек. В этом смысле граница множества M определяет момент *математического фазового перехода* для множеств Жюлиа отображения $x \mapsto x^2 + c$. Кроме того, различным частям M отвечают некоторые качественные утверждения о множестве Жюлиа, имеющие место для значения c из этих частей. Например, кардиоида, очерчивающая главное тело, содержит все значения c , при которых множество Жюлиа будет более или менее деформированной окружностью, охватывающей область притяжения некоторой неподвижной точки (рис. 3).

Аттрактор, сопоставляемый каждой почке на M по хорошо известной схеме, представляет собой некоторый цикл определенного периода. Значение c , соответствующее рис. 4, есть центр самой большой «луковки» сверху от основной части M . Цикл периода три появляется в результате трифуркации неподвижной точки, когда параметр c переходит из основной части в соответствующую почку. Ферхюльстов сценарий удвоения периода наблюдается на действительной оси. Период два будет устойчивым внутри большой почки, которая включает интервал $-1.25 < c < -0.75$ на действительной оси и примыкает к основному телу с левой стороны. Точка $c = -2$ является крайней точкой антенны множества M и соответствует значению $r = 3$ для процесса Ферхюльста (см. специальный разд. 1). Рисунок 5 иллюстрирует эту связь и наглядно показывает, насколько более полную картину дает выход Мандельброта в комплексную плоскость по сравнению с анализом на действительной оси.

На что же похоже множество Жюлиа для значений c из какой-либо почки множества M , примыкающей к основному телу? Один из примеров показан на рис. 6.

Значение $c = -0.481762 - 0.531657i$ соответствует месту прорастания почки, дающей устойчивые циклы периода 5. Все пять точек таких циклов отщепляются от жирной точки на рис. 6, когда c переходит внутрь почки. В этой точке ветвления множество Жюлиа стягивает теперь уже маргинально устойчивый аттрактор. Это называется *параболическим случаем* динамики. На рис. 8 и 9 показаны еще два примера множеств Жюлиа подобного вида.

Помимо точек прорастания почек, основное тело множества Мандельброта обладает граничными точками совершенно иных типов. Для $c = -0.39054 - 0.58679i$ получим рис. 7; в этом случае неподвижная точка тоже будет маргинально устойчивой. В отличие от параболического случая граница не подходит к неподвижной точке, да и остальные точки при движении ее тоже не достигают. Окружности, охватывающие неподвижную точку, являются *инвариантными*, т. е. выбрав начальную точку на какой-

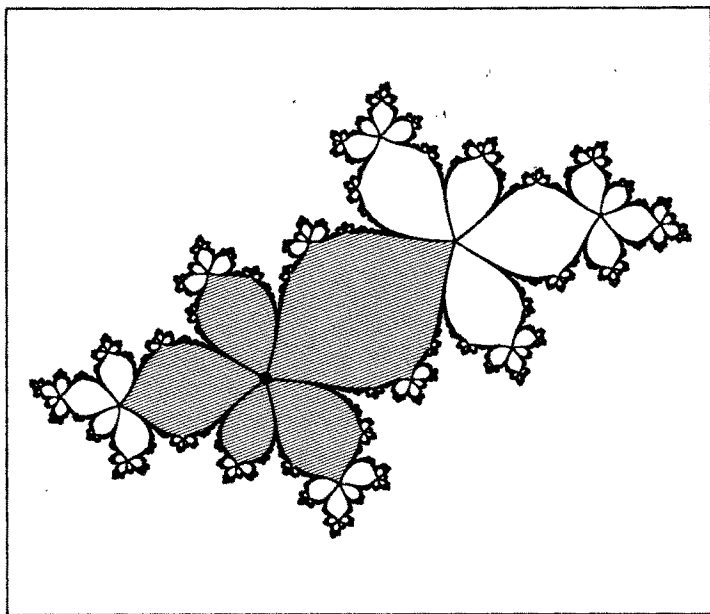


Рис. 6. Параболический бассейн около неподвижной точки.

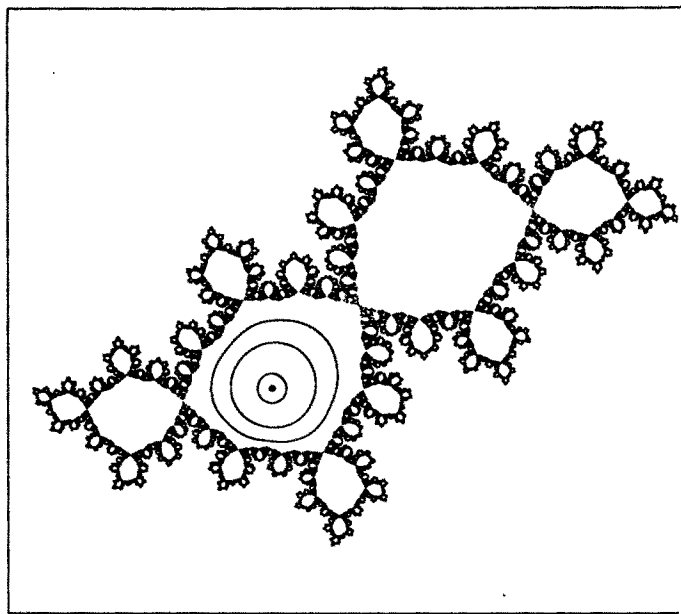


Рис. 7. Диск Зигеля около неподвижной точки и его прообразы.

нибудь из этих окружностей, мы ее уже никогда не покинем при последующих итерациях. Внутри области, ограниченной множеством Жюлиа, процесс протекает следующим образом: сначала точки перескакивают из меньших, периферийных, почек в большие до тех пор, пока не попадут внутрь диска, содержащего неподвижную точку. Этот диск назван *диск Зигеля* в честь немецкого математика Карла Людвига Зигеля. После того как точки попадают туда, они начинают просто вращаться вокруг неподвижной точки по своим инвариантным окружностям.

Эти четыре примера иллюстрируют все типичные случаи, когда граница, порожденная процессом $x \mapsto x^2 + c$, охватывает область с внутренними точками. Итак:

— Если c лежит внутри основного тела множества Мандельброта, то некоторая фрактально деформированная окружность охватывает единственную притягивающую неподвижную точку (рис. 3).

— Если c лежит внутри одной из почек, то множество Жюлиа состоит из бесконечного числа фрактально деформированных окружностей, охватывающих точки периодического аттрактора и их прообразы (рис. 4, 10).

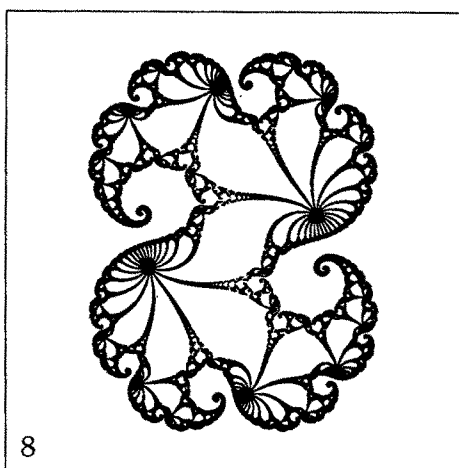
— Если c является точкой прорастания почки, то имеет место параболический случай; граница имеет усики, дотягивающиеся до маргинально устойчивого аттрактора (рис. 6, 8, 9).

— Если c является любой другой точкой границы кардиоиды или почки (имеются некоторые технические условия относительно иррациональности точки), то мы имеем диск Зигеля (рис. 7).

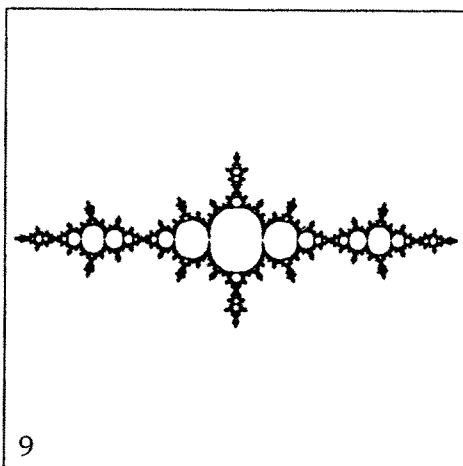
В фундаментальной математической работе в 1983 году Деннис Салливан показал, что указанные четыре случая описывают все возможные характерные структуры, которыми может обладать область, ограниченная множеством Жюлиа, за исключением одной. Пятая возможность, так называемые *кольца Эрмана*, не реализуется в случае $x \mapsto x^2 + c$; хотя и доказано, что она реализуется в других случаях, никто ее никогда не наблюдал (см. специальный разд. 3).

На фотографиях 18, 20, 24 цвет был использован, чтобы продемонстрировать внутреннюю структуру областей притяжения (а также диска Зигеля на фото 22, 25). На фото 20 показан случай, в котором вдобавок к аттрактору на бесконечности имеется еще одна неподвижная точка. Цветовая градация показывает, сколько итерационных шагов отображения $x \mapsto x^2 + c$ требуется для того, чтобы та или иная точка попала в некоторый заранее выбранный маленький диск, содержащий аттрактор. Один и тот же цвет означает одно и то же динамическое расстояние от соответствующего центра притяжения. Таким образом, во внешней области окраска количественно характеризует движение по направлению к бесконечности, в то время как внутренняя окрашена в соответствии с направлением ограниченных движений этой области. На фото 24 представлен притягивающий цикл периода 3, на фото 18 — цикл периода 11. В случае диска Зигеля (фото 22) линии уровня движения параллельны инвариантным окружностям.

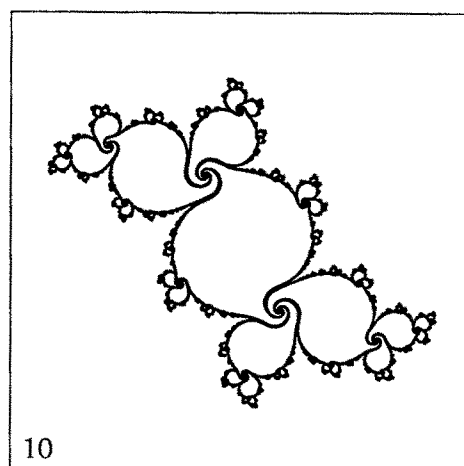
Эти примеры отнюдь не исчерпывают список всех возможных структур множеств Жюлиа; имеются и другие возможности. Как видно на рисунках, множество Мандельброта M окружено иглоподобными, более или менее разветвленными и изогнутыми антеннами. Если мы поместим c на самый конец одной из таких антенн, то получим и множества Жюлиа подобной формы. На рис. 12 показан пример $c = i$. Такие дендриты не имеют внутренней структуры; аттракторов, отличных от единственного аттрактора на бесконечности, нет. Здесь множество Жюлиа представляет собой границу одной-единственной области притяжения и содержит те точки, которые не приближаются к этому аттрактору. До тех пор пока c принадлежит M , множество Жюлиа остается связным. Согласно теореме Адриена Дуади из Парижа и Джона Хамал Хаббарда из Корнелльского университета, множество Мандельброта также связно (см. специальный разд. 4).



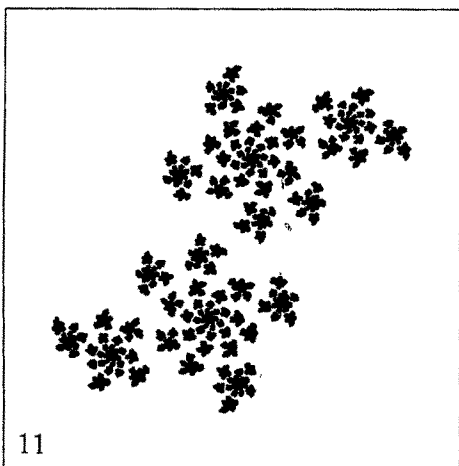
8



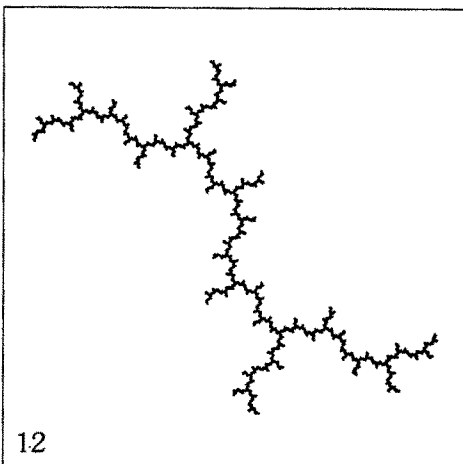
9



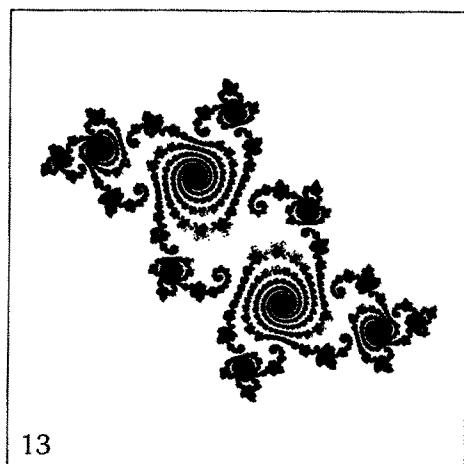
10



11



12



13

Рис. 8—13. Типичные множества Жюлиа для процесса $x \rightarrow x^2 + c$.

Рис. 8. Параболический случай; при подходящем произвольно малом изменении c маргинально устойчивая неподвижная точка превращается в притягивающий цикл периода 20.

Рис. 9. Параболические случаи $c = -1.25$; $c > -1.25$: притягивающий цикл периода 2; $c < -1.25$: притягивающий цикл периода 4.

Рис. 10. Связное множество Жюлиа (притягивающий цикл периода 3) незадолго до превращения в канторово множество (см. рис. 13).

Рис. 11. Пыль Фату.

Рис. 12. Дендрит, $c = i$.

Рис. 13. Канторово множество, получающееся из рис. 10 при малом изменении параметра c .

При более внимательном рассмотрении оказывается, что каждая антенна множества M содержит множество маленьких копий большого множества M . Они как бы нанизаны на нити, и между двумя большими копиями имеется еще одна, меньшая, и так далее без конца. Окна, соответствующие устойчивым аттракторам внутри области хаотичности для процесса Фер-

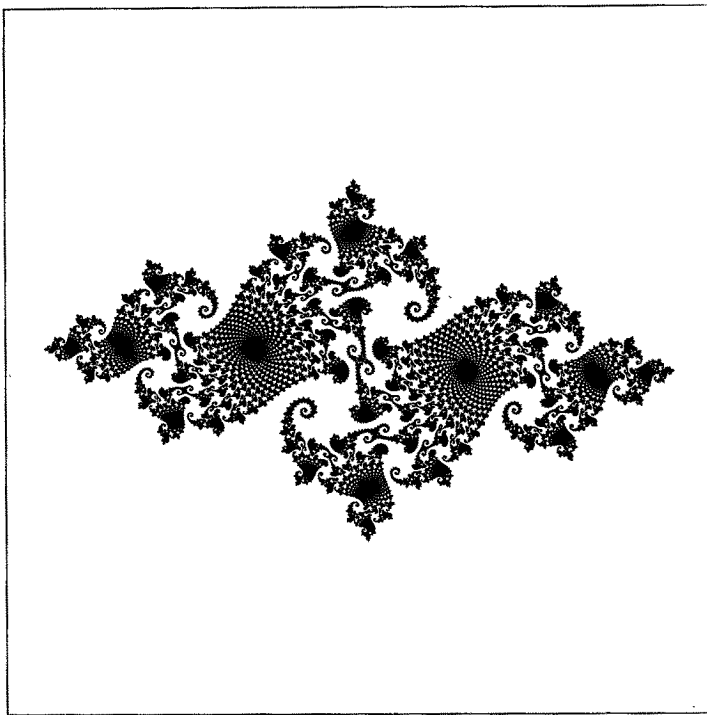
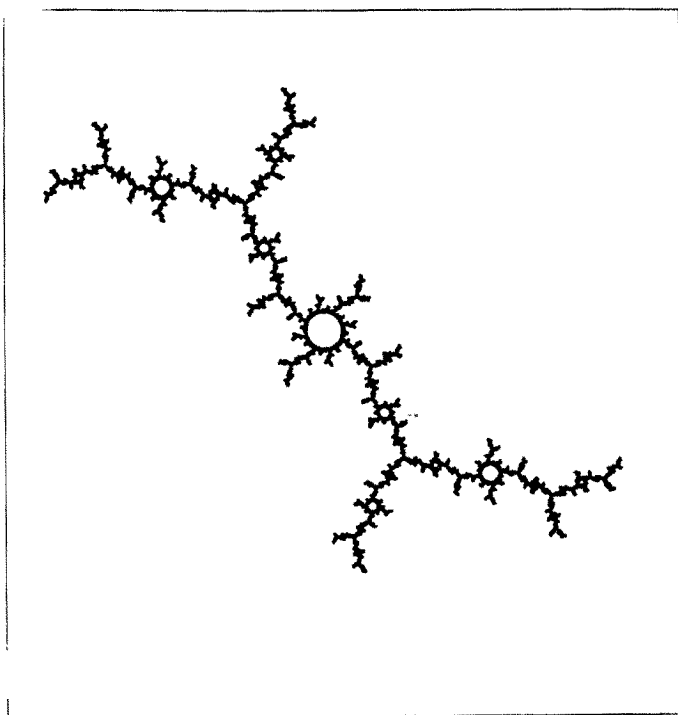


Рис. 14. Дендрит с бусами. Множество Жюлиа для значения s из вторичного множествамножества Мандельброта.

Рис. 15. Множество Жюлиа при некотором значении s из долины морских коньков.

хюльста, являются сечениями этих наростов, что отчетливо видно на рис. 5. Если поместить s в одну из этих миниатюрных копий M , то соответствующее множество Жюлиа окажется некоторой комбинацией дендрита и множества Жюлиа, полученного для соответствующего значения s из основной части M ; при этом последнее копируется бесконечное число раз и насаживается на дендрит. На рис. 14 показан пример для s , принадлежащего той части множества Мандельброта, которая представлена на фото 27.

Можно наконец взять значение s вне M . Как и в случае чисто дендритовой структуры, единственным аттрактором будет бесконечность, но теперь множество Жюлиа распадается в облако точек, называемое пылью Фату. Эта пыль становится все мельче с удалением точки s от M . Если s находится вблизи границы M , то пыль образует завораживающие фигуры, примеры которых показаны на рис. 11, 13 и 15 и которые всегда фрактальны, самоподобны и несут в себе хаотическую динамику.

Морфология комплексных границ

Если разнообразие множеств Жюлиа кажется ошеломляющим, то насколько более запутанным казалось бы оно без множества Мандельброта! Этот путеводитель в мире параметров говорит нам о том, какого вида множество Жюлиа следует ожидать для данного значения s . Особенно интересна граница M , поскольку именно она указывает на изменение природы множеств Жюлиа. Когда параметр s покидает множество Мандельброта, множества Жюлиа теряют свою связность, взрываются и превращаются в пыль.

Значительная часть наших рисунков получена для этой пограничной зоны. Мы обнаружили там фантастический мир, богатство форм которого контрастирует почти на грани абсурда с простотой формулы $x \rightarrow x^2 + c$. Но не является ли это обычным случаем, когда разнообразие исключительно буйно расцветает на границах? Простые контуры, отражающие противоборство противоположных принципов, являются исключением. Каждый большой конфликт сопровождают тысячи малых. Таким же образом и типичной структуре границы соответствуют аналогичные структуры все меньших и меньших масштабов.

Качественный скачок, происходящий на границе множества Мандельброта, влияет и на примыкающую к границе область. На простом черно-белом изображении этого не видно, (если, например, черный цвет соответствует связным, а белый — разрывным множествам Жюлиа). Сложную динамическую структуру пограничной области можно адекватно отразить только в цвете. Даже 256 использовавшихся для наших рисунков оттенков смогли только дать слабый намек на действительную динамику. Чтобы понять ее истинную сложность, требуется интерактивное экспериментирование на графическом терминале.

Каким образом раскрашивается окрестность множества M ? Представим себе, что множество изготовлено из металла и несет на себе электрический заряд. Тогда его поверхность имеет постоянный электрический потенциал, скажем 1000 В. В области, окружающей проводник, потенциал падает до нуля, и мы отмечаем линии постоянного напряжения, так называемые эквипотенциальные линии (рис. 16). Например, линия, соответствующая потенциалу в 1 В, настолько далека от проводника, что выглядит почти окружностью, так как с такого расстояния M кажется почти точечным зарядом. Линия 900 В, напротив, несколько напоминает форму M , а линия 999 В уже довольно точно повторяет его контуры. Раскраска наших рисунков соответствует этим линиям. Все точки, лежащие между двумя такими линиями,

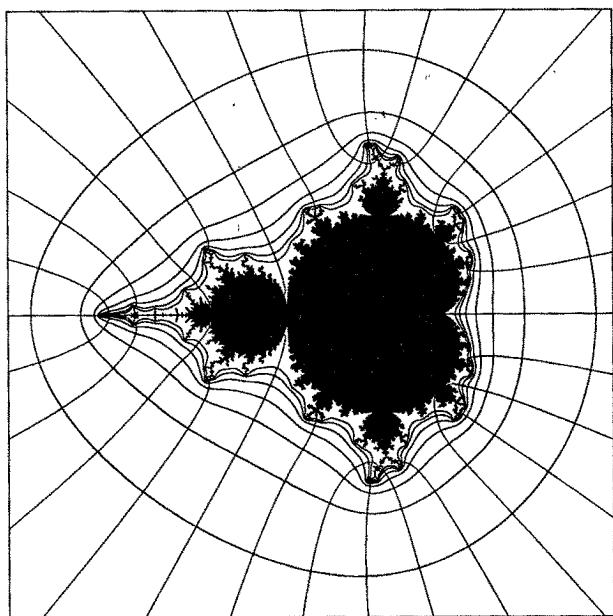


Рис. 16. Заряженное множество Мандельброта с эквипотенциальными линиями и силовыми линиями поля.

окрашены одинаково. Разные цвета дают контурную карту электростатического потенциала между границей M и бесконечностью.

Какое же отношение имеют эти эквипотенциальные линии к динамике процесса $x \rightarrow x^2 + c$? В 1983 году А. Дуади и Дж. Хаббард доказали удивительный математический факт, который говорит о том, что эквипотенциальные линии точно отражают динамику критической точки $x = 0$. Эквипотенциальные линии являются линиями одинакового времени убегания в бесконечность начальной точки $x_0 = 0$ (см. специальный разд. 4).

Такое соответствие между электростатической картиной и динамикой подсказывает простой способ вычисления контурных линий на компьютере. Те значения c , при которых критической точке требуется данное число итераций, чтобы оказаться вне круга радиусом 1000, заполняют промежуток между двумя эквипотенциальными линиями. По мере приближения к границе M необходимое число итераций увеличивается. Точка все большее и большее время вынуждена блуждать извилистыми путями вблизи множества Жюлиа.

Цветные фотографии 26—54 и 99—101 показывают увеличенные части границы M . (Черно-белые изображения помогают определить расположение цветных изображений на M .) Трудно поверить в то, что формула $x \mapsto x^2 + c$ содержит такую массу структур. Можно ли представить более поразительную демонстрацию огромной сложности, заключенной в простейшем законе?

Давайте теперь поразмыслим над рисунками и сделаем некоторые наблюдения. Очевидно, что каждое положение на M задает лейтмотив. При движении вдоль границы M наблюдаются постепенные вариации лейтмотива, например, если начать с рамки на фото 31 и выбирать последовательно все более изогнутые отростки, пока не возникнет морской конек на фото 36. В любом месте главная тема повторяется в бесконечном множестве вариаций. Это видно из серии наблюдений в «долине морских коньков» (фото 34—50), где вплоть до миллионнократного увеличения обнаруживаются все новые и новые созвездия «хвостов» и «глаз» морских коньков.

Другой весьма примечательной особенностью является подобие структуры некоторых деталей множества Мандельброта форме соответствующего множества Жюлиа. Множество Жюлиа на рис. 15 принадлежит значению c около хвоста морского конька (фото 42). Качественное подобие форм очевидно. Оно является настолько глубоким, что число спиральных отростков, выходящих из глаз, в обоих случаях равно 29.

В многообразии лейтмотивов морфологии множеств Жюлиа присутствует одно постоянство: само множество Мандельброта, которое проявляется снова и снова, различных размеров, но всегда одной и той же формы. Можно вспомнить генетическую организацию высших организмов: каждая клетка содержит полный геном, совокупность всех форм проявления, но в любой точке организма на самом деле проявляется только некоторая малая часть этих форм.

Мы отметили ранее, что доказана связность множества M : ни одна из частей M не отделена от основного тела, но все они связаны вместе исключительно тонкими линиями. Именно в этом отношении нас интригуют фото 58—60. Мельчайшая деталь границы M , показанная в трех разных вариантах раскраски, дает представление о изумительной системе мостов, необходимой для обеспечения связности.

Мы приглашаем читателя, знакомясь с этими картинками, попытаться найти свои собственные ассоциации и просим извинить нас, если наши интерпретации кажутся слишком фантастическими. Естественно, у нас имеется некоторое пристрастие к результату, который как научная работа отнял много часов компьютерного времени, да и для создания цветной композиции потребовал с нашей стороны немалых усилий. И все же мы считаем, что причиной нашего восхищения является существо предмета, а именно

фантастическая феноменология этих сложных границ, так и приглашающих к эстетическому наслаждению. Мы допускаем, что некоторые свойства, относящиеся к рисункам, не очень естественны. Бесконечная микроскопическая глубина, на которую, кажется, простирается самоподобие, является математической конструкцией, не существующей в реальном мире. Физические объекты редко оказываются самоподобными при увеличении более чем на четыре порядка. В биологии новые принципы самоорганизации проявляются обычно при увеличении на 2 порядка (макромолекулы имеют диаметр, примерно равный 100 атомам, простые клетки — диаметр около 100 макромолекул и т. д.). Следовательно, процесс $x \mapsto x^2 + c$ не дает точного описания реального мира. Но мы и не пытались утверждать обратное! Каждый закон имеет свою область применения, которую нужно точно определить. Область применимости линейных законов теперь недостаточна, по крайней мере в физике, поэтому появилась необходимость выяснить, как нелинейные законы могут помочь нам понять окружающий мир. На этом пути изучение квадратичного закона $x \mapsto x^2 + c$ имеет фундаментальное значение. Открытие Мандельбротом универсальной фигуры M , несомненно, является событием, влекущим за собой серьезные последствия для теории динамических систем.

Сложные ньютоновы границы

Сэр Исаак Ньютон заложил основы классической механики, оптики, исчисления бесконечно малых. Но, кроме этих основ естественных наук, он открыл еще множество менее известных методов, с пользой применяющихся и сегодня. Например, так называемый алгоритм Ньютона отыскания корней уравнения $f(x) = 0$ сейчас находит даже большее применение, чем раньше, поскольку вычислительные машины дают возможность с помощью этого метода получить результат значительно быстрее и точнее, чем это может сделать человек. Некоторая часть рисунков этой книги посвящена именно этому методу.

Алгоритм Ньютона — это некий остроумный прием. Он трансформирует задачу нахождения решений уравнения $f(x) = 0$ в динамический процесс, в котором различные решения конкурируют за начальные предположения. Чтобы начать, не требуется знать точного решения. При любом начальном значении алгоритм Ньютона приводит к значению, более близкому к одному из решений. Решения действуют как центры притяжения поля сил (одна из любимых Ньютоном тем!)

Насколько далеко простирается влияние притяжения различных центров и на что похожа граница между ними? Впервые этим вопросом всерьез занялся лорд Артур Кэли в 1879 году; но в конце концов ему пришлось оставить этот вопрос, поскольку он оказался слишком сложным. Подробности анализа Кэли и его дальнейшее развитие представлены в специальном разд. 6. Здесь все же следует отметить, что проблема, с которой столкнулся лорд Кэли, явилась для Жюлиа и Фату начальной точкой в построении великолепной теории итераций рациональных функций на комплексной плоскости.

Мы не упомянули еще одну особенность множеств Жюлиа, хотя именно она придает особое очарование таким примерам, как картинки магнитных полей на фото 6 и 10. Независимо от числа аттракторов, расположенных на плоскости, каждая точка множества Жюлиа одновременно касается областей притяжения всех аттракторов. В случае трех аттракторов каждая точка границы будет местом, в котором встречаются все три области! Все это звучит неправдоподобно, но «планета» на фото 75 показывает, как это происходит. Желтым, голубым и серым цветом окрашены определяемые алгоритмом Ньютона области влияния для корней некоторого полиномиального уравнения. Где бы ни встретились, чтобы образовать границу, две

области (например, окрашенные в желтый и голубой цвета), третья область (серая) направляет туда цепочку своих сторожевых постов. Чтобы эти сторожевые посты не сформировали двусторонние границы со своими соседями, они в свою очередь окружаются цепочками островов, образуя структуры, повторяющиеся вновь и вновь до бесконечно малых размеров. Маленькая луна на фото 75 показывает обратную сторону планеты. На фото 76 та же планета раскрашена по-другому. Здесь сложная структура границы (т. е. множества Жюлиа) подчеркивается белым подсвечиванием ее центральной части.

Такое кажущееся почти невозможным построение границ между тремя «странами» можно без каких-либо математических затруднений распространить на случай 4, 5, 6... конкурирующих областей. Граница при этом состоит из точек, где встречаются 4, 5, 6... стран. На фото 61 показана полярная шапка планеты, четыре области которой (красная, зеленая, синяя и желтая) устанавливают границу из четырехсторонних точек. На фото 62 та же самая область окрашена по-другому, а на фото 63 показана другая интерпретация этой структуры. Серые луны, добавленные «для красоты», имеют такой же ландшафт, как и на фото 75.

Фотографии 90—98 показывают шаг за шагом результаты другого способа «оживления». Фото 90 повторяет структуры фото 75 и 76 с границами, составленными из трехсторонних точек. С другой стороны, фото 98 можно уже принять за иную версию фото 61—63, где множество Жюлиа состоит из четырехсторонних точек. Последовательность изображений показывает, как на нашей фантастической планете образуются новые континенты, постепенно превращаясь, сменяя структуру, составленную из трех областей, на структуру, содержащую четыре области. Проценты указывают относительное время, прошедшее от начала оживления. Кажется, что с границами происходят какие-то кризисы: они напоминают линии разломов. На фото 89 в других красках показана исключительно интересная промежуточная структура с фото 94.

Применение метода Ньютона не ограничивается задачами в комплексной плоскости. Преимущество комплексных чисел в том, что для них хорошо разработана используемая нами математическая дисциплина, а именно теория итераций Жюлиа и Фату. Соответствующей теории для действительных функций нет. И все же некоторые из наиболее впечатляющих картин получены как раз в этом контексте. Интересующиеся их математическим содержанием могут прочитать об этом в специальных разд. 8 и 9. Очевидно, что природа фотографий 17, 19, 21, 23, 55—57, 67—74, 87, 88 отлична от природы изображений, рассмотренных до сих пор. Кажется, что процессы в комплексной плоскости порождают узоры почти в стиле барокко, в то время как итерации действительных функций стремятся к созданию более современных форм. Читатель может позабавиться угадыванием, какого вида итерации он рассматривает. Мы точно не знаем, в чем причина различий в восприятии, но должны также признать, что и чисто математические особенности этих последних картин далеко не полностью поняты.

Наука и/или искусство

Когда летом 1983 года у нас появилась мысль о публичной выставке «картин из теории динамических систем», мы думали, что эстетическая привлекательность картин будет достаточной сама по себе. Какими же мы были наивными и как недооценили нашу общественность! То, что было простой забавой при нашей научной работе, вдруг стало темой самых серьезных дискуссий. Зрители потребовали объяснений, захотели понять значение всего этого. На нас вдруг свалилась обязанность объяснять то содержание, которое выражалось этими картинами.

Некоторые наши уважаемые коллеги были обеспокоены тем, что кое-что

может превратиться в искусство, не имеющее научного объяснения. С другой стороны, хорошо известный художник Фриц Мексепер из Ворпсведе, в результате долгих поисков сузивший свое восприятие мира до символических представлений, спрашивал, зачем нам нужны изображения, если у нас есть формула $x \rightarrow x^2 + c$. Искусствовед из газеты Die Zeit не считал возможным назвать наши картины искусством на том основании, что в них отсутствовал элемент выбора или свободы выражения. Одия знакомый ученый, очень серьезно интересующийся поэзией и живописью как средством выражения своих глубоких переживаний, заявил, что в нашей работе не чувствуется участия творческой личности.

Мы не решаемся комментировать такие отклики. «Искусство — это ложь, позволяющая узнать истину», — сказал Пабло Пикассо. Утверждение о том, что наш мир нелинеен и сложен, может быть и не такая уж глубокая истина; наш ежедневный опыт никогда не убеждал нас в обратном. Однако физики и математики, а вслед за ними и другие ученые умудрялись успешно её игнорировать. Сосредоточившись на простых задачах, которые они могли решить, эти ученые оказали сильное влияние на технологию и таким образом радикально изменили облик нашей планеты. Теперь, однако, начинает возникать ощущение, что требуется нечто большее, чем понимание линейных явлений. Почти одновременно в разных дисциплинах растет озабоченность тем, что о следствиях нелинейных законов известно совсем немного. Даже для физиков оказалось сюрпризом существование хаоса в их самых простых уравнениях. Наши картины вселяют оптимизм.

Головоломные на первый взгляд, они все же показывают, что и сложное поддается систематическому изучению и что даже хаос не лишен определенных правил. Регулярность множества Мандельброта вселяет надежду на то, что в мире нелинейных явлений будут найдены более характерные сценарии. Эта надежда основывается на мощи компьютерного эксперимента, который так быстро стал одним из главных источников интуиции и вдохновения.

Но для любого инструмента требуется творческий ум, который найдет ему достойное применение. Было бы несправедливо дискредитировать наши картины, объявив их просто результатом работы машины. Это не так. Их получение предполагает даже избыток свободы выбора как в объективном, так и в субъективном смысле. Как ученые, мы выбираем необходимые нам вопросы, на которые позволяем компьютеру тратить свою мощь. После окончания работы машины мы сталкиваемся с целой горой информации, которую в таком виде усвоить невозможно. Приходится выбирать. Существует много возможностей для того, чтобы придать этой информации подходящий для дальнейшей обработки вид. При распределении цветов, например, очень субъективным является выбор соотношения между отождествлением и различием: использование одного и того же цвета для различных точек приводит к некоторой потере информации; другие же особенности в результате тщательного подбора цветов по их воздействию на наше эстетическое чувство, наоборот, подчеркиваются.

За два года попыток представить нашу работу заинтересованной общественности самых широких кругов мы пришли к выводу, что художественная деятельность тоже может принести научные плоды. Или все клятвенные заверения математиков и физиков-теоретиков об эстетической компоненте их науки — это лишь слова? Американские математики Филипп Дж. Дэвис и Рюбен Херш писали:

Слепота к эстетике математики распространена широко и именно этим объясняется, что математика считается сухой, как пыль, волнующей, как телефонная книга, далекой от жизни, как законоуложение Шотландии XV в. Наоборот, понимание эстетики математики заставляет предмет жить прекрасной жизнью и гореть, как, по-видимому, никакое другое творение человеческого разума.

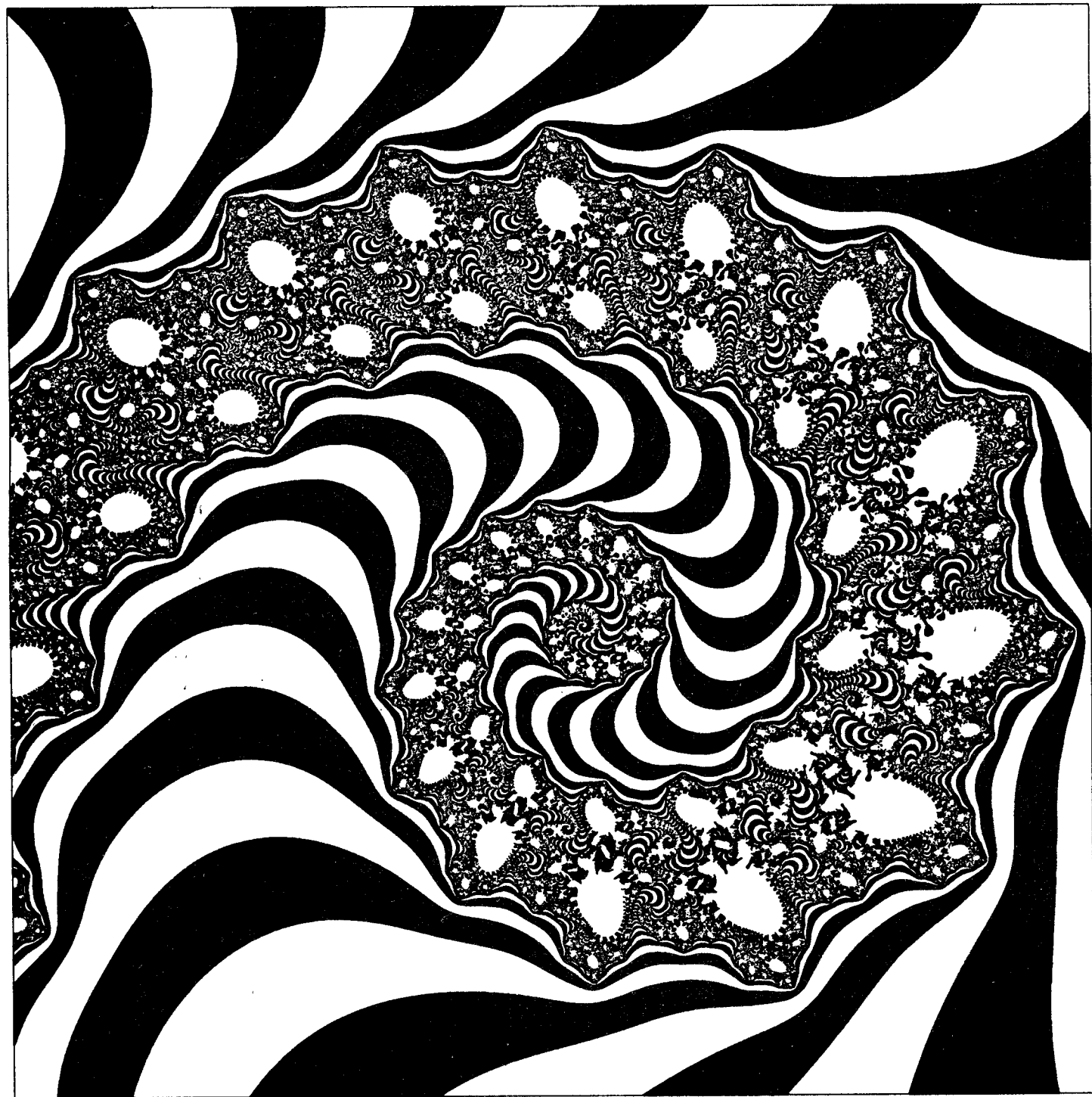
Может ли эта эстетика проявиться иначе чем в самом поиске математического и естественно-научного знания?

Многие отзывы на наши предыдущие выставки укрепляли наше убеждение в том, что сближение искусства и науки могло бы принести им огромную пользу. Возможность такого сближения не следует понимать, как слепое увлечение всем новым и необычным, а следует рассматривать вполне реалистически в формах «новых средств передачи информации», прежде всего компьютера. Компьютер больше не является принадлежностью исключительно науки и техники; подрастает молодое поколение компьютерных акробатов, которые обязательно будут развивать свои художественные амбиции. Пока не ясно, куда заведет такое развитие, и не ясно, может быть, как раз в смысле комплексной динамики: вполне определенное и детерминированное, но непредсказуемое, бурлящее в своей поворотной точке, подобно Фаусту во время омоложения в колдовском логове:

Готовить вытяжку из трав —
Труд непомерного терпенья.
Необходим спокойный нрав,
Чтоб выждать много лет броженья.
Тут к месту кропотливый дар,
Предмет по-женски щепетилен.
Хоть черт учил варить отвар,
Но сам сварить его бессилен.

И. В. Гёте¹⁾

¹⁾ Перевод Б. Л. Пастернака. — *Прим. ред.*



СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ

1. Динамика Ферхюльста

Модель роста популяции

Пусть x_0 — начальная численность популяции, а x_n — ее численность через n лет. Коэффициентом прироста R называют относительное изменение численности за год:

$$R = (x_{n+1} - x_n)/x_n.$$

Если эта величина — константа r , то закон, управляющий динамикой, имеет вид

$$(1.1) \quad x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n.$$

Через n лет численность популяции будет равна $x_n = (1 + r)^n x_0$. Для того чтобы ограничить этот экспоненциальный рост, Ферхюльст заставил коэффициент прироста R меняться вместе с изменением численности популяции. Считая, что численность популяции, заполняющей данную экологическую нишу, не может быть больше некоторого максимального значения X (которое можно положить равным 1), он предположил, что зависящий от размеров популяции коэффициент прироста R пропорционален величине $1 - x_n$, т. е. положил $R = r(1 - x_n)$; константу r мы будем называть параметром роста. Таким образом, когда $x_n < 1$, численность популяции по-прежнему растет, но лишь до тех пор, пока не будет достигнуто значение $x_n = 1$, при котором рост прекращается.

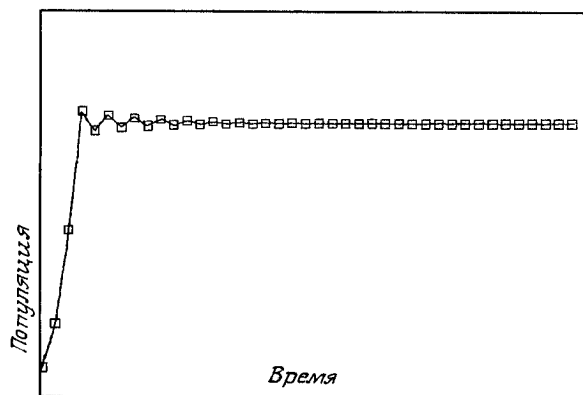
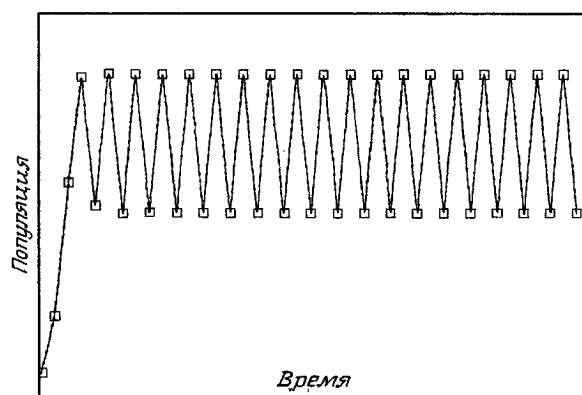
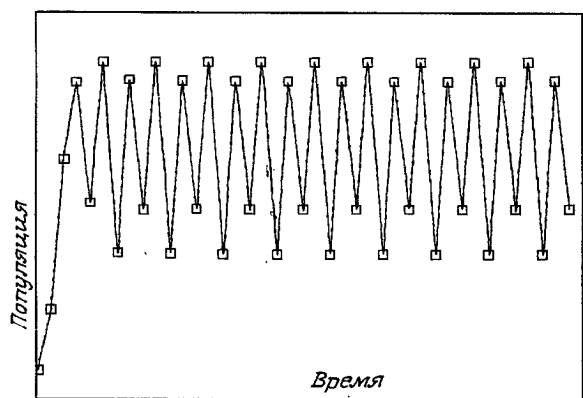
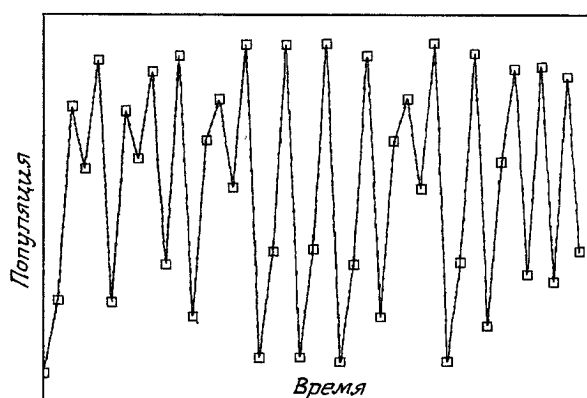
Закон, управляющий динамикой, теперь будет выглядеть так:

$$(1.2) \quad x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2.$$

Для x_0 имеются два значения, при которых численность популяции не изменяется: $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$. Когда $x_0 = 0$, популяция попросту отсутствует с самого начала, а в этом случае вообще никакой рост невозможен. Однако если начальная численность хоть немного отлична от нуля, $0 < x_0 \ll 1$, то при $r > 0$ на следующий год она возрастет: $x_1 \approx x_0 + rx_0$. Следовательно, состояние равновесия $x_0 = 0$ является неустойчивым. Последовательные значения x_0, x_1, x_2, \dots растут до тех пор, пока они успешно не достигнут значения 1. Для того чтобы определить характер устойчивости состояния равновесия $x_0 = 1$, проследим, как изменяются во времени малые отклонения $\delta_n = x_n - 1$. Линеаризуя (1.2), найдем

$$(1.3) \quad \delta_{n+1} \approx (1 - r)\delta_n,$$

откуда видно, что по абсолютной величине δ_{n+1} меньше, чем δ_n , когда $0 < r < 2$. График на рис. 17 соответствует случаю $r = 1.8$, в качестве начального значения выбрано $x_0 = 0.1$. Величина x поначалу растет, поскольку она заметно меньше 1. Но на третьем шаге ее значение уже немного выше указанного уровня. Начиная с этого момента, отклонения убывают по абсолютной величине в соответствии с (1.3), $\delta_{n+1} \approx -0.8\delta_n$, и процесс приближается к нужному конечному состоянию $x = 1$. Однако при $r > 2$ соотношение (1.3) предсказывает рост отклонений δ_n , и мы приходим к выводу, что состояние равновесия $x = 1$ теперь уже неустойчиво. Чтобы продолжить исследования, проведем эксперимент, результаты которого представлены на рис. 18. График показывает, что при $r = 2.3$ процесс в конце концов начинает периодически осциллировать между двумя уровнями. Это наводит на мысль рассмотреть первую итерацию соотношения (1.2), $x_{n+2} = f(f(x_n)) = f^2(x_n)$, и исследовать устойчивость неподвижных точек отображения f^2 . Они оказываются устойчивыми до тех пор, пока $r < \sqrt{6} = 2.449$.

Рис. 17. $r = 1.8$.Рис. 18. $r = 2.3$.Рис. 19. $r = 2.5$.Рис. 20. $r = 3$.

Переход от порядка к хаосу

С ростом r анализ соотношения (1.2) все более усложняется. Для $r = 2.5$ вид ломаной линии на рис. 19 позволяет заключить, что в этом случае процесс приходит к устойчивым периодическим колебаниям с периодом 4, а в дальнейших экспериментах обнаруживается последовательное удвоение периода колебаний при все ближе расположенных друг к другу значениях r . Наконец при $r = 2.570$ процесс вообще перестает быть периодическим. Теперь он все время прыгает около бесконечного числа значений так, что поведение процесса, несмотря на его полную изначальную детерминированность, практически невозможно прогнозировать на большие периоды времени. Подобное поведение обычно называют *хаотическим*. Примером может служить последовательность, показанная на рис. 20, она получена при $r = 3.0$ и $x_0 = 0.1$. Если r_n — значение параметра роста, соответствующее n -й бифуркации (т. е. моменту, когда колебания периода 2^n теряют устойчивость и устойчивыми становятся колебания периода 2^{n+1}), то оказывается, что отношение длин следующих друг за другом интервалов

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

сходится (это было обнаружено З. Гроссманном и С. Томэ, а также Фейгенбаумом) к значению

$$(1.4) \quad \delta_n \rightarrow \delta = 4.669\dots, \quad \text{когда } n \rightarrow \infty.$$

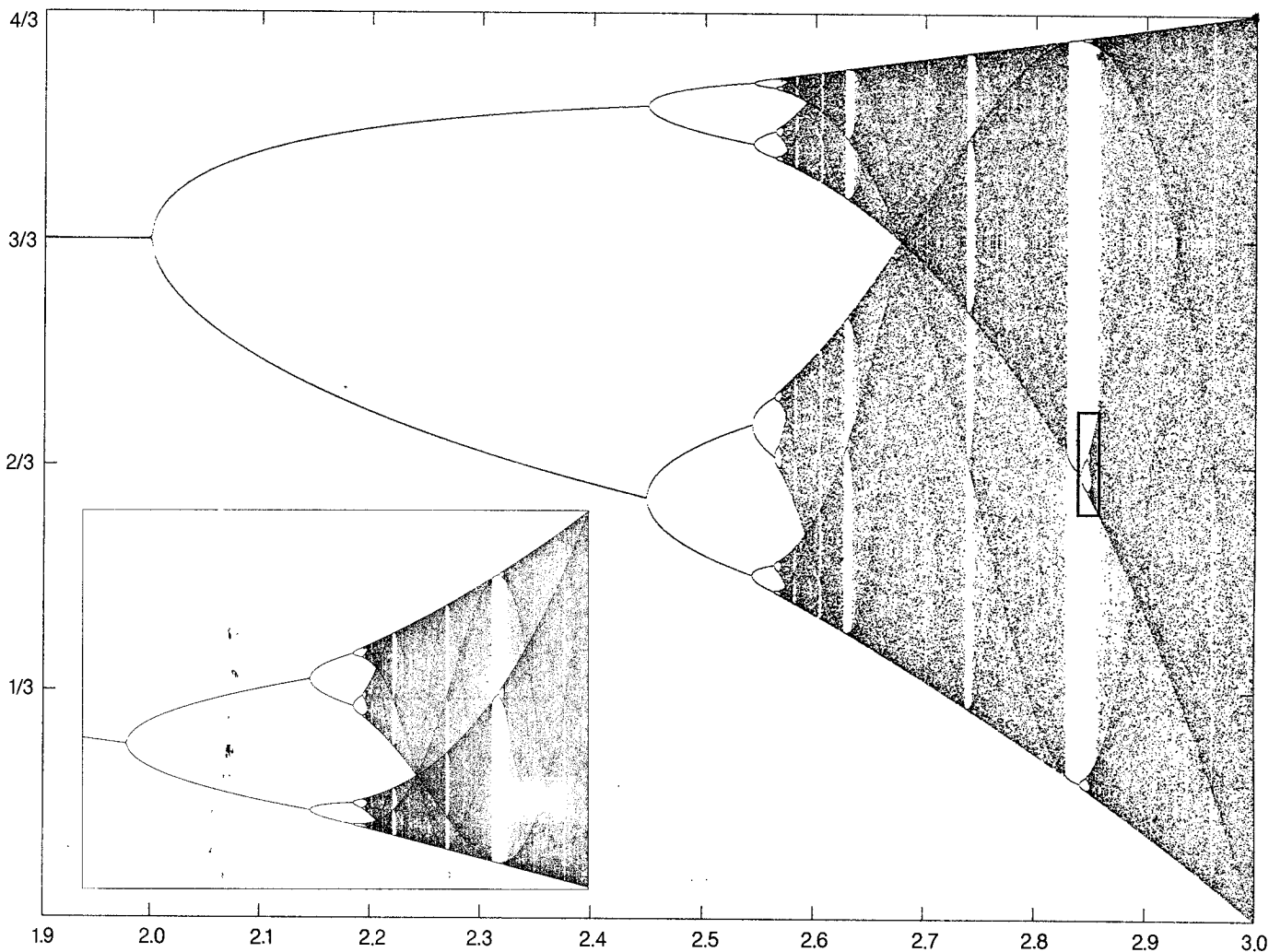


Рис. 21. Сценарий удвоения периода процесса Ферхюльста (1.2). Параметр роста r изменяется вдоль оси абсцисс ($1.9 < r < 3$). Для каждого значения r по истечении переходного периода длительностью в 5000 итераций на плоскость рисунка наносятся 120 итераций точки x . На вставке в увеличенном виде показана выделенная рамкой часть; кратность увеличения в направлении r превышает кратность увеличения в направлении x .

Фейгенбаум показал, что *то же самое число δ* возникает и в различных процессах, отличных от процесса Ферхюльста, и что оно на самом деле является универсальной характеристикой сценария удвоения периода для целого класса одномерных процессов.

Конечно, в случае процесса Ферхюльста хотелось бы иметь представление о всех возможных типах поведения. Здесь окажется полезной *бифуркационная диаграмма* на рис. 21, отражающая зависимость динамики от параметра r . Для каждого значения r первые 5000 итераций были оставлены «в тени», чтобы процесс успел выйти к своему *аттрактору* (который характеризует асимптотическое поведение, не включающее особенности переходного периода), а следующие 120 итераций были нанесены на диаграмму для того, чтобы показать природу этого аттрактора. Он состоит из одной точки при $r < 2$, из двух точек при $2 < r < \sqrt{6}$, затем из 4, 8, 16, ... точек вплоть до области хаоса, где точки аттрактора могут заполнять целые полосы.

Структура каскада бифуркаций, который Э. Н. Лоренц наблюдал за точкой хаоса $r = 2.570$, соответствует структуре каскада бифуркаций, предшествующего этой точке. На этот факт первыми обратили внимание Зигфрид Гроссманн и Стефан Томэ из Марбургского университета в Западной Германии: около точки $r = 3.0$ имеется только *одна* хаотическая полоса, которая распадается при $r = 2.679$ на *две* плосы, при $r = 2.593$ на *четыре*, затем на 8, 16, 32 и т. д. до тех пор, пока к значению $r = 2.570$ такое удвоение не произойдет бесконечное число раз.

Рисунок 21 содержит и целый ряд других бифуркационных «деревьев», которые также характеризуются числом δ . Внутри хаотической области видны «окна», в которых аттрактор снова состоит из отдельных точек. Например, при $r = 2.8284$ возникают устойчивые колебания периода 3, которые затем удваивают период до 6, 12, 24, ..., растворяясь в хаосе при $r = 2.8495$.

Более подробную информацию по этому вопросу можно найти в рекомендуемых нами книгах Р. Л. Девани [De1] и Х. Г. Шустера [Sch].

2. Множества Жюлиа и их компьютерное построение

Ниже приводятся некоторые фундаментальные классические результаты из работ Гастона Жюлиа (1893—1978) и Пьера Фату (1878—1929). В качестве более подробного обзора можно рекомендовать [В1].

Как обычно, через \mathbb{C} мы обозначим гауссову плоскость комплексных чисел, а через $\bar{\mathbb{C}}$ — риманову сферу $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Пусть R — рациональная функция, т. е.

$$R(x) = P(x)/Q(x), \quad x \in \bar{\mathbb{C}},$$

P и Q — полиномы, не имеющие общих делителей. Предполагается, что степень функции R , $\deg R = \max\{\deg P, \deg Q\}$ больше единицы. Эта степень, вообще говоря, равна числу прообразов точки x , $R^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{C}: R(y) = x\}$.

Множество Жюлиа J_R является в некотором смысле множеством исключительных точек для итераций функции $R: R^n(x) = R(\dots(R(R(x)))\dots)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Дополнение к множеству J_R называется *множеством Фату* $F_R = \bar{\mathbb{C}} \setminus J_R$. Классическое определение множества Жюлиа не очень удобно для интуитивного восприятия. Поэтому мы возьмем другое определение, более доступное для понимания. Нам потребуется понятие *периодической траектории*. При каждом $x_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ соотношение $x_{n+1} = R(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяет некоторую последовательность точек. Эту последовательность назовем *положительной полутраекторией* точки x_0 и будем обозначать $Or^+(x_0)$. Может показаться, что при определении *отрицательной полутраектории* могут возникнуть трудности из-за неоднозначности обратного отображения R^{-1} . Тем не менее, взяв все прообразы, положим

$$Or^-(x_0) = \{x \in \bar{\mathbb{C}}: R^k(x) = x_0 \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Если $x_n = x_0$ в $Or^+(x_0)$ при некотором n , то говорят, что x_0 — *периодическая точка*. В этом случае $Or^+(x_0)$ называют *периодической траекторией* или *циклом*, который мы иногда будем обозначать $\gamma = \{x_0, R(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$. Если n — наименьшее натуральное число, обладающее указанным свойством, то n называется *периодом* траектории.

В случае $n = 1$ имеем равенство $R(x_0) = x_0$, т. е. x_0 — *неподвижная точка* функции R . Очевидно, если x_0 — периодическая точка периода n , то x_0 является неподвижной точкой функции R^n . (Не следует путать итерации R и степени R^n , т. е. $R^n(x) = R \circ R \circ \dots \circ R(x)$ и $(R(x))^n$.)

Для того чтобы охарактеризовать устойчивость периодической точки x_0 с периодом n следует вычислить производные. Комплексное число $\lambda = (R^n)'(x_0) \left(' = \frac{d}{dx} \right)$ называется *собственным значением* точки x_0 . Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, мы увидим, что это число одно и то же для любой точки цикла. Периодическая точка x_0 называется

сверхпритягивающей $\Leftrightarrow \lambda = 0$, *нейтральной* $\Leftrightarrow |\lambda| = 1$,
притягивающей $\Leftrightarrow 0 < |\lambda| < 1$, *отталкивающей* $\Leftrightarrow |\lambda| > 1$.

Теперь можно описать множество Жюлиа J_R рациональной функции R . Пусть P — множество всех отталкивающих периодических точек функции R . Тогда

(2.1) Множество P плотно в J_R ,

т. е. каждая точка из J_R является пределом некоторой последовательности точек из P . Если x_0 — некоторая притягивающая неподвижная точка, то

рассмотрим ее бассейн притяжения

$$A(x_0) = \{x \in \mathbb{C} : R^k(x) \rightarrow x_0, \text{ когда } k \rightarrow \infty\};$$

$A(x_0)$ состоит из тех точек x , чьи положительные полутраектории $Or^+(x)$ сходятся к точке x_0 . Это множество, конечно же, содержит отрицательную полутраекторию точки x_0 , $Or^-(x_0)$. Если $\gamma = \{x_0, R(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$ — притягивающий цикл периода n , то каждая из неподвижных точек $R^i(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, функции R^n имеет свой бассейн притяжения, а $A(\gamma)$ представляет собой просто объединение этих бассейнов.

Сформулируем теперь некоторые фундаментальные результаты из работ [Ju] и [Fa], касающиеся множества J_R :

Фундаментальные свойства множества Жюлиа

- (2.2) J_R непусто и содержит более чем счетное множество точек.
- (2.3) Множества Жюлиа функций R и R^k , $k = 2, 3, \dots$, совпадают.
- (2.4) $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$.
- (2.5) Для любой точки $x \in J_R$ ее отрицательная полутраектория $Or^-(x)$ плотна в J_R .
- (2.6) Если γ — притягивающий цикл функции R , то $A(\gamma) \subset F_R = \mathbb{C} \setminus J_R$ и $\partial A(\gamma) = J_R$.

(Здесь $\partial A(\gamma)$ обозначает границу множества $A(\gamma)$, т. е. $x \in \partial A(\gamma)$, если $x \notin A(\gamma)$, но существует последовательность точек из $A(\gamma)$, сходящаяся к точке x .)

Рисунки 3, 4, 10 и фотографии 3—10, 18, 24, 25, 61—66, 75—78, 89—98 дают примеры множеств Жюлиа, ограничивающих два, три и даже четыре различных бассейна притягивающих неподвижных точек.

Вот еще несколько утверждений, касающихся множества Жюлиа:

- (2.7) Если множество Жюлиа имеет внутренние точки (т. е. точки $x \in J_R$, такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$, $\{x : |x - \bar{x}| < \varepsilon\} \subset J_R$), то $J_R = \mathbb{C}$.

Такая ситуация, по-видимому, встречается редко, тем не менее один из примеров дает функция $R(x) = ((x-2)/x)^2$ (см. специальный разд. 3).

- (2.8) Если $\bar{x} \in J_R$, $\varepsilon > 0$ и $J^* = \{x \in J_R : |x - \bar{x}| < \varepsilon\}$, то существует целое n , при котором $R^n(J^*) = J_R$.

Здесь, пожалуй, будет полезно сделать ряд замечаний. Из свойства (2.2) вытекает, что каждое рациональное отображение имеет большой запас отталкивающих периодических точек. В силу (2.4) множество Жюлиа не изменяется при действии отображения R , а из (2.1) вытекает, что динамика на J_R является в некотором смысле хаотичной. Свойство (2.5) подсказывает вычислительный алгоритм получения изображений множества J_R . К сожалению, отрицательная полутраектория точки $x \in J_R$ обычно не распределяется равномерно по множеству Жюлиа. (См. рис. 27, на котором показано распределение точек $Or(x)$ для типичного множества Жюлиа.) Поэтому необходимы более сложные алгоритмы, чтобы каждый раз решать, какую из ветвей древовидной структуры $Or^-(x)$ следует выбирать для наиболее эффективного построения изображения. Такие алгоритмы были разработаны и использованы для создания наших иллюстраций. Свойство (2.6) сразу указывает на то, что во многих случаях множество J_R должно быть фрактальным. Например, если R имеет более двух притягивающих неподвижных точек a, b, c, \dots , то (2.6) влечет за собой равенства

$$\partial A(a) = J_R = \partial A(b) = J_R = \partial A(c) = \dots,$$

означающие, что границы всех областей притяжения совпадают. Так, если R имеет 3 или 4 притягивающие неподвижные точки, то J_R состоит из трех-

сторонних или четырехсторонних точек в соответствии с числом бассейнов притяжения.

Динамика в окрестности нейтральных периодических точек

Теперь, когда ясно, что притягивающие периодические точки принадлежат F_R , а отталкивающие периодические точки принадлежат J_R , можно задать вопрос о *нейтральных периодических точках*. Этот вопрос на самом деле совсем не простой, и исчерпывающего ответа на него до сих пор нет. Не теряя общности, можно предположить, что $R(0) = 0$ и $R'(0) = \lambda$, где $|\lambda| = 1$, т. е. $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ для некоторого $\alpha \in [0, 1]$. Пусть

$$R(x) = \lambda x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

является степенным рядом для R . Имеются два типа нейтральных точек: неподвижную точку 0 называют *рационально нейтральной*, если α — рациональное число; если же число α иррационально, то неподвижную точку называют *иррационально нейтральной*. Рационально нейтральную неподвижную точку (или цикл) называют также *параболической* (параболическим).

Еще *Жюлиа* и *Фату* знали о том, что

(2.9) $x_0 \in J_R$, если x_0 является параболической периодической точкой функции R .

Более того, им было известно, что в этом случае $A(\gamma) \neq \emptyset$ ($\gamma = \{x_0, R(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$) и $\gamma \subset \partial A(\gamma)$. Рисунки 6, 8 и 9 иллюстрируют эту ситуацию.

Для более полного описания нейтральных точек нужно более внимательно посмотреть на *динамику* отображения R в окрестности $R(0) = 0$. Следующий результат из [Сам] поясняет параболический случай.

Параболический случай

(2.10) Пусть $\lambda = R'(0)$, $\lambda^n = 1$ и $\lambda^k \neq 1$ для $0 < k < n$. Тогда либо R^n — тождественное отображение, либо существует гомеоморфизм h (определенный в окрестности точки 0), такой, что $h(0) = 0$ и

$$(h \circ R \circ h^{-1})(x) = \lambda x(1 + x^{kn})$$

при некотором $k \geq 1$.

Диски Зигеля

Иррациональный случай значительно труднее. Нам потребуется понятие устойчивости:

(2.11) Неподвижную точку отображения называют *устойчивой*, если в любой ее окрестности U содержится окрестность V , такая, что $V \subset U$ и $R^k(V) \subset U$

при любом $k \geq 1$.

Очевидно, что притягивающие неподвижные точки будут устойчивыми. Для того чтобы описать устойчивость нейтральных неподвижных точек, воспользуемся результатом Ю. Мозера и К. Л. Зигеля [MS]:

(2.12) Пусть $R(x) = \lambda x + a_2 x^2 + \dots$, $|\lambda| = 1$ и $\lambda^n \neq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В этом случае 0 является устойчивой неподвижной точкой тогда и только тогда, когда функциональное уравнение

$$\Phi(\lambda x) = R(\Phi(x))$$

имеет аналитическое решение в окрестности точки 0.

Приведенное выше функциональное уравнение называют уравнением Шрёдера в честь Е. Шрёдера, изучавшего вопрос о его разрешимости в 1871 году. Что же условие (2.12) действительно означает? Предположим, что оно верно при некотором $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, тогда

$$\lambda x = \Phi^{-1}(R(\Phi(x))).$$

То есть R локально эквивалентно (или сопряжено) повороту на угол $2\pi\alpha$. Чтобы решить уравнение Шрёдера, используют следующий метод: пусть $R(x) = \lambda x + a_2 x^2 + \dots$. Если

$$(2.13) \quad \Phi(x) = x + b_2 x^2 + \dots,$$

то (2.12) превращается в равенство

$$(2.14) \quad \sum_{i=2}^{\infty} (\lambda^i - \lambda) b_i x^i = \sum_{i=2}^{\infty} a_i (x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k)^i,$$

из которого формально можно получить b_i , $i = 2, 3, \dots$, сравнивая коэффициенты. После этого, однако, возникает вопрос о сходимости. Понятно, что этот метод не работает в случае, когда λ является корнем из единицы, т. е. $\lambda = \exp(2\pi i p/q)$. Когда α иррационально, (2.14) приводит к *проблеме малых делителей*. В 1917 году Г. А. Пфейфер привел пример, когда ряд Шрёдера (2.13) не сходится. В 1938 году Х. Кремер мог представить уже целый класс примеров, для которых (2.13) расходится:

$$(2.15) \quad \{\lambda: |\lambda| = 1 \text{ и } \liminf |\lambda^n - 1|^{1/n} = 0\}.$$

Затем в 1942 году К. Л. Зигель [Si] в одной из основополагающих работ (которая в конечном счете оказалась очень важной в теории Колмогорова — Арнольда — Мозера) показал, что на самом деле ряд Шрёдера будет сходиться, если α удовлетворяет некоторому диофантову условию ($\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$):

(2.16) Существуют $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$, для которых

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| > \frac{\varepsilon}{n^\mu}$$

при всех целых m и целых положительных n .

Попросту говоря, это условие означает, что α плохо приближается рациональными числами. Это утверждение можно сделать точным, если иррациональное число α записать в виде разложения в непрерывную дробь. Пусть $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — такое разложение, т. е. $a_k \in \mathbb{N}$ и

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Положим теперь $\frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$. Эти числа определяют наилучшие рациональные приближения числа α , и хорошо известно, что

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

(«Наилучшие» здесь означает, что ни одно из рациональных чисел p/q с $q \leq q_n$ не лежит ближе к α , чем $\frac{p_n}{q_n}$.) Следовательно, диофантово условие в (2.16) выполняется, если, например, все a_k ограничены. Известно, да и нетрудно проверить, что именно такие разложения в непрерывную дробь имеют алгебраические числа степени 2, поэтому такие числа α (а на самом

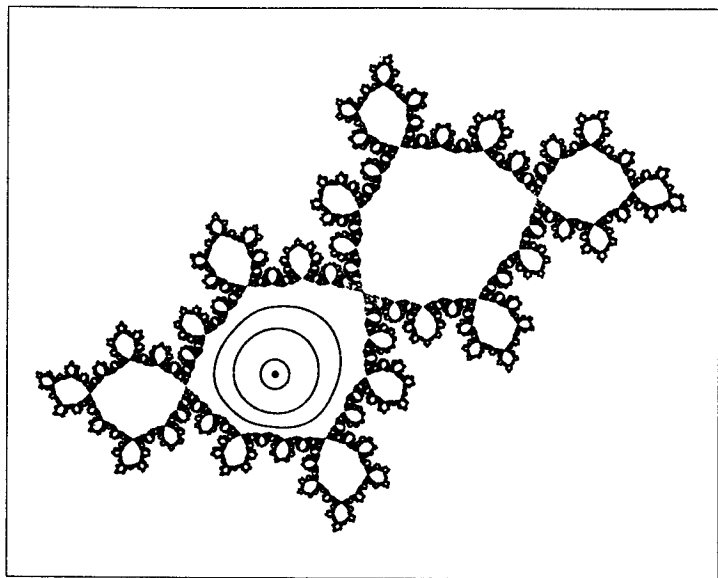


Рис. 22. Диск Зигеля вокруг иррационально нейтральной неподвижной точки $x_0 = 0$ отображения $x \rightarrow x^2 + \lambda x$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. На инвариантных кривых (три из них показаны) динамика эквивалентна повороту на угол α .

деле вообще все алгебраические числа) будут удовлетворять этому диофантову условию. Одним из важных примеров таких чисел является золотое сечение

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad \alpha = (0, 1, 1, 1, \dots).$$

Известно, что множество тех $\alpha \in [0, 1]$, для которых выполняется условие Зигеля, является множеством полной меры. В том случае, когда ряд Шрёдера (2.13) сходится, говорят, что R линеаризуемо в точке 0. Максимальную область $D(0)$, содержащую 0, в которой имеет место равенство $\Phi(\lambda x) = R(\Phi(x))$, называют диском Зигеля. Один пример из квадратичного семейства $x \mapsto x^2 + c$ показан на фото 22 и 25. Цветные изображения показывают диск Зигеля, его прообразы относительно R и область притяжения точки ∞ . Цветовые переходы на фото 25 выделяют инвариантные окружности, приковывающие к себе динамику вблизи иррационально нейтральной неподвижной точки. На рис. 22 показаны те же неподвижная точка, несколько инвариантных кривых и множество Жюлиа.

В этом примере критическая точка $x_c = -e^{2\pi i \alpha}/2$ принадлежит множеству Жюлиа, что подтверждает недавний результат М. Эрмана (см. также специальный разд. 3). Отметим также, что

$$(2.17) \quad x_0 \in F_R, \text{ если } x_0 \text{ — это центр диска Зигеля.}$$

В 1972 году Х. Рюссманн сумел распространить результат Зигеля даже на некоторые числа Лиувилля. (Числа Лиувилля λ очень близки к рациональным числам.) Проблема определения точных условий на α , при которых ряды Шрёдера сходятся, остается открытой и, по-видимому, является очень глубокой. Следовательно, пока мы еще не всегда можем сказать, где лежит данная иррационально нейтральная неподвижная точка — во множестве Жюлиа или во множестве Фату.

Если $R(x) = x^2 + \lambda x$ то, конечно, при любом $\lambda \in S^1$ точка $x_0 = 0$ будет нейтральной неподвижной точкой. Представим себе, что λ меняется, оставаясь на S^1 . Тогда независимо от того, насколько малыми будут эти измене-

ния, они самым драматическим образом будут влиять на динамику около $x_0 = 0$. Это так, поскольку всякое изменение λ приводит к бесконечному числу переходов от параболической точки к диску Зигеля и обратно.

Размерность Хаусдорфа

Следуя Б. Б. Мандельброту, множество X называют *фрактальным*, если его *размерность Хаусдорфа* $h(X)$ не является целым числом. Интуитивно $h(X)$ оценивает рост числа множеств диаметра ε , необходимых для того, чтобы покрыть множество X , когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Более точно, если $X \subset \mathbb{R}^m$, то пусть $n(\varepsilon)$ означает число m -мерных шаров диаметра ε , необходимых для того, чтобы покрыть X . Тогда если $n(\varepsilon)$ растет как

$$(2.18) \quad n(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

то говорят, что X имеет размерность Хаусдорфа, равную D . В случае обычного множества Кантора C , как нетрудно подсчитать,

$$h(C) = \log 2 / \log 3.$$

Строгое определение $h(X)$ выглядит следующим образом: пусть X — подмножество некоторого метрического пространства и d — положительное число. d -мерная *внешняя мера* $m_d(X)$ определяется из условий

$$(2.19) \quad \begin{cases} m_d(X, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } S_i)^d \right\}, \text{ где инфимум берется по всем ко-} \\ \text{нечным покрытиям множества } X \text{ множествами } S_i \text{ с диаметром,} \\ \text{меньшим } \varepsilon > 0; \\ m_d(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_d(X, \varepsilon). \end{cases}$$

Величина $m_d(X)$ в зависимости от d может быть конечной или бесконечной. Ф. Хаусдорф показал в 1919 году, что существует единственное значение $d = d^*$, при котором величина $m_d(X)$ с ростом d перестает быть бесконечной и становится конечной. Это приводит к определению

$$(2.20) \quad h(X) = \sup \{d \in \mathbb{R}_+ : m_d(X) = \infty\}.$$

(Более подробное объяснение и примеры см. в [Fal].)

Недавно Д. Рюэлль [Ru2] получил следующий замечательный результат: пусть J_c — множество Жюлиа отображения $x \mapsto x^2 + c$. Тогда для $|c| \ll 1$

$$(2.21) \quad h(J_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + \text{члены более высоких порядков.}$$

Известно также (см. [Bro]), что для малых значений множество J_c является жордановой кривой (т. е. кривой, гомеоморфной единичной окружности). На самом деле J_c будет жордановой кривой при любом c из основной части (кардиоиды) множества Мандельброта. Хотя фрактальность множеств Жюлиа и является типичной, о их размерности Хаусдорфа почти ничего не известно. Результат Рюэлля, кажется, является первым точным результатом в этом направлении.

Множества Жюлиа для трансцендентных отображений

В разд. 7 мы продолжим обсуждение некоторых специальных классов множеств Жюлиа, а именно множеств Жюлиа для метода Ньютона в комплексной плоскости. В разд. 8 мы сравним результаты разд. 7 с некоторыми из свойств множеств, подобных множествам Жюлиа, но полученных при использовании метода Ньютона для вещественных уравнений. Так в наших экспериментах появляются структуры, совсем не похожие на структуры в

стиле барокко, которые мы наблюдали до сих пор для рациональных отображений в комплексной плоскости. Невольно возникает желание приписать это кажущееся барокко лежащей в его основе комплексной аналитической структуре. Однако следующий пример показывает, что в этом была бы некоторая поспешность. Недавно Р. Девани [De2] изучил несколько первых примеров трансцендентных отображений, таких, как, например,

$$(2.22) \quad E_\lambda(x) = \lambda \exp(x),$$

$$(2.23) \quad S_\lambda(x) = \lambda \sin(x),$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ в $\bar{\mathbb{C}}$. Он получил несколько весьма замечательных результатов, и некоторые из них мы хотели бы привести здесь. Определим множество Жюлиа для E_λ (или S_λ) в соответствии с (2.1), т. е.

(2.24) J_λ — замыкание множества $\{x \in \mathbb{C}: x \text{ является отталкивающей периодической точкой } E_\lambda \text{ (соответственно } S_\lambda)\}$.

Тогда первым результатом будет

(2.25) J_λ — замыкание множества $\{x \in \mathbb{C}: E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty \text{ (соответственно } S_\lambda^n(x) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty)\}$.

Отметим, что наблюдаются существенные изменения поведения E_λ , например, когда λ , двигаясь вдоль действительной оси, проходит через значение $1/e$ (см. рис. 23).

При $\lambda < 1/e$ имеются притягивающая неподвижная точка Q_λ и отталкивающая неподвижная точка P_λ , в то время как при $\lambda > 1/e$ неподвижных точек нет вообще. К тому же очевидно, что при $\lambda < 1/e$

$$(2.26) \quad \{x \in \mathbb{R}: x > P_\lambda\} \subset J_\lambda.$$

Девани называет этот луч волоском. Как оказывается, он играет решающую роль в описании J_λ . Вот один из основных результатов:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \text{Если } \lambda > 1/e, \text{ то } J_\lambda = \mathbb{C}. \\ \text{Если } \lambda < 1/e, \text{ то } J_\lambda \text{ представляет собой нигде не плотное кан-} \\ \text{торово множество кривых, образующих границу одной-} \\ \text{единственной области притяжения.} \end{cases}$$

Таким образом, когда λ растет и проходит через значение $1/e$, множество J_λ взрывается. Изображения множеств Жюлиа для подобного семейства по-

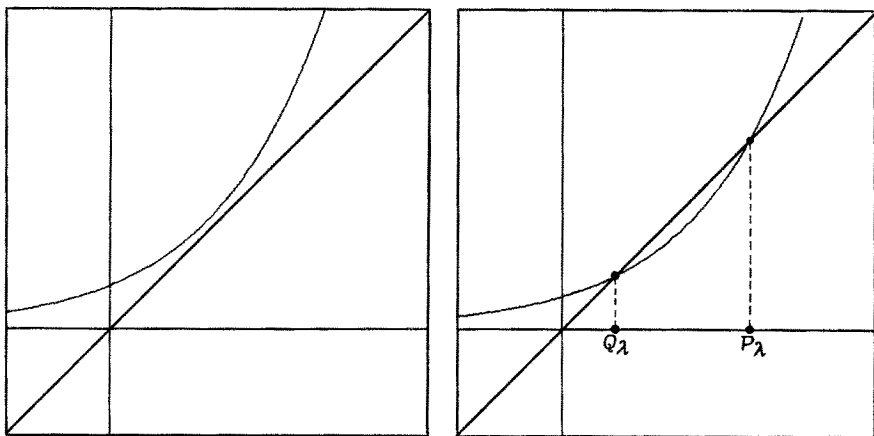


Рис. 23. График отображения $x \rightarrow \lambda \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Слева: $\lambda > 1/e$; справа: $\lambda < 1/e$.

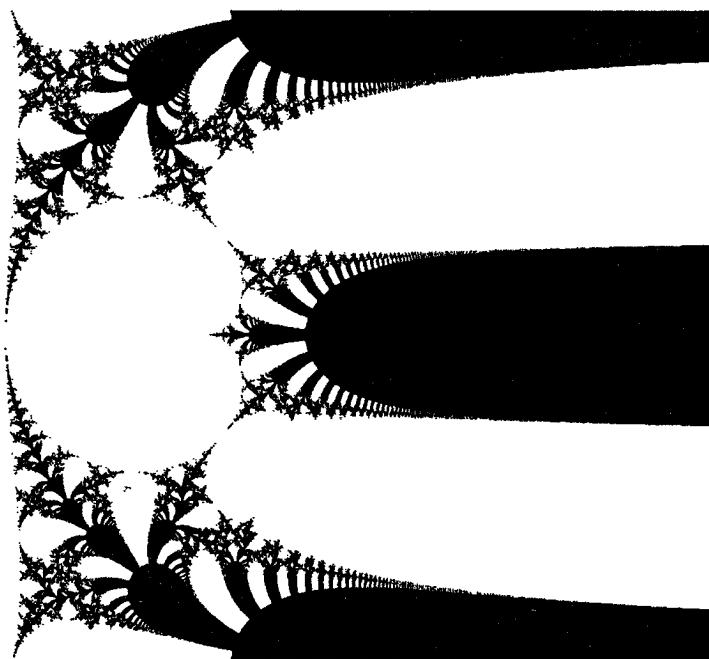


Рис. 24. «Множество Мандельброта» для E_λ (наличие сплошных областей черного цвета объясняется низким итерационным разрешением $N_{\max} = 90$).

лучить довольно трудно, и мы сошлемся на работу [De], в которой есть некоторый набросок изображения.

Под влиянием деятельности Мандельброта (см. специальный разд. 4) Девани рассматривает также и бифуркационное множество для E_λ в λ -плоскости:

$$(2.28) \quad B = \{\lambda \in \mathbb{C}: J_\lambda = \mathbb{C}\} \text{ и}$$

$$(2.29) \quad C = \mathbb{C} \setminus B.$$

Он показывает, что внутренняя область множества C содержит компоненты, которым отвечают периоды соответствующих притягивающих периодических точек. На рис. 24 черным цветом показан примерный вид множества B .

Эти исследования опираются на другой результат Девани:

$$(2.30) \quad \text{Если } E_\lambda^n(0) \rightarrow \infty, \text{ то } J_\lambda = \mathbb{C}.$$

На основании этого утверждения точку на λ -плоскости можно закрасить черным цветом в том случае, когда при некотором $n < N_{\max}$ выполняется неравенство $|E_\lambda^n(0)| \geq M$, где $M \gg 1$. Изображение на рис. 24 следует интерпретировать с некоторой осторожностью. Например, белое множество содержит такие точки, как $\lambda = 2k\pi i$, для которых $E_\lambda^2(0) = E_\lambda(\lambda) = \lambda$. В общем случае

$$(2.31) \quad \text{Если точка } 0 \text{ является предпериодической (т. е. } E_\lambda^n(0) \text{ является периодической при некотором } n \geq 1), \text{ то } J_\lambda = \mathbb{C}.$$

Для каждого λ , для которого $|E_\lambda^n(0)| \geq M$ при некотором $n < N_{\max}$, имеется наименьшее такое n . С ним связан приписываемый λ индекс, которому можно сопоставить определенный цвет в таблице цветов для того, чтобы затем построить прекрасные цветные изображения.

По сравнению с другими изображениями множеств Жюлиа результаты Девани выглядят разделяющими больше свойств «множеств Жюлиа» из

специального разд. 8, чем свойств множеств Жюлиа рациональных отображений. Например, как и большинство «множеств Жюлиа» из разд. 8, множество J_λ не является локально связным. Кроме того, обнаруживается, что подобные (2.26) «волоски», как правило, имеются и у «множеств Жюлиа» ($X \subset \mathbb{C}$ называют локально связным, если во всех случаях, когда множество U открыто в \mathbb{C} и $U \cap X \neq \emptyset$, любая точка $x \in U \cap X$ имеет окрестность $V \subset U$, $x \in V$, такую, что $V \cap X$ оказывается связным множеством).

Построение изображений множеств Жюлиа

Имеются два существенно различающихся способа получения изображений множеств Жюлиа. Один из них основан на свойстве (2.5), а другой — на свойстве (2.6). Ни один из методов особых преимуществ не имеет. В некоторых случаях первый метод работает очень хорошо, в то время как второй никуда не годится, но бывает, и наоборот. Имеется много случаев, когда прекрасно работают оба метода. Но имеется и целый класс множеств Жюлиа, удовлетворительные изображения которых получить очень трудно, если вообще возможно. Этот класс содержит множества Жюлиа, ограничивающие параболические области, т. е. соответствующие отображениям с параболической периодической точкой.

Метод обратного итерирования (МОИ)

Если задано рациональное отображение R и известна некоторая периодическая отталкивающая точка $\bar{x} \in J_R$, то свойство (2.5) позволяет вычислить

$$(2.32) \quad J_R^n = \{x \in \mathbb{C}: R^k(x) = \bar{x} \text{ при некотором } k \leq n\}.$$

Поскольку J_R есть замыкание $\left(\bigcup_{n \geq 0} J_R^n\right)$, можно ожидать, что изображение

J_R^n при достаточно большом n будет довольно хорошо приближать изображение J_R . Действительно, в том случае, когда J_R^n равномерно распределяется по J_R , этот метод дает вполне удовлетворительное изображение J_R . Попросту говоря, мы называем отрицательную полутраекторию $Or^-(x)$ равномерно распределенной, если число точек в

$$J_R^n \cap D(x, \varepsilon), \quad \text{где } (x \in J_R, \varepsilon > 0 \text{ и мало, } D(x, \varepsilon) = \{y: |y - x| < \varepsilon\})$$

по существу не зависит от x при больших n . К сожалению, такая ситуация нетипична. В более типичной ситуации на J_R имеются окрестности, посещаемые крайне редко. В этом случае прямой МОИ не годится. Напомним, что число элементов множества J_R^n растет, как d^n , где d — это степень R . Типичная ситуация показана на рис. 25.

Недостатки этого эксперимента явно видны, если сравнить рис. 25 с фото 18, на котором красным цветом выделена область притяжения цикла периода 11, а множество Жюлиа является ее границей. На рис. 26 и 27 показаны другое множество Жюлиа из квадратичного семейства $R(x) = x^2 + c$ и демография J_R^n в некотором покрытии множества J_R .

В этих экспериментах J_R накладывается на квадратную решетку в \mathbb{C} с ячейками малого размера. Число точек из J_R^n в каждой маленькой ячейке решетки подсчитывается и изображается в виде вертикальной линии, в результате чего распределение визуализируется. По-видимому, наиболее часто посещаются «кончики» множества J_R , в то время как точки ветвления, как оказывается, чаще избегаются. И тем не менее при $n = 21$ образует достаточно плотное множество точек, так что неравномерности на рис. 26 почти не оказывают влияния. Но именно эти неравномерности делают столь неудовлетворительным рис. 25.

Вдобавок к этим недостаткам, МОИ невозможно применять и без под-

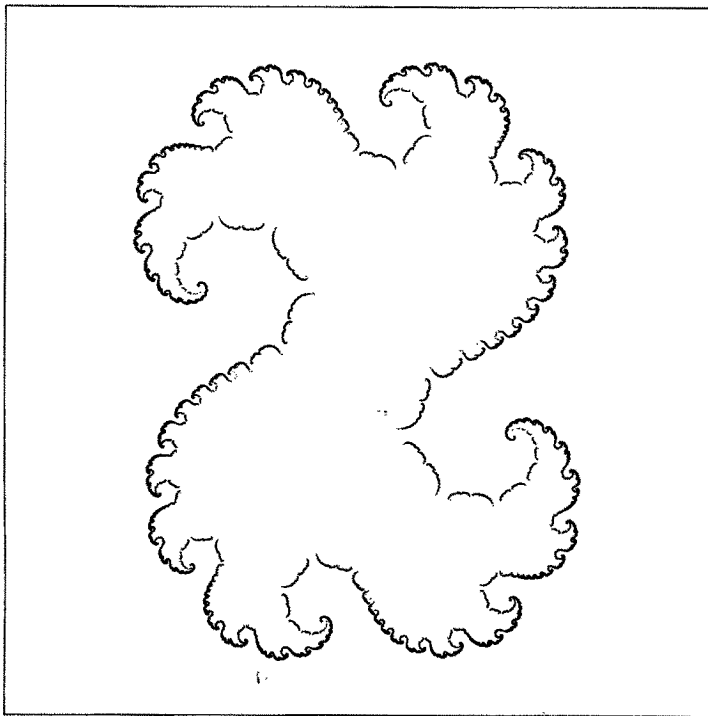


Рис. 25. J_R^n , $n = 22$; $R(x) = x^2 + c$ и $c = 0.32 + 0.043i$; получено при помощи МОИ.

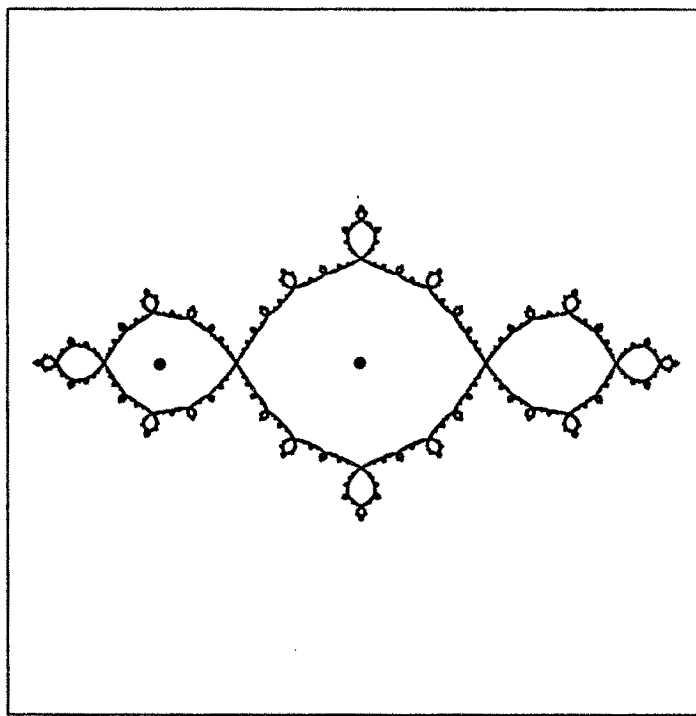


Рис. 26. J_R , $R(x) = x^2 + c$ и $c = -1$; $\{0, -1\}$ является сверхпритягивающим циклом.

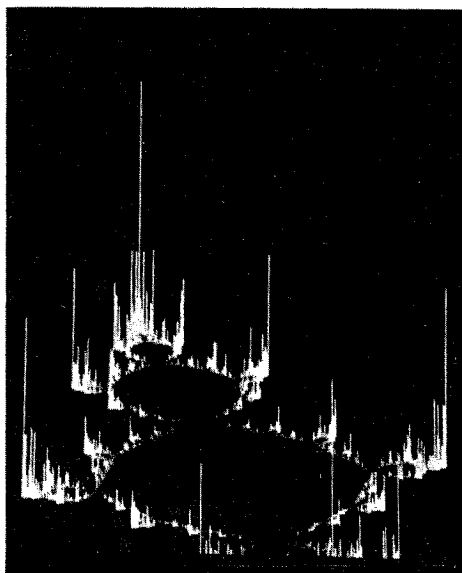
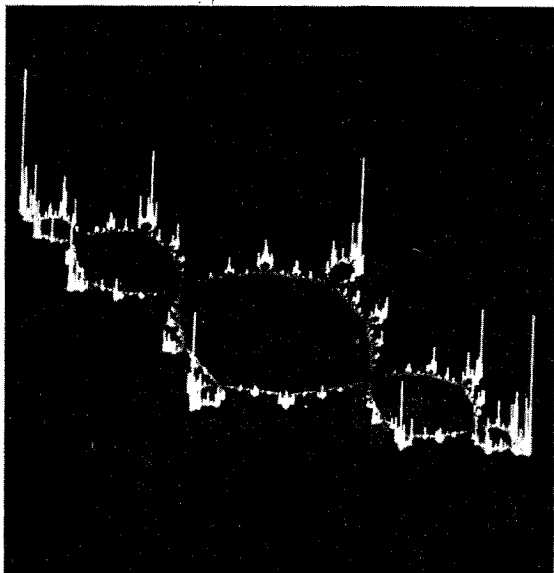


Рис. 27. J_R^n , $n = 21$; $R(x) = x^2 + c$ и $c = -1$; распределение типичной отрицательной полутраектории $Or^-(\bar{x})$, $\bar{x} = 1/2(\sqrt{5} + 1)$ показано вертикальными линиями.

ходящего управления базой данных из-за быстрого роста d^n . На рис. 28 показан пример древовидной структуры J_R^n для $d = 2$.

Очевидно, что имеется много способов занумеровать различные уровни J_R^k , $k = 0, 1, \dots, n$. Прямая нумерация по рядам ведет к тому, что для вы-

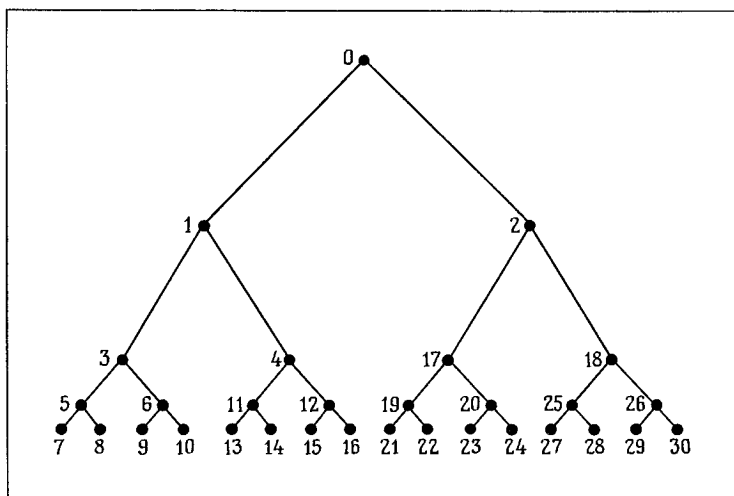


Рис. 28. Иерархия отрицательной полутраектории отображения степени 2, эффективная с точки зрения затрат памяти.

числения $(n + 1)$ -го уровня потребуются все d^n элементов множества J_R^n , которые быстро заполняют весь доступный объем машинной памяти. Однако если считать, что n итераций окажется достаточно, то можно использовать очевидный метод нумерации дерева, при котором потребуется всего $d \cdot (n - 1)$ единиц памяти для построения J_R^n (см. рис. 28).

В общем случае распределение $Or^-(\bar{x})$ характеризуется определенной мерой μ_R , носителем которой является J_R : как показал М. Ю. Любич [L],

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Существует инвариантная борелевская мера } \mu_R \text{ с носителем } J_R. \\ \text{Каково бы ни было } x \in \bar{C} \setminus E (E — \text{некоторое исключительное} \\ \text{множество)} \mu_R \text{ является слабым пределом мер } \mu_{m,x}, \text{ где} \\ \mu_{m,x} = \frac{1}{d^m} \sum_{z \in R^{-m}(x)} \delta_z \text{ и } \delta_z(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = z, \\ 0, & \text{если } u \neq z. \end{cases} \end{array} \right.$$

Если бы μ_R была известна заранее, то можно было бы очевидным образом модифицировать МОИ. Приводимая ниже стратегия в некотором приближении учитывает меру μ_R , хотя на самом деле она неизвестна.

Модифицированный метод обратного итерирования (ММОИ)

Интуитивно идея очень проста. Точки из J_R^k , $k < n$, принадлежащие участкам с большим весом относительно μ_R , следует при обратном итерировании использовать значительно реже, чем они встречаются. В действительности число используемых в итерационном процессе точек должно быть обратно пропорциональным μ_R . Стратегия следующая: наложить на J_R квадратную решетку с ячейками малого размера β . Затем, для каждой ячейки B этой решетки следует прекратить использовать из нее точки для обратного итерирования, если определенное количество N_{\max} точек в B до этого уже использовано. Естественно, что оптимальный выбор β и N_{\max} зависит от μ_R и от параметров компьютерной графики, таких, как разрешение имеющейся системы. Следовательно, требуются интерактивные и адаптивные алгоритмы. Такие алгоритмы, оказавшиеся высокоэффективными и удовлетворительными во многих случаях, разработал наш студент Х.-В. Рамке. Большинство чёрно-белых изображений множеств Жюлиа в этой книге получено как раз по его алгоритмам.

В некоторых случаях, когда ММОИ отказывал, можно было получить удовлетворительные результаты при помощи значительно менее сложных алгоритмов, опирающихся на свойство (2.6).

Метод сканирования границы (МСГ)

Напомним, что если R имеет притягивающую неподвижную точку a , т. е. $R(a) = a, |R'(a)| < 1$, и если $A(a)$ — ее бассейн притяжения, то $J_R = \partial A(a)$.

Далее, если R имеет более одной притягивающей неподвижной точки, скажем a и b , то имеется довольно простой способ получения изображения множества $\partial A(a) = J_R = \partial A(b)$.

Выбирается квадратная решетка, покрывающая некоторую область в $\bar{\mathbb{C}}$, в которой нужно будет получить J_R . Пусть B — произвольная открытая ячейка решетки размера β . Предположим, что $B \cap J_R \neq \emptyset$. Тогда B должен содержать точки как из $A(a)$, так и из $A(b)$.

На этом основан следующий алгоритм: пусть N_{\max} и $0 < \varepsilon \ll 1$ заданы и пусть B — произвольная ячейка решетки с вершинами c_1, c_2, c_3 и c_4 . Следует установить:

— принадлежат ли все вершины одному и тому же бассейну или

— вершины принадлежат разным бассейнам.

Во втором случае B закрашивается, например, черным цветом, а в первом — белым. Для этого следует численно определить, принадлежит ли c_i , например, $A(a)$, или нет:

— {Если при некотором $k \leq N_{\max}$ обнаружится, что $|R^k(c_i) - a| < \varepsilon$, то $c_i \in A(a)$. Если нет, будем считать, что c_i не принадлежит $A(a)$.

(Очевидно, что последнее заключение может оказаться ошибочным.) Параметры β , ε и N_{\max} опять же сильно зависят от R , и может оказаться, что их нельзя выбрать так, чтобы получить удовлетворительное изображение J_R . Требование, чтобы существовало не менее двух притягивающих неподвижных точек можно ослабить, если имеется некоторая дополнительная информация об отображении R . Так, например, можно сравнить бассейн притяжения с диском Зигеля, кольцом Эрмана или даже с множеством, на котором R расходится (например, при $x \mapsto x^2 + c$, $c = i$, $\bar{\mathbb{C}} = A(\infty) \cup J$, и J — дендрит). Очевидно, что если R имеет притягивающую периодическую точку a с периодом m , то $R^k(a)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, будут притягивающими неподвижными точками для R^m .

Основные вычислительные трудности в случае параболической неподвижной точки

Опыт показывает, что построение множеств Жюлиа при наличии параболических точек превращается в весьма трудную задачу. Например, в [Bl] (рис. 3.16, стр. 102) можно обнаружить ссылку на эксперимент, в результате которого предполагалось предъявить множество Жюлиа отображения

$$R_0(x) = \lambda x + x^2, \quad \lambda = \exp(2\pi i/20).$$

В этом случае $x_0 = 0$ является параболической неподвижной точкой. Однако рисунок из [Bl] совершенно вводит в заблуждение. Он получен, по-видимому, при помощи алгоритма МОИ. На рис. 29 показан наш результат, полученный с помощью отрегулированного некоторым подходящим образом алгоритма МСГ. Отличие от [Bl] весьма существенное, но и рис. 29 имеет некоторые недостатки. Во-первых, мы знаем, что $x_0 = 0 \in J_{R_0}$ (в соответствии с (2.9)). Во-вторых, поскольку $\lambda^{20} = 1$, множество Жюлиа должно под-

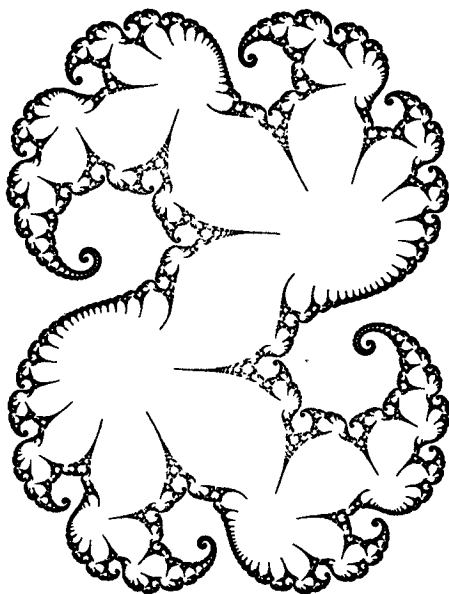


Рис. 29. Множество Жюлиа для $x \rightarrow \lambda x + x^2$, $\lambda = e^{2\pi i/20}$; $x_0 = 0$ является параболической неподвижной точкой.

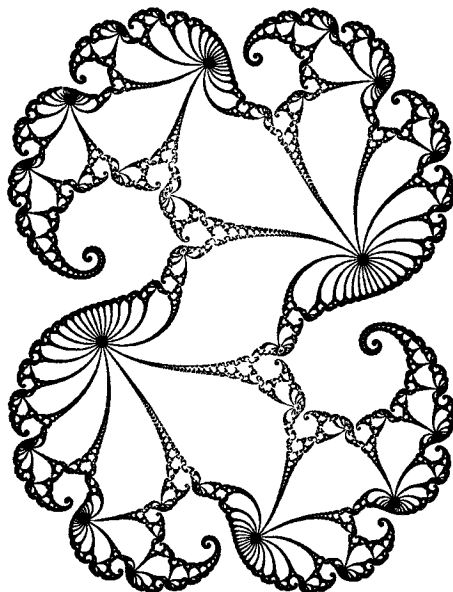


Рис. 30. Множество Жюлиа для $x \rightarrow (1 + \varepsilon)\lambda x + x^2$, $\lambda = e^{2\pi i/20}$, $\varepsilon = 0.001$; $x_0 = 0$ является отталкивающей неподвижной точкой.

ходить к точке $x_0 = 0$ с 20 различными направлениями (между 20 лепестками). В действительности же на рисунке виден лишь намек на эти направления, но множество Жюлиа явно выглядит отстоящим на некотором расстоянии от x_0 . Этот эффект по своей природе является вычислительным, т. е. полностью отличен от эффектов, порождаемых внутренней неравномерностью инвариантной меры.

Пусть единицей ошибки округления данного компьютера будет eps (т. е. eps — наибольшее машинное число, для которого $1 + eps = 1$ в арифметике машины). Далее, пусть R удовлетворяет предположениям (2.10). В частности,

$$h \circ R \circ h^{-1}(x) = \lambda x(1 + x^{kn}).$$

Тогда если $|x| < eps^{1/kn}$, то, очевидно (в арифметике машины), невозможно отличить λx от $\lambda x(1 + x^{kn})$ и, следовательно, $R^n(h^{-1}(x))$ невозможно отличить от $h^{-1}(x)$. Следующая таблица иллюстрирует этот досадный эффект, указывая расстояние r от точки 0, на котором итерации просто останавливаются.

kn	r	
	$eps = 10^{-8}$	$eps = 10^{-16}$
2	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-8}$
5	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$6,039 \cdot 10^{-4}$
20	$3,981 \cdot 10^{-1}$	$1,584 \cdot 10^{-1}$
100	$8,318 \cdot 10^{-1}$	$6,918 \cdot 10^{-1}$

Этим объясняется не только недостатки (рис. 29) ($kn = 20$), но и то, что этот эффект почти не заметен на рис. 26 ($kn = 2$). Рисунок 30 показывает, как должен выглядеть рис. 29. Изображение получено с помощью алгоритма ММОИ в применении к

$$R_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon)\lambda x + x^2, \quad \lambda = \exp(2\pi i/20).$$

При изменении ε от 0 до некоторого малого положительного числа (на рис. 30 $\varepsilon = 0.001$) параболическая неподвижная точка бифурцирует в притягивающий цикл периода 20, а x_0 становится отталкивающей неподвижной точкой.

Множества уровня и двоичные разбиения

Наш МСГ-алгоритм подсказывает способ динамического разбиения бассейнов притяжения. Пусть R — рациональная функция с притягивающей неподвижной точкой $a = R(a)$. Определим множества уровня — множества равного притяжения в $A(a)$ по отношению к некоторому множеству-мишени $L_0(a)$

Пусть $a \in L_0(a) \subset A(a)$. Положим тогда

$$L_k(a) = \{x: R^k(x) \in L_0(a) \text{ и } R^l(x) \notin L_0(a) \text{ для } l < k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обычно выбирается $L_0(a) = \{x: |x - a| \leq \varepsilon\}$ или в случае $a = \infty$ $L_0(\infty) = \{x: |x| \geq 1/\varepsilon\}$ для некоторого $0 < \varepsilon \leq 1$. При этом каждая точка $x \in L_k(a)$ получает индекс, который можно использовать для выбора определенного цвета из таблицы цветов, если воспринимать точку как пиксел в растровом устройстве цветного изображения. Все цветные изображения множеств Жюлиа, например такие, как фотографии 23—10 или 61—63, включают подобные разбиения, используя 256 цветов из $(256)^3$ возможных. Другими словами, цветовая градация характеризует динамическое расстояние от соответствующего центра, при этом расстояние от него до множества Жюлиа будет бесконечным, поскольку $\partial L_k \rightarrow J_R$, только при $k \rightarrow \infty$.

Эта идея — исследовать динамику при помощи множеств уровня — используется на протяжении всей книги. Фундаментальное значение она имела и для визуализации потенциала множества Мандельброта на фото 26—54. В этих случаях множеством-мишенью было

$$L_0(\infty) = \{c: |c| > \varepsilon^{-1}\},$$

для некоторого $0 < \varepsilon < 1$, за исключением фото 53, где

$$L_0(\infty) = \{c: (|\operatorname{Re} c|^p + |\operatorname{Im} c|^p)^{1/p} > \varepsilon^{-1}\}$$

для некоторого $0 < p \leq 1$. Эквипотенциальные линии потенциала множества Мандельброта аппроксимируются границами множеств уровня

$$L_k(\infty) = \{c \in \mathbb{C}: p_c^k(c) \in L_0(\infty) \text{ и } p_c^l(c) \notin L_0(\infty), \quad l < k\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $p_c = x^2 + c$ (подробное объяснение см. в разд. 4).

Множество-мишень L_0 можно выбрать произвольным образом. В частности, можно данное L_0 разбить на m непересекающихся подмножеств, чем индуцируется соответствующее разбиение каждого уровня L_k . Мы назвали такие разбиения m -адическими разбиениями. Особый интерес представляет для нас случай $m = 2$. Он поможет нам исследовать силовые линии потенциала множества Мандельброта. Такие разбиения были предложены в [PSH] для изучения бассейнов притяжения для метода Ньютона в \mathbb{C} .

Нам понадобится старый результат 1905 г., восходящий к Бётхеру, см. также [Bl]:

(2.34) Пусть R — рациональное отображение и $R(a) = a$. Предположим, что $R^{(k)}(a) = 0$ для $k = 1, \dots, n-1$ и $R^{(n)}(a) \neq 0$ ($R^{(j)}(x)$ обозначает j -ю производную в точке x). Тогда найдутся открытые окрестности U точки 0 и V точки a , для которых конформное отображение $\Phi: U \rightarrow V$, такое, что

$$R(\Phi(u)) = \Phi(u^n), \text{ т. е. } \Phi^{-1} \circ R \circ \Phi(u) = u^n.$$

Иначе говоря, R локально эквивалентно отображению $u \mapsto u^n$.

Двоичное разбиение для $x \mapsto x^2$

Пусть теперь $x = \exp(2\pi i\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, и пусть $r(\alpha)$ — луч с началом в точке 0 , проходящий через точку x в \mathbb{C} . Тогда $r(\alpha)$ делится на две части: часть $r_0(\alpha)$, лежащую внутри единичной окружности, и часть $r_\infty(\alpha)$, лежащую вне ее. Мы будем называть $r_0(\alpha)$ внутренним углом точки x , а $r_\infty(\alpha)$ — ее внешним углом. Динамика отображения $R(x) = x^2$ в \mathbb{C} дает прекрасную возможность визуализации углов вида

$$(2.35) \quad (\alpha_0 + k/2^n) \bmod 1,$$

где α_0 фиксировано, $k, n \in \mathbb{N}$. Напомним, что в случае $\alpha = p/q$ (p и q взаимно просты и $0 < \alpha < 1$) двоичное представление

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1\}$$

получается следующим образом:

$$(2.36) \quad \begin{cases} \text{если } q = 2^n \text{ при некотором } n, \text{ то способ представления очевиден;} \\ \text{если } q \neq 2^n \text{ ни при каком } n, \text{ то} \\ a_k = \begin{cases} 0, & \text{когда } 0 < (2^{k-1}\alpha) \bmod 1 < 1/2, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

Теперь пусть $L_0(0) = \{x: |x| \leq \varepsilon\}$ и $L_0(\infty) = \{x: |x| \geq \varepsilon^{-1}\}$ для некоторого $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда $R(x) = x^2$ определяет множества уровня L_k в $A(0)$ и $A(\infty)$. Для каждого $x \in L_k$ определяется его двоичный код (α_0 фиксировано):

$$(2.37) \quad x \text{ кодируется } \begin{cases} 0, & \text{если } (2^k \alpha_0) \bmod 1 \leq \frac{1}{2\pi} \arg h^k(x) \leq \left(2^k \alpha_0 + \frac{1}{2}\right) \bmod 1, \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

На рис. 31 показано двоичное разбиение $A(0)$ и $A(\infty)$ для $\alpha_0 = 0$ (0 кодируется белым цветом, а 1 — черным).

Кодирование (2.37) порождает на L_k клеточную структуру, и очевидно, что углы (2.35) совпадают с теми лучами, которые в конце концов (т. е. вплоть до единичной окружности) разделяют черные и белые клетки. Таким образом (2.37) объявляет специальные углы (2.35). Клеточная структура на рис. 31 допускает и другую очевидную и полезную интерпретацию. Пусть α таково, что

$$(\alpha - k/2^n) \bmod 1 \neq 0$$

при всех $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда луч $r_0(\alpha)$ в каждом из L_k пересекает только одну клетку (обозначим C_k). Следовательно, можно буквально прочитать двоичное представление числа α :

$$(2.38) \quad \begin{cases} a_k = \begin{cases} 0, & \text{если } C_{k-1} \text{ белая, } k = 1, 2, \dots, \\ 1, & \text{если нет,} \end{cases} \\ \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}. \end{cases}$$

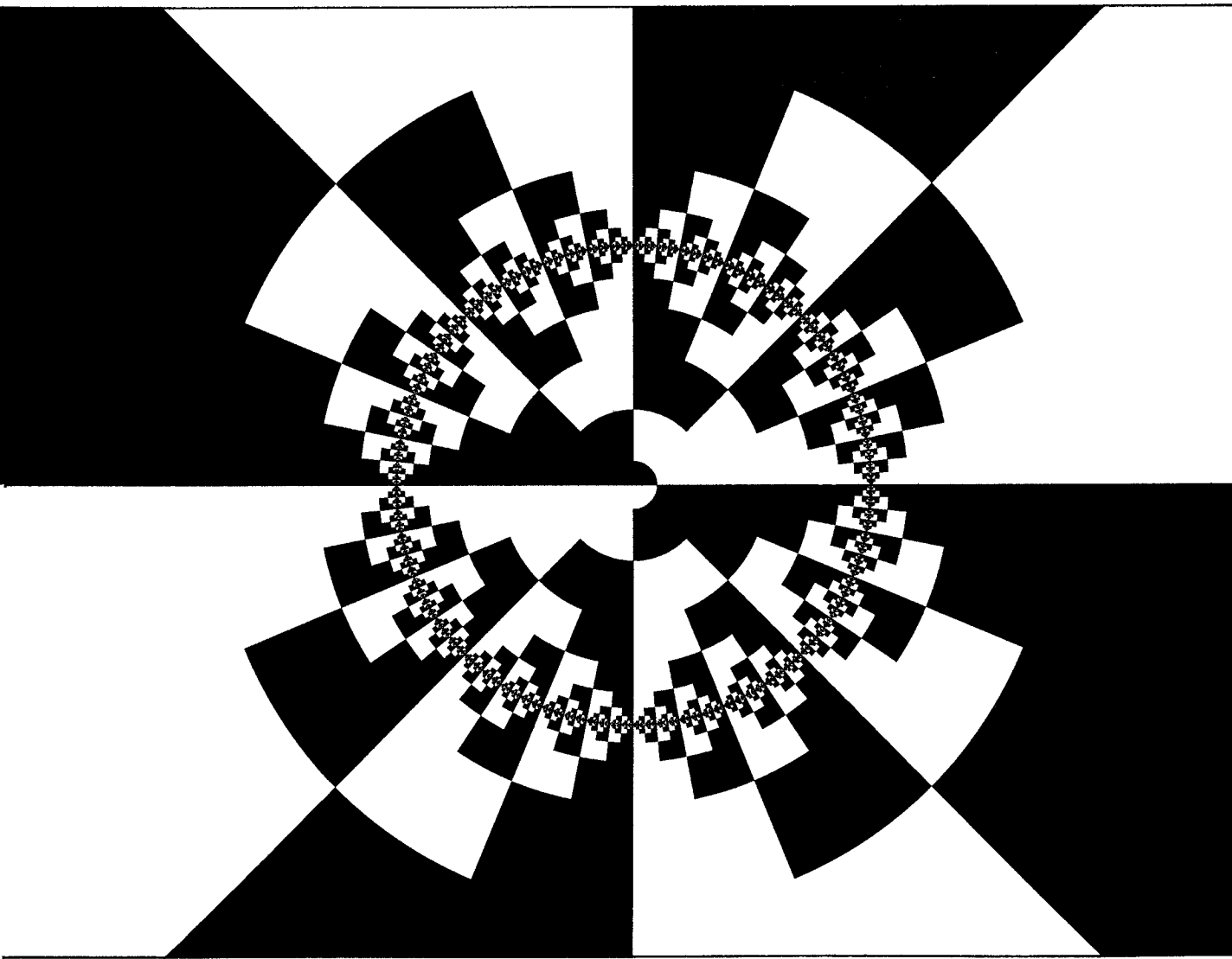


Рис. 31. Двоичное разбиение $A(0)$ и $A(\infty)$ для $x \rightarrow x^2$ (белый $\leftrightarrow 0$, черный $\leftrightarrow 1$).

В качестве приложения снова рассмотрим отображение $p_c(x) = x^2 + c$. Точка $x = \infty$ является сверхпритягивающей неподвижной точкой при любом c , и нам бы хотелось взглянуть на двоичное разложение множества $A(\infty)$. С точностью до замены координат $x = \frac{1}{u}$ полиномиальное отображение p_c эквивалентно отображению

$$R_c(u) = \frac{u^2}{1 + cu^2},$$

которое при любом c имеет сверхпритягивающую неподвижную точку $u = 0$. Следовательно, в силу (2.34) в окрестности точки 0 R_c эквивалентно отображению $z \mapsto z^2$. На самом деле если c принадлежит множеству Мандельброта, то R_c не имеет в $A(0)$ критических точек, отличных от точки $0 = 1/\infty$, и поэтому сопрягающее отображение можно продолжить на все множество $A(0)$. Иначе говоря, если заменить R в (2.37) на R_c с таким c , то получим двоичное разбиение $A(0)$, с помощью которого можно прочи-

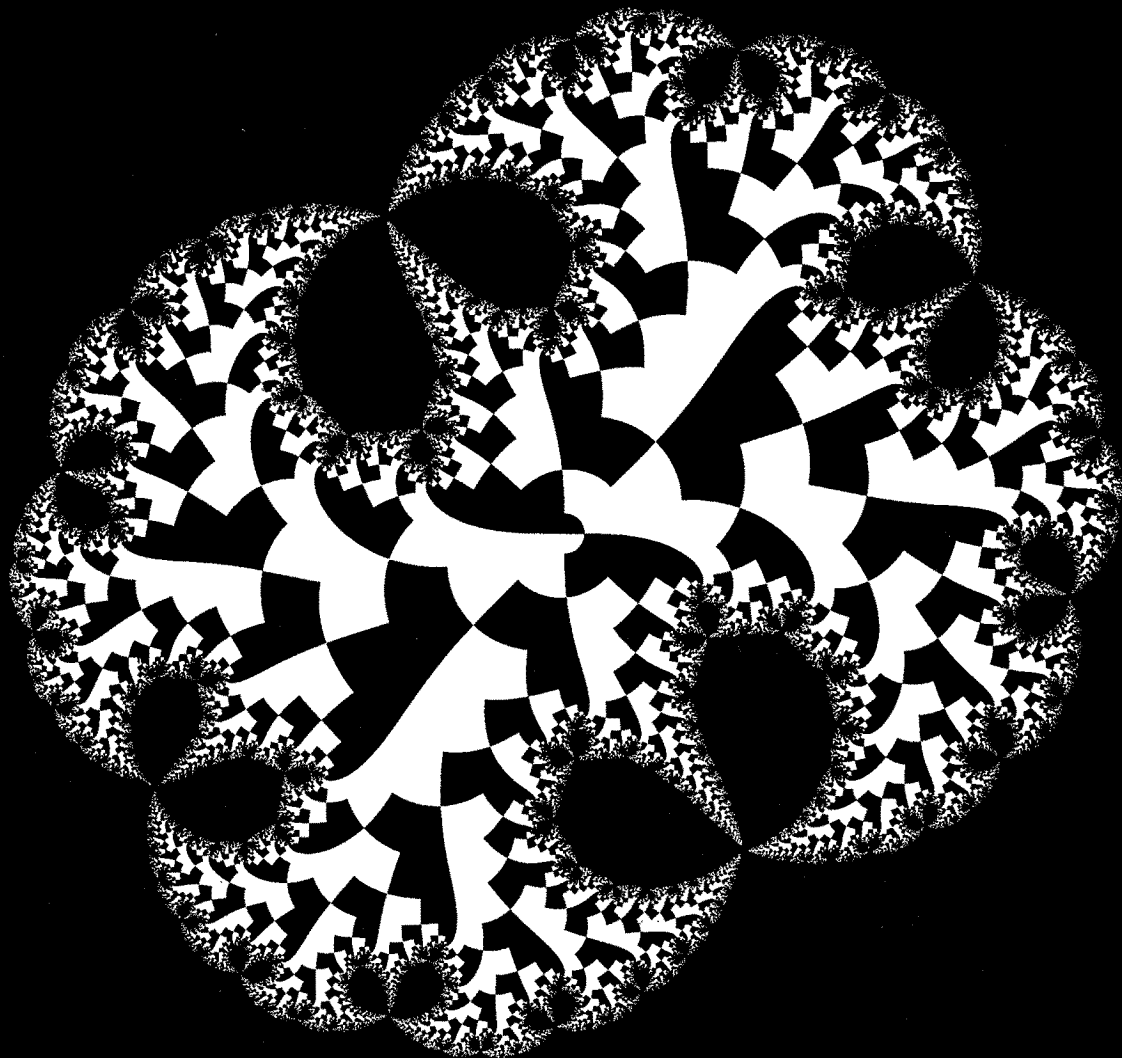


Рис. 32. Двоичное разбиение $A(0)$ для $u \rightarrow u^2/(1 + cu^2)$, $c = -0.12 + 0.74i$; это множество Жюлиа соответствует рис. 4 «навыворот».

тать двоичные адреса точек из $\partial A(0)$ (см. рис. 32). Такая интерпретация вытекает из (2.34). Сопрягающее отображение Φ можно выбрать так, чтобы $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(0) = 1$. Тогда двоичное разбиение $A(0)$ будет декодировать трансформированные углы $\Phi(r_0(\alpha))$, где $r_0(\alpha)$ обозначает любой внутренний угол в единичном круге. В этом смысле двоичные разбиения оказываются полезным средством экспериментальной идентификации внешних/внутренних углов (см. специальные разд. 4 и 5). Другие приложения обсуждаются в разд. 8.

3. Классификация критических точек Салливана

Из-за сложности результатов компьютерных экспериментов может сложиться впечатление о том, что глобальную динамику, задаваемую рациональным отображением R , понять невозможно. Но уже Жюлиа и Фату знали, что многие ее качественные аспекты тесно связаны с динамикой критических точек отображения R .

- (3.1) Число $c \in \mathbb{C}$ называют *критическим значением* функции R , если уравнение $R(x) - c = 0$ имеет вырожденный нуль, т. е. нуль, кратность которого больше 1. Любой такой нуль называют *критической точкой*. Конечные критические точки — это решения уравнения $R'(x) = 0$.

Для того чтобы сформулировать замечательные результаты Д. Салливана (1983 г.) [Su], нам будет нужно понятие бассейна непосредственного притяжения.

Пусть x_0 — притягивающая или рациональная нейтральная неподвижная точка отображения R , и пусть $A(x_0)$ обозначает ее бассейн притяжения. *Бассейном непосредственного притяжения* называют связную компоненту $A^*(x_0)$ множества $A(x_0)$, которая содержит точку x_0 . На рис. 3 $A^*(x_0) = A(x_0)$, и это является одной из причин того, что в этом примере J_c в действительности оказывается жордановой кривой (т. е. множеством, гомеоморфным единичной окружности). На рис. 6 видна параболическая неподвижная точка с заштрихованной областью, определяющей $A^*(x_0)$. Рисунки 53 g—i показывают типичные примеры притягивающих неподвижных точек ($x_0 = 1$), для которых $A^*(x_0) \neq A(x_0)$ (см. также фото 10). Оказывается, что $A^*(x_0)$ либо односвязно (не имеет дырок), либо бесконечносвязно (имеет бесконечное число дырок). Последний случай иллюстрируют фото 7—9: белые пятна означают дырки в увеличенной части $A^*(x_0)$.

Можно также определить бассейн непосредственного притяжения произвольной притягивающей или рационально нейтральной периодической траектории $\gamma = \{x_0, R(x_0), R^2(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$ периода n (т. е. $R^n(x_0) = x_0$). Сначала обозначим через $A^*(x, S)$ бассейн непосредственного притяжения неподвижной точки x произвольного отображения S . Затем для периодических траекторий периода n положим

$$(3.2) \quad A^*(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n-1} A^*(R^k(x_0), R^n).$$

На рис. 4 заштрихованная область определяет $A^*(\gamma)$ для притягивающего 3-цикла. Аналогично если $\gamma = \{x_0, R(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$ — периодическая траектория периода n , которая иррационально нейтральна и такова, что R^n линеаризуемо в точке x_0 , то положим

$$(3.3) \quad D(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n-1} R^k(D_0),$$

где D_0 — это диск Зигеля точки x_0 для R^n . (В случае, когда x_0 — неподвижная точка, γ — просто множество $\{x_0\}$.)

Теперь мы можем сформулировать результат Салливана [Su], полностью характеризующий множество Фату F_R :

Отсутствие блуждающих областей

- (3.4) Множество Фату $F_R = \bar{\mathbb{C}} \setminus J_R$ имеет счетное число связных компонент. Любая такая компонента X_0 будет в конце концов периодической (т. е. при некотором k $R^k(X_0)$ — периодическая компонента множества F_R). Короче говоря, R не имеет *блуждающих областей*.

Таким является ответ на один из главных вопросов, оставшихся открытыми в работах Жюлиа и Фату. (Салливан использует при доказательстве теорию Тейхмюллера и теорию фуксовых и клейновых групп.) Тем самым стала возможной полная классификация, основанная на фундаментальных результатах Жюлиа и Фату.

Классификация. Разбиение на пять типов

- (3.5) Пусть X_0 — периодическая связная компонента множества F_R , n — ее период и

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n-1} R^k(X_0)$$

— связанный с нею цикл¹⁾. Тогда Γ представляет собой одно из следующих множеств:

- (А) Бассейн непосредственного притяжения $A^*(\gamma)$ некоторого сверхпритягивающего цикла γ .
- (Б) Бассейн непосредственного притяжения $A^*(\gamma)$ некоторого притягивающего цикла γ .
- (В) Бассейн непосредственного притяжения $A^*(\gamma)$ некоторого параболического цикла γ .
- (Г) Совокупность дисков Зигеля $D(\gamma)$ некоторого иррационально нейтрального цикла γ [см. (3.3)].
- (Д) Совокупность колец Эрмана

$$H = \bigcup_{k=0}^{n-1} R^k(H_0).$$

Последняя альтернатива была открыта М. Эрманом всего несколько лет назад. Она не связана с какой-либо периодической точкой, но несколько напоминает случай (Г): на H_0 отображение R^n аналитически эквивалентно повороту стандартного кольца на иррациональный угол.

Каждый из случаев (А)—(Д), кроме того, характеризуется критическими точками.

Детектирование с помощью критических точек

- (3.6) В случаях (А)—(В) $A^*(\gamma)$ содержит по крайней мере одну критическую точку. В случаях (Г) и (Д) граница $D(\gamma)$ или H принадлежит замыканию положительной полутраектории некоторой критической точки (т. е. найдется критическая точка x_c , для которой $Or^+(x_c)$ как угодно близко подходит к $\partial D(\gamma)$ или ∂H).

Если d — степень рациональной функции R , то легко увидеть, что R имеет не более чем $2d - 2$ критических точек. (В случае когда R является отношением двух взаимно простых полиномов, степень R равна максимальной из их степеней.) Поэтому R может иметь лишь конечное число циклов типа (А)—(Д). Не известно, является ли $2d - 2$ верхней оценкой их числа.

¹⁾ Заметим, что хотя мы и использовали термин цикл для Γ само множество Γ может вообще не содержать ни одной периодической точки (как, например, в случае (Д)).

Есть предположение, что граница $D(\gamma)$ (см. (Г)) всегда содержит некоторое критическое значение. Правдоподобность этого предположения подтвердил М. Эрман, доказавший его истинность для $R(x) = z^m + a$, $m = 2, 3, \dots$, $a \in \mathbb{C}$.

В качестве замечательного примера применения (3.6) отметим следующий пример из [MSS]: Пусть $R(x) = ((x - 2)/x)^2$, тогда $J_R = \bar{\mathbb{C}}$! Для того чтобы это увидеть, заметим, что критическими точками R являются $\{2, 0\}$ и что $2 \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1$ и $R'(1) = -4$. Таким образом, множество $\bar{\mathbb{C}} \setminus J_R$ должно быть пустым, поскольку в противном случае можно было бы применить (3.5) и (3.6).

4. Множество Мандельброта

Для полиномов второй степени $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ почти полную классификацию соответствующих множеств Жюлиа можно дать при помощи множества Мандельброта. Прежде всего заметим, что $p(x)$ сопряжено с $p_c(z) = z^2 + c$ посредством преобразования координат $x \mapsto z = a_2x + a_1/2$, где $c = a_0a_2 - \frac{a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1}{2}\right)$. Это преобразование сдвигает конечную критическую точку $x = -a_1/2a_2$ в начало координат. Таким образом, оказывается достаточным изучить природу множеств Жюлиа для $p_c(z)$.

Точка ∞ будет сверхпритягивающей неподвижной точкой отображения $z \mapsto p_c(z)$. Следовательно, множество Жюлиа J_c при каждом $c \in \mathbb{C}$ можно определить как $J_c = \partial A(\infty)$. Из теории Жюлиа и Фату вытекает, что J_c будет либо связным, либо канторовым множеством [Bl]. Как раз это различие и отражено в определении множества Мандельброта:

$$(4.1) \quad M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ связно}\}.$$

Рисунки 3, 4, 6—10, 12 и 14 дают примеры связных множеств Жюлиа, в то время как на рис. 11, 13 и 15 показаны множества Жюлиа, обладающие канторовой структурой. Среди связных множеств Жюлиа имеются как ограничивающие некоторую внутреннюю область, так и подобные изображенному на рис. 12, являющиеся дендритами без внутренности вообще.

Для вычисления М. Б. Б. Мандельброт воспользовался мощными результатами Жюлиа и Фату, согласно которым основные черты динамики рационального отображения вытекают из поведения положительных полутраекторий его критических точек (см. специальный разд. 3). Любой притягивающий или рационально нейтральный цикл содержит в своей области притяжения по крайней мере одну критическую точку. Но $p_c(z)$ имеет лишь две критические точки $z = 0$ и ∞ , и они не зависят от c . Точка ∞ сама является притягивающей неподвижной точкой, так что в качестве интересующей нас критической точки может выступать только оставшаяся точка 0. Выбирая, например, значение $c = 1$, мы увидим, что существуют такие значения c , при которых $0 \in A(\infty)$, поскольку $0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 26 \mapsto 677 \dots$. При этих значениях много аттрактора, кроме ∞ , быть не может. С другой стороны, случай $c = 0$ показывает, что существуют и такие c , при которых второй аттрактор имеется: при $p_0(z) = z^2$ точка $z = 0$ притягивает все z , у которых $|z| < 1$, т. е. $J_0 = S^1$.

Теперь в соответствии с Жюлиа и Фату J_c является связным тогда и только тогда, когда $0 \notin A(\infty)$ (см. [Bl]), т. е.

$$(4.2) \quad M = \{c \in \mathbb{C} : p_c^k(0) \not\rightarrow \infty, \text{ когда } k \rightarrow \infty\}.$$

Такое определение очень удобно для численных исследований. Нужно выбрать решетку точек $c \in \mathbb{C}$ и для каждой ее точки проверить, будут ли последовательности $0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots$ после N итераций оставаться в пределах заданной верхней границы m или нет. (Для рис. 2 было выбрано $N = 1000$ и $m = 100$.)

А. Дуади и Дж. Х. Хаббард [DH1] обнаружили одну глубокую аналитическую характеристику M . Они исследовали природу *наполненных множеств Жюлиа*

$$(4.3) \quad K_c = \{z \in \mathbb{C} : p_c^k(z) \not\rightarrow \infty, \text{ когда } k \rightarrow \infty\}$$

и установили, что для $c \in M$ дополнение K_c можно отобразить на дополнение замкнутого единичного круга \bar{D} с помощью некоторого конформного отображения φ_c ,

$$(4.4) \quad \varphi_c : \bar{\mathbb{C}} \setminus K_c \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}.$$

Примечательно, что это отображение можно выбрать так, чтобы

$$(4.5) \quad \varphi_c \circ p_c \circ \varphi_c^{-1} = p_0.$$

Заметим, что локально существование φ_c гарантируется результатом Бётхера (2.34). (4.5) позволяет охарактеризовать M так:

$$(4.6) \quad M = \{c \in \mathbb{C}: p_c \text{ на } A(\infty) \text{ эквивалентно } z \rightarrow z^2\}.$$

Сопряжение (4.5) возможно и для $c \notin M$, но в таком случае оно имеет место не на всем $A(\infty)$. Тем не менее его всегда можно продолжить так, чтобы оно имело место в точке $z = c$ и чтобы, положив

$$(4.7) \quad \psi(c) := \varphi_c(c),$$

определить отображение $\psi: \bar{\mathbb{C}} \setminus M \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$, являющееся конформным изоморфизмом. Таким способом Дуади и Хаббард продемонстрировали, что

$$(4.8) \quad M \text{ является связным множеством}$$

(т. е. M не содержится в объединении двух непустых и непересекающихся открытых множеств). Однако до сих пор не известно, является ли M локально связным, т. е. обладает ли всякая его часть $U \cap M$ (U открыто) тем свойством, что для любого $z \in U \cap M$ найдется такая окрестность $V \subset U$, $z \in V$, что $V \cap M$ связно. Вся трудность в том, что это невозможно вывести из свойств K_c , поскольку имеются c , при которых K_c локально связным не будет. И все же считается, что M должно быть локально связным. Это бы повлекло за собой важные следствия, одно из которых обсуждается в специальном разд. 5.

Еще одна характеристика множества M была недавно получена Ф. Хеселером [Ha]. Используя замену координат $z = 1/u$, можно трансформировать p_c в рациональное отображение $R_c(u) = u^2/(1 + cu^2)$. Тогда при всех c сверхпритягивающей неподвижной точкой будет точка $u = 0$ и в ее окрестности R_c будет сопряжено с R_0 (но, конечно, только для $c \in M$ сопряжение можно продолжить на весь бассейн притяжения $A(0)$). Пусть такое локальное сопряжение осуществляет функция $\Phi_c(u) = u + a_2(c)u^2 + a_3(c)u^3 + \dots$. Тогда

$$(4.9) \quad M = \{c \in \mathbb{C}: |a_k(c)| \leq k, k = 2, 3, \dots\}.$$

Это порождает интригующую связь с гипотезой Бибербаха, недавно доказанной Л. де Бранже [Br]. Пусть

$$S = \{f: D \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, f \text{ — аналитическая и инъективная}\},$$

где D обозначает открытый единичный круг; функции из S называют гладкими. Гипотеза Бибербаха заключалась в следующем:

$$(4.10) \quad \text{Если } f \in S, \text{ то } |a_k| \leq k, k = 2, 3, \dots$$

Как следствие (4.9) Ф. Хеселер получил

$$(4.11) \quad M \subset \{c \in \mathbb{C}: |c| \leq 2\}.$$

Эту оценку нельзя улучшить, поскольку $c = -2$ принадлежит M .

Рассмотрим теперь M более детально. Исключительно интересной частью M является

$$(4.12) \quad M' = \{c \in \mathbb{C}: p_c \text{ имеет конечный притягивающий цикл}\}.$$

При каждом c может существовать только один такой цикл, поскольку всякий аттрактор поглощает какую-нибудь критическую точку. Оказывается, что множество M' открыто и состоит из бесконечного числа связных компонент. Каждая компонента характеризуется периодом соответствующего цикла. Например, главная кардиоиды содержит все значения c , для которых p_c имеет устойчивую неподвижную точку. Вычисляя $\lambda = dp_c/dz$ в этой не-

подвижной точке и используя условие устойчивости $|\lambda| < 1$, находим, что кардиоида заключает в себе множество

$$(4.13) \quad M'_1 = \left\{ c \in \mathbb{C} : c = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right), |\lambda| < 1 \right\}.$$

Для того чтобы описать произвольную компоненту W множества M' , Дуади и Хаббард рассмотрели собственное значение $\varrho_W(c)$ притягивающего цикла, существующего при $c \in W$. Они показали, что отображение

$$(4.14) \quad \varrho_W: W \rightarrow D$$

является конформным изоморфизмом. Таким образом, в каждой компоненте W корректно определяется ее *центр* c_W , которому соответствует сверхустойчивый притягивающий цикл $\varrho_W(c_W) = 0$.

Пусть для данного $c \in W$ множество $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ есть аттрактор. Тогда $\varrho_W(c) = 2^k \prod_i z_i$. Если произведение равно нулю, то циклу должна

принадлежать и критическая точка $z = 0$. Следовательно, центры компонент, определяемых k -периодическими аттракторами, задаются уравнением

$$(4.15) \quad p_c^k(0) = 0.$$

Степень этого уравнения относительно c равна 2^{k-1} , поэтому с его помощью можно определить до 2^{k-1} компонент, содержащих k -периодические аттракторы. Приведем описание центров, для которых соответствующие им периоды не превышают 4.

(4.16) $k = 1$: $c = 0$; соответствующая компонента M'_1 множества M' определяется в (4.13).

(4.17) $k = 2$: $c^2 + c = 0$ имеет два решения $c = 0$ и $c = -1$. Центр $c = 0$ уже был получен при $k = 1$. Поэтому имеется единственная компонента $W = M'_2$ с устойчивыми траекториями периода 2; это круг радиуса $1/4$ с центром в точке $c = -1$.

(4.18) $k = 3$: $(c^2 + c)^2 + c = 0$. Если исключить решение $c = 0$, то останется решить уравнение $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$. Вещественное решение $c = -1.7549$ будет центром вторичного множества Мандельброта, показанного на фото 32, в то время как два комплексных решения $c = -0.1226 \pm 0.7449i$ будут центрами самых больших почек на M'_1 .

(4.19) $k = L$: Два из восьми решений уравнения $p^4(0) = 0$ были уже получены при $k = 2$. Из оставшихся шести два лежат на действительной оси: $c = -1.3107$ является центром почки, вырастающей из M'_2 через удвоение периода: $c = -1.9408$ принадлежит сателлиту, находившемуся около вершины главной антенны. Четырьмя комплексными решениями будут значения $c = 0.282 \pm 0.530i$, соответствующие почкам на M'_1 , и $c = -0.1565 \pm 1.0323i$, одно из которых является центром фигуры Мандельброта, помещенной на обложке этой книги.

В дополнение к центру $c = 0$ имеется 15 центров с периодом 5 и т. д. Очевидно, что с ростом периодов центры будут располагаться все ближе к границе множества M .

Отображение (4.14) можно продолжить и на границы W и D . Если $c \in \partial W$ и $\varrho_W(c) = \exp(2\pi i\alpha)$, то говорят, что c является точкой *внутреннего угла* α . Точка внутреннего угла $\alpha = 0$ называется *корнем* W ; для компоненты W , прорастающей из другой компоненты множества M' , он расположен в точке прорастания, а для компоненты W , не отпочковывающейся от другой, и потому называемой *примитивной*, он находится на острие ее кар-

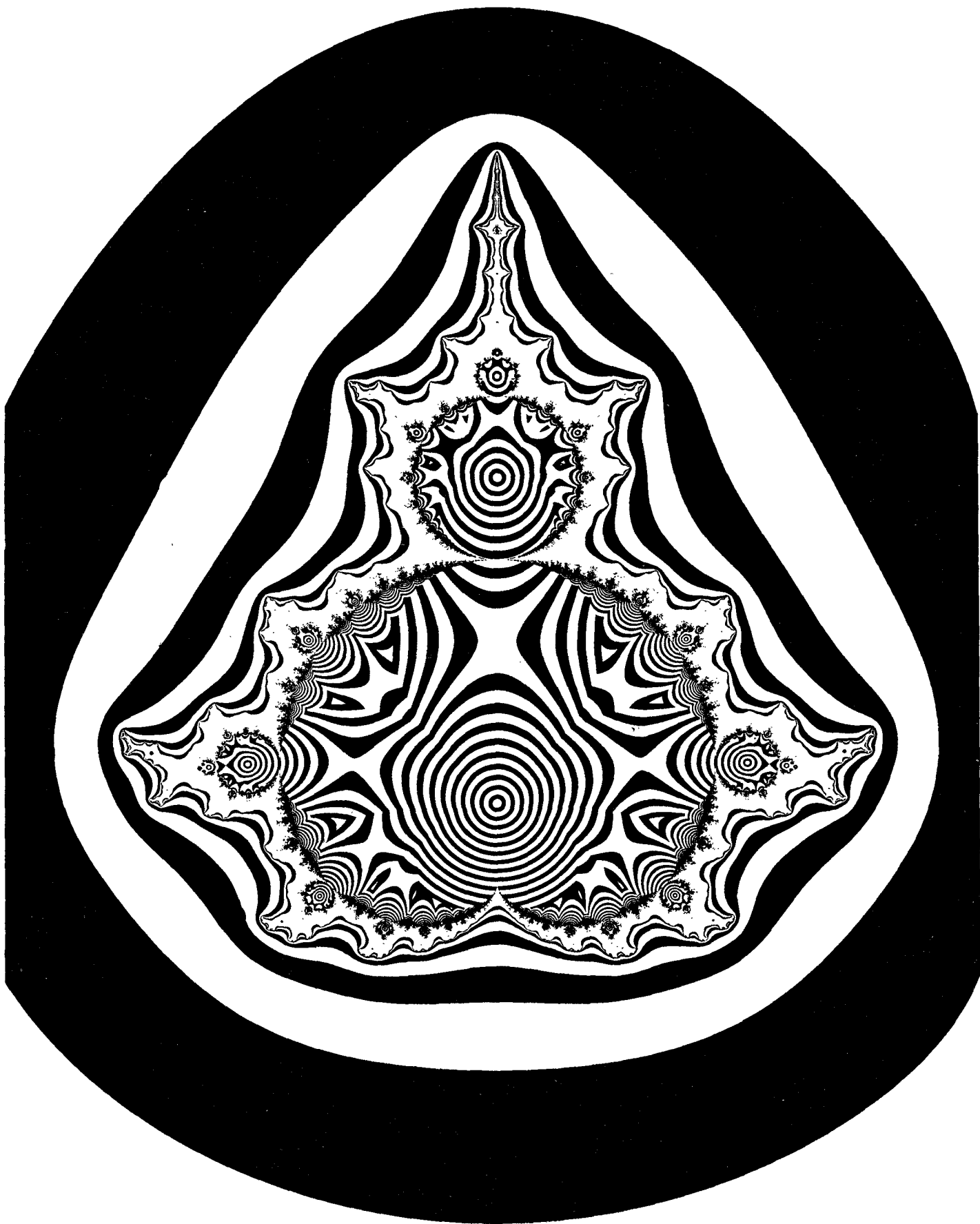


Рис. 33. Множества уровня $\alpha(c)$ (см. (4.24)) в дополнительных цветах для $c \in M$ (по результатам А. Бартена). Вне M : эквипотенциальные линии.

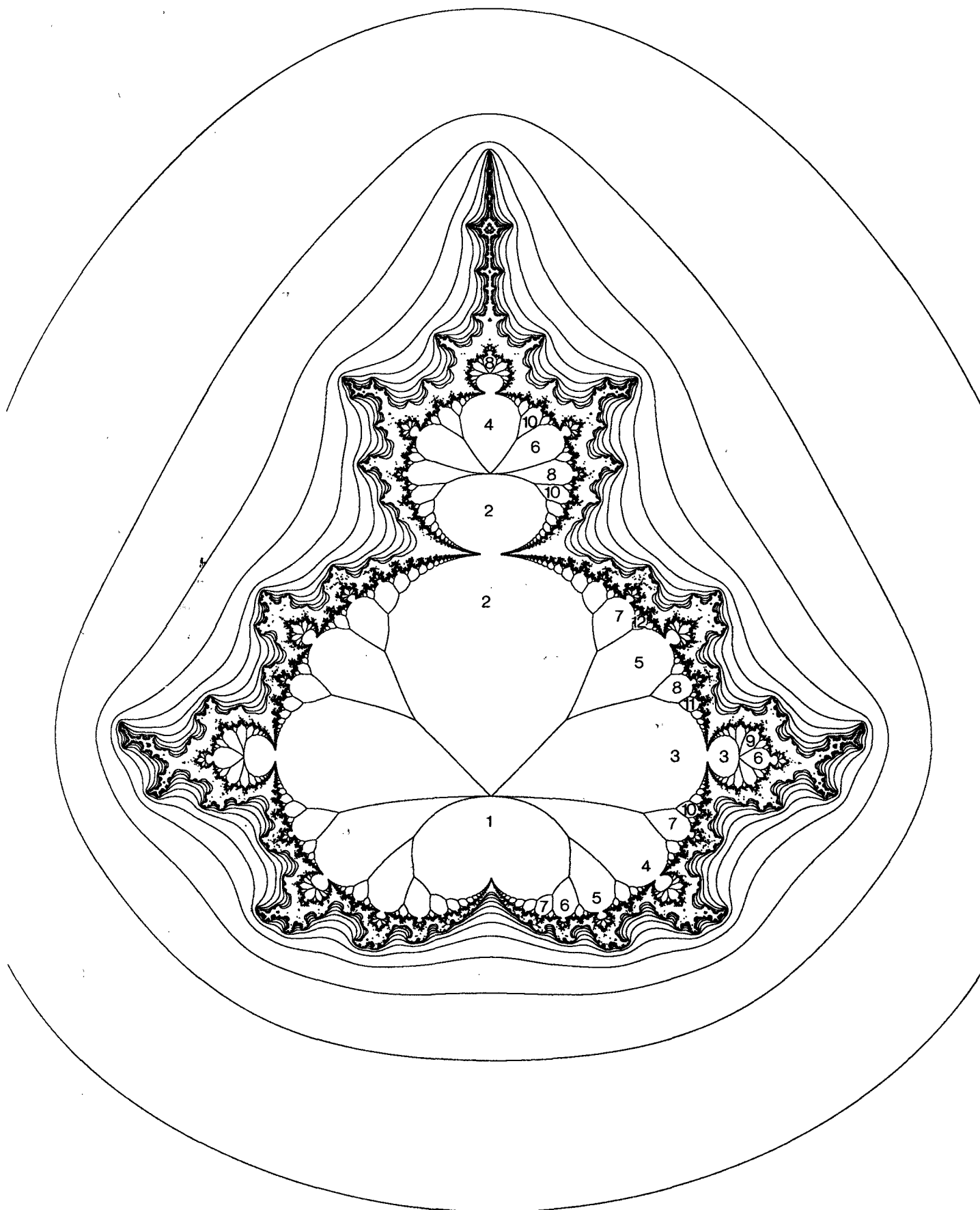


Рис. 34. Области $\text{index}(c) = \text{const}$ (см. (4.24)) для $c \in M$. Индексы располагаются в соответствии с последовательностями Фибоначчи. Вне M : эквипотенциальные линии.

диоиды. Если $c \in \partial W$ является точкой рационального внутреннего угла $\alpha = p/q$, то в точке c отпочковывается компонента-*сателлит*, притягивающие циклы которой имеют в q раз больший период, чем период циклов компоненты W . Например, положив $\lambda = \exp(2\pi i p/q)$ в (4.13), можно найти на M'_1 точки, к которым прикрепляются сателлиты. Для $p/q = 1/2$ получим $c = -3/4$; почки периода 3 ($p/q = \pm 1/3$) прикрепляются к точкам $c = (-1 \pm 3\sqrt{3}i)/8 = -0.1250 \pm 0.6495i$, а почки периода 4 растут из точек $c = 1/4 \pm i/2$. При всех этих значениях c отображение p_c имеет рационально нейтральные циклы. Рисунки 6 и 8 отвечают случаям $p/q = 3/5$ и $1/20$; для фото 18 было выбрано $p/q = 1/11$. С другой стороны, если внутренний угол будет достаточно иррациональным в смысле диофантова условия (2.16), то возникнут диски Зигеля. Рис. 7 и фото 25 получены при $c = \varrho_{M'_1}^{-1} \cdot (\exp\{2\pi i \alpha\})$, где $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ (см. (4.13)).

До сих пор мы рассматривали множества M' с их центрами и корнями. Другими бросающимися в глаза особенностями множества M являются вершины и точки ветвления его антенн. Например, значение $c = -2$ характеризуется попаданием траектории критической точки в отталкивающую неподвижную точку $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2 \rightarrow 2$. В общем случае для значений c , о которых идет речь, точка $z = 0$, не являясь периодической, будет предпериодической; она в конце концов попадает в отталкивающий цикл:

$$(4.20) \quad p_c^n(0) = p_c^{n-k}(0), \quad n \geq 3, \quad n-2 \geq k \geq 1.$$

Такие значения c известны под названием точек Мисюревича. Рассмотрим только самые простые случаи $n = 3$ и $n = 4$:

$$(4.21) \quad n = 3, \quad k = 1: \\ (c^2 + c)^2 + c = c^2 + c. \text{ Исключив решение } c = 0 \text{ (при котором, как известно, точка } z = 0 \text{ будет периодической), будем иметь только } c = -2, \text{ т. е. вершину главной антенны.}$$

$$(4.22) \quad n = 4, \quad k = 1: \\ ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c = (c^2 + c)^2 + c. \text{ Снова исключив } c = 0, \text{ а также } c = -2, \text{ получим три решения. Действительное решение } c = -1.54369 \text{ является одной из «точек слияния полос» в исследовании Гроссманна и Томэ [GT], комплексные решения } c = -0.22816 \pm \pm 1.11514i, \text{ по-видимому, лучше всего заметны на фото 28, где они являются вершинами антенн, проникающих наиболее далеко в направлении мнимой оси.}$$

$$(4.23) \quad n = 4, \quad k = 2: \\ ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c = c^2 + c. \text{ После исключения решений } c = 0, -1, -2, \text{ которые уже обсуждались, у нас останутся } c = \pm i. \text{ Эти значения } c \text{ отмечают концы боковых антенн в верхней и нижней частях фото 28.}$$

Множество Жюлиа J_c для $c = i$ показано на рис. 12. Его структура дендрита будет типичной для тех c , которые получаются из условий (4.20) и отображаются в отталкивающие циклы: K_c не будет иметь внутренних точек, но будет локально связным.

С ростом n получение точек $c \in M$ из уравнений (4.15) и (4.20) становится все более затруднительным. Поэтому понятие *внешних углов*, разработанное Дуади и Хаббардом, оказывается исключительно удачным. Интуитивно оно воспринимается как очень привлекательная характеристика точек $c \in \partial M$, а благодаря мощному алгоритму, использующему «дерево Хаббарда», эта характеристика может легко принять точную форму. Мы описываем это понятие в специальном разд. 5.

Рисунки 33 и 34 представляют часть результатов исследования внутренней структуры множества M . Для $c \in M$ определим

$$\begin{aligned}
 &\alpha(c) = \inf \{ |p_c^k(0)| : k = 1, 2, \dots \} \\
 (4.24) \quad &\text{и} \\
 &\text{index}(c) = k, \text{ если } \alpha(c) = |p_c^k(0)|.
 \end{aligned}$$

На рис. 33 чередованием цветов показаны уровни $\alpha(c)$, а на рис. 34 — распределение $\text{index}(c)$ на M . Замечательно, что каждый спутник сопутствует определенной компоненте с некоторым фиксированным индексом и что функция $\text{index}(c)$ определяет разбиение Фибоначчи на M .

5. Внешние углы и деревья Хаббарда

Хорошо известно, что аналитические функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ являются мощным средством решения задач двумерной электростатики. Из дифференциальных уравнений Коши—Римана вытекает, что как $\operatorname{Re} f$, так и $\operatorname{Im} f$ — решения уравнения Лапласа $\nabla^2 F = 0$ и что кривые семейства $\operatorname{Re} f = \text{const}$ ортогонально пересекают кривые семейства $\operatorname{Im} f = \text{const}$. Следовательно, если $u = \operatorname{Re} f$ описывает, скажем, поверхность заряженного проводника, то линии $\operatorname{Re} f = \text{const}$ будут *эквипотенциальными* линиями, а $\operatorname{Im} f = \text{const}$ — соответствующими *силовыми линиями поля*.

Рассмотрим случай $z \rightarrow w(z) = \ln z$. При $z = |z| \exp(2\pi i \alpha)$ имеем $w(z) = \ln |z| + 2\pi i \alpha$. Если единичную окружность $|z| = 1$ считать заряженным проводником, то в окружающей ее плоскости потенциал будет задаваться равенством $u(z) = \operatorname{Re} w(z) = \ln |z|$, а силовые линии — условием $\alpha = \text{const}$. Полезно рассматривать $w(z)$ как конформное отображение, переводящее $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$ (D — единичный круг) в полупространство $\operatorname{Re} w > 0$, где $\operatorname{Im} w$ берется по модулю 2π . Важным оказывается то, что при этом эквипотенциальные линии $|z| = \text{const}$ отображаются в эквипотенциальные линии $\operatorname{Re} w = \text{const}$, а силовые линии $\alpha = \text{const}$ — в силовые линии $\operatorname{Im} w = \text{const}$.

Обобщая этот факт, можно сказать, что проблема потенциала будет решена, если будет найдено конформное отображение, сводящее эту проблему к какому-либо известному случаю. Рассмотрим, например, заряженный отрезок

$$(5.1) \quad K = \{x \in \mathbb{C}: -2 \leq \operatorname{Re} x \leq 2, \operatorname{Im} x = 0\}.$$

К счастью, известно конформное отображение, связывающее $\mathbb{C} \setminus K$ и $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$, и это позволяет использовать все, что известно о заряженном диске:

$$(5.2) \quad \varphi: \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{D},$$

$$x \rightarrow z = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4}).$$

(Ветви, конечно, выбираются в соответствии с K). Обратное отображение даже проще: $x = \varphi_K^{-1}(z) = z + \frac{1}{z}$. Теперь потенциал несложно описать. Из представления

$$(5.3) \quad z(x) = \varphi_K(x) = |\varphi_K(x)| \exp(2\pi i \alpha_K(x))$$

получаем потенциал $u_K(x) = \ln |\varphi_K(x)|$ и силовые линии $\alpha_K(x) = \text{const}$. Число $\alpha_K(x)$ называют *внешним углом* точки x . Эквипотенциальные линии будут эллипсами

$$(5.4) \quad \frac{(\operatorname{Re} x)^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{(\operatorname{Im} x)^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1, \quad r > 1,$$

а силовые линии — гиперболоми

$$(5.5) \quad \frac{(\operatorname{Re} x)^2}{4 \cos^2 2\pi \alpha_K} - \frac{(\operatorname{Im} x)^2}{4 \sin^2 2\pi \alpha_K} = 1.$$

Связь между $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$ и $\mathbb{C} \setminus K$ показана на рис. 35.

Потенциал связных множеств Жюлиа

Давайте выясним связь между двумерной электростатикой и процессом $x \mapsto p_c(x) = x^2 + c$. Для начала заметим, что множество K в (5.1) является

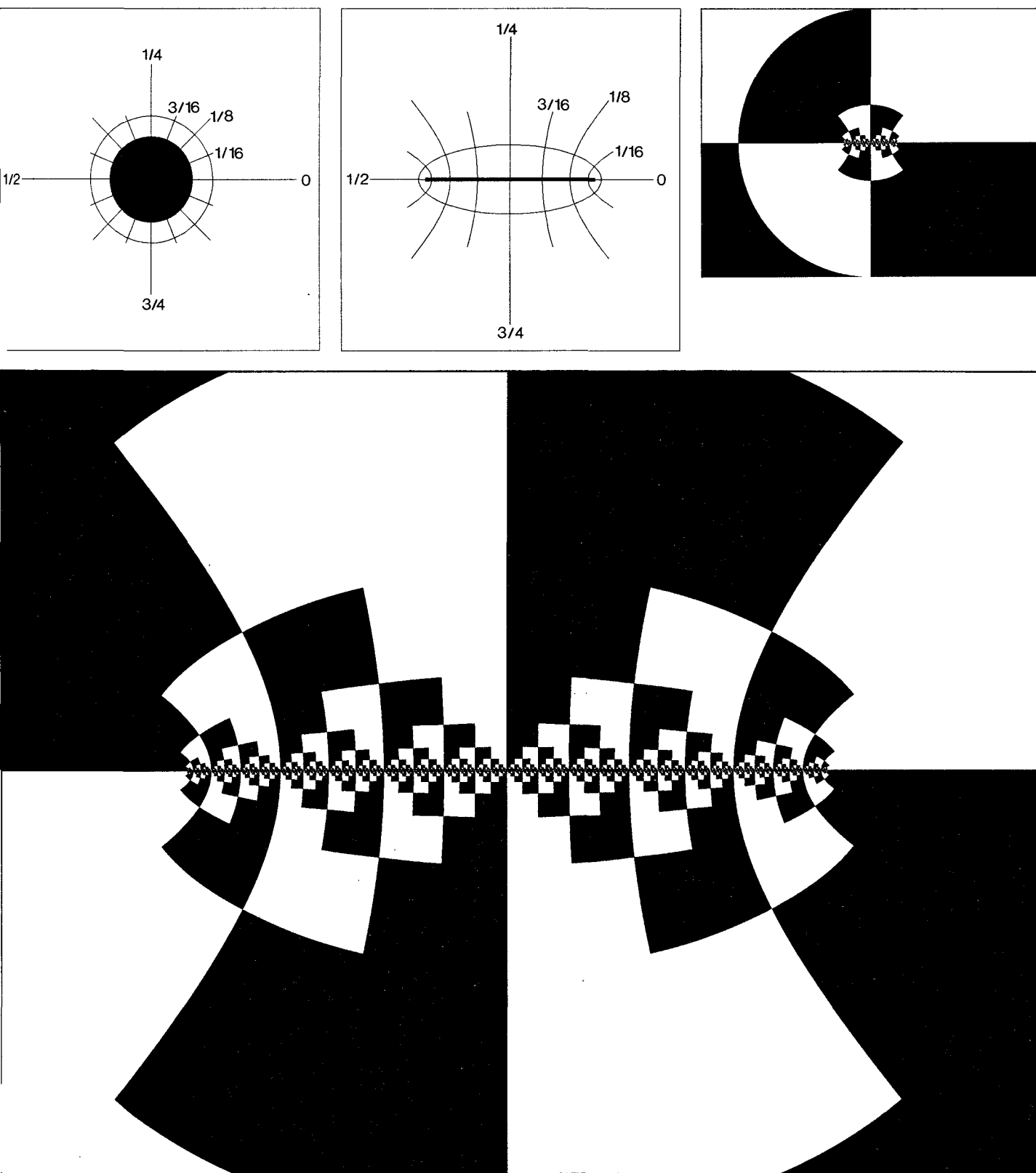


Рис. 35. Эквипотенциальные линии и силовые линии поля для множества Жюлиа отображения $x \rightarrow x^2 + c$, $c = -2$. Вверху слева и в середине: сопряжение φ_K ; вверху справа и внизу: двоичное разбиение $A(\infty)$ (белый $\leftrightarrow 0$, черный $\leftrightarrow 1$).

множеством Жюлиа для $c = -2$. Замечательным свойством отображения φ_K из (5.2) оказывается то, что оно сопрягает p_{-2} с p_0 :

$$(5.6) \quad \varphi_K \circ p_{-2} \circ \varphi_K^{-1} = p_0 \quad \text{на} \quad \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}.$$

Подобная сопряженность имеет место и для других значений c , даже если отображение φ_K нельзя задать в такой замкнутой форме, как в (5.2). При этом наполненные множества Жюлиа K_c (см. 4.3) будут компактными, а их дополнения $\mathbb{C} \setminus K_c$ — связными, как это следует из очень общих фактов римановой теории конформных отображений. Рассмотрим сначала случай $0 \in K_c$, когда само множество K_c связно. Точное утверждение [ДН1—3] звучит так: существует конформное отображение $\varphi_c: \bar{\mathbb{C}} \setminus K_c \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$, такое, что

$$(5.7) \quad \varphi_c \circ p_c \circ \varphi_c^{-1} = p_0.$$

Из этого общего факта сопряженности можно получить неожиданно хорошую аппроксимацию для *потенциала* $u_c(x) = \ln |\varphi_c(x)|$. Дело в том, что потенциал на $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$ увеличивается вдвое под действием p_0 . Соответственно для $x \in \bar{\mathbb{C}} \setminus K_c$ будем иметь $u_c(x) = \frac{1}{2} u_c(p_c(x)) = \dots = \frac{1}{2^n} u_c(p_c^n(x))$, и если $p_c^n(x)$ достаточно велико, то этот потенциал будет аппроксимировать потенциал круга:

$$(5.8) \quad u_c(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \ln |p_c^n(x)|.$$

Воспользовавшись теперь равенством $p_c^n(x) = (p_c^{n-1}(x))^2 + c$, получим

$$(5.9) \quad u_c(x) = \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left| 1 + \frac{c}{(p_c^{n-1}(x))^2} \right|.$$

Этот быстро сходящийся ряд можно использовать для вычисления эквипотенциальных линий вокруг самых сложных множеств Жюлиа.

А что можно сказать о *внешних углах*? С большого расстояния множество K_c похоже на точечный заряд. Следовательно, силовые линии внешних углов α_c будут приближаться к лучам $\arg(2\pi i \alpha_c)$, когда $r \rightarrow \infty$. При движении по любой силовой линии в сторону множества K_c возникает вопрос о возможности определить точку, в которой эта силовая линия заканчивается. Этот вопрос оказывается очень трудным. В силу теоремы Каратеодори отображение φ_c можно непрерывно продолжать на ∂K_c тогда и только тогда, когда K_c локально связно. Последнее выполнено для большинства значений $c \in M$, но не для всех. В общем случае можно только утверждать, что до границы K_c непрерывно продолжают силовые линии с *рациональными* внешними углами. Если $\alpha_c = p/q$ с нечетным q , то силовая линия закончится в отталкивающей периодической или рационально нейтральной точке. Если $\alpha_c = p/q$ с четным q , то концом силовой линии будет точка, не являющаяся периодической, но переходящая в некоторую периодическую точку за конечное число итераций. Угол $\alpha_c = 0$ всегда приводит к неустойчивой неподвижной точке отображения p_c , а $\alpha_c = 1/2$ — к ее прообразу из множества Жюлиа.

Двоичное представление внешних углов

Для рациональных внешних углов силовые линии можно продолжить до границы множества ∂K_c . Их концами будут образы рациональных точек $\exp(2\pi i p/q)$ единичной сферы S^1 при отображении φ_c^{-1} . С точки зрения сопряженности (5.7) эти точки на ∂K_c при итерировании p_c ведут себя точно так же, как соответствующие им точки на S^1 ведут себя при итерирова-

нии p_0 . Однако последний из указанных процессов изучен довольно хорошо. Для описания динамики точки $z = \exp(2\pi i p/q)$ под действием отображения $z \mapsto z^2$ имеется хороший способ:

Пусть $\alpha = p/q$, $0 < \alpha < 1$, и пусть

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1\},$$

представляет собой двоичную запись числа α . Кроме того, пусть p и q будут взаимно простыми и $q \neq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность двоичных знаков a_k числа α находит отображение при итерировании $z \mapsto z^2 \mapsto z^4 \mapsto \dots$:

$$a_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } z^{2^k} \text{ лежит в верхней полуплоскости,} \\ 1, & \text{если нет.} \end{cases}$$

Например, $p/q = 2/7$ изменяется следующим образом:

$$2/7 \rightarrow 4/7 \rightarrow 1/7 \rightarrow 2/7 \rightarrow \dots, \quad \text{т. е. } 2/7 = 0.\overline{10} \dots$$

Для угла $1/12$

$$1/12 \rightarrow 2/12 \rightarrow 4/12 \rightarrow 8/12 \rightarrow 4/12, \quad \text{т. е. } 1/12 = .0.\overline{001} \dots$$

Обратно, если при итерировании p_c можно проследить за движением на ∂K_c данной периодической, предпериодической или рационально нейтральной точки и определить последовательность нулей и единиц (относительно линии, связывающей внутри K_c точки $\alpha_c = 0$ и $\alpha = 1/2$), то эта последовательность и будет двоичным представлением соответствующего внешнего угла.

Потенциал множества Мандельброта

Мы уже знаем, что для $c \notin M$ множество Жюлиа J_c превращается в канторово множество. Нет оснований ожидать, что сопряженность (5.7) снова будет иметь место на всем дополнении к множеству $J_c = K_c$. Как подсказывает электростатическая аналогия, здесь потенциал должен иметь бесконечное число седловых точек, которые конформным отображением удалить невозможно. Однако должна сохраняться возможность установить сопряженность p_c и p_0 в некоторой окрестности точки ∞ . На самом же деле как показали Дуади и Хаббард эту сопряженность можно распространить на область, включающую точку $c = p_c(0)$.

Используя сопрягающую функции φ_c , они доказали, что

$$(5.10) \quad \psi_c := \varphi_c(c)$$

определяет конформный изоморфизм $\bar{\mathbb{C}} \setminus M \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$, с помощью которого решается проблема потенциала для внешности множества Мандельброта:

$$(5.11) \quad U_c = \ln |\psi(c)| = \ln |c| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left| 1 + \frac{c}{(p_c^{n-1}(c))^2} \right|.$$

Эта формула применялась в вычислениях для рис. 16.

Что касается соответствующих силовых линий, то, вообще говоря, не известно, можно ли их продолжить до границы M . Другими словами, не известно, является ли множество M локально связным. Но для рациональных внешних углов продолжение оказывается возможным, так что возникает задача параметризации рациональной части границы M в терминах этих внешних углов.

На ∂M различают два вида точек, для которых сохраняется возможность определить внешние углы. С одной стороны, существуют значения

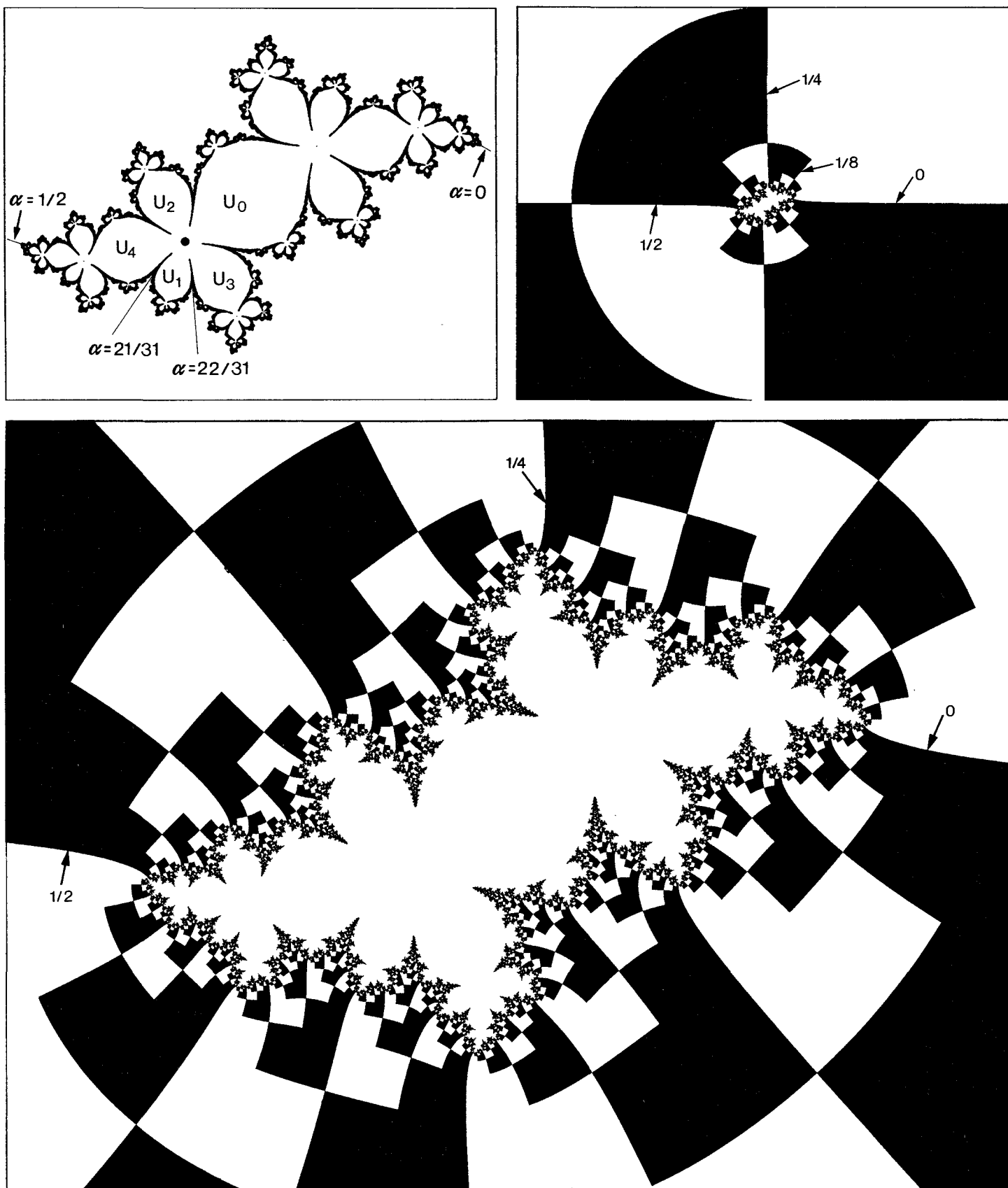


Рис. 36. Внешние углы и двоичное разбиение $A(\infty)$ в параболической ситуации; $x \rightarrow x^2 + c$, $c = -0.481762 - 0.531657i$. Вверху слева: множество Жюлиа; вверху справа: двоичное разбиение $A(\infty)$, общий вид; внизу: крупный план фрагмента изображения вверху справа.

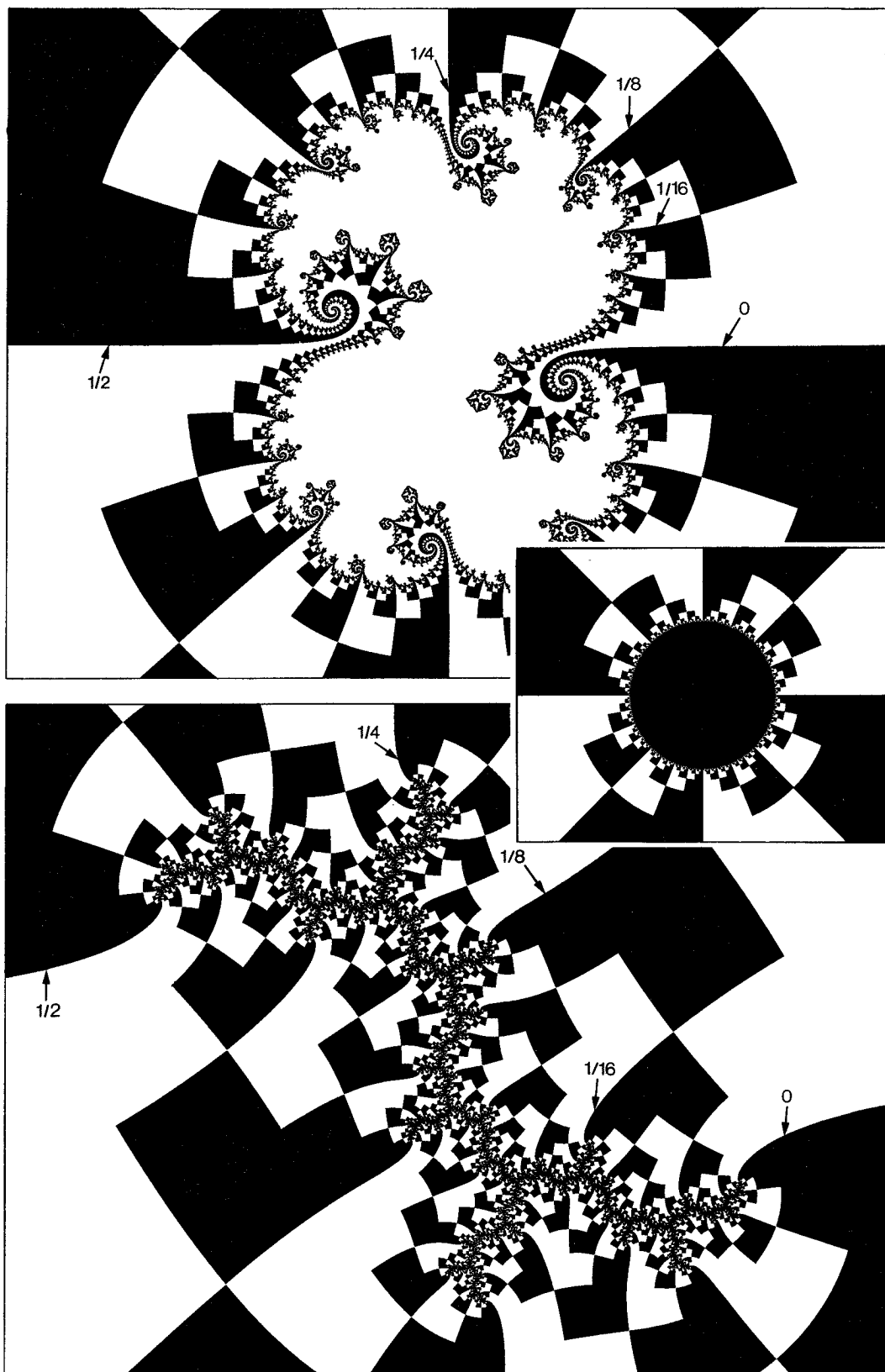


Рис. 37. Двоичные разбиения $A(\infty)$ для $x \rightarrow x^2 + c$; на вставке: $c = 0$; вверху: $c = 0.32 + 0.043i$; внизу $c = i$.

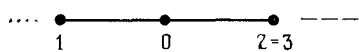
c (определяемые из условий (4.18)), при которых точка 0, не будучи периодической, является предпериодической. Можно показать, что отвечающие им множества K_c локально связны и что точка $c \in K_c$ имеет при этом лишь конечное число внешних углов p/q с четным q . В соответствии с (5.10) для такого $c \in \partial M$ внешними углами будут эти же числа.

Другим множеством значений c на ∂M , которым можно приписать рациональные внешние углы, являются корни компонент множества M' (см. разд. 4). Каждый такой корень имеет два внешних угла, знаменатели которых нечетные числа. Для того чтобы определить эти углы, воспользуемся другой теоремой Дуади и Хаббарда. Рассмотрим связные компоненты U_0, U_1, \dots, U_{k-1} внутренности множества K_c , содержащие 0, $p_c(0), \dots, p_c^{k-1}(0)$ соответственно, выбрав k наименьшим из натуральных чисел, для которых $U_k = U_0$. Отображение p_c^k , продолженное на ∂U_i имеет неподвижную точку q_i , называемую *корнем* U_i . Рассмотрим q_1 и два внешних угла α_1, α_2 , которые достигают q_1 со стороны U_1 . Они и будут внешними углами точки $c \in \partial M$. Рисунок 36 иллюстрирует описанную процедуру для $c = -0.481762 - 0.531657i$, которое соответствует параболическому случаю, показанному на рис. 6. Видно, что при указанном взаимном расположении компонент U_i и внешних углов $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/2$ двоичным представлением для угла α_1 будет $\alpha_1 = .10101\dots = 21/31$, в то время как $\alpha_2 = .10110\dots = 22/31$.

На рис. 37 показаны двоичные разбиения множества $\mathbb{C} \setminus K_c$ в соответствии с (2.37) при трех различных значениях c . Мы выбрали $\alpha_0 = 0$ и заменили $\frac{1}{2\pi} \arg R^k(x)$ на $\frac{1}{2\pi} \arg p_c^k(x)$, множеством-мишенью является $L_0(\infty) = \{x: |x| \geq \varepsilon^{-1}\}$.

Деревья Хаббарда для предпериодических критических точек

Дж.Х. Хаббард придумал довольно простой алгоритм для вычисления внешних углов множества M . Он использует только информацию о поведении траектории точки $x_0 = 0$ при некоторых специальным образом подобранных значениях c из M . Начнем обсуждение с тех значений $c \in M$, при которых точка 0 предпериодическая, но не периодическая. Самый простой случай — это случай $c = -2$ (см. (4.21)). Для $x_0 = 0$ имеем $x_1 = -2$ и $x_2 = x_3 = 2$. Это можно символически изобразить как



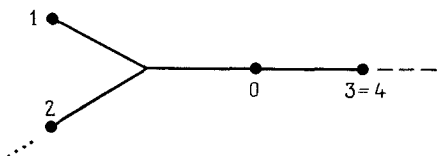
где точки обозначают орбиту x_0 , а сплошные линии — кратчайшие связи внутри K_c . Штриховая линия и пунктирная изображают соответственно внешние углы 0 и $1/2$, указанные в качестве ориентиров. В соответствии с (5.10) нужно определить угол (или углы) в точке x_1 на этой диаграмме (предположим, что его истинное значение $1/2$ еще не известно). Для того чтобы сделать это, заметим, что в результате применения p_c к диаграмме ее кусок $(0, 1)$, растянувшись и изменив ориентацию, отобразится на $(1, 2)$, в то время как $(0, 2)$, тоже растянувшись, но сохранив ориентацию, перейдет в $(1, 3)$. Теперь начнем движение от точки x_1 , расположив ее над линией-ориентиром, и запишем маршрут наблюдаемой при этом траектории в двоичных кодах: $01\dots = 1/2$. Затем разместим точку x_1 под ориентировочной линией и снова запишем ее маршрут: $.10\dots = 1/2$. Таким образом, $c = -2$ допускает единственный внешний угол $\alpha_{-2} = 1/2$.

Другим простейшим случаем будет $c = -1.54369$, см. (4.22). Диаграмма Хаббарда для траектории точки 0 примет вид



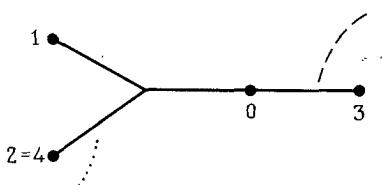
Под действием p_c кусок $(0, 1)$ снова растягивается и меняет ориентацию, а $(0, 2)$ переводится в $(1, 3)$ простым сдвигом. На этот раз два возможных выбора начала движения для точки x_1 приводят к различным углам: $.01\bar{1}0... = 5/12$, $.100\bar{1}... = 7/12$. (Чтобы объяснить появление периода 2 при неподвижной точке $x_3 = x_4$; напомним о том, что кусок $(0, 1)$ переворачивается отображением p_c !) Таким образом, основная точка слияния полос Гроссмanna и Томэ имеет внешние углы $5/12$ и $7/12$.

Рассмотрим другой случай из (4.22). Для $c = -0.22816 + 1.11514i$ диаграмма Хаббарда имеет вид



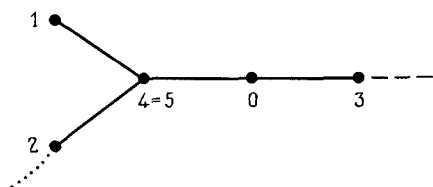
Становится понятным, почему эти диаграммы называют «деревьями». Разветвление отражает структуру соответствующего множества Жюлиа. Общее свойство деревьев Хаббарда H заключается в том, что они состоят из двух частей H' и H'' , таких, что $H = H' \cup H''$, $H' \cap H'' = \{x_0\}$, и что отображения $H' \rightarrow H$ и $H'' \rightarrow H$, индуцированные отображением p_c , оказываются инъективными. Расположение пунктирной линии определяется точкой x_2 , которая является прообразом точки x_3 . Начиная движение от точки x_1 , мы находимся выше линии-ориентира но подойти к точке x_2 можно двумя путями: $.00\bar{1}... = 1/4$ и $.01\bar{0}... = 1/4$. Оба приводят к одному и тому же внешнему углу $1/4$ для вершины рассматриваемой антенны.

Случай $c = i$, см. (4.24), описывается следующим образом:



Такое расположение линии-ориентира заслуживает комментария. В общем случае направление внешнего угла $\alpha_c = 0$ можно указать, рассмотрев прообраз сегмента $(0, 1)$. В данном случае $(0, 3)$ будет прообразом $(1, 4)$, поэтому прообраз сегмента $(0, 1)$ должен расщеплять $(0, 3)$, как и показано на диаграмме. Пунктирная линия будет прообразом штриховой. Здесь имеется только один возможный угол: $.00\bar{1}... = 1/6$.

В качестве последнего примера $c \in \partial M$, для которого точка 0 будет предпериодической, но не периодической, выберем значение, при котором две упомянутые выше антенны ответвляются от общего стебля. Дерево Хаббарда принимает вид

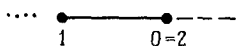


Здесь возникают новые трудности. Начав двигаться из точки x_1 так, чтобы первые три шага записались в виде $.00\bar{1}$, на четвертом шаге мы встретимся с неопределенностью. Здесь можно выбрать как 0, так и 1. Продолжая

движение вокруг неподвижной точки, получим $.0010\overline{10}... = 9/56$ и $.001100... = 11/56$. Другое возможное начало к неопределенности не приводит: $.01000\overline{1}... = 15/56$. Как и следовало ожидать, в связи с бифуркацией антенны получаются три внешних угла.

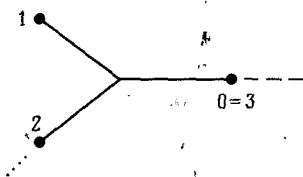
Деревья Хаббарда для периодических критических точек

Если $s \in \partial M$ является корнем некоторого спутника W , то множество Жюлиа будет рационально нейтрального типа. Мы уже объясняли с помощью рис. 36, как в этом случае определяются внешние углы. При движении s от корня к центру s_W множества W параболическая точка q_1 превращается в отталкивающую, но ее внешние углы остаются теми же. Поэтому имеет смысл вместо корня множества W рассмотреть его центр s_W и использовать тот факт, что тогда орбита точки $x_0 = 0$ будет периодической. Итак, для того чтобы вычислить углы корня $s = -3/4$, возьмем отвечающий ему центр $s = -1$ и построим для него диаграмму Хаббарда

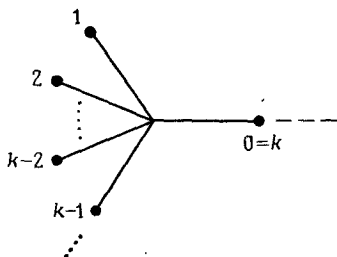


Двигаясь от точки x_1 и начиная, как обычно, с нуля или единицы, получим два соответствующих угла $.0\overline{1}... = 1/3$ и $.1\overline{0}... = 2/3$.

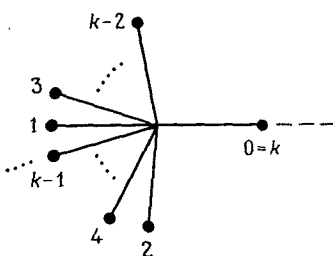
Рассмотрим другие спутники основного тела M'_1 . Почка периода 3 представляется как



откуда получаются углы $.00\overline{1}... = 1/7$ и $.01\overline{0}... = 2/7$. Справа от этой почки имеется целый ряд почек уменьшающихся размеров, но растущего периода k . Их деревья Хаббарда выглядят так:

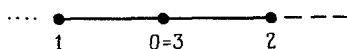


Соответствующие углы равны $1/(2^k - 1)$ и $2/(2^k - 1)$. Кроме того, имеется множество других рядов спутников, укоренившихся на M'_1 . Например, между двумя основными почками периода 2 и периода 3 прямо в «долину морских коньков» спадает ряд почек с периодами 5, 7, 9, ... Их деревья Хаббарда имеют вид

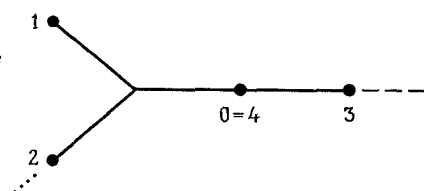


и дают углы $\frac{1}{3} \frac{2^k - 5}{2^k - 1}$ и $\frac{1}{3} \frac{2^k - 2}{2^k - 1}$.

Вторичное множество Мандельброта, центром которого является точка $c = -1.7549$, см (4.18), связано с диаграммой



Двумя ее внешними углами будут $\overline{.011...} = 3/7$ и $\overline{100...} = 4/7$. Центр фигуры Мандельброта с переплета этой книги имеет дерево Хаббарда



которое дает $\overline{.0011...} = 1/5$ и $\overline{.0100...} = 4/15$.

Интересно исследовать все новые и новые подобные диаграммы и получить рис. 68 и 69, которые обобщают некоторые из имеющихся результатов. Такой анализ превращает границу множества Мандельброта в интересное представление множества действительных чисел α , $0 \leq \alpha < 1$.

Иррациональные углы

Все иррациональные углы, для которых до сих пор была доказана возможность продолжения до ∂M , связаны со сценариями удвоения периода. Главная последовательность удвоений периода расположена в окрестности $c_D = -1.401155$ на действительной оси. Справа от этого значения, как показано на рис. 5, имеется последовательность корней, верхними внешними углами которых будут

$$\overline{.01...} = 1/3$$

$$\overline{.0110...} = 2/5$$

$$\overline{.01101001...} = 7/17$$

$$\overline{.0110100110010110...} = 106/257.$$

Регулярность в двоичном представлении очевидна. Угол, получающийся в пределе бесконечного числа бифуркаций, совпадает с известным числом Морса—Туэ. Слева от c_D Гроссманн и Томэ обнаружили сценарий слияния полос, n -й шаг которого характеризуется попаданием точки c в отталкивающий цикл периода 2^{n-1} после 2^n итераций p_c . Соответствующими верхними внешними углами будут

$$\overline{.0110...} = 5/12$$

$$\overline{.01101001...} = 33/80$$

$$\overline{.0110100110010110...} = 1795/4352.$$

Эта последовательность сходится к тому же самому числу Морса—Туэ, которое показывает, что соответствующая иррациональная силовая линия имеет c_D в качестве своей предельной точки на M .

Подобным образом, используя диаграммы Хаббарда, можно определить иррациональные углы и для других точек накопления бифуркаций. Бифуркационная последовательность сателлита периода 3 на основной кардиоиде

порождает углы

$$\begin{aligned} \overline{.001...} &= 1/7 & \text{и} & \quad \overline{.010...} = 2/7 \\ \overline{.001010...} &= 10/63 & \text{и} & \quad \overline{.010001...} = 17/63 \\ \overline{.001010010001...} & & \text{и} & \quad \overline{.010001001010...} \end{aligned}$$

Наблюдающаяся здесь регулярность подобна регулярности главной бифуркационной последовательности, за исключением лишних нулей в каждой третьей позиции.

Вторичное множество Мандельброта в окрестности $c = -1.755$ претерпевает бифуркации, образуя верхние углы

$$\begin{aligned} \overline{.011...} &= 3/7 \\ \overline{.011100...} &= 4/9 \\ \overline{.011100100011...} &= 29/65. \end{aligned}$$

Здесь опять та же самая регулярность позволяет определить предельный иррациональный угол.

Двоичное разбиение множества $\bar{\mathbb{C}} \setminus M$

Мы получили рис. 38, используя метод, совершенно аналогичный (2.37). Более точно, пусть $L_0^1(\infty) = \{c \in \mathbb{C}: |c| \geq \varepsilon^{-1}\}$ для $0 < \varepsilon \ll 1$, и пусть $L_k(\infty)$ — множества уровня для M , введенные в разд. 2, т. е.

$$L_k(\infty) = \{c \in \mathbb{C}: p_c^k(0) \in L_0(\infty) \text{ и } p_c^l \notin L_0(\infty), l < k\}, k = 1, 2, \dots$$

Тогда для $c \in L_k(\infty)$ определяется его код по следующей схеме:

$$c \text{ кодируется } \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \frac{1}{2\pi} \arg(p_c^k(0)) \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если нет} \end{cases}$$

($0 \leftrightarrow$ белый, $1 \leftrightarrow$ черный). Отчетливо видны внешние углы вида $p/2^n$, заканчивающиеся на вершинах дендритов из M (например, $\alpha = 1/16, 1/18, 1/4, 5/16, 3/8$ и $1/2$). Сразу же просматриваются и некоторые другие специальные значения, такие, как $\alpha = 1/3$ или $\alpha = 1/7$ и $\alpha = 2/7$. Рисунок 38 (справа внизу) представляет множество Мандельброта и соответствующее двоичное разбиение в $1/c$ -плоскости, т. е. в данном случае $L_0(\infty)$ представляет собой малый круг с центром в начале координат, а множество Мандельброта (черного цвета) уходит в бесконечность (в $1/c$ -координатах). Такое представление даже удобнее, поскольку первые двоичные знаки здесь можно просто прочитать.

6. Замечания о подобии между множествами Мандельброта и множествами Жюлиа

ТАН ЛЕЙ

Одно из наиболее захватывающих свойств множества Мандельброта связано с возможностью рассматривать его как «компрессор изображений», обладающий бесконечными мощностью и сложностью. Об этом и идет речь в данном разделе. Все обсуждаемые здесь результаты вытекают из опыта многочисленных экспериментов, проводившихся Тан Лей в 1984 году под руководством профессора А. Дуади [DN3]. Эти результаты, в частности, объясняют, почему при увеличениях множества Мандельброта наблюдается так много спиралей.

Очертания множества Мандельброта и наполненного множества Жюлиа K_c для $p_c: z \rightarrow z^2 + c$ совершенно различны. Объяснить это различие можно тем, что M расположено в плоскости параметров (c -плоскости), в которой какая-либо динамика вообще отсутствует, в то время как K_c размещается в фазовой плоскости (z -плоскости) с динамическим отображением p_c . Однако такое замечание носит глобальный характер. Если сравнить локальные структуры M и K_c , то во многих случаях можно заметить определенное подобие (см. рис. 2а, 2b, 39, 40а и 40).

Поставим вопрос иначе: выберем точку $c \in M$. Из определения M вытекает, что $0 \in K_c$. Тогда $c = p_c(0) \in K_c$. Итак,

$$c \in M \cap K_c.$$

Возникает естественный вопрос:

Насколько различны или подобны M и K_c в окрестности точки c ?

Сначала заметим, что c лежит внутри M , когда $c \in M'$ (см. формулу (4.12)), т. е. когда p_c имеет конечный притягивающий цикл. С другой стороны, в этом случае c лежит внутри K_c , поскольку притягивающий цикл p_c должен притягивать c . Таким образом, имеется некоторая подобная кругу окрестность U точки c в \mathbb{C} , такая, что $U \subset M \cap K_c$.

Этот вывод достаточно тривиален. Более интересная ситуация возникает, если рассматривать точки Мисюревича (см. формулу (4.20)), т. е. те значения c , для которых найдутся $k \geq 1$, $q \geq 1$ такие, что $p_c^k(c) = p_c^{k+q}(c)$. (Например, для $c = i$ траектория точки i под действием p_i будет выглядеть так: $i \rightarrow i - 1 \rightarrow -i \rightarrow i - 1$; здесь $k = 1$, а $q = 2$.) В этом случае K_c является дендритом ($K_c = J_c$), а $c \in \partial M$. Следовательно, окрестность указанного выше вида существовать не может.

Однако M и K_c , тем не менее, очень похожи в окрестности таких значений c : если посмотреть на M и K_c через мощный микроскоп, сфокусировав его в обоих случаях в точке c , то наблюдаемые при этом структуры кажутся очень похожими. С ростом увеличения сходство становится все более совершенным. Напрашивается вывод, что M и K_c асимптотически подобны в точке c .

Теперь определим подобие математически и приведем набросок доказательства этого заключения.

Прежде всего, нужны некоторые правила, позволяющие сравнивать два компактных множества в \mathbb{C} . Для произвольного компактного множества A его ε -окрестностью называют множество

$$U(A, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, A) < \varepsilon\},$$

$$\text{где } d(z, A) = \min_{x \in A} |z - x|.$$

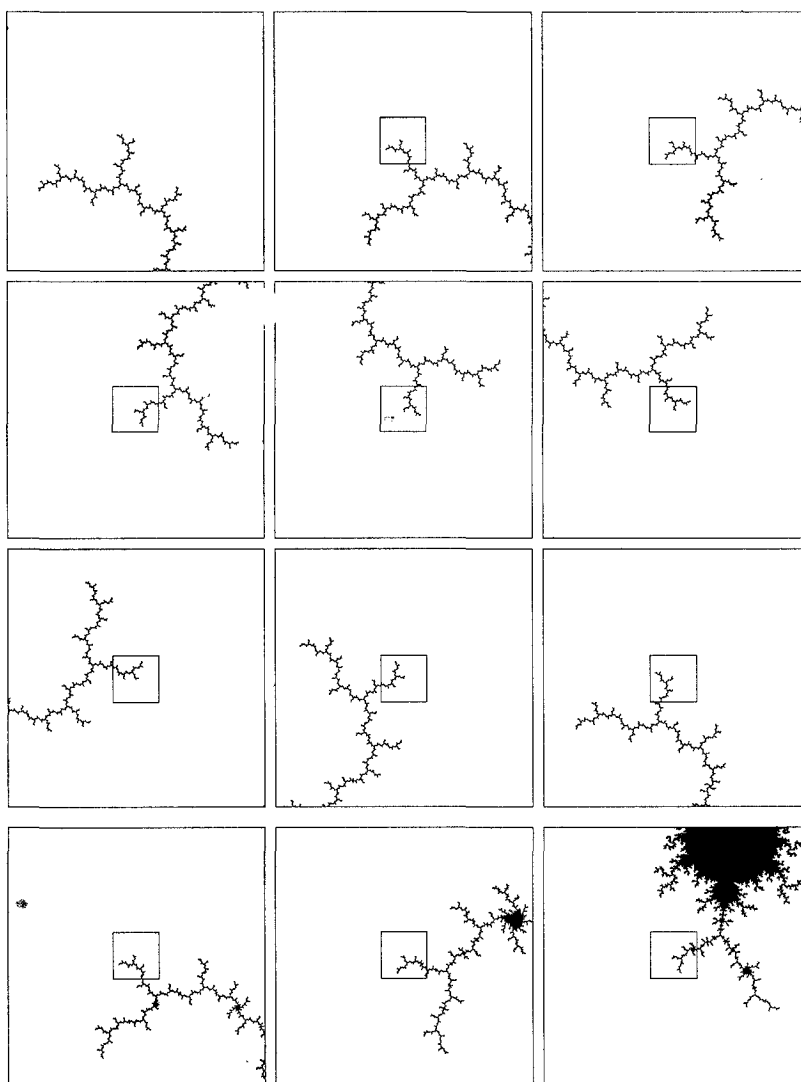


Рис. 39. Последовательные увеличения M , сфокусированные в точке i , обозначены внутренними рамками. Кратность увеличения каждого последующего образа по отношению к предыдущему равна $4\sqrt{2}$. Размеры первого изображения равны $0.5656854 \approx 0.4\sqrt{2}$.

Компактное множество B считается ε -близким к множеству A , если $B \subset U(A, \varepsilon)$. Более точно, определим квазирасстояние от множества B до множества A как

$$\delta(B, A) = \sup_{z \in B} d(z, A),$$

а расстояние между A и B как

$$D(A, B) = \sup(\delta(A, B), \delta(B, A)).$$

Это хорошо известное *расстояние Хаусдорфа*. Неравенство $D(A, B) < \varepsilon$ эквивалентно тому, что $A \subset U(B, \varepsilon)$ и $B \subset U(A, \varepsilon)$, а $D(A, B) = 0$ эквивалентно равенству $A = B$.

Для того, чтобы сравнить два замкнутых множества A и B в некотором локальном регионе, скажем, в круге \bar{D}_r (замкнутый круг радиуса r с центром

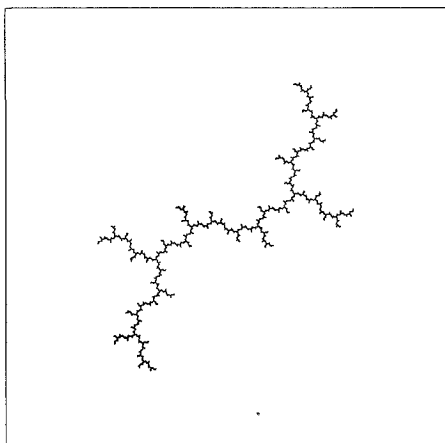


Рис. 40а. Множество Жюлиа J_1 . Координаты рамки: $\{x: -2, 2; y: -2, 2\}$.

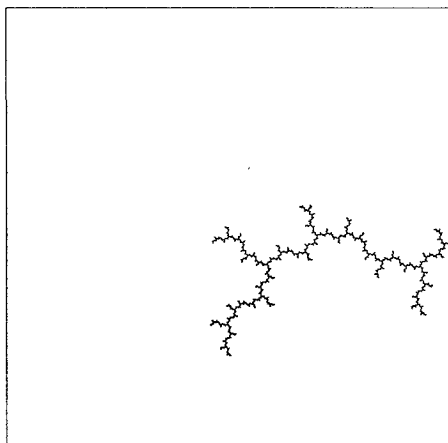


Рис. 40в. Увеличение J_1 . Координаты рамки: $\{x: -0.002, 0.002; y: 0.998, 1.002\}$.

в точке 0), определим

$$A_r = (A \cap \bar{D}_r) \cup \bar{D}_r,$$

$$B_r = (B \cap \bar{D}_r) \cup \bar{D}_r$$

(теперь A_r и B_r компактны) и

$$D_r(A, B) = \sup(\delta(A_r, B_r), \delta(B_r, A_r)).$$

Выберем теперь произвольное комплексное число ϱ $|\varrho| > 1$. Будем говорить, что замкнутое множество $A \subset \mathbb{C}$ является ϱ -самоподобным в точке 0, если найдется положительное число r , для которого

$$(6.1) \quad (\varrho A)_r = A_r \text{ (и, следовательно, } (\varrho A) \cap \bar{D}_r = A \cap \bar{D}_r).$$

Интуитивно тот факт, что A является ϱ -самоподобным, означает то, что увеличив A в окрестности точки 0 в $|\varrho|$ раз и затем повернув его на угол $\arg \varrho$ (аргумент ϱ), получим опять множество A . Например, спираль $A = \{\exp(x + 10xi) \mid -\infty < x < +\infty\}$

будет ϱ -самоподобной с $\varrho = \exp(1 + 10i)$ (рис. 41).

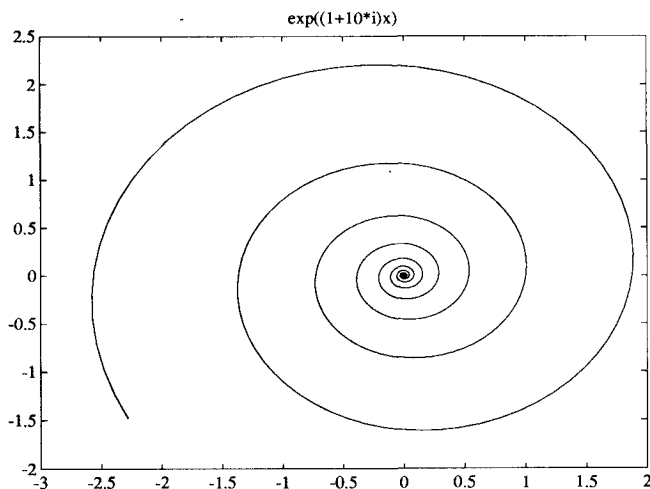


Рис. 41. $\{\exp((1 + 10i)x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Если A инвариантно под действием увеличения и вращения, то A , вообще говоря, является некоторой совокупностью спиралей.

Может случиться, что некоторое множество A не является q -самоподобным, но последовательность $(qA)_r, (q(qA))_r = (q^2A)_r, \dots, (q^nA)_r$ порождает множества все более похожих форм, т. е. последовательность сходится к некоторому множеству B . В этом случае будем считать A самоподобным в асимптотическом смысле, а B называть его предельной моделью, самоподобной в точке 0. Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Определение

1. Замкнутое множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *асимптотически q -самоподобным в точке 0 с предельной моделью B* , если B замкнуто и существует $r > 0$, такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n A)_r = B_r.$$

В общем случае A называется (асимптотически) q -самоподобным в точке x , если в результате сдвига $\tau_{-x}: z \rightarrow z - x$ множество $\tau_{-x}(A) = \{z - x \mid z \in A\}$ оказывается (асимптотически) q -самоподобным в точке 0.

2. Два замкнутых множества A и B называются *асимптотически подобными в точке 0*, если найдется $r > 0$ такое, что

$$\lim_{t \in \mathbb{C}, |t| \rightarrow \infty} D_r(tA, tB) = 0.$$

Теперь можно сформулировать наш главный результат:

Теорема 6.1. Пусть $c \in M$ является точкой Мисюревича. Тогда найдутся $q \in \mathbb{C}, |q| > 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, r > 0, R > 0$ и некоторое замкнутое множество $Z \subset \mathbb{C}$, такие, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \tau_{-c}(K_c))_r = Z_r,$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \tau_{-c}(M))_R = (\lambda Z)_R,$$

$$в) \lim_{t \in \mathbb{C}, |t| \rightarrow \infty} D_s(t \lambda \tau_{-c}(K_c), t \tau_{-c}(M)) = 0 \text{ при любом } s > 0,$$

т. е. и K_c , и M асимптотически q -самоподобны в точке c , а с точностью до увеличения в λ раз, эти множества будут асимптотически подобны в точке c . (Точная форма q, λ и Z будет определена ниже в формулах (6.3), (6.4) и (6.5)).

Утверждение в) является простым следствием а) и б). Утверждение а) доказывается просто. Ниже дается даже более сильное утверждение. Основной проблемой оказывается доказательство утверждения б). Для этого требуются некоторые технические оценки. Здесь мы только приводим формы λ и Z , а также некоторые основные идеи доказательства. Более подробная информация имеется в [TL].

Посмотрим теперь как доказывается а). Сначала заметим, что асимптотическое подобие сохраняется при конформных преобразованиях. Более точно:

Предложение 6.2. Если для некоторого аналитического отображения $\sigma: U_x \rightarrow V_y, \sigma(x) = y, \sigma'(x) \neq 0$.

(где U_x, V_y — окрестности точек x и y соответственно) и некоторого замкнутого множества $A \subset U_x$ множество $\sigma(A)$ (асимптотически) q -самоподобно в точке y с предельной моделью B , то и само множество A асимптотически q -самоподобно в точке x с предельной моделью

$(1/\sigma'(x))B$. Другими словами, если

$$\sigma: U_x \rightarrow V_y, \quad x \rightarrow y, \quad A \rightarrow \sigma(A),$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \tau_{-y}(\sigma(A)))_r = B_r$ при некотором $r > 0$, то найдется $r' > 0$, такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \tau_{-x}(A))_{r'} = \left(\frac{1}{\sigma'(x)} B \right)_{r'}.$$

(На самом деле можно взять любое $0 < r' < r/|\sigma'(x)|$).

Теперь предположим, что c — точка Мисюревича. В тех случаях, когда это не приводит к двусмысленности, вместо p_c будем писать p , а вместо $K_c - K$. По определению существует наименьшее k , для которого точка $\alpha = p^k(c)$ будет периодической. Дуади и Хаббард [ДНЗ] доказали, что α всегда будет отталкивающей периодической точкой. Пусть q -период α , а $q = (p^q)'(\alpha)$ — ее собственное значение (мультипликатор). Тогда в окрестности точки α отображение p^q сопряжено $z \rightarrow qz$. Более точно, существуют окрестность U_α точки α и конформное отображение $\varphi: U_\alpha \rightarrow V_0$, где V_0 — окрестность точки 0, для которых

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 1$$

и

$$\varphi \circ p^q \circ \varphi^{-1}(z) = pz$$

Теперь выберем $r > 0$ так, чтобы $D_{|q|r} \subset V_0$. Положим $U = \varphi^{-1}(D_r)$. Поскольку

$$(6.2) \quad p(K) = p^{-1}(K) = K,$$

то имеет место равенство

$$p^q(K \cap U) \cap U = K \cap U.$$

Следовательно,

$$\varphi(p^q(K \cap U) \cap U) = \varphi(K \cap U),$$

$$\varphi(p^q(K \cap U)) \cap \varphi(U) = \varphi(K) \cap \varphi(U),$$

$$q(\varphi(K \cap U)) \cap D_r = \varphi(K) \cap D_r,$$

$$q(\varphi(K) \cap D_r) \cap D_r = \varphi(K) \cap D_r,$$

и наконец,

$$(q\varphi(K))_r = (\varphi(K))_r.$$

Таким образом, $\varphi(K \cap \bar{U}) = B$ самоподобно в точке 0. Применив предложение 6.2 к $\varphi: U_\alpha \rightarrow V_0$, $K \cap \bar{U} \rightarrow \varphi(K \cap \bar{U})$, немедленно получим, что $K \cap \bar{U}$, а следовательно и K , q -самоподобны в точке α : найдется $r' > 0$, при котором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \tau_{-\alpha}(K))_{r'} = \left(\frac{1}{\varphi'(\alpha)} B \right)_{r'} = B_{r'} = (\varphi(K \cap \bar{U}))_{r'}.$$

Теперь, поскольку $(p^k)'(c) \neq 0$, то найдутся окрестности V и V_c точки c такие, что $V \subset V_c$ и $p^k(c) = \alpha$, $p^k(V_c) = U_\alpha$, $p^k(K \cap \bar{V}) = K \cap \bar{U}$. Снова применив предложение 6.2 к $p^k: V_c \rightarrow U_\alpha$, $K \cap \bar{V} \rightarrow K \cap \bar{U}$, заключаем, что $K \cap \bar{V}$, а следовательно и K , будут асимптотически q -самоподобными в точке c с предельной моделью $B/(p^k)'(c)$, т. е. найдется $r'' > 0$, при котором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \tau_{-c}(K))_{r''} = \left(\frac{1}{(p^k)'(c)} B \right)_{r''}.$$

Это доказывает утверждение а) теоремы 6.1, причем

$$(6.3) \quad \varrho = (p^q)'(p^k(c)),$$

$$(6.4) \quad Z = \frac{1}{(p^k)'(c)} \varphi \circ p^k(K \cap \bar{V})$$

Формула (6.4), кроме того, показывает, что для получения предельной модели Z множества K нам не требуется увеличивать бесконечное число раз, а нужно лишь выбрать некоторую его малую часть $K \cap \bar{V}$ и рассмотреть ее образ под действием конформного отображения $\varphi \circ p^k$. Мы увидим, что это замечание оказывается важным и для доказательства в).

Заметим, что вышеизложенное доказательство использует лишь два следующих факта:

1. Точка c является предотталкивающей для p т. е. существуют наименьшие $k \geq 0$, $q > 0$, такие, что $p^q(p^k(c)) = p^k(c)$, $(p^k)'(c) \neq 0$ и $|(p^q)'(p^k(c))| > 1$.

2. K вполне инвариантно относительно p (т. е. K удовлетворяет (6.2)). Следовательно, то же самое доказательство можно использовать для получения следующего более общего результата:

Теорема 6.3. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — рациональное отображение, и пусть u — предотталкивающая периодическая точка отображения f , т. е. существуют (наименьшие) $k \geq 0$, $q > 0$ такие, что $f^q(f^k(u)) = f^k(u)$, $(f^k)'(u) \neq 0$ и $|(f^q)'(f^k(u))| > 1$. Положим $\varrho = (f^q)'(f^k(u))$. Тогда множество Жюлиа J_f , которое является вполне инвариантным относительно f , будет асимптотически ϱ -самоподобным в точке u : найдутся $r > 0$ и замкнутое множество Z , для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho^n \tau_{-\alpha}(J_f))_r = Z_r.$$

Более того, найдутся конформное отображение φ , определенное в окрестности точки $f^k(u)$ и окрестность V точки u , для которых

$$Z = \frac{1}{(f^k)'(u)} \varphi \circ f^k(J_f \cap \bar{V}).$$

Если f — полином, то этот же результат имеет место и для наполненных множеств Жюлиа K_f отображения f .

Наступило время привести обещанную формулу для λ из теоремы 6.1. Пусть c_0 — точка Мисюревича и пусть $k > 0$ и $q > 0$ — наименьшие из целых чисел, для которых $(p_{c_0}^k)(c_0) = p^{k+q}(c_0)$. Положим $\alpha_0 = p_{c_0}^k(c_0)$ и $\varrho_0 = (p_{c_0}^q)'(\alpha_0)$. Тогда α_0 является отталкивающей периодической точкой p_{c_0} и точка c_0 — предотталкивающая для p_{c_0} . Важным свойством (пред)отталкивающих периодических точек оказывается их «устойчивость» относительно изменения параметра. Применительно к нашему случаю, существуют окрестность W точки c_0 и два конформных отображения $u: W \rightarrow V \subset \mathbb{C}$, $\alpha: W \rightarrow U \subset \mathbb{C}$, такие, что

$$u(c_0) = c_0, \quad \alpha(c_0) = \alpha_0, \quad p_c^k(u(c)) = \alpha(c), \quad (p_c^k)'(u(c)) \neq 0$$

и

$$|(p_c^q)'(\alpha(c))| > 1.$$

Как доказано в [TL]

$$(6.5) \quad \lambda = \frac{(p_{c_0}^k)'(c_0)}{\frac{d}{dc}(p_c^k(c))|_{c=c_0} - \frac{d}{dc}(\alpha(c))|_{c=c_0}}.$$

Из теоремы 6.3 становится немного понятным, почему λ имеет такую форму. Заметим, что для всякого $c \in W$ точка $u(c)$ будет предотталкивающей периодической точкой p_c и что при изменении c значения k, q не меняются. В соответствии с утверждением теоремы 6.3 найдутся $r > 0$, окрестность $V_{u(c)}$ точки $u(c)$, окрестность $U_{\alpha(c)}$ точки $\alpha(c)$ и конформное отображение φ_c , определенное в окрестности $U_{\alpha(c)}$, для которых

$$p_c^k(\bar{U}_{u(c)}) = \bar{U}_{\alpha(c)}, \quad \varphi_c(\bar{U}_{\alpha(c)}) = \bar{D}_r,$$

$$p_c^k(u(c)) = \alpha(c), \quad \varphi_c(\alpha(c)) = 0$$

и множество

$$B_c = \varphi_c \circ p_c^k(K_c \cap \bar{V}_{u(c)})$$

оказывается $q(c)$ -самоподобным в точке 0, где $q(c) = (p_c^k)'(\alpha(c))$, а множество K_c — асимптотически $q(c)$ -самоподобным в точке $u(c)$ с предельной моделью

$$Z_c = \frac{1}{(p_c^k)'(u(c))} B_c.$$

Поскольку отображение $c \rightarrow p_c^k(c)$ голоморфно в W , $c_0 \in V_{u(c_0)}$ и $p_{c_0}^k(c_0) = \alpha(c_0) \in U_{\alpha(c_0)}$, то можно считать, что $c \in V_{u(c)}$ и $p_c^k(c) = U_{\alpha(c)}$ для всех $c \in W$. Таким образом, множество Мандельброта в области W можно представить в виде

$$(6.6) \quad M \cap W = \{c \in W: c \in K_c\} = \{c \in W | (p_c^k)(c) \in K_c\} = \{c \in W | \varphi_c \circ p_c^k(c) \in B_c\}.$$

Пусть

$$\sigma: W \rightarrow \mathbb{C}, \quad c \rightarrow \varphi_c \circ p_c^k(c)$$

и

$$(6.7) \quad \Omega = \sigma^{-1}(B_c) = \{c \in W | \sigma(c) \in B_{c_0}\} = \{c \in W | \varphi_c \circ p_c^k(c) \in B_c\}.$$

Один из результатов Дуади и Хаббарда показывает, что

$$\sigma'(c_0) = \frac{d}{dc}(p_c^k(c)) \Big|_{c=c_0} - \frac{d}{dc}(\alpha(c)) \Big|_{c=c_0} \neq 0.$$

Следовательно, по предложению 0.2 существует $r' > 0$, для которого

$$(6.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (q(c_0)^n \tau_{-c_0} \Omega)_{r'} = \left(\frac{1}{\sigma'(c_0)} B_{c_0} \right)_{r'}.$$

Еще один результат Дуади и Хаббарда говорит, что для c близких к c_0 множество K_c близко к множеству $K_{c_0} = J_{c_0}$, поэтому и B_c также должно быть близким к B_{c_0} . Сравнивая (6.6) и (6.7), можно сделать вывод о правдоподобности совпадения предельных моделей M и Ω в точке c_0 , т. е. о возможности существования такого $R > 0$, при котором

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (q(c_0)^n \tau_{-c_0} M)_R &= \left(\frac{1}{\sigma'(c_0)} B_{c_0} \right)_R = \\ &= \left(\frac{(p_{c_0}^k)'(c_0)}{\frac{d}{dc}(p_c^k(c))|_{c=c_0} - \frac{d}{dc}(\alpha(c))|_{c=c_0}} Z_{c_0} \right)_R = (\lambda Z_{c_0})_R. \end{aligned}$$

Это и есть равенство в) теоремы 6.1.

Как уже отмечалось выше, в тех случаях, когда $|q| > 1$ и q не является вещественным, (асимптотически) q -самоподобные множества представляют собой совокупность спиралей. Поскольку множество M самоподобно в каждой точке Мисюревича, а точки Мисюревича встречаются «почти всюду»

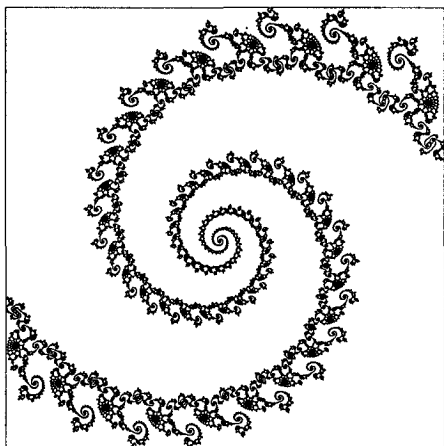


Рис. 42. Увеличение M . Координаты рамки:
 $\{x: -0.7758008, -0.7760308; y: 0.1363462, 0.1365762\}$.

на границе M , то становится ясным, почему наблюдается так много спира-
 леподобных форм при увеличениях M (см., например, фото 42, 47 и рис. 42).
 Но поскольку M подобно K_c в каждой точке Мисюревича c , а само K_c меня-
 ется с изменением c , то локальная структура M в разных точках, вообще
 говоря, очень различается.

Пример. Рассмотрим случай $c = i$. Для $p_i: z \rightarrow z^2 + i$ траекторией точки
 i будет $i \rightarrow i - 1 \rightarrow -i \rightarrow i - 1$. В наших обозначениях $k = 1$, $q = 2$,
 $\alpha = i - 1$ и

$$q = (p_i^2)'(i - 1) = 4(1 + i) = 4\sqrt{2}\exp(\pi i/4).$$

Для данного значения λ мы имеем $(p_{c_0}^k)'(c_0) = (p_i)'(i) = 2i$,

$$\frac{d}{dc}(p_c^k(c))|_{c=i} = \frac{d}{dc}(c^2 + c)|_{c=i} = (2c + 1)|_{c=i} = 2i + 1.$$

Функция $\alpha(c)$ является решением в окрестности $i - 1$ неявного уравнения
 $(p_c^2)(z) = z$, т. е. $(z^2 + c)^2 + c - z = 0$

для c близких к i . Следовательно,

$$\frac{d}{dc}(\alpha(c))|_{c=i} = -\frac{2((i - 1)^2 + i) + 1}{2((i - 1)^2 + i)2(i - 1) - 1} = \frac{2i - 1}{4i + 3}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{2i}{2i + 1 - \frac{2i - 1}{4i + 3}} = 1 + \frac{1}{2}i.$$

В силу доказанного выше, M должно быть почти инвариантным в неко-
 торой малой области, окружающей точку i , относительно увеличения в $4\sqrt{2}$
 раз и поворота на угол $\pi/4$. Если только последовательно увеличивать в
 $4\sqrt{2}$ раза, не вращая, то каждое последующее изображение по отношению
 к предыдущему было бы повернуто на угол $\pi/4$. Следовательно, после
 восьми увеличений было бы получено почти исходное множество. Результа-
 ты вычислительного эксперимента на рис. 1 весьма выразительно под-
 тверждают такое заключение.

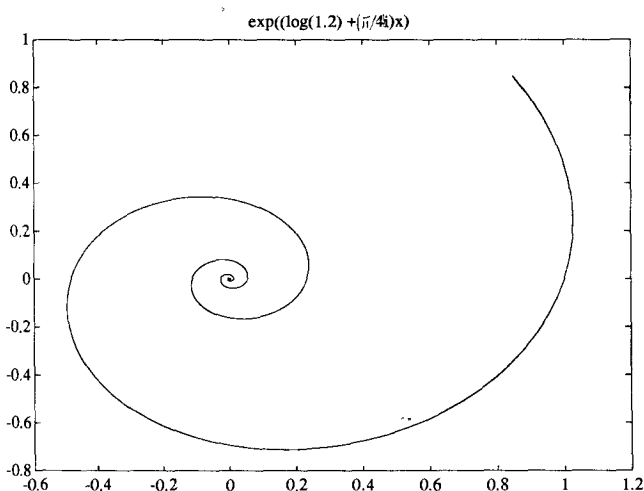


Рис. 43а. $\{\exp((\log(1.2) + \pi i/4)x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

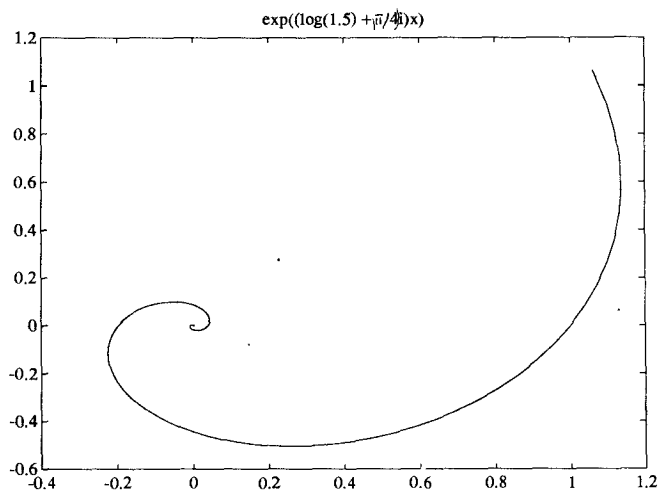


Рис. 43б. $\{\exp((\log(1.5) + \pi i/4)x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

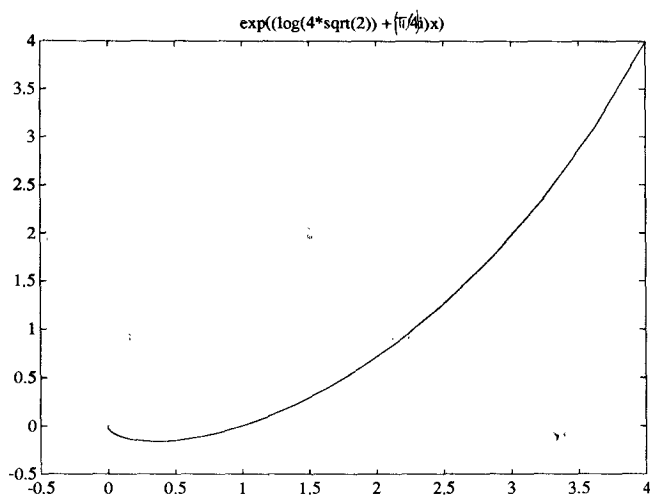


Рис. 43с. $\{\exp((\log(4\sqrt{2}) + \pi i/4)x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Но почему же не видно в этом случае спирали? Причина заключается в том, что абсолютное значение ϱ , в данном случае равное $4\sqrt{2}$, слишком велико по отношению к углу поворота $\pi/4$, так что спираль «поглощается» центром. Например, возьмем точку x на положительной части вещественной оси. Тогда x/ϱ^8 снова будет положительным вещественным числом, но его значение будет уже умножено на $1/2^{24}$! Оно будет настолько близко к нулю, что человеческий глаз уже неспособен отличить его от 0. Для примера возьмем множество

$$A(s) = \{\exp((\log s + \pi i/4)x) \mid -\infty < x < +\infty\},$$

которое оказывается инвариантным относительно растяжения в $\varrho = s \exp(\pi i/4)$ раз. Рис. 43а ($s = 1.2$), рис. 43б ($s = 1.5$) и рис. 43с ($s = 4\sqrt{2}$) показывают как «исчезает» спираль с ростом s .

7. Метод Ньютона для комплексных полиномов: проблема Кэли

Метод Ньютона и его усовершенствованные варианты относятся к наиболее известным численным методам нахождения решений нелинейных уравнений. Теория этих методов обычно разбивается на две части. В одной из них уделяется основное внимание доказательству сходимости метода, а другая направлена на получение асимптотической скорости сходимости. Однако картина, которую мы получаем, знакомясь с литературой, оказывается в какой-то мере неполной. Помимо упомянутых с методом Ньютона связаны и другие интересные и глубокие проблемы, одна из которых будет темой нашего обсуждения.

Рассматриваемая нами проблема восходит к 1879 году и была поставлена А. Кэли в его небольшой, всего на одну страницу, заметке [Ca], озаглавленной «Комплексная проблема Ньютона—Фурье». Кэли предложил то, что он называет методом Ньютона—Фурье,

$$(7.1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - p(x_k)/p'(x_k) \\ k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

применить к комплексным полиномам p : «... В связи с этим, не ограничивая себя рассмотрением только действительных чисел, мы получаем то, что я называю комплексной проблемой Ньютона—Фурье...» Более того, он предложил изучить эту проблему глобально: «... Задача состоит в разделении плоскости на области так, чтобы, выбрав по желанию произвольную точку P (начальную точку x_0 в (7.1)), где бы то ни было внутри одной области, мы в конечном счете пришли бы к точке A (равной корню, т. е. $p(A) = 0$); где бы то ни было внутри другой области пришли бы к точке B и так далее для каждой из нескольких точек, представляющих корни нашего уравнения.

В случае квадратного уравнения решение оказывается простым и изящным, но уже следующий сменяющий его случай кубического уравнения, по видимому, представляет значительную трудность».

С точки зрения теории численных методов метод (6.1) всегда понимается как локальный, т. е. предполагается, что x_0 (начальное значение) достаточно близко к корню x^* уравнения $p(x^*) = 0$. Проблема Кэли, напротив, заключается в определении глобального бассейна притяжения для корня x^* :

$$(7.2) \quad A(x^*) = \{x \in \mathbb{C}: N^k(x) \rightarrow x^*, \text{ когда } k \rightarrow \infty\},$$

где $N(x) = x - p(x)/p'(x)$ и $N^k = N \circ \dots \circ N$ k раз.

Заметим, что

$$(7.3) \quad N'(x) = \frac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2},$$

где $' = \frac{d}{dx}$. Следовательно, в том случае, когда x^* является простым корнем p (т. е. $p'(x^*) \neq 0$), имеет место равенство $N'(x^*) = 0$, т. е. x^* является сверхпритягивающей неподвижной точкой для N . Если корень x^* имеет кратность k , т. е. $p(x) = (x - x^*)^k q(x)$ и $q(x^*) \neq 0$, то несложно указать метод, для которого x^* снова оказывается сверхпритягивающей неподвижной точкой:

$$(7.4) \quad N_h(x) = x - \frac{hp(x)}{p'(x)}.$$

Просто выбираем $h = k$ и проверяем, что $N_h'(x^*) = 0$. В общем случае метод (7.4) называют *ослабленным* методом Ньютона. Заметим, что (7.4)

можно интерпретировать и как метод Эйлера с шагом h решения начальной задачи

$$(7.5) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -p(x(t))/p'(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Было бы интересно найти связь между решениями дифференциального уравнения (7.5) и траекториями отображения (7.4) при разных h .

Изящное решение Кэли упомянутой проблемы для $p(x) = x^2 - c$ заслуживает обсуждения. (В самом деле, если $q(x) = ax^2 + 2bx + d$ — произвольный полином степени 2, то q эквивалентен полиному $p(x) = x^2 - c$ при замене координат $\Phi(x) = ax + b$ с $c = b^2 - b - ad$, т. е. $q(x) = \Phi^{-1} \circ p \circ \Phi(x)$.)

Метод Ньютона для p приводит к рациональному отображению степени два

$$(7.6) \quad N(x) = (x^2 + c)/2x.$$

В этом случае множество Жюлиа J_N представляет собой перпендикуляр, проходящий через середину отрезка, соединяющего корни $\pm\sqrt{c}$:

$$(7.7) \quad J_N = \{\alpha i \sqrt{c} : \alpha \in \mathbb{R}\} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Таким образом, бассейны притяжения двух корней $A(\sqrt{c})$ и $A(-\sqrt{c})$ являются полуплоскостями, определенными с помощью J_N . Для того чтобы увидеть это, заметим, что N сопряжено с более простым отображением $R(u) = u^2$ относительно замены координат $\Psi(x) = (x + \sqrt{c})/(x - \sqrt{c})$, $\Psi^{-1}(u) = \sqrt{c}(u + 1)/(u - 1)$, т. е. $R(u) = \Psi \circ N \circ \Psi^{-1}(u)$. Иначе говоря, все равно, что изучать — траектории (7.6) или траектории R . Вот список соответствующих объектов:

$$(7.8) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Плоскость } x & +\sqrt{c} & -\sqrt{c} & \infty & 0 & J_N & \\ \hline \text{Плоскость } u & \infty & 0 & 1 & -1 & S^1 & \end{array},$$

где S^1 — единичная окружность $\{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$.

Точки $u = 0$ и $u = \infty$ являются притягивающими неподвижными точками R с бассейнами притяжения $A(0) = \{u \in \mathbb{C} : |u| < 1\}$, $A(\infty) = \{u \in \mathbb{C} : |u| > 1\}$. Границей между этими бассейнами и, следовательно, множеством Жюлиа для R является S^1 . Легко увидеть, что Ψ^{-1} отображает $A(0)$ и $A(\infty)$ в полуплоскости, определяемые множеством J_N . Такое соответствие показывает, что J_N и в самом деле является множеством Жюлиа отображения N . Замечательно, что $R(u) = u^2$ реализует метод Ньютона в применении к $u \mapsto u/(1 - u)$.

Динамика отображения $u \rightarrow u^2$ на S^1

Множество Жюлиа отображения $R(u) = u^2$ хорошо иллюстрирует те абстрактные свойства множеств Жюлиа, о которых говорилось в посвященном им обзоре. Например, в соответствии с (2.6) и (2.4) имеем $\partial A(0) = J_R = \partial A(\infty)$ и $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$. На $S^1 = J_R$ отображение R индуцирует одномерное отображение $r(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} R(u): u &= \exp(2\pi i \alpha) \mapsto u^2 = \exp(2\pi i (2\alpha)), \\ r(\alpha): &\alpha \mapsto 2\alpha \pmod{1}. \end{aligned}$$

На самом деле r представляет собой одно из простейших и наиболее изученных отображений, порождающих хаотическую динамику. Свойства (2.1) и (2.5) для него очевидны. Рассмотрим

$$(7.9) \quad P = \{u: u = \exp(2\pi i k/(2^n - 1)), k, n = 1, 2, \dots\},$$

$$(7.10) \quad S = \{u: u = \exp(2\pi i k/2^n), k, n = 1, 2, \dots\}.$$

Оба множества плотны на S^1 . Множество P состоит из отталкивающих периодических точек, а S — из элементов отрицательной полутраектории точки 1, $Or^-(1)$. Задача полного описания динамики отображения r оказывается весьма непростой. Типичное затруднение возникает при попытке описать те α , для которых положительная полутраектория $Or^+(\alpha)$ будет плотной, т. е. будет подходить к любой точке из $[0, 1]$ как угодно близко. Прежде всего можно было бы ожидать, что таким свойством будет обладать каждое иррациональное α . Но это не так. Чтобы построить подходящий контрпример, представим действие r следующим образом. Пусть $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ — двоичное представление числа $\alpha \in [0, 1]$, т. е.

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1\}.$$

Тогда $r(\alpha) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$, т. е. r действует как сдвиг. Заметим, что из-за конечных размеров машинных чисел итерирование сдвига r при помощи компьютера *всегда* приводит к значению 0, что совсем не соответствует истинной динамике отображения r . Это показывает, что вычислительные эксперименты могут ввести в заблуждение.

Положим теперь

$$(7.11) \quad \alpha^* = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}.$$

Тогда $Or^+(\alpha^*)$ не будет плотной на $[0, 1]$. Точками накопления являются только точки 0 и 2^{-k} , $k = 1, 2, 3, \dots$ (число α^* дает пример числа Лиувилля). А существуют ли вообще плотные траектории? Читатель может поверить, что следующий выбор даст ответ на этот вопрос:

$$(7.12) \quad \bar{\alpha} = (.1, \underbrace{1, 0}_1, \underbrace{1, 1}_2, \underbrace{1, 0, 0}_3, \dots, \text{ двоичное представление } n, \dots).$$

Таким образом, динамика отображения R на J_R оказывается довольно таинственной, что верно и в случае любого другого множества Жюлиа.

Метод Ньютона для $x^3 - 1$

Опираясь на опыт применения метода Ньютона к полиному $p(x) = x^2 - 1$, можно было бы ожидать, что множеством Жюлиа для

$$(7.13) \quad N(x) = x - \frac{x^3 - 1}{3x^2} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2}$$

будет показанное на рис. 44 множество S .

И в самом деле, можно заметить, что $N(x) = D \circ N \circ D^{-1}(x)$, где D — поворот на 120° . Кроме того, неподвижная точка $N(\infty) = \infty$ является отталкивающей, $N(0) = \infty$ и $N(x_k) = 0$ для $x_k = -\exp(2\pi i k/3)$. Таким образом, все эти точки $\infty, 0, x_0, x_1, x_2$ принадлежат множеству Жюлиа J_N отображения N .

К тому же можно легко доказать, что фазовый портрет (7.5) выглядит так, как показано на рис. 45. Здесь множество S служит сепаратрисой для трех областей устойчивости, определяемых тройкой корней из единицы. В самом деле, (7.5) эквивалентно (действительной!) начальной задаче

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \dot{x}(t) = -p(x(t)) \cdot \overline{p'(x(t))}, & \alpha = |p'(x(t))|^2, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где $a + ib = a - ib$. Поэтому точка 0 является исключительной в том смысле, что она (единственная) трехсторонняя точка по отношению к областям устойчивости для задачи (7.5).

Удивительно то, что мы делаем *принципиальную ошибку*, полагая, что S является множеством Жюлиа для (7.13). Об этом знали еще Жюлиа и

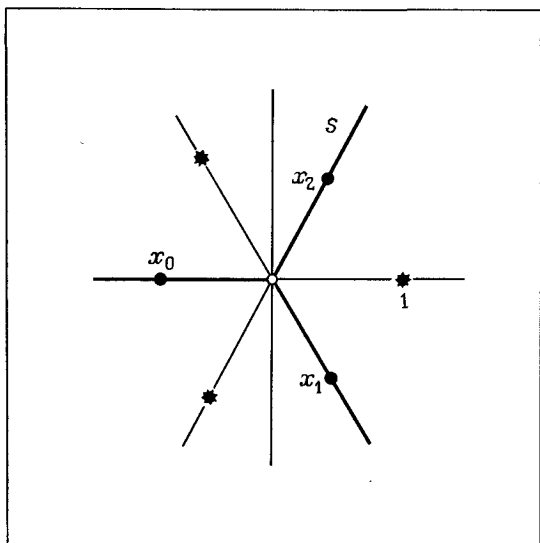


Рис. 44. Неподвижные точки N и прообразы точки 0.

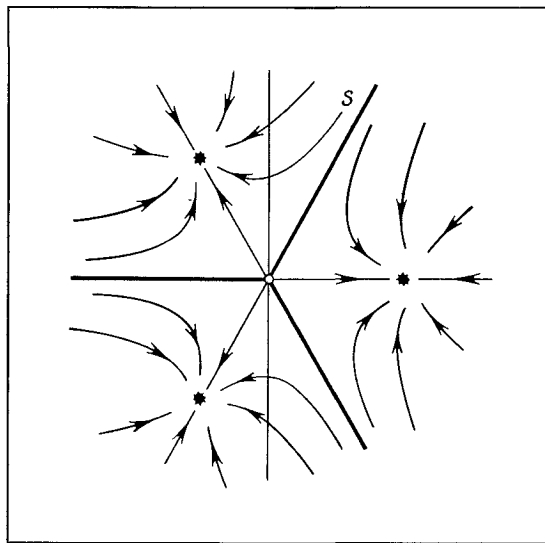


Рис. 45. Сепаратрисы для потока Ньютона.

Фату. Мы бы не совершили такой ошибки, если бы вспомнили о свойстве (2.6) из обзора по множествам Жюлиа:

$$(7.14) \quad J_N = \partial A(\exp(2\pi ik/3), \quad k = 0, 1, 2,$$

т. е. каждая точка множества J_N должна быть трехсторонней точкой по отношению к бассейнам притяжения тройки корней из единицы. Кратко обоснуем (7.14), используя свойство (2.5), т. е.

$$(7.15) \quad \{x: N^k(x) = 0 \text{ при некотором } k\} \text{ плотно на } J_N.$$

Пусть $x \in J_N$ и U — произвольная малая окрестность точки x . В силу (7.15) найдется $\bar{x} \in U \cap J_N$, такое, что $N^k(\bar{x}) = 0$ при некотором k . Заметим, что $(N^k)'(\bar{x}) \neq 0$ (действительно, ведь равенство $N'(x) = 0$ выполняется только для тройки корней из единицы), следовательно, для N^k в достаточно малой окрестности точки x определена обратная функция (рис. 46). Таким образом, N^k взаимно однозначно отображает некоторую окрестность V точки x на некоторый ε -шар $B_\varepsilon(0)$. Теперь рассмотрим интервал $I_\varepsilon = (0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Несложно показать (используя график $p(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, и геометрическую интерпретацию метода Ньютона), что $I_\varepsilon \subset A(+1)$. Следовательно, из-за симметричности N

$$D(I_\varepsilon) \subset A((-1 + i\sqrt{3})/2) \quad \text{и} \quad D^2(I_\varepsilon) \subset A((-1 - i\sqrt{3})/2),$$

откуда вытекает, что U содержит точки из всех трех бассейнов притяжения.

Поскольку выбор U был произвольным, то должно выполняться и (7.14). Напомним, что для системы (7.5) с непрерывным временем единственной трехсторонней точкой являлось начало координат. Таким образом, приведенные выше рассуждения означают, что дискретизация (7.5) при помощи метода Эйлера разбрасывает по плоскости бесконечное число копий этой исключительной точки, порождая тем самым сепаратрису, общую для всех трех бассейнов притяжения — множество Жюлиа J_N . На рис. 47 белым цветом показана часть множества $A(1)$, а на рис. 48 — увеличенные до одинаковых размеров части множества Жюлиа; все три последовательных крупных плана обнаруживают замечательные самоподобные крабовидные структуры.

Рис. 46. N^k рассаживает трехстороннюю точку 0 (К, З, С = красный, зеленый, синий) по всему множеству Жюлиа.

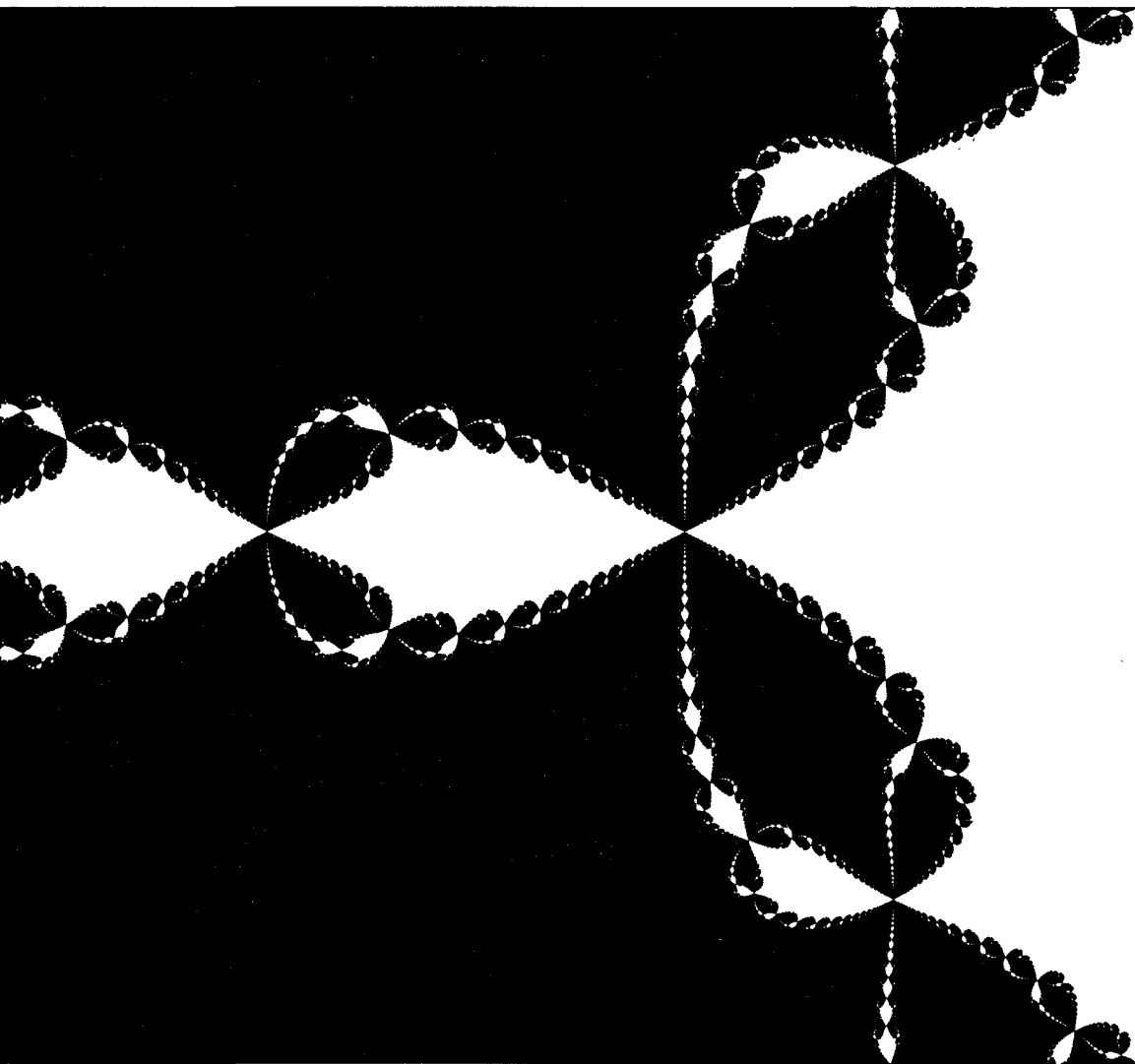
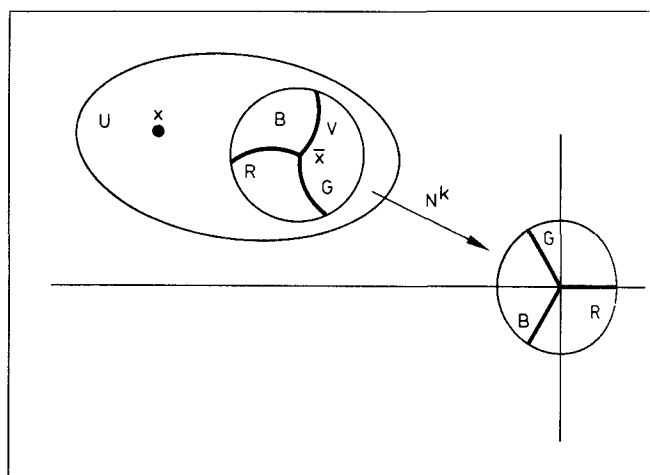


Рис. 47. Бассейн притяжения $A(1)$ в белом цвете.

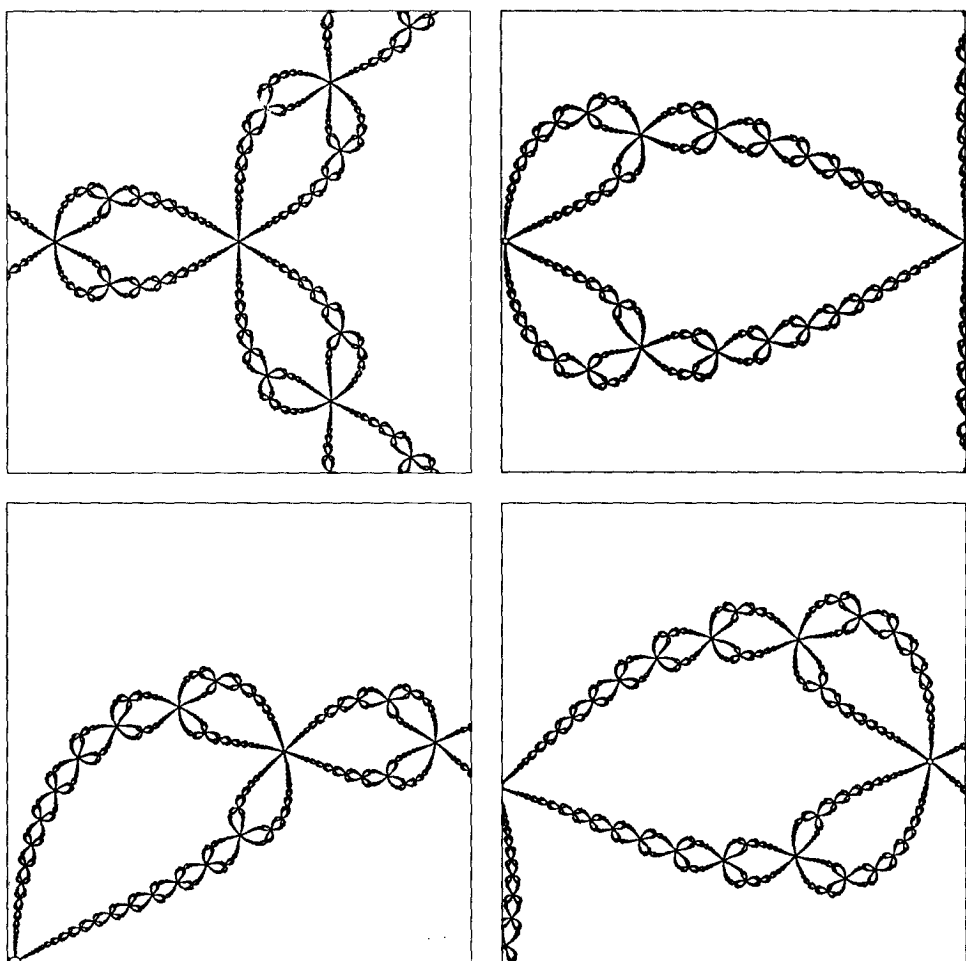


Рис. 48. Множество Жюлиа для (6.13) и три его части крупным планом.

На рис. 49 представлено двоичное разбиение $A(1)$, полученное в соответствии с (2.37) для $\alpha_0 = 0$ при замене $\frac{1}{2\pi} \arg R^k(x)$ на $\frac{1}{2\pi} \arg(N^k(x) - 1)$ (N определяется в (7.13)). Подобные эксперименты снова приводят к результату Бётхера (2.34): метод Ньютона N для $p(x) = x^3 - 1$ в окрестности корня 1 эквивалентен динамике отображения $u \mapsto u^2$. В действительности же, поскольку N не имеет других критических точек в $A^*(1)$ (в бассейне непосредственного притяжения точки 1), кроме самого корня 1, то можно показать, что эта эквивалентность распространяется на все множество $A^*(1)$. Следовательно, если Φ является сопрягающим отображением в (2.34), т. е. $\Phi(0) = 1$, $\Phi'(0) = 1$ и $\Phi^{-1} \circ N \circ \Phi(u) = u^2$, то Φ индуцирует на $A^*(1)$ определенную систему внутренних углов. С ее помощью рис. 49 укажет двоичные адреса точек $x \in \partial A^*(1)$, если проследить за соответствующими им внутренними углами. Двоичное разбиение всех бассейнов показано на фото 66.

Мы уже подчеркивали выше, что метод Ньютона для полиномов второй степени ясен до конца и что его общий случай эквивалентен частному случаю $p(x) = x^2 - 1$. Разобравшись теперь и в случае $p(x) = x^3 - 1$, мы могли бы предположить, что он будет *типичным* для *всех* полиномов степени три. О том, что это далеко не так, утверждалось в одном из недавних исследований, обнаруживающем, кроме того, неожиданную связь с множеством Мандельброта. Это мы сейчас и обсудим.

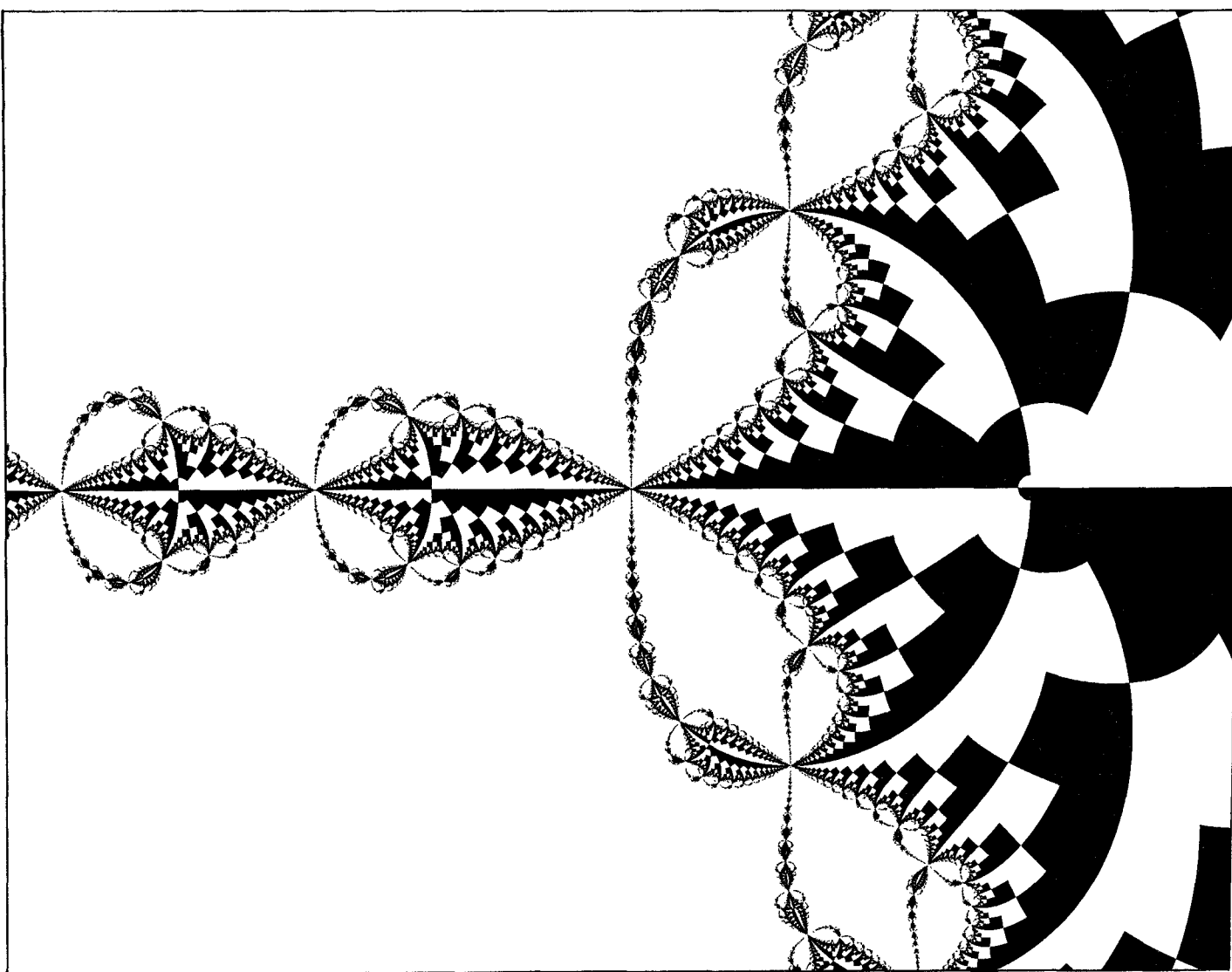


Рис. 49. Двоичное разбиение $A(1)$ для метода Ньютона (6.13) (см. также фото 66).

Метод Ньютона для произвольных полиномов степени 3

Замечательный результат Б. Барны [Ba] говорит о том, что для действительных полиномов, имеющих только действительные корни, метод Ньютона сходится к какому-либо нулю при почти всех начальных значениях из \mathbb{R} . В предыдущей части мы видели, что подобным свойством обладает и метод Ньютона (7.13) для $p(x) = x^3 - 1$, т. е., за исключением начальных значений из множества нулевой меры (множества Жюлиа), наблюдалась сходимость к какому-либо корню из единицы. Однако в общем случае это может и не выполняться, т. е. могут существовать комплексные полиномы, для которых метод Ньютона определен на множестве начальных значений полной меры, но для которых не обнаруживается сходимость ни к одному из корней. Такие примеры получили Дж. Карри, Л. Гарнетт и Д. Салливан [CGS] в результате своих исследований, сопровождавшихся численными экспериментами.

Прежде всего любой кубический полином при помощи линейной замены

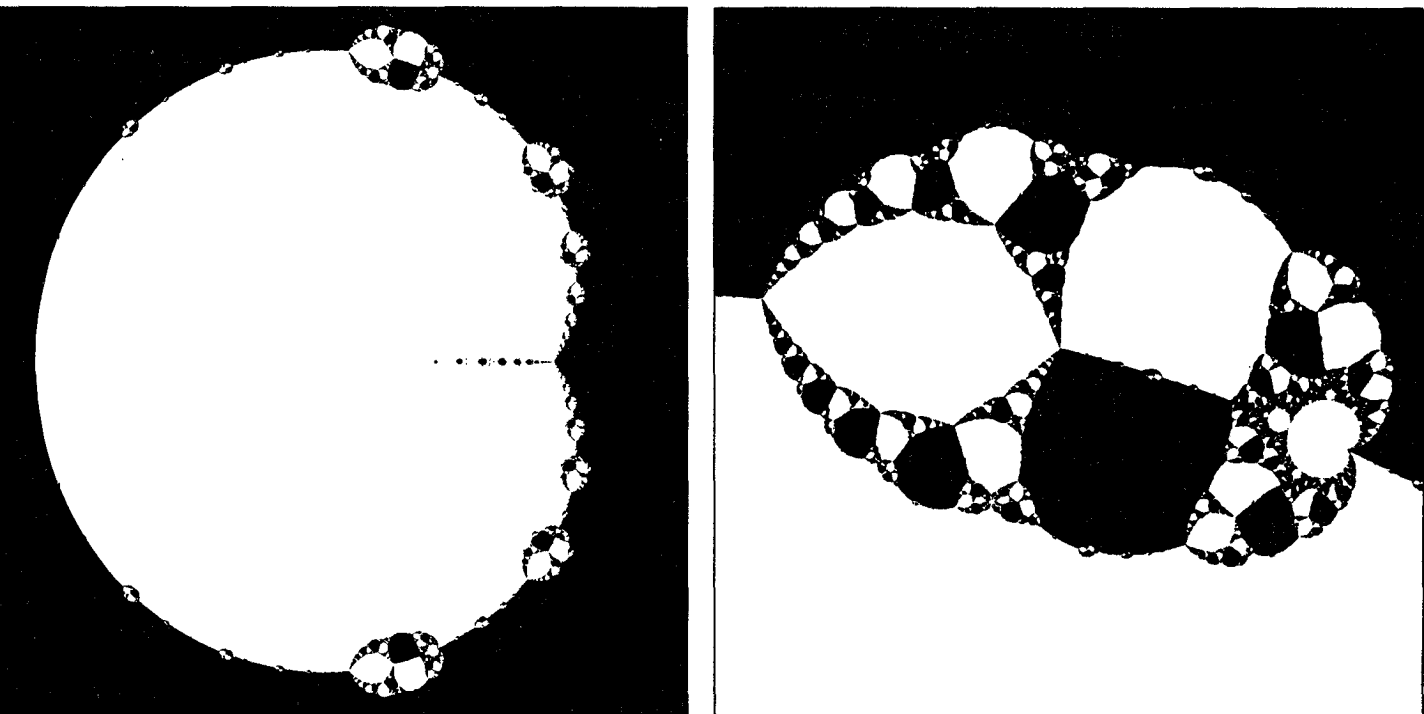


Рис. 50. Исследование критической точки 0 в комплексной λ -плоскости; если λ лежит в черном множестве, то $0 \in A(1)$; справа крупный план изображения слева.

переменных переводится в полином

$$(7.16) \quad p_\lambda(x) = x^3 + (\lambda - 1)x - \lambda$$

с некоторым подходящим образом выбранным λ . Фотографии 77 и 78, которые, между прочим, получены на основе одних и тех же данных и поэтому демонстрируют зависимость восприятия от выбора раскраски, представляют три бассейна притяжения при $\lambda = 0.5$. Метод Ньютона N_λ для (7.16) представляет собой рациональную функцию степени три с четырьмя критическими точками: это три корня полинома p_λ и исключительная точка 0. Теперь, воспользовавшись классификацией Салливана (3.5), можно отыскать значения параметра λ , при которых критическая точка 0 не принадлежит бассейну притяжения ни одного из этих трех корней p_λ . Иначе говоря, определить множество

$$(7.17) \quad M = \{\lambda \in \mathbb{C}: N_\lambda^k(0) \not\rightarrow \text{к корню полинома } p_\lambda, \text{ когда } k \rightarrow \infty\}.$$

На рис. 50 показаны результаты численного анализа поведения критической точки 0; «множество Мандельброта» M содержит значения параметра λ , при которых N_λ имеет притягивающие периодические точки и тем самым обнаруживает в комплексном случае контрпримеры к результату Барны.

Ослабленный метод Ньютона

Мы уже отмечали, что ослабленный метод Ньютона (7.4) можно рассматривать как численную дискретизацию дифференциального уравнения (7.5). В этой заключительной части мы попытаемся исследовать (7.4) при различных h в специальном случае полиномов степени два. Мы уже знаем, что для этого достаточно рассмотреть случай $p(x) = x^2 - c$, который приводит

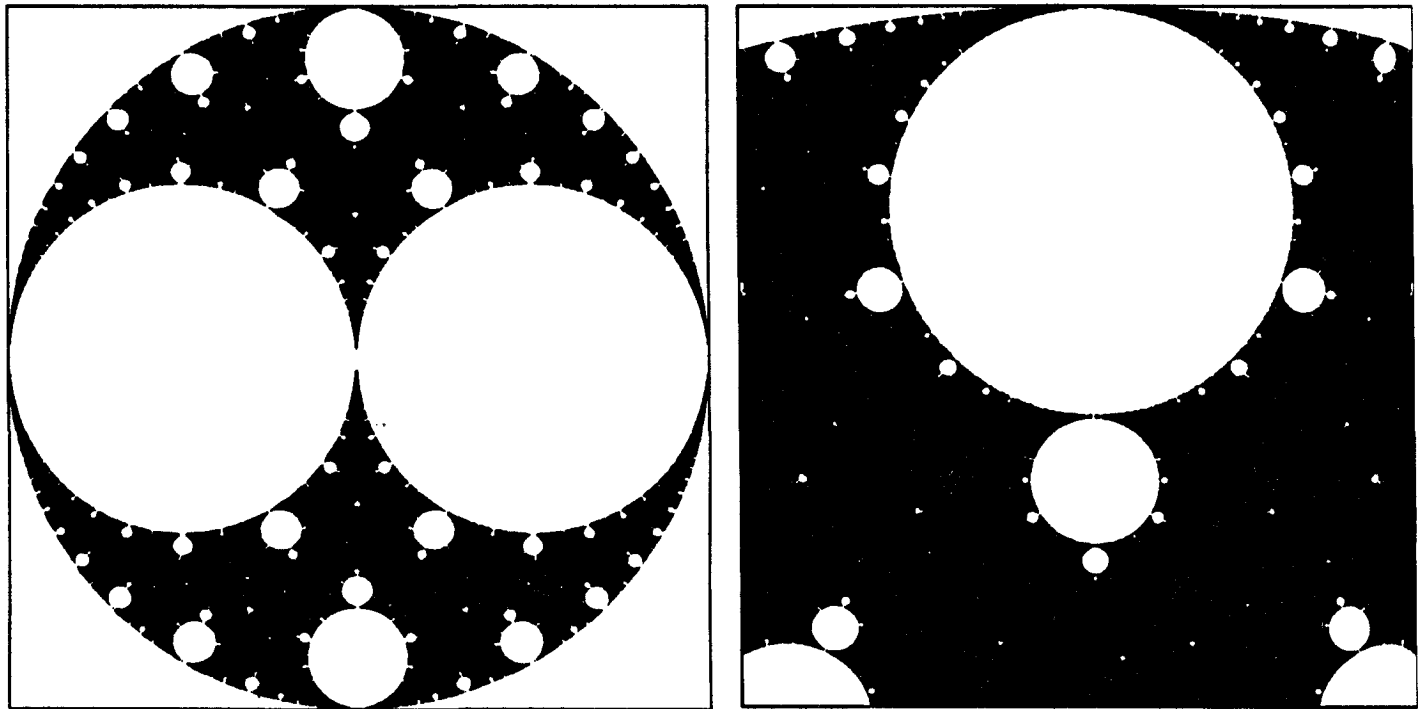


Рис. 51. Исследование критических точек ± 1 отображения $u \rightarrow \lambda(u + 1/u)$ в комплексной λ -плоскости; для λ из черного множества ± 1 не притягиваются никакой притягивающей периодической орбитой; справа: крупный план фрагмента изображения слева.

для ослабленного метода Ньютона к

$$(7.18) \quad N_h(x) = x - h \frac{x^2 - c}{2x}.$$

При $h = 0$ и $h = 2$ получаются тривиальные функции $N_0(x) = x$ и $N_2(x) = \frac{c}{x}$. Поэтому предположим, что $h \in \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$. Вводя новые координаты

$$x = -i\sqrt{c} \sqrt{\frac{h}{h-2}} u,$$

получим $N_\lambda(u) = \lambda \left(u + \frac{1}{u} \right)$, где $\lambda = \left(1 - \frac{h}{2} \right)$. Б. Мандельброт исследовал это семейство в своей книге [Ма]. Наш рис. 51 представляет результаты численного исследования поведения критических точек $u = \pm 1$ функции N_λ . Множество значений параметра, при которых эти критические точки не стремятся к какой-нибудь притягивающей траектории, окрашено в черный цвет. Здесь мы имеем *экспериментальное доказательство* того, что в белой области существует притягивающая периодическая траектория.

8. Метод Ньютона для действительных уравнений

Известно, что многие из тех сложностей, которые мы увидели в методе Ньютона для комплексных полиномов, тесно связаны с комплексной аналитической структурой. Поэтому было бы интересно выяснить, какова ситуация в случае систем действительных уравнений. Заметим, однако, что комплексную аналитическую функцию $f(x)$ можно рассматривать как функцию двух действительных переменных, а именно $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, для которой выполняются условия Коши—Римана:

$$(8.1) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

Таким образом, если говорить точнее, упомянутый выше вопрос должен касаться отображений, не удовлетворяющих (8.1). Вообще, пусть отображение $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где \mathbb{R}^n есть n -мерное евклидово пространство, — гладкое отображение. Тогда ослабленным вариантом метода Ньютона решения уравнения $H(x) = 0$ является

$$(8.2) \quad \begin{cases} x_{k+1} = N(x_k) = x_k - h[DH(x_k)]^{-1}H(x_k), \\ k = 0, 1, 2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $h \in \mathbb{R}$.

Заметим, что (8.2) можно интерпретировать как метод Эйлера с шагом h для решения начальной задачи

$$(8.3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -[DH(x(t))]^{-1}H(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Как и в комплексном случае (специальный разд. 7), особый интерес для нас представляет связь между (8.2) и (8.3), т. е. нам бы хотелось расшифровать зависимость (8.2) от h . Подробно этот вопрос разобран в работе [PPS]. Здесь же мы приведем только те факты, которые помогут объяснить результаты наших численных экспериментов.

Начнем с постановки некоторых вспомогательных вопросов.

(8.4) Что может выступать в качестве кандидата на «множество Жюлиа» для динамической системы (8.2)?

(8.5) Какие свойства таких «псевдомножеств Жюлиа» близки к свойствам множеств Жюлиа рациональных отображений на $\bar{\mathbb{C}}$, а какие нет? В частности, удовлетворяется ли свойство (2.6) и какова динамика на «псевдомножестве Жюлиа»?

(8.6) Являются ли «псевдомножества Жюлиа», как правило, фрактальными?

В связи с вопросом (8.4) напомним, что для полинома p соответствующее методу Ньютона множество Жюлиа получается при помощи последовательных прообразов (отрицательных полутраекторий) нулей функции $p'(x)$. Поэтому следует обратить внимание на множество

$$(8.7) \quad S = \{x \in \mathbb{R}^n: \det(DH(x)) = 0\}.$$

В типичном случае S представляет собой некоторую совокупность $(n-1)$ -мерных многообразий в \mathbb{R}^n , и, по-видимому, реальным кандидатом на «псевдомножество Жюлиа» может оказаться множество

$$(8.8) \quad \text{Замыкание множества } \{x \in \mathbb{R}^n: N^k(x) \in S \text{ при некотором } k \geq 0\}$$

(замыкание X — объединение всех точек накопления X), где N обозначает

отображение Ньютона, связанное с H так, как указано в (8.2). Другим столь же реальным кандидатом может быть

(8.9) Замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^n: \|N^k(x)\| \rightarrow \infty, \text{ когда } k \rightarrow \infty\}$.

Множества, замыкания которых определяются в (8.8) и (8.9), очевидно, различны, но после присоединения к ним их точек накопления вполне могут получиться совпадающие множества. Совпадение (8.8) и (8.9) как раз и является одной из наших гипотез. Теперь для того, чтобы объяснить наши эксперименты, осталось определить выбор H :

$$(8.10) \quad H(x) = Mx - \mu F(x),$$

где μ — действительный параметр, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $F(x) = (f(x_1), \dots, f(x_n))^T$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и M — матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Не вдаваясь в детали, отметим лишь, что (8.10) получается как конечноразностная аппроксимация двухточечной краевой задачи

$$(8.11) \quad \begin{cases} u''(t) + \lambda f(u(t)) = 0, \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

для n внутренних точек на $(0, 1)$, определяющих равномерное разбиение с шагом $1/(n+1)$, и $\mu = \lambda/(n+1)^2$. Параметр λ выступает в качестве *бифуркационного параметра* краевой задачи, если f обладает нелинейностью подходящего типа [PPS]. Мы рассматриваем две возможности для f :

$$(8.12) \quad f(s) = s - s^2 \quad \text{и} \quad f(s) = s - s^3.$$

Если выбрать H в соответствии с (8.10), то отображение N из (8.2) будет зависеть от двух внешних параметров h и μ . При необходимости мы будем подчеркивать это, записывая $N_{h,\mu}$. Несложно показать, что каждое решение уравнения $H(x) = 0$ является некоторым устойчивым центром для (8.3).

На рис. 52 и 53 показаны фазовые портреты непрерывного потока (8.3) с $f(s) = s - s^2$ и $n = 2$ при двух характерных значениях μ . Когда $1 < \mu < 3$, уравнение $H(x) = 0$ имеет два решения $x = a_1$ и $x = a_2$, причем $a_2 \equiv 0$. Когда μ , возрастая, проходит значение 3, решение $a_2 \equiv 0$ разделяется на три решения, т. е. при $\mu > 3$ будет уже 4 решения. Множество особых точек S из (8.7) зависит от μ , но оно всегда состоит из пары гипербол S^- и S^+ , лежащих в нижней и верхней полуплоскости соответственно. При $1 < \mu < 3$ S^- поглощает траектории, а S^+ отталкивает, в то время как при $\mu > 3$ S^+ по-прежнему отталкивает траектории, а S^- в одних своих частях их поглощает, а в других отталкивает. Этот переход можно рассматривать как бифуркацию. При этом особую роль играет прямая G (рис. 52). Когда $1 < \mu < 3$, все траектории (8.3), начальные точки которых лежат ниже прямой, за конечное время достигают S^- , а сама G оказывается инвариантной, т. е. $x(t) \in G$ для $x_0 \in G$. Аналогично при $\mu > 3$ имеются два конических сектора, ограниченных прямыми линиями, таких, что все траектории (8.3) с начальными точками из этих секторов приходят к S^- . Таким образом, можно ожидать, что эти два сектора (на рис. 52 и 53 они выделены серым цветом) не будут принадлежать бассейнам притяжения корней уравнения $H(x) = 0$, когда будет рассматриваться дискретизация задачи (8.3) при помощи метода Эйлера, т. е. (8.2). И очень удивительно, что это интуитивное заключение оказывается ложным при любом $h > 0$.

Рассмотрим сначала случай $1 < \mu < 3$. Как видно из рис. 52, решение a_1 уравнения $H(x) = 0$ притягивает траектории потока (8.3) с начальными

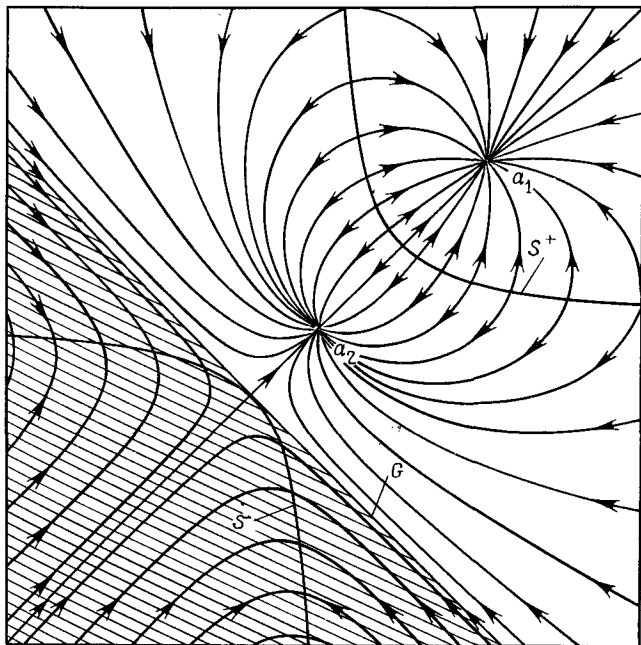


Рис. 52. Фазовый портрет (7.3) для $f(s) = s - s^2$ и $1 < \mu < 3$.

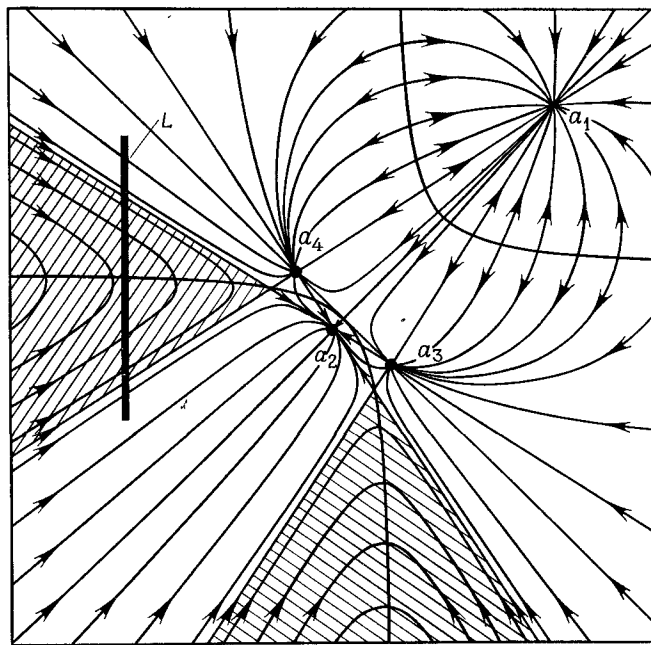


Рис. 53. Фазовый портрет (7.3) для $f(s) = s - s^2$ и $\mu > 3$.

точками, лежащими выше S^+ , в то время как решение a_2 притягивает траектории с начальными точками, лежащими между S^+ и G . Для дискретной системы (8.2) дело обстоит совершенно иначе. Хотя a_1 и a_2 , конечно же, оказываются притягивающими неподвижными точками для N (если $0 < h < 2$), а бассейн притяжения a_1 в точности совпадает с областью, расположенной выше S^+ (как и подсказывал фазовый портрет (8.3)), бассейн притяжения a_2 размещен во всей полуплоскости, лежащей ниже прямой G . На самом деле $A(a_2)$ состоит теперь из бесконечного числа компонент, ограниченных множеством (8.8). Рис. 54 показывает вид «псевдомножества Жюлиа» (8.8) при различных значениях h и тем самым поясняет изображение на фото 67, где $h = 0.1$. Область под прямой G почти плотно покрывается канторовым множеством кривых (8.8), и вместе с тем она буквально усеяна тонкими нитями компонент $A(a_2)$, в результате чего под прямой G возникает шумящая структура. Складчатая структура, которую мы видим выше G на фото 67, образована множествами точек уровня — одного и того же динамического расстояния от аттракторов a_1 и a_2 соответственно.

Стоит отметить, что прямая G инвариантна для отображения N и что ограничение N на G определяет одномерное отображение, эквивалентное ослабленному методу Ньютона для полинома

$$(8.13) \quad p(s) = \mu s^2 - (\mu + 1)(\mu - 3)/4\mu.$$

Таким образом, динамика N на G полностью описывается с помощью семейства (7.18) и его «псевдомножества Мандельброта», показанного на рис. 51. В частности, динамика будет хаотичной на G при любых $0 < h < 2$ и $1 < \mu < 3$. Более того, при $h = 1$ и $1 < \mu < 3$ динамика N на G эквивалентна динамике

$$\alpha \mapsto 2\alpha \pmod{1}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

или $u \mapsto u^2$ на единичной окружности. Просто удивительно, как это простей-

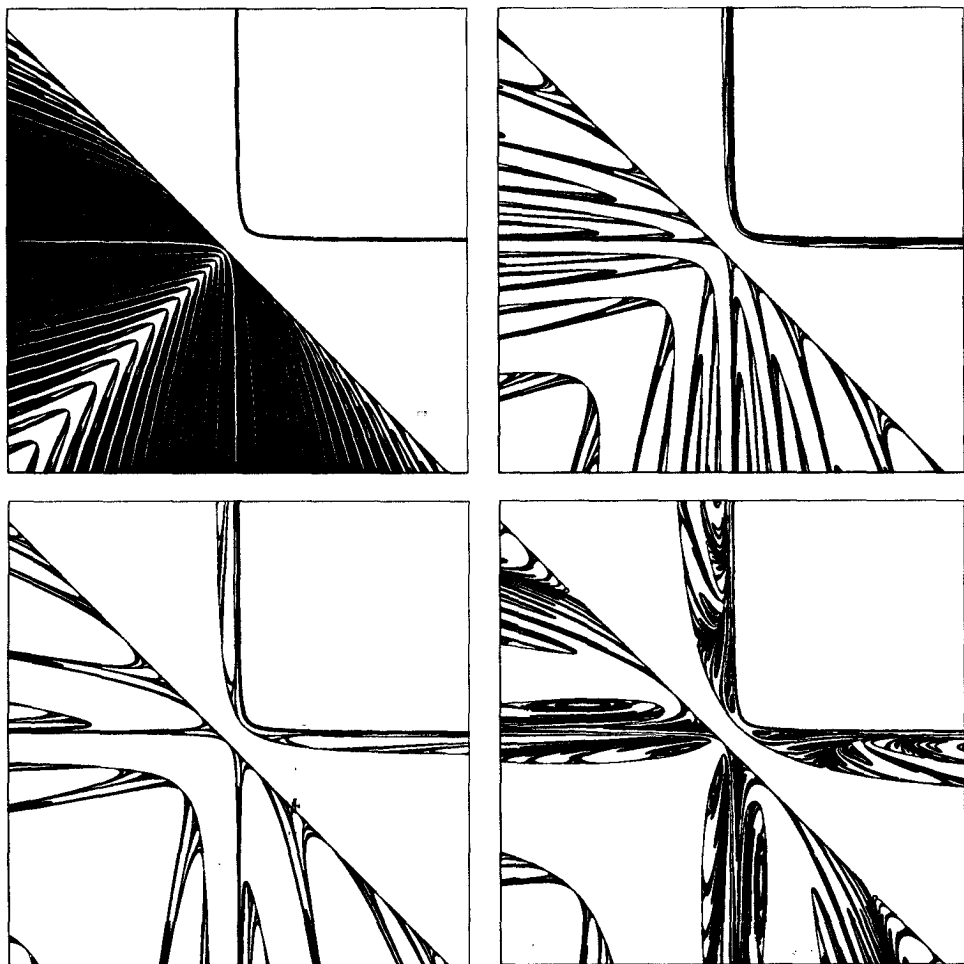


Рис. 54. «Множество Жюлиа» для (7.2), $f(s) = s - s^2$, $\mu = 2.1$. Вверху слева: $h = 0.3$; вверху справа: $h = 1.0$; внизу слева: $h = 1.4$; внизу справа: $h = 1.7$ (см. также фото 17 и 67).

шее из всех нелинейных отображений проникает во все вопросы комплексной динамики!

Если $\mu > 3$, то на арене конкуренции за место на плоскости кроме уже существующих решений a_1 и a_2 появляются еще две притягивающие неподвижные точки a_3 и a_4 со своими бассейнами притяжения. (В отличие от $a_2 \equiv 0$ решения a_1 , a_3 и a_4 зависят от μ , и при изменении μ они вычерчивают непрерывные кривые.) Теперь можно было бы ожидать, опираясь на опыт исследования метода Ньютона для комплексных полиномов, что при наличии четырех бассейнов притяжения «псевдомножество Жюлиа» должно состоять из четырехсторонних точек. На фото 19, 21 и 23 показаны результаты экспериментов для $h = 0.2$, $h = 1.8$ и $h = 1.9$. Бассейны притяжения точек a_1 , a_2 , a_3 и a_4 окрашены соответственно в красный, желтый, зеленый и синий цвета (сравните размещение четырех корней с рис. 53). «Псевдомножество Жюлиа» (8.8) для соответствующих значений h показаны на рис. 55. Для получения изображения на фото 68 использовались те же данные, что и для фото 19, но была выбрана другая таблица цветов для того, чтобы выделить множества уровней внутри бассейнов притяжения.

Два экспериментально полученных факта вступают в противоречие с на-

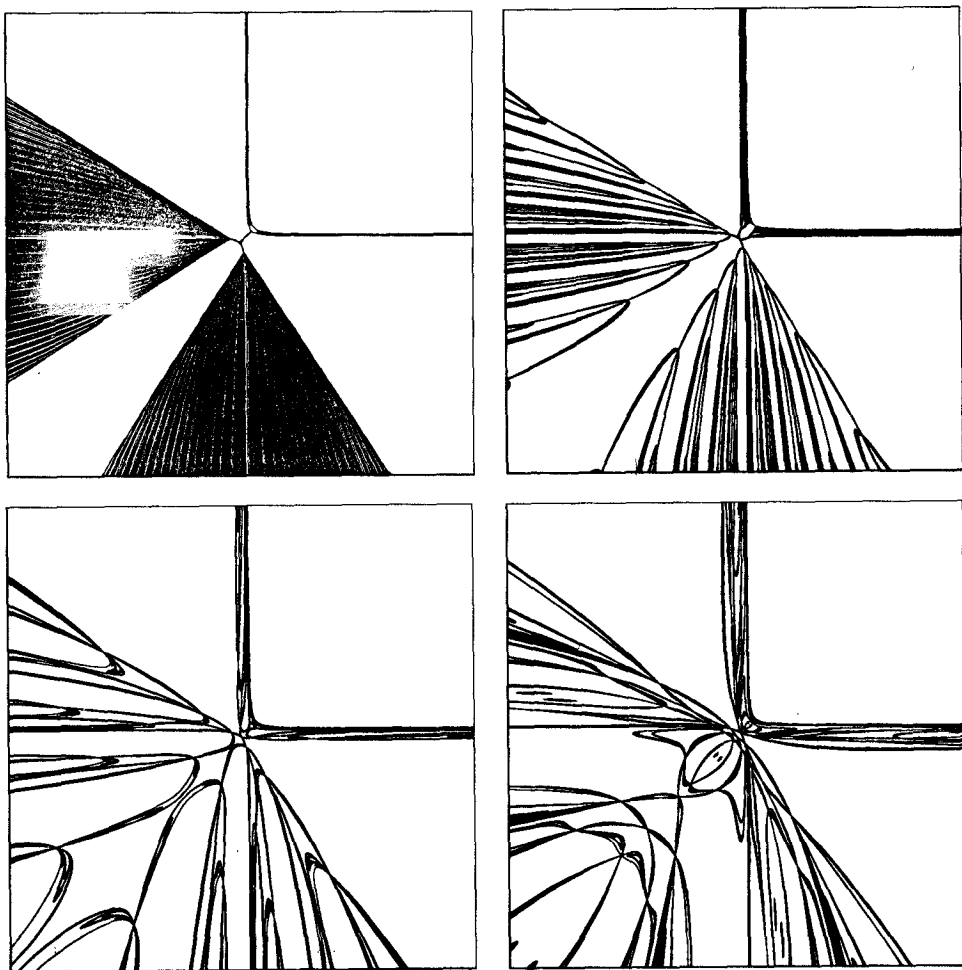


Рис. 55. «Множество Жюлиа» для (7.2), $f(s) = s - s^2$, $\mu = 3.2$. Вверху слева: $h = 0.3$; вверху справа: $h = 1.0$; внизу слева: $h = 1.4$; внизу справа: $h = 1.7$ (см. также фото 19, 21, 23, 68, 71—73, 87).

шими ожиданиями. Несмотря на существование четырех бассейнов, только три из них (желтый, зеленый и синий) кажутся перепутанными между собой и разделенными границами из трехсторонних точек. Четвертый же (красный) ограничен кривой S^+ и совпадает с соответствующим бассейном в непрерывном случае (8.3) (см. рис. 53). Другим досадным фактом является то, что даже при малых h оба конических сектора (показанные серым цветом на рис. 53) содержат начальные точки, для которых (8.2) сходится к какому-нибудь корню H , а это совершенно не похоже на непрерывный случай (8.3), в котором эти сектора за конечное время поглощались кривой S^- .

Для того чтобы выяснить, что же все-таки происходит внутри конических секторов, мы провели еще один эксперимент, результаты которого показаны на фото 69, 70 и 88. Сначала был выбран отрезок L , пересекающий один из конических секторов так, как показано на рис. 48.

$$(8.14) \quad L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 = -5, -5 \leq x_2 \leq 5\}.$$

Затем для каждого $x \in L$ и $0.002 < h < 1.998$ в соответствии с (7.2) была вычислена положительная полутраектория $Or^+(x)$ и результату вычисления

был сопоставлен определенный цвет:

$$\begin{aligned}
 &\text{Голубой} : Or^+(x) \in A(a_2), \\
 (8.15) \quad &\text{Красный} : Or^+(x) \in A(a_3), \\
 &\text{Зеленый} : Or^+(x) \in A(a_4).
 \end{aligned}$$

Распределение этих цветов на достаточно мелкой решетке в $L \times [0.002, 1.998]$ показано на фото 69; здесь h возрастает при движении сверху вниз. Очевидно, что на L бассейны притяжения a_2 , a_3 и a_4 конкурируют при каждом h , тем самым порождая распределение, структура которого напоминает структуру множества Кантора. Фото 70 и 88 получаются из результатов того же эксперимента, но дополнительно содержат информацию о множествах уровня равного динамического расстояния от центров (см. (7.13)).

Фото 71—73 основываются на тех же данных, что и фото 23 и иллюстрируют те разительные перемены, которые могут происходить с изображением при изменении цветовой таблицы. В качестве источника дополнительной информации о «псевдомножествах Жюлиа» и других результатах, таких, как, например, существование странных аттракторов для (8.2), можно предложить [PPS].

Наконец, не вникая в детали, прокомментируем фото 55—57 и фото 74. Они также представляют результаты одного и того же эксперимента при помощи различных цветowych таблиц. Здесь $f(s) = s - s^3$, и в отличие от всех предыдущих экспериментов, основанных на двухточечной дискретизации краевой задачи (8.1), здесь использовалась сетка из шести внутренних точек. Таким образом, в этом случае изучался метод Ньютона в \mathbb{R}^6 ; параметр μ выбирался так, чтобы уравнение $H(x) = 0$ имело пять конкурирующих решений. Наши эксперименты показывают сечения соответствующих бассейнов притяжения некоторой двумерной гиперплоскостью в \mathbb{R}^6 .

9. Дискретная система Вольтерра—Лотки

При обсуждении метода Ньютона было продемонстрировано, как дискретизация явно безобидной системы дифференциальных уравнений привела к невообразимо богатому и сложному поведению. Это будет лейтмотивом и для нашего последнего примера — уравнения Вольтерра—Лотки для системы хищник — жертва.

Пусть $x(t)$ (соответственно $y(t)$) означает численность популяции жертвы (соответственно хищника) в момент t . Предположим, что коэффициенты прироста x и y связаны следующим образом:

$$(9.1) \quad \begin{cases} \dot{x}/x = \alpha - \beta y, \\ \dot{y}/y = -\gamma + \delta x, \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

Следовательно, x в отсутствие y растет с некоторым постоянным коэффициентом, а y в отсутствие x с некоторым постоянным коэффициентом убывает. Истребление жертвы пропорционально y , а прирост численности хищников пропорционален x . Перепишем систему (9.1) в виде

$$(9.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy = f(x, y), \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy = g(x, y). \end{cases}$$

Очевидно, что точка $(x_s, y_s) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ будет точкой покоя для (9.2), и хорошо известно, что первый квадрант $\{(x, y): x > 0, y > 0\}$ заполняется замкнутыми траекториями, охватывающими (x_s, y_s) , т. е. наблюдаются периодические колебания численности популяций.

Для дискретизации (9.2) существует немало численных методов: одношаговые, многошаговые и т. д. Нас будет интересовать некоторое переплетение двух фундаментальных одношаговых методов — метода Эйлера и метода Хена:

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \Phi_{h, \varrho} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \Phi_{h, \varrho} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} f(x, y) + f(x + \varrho f(x, y), y + \varrho g(x, y)) \\ g(x, y) + g(x + \varrho f(x, y), y + \varrho g(x, y)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\varrho = 0$ получается метод Эйлера, а при $\varrho = h$ — метод Хена. Далее будем считать, что $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, и заметим, что

$$\Phi_{h, \varrho} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

при всех h и ϱ .

Для того чтобы обсудить (9.3), посмотрим на плоскость параметров (h, ϱ) на рис. 56.

С точки зрения качественного поведения системы на этой плоскости можно различать четыре области. Для (h, ϱ) из (I) неподвижная точка $(x, y) = (1, 1)$ является притягивающей. Если менять (h, ϱ) , двигаясь из (I) в (II), то в системе (9.3) наблюдается бифуркация Хопфа, т. е. неподвижная точка становится неустойчивой и из нее рождается *инвариантная окружность*, которая оказывается притягивающей. Это характеризует все точки из (II), за исключением небольших языков, исходящих из границы области (I). Когда (h, ϱ) принадлежит какому-либо одному из бесконечного числа этих языков, вместо инвариантной окружности имеется притягивающая периодическая траектория (состоящая из конечного числа точек). В этом случае говорят, что система находится в *резонансе*.

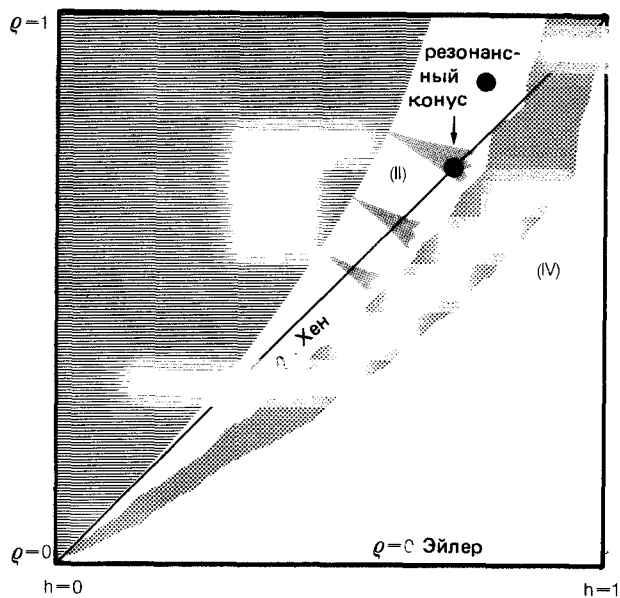


Рис. 56. Плоскость параметров (h, q) .

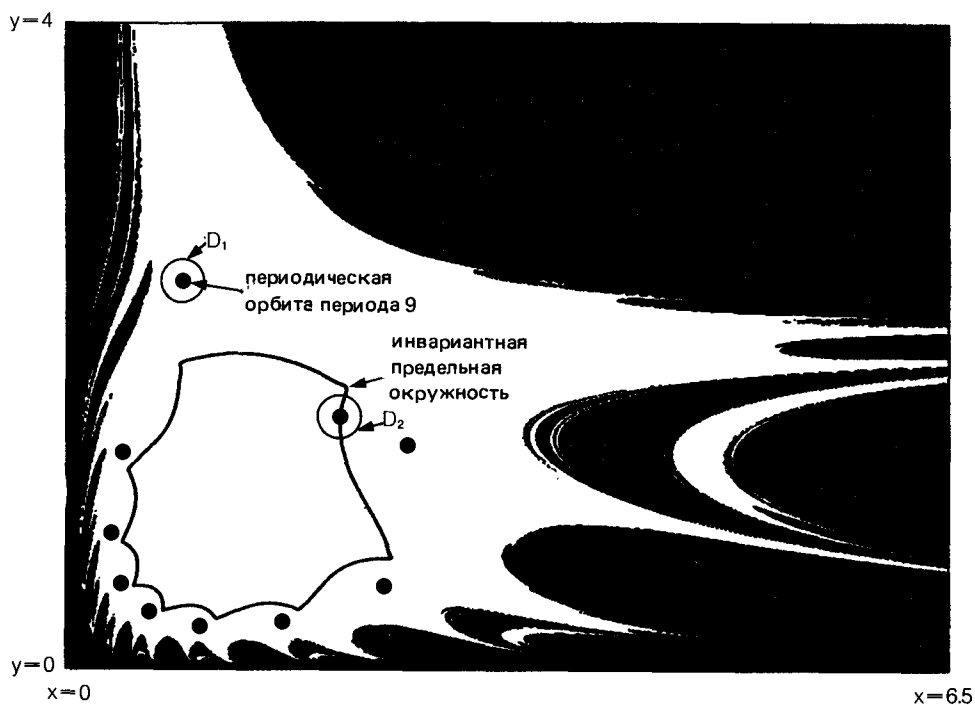


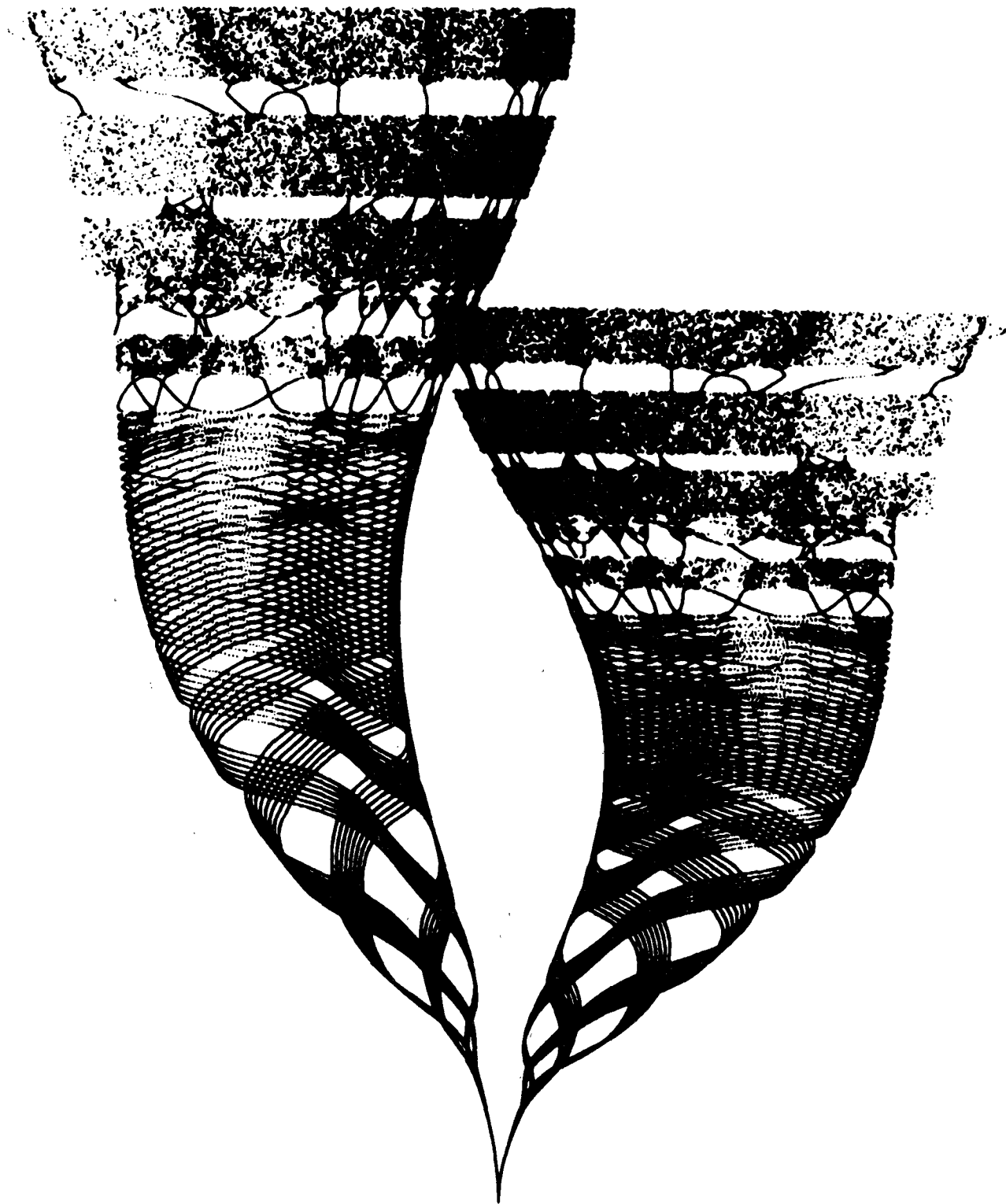
Рис. 57. Множества-мишени (D_1 и D_2) для разбиения на множества уровня (см. также фото 85—86).

Если двигать (h, ρ) дальше, то в системе сначала будут наблюдаться странные аттракторы (III), а в конце концов в (IV) $\Phi_{h, \rho}$ вообще не будет иметь конечных аттракторов, т. е. все траектории будут стремиться к ∞ , за исключением, конечно, точки $(1, 1)$ с ее прообразами и, возможно, нескольких других отталкивающих периодических точек. Что касается рис. 56, то его следует принимать с некоторыми оговорками. Он является лишь очень грубым наброском наблюдаемого качественного поведения. Например, еще далеко не изучены механизмы перехода из (II) в (III). Однако эксперимент показывает, что, когда (h, ρ) принадлежит (II), но лежит «вблизи (III)», в типичном случае имеются две отдельные притягивающие траектории, например притягивающая инвариантная окружность и сосуществующая с нею притягивающая периодическая траектория.

Такую возможность иллюстрируют фото 83—86. Изображениям соответствует ситуация $\rho = h = 0.739$, схематически показанная на рис. 57.

В этом случае инвариантная окружность сосуществует с траекторией периода 9. На фото 83 показаны бассейны притяжения: желтый для периодической траектории, красный для инвариантной окружности и серый для начальных точек, чьи траектории уходят к бесконечности. Воспользовавшись некоторым разбиением на множества уровня равного притяжения аттракторами (см. специальный разд. 2), мы получили фото 84—86. В качестве множества-мишени L_0 выбирались некоторый круг D_1 (см. рис. 57) для периодической траектории и некоторый круг D_2 с центром в произвольной точке инвариантной окружности (см. рис. 57).

Для фото 79—82 $h = 0.8$ и $\rho = 0.86$, что соответствует точке из (II) и иллюстрирует ситуацию, возникшую после бифуркации Хопфа, т. е. случай, когда имеется только притягивающая инвариантная окружность. На фото 82 ее бассейн притяжения показан красным цветом, в то время как начальные точки из серой области принадлежат траекториям, уходящим в бесконечность. Фотографии 79—81 показывают некоторое разбиение на множества уровня, полученное так же, как и предыдущее.



ЧАСТЬ II

МАГНЕТИЗМ И КОМПЛЕКСНЫЕ ГРАНИЦЫ

Различные области научного знания, даже весьма далекие друг от друга, часто оказываются похожими в идейном плане. Набор основных идей и методов в большей степени отражает общность культурной основы ученых, нежели различия конкретных областей исследования. Понимание этого единства щедро вознаграждается. Разве не награда за старания ученого видеть, как новые схемы, разработанные им для решения одной конкретной задачи, неожиданно дают возможность по-новому, причем весьма эффективно, осветить самые разные проблемы.

Вдохновленная таким взаимообменом идей, К. К. Коул в своей книге «Вынужденные колебания» цитирует В. Ф. Вайскопфа: «Что такое красота науки? Ведь это по сути то же самое, что и красота музыки Бетховена. В беспорядочном нагромождении событий и фактов Вы вдруг видите взаимосвязь. Это проявляется сложное взаимное влияние различных, но глубоко волнующих Вас идей, которое позволяет объединить то, что всегда было в Вас, но никогда не было связано друг с другом».

Самоподобие — достаточно старая идея. Так, например, русские матрешки напоминают нам о гипотезе самоподобных гомункулюсов, которые существовали еще в яичниках Евы, представляя собой все будущие поколения человечества. В XVIII столетии А. фон Халлер и др. развили эту гипотезу в серьезную теорию «преформации» (предварительного формирования). Их поражение в споре с эпигенетиками, возможно, было одной из причин того, что самоподобные структуры игнорировались вплоть до начала 70-х годов, когда они были перестроены и вызвали новый прилив энтузиазма. Независимо (и почти одновременно) К. Г. Вильсон в физике (теория перенормировок) и Б. Б. Мандельброт в математике (фрактальная геометрия) восстановили в правах структуры такого типа и создали тем самым новые методы, существенно расширившие наши представления о мыслимых формах.

Тесная взаимосвязь этих работ отражена и в наших рисунках, относящихся к теории магнетизма. В них физика фазовых переходов соприкасается с математикой множеств Жюлиа. В настоящее время неизвестно, является ли это простым совпадением или же отражает существенные свойства фазовых переходов.

Подытоживая свою историю металлургии, С. С. Смит писал: «... открытие возникает из эстетически мотивированного любопытства и редко является результатом практической целеустремленности». Мы надеемся, что приведенные ниже примеры будут стимулировать дальнейшие исследования. Фрактальность фазовых границ вполне может оказаться типичной. И тогда это будет призывом к исследованию физического смысла этого математического феномена.

Фазовые переходы и перенормировка

Фазовым переходом называется изменение состояния вещества. В школе мы изучали три основных состояния: *твердое тело, жидкость и газ*. При более близком изучении обнаруживается, однако, и много других состояний (*фаз*). Так, например, многие твердые тела изменяют свою кристаллическую структуру при изменении температуры или давления. При очень больших температурах или малых плотностях вещество ионизируется и становится *плазмой*, которая обладает свойствами, редкими на Земле, но обычными в космосе.

Но наиболее интенсивно изучается *фазовый переход* между *магнитным* и *немагнитным* состояниями вещества. Во многих веществах имеются элементарные атомные магниты, которые стремятся расположиться параллельно друг другу. Если тепловые флуктуации достаточно малы, такая тенденция приводит к макроскопическому (наблюдаемому) упорядочиванию, которое и называется магнетизмом. Этот порядок с ростом температуры становится все более нечетким, а в *точке Кюри* (названной так в честь Пьера Кюри — мужа Марии Кюри) порядок превращается в беспорядок. Для железа это происходит при температуре 770°C . Выше этой температуры есть только намек на магнетизм: на определенных расстояниях и в течение определенных промежутков времени элементарные магниты могут сохранять упорядоченность, но в этом случае они не могут «поддерживать связь» друг с другом на больших расстояниях или же в течение длительного времени. Чем выше температура, тем меньше типичные расстояния и времена когерентности, а при очень больших температурах элементарные магниты могут изменять свое положение совершенно независимо друг от друга.

Другие фазовые переходы также могут быть описаны как образование или разрушение *дальнего порядка*, при этом связь между температурой и пространственно-временными масштабами когерентности аналогична описанной выше. Тот факт, что такие совершенно разные системы, как, например, магнит вблизи точки Кюри и жидкость в критической точке, оказываются удивительно похожими в количественном отношении, был поразительным и вплоть до конца 60-х годов загадочным. Микроскопическая природа порядка, казалось, не имела значения для понимания этого явления. Что же тогда было основной причиной наблюдаемого сходства?

Решающая идея принадлежала *Л. П. Каданову*. Он сформулировал ее в 1966 году, когда работал в Университете Брауна. Не употребляя явно сам термин «самоподобие», Каданов разработал основную концепцию, выражающую это понятие. Он исследовал, как будет выглядеть один и тот же магнит при использовании различных масштабов.

Вначале возьмем магнит при абсолютном нуле, когда все элементарные магниты выстроены в линию. Его вид не меняется при изменении масштаба. Простирается ли наше «окно для наблюдений» от 1 до 100 нанометров или же от 1 до 100 микрометров — мы видим *идеальный порядок*. Можно взять наименьшую различимую ячейку (нанометровый или соответственно микрометровый блок) в качестве элементарного магнита и обнаружить, что при абсолютном нуле они идеально выстроены в линию.

Похожую картину мы наблюдаем, меняя масштаб при «бесконечно» большой температуре. Здесь все атомные магниты флуктуируют абсолютно независимо друг от друга и на всех масштабах выше атомного наблюдается *полный беспорядок*. Таким образом, картины на нанометровой и микрометровой шкалах не отличаются друг от друга.

Что же происходит, когда температура больше нуля, но не бесконечна? Рассмотрим вначале низкие температуры. Здесь также есть макроскопический порядок, но он не вполне идеален, так как некоторые из атомных магнитов отклоняются от выделенной линии из-за тепловых флуктуаций. Сравнивая различные масштабы, мы замечаем различия. Так, например, флуктуации можно наблюдать при нанометровом масштабе, но не дальше. В микрометровом масштабе они незаметны, и магнит выглядит точно так же, как и при температуре абсолютного нуля. Таким образом, огрубление шкалы от нанометров до микрометров приводит к эффективному понижению температуры.

Рассмотрим теперь магнит при высоких температурах. Здесь беспорядок уже неполный. Всегда существуют локальные образования, в которых атомные магниты выстроены в линию. И вновь огрубление шкалы — *масштабное преобразование* — приводит к исчезновению этих небольших

когерентных областей. При достаточно грубой шкале магнит выглядит точно так же, как и при бесконечно высокой температуре.

Эта стратегия напоминает процесс принятия решений. Чтобы оценить сложную ситуацию, часто бывает полезным рассматривать ее со все возрастающего расстояния. При этом детали размываются (становятся неразличимыми) и картина становится более ясной.

Суть этой идеи в том, чтобы связать масштабные преобразования с изменениями температуры. Если один и тот же магнит при заданной температуре рассматривать в различных масштабах, то он будет выглядеть так, как будто его температуры различны. Можно говорить, что масштабное преобразование вызывает соответствующую *перенормировку* температуры.

Рассмотрим магнит из N атомов с межатомным расстоянием a и с температурой T . Если взять достаточно грубый масштаб, в котором элементарная ячейка содержит b^3 атомов, а длина ее стороны равна $a' = b \cdot a$, то магнит будет выглядеть так, как будто он состоит из $N' = N/b^3$ атомов и имеет другую, *перенормированную* температуру T' . Соотношение $T' = R_b(T)$ называется преобразованием перенормировки¹⁾.

Наше качественное обсуждение продемонстрировало, что это преобразование имеет два аттрактора: температуры $T = 0$ и $T = \infty$. Действительно, в случае низких температур перенормировка температуры, связанная с переходом на более грубые масштабы, еще больше ее снижает, а при высоких температурах, наоборот, еще больше повышает.

Будем говорить, что низкие температуры находятся в области притяжения аттрактора $T = 0$, а высокие — в области притяжения аттрактора $T = \infty$. Точки Кюри T_c — граница между двумя областями притяжения. Когда магнит находится при этой температуре, он выглядит одинаково при любых масштабах, а его температура не изменяется при перенормировке $R_b(T_c) = T_c$ просто потому, что он не может «решить», к какому аттрактору ему следует направиться. На языке динамических систем мы говорим, что T_c — *репеллер* процесса перенормировки. Если температура магнита даже весьма незначительно отклоняется от T_c , то это отклонение увеличивается перенормировкой, а повторения (итерации) этого процесса ведут к одному из известных случаев, т. е. к идеальному порядку ($T = 0$) или к полному беспорядку ($T = \infty$).

Будем считать, что при $T = T_c$ в магните существуют когерентные (согласованные) флуктуации любых масштабов, сплетенные воедино: малые флуктуации включены в большие и т. д. Короче говоря, флуктуации при критической температуре имеют *самоподобную форму*.

В конечном итоге, используя эту основную идею, удалось получить количественные результаты и вполне удовлетворительно объяснить физику фазовых переходов. Путь от идеи перенормировки до ее конкретной законченной формы оказался столь трудноуловимым, что Каданову не удалось его отыскать. В 1970 году К. Г. Вильсону в Корнеллском университете удалось преодолеть эти трудности. Он развил метод перенормировок, превратив его в технический инструмент, который доказал теперь свою ценность в огромном числе приложений.

Развитие идеи перенормировки от предвидения Каданова до практического метода Вильсона имело любопытный побочный эффект: интуитивно ясная картина самоподобных флуктуаций в критической точке постепенно отошла на задний план, а сам метод стал весьма технически сложным и менее понятным.

¹⁾ Подробное изложение строгих результатов, полученных в рамках метода ренорм-группы Вильсона—Каданова—Фишера см. в книге: Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1980, гл. 4. Там же приведен более подробный список литературы по этому вопросу. — *Прим. пер.*

Исследователи стали заниматься в основном вопросом о том, как быстро перенормировка выводит из окрестности критической точки. Кажется удивительным, что для объяснения экспериментальных результатов, касающихся феноменологии фазовых переходов, не нужно было явно использовать самоподобные структуры.

Однако недавно в теории перенормировок появились, причем неожиданно, фрактальные границы раздела фаз. При этом обнаружилась интуитивно привлекательная (хоть пока еще и не связанная с экспериментом) связь с идеей Каданова о самоподобии. Но для того чтобы это объяснить, нужно вспомнить историю.

Нули Янга и Ли

В 1952 году физики Янг и Ли предложили рассматривать фазовые переходы не только в реальном мире, но и в математическом мире *комплексных чисел*. Это могло показаться надуманным или неприменимым с точки зрения физики, поскольку мнимая температура или мнимое поле не имеют физического смысла. Тем не менее, и это случилось не в первый и не в последний раз, попытка перешагнуть границы реального дала серьезный импульс для понимания сути проблемы. Рассмотрим элегантное решение задачи о нулях многочлена, принадлежащее Гауссу. Уравнение

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_Nx^N = 0 \quad (1)$$

имеет ровно N нулей в комплексной плоскости x . В то же время для действительных значений x такой простой и фундаментальной теоремы нет. Можно вспомнить и принадлежащее Мандельброту продолжение процесса $x \mapsto x^2 + c$ в комплексную плоскость. Анализ этого и других итерационных процессов стал гораздо более доступным для понимания именно благодаря теореме Фату о поведении критических точек, применимой лишь в комплексной плоскости.

Янг и Ли поставили перед собой главный вопрос — как с помощью формализма канонической статистической механики, разработанного Больцманом и Гиббсом, можно описать фазовые переходы. Расхождение между вполне безобидным классическим рецептом вычисления термодинамических величин и тем, что при фазовых переходах они должны расходиться, вызывало раздражение. Задача состояла в том, чтобы прояснить математическую природу этих особенностей. В соответствии с теорией казалось, что в реальном мире их не должно быть.

Для большого числа физических систем Янг и Ли сумели свести проблему к поиску и описанию нулей некоторой функции. Искомые особые точки — кандидаты на фазовые переходы, представляли собой решения алгебраического уравнения вида (1). Однако в силу того, что все коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_N положительны, это уравнение не может иметь решений в области физических разумных положительных x . Что же может быть естественнее желая заглянуть в комплексную плоскость, где, согласно Гауссу, должно быть N решений?

Идея может, скажем, заключаться в том, что комплексные нули собираются вблизи действительной оси x и тем самым определяют искомые особенности. Это становится возможным после перехода к «реальной» физике, который происходит в пределе $N \rightarrow \infty$, поскольку было известно, что «настоящие» фазовые переходы происходят только в пределе при очень большом числе частиц¹⁾.

¹⁾ Подробное и строгое изложение этих вопросов см. в книге: Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты: — М.: Мир, 1971, гл. 5. — *Прим. пер.*

В результате Янг и Ли получили следующую картину. В случае когда число частиц конечно, алгебраическое уравнение (1) имеет конечное число нулей в комплексной плоскости. По мере того как растет число частиц, растет и число нулей. Множество нулей при этом должно становиться все плотнее и прижиматься все сильнее к действительной оси. В пределе при $N \rightarrow \infty$ есть возможность того, что бесконечное множество нулей выстроено в линию, которая пересечет действительную ось в точке физического фазового перехода $x = x_c$. Вещественные области $x < x_c$ и $x > x_c$, которые характеризуют фазы 1 и 2, естественно продолжаются на комплексную плоскость, а линию нулей можно интерпретировать как *комплексную фазовую границу*.

В своей знаменитой *теореме Янг и Ли* доказали в математически строгой форме, что многие магнитные материалы во внешнем магнитном поле ведут себя именно так. Величина x в многочлене (1) представляет собой комплексное магнитное поле.

Сложнее исследовать поведение магнетика в зависимости от температуры. В 1964 году М. Е. Фишеру удалось доказать, что картина Янга и Ли с комплексными значениями температуры применима к частному случаю двумерной квадратной решетки элементарных магнитов с изотропным потенциалом взаимодействия ближайших соседей. Он доказал, что в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ нули концентрируются на гладкой линии.

Вплоть до конца 60-х годов этот результат вдохновлял многих физиков, пытавшихся связать количественные характеристики фазовых переходов со свойствами нулей Янга и Ли (С. Гроссманн, 1969 г.). Обычно считалось, что нули собираются в линию в пределе при $N \rightarrow \infty$. То, что это не всегда так, можно было бы заметить и раньше, если бы не потрясающий успех теории перенормировок [Wi], которая целиком захватила внимание теоретиков, исследовавших фазовые переходы. И вплоть до 1983—1984 годов не было известно, что картина распределения нулей Янга—Ли устроена не так уж и просто. Следуя работе М. Е. Фишера 20-летней давности, удалось показать [SC, SK], что анизотропные двумерные решетки могут иметь двумерные распределения нулей. Незадолго до этого Б. Деррида, Л. Де Сезе и К. Ициксон обнаружили фрактальные формы в так называемых иерархических решетках. Особо в этом открытии привлекло то, что в нем существенно использовалась теория перенормировок. Но подробно об этом — в следующем разделе.

Фрактальные фазовые границы и их структура

Представление о том, как происходят превращения (метаморфозы) комплексных фазовых границ, можно получить с помощью серии рис. 58 ($a-l$). Используемая здесь модель магнетизма будет подробно рассмотрена в специальном разд. 10. Здесь мы только отметим, что небольшие изменения претерпевает от рисунка к рисунку выделенный существенный параметр модели q .

Заметим, что считать это реалистичным описанием магнетизма, конечно, нельзя. Мы используем эту модель, пожалуй, потому, что она точно решается, и с ее помощью можно прояснить основные спорные моменты теории перенормировок.

Один из основных таких моментов — это связь между идеями Янга и Ли, с одной стороны, и Каданова и Вильсона — с другой. Можно ли объединить картину фазовой границы, состоящей из особенностей, с представлением о границе между двумя или большим числом областей притяжения? Именно это удалось математически строго доказать для так называемых *иерархических моделей*, что и определило их теоретическую ценность. Для этих моделей можно показать, что *множество Жюлиа преобразования перенормировки (ренорм-преобразования)* в точности совпадает с *множе-*

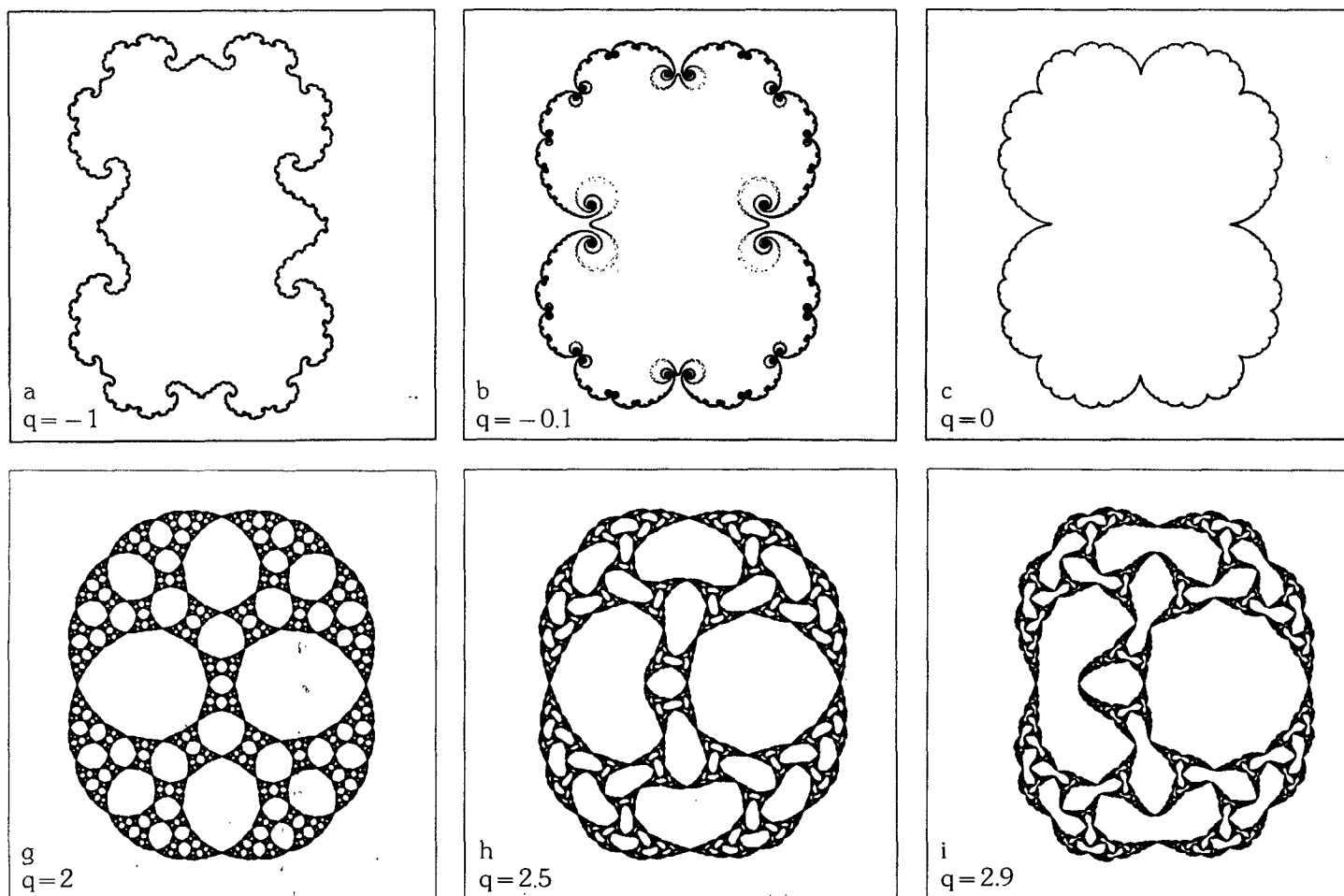
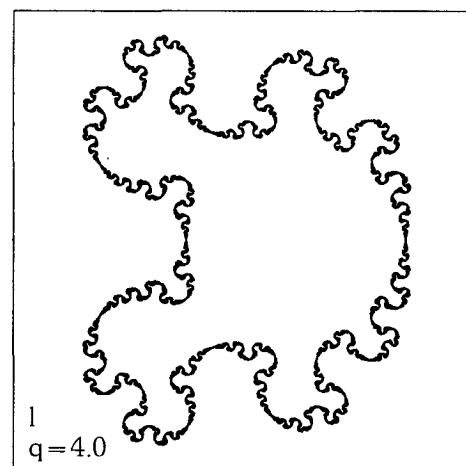
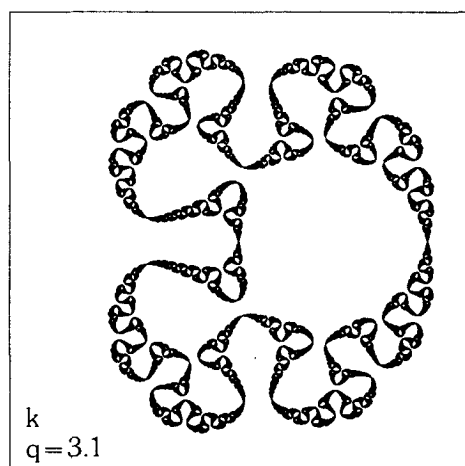
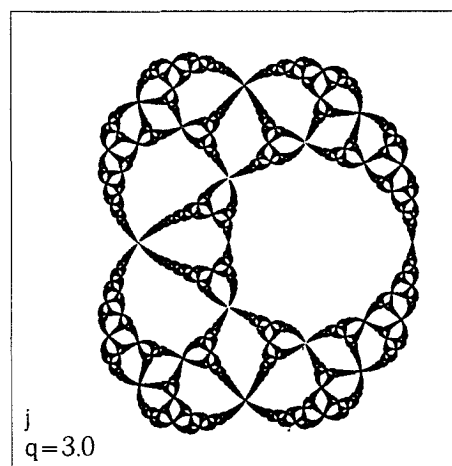
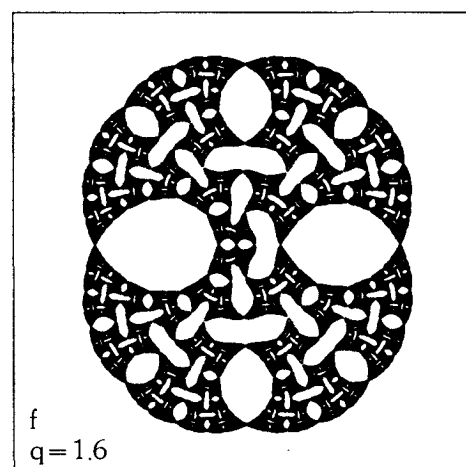
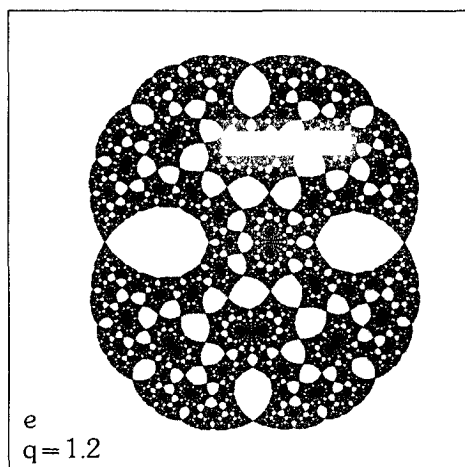
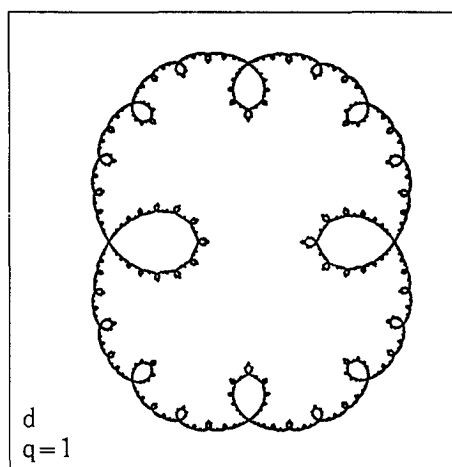


Рис. 58 (a—f). Сингулярности Янга—Ли — множества Жюлиа преобразования перенормировки (10.1). Этим рисункам соответствуют следующие окна в комплексной плоскости x : для a , b , и c — $-6 \leq \operatorname{Re} x \leq 4$, $-5 \leq \operatorname{Im} x \leq 5$; для $d - k$ — $-5 \leq \operatorname{Re} x \leq 5$, $-5 \leq \operatorname{Im} x \leq 5$; для l — $-4 \leq \operatorname{Re} x \leq 6$, $-5 \leq \operatorname{Im} x \leq 5$.

ством нулей Янга—Ли. Более подробно этот вопрос освещен в специальном разд. 10. То, что множества Жюлиа играют здесь существенную роль, есть следствие того случайного обстоятельства, что преобразование перенормировки — рациональное отображение. Впрочем, есть все основания предполагать, что идея множества Жюлиа может быть перенесена и на случай иррациональных отображений, как это показал Р. Девани (R. Devaney) в своих исследованиях итераций трансцендентных отображений, одним из результатов которых стали удивительно прекрасные рисунки.

Структуры, изображенные на рис. 58, — это фазовые границы в смысле Янга—Ли и в смысле теории перенормировок, продолженные в комплексную плоскость. Самая заметная их общая черта — это самоподобие. Возникает вопрос, является ли это случайным побочным продуктом искусственной иерархической решеточной структуры или же отражает реально существующее самоподобие при фазовом переходе? В настоящее время это открытый вопрос. Если бы удалось установить, что комплексные фазовые границы представляют собой типичные фрактальные структуры, то это означало бы, что фрактальная размерность и другие характеристики фракталов имеют физический смысл. Другая общая черта всех структур на



58 — это наличие единственной точки накопления x в той части действительной оси, которая описывает ферромагнитные свойства вещества при положительных температурах: $1 < x < \infty$. Это свойство служит хорошим подтверждением первоначальной картины, предложенной Янгом и Ли, даже несмотря на то, что особенности не лежат на гладких линиях.

Точное определение переменной x и существенного параметра q заинтересованный читатель найдет в следующем специальном разд. 10. Значение $x = 1$ соответствует бесконечной температуре, т. е. полному беспорядку, а значение $x = \infty$ соответствует абсолютному нулю с идеальным ферромагнитным порядком. Точка x_c соответствует точке Кюри; она разделяет ферромагнитную и парамагнитную фазы для действительных температур. Ее комплексное продолжение — это множество Жюлиа, которое, очевидно, разделяет две фазы для, скажем, $q > 3$ и $q \leq 0$ (магнитная фаза снаружи и немагнитная внутри, см. рис. 58). Напротив, при $0 < q \leq 3$ нули образуют в термодинамическом пределе структуры, отделяющие друг от друга бесконечное число областей. Соответствует ли это столь же большому числу «фаз», или здесь также только два аттрактора $x = 1$ и $x = \infty$? Такие компьютерные эксперименты как, например, на фото 3—6, дают на это ответ.

Здесь каждая область притяжения окрашена своим цветом, а градация цвета показывает динамическое расстояние до соответствующего аттрактора (измеряемое числом итераций преобразования перенормировки). Видно, что при $1.21 < q < 3$ имеет место сложное переплетение двух фаз, а при $0 < q < 1.21$ появляется третья, которую можно назвать *антиферромагнитной*, поскольку она включает в себя точку $x = 0$ ($J < 0$, $T \rightarrow 0$, см. специальный разд. 10); при $q = 1$ — это неподвижная точка притяжения. На фото 6 изображен фрагмент, на котором ферромагнитная фаза окрашена в красный цвет, парамагнитная — в зеленый, а антиферромагнитная — в серый. Для сравнения на фото 5 изображен увеличенный фрагмент, демонстрирующий, что даже две фазы могут переплетаться друг с другом, образуя сложные структуры (красный цвет использован, чтобы акцентировать края синей области).

Цветные фотографии 7—10 дают примеры комплексных фазовых диаграмм, возникающих во второй из исследованных нами иерархических моделей (детали см. в специальном разд. 11). На фото 7 изображен случай $q = 2$ (спин Изинга¹⁾). Видны три фазы: ферромагнитная — голубой цвет, парамагнитная — белый (серый) и антиферромагнитная — красный. При физических (действительных) температурах есть два фазовых перехода: в точке Кюри $x_c > 1$ и в точке Нееля $x_c < 1$, в которой происходит переход в антиферромагнитное состояние. На фото 8—10 показаны увеличенные фрагменты, демонстрирующие, как бесконечное число изолированных островков одной фазы может быть разбросано по области, занимаемой другой фазой.

Необходимо проанализировать многочисленные структуры, изображенные на рис. 58 и фото 3—10, чтобы понять принципы их организации, точно так же, как в свое время Мандельброт исследовал множества Жюлиа для процессов $x \mapsto x^2 + c$. Здесь вновь ключом к проблеме служит исследование критических точек отображения. Детали доказательства приведены в разд. 11. Выясняется, что в первой иерархической модели (точно так же, как и для $x \mapsto x^2 + c$) решающей является судьба точки $x = 0$, а во второй нужно исследовать также и точку $x = 1 - q$.

На фото 1 показано строение (*морфология*) фазовых границ для первой модели. Здесь изображена вся плоскость возможных значений существенного параметра модели q . Если значение q принадлежит зеленым или желтым областям, то существуют две фазы, если черным — то три, а в некоторых «бутонах» (почках) — даже четыре. Если q вынести за пределы характерной структуры, имеющей форму цветной капусты, то фазовая граница превратится в более или менее смятую окружность (см. рис. 58а, b и l). Если же q лежит в окрашенной внутренней области «цветной капусты», то соответствующая фазовая диаграмма имеет похожую структуру — магнитная фаза глубоко проникает в немагнитную область. Качественные детали этой структуры неизменны, если q лежит внутри заданной компоненты «цветной капусты», но от компоненты к компоненте они изменяются. Для желтых значений q точка $x = 0$ лежит в области притяжения ферромагнитного центра $x = \infty$, а для зеленых значений q точка $x = 0$ принадлежит парамагнитной фазе. Сложное чередование этих тенденций в окрестности черной области приводит в замешательство, и особенно впечатляюще это выглядит на увеличенных фрагментах, см. фото 11—13. Структуры становятся все более запутанными и приобретают случайный характер в непосредственной близости от черной области, фрагмент которой показан на фото 2, причем с сюрпризом: мы видим хорошо известную *фигуру Мандельброта*, и сходство с настоящим множеством Мандельброта просто поразитель-

¹⁾ Спином Изинга авторы называют спин, принимающий значения $+1$ и -1 (более точно $+1/2$ и $-1/2$). — Прим. перев.

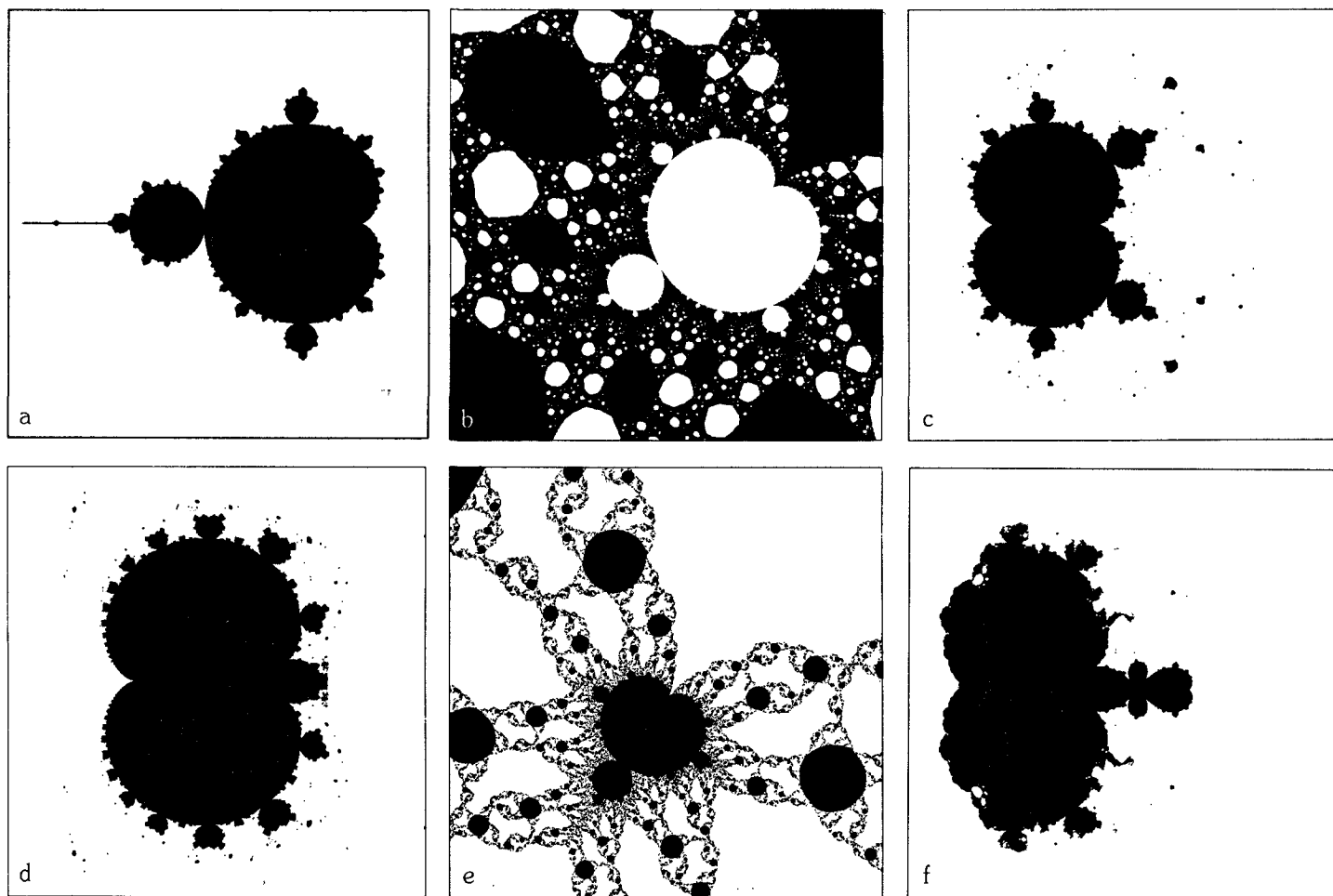
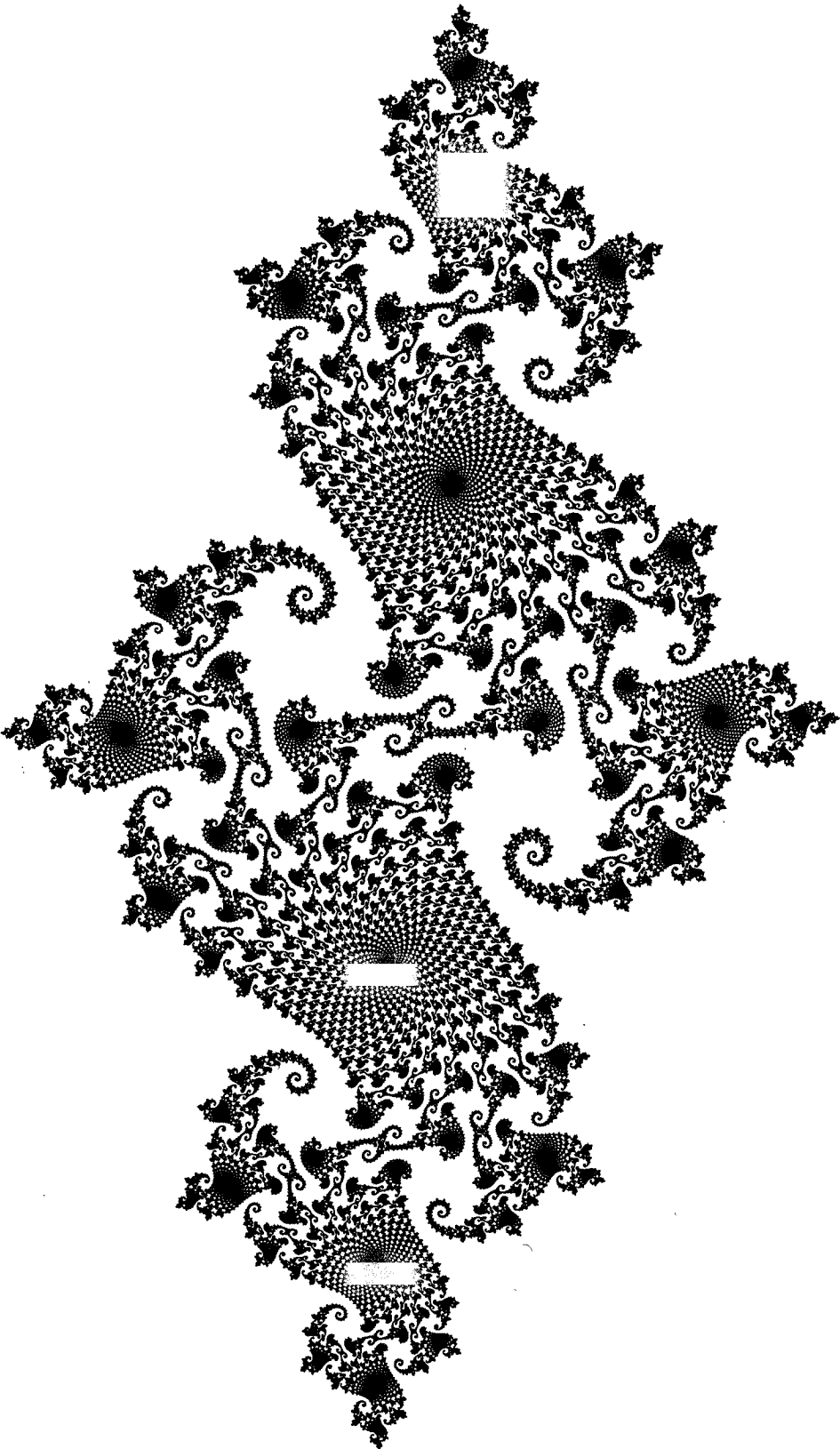


Рис. 59 (a—f). Изучение критических точек: а) — множество Мандельброта для $x \rightarrow x^2 + c$; б) — деталь из с, окно $1.85 \leq \operatorname{Re} q \leq 2.15$, $1.5 \leq \operatorname{Im} q \leq 1.8$; при «черных» значениях q орбита $x = 0$ стремится к 1 под действием перенормировок; в) иерархическая модель, изображенная на рис. 60, окно: $-1 \leq \operatorname{Re} q \leq 3.5$, $-2.25 \leq \operatorname{Im} q \leq 2.25$; для «черных» значений q орбита $x = 0$ не стремится ни к 1, ни к ∞ ; д—f иерархическая модель, изображенная на рис. 61: д) для «черных» значений q орбита $1 - q$ не стремится ни к 1, ни к ∞ ($-1 \leq \operatorname{Re} q \leq 2.65$, $-2 \leq \operatorname{Im} q \leq 2$); е) деталь из f ($1.92 \leq \operatorname{Re} q \leq 1.97$, $0.88 \leq \operatorname{Im} q \leq 0.93$); для «черных» значений q орбита 0 не стремится к 1; ф) для «черных» значений q орбита 0 не стремится ни к 1, ни к ∞ ($-8 \leq \operatorname{Re} q \leq 3.5$, $-2 \leq \operatorname{Im} q \leq 2$).

ное. На рис. 59 и фото 14—16 приведены аналогичные результаты для второй иерархической модели. Вновь оказывается, что появление дополнительной фазы и связанные с этим резкие изменения в природе границы управляются множеством Мандельброта.

Возможно, мы должны поверить в магию. Даже если предположить, что более общие динамические законы могут локально быть похожими на $x \mapsto x^2 + c$, все равно поражает то, что множество Мандельброта воссоздается столь точно в нетронутым виде, так, что не пропущена ни одна «почка». Мы должны признать, что универсальность, обнаруженная в этих наблюдениях, наполнила нас благоговейным страхом, и это даже, несмотря на то, что математикам А. Дуади и Дж. Х. Хаббарду удалось недавно получить теоретическое обоснование результата этого компьютерного эксперимента



СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ

10. Нули Янга—Ли

Для читателей, знакомых с формализмом канонической статистической механики, рассмотрим вопрос о расположении нулей Янга—Ли для модели Изинга подробнее.

Предположим, что в узле решетки i находится спин s_i , который может принимать значения $s_i = +1$ и $s_i = -1$. Спины взаимодействуют с ближайшими соседями (обозначим их $\langle i, j \rangle$) и с внешним магнитным полем H . Суммарная энергия конфигурации $\{s_i\}$ имеет вид

$$(10.1) \quad E\{s_i\} = J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i.$$

Если $J > 0$, то это ферромагнитное взаимодействие, а если $J < 0$ — антиферромагнитное. *Статистическая сумма* представляет собой сумму болцмановских весовых факторов по всевозможным конфигурациям:

$$(10.2) \quad Z_N(T, H) = \sum_{\{s_i\}} \exp(-E\{s_i\}/k_B T) = \sum_{\{s_i\}} \exp(K \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j + L \sum_i s_i),$$

где величины $K = J/k_B T$ и $L = H/k_B T$ введены для удобства и имеют смысл температуры и магнитного поля соответственно. Удельная свободная энергия (на узел решетки) может быть получена из Z_N в два этапа:

$$(10.3) \quad f_N = -\frac{k_B T}{N} \ln Z_N; \quad f(T, H) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N.$$

Первый этап включает в себя взятие логарифма. При этом в точках нулей Z_N возникают особенности (расходимости), что делает их кандидатами на наличие фазовых переходов. Однако следует заметить, что для действительных температур T и полей H экспоненты в Z_N положительны и статистическая сумма не может быть равна нулю. Это послужило подсказкой Янгу и Ли, которые заинтересовались комплексными значениями T и H . Они считали, что наиболее важным может быть именно второй этап в (10.3). При переходе к термодинамическому пределу $N \rightarrow \infty$ может появляться все большее количество комплексных нулей, которые могут все ближе подходить к действительной оси. И хотя при любом заданном N действительные нули отсутствуют, точка их накопления может при $N \rightarrow \infty$ стремиться к действительной оси и тем самым порождать наблюдаемые особенности $f(T, H)$ при физических фазовых переходах. Эти ожидания подтверждаются ниже следующими примерами.

Зависимость от H для произвольно выбранной решетки

При фиксированной температуре (т. е. фиксированном K) статистическая сумма Z как функция H (т. е. L) имеет особенно простую форму. Если перейти к новой переменной для комплексного поля $z = e^{-2L}$, то (10.2) можно преобразовать к виду

$$(10.4) \quad Z_N = z^{-N/2} \sum_{n=0}^N p_n(K) z^n,$$

где n — это число спинов с $s_i = -1$. С точностью до тривиального множителя $z^{-N/2}$ статистическая сумма Z_N — это *полином* по z с положительными коэффициентами $p_n(K)$.

Теорема Ли и Янга [LY] утверждает, что для ферромагнитных взаимодействий ($K > 0$) все нули этих полиномов лежат на единичной окружности в z -плоскости при всех N . Для действительных T это означает, что все особенности свободной энергии лежат на мнимой оси H . При $T < T_c$ нули статистической суммы стремятся в пределе $N \rightarrow \infty$ к точке $H = 0$ действитель-

ной оси H . Этот замечательный результат не зависит от структуры решетки и от пространственной размерности модели. Не обязательно даже, чтобы взаимодействие ближайших соседей было изотропным.

Одномерная решетка при $H = 0$

Рассмотрим цепочку N спинов в отсутствие внешнего магнитного поля. Для того чтобы проследить влияние граничных условий на поведение нулей, исследуем два случая. Вначале будем считать, что оба конца решетки свободны, а затем отождествим $N + 1$ -й узел с первым, превращая тем самым цепочку в окружность. Вводя новую переменную $x = \exp(2K)$, получаем для статистических сумм соответственно свободной решетки

$$(10.5) \quad Z_N^f = 2x^{-(N-1)/2}(x+1)^{N-1}$$

и кольца

$$(10.6) \quad Z_N^r = x^{-N/2}[(x+1)^N + (x-1)^N].$$

Оказывается, что термодинамическое поведение (при $N \rightarrow \infty$) для физических значений температур ($x > 0$) одинаково в обоих случаях, даже несмотря на то, что распределения нулей разительно отличаются. У Z_N^f есть один нуль порядка $N - 1$ при $x = -1$, в то время как Z_N^r имеет N нулей на мнимой оси при

$$(10.7) \quad x_k = i \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вводя новую переменную $x = is$, получаем плотность этих нулей в пределе при $N \rightarrow \infty$ в виде

$$(10.8) \quad \mu(s) = \frac{1}{N} \frac{dk}{ds} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}.$$

Эти результаты подтверждают общее правило, что фазовые переходы в одномерных магнитных системах отсутствуют при положительных температурах. Если выразить (10.7) через комплексную температуру T с помощью выражения $x = \exp(2J/k_B T)$, то мы получим подозрительную на фазовый переход особенность при $T = 0$.

Двумерная решетка при $H = 0$

Одним из крупнейших достижений теоретической физики было точное решение двумерной модели Изинга, полученное норвежским физиком Л. Онзагером [On]. Он впервые на конкретном примере показал, что канонический формализм статистической механики может приводить к появлению особенностей. Статистическая сумма Z_N для квадратной решетки с различными постоянными взаимодействия (J_1, J_2) вдоль каждой из двух осей может быть записана в замкнутой форме так:

$$(10.9) \quad Z_N = \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^{n/2} (\operatorname{ch} 2K_1 \operatorname{ch} 2K_2 - \cos \frac{2\pi r}{m} \operatorname{sh} 2K_1 - \cos \frac{2\pi s}{n} \operatorname{sh} 2K_2),$$

где $K_i = J_i/k_B T$ и $N = n \cdot m$. Нули статистической суммы — нули множителей в (10.9). Для изотропного случая $K_1 = K_2 = K$ М. Е. Фишер [Fi] заметил в 1964 году, что все нули лежат на единичной окружности в плоскости $\operatorname{sh}(2K)$. Анизотропный случай был исследован лишь недавно [SK]. Результат таков: нули распределены в пределах некоторой области. Эта область имеет коническую форму вблизи действительной оси, так что основное предсказание Янга и Ли оказывается выполненным: единственная действительная точка накопления нулей соответствует физическому фазовому переходу.

11. Перенормировка

Идею *перенормировки* можно понимать как последовательное уменьшение числа степеней свободы в *статистической сумме*. N -частичная задача преобразуется в N' -частичную, где $N' < N$, при этом, возможно, температура T и магнитное поле H также должны быть перенормированы. В дальнейшем будем предполагать, что внешнее магнитное поле отсутствует, $H = 0$. В этом случае точная формулировка идеи перенормировки такова: найти преобразование

$$(11.1) \quad T \mapsto T' = R(T),$$

выражающее N -частичную статистическую сумму через N' -частичную следующим образом:

$$(11.2) \quad Z_N(T) = Z_{N'}(T') \varphi_N.$$

Множитель φ_N учитывает разность уровней нулевой энергии в N - и N' -частичных системах, и для дальнейшего он несуществен.

Используя (10.3), можно переписать соотношение (11.2) в виде функционального уравнения относительно *удельной свободной энергии* (на одну частицу)

$$(11.3) \quad f(T) = \frac{N'}{N} f(R(T)) + g(T),$$

где g обычно не имеет особенностей в интересующей нас критической точке $T = T_c$. Критическая точка представляет собой неподвижную отталкивающую точку преобразования перенормировки $T_c = R(T_c)$. Согласно (11.2) или (11.3), главная особенность $f(T)$ в точке T_c непосредственно связана с линейной частью R в этой точке.

Пользуясь этим методом, Вильсон получил законы для критических индексов. Мы же хотим использовать эти рекуррентные соотношения, чтобы найти нули *Янга—Ли*. С этой целью мы обсудим три примера, в которых (11.2) может быть выведено строго. Во всех этих случаях Z_N представляет собой полином степени $d(N)$ относительно соответствующим образом определенной «температурной» переменной x . Будем считать, что Z_N и $Z_{N'}$ заданы с помощью своих нулей $x_l (l = 1, \dots, d(N))$ и $x'_m (m = 1, \dots, d(N'))$ соответственно. Тогда (11.2) можно переписать в виде

$$(11.4) \quad \prod_{l=1}^{d(N)} (x - x_l) = \varphi_N \prod_{m=1}^{d(N')} (x' - x'_m).$$

Для упрощения изложения забудем на время о величине φ_N (в конкретных примерах она будет учитываться). Если левая часть (10.4) равна нулю, то и правая также должна быть равна нулю. Следовательно, преобразование перенормировки $x \mapsto x'$ должно связывать множества нулей Z_N и $Z_{N'}$. Это преобразование обычно не является взаимно однозначным. В силу того, что $N' < N$, $Z_{N'}$ — более простой объект изучения, чем Z_N . Для того чтобы найти нули Z_N , можно сначала найти нули $Z_{N'}$, а затем их прообразы относительно преобразования R (x является прообразом x' , если $R(x) = x'$).

Эту аргументацию можно повторить при переходе от N' к N'' и далее до тех пор, пока мы не получим тривиальную двухчастичную статистическую сумму Z_2 . Возвращаясь же с помощью перенормировок назад, мы, исходя из нулей Z_2 , будем получать все нули для систем все большего числа частиц, пока наконец не достигнем термодинамического предела.

Когда преобразование перенормировки R оказывается рациональным отображением, как это происходит в нижеследующих примерах, то обратные итерации обычно приводят (это следует из работы Жюлиа и Фату) к

множеству Жюлиа данного отображения. Действительно, если R имеет степень D (если представить R как отношение двух взаимно простых многочленов, то степень R — это большая из степеней этих многочленов), то обычно (за исключением особых ситуаций) точка x имеет D прообразов относительно R . Приведенное выше утверждение о нулях Янга—Ли и множестве Жюлиа интуитивно кажется очевидным, если предположить, что нули Z_2 суть начальные точки обратных итераций (преобразований), лежат в области притяжения некоторой неподвижной (относительно R) точки. Тогда последовательный (в смысле обратных итераций R) поиск прообразов естественно приводит (в термодинамическом пределе) к границе этой области, которая, согласно (2.6) (см. специальный разд. 2), представляет собой множество Жюлиа. Более того, таким образом мы можем сколь угодно близко подойти к каждой точке множества Жюлиа, поскольку отрицательные траектории плотны на нем (см. (2.5)). Тем самым устанавливается тождественность нулей Янга—Ли в термодинамическом пределе с *множеством Жюлиа преобразования перенормировки*. Следовательно, для исследования фазовых переходов достаточно охарактеризовать точки пересечения этого множества с действительной осью температур. Эта замечательная взаимосвязь множеств была впервые обнаружена Деррида, Де Сезе и Ициксоном [DDI].

Приведенные выше интуитивные рассуждения, подтверждаются, например, следующим фактом: пусть задано произвольное рациональное отображение R с множеством Жюлиа J_R . Тогда для любого $x \in \mathbb{C} \setminus E$ имеем

$$(11.5) \quad J_R \subset \overline{\{x \in \mathbb{C} : R^n(x) = \bar{x} \text{ для некоторого } n\}},$$

где черта обозначает замыкание множества. Исключенное множество E обычно весьма мало. Приведем пример: пусть P — многочлен. Тогда $P(\infty) = \infty$ и $\infty \in E$. Действительно, легко видеть, что соответствующее множество прообразов — это в точности $\{\infty\}$, т. е. аппроксимация J_P с помощью этого множества невозможна.

Одномерная модель Изинга

Перенормировка для линейной цепочки может быть произведена очень легко, скажем путем суммирования через один спин, что дает $N \mapsto N' = N/2$. В обозначениях, использованных для модели Изинга в разд. 10, получим в отсутствие магнитного поля

$$\begin{aligned} Z_N(x) &= \sum_{s_1, s_3, \dots} \sum_{s_2, s_4, \dots} x^{1/2(s_1 s_2 + s_2 s_3) + 1/2(s_3 s_4 + s_4 s_5) + \dots} = \\ &= \sum_{s_1, s_3, \dots} (x^{1/2(s_1 + s_3)} + x^{-1/2(s_1 + s_3)}) (x^{1/2(s_3 + s_5)} + x^{-1/2(s_3 + s_5)}) \dots = \\ &= \sum_{s_1, s_3, \dots} \left(\sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} (x')^{1/2 s_1 s_3} \right) \left(\sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} (x')^{1/2 s_3 s_5} \right) \dots = \\ &= Z_{N/2}(x') \varphi_N, \end{aligned}$$

где $\varphi_N = [2(x+1)/x]^{N/4}$, а преобразование перенормировки имеет вид

$$(11.6) \quad x' = R(x) = \frac{1}{2}(x + 1/x).$$

Это рациональное отображение комплексной плоскости в себя, описать которое очень легко. Переходя к сопряженным величинам с помощью соотношения $z = (x+1)/(x-1)$, получим отображение

$$(11.7) \quad z' = \tilde{R}(z) = z^2.$$

Множество Жюлиа отображения (11.7) — это единичная окружность в

плоскости z , следовательно, множество Жюлиа процесса (11.6) — мнимая ось в плоскости x (см. для сравнения задачу Кэли (Cayley) в разд. 7).

Связь с нулями $Z_N(x)$ в термодинамическом пределе мы получим, совершив обратные итерации нулей $Z_2(x)$. Для цепочки со свободными концами имеем

$$(11.8) \quad Z_2^f = \frac{2}{\sqrt{x}}(x+1).$$

Совершенно случайно нуль этой статистической суммы попадает в сверхустойчивую неподвижную точку $x_0 = -1$ отображения R . В этом частном случае итерации не выходят из x_0 , что согласуется с уравнением (10.5). Если же мы рассмотрим замкнутое кольцо, то получим

$$(11.9) \quad Z_2^c = 2(x + 1/x)$$

с нулями в $\pm i$. Эти точки уже принадлежат множеству Жюлиа отображения R , и, таким образом, обратные итерации дают в пределе $N \rightarrow \infty$ плотное в множестве Жюлиа множество нулей (здесь множество Жюлиа — это мнимая ось комплексной плоскости x).

Стандартная иерархическая решетка со спинами Поттса

Рассмотрим решетку с рекуррентной структурой, показанную на рис. 60. На n -й стадии она имеет 4^{n-1} связей, каждая из которых на $(n+1)$ -й стадии заменяется двумя новыми узлами решетки и четырьмя связями. Несколько обобщая спин Изинга, предположим, что в каждом узле решетки находится спин Поттса, который имеет q различных состояний $s_i = 1, \dots, q$ и взаимодействует с соседними спинами тогда и только тогда, когда их состояния совпадают:

$$(11.10) \quad E\{s_i\} = \sum_{\langle i,j \rangle} E_{i,j}, \quad E_{i,j} = \begin{cases} -J, & \text{если } s_i = s_j, \\ 0, & \text{если } s_i \neq s_j. \end{cases}$$

Статистическая сумма решетки на стадии n

$$(11.11) \quad Z_n(T) = \sum_{\{s\}} \exp(-E\{s_i\}/k_B T)$$

представляет собой многочлен степени 4^{n-1} относительно переменной $x = \exp(J/k_B T)$ с положительными целыми коэффициентами.

Редукцию с n -й стадии на $(n-1)$ -ю легко осуществить с помощью суммирования по состояниям $2 \cdot 4^{n-2}$ спинов, которые были включены последними. Результат таков [DDI], [PR3]:

$$(11.12) \quad Z_{(n)}(x) = Z_{(n-1)}(x') \varphi_{(n)},$$

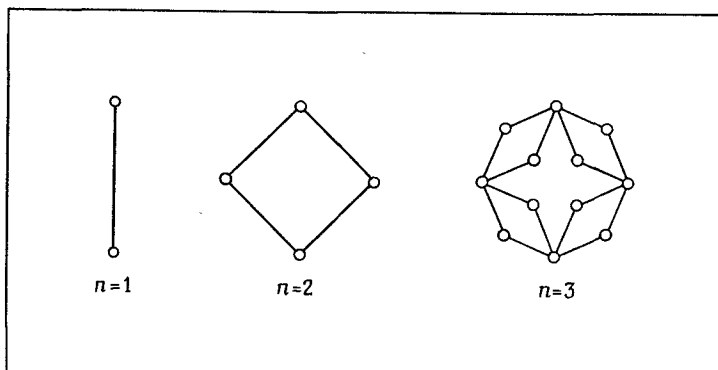


Рис. 60. Стандартная иерархическая решетка, \circ — узлы, — — связи.

где

$$(11.13) \quad x' = R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2$$

и

$$(11.14) \quad \varphi_{(n)} = (2x + q - 2)^{2 \cdot 4^{n-2}}.$$

Преобразование перенормировки (11.13) — это рациональное отображение 4-й степени, следовательно, каждый нуль $Z_{(n-1)}$ соответствует четырем нулям $Z_{(n)}$ — своим прообразами относительно R_q . Если стартовать с единственного нуля $x_0 = 1 - q$ статистической суммы

$$(11.15) \quad Z_{(1)} = q(x + q - 1),$$

то с помощью n -кратной итерации преобразования R_q^{-1} мы получим все нули $Z_{(n+1)}$. В пределе $n \rightarrow \infty$ это множество становится сколь угодно близким к множеству Жюлиа (J_{R_q}) преобразования R_q , если $1 - q$ не принадлежит исключительно множеству E , упомянутому в связи с (11.5).

Другой способ обнаружить связь между множеством Жюлиа (J_{R_q}) и особенностями свободной энергии f заключается в том, что нужно рассмотреть функциональное уравнение (11.3), в котором T заменено на x . В силу того, что свободная энергия f имеет особенность в неподвижной отталкивающей точке x_c преобразования R_q , она должна иметь особенность и в точке $x \in R_q^{-1}(x_c)$. Используя эти аргументы вновь и вновь, мы убеждаемся (с помощью (2.5)), что множество Жюлиа J_{R_q} совпадает со множеством особенностей свободной энергии f .

Опишем отображение R_q и его множества Жюлиа. Для этого заметим, что R_q имеет две сверхпритягивающие неподвижные точки $x = 1$ и $x = \infty$, которые соответствуют случаям полного беспорядка ($T = \infty$) и идеального порядка ($T = 0$ ($J > 0$)). Строение границы между областями притяжения этих двух точек, т. е. фазовой границы между пара- и ферромагнетизмом, зависит от судьбы критических точек преобразования R_q . Их шесть:

$$(11.16) \quad \{1, \infty, 1 - q, \pm\sqrt{1 - q}, (2 - q)/2\}.$$

Уже известно, что точки 1 и ∞ являются притягивающими и неподвижными. Точка $(2 - q)/2$ отображается на ∞ после первого шага и остается там. Обе точки $\pm\sqrt{1 - q}$ стремятся к 0, так что нужно проследить лишь траектории точек $1 - q$ и 0. Можно показать, что эти траектории в определенном смысле взаимодополняющие [PR.3, 4], т. е. фактически нужно исследовать только точку $x = 0$. Существуют следующие три возможности:

- 1) $x = 0$ принадлежит ферромагнитной фазе, т. е. $R_q^n(0) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $x = 0$ принадлежит парамагнитной фазе, т. е. $R_q^n(0) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) $x = 0$ не притягивается ни к 1, ни к бесконечности.

В соответствии с теоремой Фату (см. разд. 3) в первых двух случаях не может быть дополнительных аттракторов, а в случае 3 могут появиться одна или две дополнительные фазы (так как $x = 0$ не принадлежит множеству Жюлиа).

Другая иерархическая решетка

На рис. 61 показана структура другой иерархической решетки.

Причиной изучения этой модели служит то, что в частном случае спинов Изинга ($q = 2$) можно надеяться на появление антиферромагнитной фазы. Преобразование перенормировки оказывается рациональным отображением 6-й степени:

$$(11.17) \quad x' = S_q(x) = \left(\frac{x^3 + 3(q - 1)x + (q - 1)(q - 2)}{3x^2 + 3(q - 2)x + q^2 - 3q + 3} \right)^2.$$

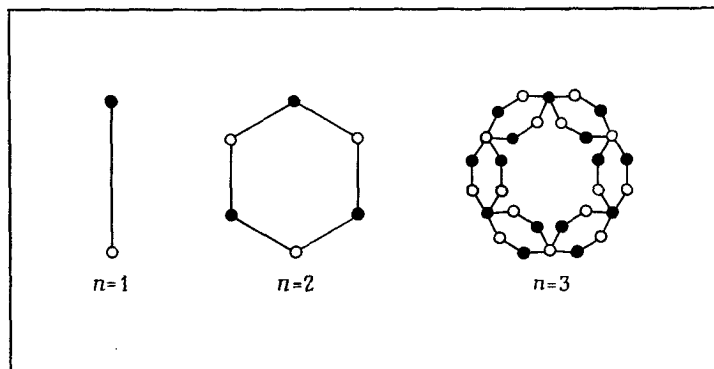


Рис. 61. Иерархическая решетка для антиферромагнитного взаимодействия.

Нули статистической суммы $Z_{(n)}(x)$ вновь представляют собой прообразы $x_0 = 1 - q$ относительно итераций преобразования S_q^{-1} . Фазовая граница Янга—Ли вновь совпадает с множеством Жюлиа преобразования S_q . Точки $x = 1$ и $x = \infty$, как и выше, представляют собой (независимо от q) сверхустойчивые аттракторы, и анализ критических точек показывает, что здесь также существенна лишь судьба точек 0 и $1 - q$. Но в отличие от случая стандартной модели эти две точки дают неэквивалентные результаты (ср. рис. 59 *d* и *f*), и, следовательно, число альтернативных вариантов возрастает, а полная картина становится более сложной.

ЛИТЕРАТУРА

Книги:

- [AS] Abraham R. H., Shaw C., (1985). Dynamics, The Geometry of Behavior, I, II, III. Aerial Press, Santa Cruz.
- [Co] Cole K. C., (1985). Sympathetic Vibrations. Morrow W., New York.
- [DH] Davis P. J., Hersh R., (1981). The Mathematical Experience. Birkhäuser, Boston
- [Del] Devaney R. L., (1986). Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Benjamin-Cummings, Menlo Park.
- [EP] Eigen M., Winkler-Oswatitsch R., (1975). Das Spiel. Piper, München.
- [Fal] Falconer K. J., (1985). The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, Cambridge.
- [H] Haken H., (1981). Erfolgsgeheimnisse der Natur. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart.
- [Mal] Mandelbrot B. B., (1982). The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco.
- [Myl] May R. M., (1974). Model Ecosystems. Princeton University Press, Princeton.
- [MS] Moser J., Siegel C. L., (1971). Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag, Grundlehren Bd 187.
- [PR1] Peitgen H.-O., Richter P. H., (1984). Harmonie in Chaos und Kosmos. Bremen.
- [PR2] Peitgen H.-O., Richter P. H., (1984). Morphologie komplexer Grenzen. Bremen.
- [Sch] Schuster H. G., (1984). Deterministic Chaos — An Introduction. Physik Verlag, Weinheim. (Имеется русский перевод: Г. Шустер. Детерминированный хаос. Введение. — М., Мир, 1988, 240 с.)
- [Sm] Smith C. S., (1980). From Art to Science. MIT Press, Cambridge, Mass.
- [St] Stanley H. E., (1971). Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford University Press.

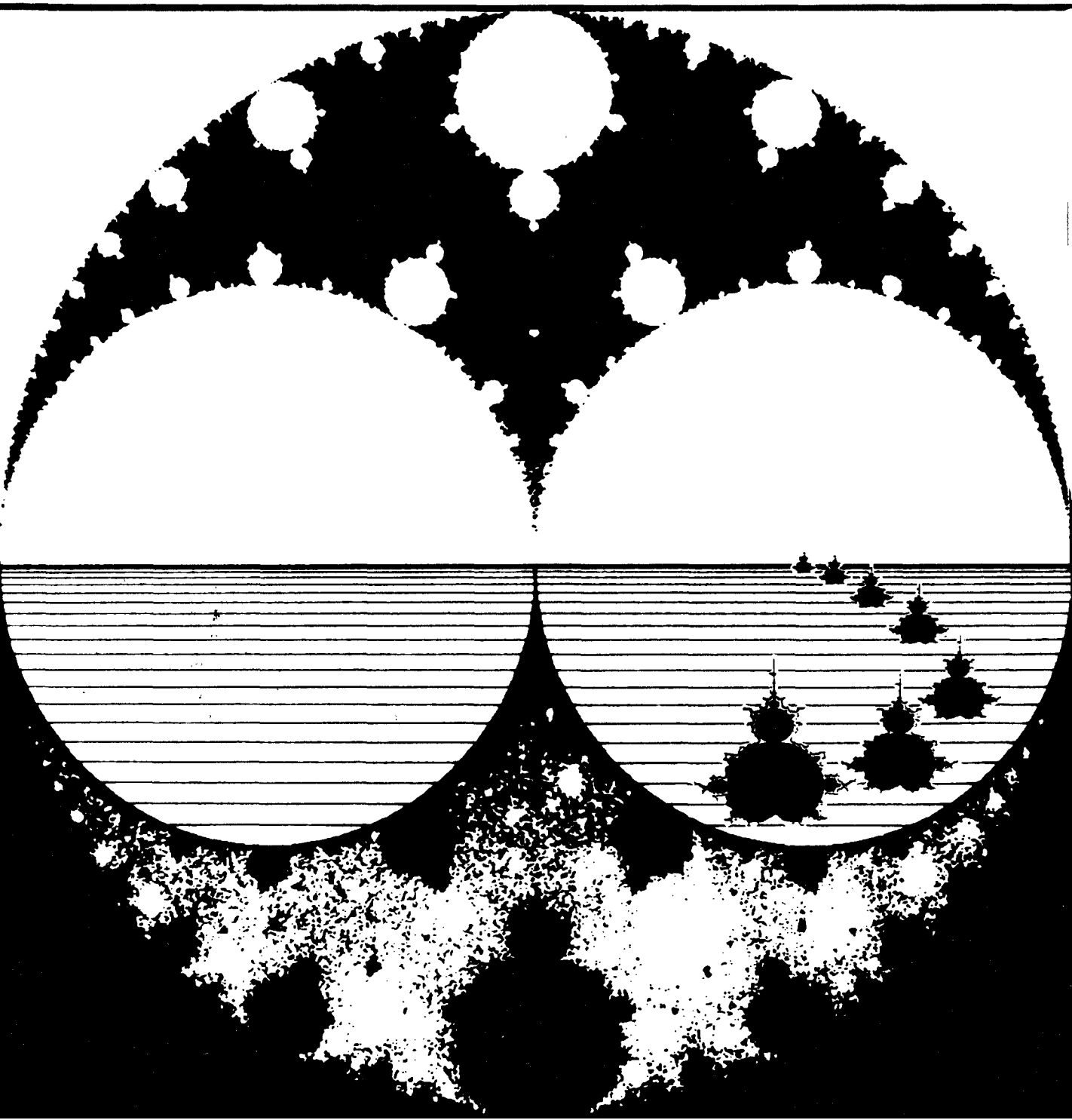
Обзорные статьи:

- [Be] Berry M. V., (1978). Regular and Irregular Motion. In: Jorna S. (ed) Topics in Nonlinear Dynamics. Amer. Inst. of Physics Conf Proceedings 46: 16-120.
- [Bl] Blanchard P., (1984). Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere. Bull Amer Math Soc 11: 85—141.
- [Bro] Brolin H., (1965). Invariant Sets Under Iteration of Rational Functions. Arkiv f Mat 6: 103—144.
- [DT] Dekker U., Thomas H., (1983). Unberechenbares Spiel der Natur — Die Chaos-Theorie. Bild der Wiss 1: 63—75.
- [Dou] Douady A., (1985). L'étude Dynamique des Polynômes Quadratiques Complexes et ses réinvestissements. Soc. Math de France, Assemblée Générale.
- [G1] Grossmann S., (1969). Analytic Properties of Thermodynamic Functions and Phase Transitions. In: Madelung O. (ed) Festkörperprobleme IX. Vieweg 207—245.
- [G2] Grossmann S., (1984). Discrete Nonlinear Dynamics. In: Velarde M. G. (ed) Non-Equilibrium Cooperative Phenomena in Physics and Related Fields. ASI-Series, Plenum Press, New York.
- [G3] Grossmann S., (1983). Chaos Unordnung und Ordnung in Nichtlinearen Systemen. Phys. Blätter 39: 139—145.
- [Ho] Hofstadter D. R., (1982). Strange Attractors: Mathematical Patterns Delicately Poised Between Order and Chaos. Scientific American 245/5, 16—29, Spectrum der Wiss, January 7—17.
- [My2] May R. M., (1976). Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics. Nature 261: 459—467.
- [NF] Nelson D. R., Fisher M. E., (1975). Soluble Renormalization Groups and Scaling Fields for Low-Dimensional Ising Systems Annals of Phys 91: 226—274.
- [PR3] Peitgen H.-O., Richter P. H., (1986). Fraktale und die Theorie der Phasenübergänge, Phys. Blätter 42: 9—22.
- [PSH] Peitgen H.-O., Saupe D., Haeseler F. V., (1984). Cayley's Problem and Julia Sets. Math. Intelligencer 6: 11—20.
- [RP] Richter P. H., Peitgen H.-O., (1985). Morphology of Complex Boundaries. Berichte d. Bunsenges f. Physikal Chemie 89: 571—588.
- [Rn1] Ruelle D., (1980). Strange Attractors. Math. Intelligencer 2: 126—137.

Избранные оригинальные статьи:

- [Ba] Barna B., (1956). Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen, II. Publ. Mathematicae Debrecen 4: 384—397.
- [Br] de Brandes L., (1985). Proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math. 154: 137—152.

- [Cam] Camacho C., (1978). On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in c^2 . Soc. Math. France, Astérisque 59—60: 83—93.
- [Ca] Cayley A., (1879). The Newton-Fourier imaginary problem. Amer. J. Math II: 97.
- [CGS] Curry J., Garnett L., Sullivan D., (1983). On the iteration of rational functions: Computer experiments with Newton's method. Commun. Math. Phys. 91: 267—277.
- [DDI] Derrida B., De Seze L., Itzykson C., (1983). Fractal Structure of Zeroes in Hierarchical Models. J. Statistical Physics 33: 559—569.
- [De2] Devaney R. L. (1984). Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps. Bull. Amer. Math. Soc. 11: 167—171.
- [DH1] Douady A., Hubbard J. H., (1982). Iteration des polynômes quadratiques complexes. CRAS Paris 294: 123—126.
- [DH2] Douady A., Hubbard J. H., (1984). On the dynamics of polynomial-like mappings. Preprint.
- [DH3] Douady A., Hubbard J. H., (1984). Etude dynamique des polynômes complexes. Publications Mathématiques D'Orsay.
- [Fa] Fatou P., (1919/1920). Sur les équations fonctionnelles. Bull. Soc. Math. Fr. 47: 161—271, 48: 33—94, 208—314.
- [Fei] Feigenbaum M., (1978). Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. J. Statistical Physics 19: 25—52.
- [Fi] Fisher M. E., (1965). The Nature of Critical Points, Lectures in Theor. Phys. VIIc, 1—160, University of Colorado Press, Boulder.
- [GT] Grossmann S., Thomae S., (1977). Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes. Zeitschr. f. Naturforsch. 32a: 1353—1363.
- [Ha] Haeseler F. V., (1985). Über sofortige Attraktionsgebiete superattraktiver Zyklen. Dissertation Universität Bremen.
- [Ju] Julia G., (1918). Sur l'iteration des fonctions rationnelles. Journal de Math. Pure et Appl 8: 47—245.
- [Kad] Kadanoff L. P., (1966). Scaling laws for Ising Models near T_c . Physics 2: 263—272.
- [Kau] Kaufman B., (1949). Crystal Statistics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis. Phys. Review 76: 1232—1243.
- [Lo] Lorenz E. N., (1964). The problem of deducing the climate from the governing equations. Tellus XVI: 1—11.
- [LY] Lee T. D., Yang C. N., (1952). Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. Phys. Review. 87: 410—418.
- [Lj] Ljubich M. J., (1983). Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. Ergod. Th & Dynam. Sys. 3: 351—385.
- [Ma2] Mandelbrot B., (1980). Fractal aspects of the iteration of $z \mapsto \lambda(1 - z)$ for complex λ , z . Annals NY. Acad. Sciences 357: 249—259.
- [MSS] Mane R., Sad P., Sullivan D., (1983). On the dynamics of rational maps. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 16: 193—217.
- [On] Onsager L., (1944). Crystal Statistics. I. Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. Phys. Rev. 65: 117—149.
- [PPR] Peitgen H.-O., Prüfer M., Richter P. H., (1985). Phase Transitions and Julia Sets. In: Ebeling W., Peschel M. (eds) Lotka—Volterra—approach to cooperation and competition in dynamic system. Akademie-Verlag, Berlin.
- [PR4] Peitgen H.-O., Richter P. H., (1985). The Mandelbrot Set in a Model for Phase Transitions. In: Hirzebruch F. et al (eds) Proc 25, Bonner Mathem. Arbeitstagung 1984. Springer Lecture Notes in Math. 1111: 111—134.
- [PPS] Peitgen H.-O., Prüfer M., Schmitt K., (1985). Global Aspects of the Continuous and Discrete Newton Method: A Case Study. preprint, University of Utah.
- [Ru2] Ruelle D., (1982). Repellers for real analytic maps. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2: 99—108.
- [SK] Saarloos W. V., Kurtze D. A., (1984). Location of Zeros in the Complex Temperature Plane: Absence of Lee-Yang Theorem. Journal of Physics A 17: 1301—1311.
- [Si] Siegel C. L., (1942). Iteration of Analytic Functions. Ann. of Math. 43: 607—612.
- [SC] Stephenson J., Couzens R., (1984). Partition Function Zeros for the Two-Dimensional Ising Model. Physica A 129: 201—210.
- [Su] Sullivan D., (1982—1983). Quasi conformal homeomorphisms and dynamics I.II.III. preprint. IHES.
- [TL] Tan Lei. Similarity between Mandelbrot set and Julia sets, preprint of University of Bremen, 1989.
- [Wi] Wilson K. G., (1971). Renormalization Group and Critical Phenomena I. Phys. Rev B 4: 3174—3183, II. Phys. Rev. B 4: 3184—3205.
- [YL] Yang C. N., Lee T. D., (1952). Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation. Phys. Rev. 87: 404—409.



ЧАСТЬ III

СТАТЬИ ПРИГЛАШЕННЫХ АВТОРОВ

Фракталы и возрождение теории итераций

БЕНУА Б. МАНДЕЛЬБРОТ

Всего лишь шесть лет назад! Только десять, и уже двадцать с лишним лет прошло!

Даже не верится, что лишь шесть лет назад я впервые обнаружил и описал структуру прекрасного множества, которому посвящена эта книга. И мне очень приятно, что теперь его связывают с моим именем — это большая честь!

Немногим более 20 лет прошло с тех пор, как я убедился, что между моими разрозненными набегам в пустынные и безлюдные уголки Неизданного все же существует какая-то связь. А ведь ничего общего между ними никто не видел, кроме разве что того, что ими занимался я. И вот, около 1964 года появились признаки того, что все это когда-нибудь сложится в единую картину. К ее систематическому изучению я и приступил. Прошло не более 10 лет с тех пор, как моя картина сложилась настолько ясно, что я смог начать работу над книгой. Для этого новой области нужно было присвоить имя. Так и появился термин «*фрактальная геометрия*».

Красота многих фракталов тем более поразительна, что открылась совершенно неожиданно: мы хотели построить — с чисто учебной целью — всего лишь математические диаграммы, и можно было ожидать, что они окажутся сухими и скучными. Поэт как-то написал, что Евклид обнаружил красоту, но ведь, чтобы научиться по-настоящему понимать и ценить красоту геометрии Евклида, необходимо долго и упорно тренироваться и, возможно, обладать особым даром. Напротив, трудно найти человека, равнодушного к фракталам. А многие считают, что первое знакомство с фрактальной геометрией подарило им совершенно неповторимые эстетические впечатления и обогатило новым научным опытом. В этом смысле *фракталы*, безусловно, оригинальны настолько, насколько это вообще возможно.

С чисто математической точки зрения ситуация представляется более сложной и весьма интересной. Многие естественно-научные теории начинают свое существование с того, что берут все, что можно, из уже готовых областей математики. В нашем случае таких сложившихся областей не существовало. Наоборот, именно фрактальная геометрия, созданная для нужд естествознания, совершенно неожиданно объединила несколько старых и благородных (хотя и узких) математических направлений в единый поток и пробудила от спячки еще несколько.

Исторические обзоры обычно принято начинать с отдаленного прошлого, переходя затем ближе к настоящему. Но сейчас мне бы хотелось нарушить этот порядок. Позвольте сначала, пока мне не изменяет память, рассказать о появлении удивительного множества, исследуемого в этой книге. Некоторые из компьютерных рисунков, воспроизведенных в этом очерке, — это самые первые изображения фрактальных фигур. Сегодня они кажутся антиквариатом. И даже вчера казались устаревшими и ужасно примитивными. А в 1980 году, когда я увлекся их интеллектуальными и эстетическими откровениями, это было лучшее из того, что можно было сделать в Гарвардском университете, где я в 1979—1980 годах работал в качестве приглашенного профессора математики. В научном центре был установлен компьютер Vax (новенький и «необъезженный»), картинки мы наблюдали с помощью электронно-лучевой трубки Tektronix, изношенной и очень слабой, а копии печатались на принтере Versatec, причем никто толком не знал, как с ним обращаться. Я тогда постоянно работал в Исследовательском центре IBM им. Томаса Дж. Уотсона в Йорктаун-Хейтс, штат Нью-Йорк,

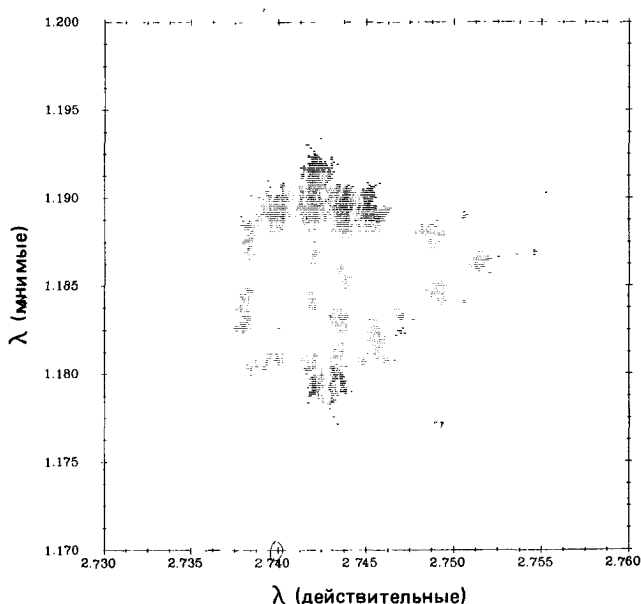


Рис. 62. Первый подробный рисунок «молекулы-острова» в множестве Мандельброта для $z \mapsto z^2 - c$ (1 марта 1980 года).

где имел академическую свободу, будучи членом совета IBM. Мне кажется, что эти рисунки должны раз и навсегда рассеять впечатление о моем якобы замечательном существовании в IBM, где для научного процветания достаточно было лишь попасть в комнаты, битком набитые самым современным оборудованием.

И еще немного в том же духе. Отличные графики, сделанные в IBM для моей более ранней работы 1977 года, были получены на уже побывавшем на свалке и постоянно ломавшемся компьютере, программное обеспечение которого так никогда и не было приведено в порядок.

В 1980 году у меня был замечательный программист — ассистент Питер Молдейв, бесплатно помогавший мне по вечерам после своей основной работы.

Здесь уместно вернуться немного назад, в 1978—1979 годы. Тогда в IBM со мной работал прекрасный помощник Марк Р. Лафф. Я уже заинтересовался *фракталами*, инвариантными относительно нелинейных преобразований, хотя начинал с «самоподобных» фракталов, инвариантных относительно линейных преобразований. Откуда же взялось это новое увлечение? Дело в том, что на меня произвел сильное впечатление написанный Ж. Адамаром некролог Анри Пуанкаре. Он, собственно, и привлек мое внимание к нескольким заброшенным областям математики, в которых можно было ожидать появления любопытных фракталов совершенно неизвестной структуры.

Вначале мы исследовали объект, рассмотренный впервые самим Пуанкаре в 1880-х годах, а именно «предельное множество группы Клейна». нас занимала, если говорить точнее, следующая родственная задача: на плоскости дано несколько окружностей. Необходимо описать структуру множества, инвариантного (не изменяющегося) при обычных инверсиях относительно любой из этих окружностей. Другими словами, произвольно взятая начальная точка подвергается бесконечной цепочке инверсий относительно заданных окружностей, и задача состоит в том, чтобы описать фигуру, к которой бесконечная цепочка инверсий «притягивает» эту начальную точку.

К моей радости и удивлению моих способностей в прикладной математике хватило, чтобы отыскать явную конструкцию. И хотя сейчас конструк-

ция кажется почти очевидной, она неизменно, начиная с 1880-х годов, ускользала от чистых математиков.

Затем мы довольно беззаботно стали забавляться, строя один за другим примеры фигур, известных как «множества Жюлиа». Они возникли в рамках так называемой «теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости». Тогда, в 1979 году, эта теория пребывала в спячке, пройдя пик своего расцвета где-то в 1918 году, когда появились знаменитые работы Ж. Жюлиа и П. Фату. Что же заставило нас вернуться к этим работам? В 20 лет я прочел или просмотрел их по совету моего дяди — известного «чистого» математика, специалиста по комплексному анализу, и это здорово повлияло на мою дальнейшую жизнь. Еще тогда, в 1945 г., мне удалось благодаря этим работам отойти от шаблона, которому обычно следуют при изучении математики. А благодаря тому, что Жюлиа был одним из моих учителей в Политехнической школе, мой образ мыслей не изменился. Через 35 лет мне довелось сыграть ведущую роль в возрождении теории итераций, и это, хотя и очень поздно, приблизило меня к основному руслу современной математики, причем настолько, что я и сам этого не ожидал.

Мы накопили прекрасные изображения множеств Жюлиа в больших количествах (рисунок одного из таких множеств был независимо от нас построен и показан нам Дж. Х. Хаббардом. И очень приятно было спустя столько лет ощущать, в чем в действительности состоял смысл открытий Жюлиа и Фату. Кроме того, практически все множества Жюлиа оказались чрезвычайно красивыми.

Однако время игр и забав вскоре прошло, и я поставил перед собой серьезную задачу: выбрав семейство рациональных отображений с одним комплексным параметром, я решил исследовать, в каких областях лежат значения параметра, для которых динамика отображения сходится к устойчивым предельным циклам различных размеров. Назовем это множество M' . Мне почему-то казалось, что нужно исследовать достаточно сложное отображение, чтобы получить множество M' с богатой структурой (я заметил потом, что каждый из новичков, за которым я наблюдал, пытался действовать точно так же). Я решил рассмотреть отображение $z \mapsto c \frac{(1+z^2)^2}{z(z^2-1)}$ и убедиться в том, что существуют значения параметра, приводящие к гарантированному хаосу. При $c = 1/4$ такое отображение было изучено Сэмюэлом Латтесом, и его динамика, как известно, хаотична. Я же хотел исследовать его для произвольных комплексных значений c . Для этого отображения не было критерия существования устойчивого предельного цикла, и мы запустили на компьютере исследовательский алгоритм, получив в результате очень размытую, но с весьма сложной структурой «тень» множества M' . На рис. 63 приведено полученное позднее изображение этого множества. И хотя тогда, в 1979 году, мы увидели только размытые пятнышки, этого оказалось достаточно, чтобы понять, что игра стоит свеч и что поставленной цели гораздо легче достичь в более простом случае.

Поэтому я и вернулся вновь к квадратичному отображению $z \mapsto z^2 - c$. Оно всегда имеет устойчивую неподвижную точку на бесконечности, и поэтому наиболее интересной задачей была классификация неподвижных циклов, являющихся ограниченными. Кроме того, квадратичное отображение — самое простое и к тому же единственное, для которого все зависит от значений единственного параметра.

В начале 70-х годов стали широко известны исследования П. Дж. Мираберга для действительных c . Они продолжали развиваться в различных направлениях. Но никто — и это поразительно — не стал заниматься их расширением на комплексную плоскость. Я чувствовал, что известные свойства действительных квадратичных отображений обеспечат постоянную проверку результатов в случае комплексных c . Мне также казалось, что для

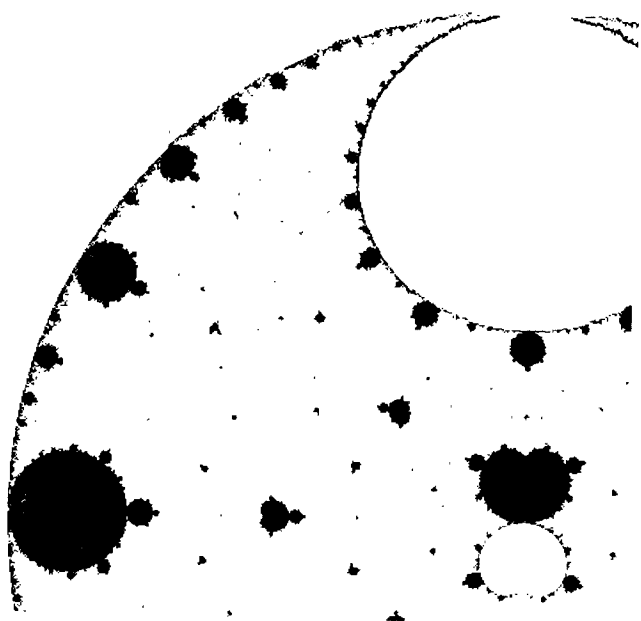


Рис. 63. Одна четверть множества Мандельброта для отображения $z \mapsto (z^2 + 1)/(z^2 - 1)$ (повторно получено в 1982 году).

максимально быстрого продвижения к цели я могу, ничего не опасаясь, избрать более короткий путь исследований, строгое математическое обоснование которого было выше моих аналитических способностей, и фактически даже сейчас оно является неполным.

В 1906 г. Фату удалось показать, что для некоторых с бесконечно удаленная точка притягивает всю комплексную плоскость, кроме множества Жюлиа, которое является очень «тонким» и образует то, что теперь называют «фрактальной пылью». Пыль не может быть границей какого бы то ни было множества независимо от его типа, и, следовательно, искомое множество M' должно быть подмножеством множества таких s , для которых множество Жюлиа не является пылью, т. е. связано.

Именно последнему множеству (обозначим его M) присвоили мое имя. Я выбрал это множество потому, что Жюлиа дал прямой критерий, который особенно легко запрограммировать для квадратичного отображения: s принадлежит M тогда и только тогда, когда точка $z_0 = 0$ (так называемая «критическая точка») не стремится к бесконечности. Для первой проверки использовалось квадратичное отображение в альтернативной форме $z \mapsto \lambda z(1 - z)$. После нескольких итераций на решетке с большим шагом мы обнаружили, что множество M включает в себя очень грубые очертания двух кругов $|\lambda| < 1$ и $|\lambda - 2| < 1$.

Два алгебраических подхода подтверждали, что эти круги должны находиться именно здесь, а значит, наш метод работал. Кроме того, на действительной оси, слева и справа от вышеупомянутых кругов, мы увидели нечеткие очертания круглых вкраплений, которые я сейчас и называю «атомами». Оказалось, что они разделены интервалами, известными из теории Мирберга, и это вдохновило нас на еще более смелые вычисления. Кстати, любое улучшение качества расчетов приводило ко все более четко сфокусированным картинкам. А чтобы увидеть, как атомы образуют иерархию, в которой к каждому из них прикреплены меньшие, мне потребовалось еще и воображение. Мы убедились, что точки, в которых большие кругообразные атомы несут на себе меньшие, такие как и ожидалось. И таким обра-

зом нам открылись геометрические реализации не только знакомой последовательности парных бифуркаций Мирберга, но и любой другой последовательности бифуркаций произвольного порядка.

Затем, однако, счастье, по-видимому, нам изменило: картинки, вместо того чтобы становиться все точнее и резче, становились, казалось, все беспорядочнее. Ошибки ненадежного дисплея Tektronix? Чтобы убедиться в этом, я ненадолго съездил в Йорктаун. Мы пропустили нашу Гарвардскую программу через компьютерную сеть IBM, получили рисунок, который был затем опубликован в верхней части иллюстрации 189 моей книги 1982 г. Беспорядок не исчез! Наоборот, и вы сами можете в этом убедиться, в нем появились признаки систематичности. Мы сразу же попробовали посмотреть на все это вблизи. И когда изображение было увеличено, многие пятнышки исчезли, как и ожидалось, но некоторые не только не исчезли, но и обнаружили сложную структуру. Оказалось, что они обладают «побегами», очень напоминающими характерные для всего множества M . Мы с Питером Молдейвом не могли сдержать своего волнения. Что-то заставило нас переделать все вычисления для эквивалентного отображения $z \mapsto z^2 - c$, и здесь оказалось, что основной континент множества M имеет ту же форму, что и каждый из островов! Затем мы сосредоточились на «побегах», отвечающих бифуркациям различных порядков, и сравнили соответствующие близлежащие острова. Как оказалось, они лежат на пересечениях звездных областей и логарифмических спиралей! Рис. 64 представляет собой пример, соответствующий 100-кратной бифуркации, построенный с помощью компьютерной сети IBM летом 1980 года (копии печатались на Tektronix).

Наряду с этими увеличенными изображениями множества M , мы продолжали строить изображения множеств Жюлиа для значений параметра c , лежащих внутри молекул-островов. Картина, которую мы наблюдали, казалось, распадалась на множество мелких островков, каждый из которых представлял собой уменьшенный вариант множества Жюлиа для соответствующего значения c в молекуле-континенте множества M (рис. 65). Однако из критерия Жюлиа следует, что это подобие обманчиво. В то время как внутренние части островов перекрываться не могут, просвет между ними должен быть частично заполнен меньшим островом и т. д. до бесконечности. В конце концов острова должны соединиться своими береговыми линиями, образуя «дьявольский» полимер с невидимыми (из-за того, что точность вычислений, естественно, ограничена решеткой) «связями».

Мы продолжали делить время между множеством M и некоторыми из множеств Жюлиа J , пока не сделали захватывающее открытие. Я заметил, что множеству M всегда принадлежит рекорд по числу точек в предельных циклах. Оно также имеет таинственный «иероглифический» характер: включает в себя полный набор деформированных и уменьшенных версий всех множеств Жюлиа.

Для понимания структуры множества M особое значение имело одно из характерных утверждений теории Мирберга, уже установленное к 1980 г., а именно то, что действительная ось пересекает цепь островов, принадлежащих M , и соединяет их по береговым линиям уже описанным для некоторых множеств Жюлиа «дьявольским» способом. Это наводит на мысль, что звездоподобные структуры, обнаруженные вне действительной оси, также возникают из-за того, что множество M представляет собой связный «дьявольский» полимер.

Столкнувшись с этим, я стал действовать слишком осторожно, что было совершенно не в моем характере и, к счастью, это быстро прошло. Возможно, что это проявилось во мне после года, проведенного среди «чистых» математиков. Поясню подробнее.

На протяжении моей карьеры, изобиловавшей подъемами и падениями, я всегда приветствовал разнообразные и часто противоречивые влияния, от-

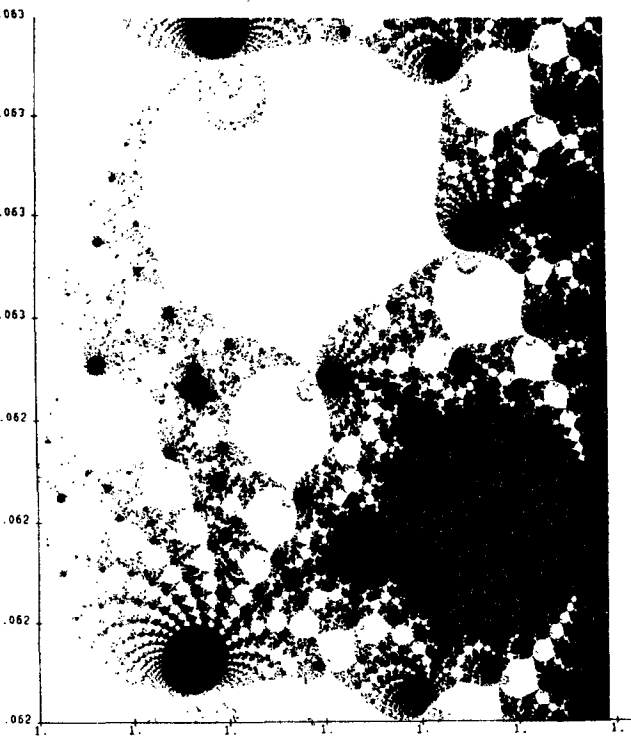


Рис. 64. Первое изображение (июнь 1980) детали множества Мандельброта соответствующей бифуркации соотого порядка.

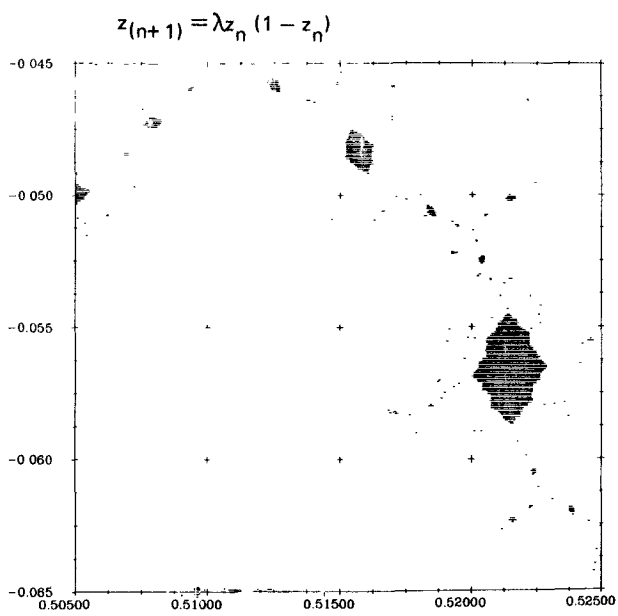


Рис. 65. Множество Жюлиа для случая, когда значение параметра лежит внутри одной из «молекул-островов» множества Мандельброта (апрель 1980).

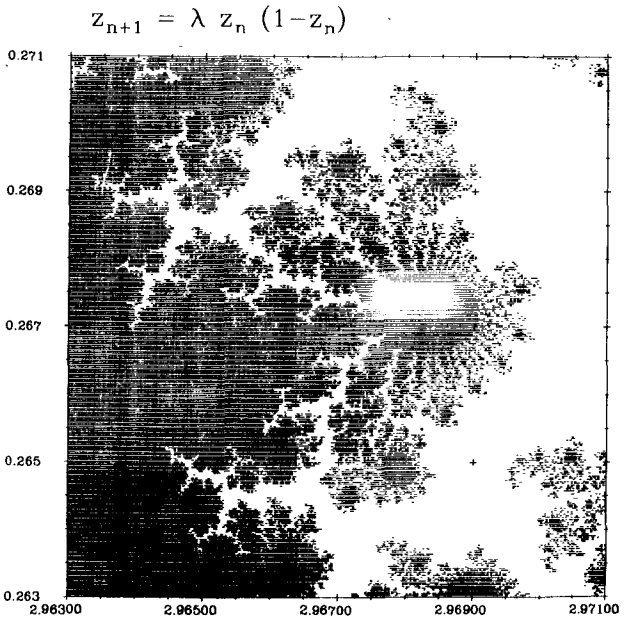
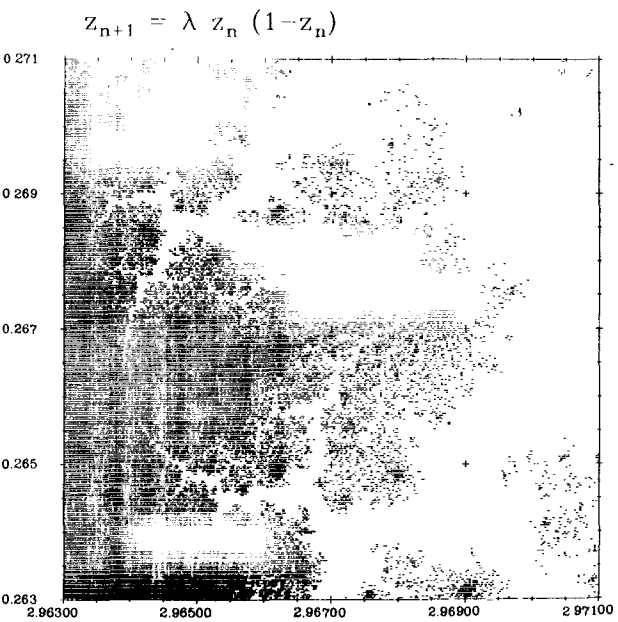


Рис. 66. Два изображения фрагмента множества Мандельброта. Правое сделано с большей резкостью (апрель 1980 года).

кладывавшие слой за слоем «осадки», которые часто влияли на меня весьма своеобразно. Обычно я невосприимчив к обвинениям, выдвигаемым математиками в том, что я использую недостаточно строгие аргументы, но в этом случае я позволил математической стороне моей научной натуры взять верх. Хотя мне и не удалось в 1980 г. доказать, что мое множество M является *связным*, мне все же следовало бы сделать такое утверждение, основываясь на экспериментальных наблюдениях. Но мне не хватало смелости. В это время я писал статью, которая появилась в конце 1980 г. и стала весьма хорошо известной. Одна часть этой работы вошла в мой доклад, который я сделал в Нью-Йорке в декабре 1979 года, а другая (как это обычно и бывает) представляла собой новые разработки. Однако вместо того, чтобы обсудить множество M в той форме, в какой оно изучалось, я ввел в этой работе некий неудобный суррогат, свойства которого мог описать математически более точно.

Связность множества M была, таким образом, представлена как вопрос, на который нужно найти ответ, но не как утверждение, требующее доказательства. И вплоть до своей книги 1982 г. я так и не вернулся к правильным убеждениям. А вскоре и вопрос о публикации стал проблематичным, так как А. Дуади и Дж. Х. Хаббард доказали связность множества M и продолжали его чрезвычайно подробно исследовать.

Меня просили изложить в этом очерке все так, как мне запомнилось, но думаю, что вряд ли кто-нибудь ожидал, что я буду писать о себе столь откровенно. Позвольте мне продолжить в том же ключе рассказ о том, как было введено понятие фрактала, так как его появление было связано со многими случаями нелегкого, и в то же время волнующего взаимодействия различных сторон личности ученого. В 1975 г. я придумал термин *фрактал*, чтобы дать название моей первой работе в этой области. Однако я не стал приводить математическое определение, чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет «разлито по бутылкам». Все фигуры, которые я исследовал и называл фракталами, в моем представлении обладали свойством быть «нерегулярными, но *самоподобными*». Слово «подобный» не всегда имеет классический смысл «линейно увеличенный или уменьшенный», но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий». Широкое толкование было необходимым, чтобы включить, например, множества Пуанкаре и Жюлиа, о которых шла речь выше. Формулировка «нерегулярный, но самоподобный» была попыткой втиснуться между двумя возможностями, к которым эти теории сводились ранее. Первую из них иллюстрирует теория Евклида, исследующая исключительно упорядоченные и гладкие фигуры (элементы кривых у Евклида всегда самоподобны, но тривиальным образом: все кривые являются локально прямыми, а прямая всегда самоподобна). Другая старая возможность была связана с фигурами произвольной сложности и неупорядоченности. Сегодня эти фигуры заслуживают наименования «геометрически хаотичных», но тогда, называя их, я использовал менее удачный латинский эквивалент «erratic» (беспорядочные). Моя атака в новой области имела целью разделить на части понятие *хаоса*. Одна часть при этом так и осталась нетронутой, поскольку мы не знаем, как ее исследовать. Вторая же, хотя и менее общего вида, но весьма внушительная, заслуживает быть выделенной. Ее следовало бы изучить, хотя бы в силу многочисленных примеров самоподобия в природе, а еще потому, что именно из-за самоподобия она вполне поддавалась изучению.

Но когда в 1975 г. я писал свою работу, различие между «упорядоченным» и «неупорядоченным» хаосом еще не было центральным местом. На той стадии было необходимо добиться признания хаоса, акцентируя внимание на различиях между гладкими и негладкими фигурами. Я был вынужден подчеркивать эти различия очень тщательно, определяя фракталы формальным образом. Очень давно мне довелось случайно познакомиться с

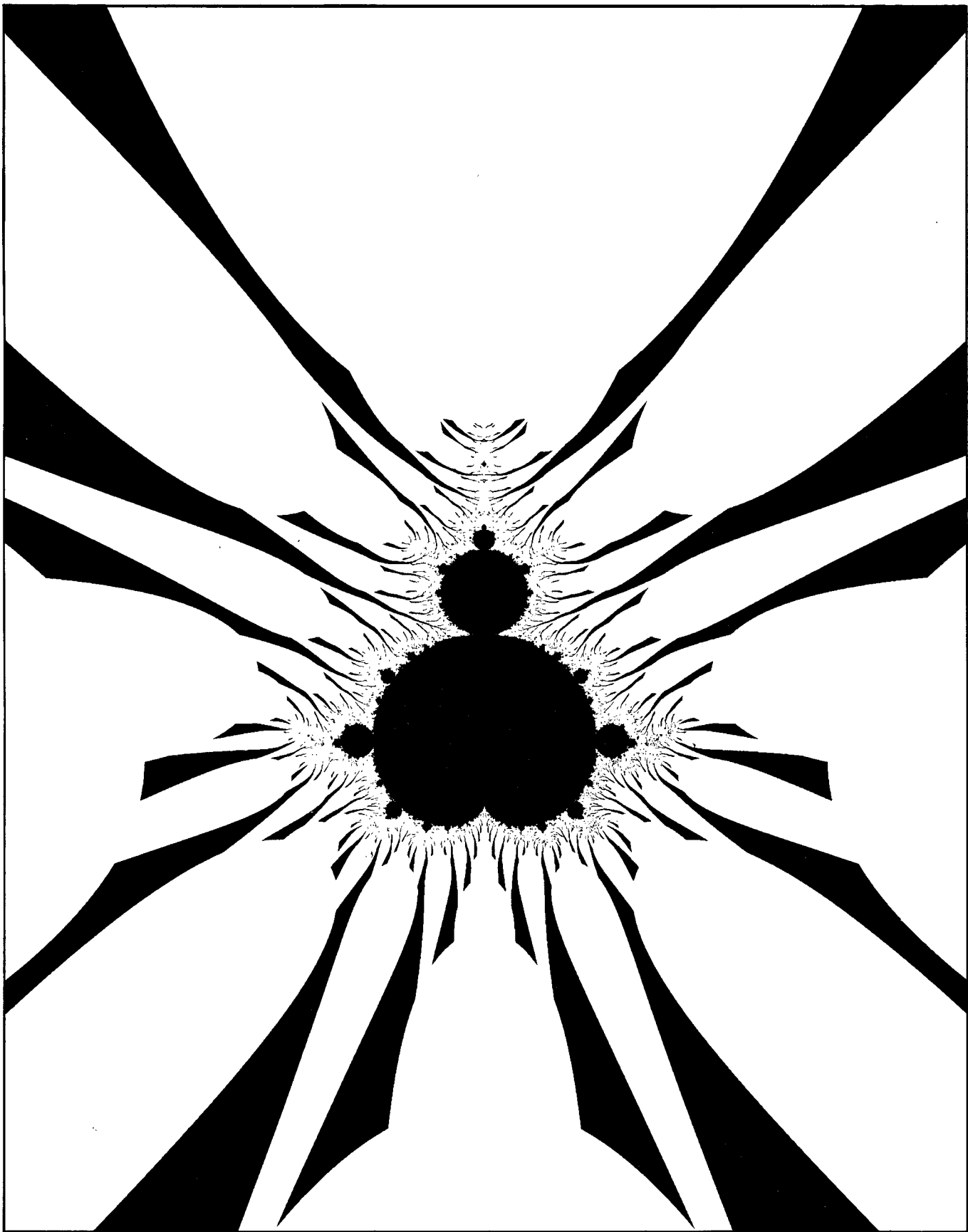


Рис. 67. «Подпись» Бенуа Б. Мандельброта.

представлением о хаусдорфовой размерности, и я развил в себе интуитивное понимание этого понятия. Для подавляющего большинства действующих математиков оно было каким угодно, но уж никак не интуитивным, а фактически весьма туманным, хотя одновременно и классическим — для нескольких работавших с ним ученых. И если бы мне не удалось развить эти знания и интуицию, кто знает, может быть и не было бы фрактальной геометрии.

Позже я понял, что фактически моя интуиция всегда работала с различными формами более общей концепции того, что я называю «фрактальной размерностью». Сила понятия фрактальной размерности по Хаусдорфу в том, что она позволяет различать категории «гладкий» и «хаотичный». Слабость же ее в том, что не удается различить категории «нерегулярный, но самоподобный» и «геометрически хаотичный». Это происходит из-за того, что определение является весьма общим, что и требуется для математики. Но для конкретной области науки общий характер этого определения оказывается чрезмерным: оно становится не только неудобным, но и совершенно неподходящим.

Впрочем эта особенность вовсе не была очевидной в 1975 г., когда я шокировал ученый мир, используя дробную размерность для моих самоподобных моделей. Я ринулся под защиту существующего определения и в 1977 г. провозгласил существование множеств с дробной *хаусдорфовой размерностью*, или, другими словами, с размерностью, больше топологической. Это определение не смогло охватить многие «пограничные фракталы», но тем не менее с его помощью удалось более или менее точно провести границу «против» Евклида. Но граница «против» настоящего геометрического хаоса оставалась широко открытой! Я знаю, что определения значат немного, но это еще поддавалось улучшению.

И вот наконец наш экскурс в историю привел нас к отдаленным корням событий, происходивших двадцать с лишним лет назад. Согласно наиболее строгим стандартам, принятым для философов и историков, лишь немногие мысли являются совершенно новыми. Если разработка не является важной, то ее претензии на новизну не заслуживают специального изучения. В то же время важные результаты — а фрактальная геометрия, похоже, такова — всегда нуждаются в серьезной проверке. Еще до того, как она утвердила себя, я подверг ее интеллектуальные основания проверке по самым жестким меркам и полностью изложил результаты в своих книгах. Что касается вклада фрактальной геометрии в науку и эстетику, то вывод таков: даже намек на нее до моих работ не существовало. Причем почти полное отсутствие непризнанных предшественников очень удивляет. Историческое исследование позволило обнаружить лишь несколько неизвестных ссылок (Ж. Перрен, Г. Штейнгауз и некоторые другие), в которых отмечалось, что хаос требует изучения, но эти мысли развития не получили.

С другой стороны, в моей книге цитируются многие знаменитые математики, работавшие в период 1875—1925 годов, включая Пуанкаре, Кантора, Пеано, Хаусдорфа, Серпинского. Не считаю ли я поэтому, что фрактальная геометрия была «открыта» сто лет назад? Вовсе нет. Я цитирую этих авторов потому, что у меня имеются и серьезные похвалы, и не менее серьезные упреки к ним. Я отдаю им должное за то, что они изобрели ряд конструкций, которые мне в конце концов удалось объединить и которые оказались бесценными. А упреки связаны с тем, что им не удалось увидеть и развить родство своих построений, что они видели в каждой из своих конструкций «монстра», «исключительное множество», из-за чего их действительное значение было полностью упущено. Исторический контекст помогает объяснить, почему моя фрактальная геометрия оказалась для всех совершенно неожиданной, и особенно для тех, кто занимался математической дисциплиной, именуемой «действительным анализом» и родившейся из тех же конструкций около 1900 года. Я льщу себя надеждой, что эти

удивительные идеи вскоре будут казаться «естественными» и «неизбежными».

Закончу на этом. Мои воспоминания об истории фракталов недавно были опубликованы в более полном виде. Да и подробности, о которых я рассказал, не имеют прямого отношения к этой великолепной книге, для которой, еще не успев насладиться ею, я написал свое эссе.

Литература

Mandelbrot B. B. (1975). Les objets fractals. Flammarion, Paris.

Mandelbrot B. B. (1977). Fractals: Form, Chance, and Dimension. Freeman, San Francisco.

Mandelbrot B. B. (1980). Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z . In: Nonlinear Dynamics. Helleman R. H. G. (ed). Annals New York Acad. Sciences, 357, pp 249—259.

Mandelbrot B. B. (1982). The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco.

Mandelbrot B. B. (1985). An interview by Barcellos A., in: Albers, D. J. and Alexander G. L. (eds). Mathematical People, Birkhäuser, Boston, pp 205—225.

Множества Жюлиа и множество Мандельброта

АДРИЕН ДУАДИ

Множества Жюлиа квадратичных отображений и множество Мандельброта появляются в ситуации, которая с математической точки зрения исключительно проста, — из последовательностей комплексных чисел, определяемых по индукции с помощью соотношения

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

где c — это комплексная постоянная. Я должен сказать, что когда еще в 1980 г. я вместе с Дж. Х. Хаббардом занялся исследованием многочленов второй степени относительно одной комплексной переменной (или, более точно, многочлена вида $z \mapsto z^2 + c$), то всякий раз, когда я говорил об этом своим друзьям, они изумлялись и спрашивали: «Ты что же рассчитываешь обнаружить что-нибудь новое?» Однако именно это простое семейство многочленов привело к появлению очень сложных объектов, причем не хаотичных, а, наоборот, строго организованных в соответствии со сложными комбинаторными законами.

Поведение упомянутой выше последовательности чисел зависит от параметра c и начальной точки z_0 . Если зафиксировать c и изменять z_0 в поле комплексных чисел, то мы получим множество Жюлиа, а если зафиксировать $z_0 = 0$ и изменять параметр c , то получим множество Мандельброта. Если взять z_0 далеко от нуля, то последовательность будет быстро стремиться к бесконечности. Это, конечно, верно также и тогда, когда точка z_n для некоторого n находится далеко от нуля. Приведем количественное утверждение: если для некоторого n модуль $|z_n|$ (т. е. расстояние от начала координат до точки z_n) больше чем $|c| + 2$, то модуль $|z_{n+12}|$ больше, чем отношение объема известной нам Вселенной (по расстоянию до наиболее удаленных квазаров) к объему протона. Но существуют и такие значения z_0 , для которых последовательность (z_n) никогда не уходит далеко, а всегда остается ограниченной. При заданном c эти значения образуют *наполненное множество Жюлиа* K_c для полинома $f_c: z \mapsto z^2 + c$. Настоящее же *множество Жюлиа* состоит только из граничных точек K_c (в этой статье я часто, выражаясь не совсем точно, буду называть K_c множеством Жюлиа). Конечно же, может случиться так, что множество K_c не будет иметь внутренних точек. В этом случае оно совпадает со своей границей (иными словами, множество Жюлиа совпадает с наполненным множеством Жюлиа).

Вполне естественно, что вид множества Жюлиа зависит от выбора параметра c , но удивляет то, насколько эта зависимость сильна. И, меняя c , можно получать невероятное разнообразие множеств Жюлиа: одни из них похожи на большие «толстые» тучи, другие напоминают редкие кусты ежевики, третьи выглядят, как искры, летящие в небе во время фейерверка. Одно множество имеет форму кролика, у многих других хвосты, как у морского конька...

Есть два основных типа множества Жюлиа: некоторые из них являются цельными (мы говорим связными), а другие представляют собой облака из точек (мы называем их канторовыми множествами). Для математика появляется хорошая возможность ввести новое множество — множество значений c , для которых K_c связно. Я назвал его *множеством Мандельброта*, так как Бенуа Мандельброт был первым, кто получил его изображение с помощью компьютера и положил начало его описанию. Я уже говорил

раньше, что множество Мандельброта можно ввести и как множество значений s , для которых последовательность (z_n) остается ограниченной, если стартовать из $z_0 = 0$ (эквивалентность этих двух определений следует из теоремы, доказанной Фату и Жюлиа в 1919 году независимо друг от друга).

Если взглянуть на множество Мандельброта, то первое, что бросается в глаза — это область, ограниченная *кардиоидой* с острием в точке 0.25 и закругленной вершиной в точке -0.75 . Затем виден касательный к кардиоиде круг радиусом 0.25 с центром в точке -1 и наконец бесчисленное множество меньших областей, которые также касательны к кардиоиде, а по форме напоминают круг. Большинство из них крайне малы.

К каждому из этих компонентов в свою очередь прикреплено бесконечное число меньших, также похожих на круг, а к каждому из меньших опять же присоединен бесконечный набор еще меньших, также имеющих форму круга, областей и т. д. Но и это еще не все! Если мы, выйдя из большой кардиоиды и двигаясь налево, попадем в круг, затем (вновь налево) в следующую область и продолжим движение налево дальше, то при этом будем все время приближаться к так называемой точке Мирберга—Фейгенбаума, которая имеет координату $-1.401\dots$. Отрезок от этой точки до точки -2 также принадлежит M . И на нем есть маленькая, напоминающая кардиоиду, область с заостренной вершиной в точке -1.75 (ее центр находится в точке $-1.754877666\dots$). К этой маленькой кардиоиде прикрепляется точно такое же семейство круглых областей, как и к большой.

Оказывается, что число таких «кардиоидных» компонент бесконечно велико. Кроме того, они встречаются и не только на действительной оси. Так, Б. Мандельброт обнаружил кардиоиду с центром в $-0.1565201668 + 1.032247109i$ и много других. Фактически он доказал, что существует бесконечно много кардиоид. Но все они столь крошечные, что их трудно отличить от пятнышек на компьютерных рисунках (это можно сделать лишь благодаря тому, что они появляются симметрично). Однако если сделать увеличенную картину, то в каждом случае обнаруживаются как сама кардиоиды, так и сопровождающая ее компания из круглых областей.

Но и это еще не все... Все похожие на кардиоиду компоненты связаны с главной кардиоидой с помощью «нитей», насыщенных малыми областями типа кардиоид, каждая из которых сопровождается обычным набором областей. Эти нити разветвляются, образуя очень сложные узоры, детальное исследование которых было проведено с помощью комбинаторных методов. Благодаря этим нитям множество M оказывается связным. Доказательство этого факта отнюдь не очевидно, и до сих пор остается еще много открытых вопросов. Так, например, не удастся доказать, что упомянутые выше нити — это дуги кривых, которые могут быть непрерывно параметризованы.

Множества Жюлиа принадлежат к числу наиболее прекрасных фракталов. Большинство из них *самоподобно*. Взглянув на границу какого-либо множества K_c в микроскоп, мы увидим картину, которая, во-первых, мало зависит от того, в каком месте мы смотрим, а, во-вторых, ничем существенно не отличается от той, которую мы видели и без микроскопа. В то же время множество Мандельброта M не обладает таким свойством самоподобия: да, M действительно содержит бесконечное число малых копий самого себя, и, следовательно, в каком бы месте мы ни взглянули на границу M в микроскоп, мы увидим некоторые из малых копий M . Но эти копии вплетены в сеть нитей, вид которой очень сильно зависит от того, в какой точке смотреть. Более того, если рассматривать две копии сравнимого размера, то отношение расстояния между ними к их размеру будет сильно зависеть не только от точки, в которой мы наблюдаем, но и от увеличения микроскопа.

Главным стимулом в изучении множества Мандельброта служит, по-видимому, желание понять, как форма множества Жюлиа, соответствующего

заданной точке s в M , связана с положением этой точки в M . Один из способов исследования ограниченного множества K комплексных чисел состоит в вычислении потенциала, который порождается этим множеством, и внешних аргументов точек на его поверхности.

Эти понятия взяты из электростатики. Представим себе конденсатор, одной из обкладок которого служит полный металлический цилиндр, на оси которого размещена вторая обкладка — алюминиевый стержень, поперечное сечение которого¹⁾ представляет собой множество K . Потенциал стержня равен нулю, а потенциал цилиндра достаточно высок. При этом в области между цилиндром и стержнем (обкладками конденсатора) возникает электрическое поле. В каждой точке этой области устанавливается определенное значение электрического потенциала. Предположим, что радиус цилиндра велик по сравнению с выбранной единицей длины, а высота цилиндра (равная длине стержня) велика по сравнению с его радиусом. Ограничимся рассмотрением плоскости, перпендикулярной оси цилиндра и делящей ее пополам. Электрическое поле в этой плоскости можно охарактеризовать *эквипотенциальными линиями*, окаймляющими множество K (поперечное сечение стержня), и *силовыми линиями*²⁾, которые я называю внешними лучами этого множества. Каждый внешний луч начинается на границе множества K в точке x и достигает точки y на большой окружности (поперечном сечении внешнего цилиндра), т. е. практически на бесконечном удалении. Положение точки y определяется углом, который мы будем называть *внешним аргументом* точки x относительно K . Если существуют два способа подойти к точке x , находясь вне множества K (например, если K похоже на дерево, а x — это его точка ветвления), то каждому подходу соответствует свой внешний луч, т. е. точка x имеет несколько внешних аргументов. Описание полного набора внешних аргументов в каждой точке, где их несколько, — хороший способ получения информации о форме K : мы узнаем число «веток» в каждой точке ветвления и можем оценить их размеры.

В общем это замечательная программа, но осуществить ее даже для областей простой формы, например многоугольников, часто бывает очень трудно. Но здесь нас ждет фантастический сюрприз: как для множеств Жюлиа, так и для множества Мандельброта потенциал и внешние аргументы можно рассчитать очень легко. Так, потенциал можно достаточно точно найти, если известно *время убегания*, которое определяется следующим образом: пусть радиус R велик, скажем $R = 100$. Рассмотрим множество Жюлиа K_c . Временем убегания точки z_0 , взятой вне K_c , называется первое значение n , для которого z_n (определяется согласно $z_0 = z$ и $z_{n+1} = z_n^2 + c$) имеет модуль больше чем R . Для множества Мандельброта M время убегания определяется с помощью той же последовательности, но для $z_0 = 0$, и поэтому оно зависит только от c .

Если N — время убегания, то потенциал приближенно равен $\ln R/2^N$, и можно найти поправки, позволяющие определить значение потенциала с большей точностью. Это справедливо как для множества Мандельброта, так и для множеств Жюлиа. Большинство картин множеств Жюлиа и деталей множества Мандельброта, которые Вы видели, получено путем вычисления времени убегания для каждой точки экрана и окрашивания этой точки в определенный цвет в соответствии с программой, заложенной в компьютер. Х.-О. Пайтген всегда уделял исключительное внимание выбору программы раскрашивания, которое очень сильно влияет на эстетическое восприятие.

¹⁾ В плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. — *Прим. пер.*

²⁾ Эквипотенциальными называются линии (поверхности), соединяющие точки, в которых потенциал электрического поля одинаков. Силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальным. Вектор напряженности поля в данной точке направлен по касательной к силовой линии. — *Прим. пер.*

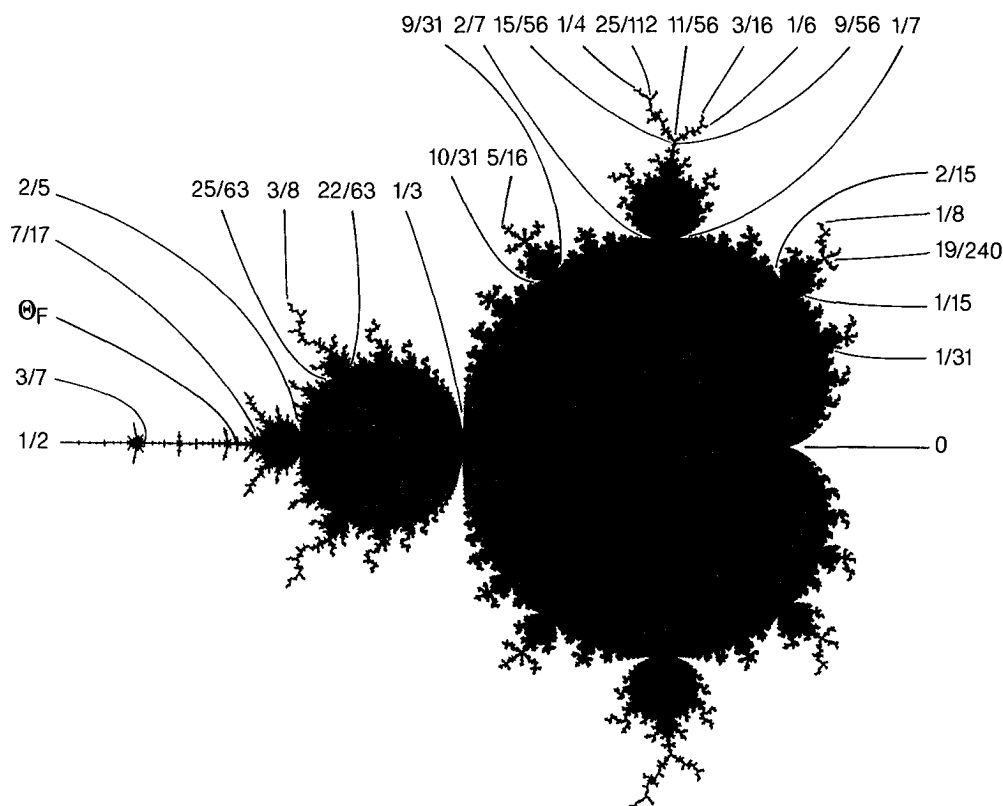


Рис. 68. Внешние аргументы точек в M . Внешний аргумент θ_F точки Фейгенбаума—Мирберга не является рациональным; доказано, что он трансцендентен.

Итак, с помощью потенциала можно создавать восхитительно сложные и прекрасные картины. Однако и вычисление внешних аргументов — совершенно замечательная задача для математика. Это трудно объяснить, не вдаваясь в технические детали, но я попробую. Начну с другого сюрприза: большинство замечательных точек как множеств Жюлиа, так и множеств Мандельброта имеет рациональные внешние аргументы (т. е. дроби с целыми числителем и знаменателем), если принять полный оборот (360°) за единицу измерения (рис. 68). Более того, дроби с четными и дроби с нечетными знаменателями играют совершенно разные роли. Причину этого нетрудно понять для множеств Жюлиа. Каждое такое множество K_c имеет свою динамику, а именно отображение $f_c: z \mapsto z^2 + c$, которое переводит множество K_c в себя. Существуют периодические относительно f_c точки; это означает, что они принадлежат циклу (z_1, z_2, \dots, z_k) , для точек которого $f_c(z_1) = z_2, f_c(z_2) = z_3, \dots, f_c(z_k) = z_1$. Есть также предпериодические точки, которые выходят на цикл после конечного числа шагов. Отображение f_c удваивает внешние аргументы. Следовательно, периодические относительно f_c точки имеют периодические относительно удвоения внешние аргументы, а предпериодические точки — предпериодические относительно удвоения аргументы. Но здесь нужно помнить, что мы имеем дело с углами, и полный оборот не учитывается. Таким образом, удвоение понимается в обычном смысле в случае углов, меньших половины полного оборота, а в случае углов, лежащих между половиной оборота и полным оборотом, необходимо после удвоения в обычном смысле вычесть полный оборот. Периодическими относительно этой операции будут те (и только те) углы, величина которых выражается рациональным числом с нечетным знаменателем. Если

же величина угла выражается рациональным числом с четным знаменателем, то такие (и только такие) углы будут не периодическими, но предпериодическими (это сравнительно простая арифметическая задача).

Если точка действительно чем-то примечательна, скажем точка ветвления или конец «хвоста морского конька», то можно предполагать, что и ее образ будет также примечателен, а поскольку подобных точек не так уж и много, разумно предположить, что она периодична или хотя бы предпериодична. Это в какой-то мере поясняет наше утверждение в случае множеств Жюлиа.

Вернемся теперь к множеству Мандельброта. Как уже отмечалось, его основным элементом является большая кардиоида. Для значений s внутри нее полином f_c имеет неподвижную притягивающую точку. Затем имеется круг с центром в -1 ; для s из этого круга f_c имеет притягивающий цикл 2-го порядка. Есть еще три компонента, в которых f_c имеет притягивающий цикл 3-го порядка — два из них прикреплены к кардиоиде (самые большие, если не считать круга с периодом 2) и еще один — на действительной оси с заостренной вершиной в точке -1.75 . Еще имеется 6 компонент с периодом 4, 15 — с периодом 5, 27 — с периодом 6, 63 — с периодом 7, 120 — с периодом 8, 252 — с периодом 9 и т. д. В каждом из этих компонентов есть одно значение s (назовем его *центром*), такое, что точка 0 является периодической для f_c . А на границе каждого из них есть точка, которую мы будем называть *корнем*. Это либо точка прикрепления данного компонента к большему, либо острие (заостренная вершина), через которое проходит нить.

Помимо центров и корней компонентов, для которых существуют притягивающие циклы, имеются и другие замечательные точки, принадлежащие множеству Мандельброта. Они называются *точками Мисюревича*. Это такие значения s , для которых 0 — это не периодическая, но предпериодическая точка относительно f_c . Обычно это точки ветвления или концы нитей.

Вот что мы можем сказать сейчас о внешних аргументах точек из M : центры компонентов внешних аргументов не имеют, так как это внутренние точки. Корень каждого компонента имеет два внешних аргумента — рациональные числа с нечетным знаменателем. Каждая точка Мисюревича имеет один или несколько внешних аргументов (один, если это конец нити, три или больше, если это точка ветвления) — рациональные числа с четным знаменателем.

Необходимо разъяснить, как вычислять внешние аргументы, и как использовать полученную информацию. Взглянув на множество Жюлиа и поняв динамику на нем (один компонент переходит на другой, больший дважды обертывается вокруг меньшего и т. д.), очень легко вычислить внешний угол для любой точки. Отображение f_c имеет две неподвижные точки; обозначим левую α , а правую — β . Внешний аргумент точки β равен 0, а точка α имеет обычно несколько внешних аргументов. Внешний аргумент точки $-\beta$ (симметричной точке β относительно 0) равен $1/2$. Проведем дугу, которая соединяет точки $-\beta$ и β , не покидая K_c , и назовем ее *осью* множества K_c . Выберем точку x на границе K_c . Если существует несколько способов достичь точки x , находясь вне K_c (таких способов два, если x лежит на нити, и больше, если x — точка ветвления), нужно выбрать один из них. В результате (с учетом сделанного выбора) в каждую точку x множества K_c попадает один внешний луч. Сформулируем способ вычисления ее аргумента. Заметим вначале, что если точка x (или по крайней мере выбранный подход к ней) находится выше оси, то аргумент, очевидно, лежит между 0 и $1/2$, а если x лежит ниже оси, то ее аргумент лежит между $1/2$ и 1. Далее рассмотрим, например, ситуацию, когда аргумент лежит между 0 и $1/2$, и выясним, лежит ли он между 0 и $1/4$ или же между $1/4$ и $1/2$. Для этого применим отображение f_c , которое удваивает аргументы, и посмотрим, куда перейдет точка x вместе с выбранным подходом к ней. Если она

оказывается выше оси, то это означает, что двойной аргумент лежит между 0 и $1/2$, т. е. сам аргумент лежит между 0 и $1/4$. Соответственно если x окажется ниже оси, то ее аргумент находится между $1/4$ и $1/2$. Сделав еще один шаг, мы выясним, какому из отрезков длины $1/8$ принадлежит аргумент. Таким образом, следуя вдоль траектории точки x (вместе с подходом к ней) и записывая 0 или 1 каждый раз, когда она оказывается соответственно выше или ниже оси, мы получим последовательность цифр после десятичной точки, которая представляет собой искомый аргумент, записанный в *двоичной системе счисления*. Если точка x периодическая или предпериодическая, то последовательность этих цифр также становится периодической, как и должно быть для рационального числа (легко проверить самостоятельно, что двоичное представление дробей с нечетным знаменателем является периодическим сразу же после десятичной точки).

Заметим, что провести эти вычисления можно, даже не зная детальной структуры множества Жюлиа. Необходима лишь информация комбинаторного характера о том, как связаны между собой разные части этого множества. Хаббарду удалось собрать всю информацию в одну диаграмму, которую я назвал деревом Хаббарда. И теперь, когда речь заходит о конкретной точке из M , мне гораздо удобнее нарисовать ее дерево Хаббарда, нежели задать ее координаты.

Внешние аргументы точек множества Мандельброта вычисляются без труда, но почему это удается сделать — совершенно непонятно, ведь у этого множества нет динамики, и оно по сути является контрольным. Особенно просты вычисления для точек *Мисюревича*: пусть c — точка Мисюревича, тогда внешние аргументы c в M совпадают с внешними аргументами этой точки в K_c (c принадлежит K_c как образ 0). Здесь невозможно объяснить, почему так происходит, но мы можем связать это с явлением, которое ранее неоднократно наблюдалось, а недавно было обосновано Тан Лей (молодой китайской студенткой, которая учится во Франции)¹⁾. Суть этого явления в том, что если рассматривать множество M через микроскоп, сфокусированный на точке c , то увиденная картина будет весьма сильно напоминать ту, которую можно увидеть, если взглянуть через тот же микроскоп на множество Жюлиа K_c и сфокусировать его вновь на точке c . Это подобие становится тем более впечатляющим (исключая изменения масштаба), чем больше увеличение микроскопа. Так как каждое из множеств Жюлиа самоподобно, хотя друг от друга они могут сильно отличаться, то неудивительно, что различные части множества Мандельброта выглядят совершенно по-разному.

Для корней компонентов множества M ситуация несколько сложнее, но и здесь подсчет внешних аргументов такой точки c из M сводится к вычислению внешних аргументов некоторой точки в K_c . Это уже не сама точка c , так как в этом случае она лежит внутри K_c и не имеет внешних аргументов, а некоторая периодическая точка, которая в определенном смысле заменяет c . В любом случае процесс все тот же: вы вспахиваете динамическую плоскость (плоскость множеств Жюлиа), чтобы собрать урожай в плоскости параметров (плоскость множества Мандельброта).

Вычислив внешние аргументы большого числа точек, принадлежащих заданному множеству Жюлиа (множеству Мандельброта), можно использовать полученную информацию для описания самого множества. Для этого нужно составить списки пар (троек) внешних аргументов, соответствующих одной и той же точке. Предположим, например, что из одной и той же точки некоторого множества Жюлиа K_c выходят три внешних луча с аргументами $1/7$, $2/7$ и $4/7$. Отсюда сразу же следует, что K_c состоит из трех частей, соединяющихся в этой точке. Одна содержит точки с аргументами от $1/7$ до $2/7$, вторая — с аргументами от $2/7$ до $4/7$, а третья — с аргу-

¹⁾ См. специальный разд. 6. — *Прим. ред.*

ментами от $4/7$ до 1 и от 0 до $1/7$. Боле того, точка, в которой соединяются эти три области (с внешними аргументами $1/7$, $2/7$ и $4/7$), обязательно неподвижная точка α многочлена (отображения). Действительно, образ точки с аргументом $1/7$ — это точка с аргументом $2/7$. Если они совпадают, то данная точка действительно неподвижна.

Собрав всю информацию такого рода, можно построить модель множества K_c . Делается это так: возьмем вначале круг D , точки границы которого характеризуются углами t . Каждый раз, учитывая пары чисел (t, t') , где t и t' — два аргумента одной точки в K_c , мы должны деформировать круг D так, чтобы соответствующие точки на его границе совпали. А в случае, когда одной точке соответствуют три аргумента, нужно сжать в точку соответствующий треугольник. Модель, построенная в результате последовательного применения этой процедуры (деформированный круг), должна, по-видимому, иметь ту же форму, что и множество Жюлиа K_c , которое мы хотим описать. Существует теорема Каратеодори (математик начала нашего века), устанавливающая, что это действительно так, если K_c — *локально связное множество*. Канторова пыль, например, не является локальной связной в отличие от большинства множеств Жюлиа. В то же время существуют такие связные множества Жюлиа, которые не являются локально связными. Есть и такие множества, которые скорее всего локально связны, но мы не можем привести соответствующее математическое доказательство. Пример такого множества представлен на фото 25. Для этого конкретного множества Жюлиа Мантон, Науенберг и Майк Вайдом провели численные эксперименты с тем, чтобы проверить локальную связность и некоторые другие интересные свойства. Но математически точного утверждения им получить не удалось. (К сожалению, данное множество Жюлиа представляет собой исключение из правила, которое было сформулировано мной ранее: начало координат, являющееся также и центром симметрии, безусловно, замечательная точка, однако ее внешние аргументы, которые можно вычислить, не являются рациональными.)

Аналогичный способ реконструкции множества по имеющейся информации о внешних аргументах точек можно использовать и для множества Мандельброта. Используя деревья Хаббарда, мы можем вычислить внешние аргументы большого числа точек. Затем нужно взять круг, граница которого проградуирована от 0 до 1 , и последовательно сжимать его, соединяя вместе $1/7$ и $2/7$, $10/63$ и $17/63$, три точки $9/56$, $11/56$ и $15/56$ и т. д. Продолжение этого процесса буквально «съедает» некоторые части круга, превращая их в нити, насыщенные капельками. А в результате мы получаем модель множества Мандельброта (рис. 69), которую Терстон назвал «абстрактным множеством Мандельброта». При этом возникает естественный вопрос, насколько похожа эта модель на настоящее множество Мандельброта, деталями которого читатель уже имел возможность насладиться? Для математика вопрос звучит так: является ли множество Мандельброта локально связным? Мы располагаем множеством численных данных, свидетельствующих в пользу положительного ответа, но до сих пор, т. е. до того дня, когда я печатаю это предложение, строгого доказательства не существует. Такая ситуация сильно раздражает, ибо эту модель мы знаем настолько хорошо, что, ответив на этот вопрос, сможем заявить: «Мы знаем, по сути, все, что мы хотим знать о множестве Мандельброта». Раздражает... или вдохновляет; в конце концов существование математиков зависит в большей степени от наличия проблем, нежели от их решений.

Есть и другой открытый вопрос, связанный с множеством Мандельброта, который ставит в тупик всех математиков, работающих в этой области, и на который никому еще не удалось дать ответ. Известно, что любое значение c , для которого многочлен $f_c: z \mapsto z^2 + c$ имеет притягивающий цикл, лежит внутри множества Мандельброта. Иными словами, это значение принадлежит M , но не лежит на его границе. Вопрос касается обратного

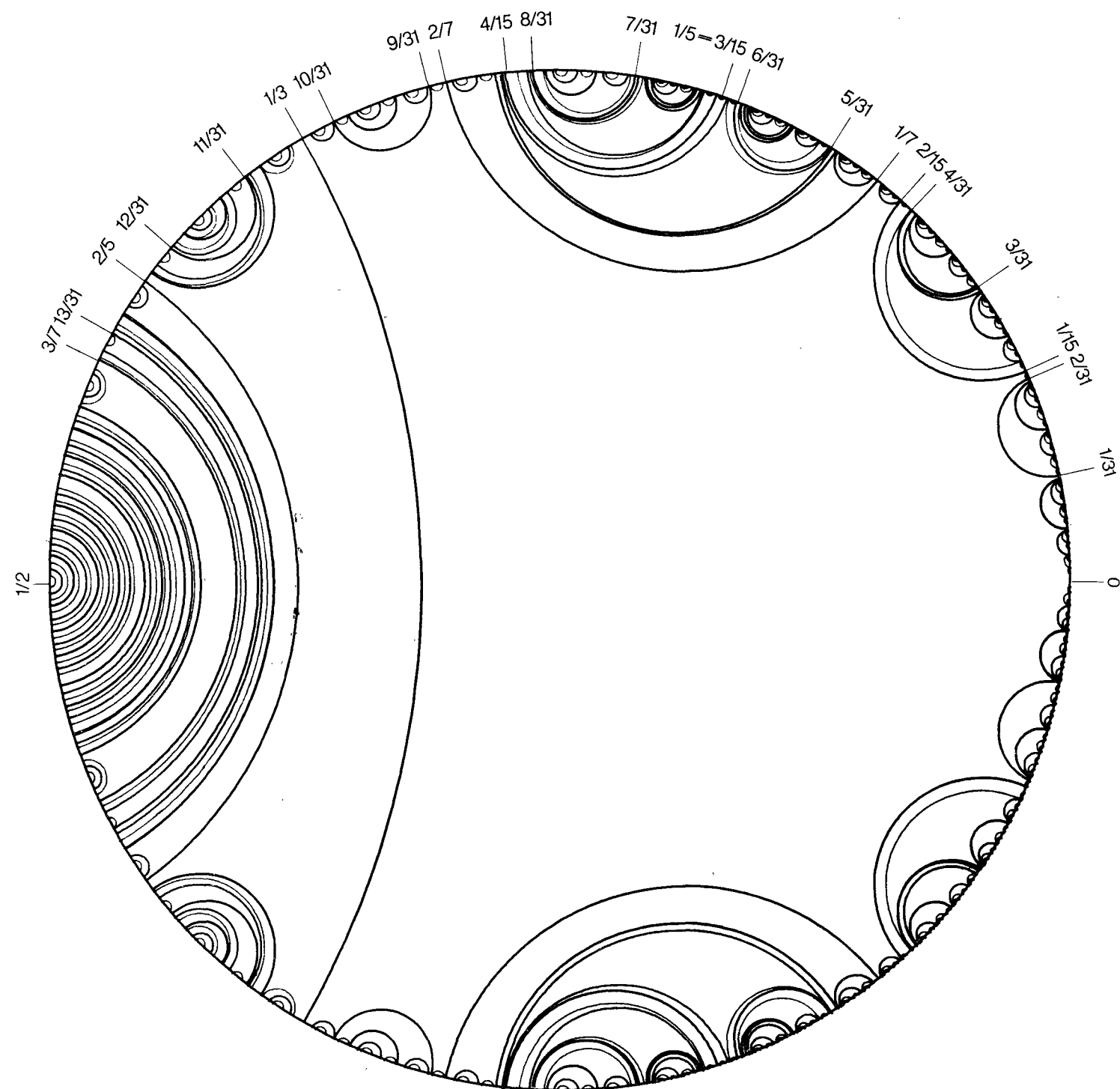


Рис. 69. Модель множества Мандельброта (Цезарь Дуади, 1982).

утверждения: является ли любая внутренняя точка M тем значением s при котором f_s имеет притягивающий цикл? Чтобы сформулировать вопрос по-другому, заметим, что мы описали компоненты M (компоненты внутренней M , если быть более точными), которые отвечают наличию притягивающего цикла в z -плоскости. Наличие таких компонентов легко понять и их легко классифицировать: мы точно знаем, например, сколько компонентов соответствует циклам каждого порядка и т. п. Но кроме этих компонентов, которые по какой-то неясной причине названы гиперболическими, существуют ли еще какие-то *загадочные (скрытые) компоненты*, соответствующие не притягивающему циклу, а какому-то другому явлению? Я уверен, что скрытых компонентов не существует. Их никто и никогда не видел на тысячах имеющихся изображений деталей множества Мандельброта, однако строгое доказательство отсутствует и здесь. Всегда ведь можно сказать, что компьютерные рисунки трудно интерпретировать, или что они изучались людьми, которые в скрытые компоненты не верили. Поэтому мы не можем утверждать, что отсутствие таких компонентов доказано «вне всяких (разумных) сомнений».

Можно доказать, что модель M , полученная путем деформаций круга, скрытых компонентов не имеет. Таким образом, мы находимся в довольно курьезной ситуации: есть два предположения — локальная связность M и отсутствие загадочных компонентов, которые не доказаны, но взаимосвязь между ними тем не менее установлена. Стало быть если завтра кто-нибудь докажет, что M — локально связное множество, то тем самым он (или она) докажет и отсутствие скрытых компонентов. В обратном направлении это несправедливо, так как одно из этих предположений сильнее другого.

Возникает вопрос: имеет ли смысл исследовать все эти проблемы для конкретного, очень специфического семейства многочленов? Не придется ли начинать все с самого начала, когда нужно будет исследовать итерации функций какого-нибудь другого семейства? Ответ на это дает свойство, которое математики называют *структурной устойчивостью* (физики предпочитают говорить об *универсальности*).

Начнем с удивительного примера. На фото 2 изображена прекрасная копия множества Мандельброта на фоне зеленых и оранжевых зон с коричневыми, похожими на деревья деталями. Однако появление этой картины связано с проблемой, не имеющей ничего общего с итерациями многочленов второй степени, а именно с изучением рациональной функции 4-й степени, возникающей при исследовании природы магнитных фазовых переходов. Как видно из рис. 50, подобные структуры возникают и при исследовании метода Ньютона для решения алгебраических уравнений 3-й степени.

Метод Ньютона представляет собой способ последовательного уточнения приближенного решения уравнения. Идея, которая восходит еще к Ньютону (XVII в.), связана с очень простым вычислением. Предположим, что нам известно приближенное решение x_0 уравнения $f(x) = 0$, близкое к настоящему решению x , которое нам неизвестно. Можно с большой точностью вычислить малое число $f(x_0)$, а также значение производной $f'(x_0)$. Поскольку x и x_0 близки, то, согласно определению производной, $f'(x_0)$ близка к $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (это выражение равно $-f(x_0)/(x - x_0)$, так как $f(x) = 0$). Следова-

тельно, мы получим хорошее приближение для искомой поправки $x - x_0$, если возьмем $-f(x_0)/f'(x_0)$, причем эту величину можно рассчитать с большой точностью. Итак, улучшенное приближенное решение имеет вид $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. Результатом повторных применений (итераций) этой процедуры является последовательность чисел x_n , которая исключительно быстро сходится к настоящему решению. Грубо говоря, число верных десятичных знаков удваивается на каждом шаге. Этот метод не менее эффективен и для комплексных чисел.

Итак, если стартовать из точки, близкой к решению уравнения, мы полу-

чим последовательность, сходящуюся к этому решению. Правомерен вопрос: что будет происходить при итерациях метода Ньютона $z \mapsto z - f(z)/f'(z)$, если начальная точка z_0 выбрана в плоскости комплексных чисел произвольно? Этот вопрос в 1977 году был задан *Хаббарду* его студентами — первокурсниками Университета в Орсей. Подумав несколько минут, он доказал, что для уравнений второй степени данная последовательность всегда сходится к ближайшему корню, за исключением случая, когда начальная точка z_0 равноудалена от двух корней, т. е. лежит в точности на прямой, проведенной через середину отрезка, соединяющего два решения, перпендикулярно ему. В этом случае последовательность z_n все время остается на этой прямой, совершая хаотическое движение. Затем он сказал: «Что будет в случае, скажем, уравнений 3-й степени, ответить сложнее. Я подумаю и расскажу вам на следующей неделе». Такой диалог, по-видимому, происходил во многих местах, поскольку это очень естественный вопрос. Действительно, в XIX в. тот же самый вопрос задал себе *Кэли*. Он нашел ответ для уравнений 2-й степени и анонсировал случай многочленов более высокой степени как «предстоящую публикацию», но она так никогда и не появилась.

Но за это время появились компьютеры, и хотя *Хаббарду* и его студентам так ничего и не удалось получить за неделю, зато до конца семестра они успели получить несколько экспериментальных результатов. С этого и началось увлечение *Хаббарда* «комплексной динамикой» (и мое тоже — он меня заразил).

Ситуация в самом деле очень сложная. Некоторые точки сразу же притягиваются одним из корней, некоторые скачут туда-сюда, по-видимому, случайным образом, до тех пор, пока не попадут в область непосредственного притяжения одного из корней. Можно доказать, что некоторые точки движутся хаотически всегда, но их мало. Иногда происходит нечто другое: *точка притягивается к циклу, который не связан с корнем многочлена*. Заметим, что без помощи компьютера можно лишь перечислить все возможные варианты, но нельзя обнаружить в них какую бы то ни было систему. А ведь здесь есть вопросы, которые можно задать компьютеру.

Рассмотрим уравнение 3-й степени и обозначим через α , β , и γ его решения. Экран компьютера изображает окно в комплексной плоскости. Сделаем так, чтобы компьютер окрашивал данное место на экране в красный цвет, если соответствующая точка в конце концов притягивается к α , в синий, если — к β , в зеленый, если — к γ и в желтый, если после, скажем, 1000 итераций метода Ньютона не обнаружилось притяжение точки ни к одному из корней. Нужно иметь достаточно мощный компьютер, чтобы получить читаемые рисунки, но, когда удастся добиться хорошего качества, некоторые из этих рисунков оказываются исключительно красивыми. Существуют хорошие (по отношению к методу Ньютона) уравнения, для которых почти все начальные точки ведут к какому-либо корню, и желтый цвет почти (или совсем) не виден. Но есть и плохие уравнения, для которых метод Ньютона приводит к появлению притягивающего цикла. При этом появляются желтые фигуры с внутренними точками. И поразительная вещь: *эти фигуры воспроизводят множества Жюлиа для многочленов второй степени!*

Покажем, как в этой ситуации появляются копии множества *Мандельброта*: возьмем семейство уравнений третьей степени, заданных многочленом, зависящим от параметра. Если теперь окрасить, скажем, в черный цвет те значения параметров, которые дают хорошие уравнения (относительно метода Ньютона), а в желтый — те, которые дают плохие уравнения, то в результате мы получим разбросанные повсюду маленькие желтые копии множества *Мандельброта*. Это нечто магическое! Ведь нет почти никакой связи между итерациями многочлена 2-й степени и поиском корней многочлена 3-й степени методом Ньютона! Конечно, метод Ньютона — это

итеративный процесс, но ведь мы итерируем отображение

$$F_{\lambda}: z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{2a(\lambda)z^3 + b(\lambda)z^2 - d(\lambda)}{3a(\lambda)z^2 + 2b(\lambda)z + c(\lambda)},$$

гораздо более сложное чем $z \mapsto z^2 + c$, из которого было получено множество Мандельброта.

Но я должен быть честным: невозможно для каждой точки (ячейки) экрана (которая соответствует определенному значению параметра) выяснить, хорошим или плохим является соответствующее уравнение. Для этого нужно проверить сотни тысяч значений для начальной точки. А на это нужно несколько минут работы достаточно большого компьютера для каждой точки экрана и больше года для всего экрана! Но оказывается, что центр тяжести корней, положение которого легко вычислить (можно даже так выбрать семейство уравнений, что он всегда будет находиться в точке 0), может служить хорошей контрольной точкой: если она стремится к корню, то многочлен хороший, если же после большого числа итераций она не подходит близко ни к одному из корней, то велика вероятность того, что многочлен плохой. Таким образом, для каждого значения параметра и соответствующей ему точки экрана мы фактически задаем компьютеру следующий вопрос: сходится ли метод Ньютона к какому-либо корню, если мы стартуем из контрольной точки? Если да, то можно спросить еще, к какому из корней он сходится, и окрасить соответствующий участок экрана в красный, синий или зеленый цвет в зависимости от ответа. Можно также спросить, как долго длится процесс приближения контрольной точки к корню, и в соответствии с ответом сделать цвет темнее или светлее. Действуя таким образом, мы получим изображение весьма насыщенное информацией.

Происходит следующее: в некоторой области сложная функция F_{λ} , которую мы итерируем методом Ньютона, или же ее итерация конечного порядка отдаленно напоминает (после соответствующего изменения масштаба) простую функцию $f_c: z \mapsto z^2 + c$ (между параметрами λ и c существует определенное соответствие). Значения c , которые принадлежат множеству Мандельброта, характеризуются тем, что точка 0 захватывается некоторой ограниченной областью. Это соответствует захвату контрольной точки в методе Ньютона некоторой областью, находясь в которой, точка не может приблизиться к корням уравнения. Итак, здесь мы имеем чудо структурной устойчивости: отдаленное сходство f_c и F_{λ} порождает удивительное сходство множеств, определенных как в плоскости значений переменной (множества Жюлиа), так и в плоскости значений параметра (множества Мандельброта). Это сходство (подобие) подразумевает некоторое изменение масштаба и допускает определенное (очень слабое) искажение, но сохраняет при этом все те сложные комбинаторные черты, которые были обнаружены при вычислении внешних аргументов.

То же самое может быть высказано и в более общем виде. Структурная устойчивость множества Мандельброта означает следующее: если данное семейство алгебраических функций (они могут быть достаточно сложными; для специалистов укажем важное условие — рассматриваемое семейство должно быть голоморфным) похоже в некоторой области на семейство многочленов ($z \mapsto z^2 + c$), то множество, порожденное этим семейством функций, имеет ту же форму, что и множество Мандельброта, определенное с помощью стандартного семейства многочленов. Подчеркнем следующее: можно было бы ожидать, что каждая из деталей множества Мандельброта характеризуется «областью допустимых отличий» и что эти области становятся тем меньше, чем мельче детали, которые мы рассматриваем, стремясь к нулю при переходе к мельчайшим компонентам множества. Но это не так. Для того чтобы все комбинаторные детали множества Мандельброта сохранились, достаточно (после соответствующего изменения масштаба)

таба), чтобы функция, которую мы итерируем, отличалась от $z^2 + c$ меньше чем на 1 для любых значений z , и чтобы c не превышало по модулю 4.

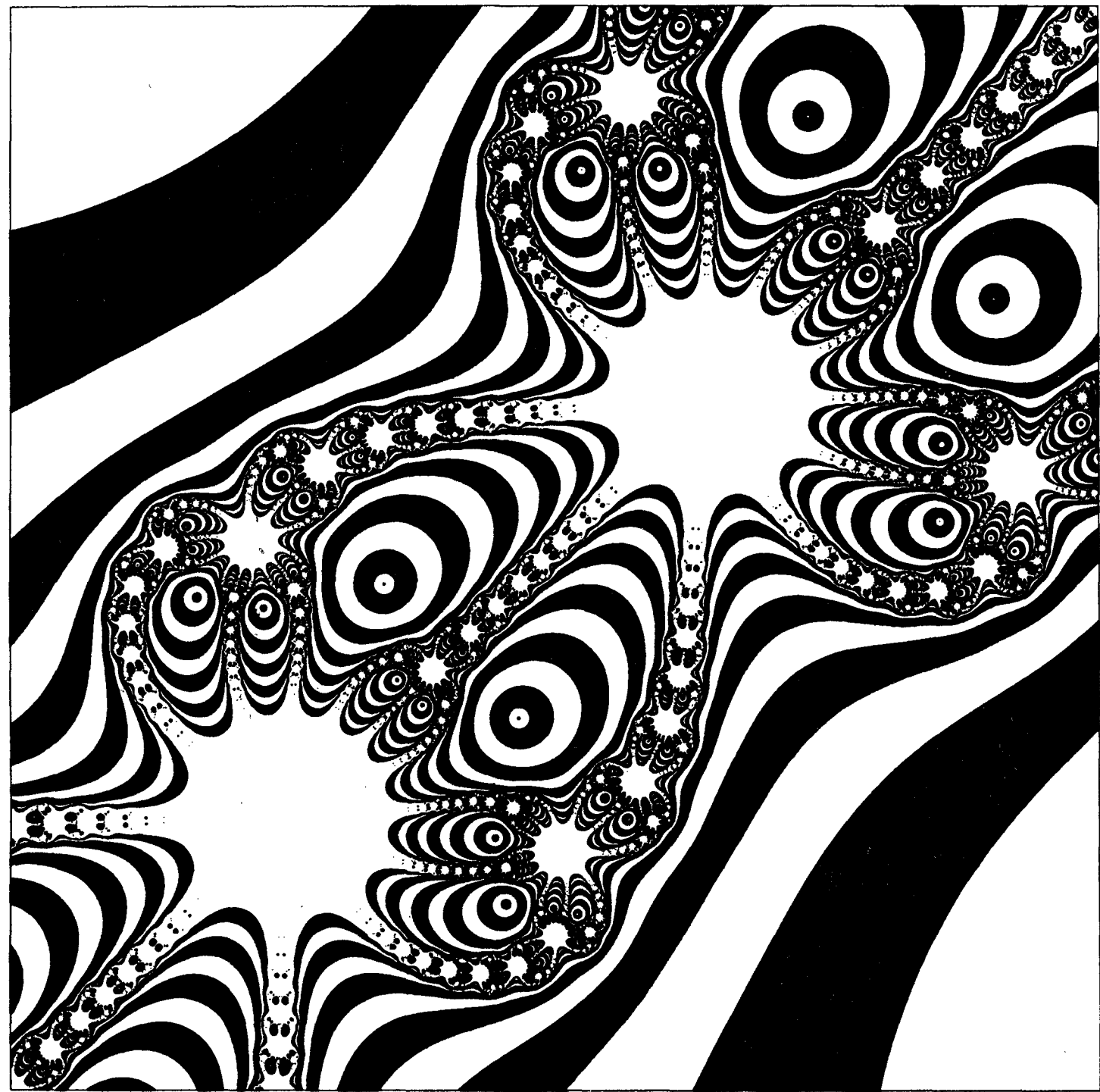
Именно структурная устойчивость множества Мандельброта делает его столь важным объектом изучения. Проблемы, связанные с итерациями, возникают при изучении эволюции любой системы в любой области знаний, от астрономии до биологии или экономики, так что в принципе может возникнуть необходимость итерировать любую функцию. А устоявшийся опыт математиков говорит, что если возникают проблемы с действительными числами, то всегда многообещающим представляется продолжение рассматриваемых функций на множество комплексных чисел. Правда, случаи, когда нужно итерировать именно многочлен 2-й степени, встречаются редко, но зато ситуацию, когда итерируемая функция (или одна из ее итераций конечного порядка) отдаленно напоминает многочлен второй степени, можно рассматривать как общий случай. И этот факт наряду со структурной устойчивостью объясняет следующее, часто наблюдаемое явление: возьмем любую динамическую систему, которую можно смоделировать итерациями некоторой, зависящей от параметра функции в комплексной плоскости и классифицируем значения параметра в соответствии с любым динамическим свойством системы, которое только может прийти в голову. Тогда достаточно велика вероятность увидеть в плоскости значений параметра маленькие копии множества Мандельброта.

Это свойство имеет место и для самого множества Мандельброта. Итерация высокого порядка многочлена второй степени, представляющая собой многочлен весьма высокой степени 2^n , иногда бывает похожей на многочлен 2-й степени, если ограничиться рассмотрением подходящей области. Именно благодаря этому в M появляются маленькие копии самого себя.

Я бы хотел вернуться к фото 2 и сделать короткое замечание. На этой картине видны зеленые языки различных размеров, касающиеся копии множества Мандельброта, причем все в разных точках. Это те точки исходного множества Мандельброта, внешние аргументы которых представляют собой дроби со знаменателем вида 2^k , где $k = 1, 2, \dots$, — натуральное число (половинки, четвертушки и осьмушки соответствуют большим языкам, а более высокие степени 2 — меньшим). До других точек на границе копии множества M можно добраться, если отыскать путь через разветвленную структуру, которая лежит между языками, поворачивая влево или вправо при каждом разветвлении. И если закодировать проделанный путь, учитывая все повороты (пишем 0 в случае левого поворота и 1 в случае правого), то в результате получим *внешние аргументы* точки, к которой мы подошли в виде последовательности 0 и 1, т. е. записанные в двоичной форме (более точно, аргументы соответствующей точки в настоящем M). Все это, по-видимому, служит иллюстрацией того, что внешние аргументы действительно существуют «в природе», а не являются просто математическим трюком или же полезной, но искусственной конструкцией.

Наконец, я хотел бы порассуждать о количестве информации. Глядя на одну из этих картин и восхищаясь ее внутренним ритмом, любой из нас может задаться вопросом: какова же информационная содержательность такой картины? Если при этом иметь в виду вопрос: сколь длинным должен быть текст, чтобы это описать, то, очевидно, содержание такой картины будет огромным. Но если иметь в виду программы, которые порождают эти рисунки, то они весьма коротки. Математическая часть занимает 3 или 4 строки, а большая часть программы служит для «кадрирования» и подбора цвета. Можно считать, что итерационный процесс, определяемый формулой $z_{n+1} = z_n^2 + c$, — это необычайно эффективный способ *расшифровки информации*, содержащейся в исходных данных (значение c для множества Жюлиа и окно для детали множества Мандельброта), которые служат ключом. Подобное явление расшифровки информации поражает нас и в биологии: расшифровка всей генетической информации ДНК человека

(или другого позвоночного) заняла бы около ста страниц. Сравните это с трактатами по анатомии, добавьте к ним еще и книги по эндокринологии и формам поведения! Или представьте себе ученых, столкнувшихся с набором множеств Жюлиа, но не знающих, откуда они взялись. Не станут ли они поступать так же, как и зоологи XIX в., — определять царства, классы, отряды, роды, давать описания специфических свойств, определяющих каждую таксономическую единицу и т. д.? Поясню. Я вовсе не утверждаю, что с помощью множеств Жюлиа можно создать модель какого-либо биологического явления. Я хочу только сказать, что они представляют собой поразительный пример того, как очень простая динамическая система может развить незначительную информацию, содержащуюся в ключе, и породить разнообразные высокоорганизованные структуры.



Свобода, наука и эстетика

ГЕРТ АЙЛЕНБЕРГЕР

Пожалуй, это самый оригинальный из поводов, по которым меня просили высказать свое суждение. Весьма необычным для ученых, занимающихся естественными науками, представляется то упорство, с каким они пытаются донести свои результаты и понимание до широкой публики. А форма, которую они избрали, еще необычнее! Абстрактному сухому и многословному изложению сути проблемы они предпочли рисунки; это соединение математики и искусства обладает непосредственным воздействием на зрителя и вызывает всеобщее восхищение. Хотя я и не могу внести свой непосредственный вклад в эту специфическую область, я нахожу содержание этой книги вдохновляющим. Мне бы хотелось высказать несколько своих философских размышлений о том, каково может быть значение этих работ для понимания Вселенной с физической точки зрения.

Занятия естественными науками можно сравнить со строительством монументального здания, скажем Кёльнского собора. Мы, ученые, строим такое здание собора — Научную картину Вселенной. И хотя результаты наших усилий, как и Кёльнский собор, находят практическое применение — цель нашей работы, как она была бы выражена в средние века, — прославление Господа! И только с помыслами, подобными этому, люди могут построить собор, а не фабрику. И точно так же, как неизвестны сегодня имена строителей средневекового собора (ибо значение имеет лишь дело их рук, но не они сами), так и вклад большинства ученых остается анонимным. Собор — это общее дело, а ученые — подмастерья мощной бригады строителей или, рассматривая их деятельность во всемирном масштабе, они — братья всемирного ордена, в котором личные амбиции уходят на второй план перед великим общим делом.

Впрочем, есть и существенная разница между научной деятельностью и строительством настоящего собора: собор строится по чертежам, а развитие науки нельзя спланировать заранее! Всегда можно ожидать сюрпризов! Так, например, чрезвычайно неожиданными для физика (хотя, возможно, не для математика) оказались приведенные здесь рисунки. Их нельзя рассматривать только как результат тривиальных компьютерных игр, приятных, но не имеющих более глубокого смысла. Напротив, математические и физические идеи, с помощью которых возникают такие изображения, — это, по моему разумению, самое волнующее научное открытие со времени появления 60 лет назад квантовой механики.

Эти идеи должны вновь революционизировать научную картину мира. Наш собор будет полностью преобразен — утратив готическую холодность, он приобретет причудливые барочные очертания!

Старая картина мира, кредо ученого, была сформулирована французским математиком и астрономом *Лапласом* около 200 лет назад. Ее можно изложить так:

«Если представить себе сознание, достаточно мощное, чтобы точно знать положения и скорости всех объектов во Вселенной в настоящий момент времени, а также все силы, то для этого сознания не будет существовать никаких секретов. Оно сможет вычислить абсолютно все о прошлом и будущем, исходя из законов причины и следствия».

В таком детерминистском мире не существовало бы ни свободы, ни случайности. Действия банковского грабителя и произведения художника были бы предопределены заранее.

Ученые фактически никогда не принимали эту, несколько отдающую

кальвинизмом, предопределенность повседневной жизни. Но в своей научной работе им очень трудно было избавиться от этого детерминизма, поскольку именно он порождал утверждение, что любое наблюдаемое явление имеет (хотя бы в принципе) научное объяснение, а от этой аксиомы ни один ученый легко не откажется! Даже великие революционные открытия первых десятилетий нашего века в физике, связанные с именами Планка, Эйнштейна и Гейзенберга, лишь перенесли этот конфликт на более высокий математический уровень, не решив его окончательно.

Исследователи, впрочем, всегда были весьма либеральны, интерпретируя кредо Лапласа. Даже наиболее тщательно поставленный эксперимент никогда в конце концов не бывает *полностью* изолирован от влияния окружающей среды, а состояние системы ни в один момент времени не может быть известным *точно*. Абсолютная (математическая) точность, о которой говорил Лаплас, физически недостижима — небольшие неточности будут всегда, и это принципиальный момент.

Но вот во что ученые действительно верили, так это в то, что *почти одинаковые причины* будут давать *почти одинаковые* следствия, причем как в природе, так и в хорошо поставленном эксперименте. Это *чаще всего* именно так и происходит, особенно для коротких временных отрезков, в противном случае было бы невозможно установить какой-либо закон природы или же построить реально работающую машину.

Но это весьма, казалось бы, правдоподобное предположение оказывается справедливым не всегда; более того, оно неверно для больших промежутков времени даже *в случае нормального (типичного)* течения природных процессов! В этом, если сказать кратко, смысл захватывающего прорыва, осуществленного при исследовании так называемых динамических систем.

Произведения искусства, содержащиеся в этой книге, можно интерпретировать как красочные изображения систем такого типа, на которых показаны движения, т. е. изменения со временем, некоторых математических величин, которым могут соответствовать определенные физические (экспериментально измеримые) величины. Эти изменения происходят в соответствии с простыми и ясными правилами, похожими на законы природы. Тонкая структура этих узоров выражает тот факт, что мельчайшие отклонения в начале движения могут привести через определенное время к гигантским различиям. Другими словами, самые незначительные причины вызывают через некоторое время огромные последствия. Конечно же, такое иногда встречается и в нашей повседневной жизни, а исследования динамических систем показали, что для природных процессов это *типичное* явление.

Но какое это имеет отношение к свободе, т. е. к возможности в принципе принимать не *предопределенные заранее решения*? Ведь на такой возможности зиждется наше представление о себе, как о разумно действующих существах, а не автоматах. Начнем с того факта, что мыслительным процессам, протекающим в нашем мозгу, и, в частности, сознанию соответствуют электрофизиологические процессы в нервных клетках и что сознание — это фактически внутреннее отражение некоторых из этих процессов. Если в соответствии с описанным выше грубым физическим детерминизмом наши действия могут быть предугаданы, исходя из приблизительно известного начального состояния нервных клеток, то и невозможность не *предопределенной заранее воли* может, хотя бы в принципе, быть установлена эмпирически. Но сейчас уже стало известно, что пустяковая, неизмеримо малая разница в начальных состояниях может привести к совершенно разным конечным состояниям (т. е. решениям), и физика уже не позволяет эмпирически установить невозможность свободной воли.

Однако мы все же не смогли избавиться от антиномии Канта о невозможности свободы. Нам удалось опровергнуть грубый детерминизм реальной физики, но отнюдь не детерминизм Лапласа. Последний исчезает, если

проследить причинную цепочку назад — к причинам, различие между которыми становится все менее заметным. Исчезновение детерминизма происходит, когда возникают онтологические вопросы теории познания о *пределах применимости математики* как средства адекватного отражения реальности. Я верю, что такие пределы существуют. Но прежде чем приступить к обоснованию своей позиции, мне бы хотелось сделать небольшое отступление.

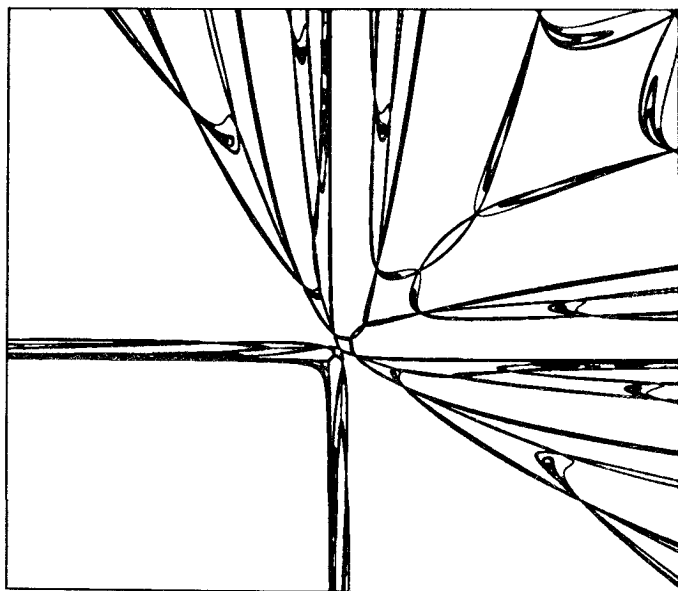
Огромные успехи точных математических наук привели к появлению среди ученых, особенно среди физиков, веры в то, что все реально наблюдаемое в их опытах подчиняется законам математики вплоть до мельчайших деталей. Установление математических законов, которым подчиняется физическая реальность, было одним из самых поразительных чудесных открытий, сделанных человечеством. Ведь математика не основана на эксперименте, а порождена человеческим разумом, как и Афина, рожденная из головы Зевса.

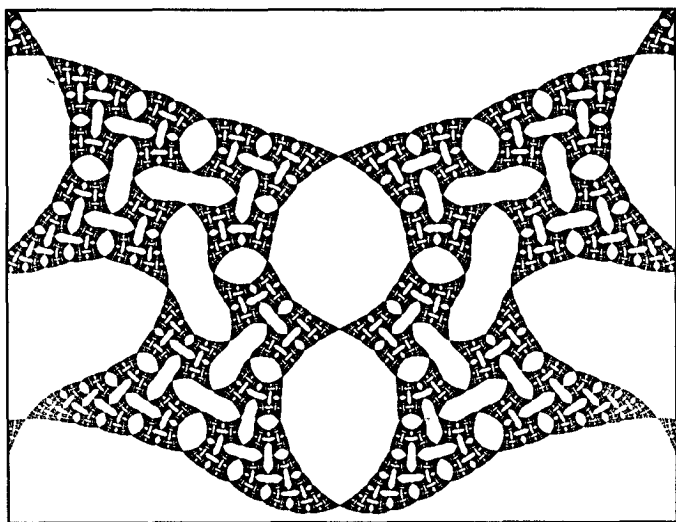
Математическое познание выводимо, т. е. его основные элементы связаны между собой, но это познание *априори*. Когда же физик использует свои знания для предсказаний и на основе нескольких экспериментов, проведенных в конкретное время и в конкретном месте, и подходящей теории пытается объяснить явления природы, происходящие в совершенно другом месте и в совершенно другое время, и такие предсказания сбываются, то это граничит с чудом. Физик при этом лишь с удовлетворением заключает, что, по-видимому, теория верна. Но почему, собственно говоря, реально существующий мир должен подчиняться теории, математической структуре?

Кант дал на этот вопрос остроумный ответ: само наше восприятие выстраивает действительность следующим образом, т. е. только то, что отражается нашим разумом и воспринимается как реальность, подчиняется математическим законам. О внешнем мире мы не знаем ничего (или «Вещь в себе»).

Как ни разумна эта идея, мне она кажется неверной. Я разделяю идеи *эволюционной теории познания*, которая восходит к физику Людвигу Больцману и была развита в дальнейшем, в особенности после работ Конрада Лоренца.

Основная мысль такова: в смиренную рубашку математики одевает





природу вовсе не наша чувственная или познавательная деятельность, а сама Природа в ходе своего эволюционного развития вкладывает математику в наш разум как реально существующую структуру, неотъемлемую от нее самой. Менее абстрактно: в мозгу обезьяны, от которой мы произошли, должно было реально существовать очень точное понимание геометрии пространства, если она не хотела упасть с дерева и сломать себе шею. Точно так же можно утверждать, что развитие наших способностей к абстрагированию и манипулированию логическими символами должно быть ориентировано на реально существующие структуры реального мира.

Способности к математике — это часть зафиксированного генетически видового опыта, априорного для индивидуума и апостериорного для вида в целом.

Однако широкий спектр способов математического описания природы выглядит чудом. Наука все еще не достигла ясно различимых пределов применения математических методов, хотя я и не могу отделаться от подозрения, что некоторые парадоксы, возникающие при интерпретации квантовой механики, могут указывать на такие пределы. Эта широта тем более поразительна, что наши математические способности (если эволюционная теория познания справедлива) приобретались нашими предками путем опытов с довольно грубыми структурами и объектами повседневного мира.

Совершенно очевидно, что наши геометрические и логические возможности простираются далеко за пределы окружающего мира. А это означает, что реальный мир подчиняется математическим законам в значительно большей степени, чем нам известно сейчас.

Но даже если эти структурные (математические) принципы экстраполируются все более глубокими конструкциями и теоремами, то и в этом случае *просто невероятно*, чтобы действительность с исчерпывающей полнотой отражалась математическими конструкциями — от огромных космологических размеров и до самой последней микроскопической детали.

Физику-теоретика нелегко с этим согласиться, но в эволюционной теории познания фактически неизбежно возникает предположение о том, что математические способности вида «*гомо сапиенс*» принципиально ограничены, так как имеют биологическую основу и, следовательно, не могут полностью содержать все структуры, существующие в действительности. Иными словами, должны существовать пределы для математического описания природы.



Таким образом, детерминизм Лапласа не может быть абсолютным, и вопрос о случайности и свободе вновь открыт!

Но картины, представленные на этой «выставке», можно рассматривать и с другой точки зрения — они просто прекрасны! Хаотический компонент, заметный в очень мелких структурах, не захватывает всю картину. Существуют большие регулярно упорядоченные области, причем порядок и хаос гармонически сбалансированы друг с другом.

Эта *смесь* порядка и беспорядка в самом деле поразительна и, что самое важное, *типична* для природных процессов. Теория динамических систем дает здесь ответ на другой, эмоциональный вопрос: почему все, что производит промышленность, вообще весь технический мир кажется столь неестественным, хотя и является продуктом *естественных наук*?

Почему все же силуэт изогнутого бурями дерева без листьев на фоне вечернего неба воспринимается как нечто прекрасное, а любой силуэт высоко функционального университетского здания таким не кажется, несмотря на все усилия архитектора?

Ответ, как мне кажется (пусть даже это немного и надуманно), должен быть дан с помощью новых подходов к динамическим системам. Наше ощущение *прекрасного* возникает под влиянием гармонии порядка и беспорядка в объектах природы — тучах, деревьях, горных грядках или кристалликах снега. Их очертания — это динамические процессы, застывшие в физических формах, и определенное чередование порядка и беспорядка характерно для них.

В то же время наши промышленные изделия выглядят какими-то окостеневшими из-за полного упорядочения их форм и функций, причем сами изделия тем совершеннее, чем сильнее это упорядочение. Такая *полная* регулярность *не противоречит* законам природы, но сейчас мы знаем, что она *нетипична* даже для весьма «простых» естественных процессов. Здесь мы имеем дело с искусственно созданной пограничной линией природы, с *патологическим случаем*, если хотите.

Можно спросить: если это наблюдение и в самом деле является столь неожиданным, то не мог ли некий непредвзятый наблюдатель увидеть то же самое где-нибудь в другом месте? Вопрос правильный, но мы, ученые, не были (если я имею право так говорить о своих коллегам) *непредвзятыми* наблюдателями! Мы строили наши концепции (и предубеждения) типичного поведения природных систем, наблюдая за искусственными системами, которые и выбраны-то были именно из-за своей регулярности. Полная упорядоченность была предварительным необходимым условием для математического описания процесса. И только появление мощных компьютеров сняло эти ограничения. Ожидалось, что компьютеры наведут полный порядок

и дисциплину во всех областях жизни, но именно они дали возможность лучше понять гармонию и хаос.

И еще одна причина волнения, связанного с этими картинами: они показывают, что можно без труда установить внутреннюю связь, перебросить мост между рациональным научным познанием и эмоциональной эстетической привлекательностью. И эти два способа познания человеком мира начинают сближаться в своей оценке того, что представляет собой природа. Более того, наука и эстетика согласны в том, что именно теряется в технических объектах по сравнению с природными: роскошь некоторой нерегулярности, беспорядка и непредсказуемости. Понимание этого может здорово помочь нам в том, чтобы придать человеческое лицо технологии, от которой все больше зависит наше выживание.

Преломление науки в искусстве

ГЕРБЕРТ В. ФРАНКЕ

Я думаю, что искусствоведы грядущих столетий, оглянувшись на наше время, придут к выводам, весьма отличным от тех, к которым приходят наши современники. Почитаемые ныне художники и скульпторы будут скорее всего почти забыты, зато появление электронных средств будет провозглашено наиболее значительной переменной в истории искусства. Первые попытки, вначале робкие и неуверенные, достичь цели, которая как известно стоит перед искусством, — живописной выразительности и точности изображения окружающего нас мира, — но с помощью новых средств, увенчаются в конце концов заслуженным успехом.

И будет отмечено, что тогда, «в прошлом» (т. е. сейчас!), впервые появилась возможность создавать трехмерные изображения фантастических пейзажей и другие аналогичные картины с фотографической точностью. А вместе с картинами появилась возможность не ловить отдельные мгновения, а охватывать действительность в движении и изменениях. Это, возможно, важнейший аспект новой перемены: время на этих картинах не зафиксировано и легко можно построить плоские или трехмерные (в перспективе) движущиеся изображения даже с тех точек зрения, которые недоступны человеческому глазу или камере.

Сегодня, впрочем, художники, использующие компьютер, отодвинуты на периферию «сцены» искусства. Частично это связано с формальными критериями, частично — с неодобрением, вызванным конкретными коммерческими интересами.

Век наглядности

Компьютер — это устройство для обработки данных, а термин «данные» (информация), казалось бы, означает числа, а не рисунки. Однако рисунки — это в сущности другой способ описать реальные события (факты). Кроме того, рисунки можно закодировать числами, а затем обработать с помощью компьютера. Графические изображения, созданные компьютером, будем далее называть для краткости *компьютерной графикой*. Значение этого (когда-то побочного) способа использования компьютеров чрезвычайно возросло в последнее время.

Конечно же, вначале никто не думал развивать компьютерную графику как искусство; она возникла в результате чисто практических научных, технологических и коммерческих исследований. Понимание того, что рисунки значительно удобнее для восприятия, чем длинные перечни чисел, привело к тому, что во всех этих областях числа постепенно вытеснялись гистограммами (столбчатыми диаграммами), криволинейными графиками и т. п. Этот процесс и привел к появлению и развитию компьютерной графики. Первым, но совершенно неподходящим средством получения компьютерной графики был принтер, который тем не менее доказал эффективность использования наглядных изображений столь убедительно, что механические рисующие приборы, названные графопостроителями, появились как нечто само собой разумеющееся. В графопостроителях используется принцип пера с сервоконтролем (следающим контролем), рисующего на плоской или цилиндрической поверхности. Они позволяют получать с помощью машины чертежи, точность которых вполне достаточна для целей, скажем архитектуры, картографии и т. п. Но следует отметить и один недостаток — крайне медленную работу механических систем по сравнению со скоростью электронных процессов в компьютере. Так, для того чтобы изобразить конфигу-

рации, рассчитанные компьютером за доли секунды, требуются минуты, а иногда даже часы.

Первый серьезный прорыв в компьютерной графике связан с созданием электронного графопостроителя—дисплея, на котором визуальная информация возникает тем же способом и с той же скоростью, что и в электронно-лучевой трубке телевизора. Появилось, таким образом, средство построения графических изображений, достаточно быстрое, чтобы поспевать за компьютером. Кроме того, появилась возможность создавать движущиеся и даже взаимодействующие изображения.

Одним из первых способов применения компьютерной графики был САПР — система автоматизированного проектирования. Приведем только один пример: чертежи конструкций и их составных частей, введенные в компьютер, могут автоматически преобразовываться для управления соответствующими механизмами (например, обрабатывающими станками).

Новые способы обработки изображений были развиты на основе более старых методов анализа рисунков и распознавания образов, основой которых в свою очередь послужили методы, используемые в фотографии. Эти способы позволяют значительно легче оценивать образы, возникающие в различных областях науки, технологии и медицины, а в некоторых случаях такая возможность появляется только благодаря им.

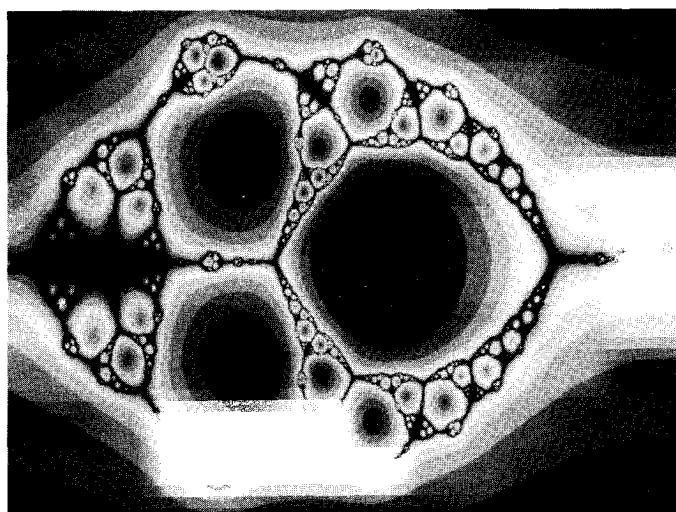
Некоторые математики и программисты использовали эстетические возможности графических систем с начала 60-х годов. Большинство из них старались не употреблять слово «искусство» в отношении своих работ, уходя тем самым от конфликта с деятелями искусства. Лишь некоторые решались мужественно противостоять критикам, считая компьютеры новым средством получения произведений изобразительного искусства. Свой метод они называли «компьютерное искусство», что вызвало множество ожесточенных дискуссий о возможности создания (хотя бы в принципе) произведений искусства с помощью машины. При этом приводилась масса теоретических аргументов против этой идеи. К счастью, эти дискуссии мало влияли на представителей нового направления, и они продолжали свою работу, не обращая внимания на теоретические возражения. И на сегодня уже собрана впечатляющая коллекция компьютерной графики, отражающая технический прогресс, — от простого графопостроителя до графических дисплеев с высокой разрешающей способностью.

Рисунок как средство выражения

Некоторые специалисты сомневаются в том, что возможен перевод с языка слов на язык рисунков, считая, что качество визуальной информации ниже чем качество словесной. Эта позиция нелогична, напротив, пословица: «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать» подкреплена аргументами из области психологии восприятия.

Визуальные системы могут не только оперировать с информационным потоком приблизительно в 10 раз более интенсивным, чем все остальные сенсорные системы вместе взятые, но и обрабатывать информацию, которая имеет двумерную и даже (в известной степени) трехмерную структуру. Замена слов рисунками — это переход не только к новой системе кодирования информации, но и к новым методам описания окружающего нас мира.

Используя как средство общения язык, т. е. линейные, упорядоченные по времени в виде ряда структуры, мы автоматически отдаем предпочтение принципам линейного упорядочивания. Примерами могут служить понятия причинности или исторического процесса. В то же время язык изображений позволяет наблюдать и другие очень важные виды взаимосвязи явлений, например петлевидные процессы, взаимодействия, сети коммуникаций и т. п. Весьма вероятно, что наша неспособность мыслить категориями сетей



в немалой степени связана с тем, что мы привязаны к описательной системе языка слов.

Эти рассуждения показывают, что утверждения многих противников использования изобразительных средств совсем не обязаны быть справедливыми. Но если они считают, что рисунки оставляют гораздо меньше места для фантазии, чем написанный текст, то их можно опровергнуть. Даже комиксы требуют творческого доосмысления читателями (это следует из того факта, что некоторые родители не понимают их). Рисунки действительно фиксируют один из видов информации более жестко, чем слова, но оставляют достаточно пробелов, которые должен заполнить сам зритель. В комиксах, например, логика сюжета, социальные отношения действующих лиц, эмоциональный фон — все это восполняется фантазией зрителя. То же самое справедливо и в отношении других изобразительных средств: фильмов, телевизора, видео и др.

К сожалению, в дискуссиях, касающихся новых компьютерных рисунков, слишком заметное место заняли банальные коммерческие интересы. Основная же проблема, более важная сегодня, чем когда-либо раньше, не упоминалась в этих дискуссиях, а именно, как придать доступную для понимания форму всем сложным взаимосвязям нашего современного мира, как сделать их описание понятным и одновременно исчерпывающим. Чем сложнее ситуация, тем более подходящим становится наглядное изображение.

Одна из основных возможностей для использования компьютерной графики, и, в частности, взаимодействующих изображений открывается в науке и образовании. Оказывается, что изображения, созданные компьютером, позволяют дать самое удивительное и одновременно самое полное из всех известных описание огромного множества математических формул. При этом еще раз подтверждается идея, что кодирование информации в двумерной и (в некотором смысле) трехмерной формах позволяет увидеть взаимосвязи, которые даже представить себе было невозможно, глядя на отдельные формулы. Помимо этого компьютер дает возможность экспериментировать; математик может, например, исследовать влияние параметра на решение задачи, контролировать результаты преобразований или находить предельные значения бесконечных итерационных процессов; физик, скажем, может исследовать, как влияют граничные условия на решение различных физических задач, а химик — проанализировать пространственные структуры агрегатов молекул.

Искусство ли это?

Каким же образом достигаются эта доступность для понимания и ясность представления? Путеводную нить дают психология и эстетика теории информации. Свой вклад в достижение этой цели вносят и гармоническое размещение, и баланс, и симметрия — все принципы упорядочивания, рассматриваемые в теории информации.

Ясно, что эти понятия применимы и к визуально наблюдаемым явлениям, поскольку здесь используются те же принципы образного мышления, что и при распознавания, анализе и описании различных объектов человеческим мозгом. Кроме того, именно с этими формальными понятиями мы связываем классический идеал красоты. Если произвольный набор данных представить, скажем, с помощью компьютера в оптимальном для визуального восприятия виде, то мы одновременно приблизимся и к характеристике Прекрасного.

Однако изучение современного искусства показало, что одного лишь соответствия классическому определению красоты недостаточно для создания произведения искусства. Наряду с этим должно быть нечто вызывающее интерес, требующее сопричастности и заставляющее думать. Из психологии теории информации известно, что подобные стимулы возникают в основном благодаря «новизне», т. е. тогда, когда перед нашими глазами предстает нечто, как нам кажется, новое, чего мы раньше не встречали.

Производимое эстетическое впечатление и вызываемое новизной удивление — вот что роднит произведения искусства с изображениями, создаваемыми наукой. Например, научная фотография — это отнюдь не прямое отражение действительности, а скорее результат сложных оптических или даже электронных преобразований, цель которых создать наиболее узнаваемый и запоминающийся зрительный образ. Используя красители или поляризационные фильтры в микроскопии, мы получаем нечто, ничего общего не имеющее с реальной окраской объекта. Эти средства служат только для того, чтобы сделать некоторые области более различимыми.

Конечно же, объекты исследования, например кристаллические структуры, и сами по себе содержат все необходимое для распознавания их характерных черт. Но лишь преобразование с помощью средств микроскопии позволяет создать изображения, столь поразительно похожие на произведения искусства. Природные формы как искусство — эта концепция Эриста Хеккеля представляет собой выражение поразительной взаимосвязи между, казалось бы, совершенно разными областями зрительного опыта. Видимо, настоящее эстетическое удовольствие можно получить, путешествуя, скажем, по поверхности кристалла с помощью микроскопа. В поле зрения попадают все новые области, напоминающие какие-то ландшафты, и всегда можно еще больше увеличить изображение, чтобы исследовать более глубокие пласты структурных возможностей.

В представленных здесь работах обнаруживается удивительное сходство с картинами, наблюдаемыми под микроскопом. Группа исследователей, их создавших, носит название «Комплексная динамика», что отражает научную сторону ее деятельности, но, и это очень важно, свои графические изображения они называли новым, созданным или термином «ИСКУССТВО ОТОБРАЖЕНИЯ». Это синтетическое название выражает одновременно и аналогичный опыт, накопленный вначале биологами и кристаллографами, использующими микроскопы, и впоследствии учеными, работающими в различных областях естественных наук, — от физики элементарных частиц до астрономии.

Но между математикой и естественными науками есть существенное отличие. Всегда можно сказать, что ученый фотографирует реально суще-

ствующие в природе структуры и выдает, в каком-то смысле, копии природных объектов за произведения искусства. Но такое обвинение невозможно предъявить математике. Использование компьютера может внешне и напоминает использование микроскопа, но то, что мы с его помощью получаем, представляет собой в чистом виде продукт человеческого разума и не обязательно имеет аналоги в природе. Поэтому картины, которые удалось получить группе «Комплексная динамика», — это вовсе не исключительно удачный зрительный образ природы, напротив, их основное содержание придумано авторами. Следует подчеркнуть, что эти рисунки поражают подлинной новизной и обозначают проблемы, например комплексность, исследование которых может оказаться плодотворным и полезным. Можно, конечно, говорить, что темы компьютерных рисунков необычны для искусства, что они интересуют только ученых и технологов и, стало быть, могут рассматриваться как искусство лишь в рамках научно-технической субкультуры. Но в этом обвинении начисто игнорируется тот факт, что проблематику комплексных систем можно обнаружить в самой основе биологической жизни и социальных систем, в происхождении Вселенной и даже в философии. То есть в самом деле искусство, если следовать обычным определениям. И если его и можно считать ненастоящим, то лишь по той причине, что оно создавалось с помощью компьютера.



Распространение компьютерного искусства

Искусство предполагает общение между художником и зрителями. В идеальном случае — это замкнутый цикл: художник представляет зрителям свою работу, вызывает их реакцию и использует ее как обратную связь, учитывая, с целью быть лучше понятым, отклик зрителей в своей дальнейшей работе.

Есть ли препятствия распространению компьютерной графики и компьютерного искусства? Пока это были лишь рисунки, созданные графопостроителем, главной проблемой были сомнения специалистов, историков искусства, искусствоведов и, более всего, владельцев галерей. Проблема заключалась в том, что компьютер может создать любое число одинаково совершенных «оригиналов», что может нанести ущерб бизнесу, связанному

с искусством. Зетем было обнаружено, что некоторые из первых работ, созданных компьютером, в полной мере уникальны и невоспроизводимы. Их действительно стоило коллекционировать!

Сейчас ситуация сложнее. Связано это с тем, что изображения создаются не графопостроителем, а на экране дисплея. С экрана они должны быть «переписаны» и зафиксированы, скажем, с помощью неискажающей, контролируемой компьютером, фотографии. Но здесь сразу же всплывают старые оговорки, и вновь возникает дискуссия о том, может ли фотография быть произведением искусства.

Есть и другие способы переноса изображений с экрана дисплея на бумагу в неискаженном виде, в частности, с помощью струйных принтеров. К сожалению подобная техника доступна пока еще лишь немногим исследователям, и поэтому большинство новых результатов, даже тех, в которых получены трехмерные образы с перспективой, остается на слайдах или фотобумаге. Самые большие сложности возникают с движущимися изображениями, которые нельзя выставить в галереях и которыми трудно заинтересовать тех, кто торгует произведениями традиционного искусства. Чтобы сделать эти произведения доступными для публики, нужно использовать абсолютно новые средства, например те организации, которые имеют дело с телевизионными изображениями типа библиотек видеокассет или телестанций. Непонятно, что происходит: то ли просто слишком мал спрос на созданные компьютером движущиеся образы, то ли всему виной медлительность средств массовой информации, нежелание переключиться на новый путь?

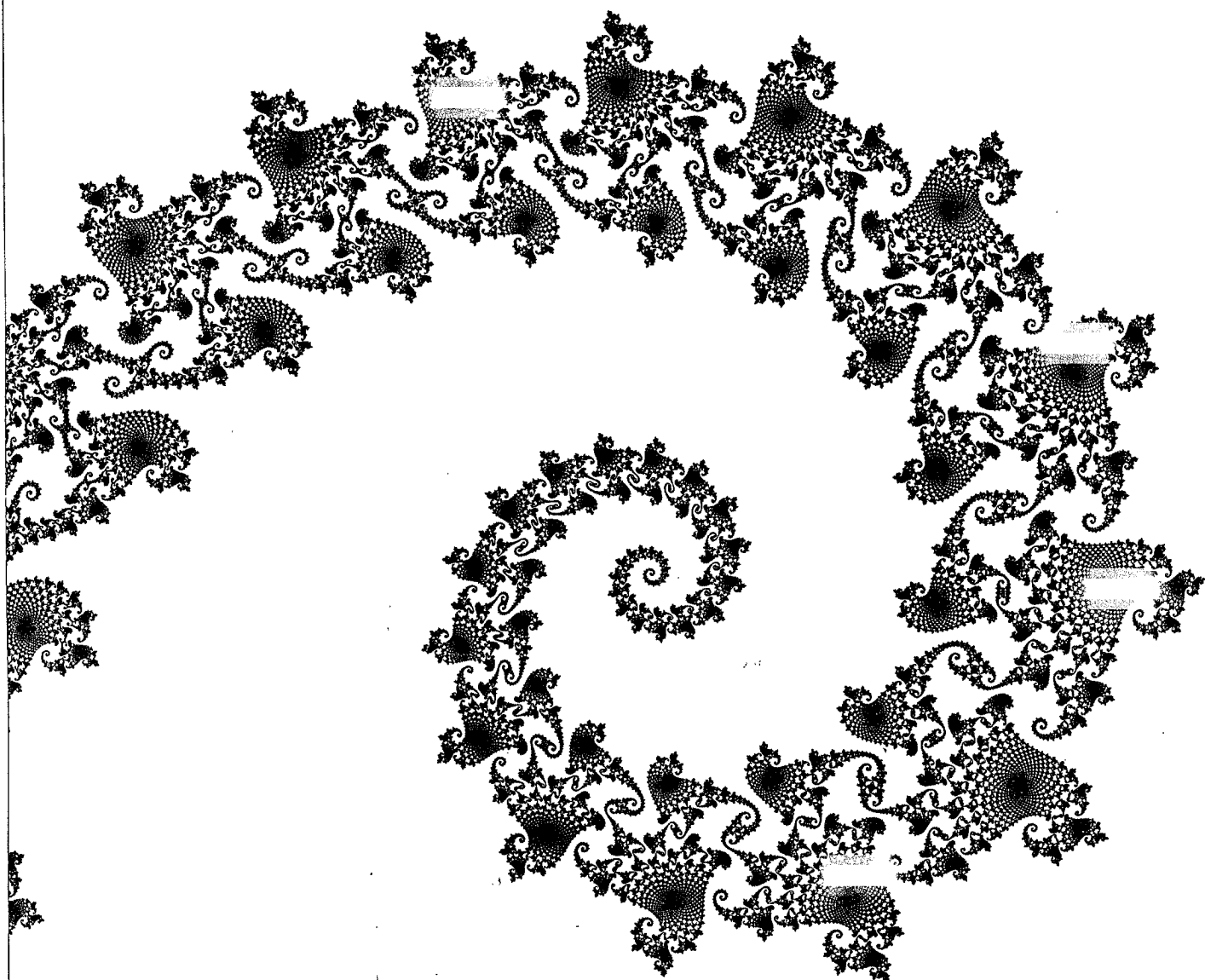
Каким же способом может «компьютерный» художник представить свои работы широкой публике? Простейший метод, как мне кажется, следовать традициям галерей и выставлять вначале перенесенные на бумагу статические изображения. А когда эти произведения будут признаны, откроются новые возможности и для движущихся изображений.

Искусство и технология сегодня

Разумная стратегия бизнеса и превосходное качество продукции не помогут, если публика эту продукцию отвергает. Одной из причин, по которым компьютерное искусство отвергается, может служить то, что оно создано с помощью технически очень сложных устройств, которые сами попали нынче под сильный перекрестный огонь. Выступление в защиту технологии (с целью узаконить ее как творческий метод) наталкивается на необходимость решения вопроса: «Не следует ли оградить искусство от вмешательства машин в современном мире, тем более, что и сам по себе технологический процесс вызывает определенные сомнения?» Ответ прост. Технология, необходимая для компьютерного искусства, существенно отличается от используемых в энергетике и промышленности, которые в основном и оказались под огнем критики. Компьютер — это продукт информационной технологии, потребляющий минимум энергии и материальных ресурсов. И нет причин ограничивать применение систем обработки данных лишь наукой, технологией, бизнесом и управлением, исключая сферу искусства.

Вопрос о замене традиционных методов творчества художника электроникой или машинами не стоит. Напротив, имеет смысл использовать все возможные средства, чтобы расширить возможности для самовыражения художника. Искусство каждой эпохи пользовалось современными средствами, чтобы придать форму тому новому, что появлялось в художественном творчестве. При этом никогда не руководствовались только техническими

или практическими целями, существенную роль играли и способы общения людей друг с другом. Почему же нельзя использовать компьютер — это универсальное средство общения и получения информации, которое завоевало даже наши собственные дома, — в качестве инструмента для создания произведений искусства? .



СДЕЛАЙТЕ ЭТО САМИ

Из откликов на наши предыдущие публикации мы узнали, что многие студенты не столько интересуются нашими картинками, сколько пытаются воспроизвести их на компьютерах. И это, безусловно, именно та реакция, на которую мы и рассчитывали. Чтобы помочь в достижении этой цели, дадим несколько указаний для тех, кто посчитал затруднительным усвоить основной текст.

Продemonстрируем на двух примерах, как можно получить типичные рисунки из этой книги. Запомните: мы исследуем процессы с обратной связью, где k -я точка (x_k, y_k) порождает $(k + 1)$ -ю точку (x_{k+1}, y_{k+1}) при помощи такого закона:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, y_k; p), \\ y_{k+1} &= g(x_k, y_k; q),\end{aligned}\tag{1}$$

где p и q — параметры, которые мы считаем постоянными в течение каждой итерации $(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) \mapsto \dots \mapsto (x_k, y_k) \mapsto \dots$.

Существуют две возможности. Первая состоит в том, что плоскость (x, y) рассматривается при фиксированных значениях p и q . Анализируется динамическая связь точки (x, y) с соответствующим аттрактором. В этом случае мы исследуем структуру областей притяжения и их границ, т. е. множеств Жюлиа.

Вторая возможность состоит в том, что выбирается фиксированная точка (x, y) и прослеживается ее судьба при различных значениях параметров. Результаты наносятся, точка за точкой, на плоскость (p, q) . Таким образом, мы получаем изображения типа множества Мандельброта.

Эксперимент 1. Области притяжения и множества Жюлиа

Рассмотрим в качестве примера комплексный процесс с обратной связью $z \mapsto z^2 + c$. Запишем комплексные числа z и c в виде $z = x + iy$, $c = p + iq$. Тогда закон, которым описывается процесс, примет вид (1):

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k^2 - y_k^2 + p, \\ y_{k+1} &= 2x_k y_k + q.\end{aligned}\tag{2}$$

Поскольку бесконечность — всегда аттрактор для такого процесса, зададимся целью раскрасить ее область притяжения. Установим соответствие между цветом и временем, за которое точка (x, y) уходит на бесконечность. Предположим, что разрешающая способность экрана равна $a \times b$ точек. Предположим также, что он может быть одновременно раскрашен в $K + 1$ цветов, которые мы пронумеруем от 0 до K , причем числу 0 сопоставим черный цвет.

Шаг 0:

Выбрать параметр $c = p + iq$. Выбрать $x_{\min} = y_{\min} = -1.5$, $x_{\max} = y_{\max} = 1.5$, $M = 100$.

Положить $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/(a - 1)$, $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/(b - 1)$.

Для всех пар (n_x, n_y) , где $n_x = 0, \dots, a - 1$ и $n_y = 0, \dots, b - 1$, выполнить следующую процедуру.

Шаг 1:

Положить $x_0 = x_{\min} + n_x \cdot \Delta x$, $y_0 = y_{\min} + n_y \cdot \Delta y$, $k = 0$.

Шаг 2 (итерация):

Вычислить (x_{k+1}, y_{k+1}) по (x_k, y_k) , используя закон (2). Увеличить счетчик k на 1 ($k := k + 1$)

Шаг 3 (оценка):

Вычислить $r = x_k^2 + y_k^2$.

- (i) Если $r > M$, то выбрать цвет k и идти на шаг 4.
- (ii) Если $k = K$, то выбрать цвет 0 (черный) и идти на шаг 4.
- (iii) $r \leq M$, $k < K$. Вернуться на шаг 2.

Шаг 4:

Приписать цвет k точке экрана (n_x, n_y) и перейти к следующей точке, начиная с шага 1.

Замечания

Использование большого числа цветов K (например, $K = 200$) оправданно. Если же количество различных цветов невелико, удобно использовать их периодическим образом. И даже с помощью двух цветов (белого и черного) можно этим способом получить интересные картины.

Время вычислений можно уменьшить в 2 раза ввиду симметрии процесса (2). Точки (x, y) и $(-x, -y)$ имеют одну и ту же судьбу, следовательно, картина должна быть симметричной относительно начала координат.

Варьируя исходные данные $x_{\min}, x_{\max}, \dots$ на шаге 0, можно получить сильно увеличенные изображения.

На шаге 4 все точки, которые не стремятся к бесконечности после K шагов, будут закрашены черным. В том числе и точки, лежащие в области притяжения других аттракторов, если такие существуют. В случае процесса (2) второй аттрактор всегда существует, если $c = p + iq$ выбрано внутри множества Мандельброта (см. ниже эксперимент 2). Для того чтобы раскрасить область притяжения второго аттрактора соответствующим образом, нужно прежде всего найти сам аттрактор. Для этого следует несколько раз проитерировать «критическую точку» $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и посмотреть, куда она движется. Но будьте внимательны: аттрактор — это не обязательно одна точка, он может быть и циклом. Тогда нужно взять одну из точек этого цикла, описать вокруг нее маленький круг и спрашивать на шаге 3 (i), попадает ли итерация в этот круг.

Для того чтобы воспроизвести картины типа фото 64—66, выберите полином $p(z)$ и сделайте его нули аттракторами, используя алгоритм Ньютона для нахождения корней уравнения, а именно

$$z_{k+1} = z_k - r \frac{p(z_k)}{p'(z_k) + s \cdot i} \quad (3)$$

(в стандартном алгоритме $r = 1$ и $s = 0$, но и другие значения из интервалов $0 < r < 2$, $0 < s < 1$ приводят к интересным результатам. Можно выбрать и комплексные r).

Задача:

Пусть $p(z) = z^3 - 1$, так что $z = 1$, $z = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ — три аттрактора. Разложите (3) на действительную и мнимую части (например, при $s = 0$) и раскрасьте три области притяжения.

Эксперимент 2. Множество Мандельброта

Согласно Фату, у процесса (2) нет второго (помимо бесконечности) аттрактора, если «критическая точка» $z_0 = 0$ стремится к бесконечности (z_0 является критической точкой процесса $z \rightarrow f(z)$, если $f'(z_0) = 0$). На этом строится следующая процедура, с помощью которой мы получим окрашенное в черный цвет множество Мандельброта с окружением, раскрашенным в разные цвета.

Вновь предположим, что экран имеет $a \times b$ точек и $K + 1$ цветов. Черный цвет обозначен нулем.

Шаг 0:

Выбрать $p_{\min} = -2.25$, $p_{\max} = 0.75$, $q_{\min} = -1.5$, $q_{\max} = 1.5$, $M = 100$.

Положить $\Delta p = (p_{\max} - p_{\min})/(a - 1)$, $\Delta q = (q_{\max} - q_{\min})/(b - 1)$

Для всех точек (n_p, n_q) экрана ($n_p = 0, \dots, a - 1$), ($n_q = 0, \dots, b - 1$) выполнить следующую процедуру:

Шаг 1:

Положить $p_0 = p_{\min} + n_p \cdot \Delta p$, $q_0 = q_{\min} + n_q \cdot \Delta q$, $k = 0$, $x_0 = y_0 = 0$.

Шаг 2:

Вычислить (x_{k+1}, y_{k+1}) с помощью (2). Затем положить $k := k + 1$

Шаг 3:

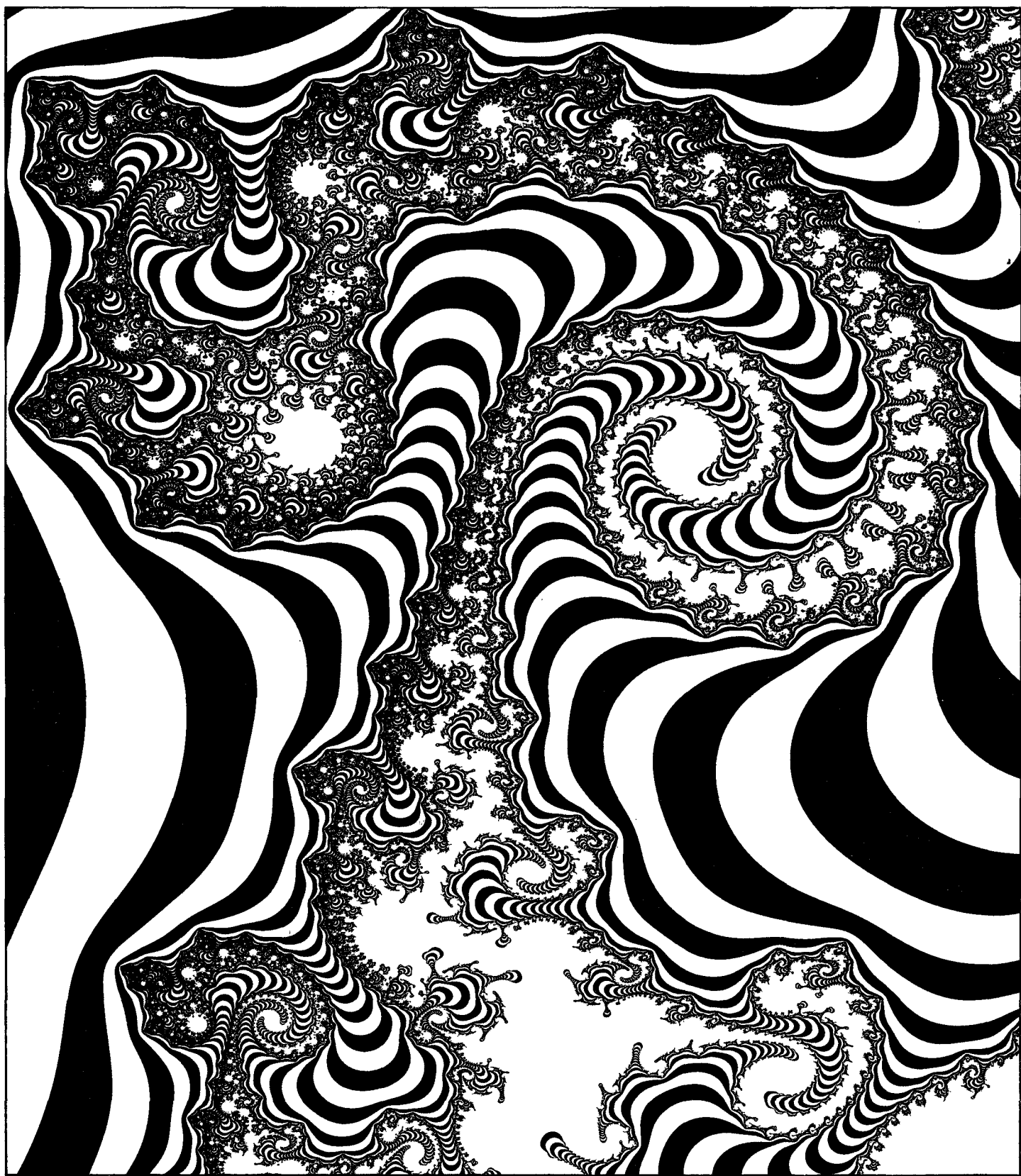
Вычислить $r = x_k^2 + y_k^2$.

- (i) Если $r > M$, то выбрать цвет k и идти на шаг 4.
- (ii) Если $k = K$, то выбрать цвет 0 (черный) и идти на шаг 4.
- (iii) $r \leq M$, $k < K$. Повторить шаг 2.

Шаг 4:

Приписать цвет k точке (n_p, n_q) и переходить к следующей точке (шаг 1).

Замечания 1—3 к эксперименту 1 применимы и здесь. Вы обнаружите, что эксперимент 1 дает наилучшие результаты, если $c = p + iq$ выбрано вблизи границы множества Мандельброта. Постарайтесь добиться больших увеличений на этой границе в плоскости (p, q) . Но учтите: чем ближе к границе, тем больше нужно итераций, чтобы определить, уходит или нет критическая точка на бесконечность.



Этот рисунок был получен в сотрудничестве с лабораториями ИБМ в Бёблингене, ФРГ (В. Хехль, Д. Воллшлагер). Он демонстрирует эффект увеличения разрешающей способности. Вычисления проведены на IBM 4361-5 с повышенной точностью; принтер IBM 4250 давал разрешение 4096×5120 точек.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве руководства для тех, кто хочет детально разобраться в наших рисунках, приведем здесь необходимую информацию. Для всех рисунков, которые не были охарактеризованы в основном тексте, приведем

- соответствующий процесс;
- принцип выбора параметра;
- «окно» в области изменения соответствующих переменных.

Заметим, что «окно» для переменных мы можем указать лишь приближенно, поскольку во многих случаях оригинал был обрезан или повернут при создании макета книги.

Процесс $x \mapsto x^2 = c$

Изображения в плоскости x для разных c

Рис.	Фото	c		$\operatorname{Re} x$	$\operatorname{Im} x$
3		-0.12375	+0.56508 <i>i</i>	-1.8...1.8	-1.8...1.8
4		-0.12	+0.74 <i>i</i>	-1.4...1.4	-1.4...1.4
6		-0.481762	-0.531657 <i>i</i>	-1.5...1.5	-1.5...1.5
7		-0.39054	-0.58679 <i>i</i>	-1.5...1.5	-1.5...1.5
8		0.27334	+0.00742 <i>i</i>	-1.3...1.3	-1.3...1.3
9		-1.25		-1.8...1.8	-1.8...1.8
10		-0.11	+0.6557 <i>i</i>	-1.5...1.5	-1.5...1.5
11		0.11031	-0.67037 <i>i</i>	-1.5...1.5	-1.5...1.5
12		<i>i</i>		-1.5...1.5	-1.5...1.5
13		-0.194	+0.6557 <i>i</i>	-1.5...1.5	-1.5...1.5
14		-0.15652	+1.03225 <i>i</i>	-1.7...1.7	-1.7...1.7
15		-0.74543	+0.11301 <i>i</i>	-1.8...1.8	-1.8...1.8
	18	0.32	+0.043 <i>i</i>	-2 ...2	-1.5...1.5
	20	-0.12375	+0.56508 <i>i</i>	-2 ...2	-1.5...1.5
	22,25	-0.39054	-0.58679 <i>i</i>	-1.5...1.5	-1.5...1.5
	24	-0.11	+0.67 <i>i</i>	-2 ...2	-1.5...1.5

Рисунки в плоскости c : множество Мандельброта и крупные планы

Фото	$\operatorname{Re} c$		$\operatorname{Im} c$
26	-2.25	... 0.75	-1.5 ...1.5
27, 52—54	-0.19920	... -0.12954	1.01480 ...1.06707
29	-0.95	... -0.88333	0.23333 ...0.3
30	-0.713	... -0.4082	0.49216 ...0.71429
33, 51	-1.781	... -1.764	0 ...0.013
36	-0.75104	... -0.7408	0.10511 ...0.11536
38	-0.74758	... -0.74624	0.10671 ...0.10779
40	-0.746541	... -0.746378	0.107574 ...0.107678
42, 100, 101	-0.74591	... -0.74448	0.11196 ...0.11339
44, 46, 99	-0.745538	... -0.745054	0.112881 ...0.113236
45, 47	-0.745468	... -0.745385	0.112979 ...0.113039
48, 50	-0.7454356	... -0.7454215	0.1130037 ...0.1130139
49	-0.7454301	... -0.7454289	0.1130076 ...0.1130085
58—60	-1.254024	... -1.252861	0.046252 ...0.047125

Модели магнетизма

Исследованы две иерархические решетки со спинами Поттса. Преобразование перенормировки для «температурной» переменной $x = \exp(J/k_B T)$ вы-

глядит так:

$$x \mapsto \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2}\right)^2$$

(модель I),

$$x \mapsto \left(\frac{x^3 + 3(q - 1)x + (q - 1)(q - 2)}{3x^3 + 3(q - 2)x + q^2 - 3q + 3}\right)^2$$

(модель II),

где q — число состояний спина в исходной модели. Здесь трактуется как комплексный параметр.

Рисунки в плоскости x для различных q

Рис.	Модель	q	$\operatorname{Re} x$	$\operatorname{Im} x$
58 a	I	−1.0	−6 ... 4	−5 ... 5
b	I	−0.1	−6 ... 4	−5 ... 5
c	I	0	−6 ... 4	−5 ... 5
d	I	1.0	−5 ... 5	−5 ... 5
e	I	1.2	−5 ... 5	−5 ... 5
f	I	1.6	−5 ... 5	−5 ... 5
g	I	2.0	−5 ... 5	−5 ... 5
h	I	2.5	−5 ... 5	−5 ... 5
i	I	2.9	−5 ... 5	−5 ... 5
j	I	3.0	−5 ... 5	−5 ... 5
k	I	3.1	−5 ... 5	−5 ... 5
l	I	4.0	−4 ... 6	−5 ... 5
3	I	4	−5.5 ... 7.9	−5 ... 5
4	I	0.1	−0.42... 1.98	2.5 ... 3.67
5	I	1.09582 + 2.07142i	−0.5 ... 1.5	−1.45... 0.7
6	I	1.21 + 0.01i	−2.1 ... −0.3	−0.5 ... 0.5625
7	II	2	−15 ... 15	−11 ... 11
8—10	II	1.2 + 2i	−3.2 ... 3.8	−3.3 ... 1.9

Рисунки в плоскости q

В обеих моделях точки $x = 1$ и $x = \infty$ представляют собой сверхустойчивые аттракторы процесса перенормировки, соответствующие бесконечной (полный беспорядок) и нулевой реальной температуре (при $J > 0$) (идеальный магнитный порядок). Кроме того, могут быть еще один или два дополнительных аттрактора, поскольку есть еще два «свободных» критических значения $x_1 = 0$ и $x_2 = (1 - q)^2$. Наши исследования параметров сводятся к вычислению времени, которое необходимо для того, чтобы эти критические точки приблизились к $x = 1$ (один основной цвет) или к $x = \infty$ (второй основной цвет). Если q лежит в черных областях, критические точки сходятся к одному из дополнительных аттракторов. Отметим, что для первой модели оба критических значения 0 и $(1 - q)^2$ имеют взаимодополняющие судьбы и, следовательно, дают идентичные цветные изображения.

Рис.	Фото	Модель	Крит. значение	$\operatorname{Re} q$	$\operatorname{Im} q$
59 b		I	0 или $(1 - 1)^2$	1.85 ... 2.15	1.5 ... 1.8
c		I	0 или $(1 - q)^2$	−1. ... 3.5	−2.25 ... 2.25
d		II	$(1 - q)^2$	−1. ... 2.65	−2. ... 2.
e		II	0	1.92 ... 1.97	0.88 ... 0.93
f		II	0	−0.8 ... 3.5	−2. ... 2.
1		I	0 или $(1 - q)^2$	−1.5 ... 4.5	−2.25 ... 2.25
2		I	0 или $(1 - q)^2$	1.86 ... 2.21	1.51 ... 1.77
11, 12		I	0 или $(1 - q)^2$	1.2882 ... 1.2963	0.9695 ... 0.9753
13		I	0 или $(1 - q)^2$	1.290681 ... 1.291136	0.97277... 0.973098
14, 15		II	0	1.9116 ... 1.9784	0.88 ... 0.93
16		II	0	−1.2 ... 3.2	−1.65 ... 1.65

Алгоритм Ньютона

Для заданного полинома $p(z)$ используется следующий модифицированный алгоритм Ньютона для нахождения корней $p(z) = 0$:

$$N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z) + s \cdot i}$$

Фото	$p(z)$	s	Re z	Im z
61—63	$(z - 1)(z + 1/2)(z^2 + 1)$	-0.5	Представление на сфере Римана	
64, 65	$(z - 1)(z + 1/2)/(z^2 + 1)$	-0.5	-0.35 ...0.52	-0.91...0.22
66	$z^3 - 1$	0	-1.333...1.333	1 ...1
75, 76	$(z - 1)(z^2 + z + 5/4)$	0.25	Представление на сфере Римана	
77, 78	$(z - 1)(z^2 + z + 1/2)$	0	-2.46 ...1.71	-0.28...0.28
89—98	Для $0 \leq \alpha \leq 1$ мы исследовали рациональные функции			
$z \mapsto z + \alpha \left(\frac{p_1(z)}{p_1'(z) + 0.25i} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{p_2(z)}{p_2'(z) - 0.5i} \right),$				
где $p_1(z) = (z - 1)(z^2 + z + 1.25)$ и $p_2(z) = (z - 1)(z + 0.5)(z^2 + 1)$.				

Процессы с двумя действительными переменными

Уравнения Лотки—Вольтерра, дискретизированные с помощью модифицированного алгоритма Хёна (см. разд. 9).

Фото 79—82: $h = k = 0.739$.

Фото 83—86: $h = 0.8$, $k = 0.86$.

На всех фотографиях изображено окно $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 4.5$.

Краевая задача, дискретизированная на N точках (см. разд. 8(8.2), (8.10)).

а) $f(u) = u - u^2$, $N = 2$.

Фото	μ	h	x_1	x_2
17	2.1	1.7	-5 ... 5	-5...5
67	2.1	0.1	-5 ... 5	-5...5
19, 68	3.2	0.2	-5 ... 5	-5...5
23, 71—73	3.2	1.9	-5 ... 5	-5...5
21, 87	3.2	1.8	-6.68...6.68	-5...5
69, 70, 88	см разд. 8 (8.14).			

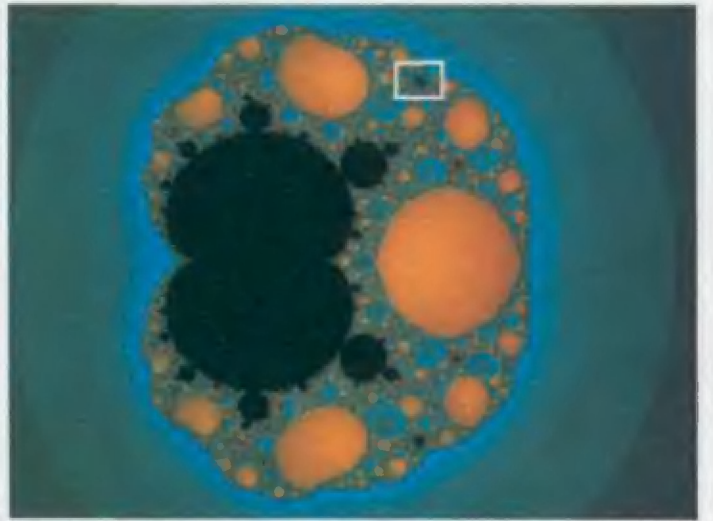
б) Осталось объяснить фото 55—57, 74, которые также принадлежат к числу дискретизированных краевых задач. Для них $f(u) = u - u^3$, $N = 6$, $\lambda = 50$, $h = 0.4$. Если $N = 6$, то это фактически 6-мерная задача, но 5 действительных решений

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

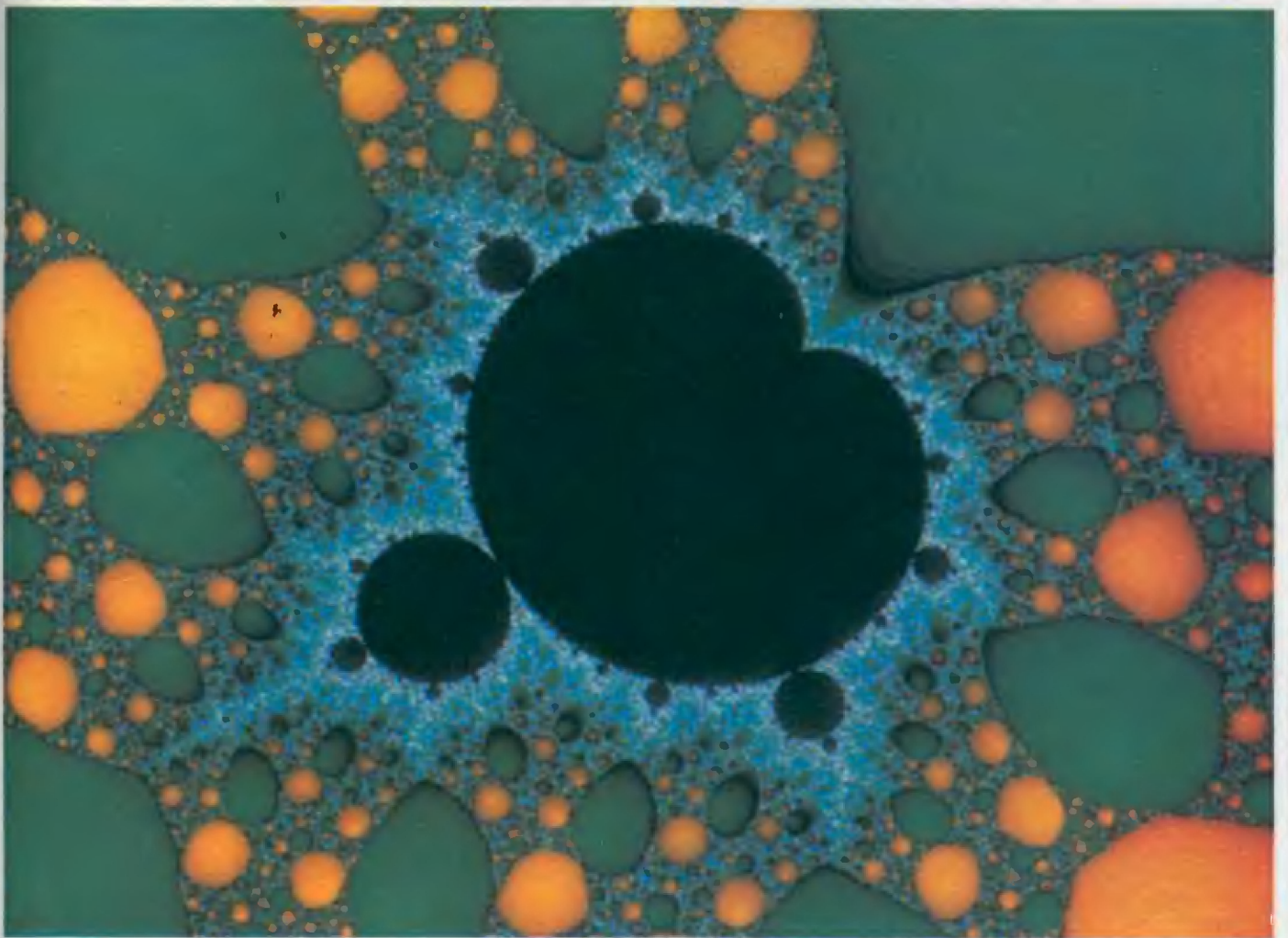
$$\pm(0.63960, 0.89354, 0.96368, 0.96368, 0.89354, 0.63960),$$

$$\pm(0.47340, 0.57200, 0.27789, -0.27789, -0.57200, -0.47340)$$

выделяют двухмерную плоскость. Выберем ее в качестве плоскости (x, y) , а оси x и y определим так, чтобы решения попали соответственно в точки $(0, 0)$, $\pm(1, 0)$ и $\pm(0, 1)$. Фото 55—57, 74 в этом случае соответствует окно $-4 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 3$.



Φoto 1



Φoto 2

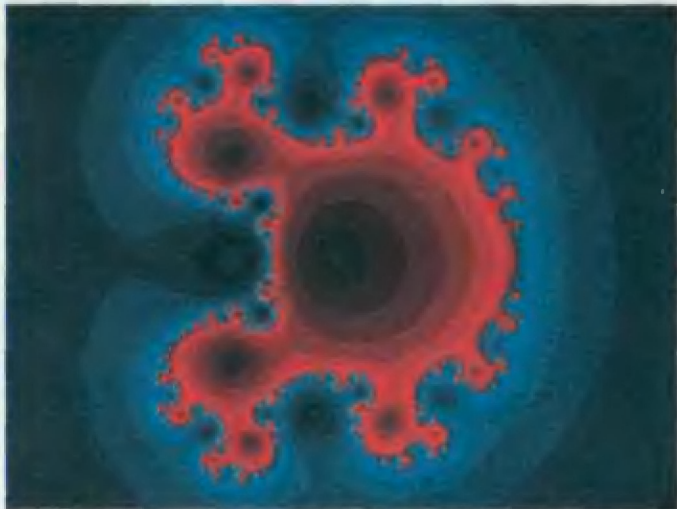


Фото 3



Фото 4

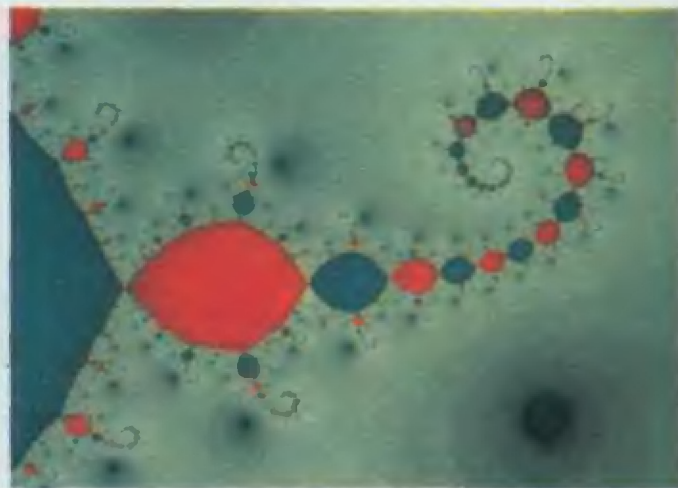


Фото 6

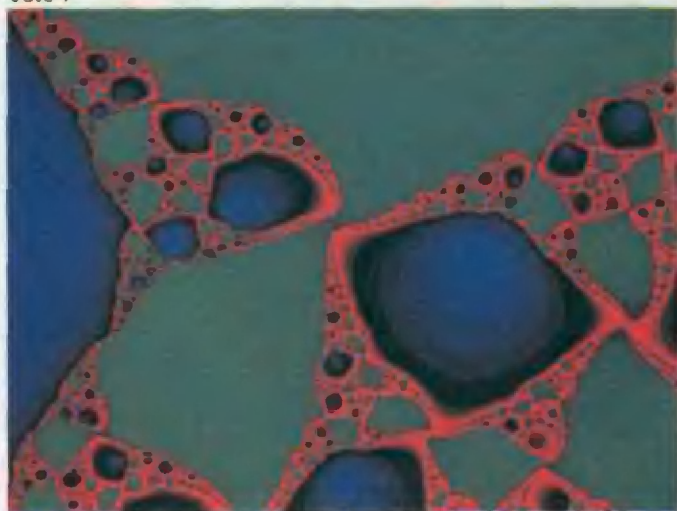


Фото 5



ФОТО 8

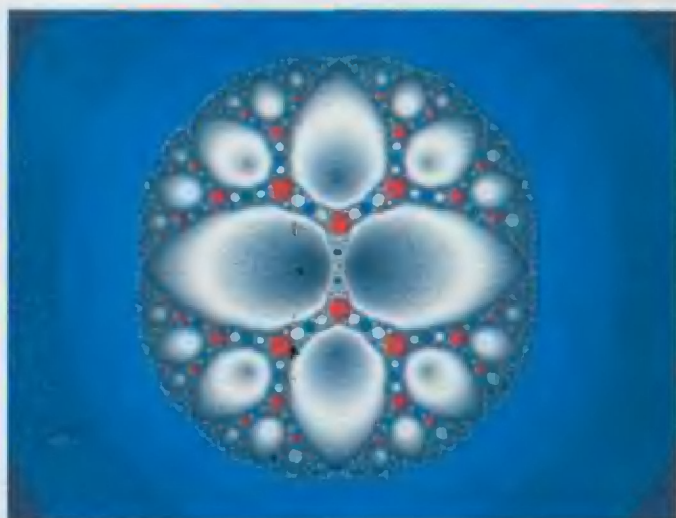


ФОТО 7

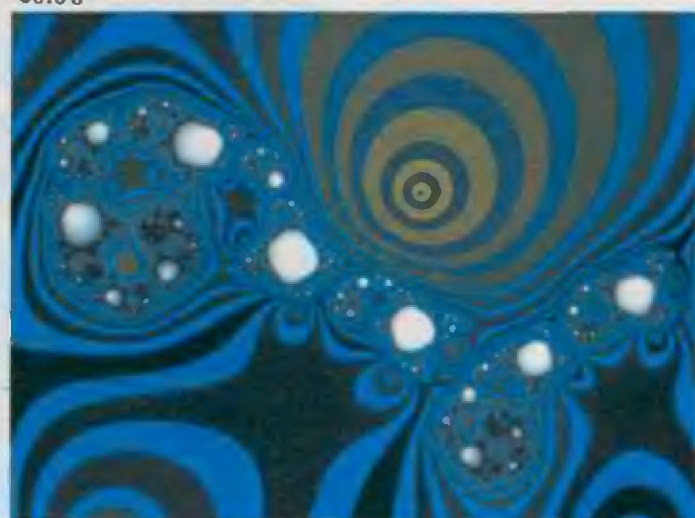


ФОТО 9

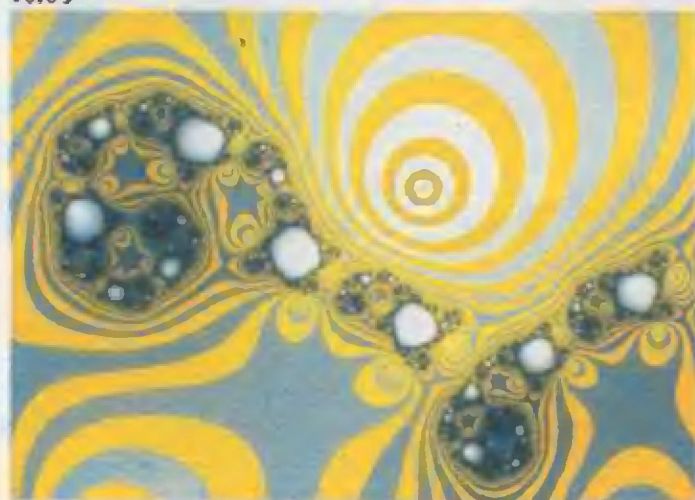


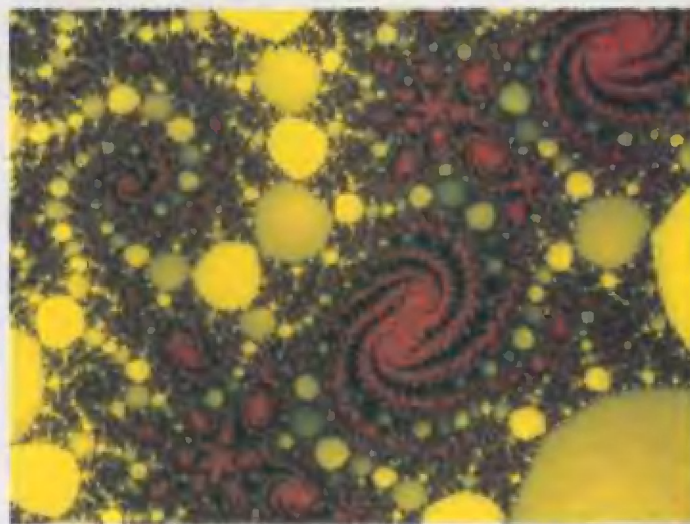
ФОТО 10



Φoto 11



Φoto 12



Φoto 13

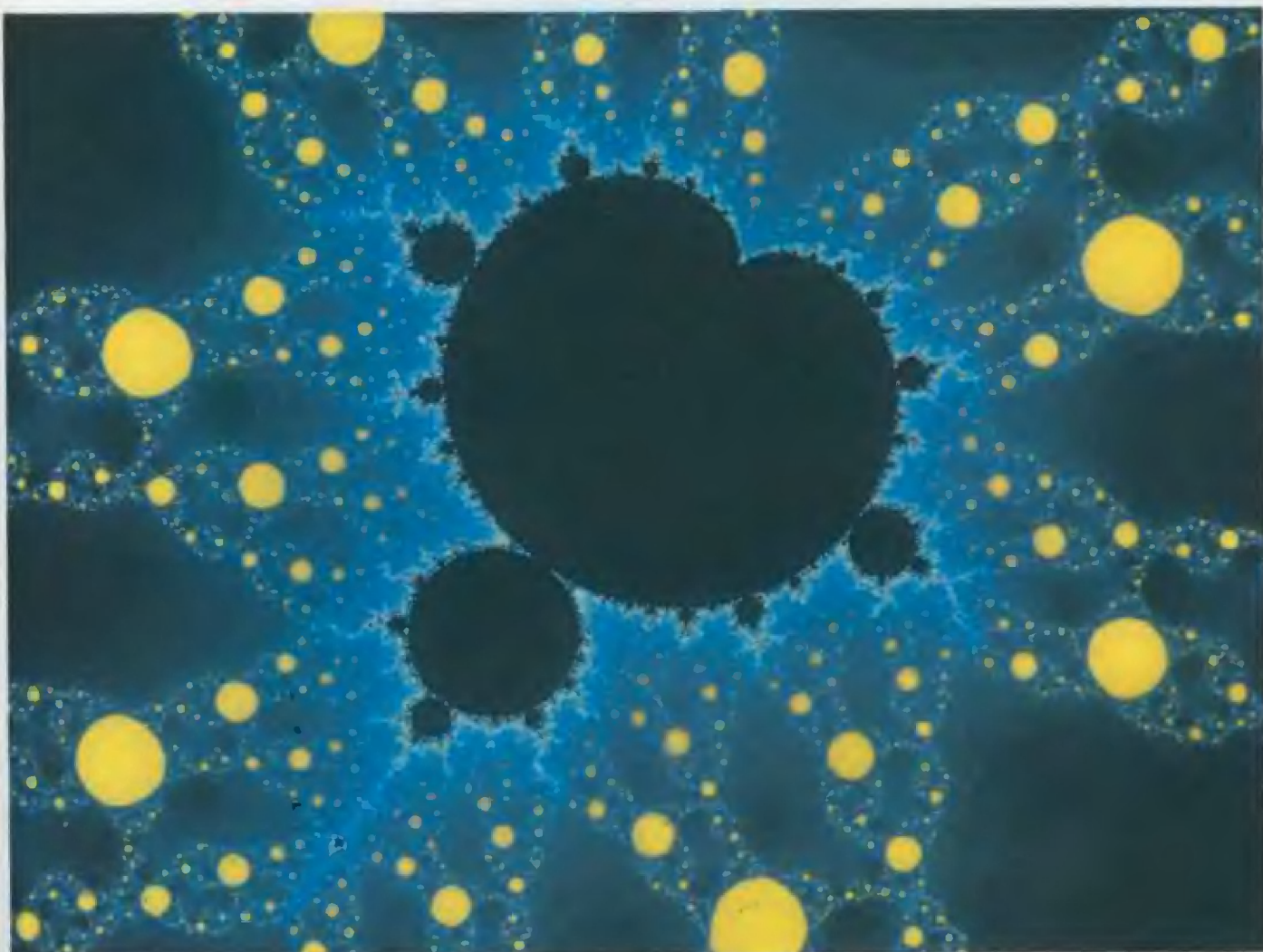


Фото 14

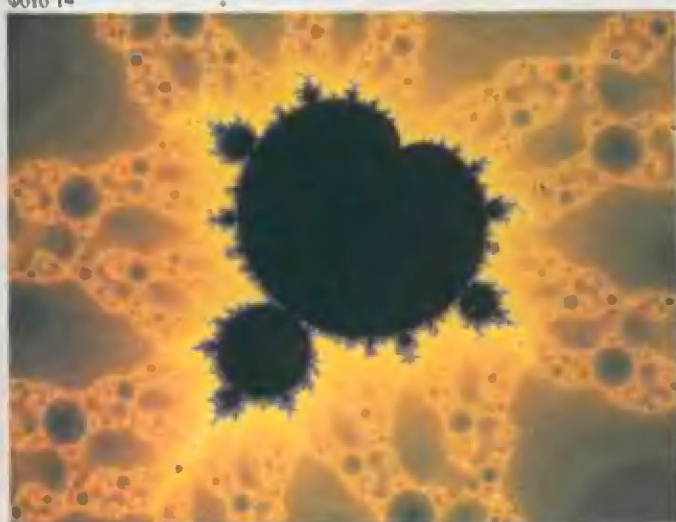


Фото 15

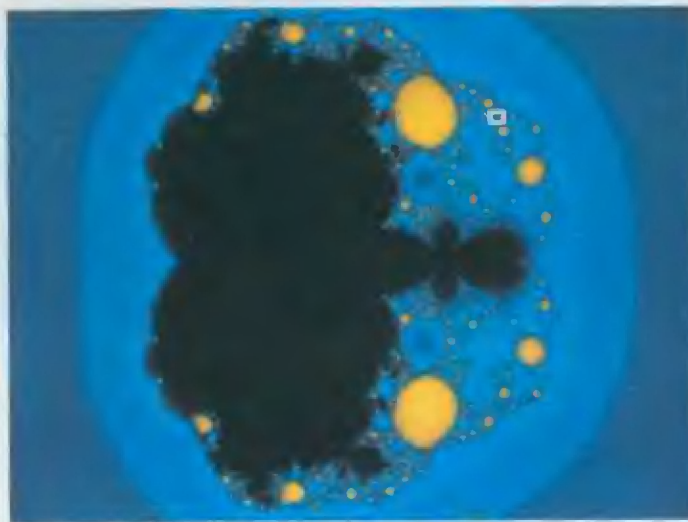


Фото 16

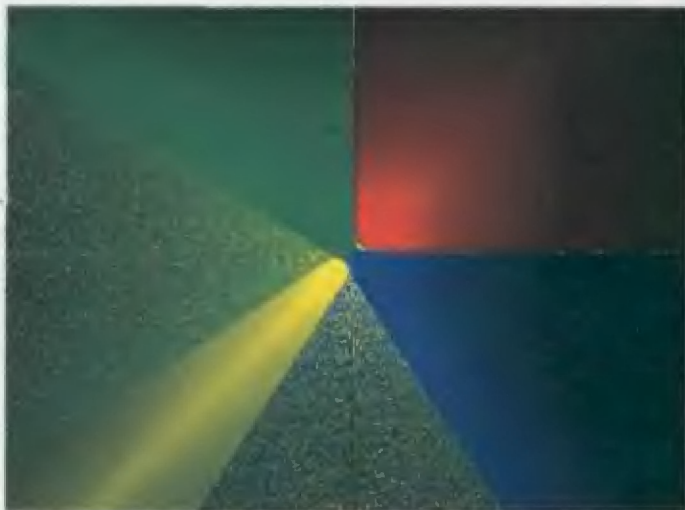


Фото 19

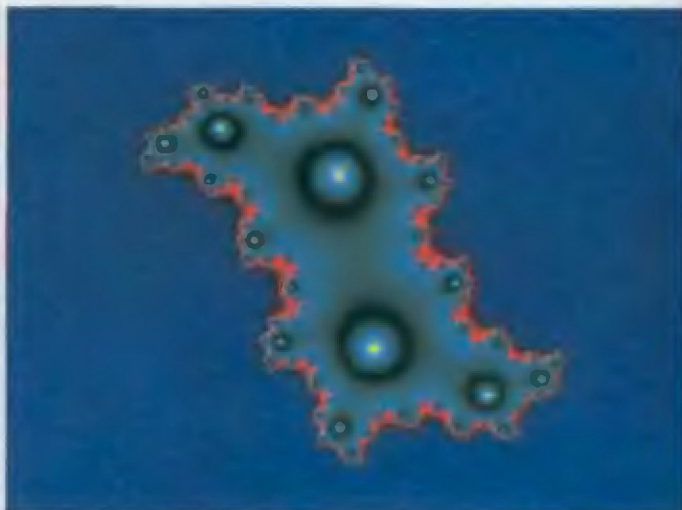


Фото 20



Фото 21

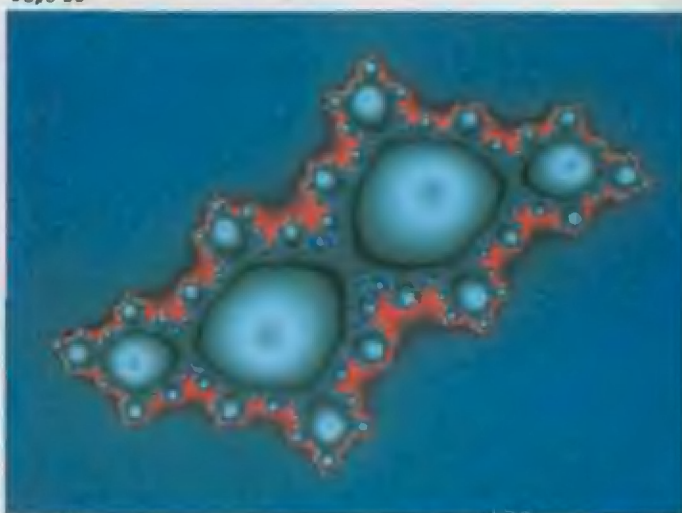


Фото 22

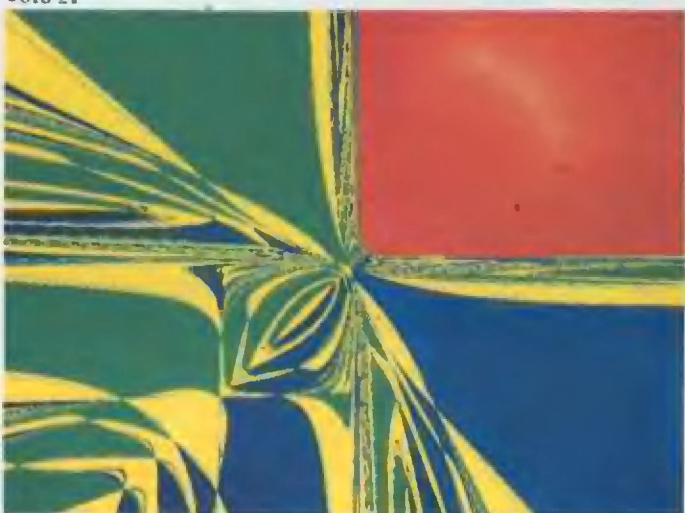


Фото 23

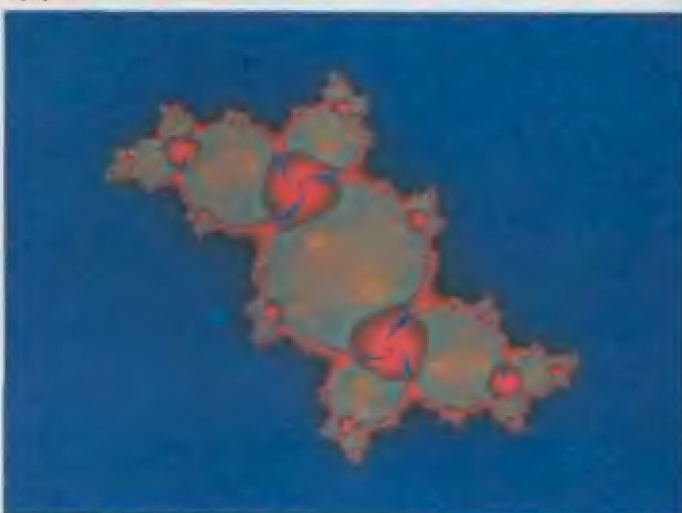
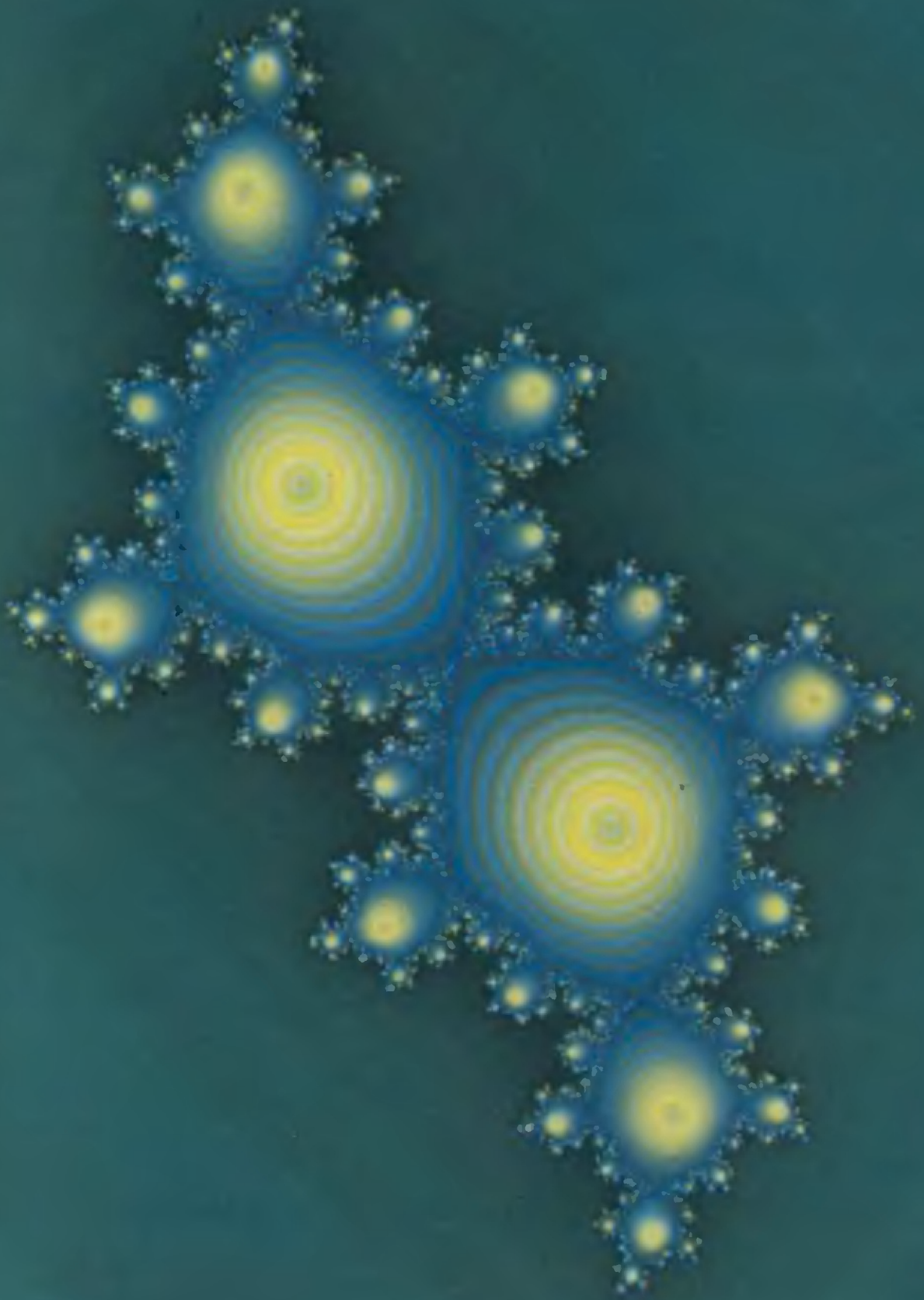


Фото 24



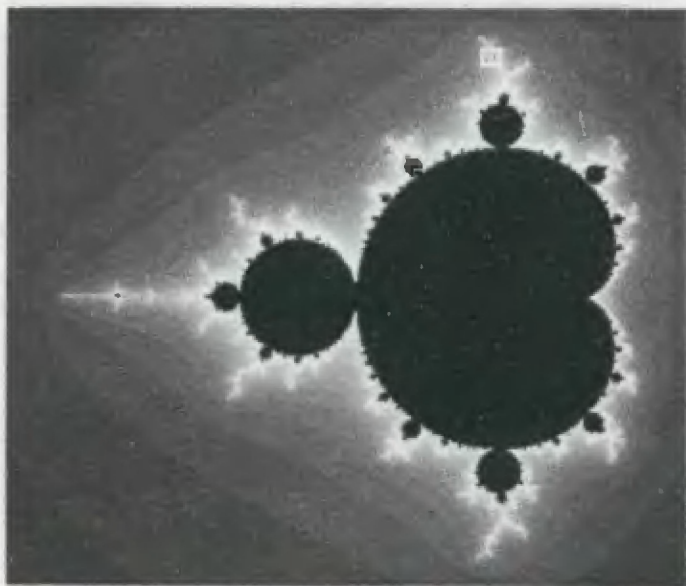


Фото 26

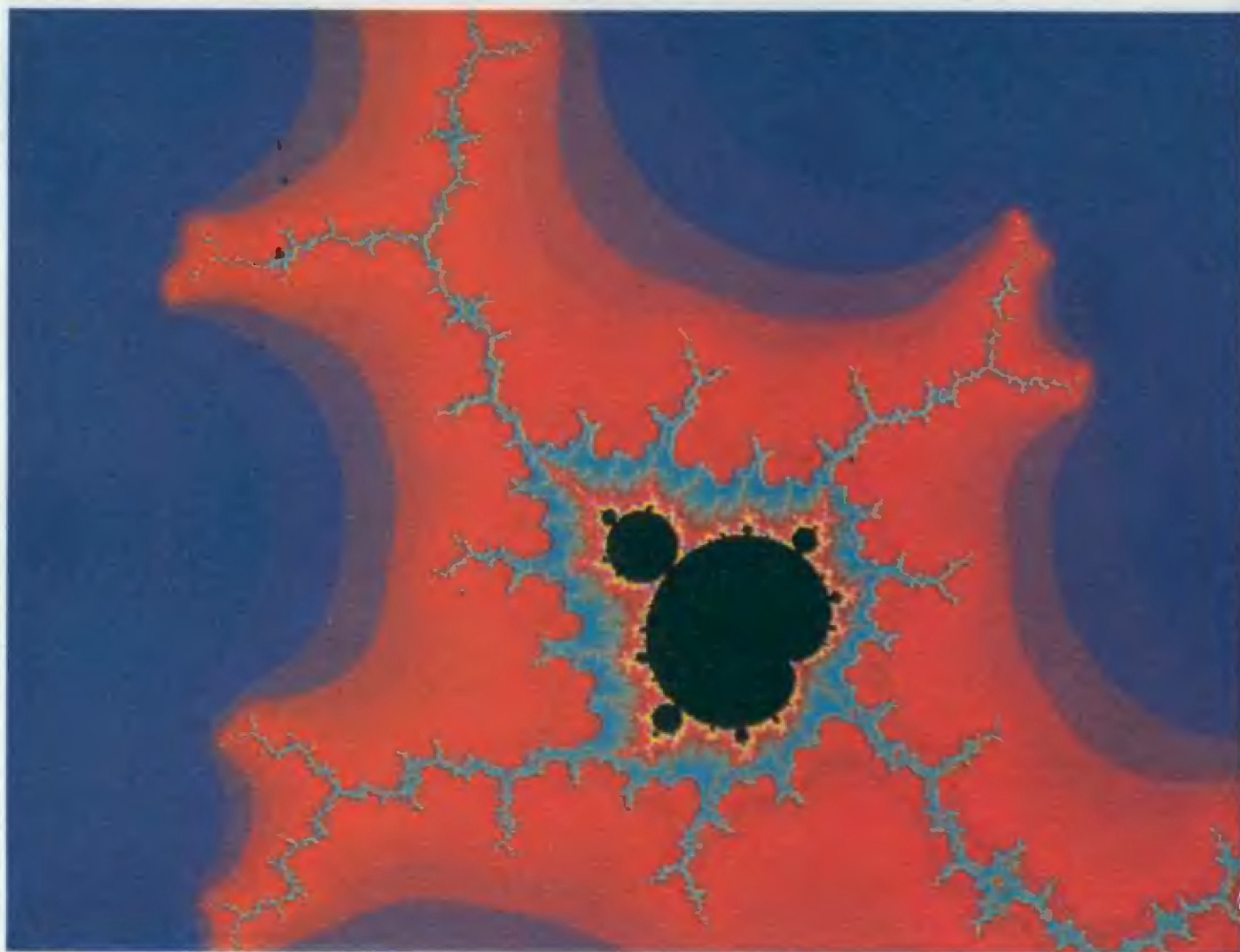


Фото 27

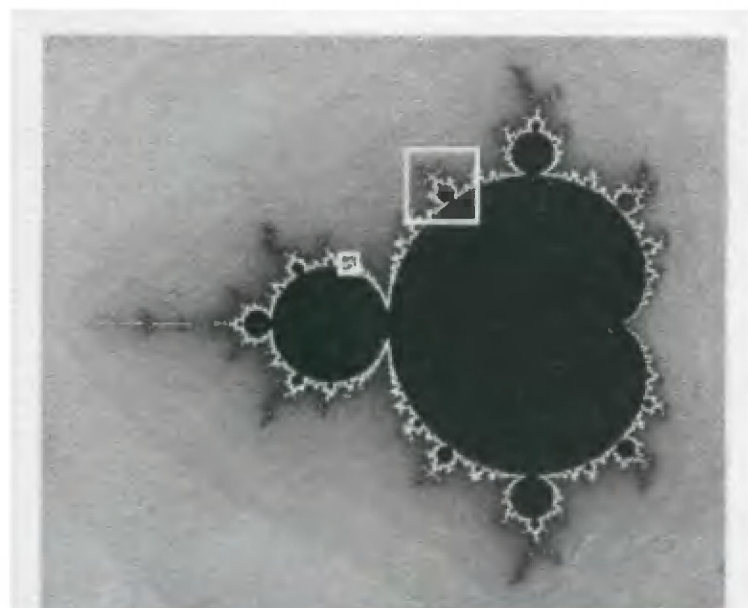


ФОТО 28

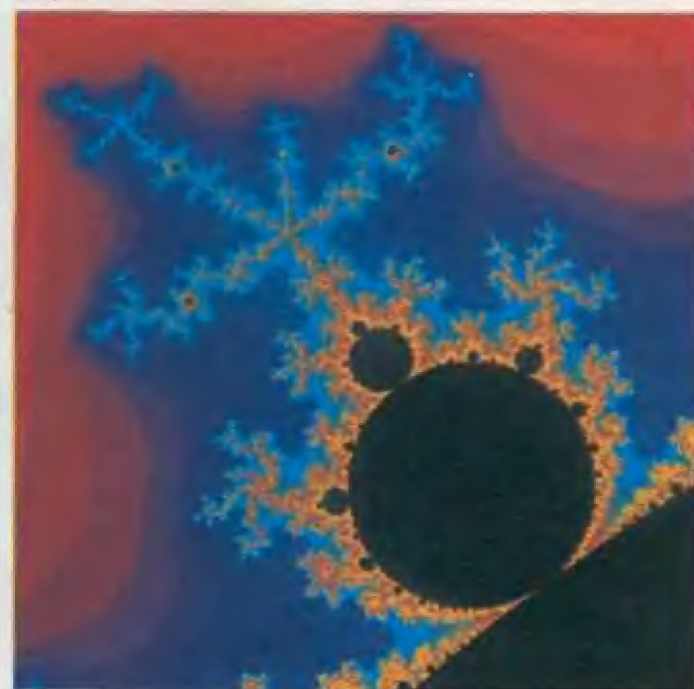


ФОТО 30

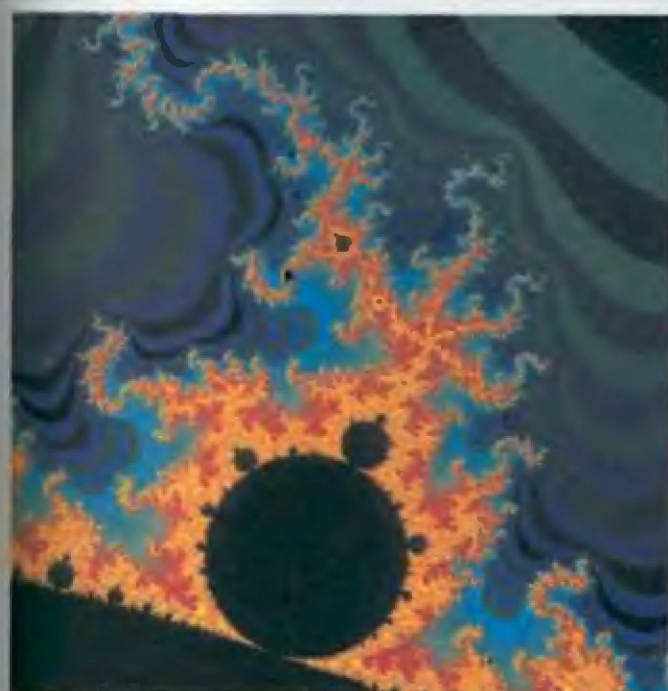
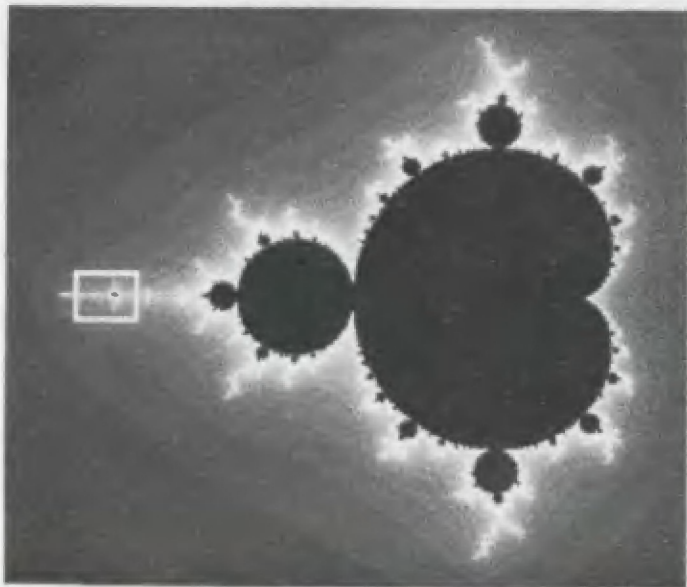
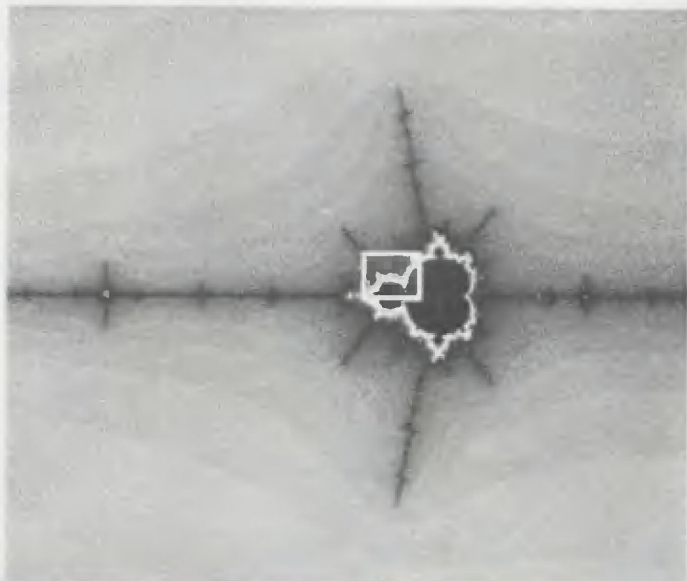


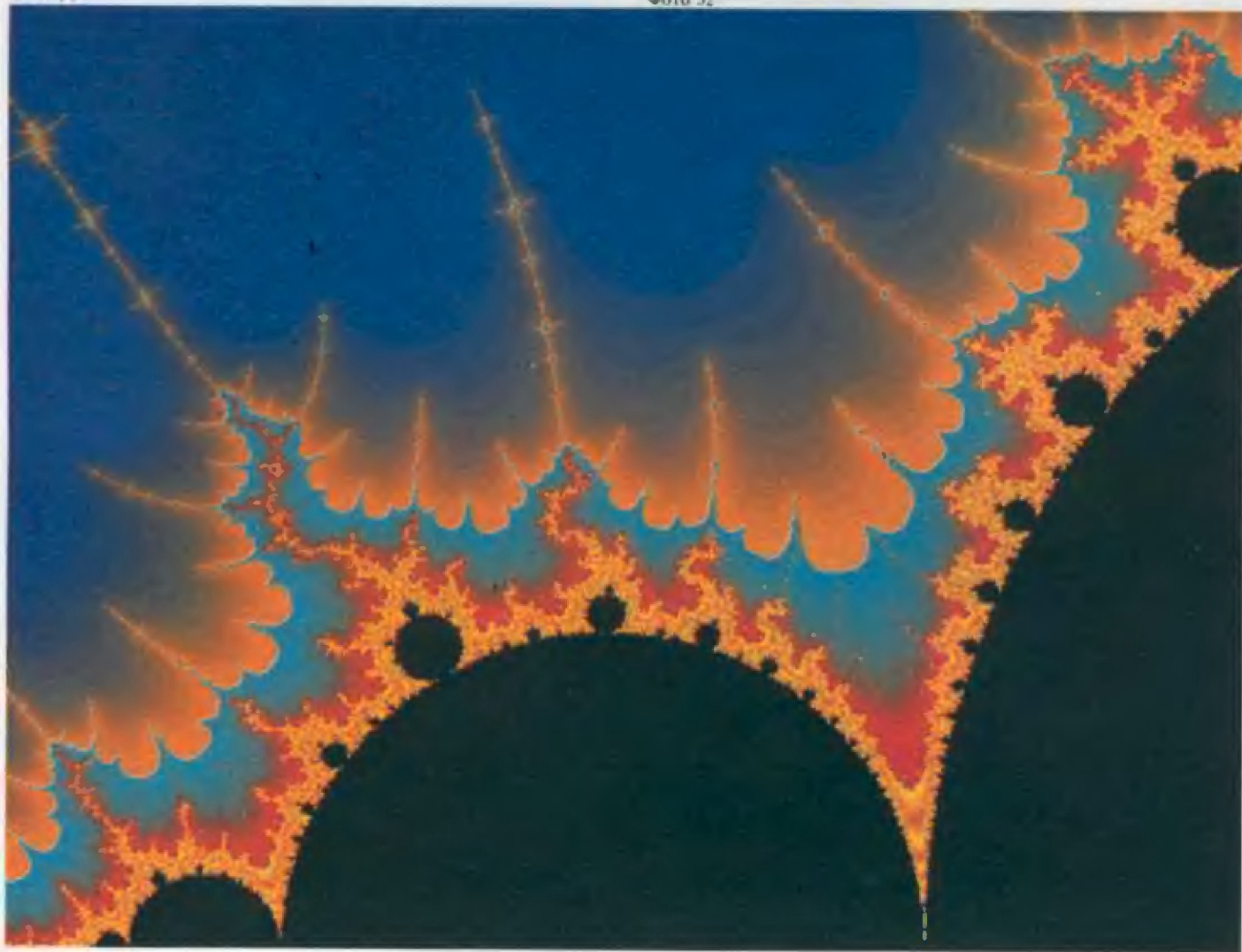
ФОТО 29



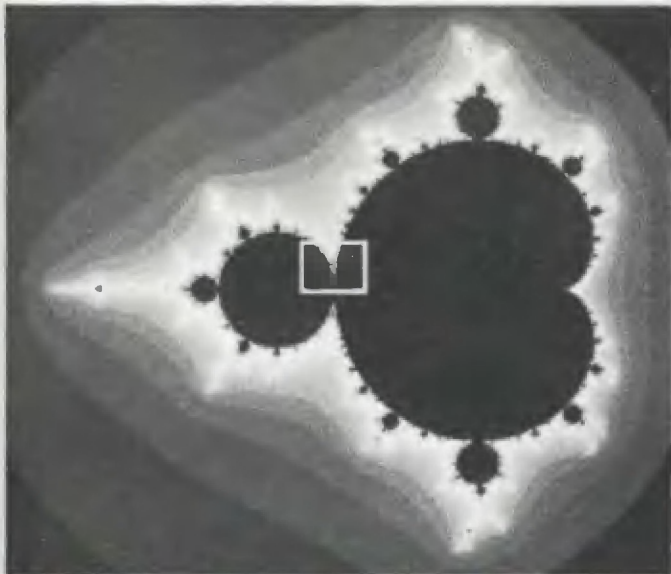
ΦOTO 31



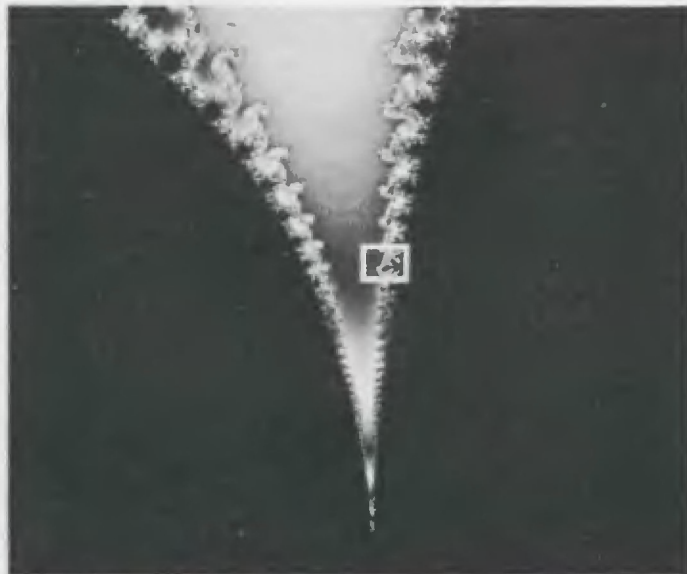
ΦOTO 32



ΦOTO 33



ΦOTO 34



ΦOTO 35



ΦOTO 36



Фото 37



Фото 38

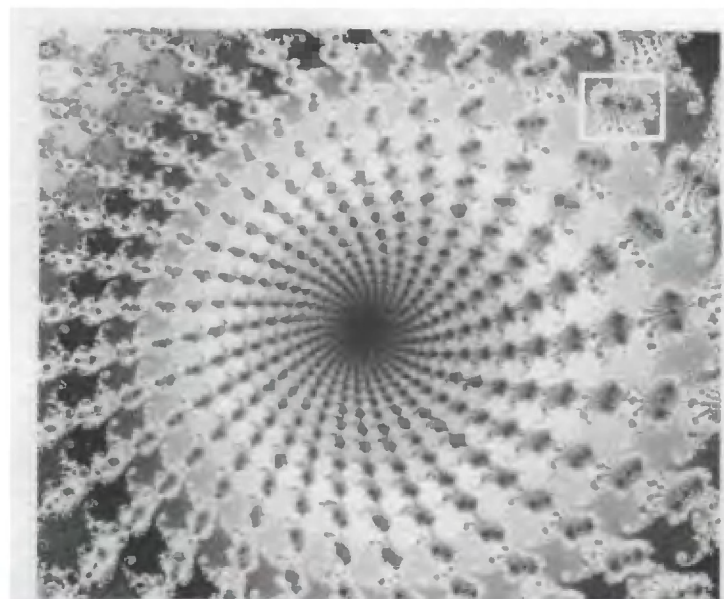


Фото 39

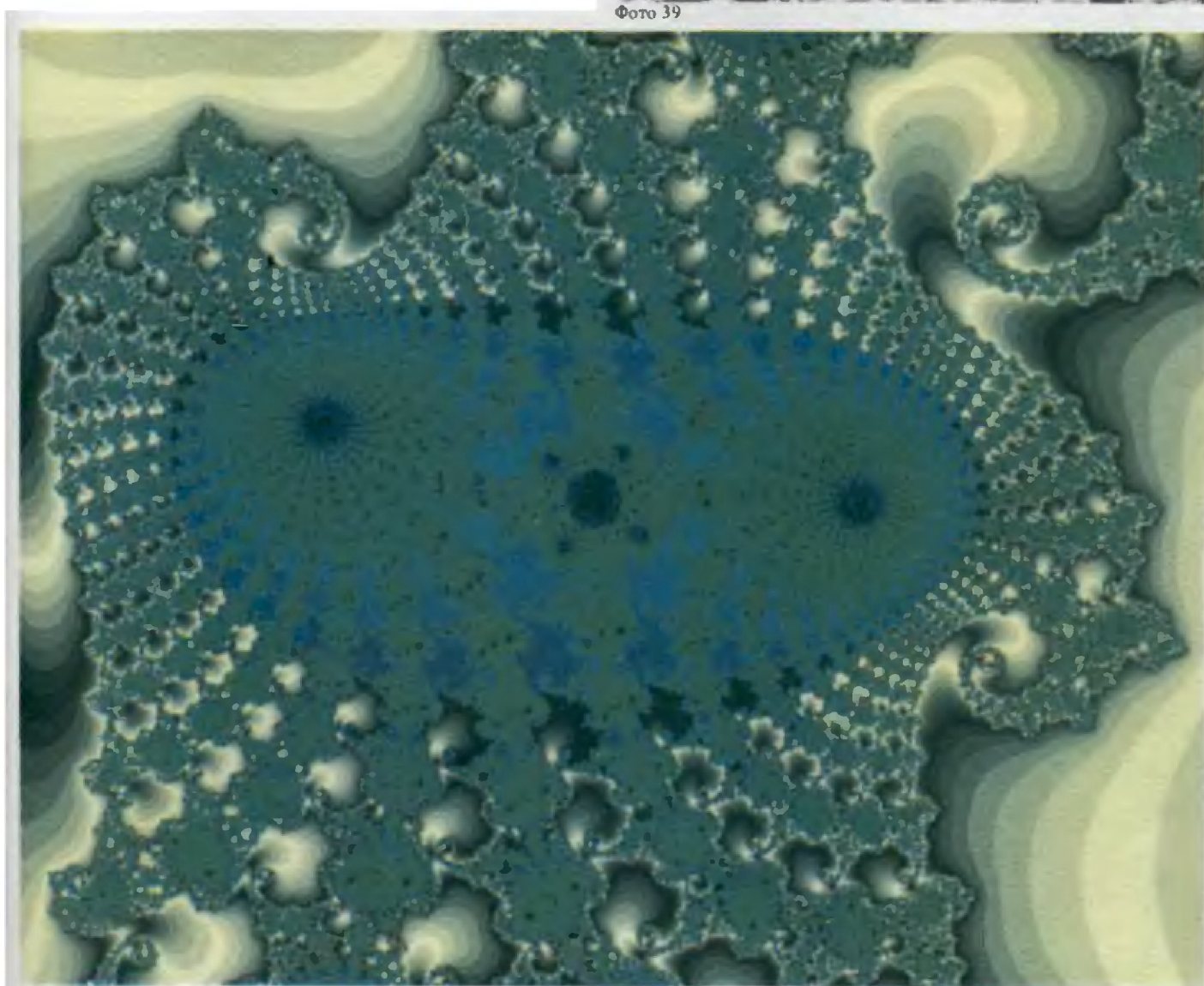


Фото 40

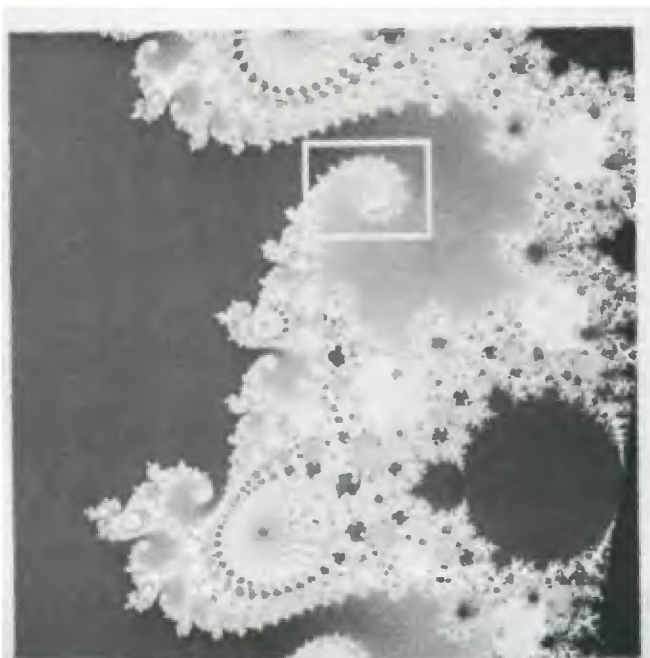


ФОТО 41

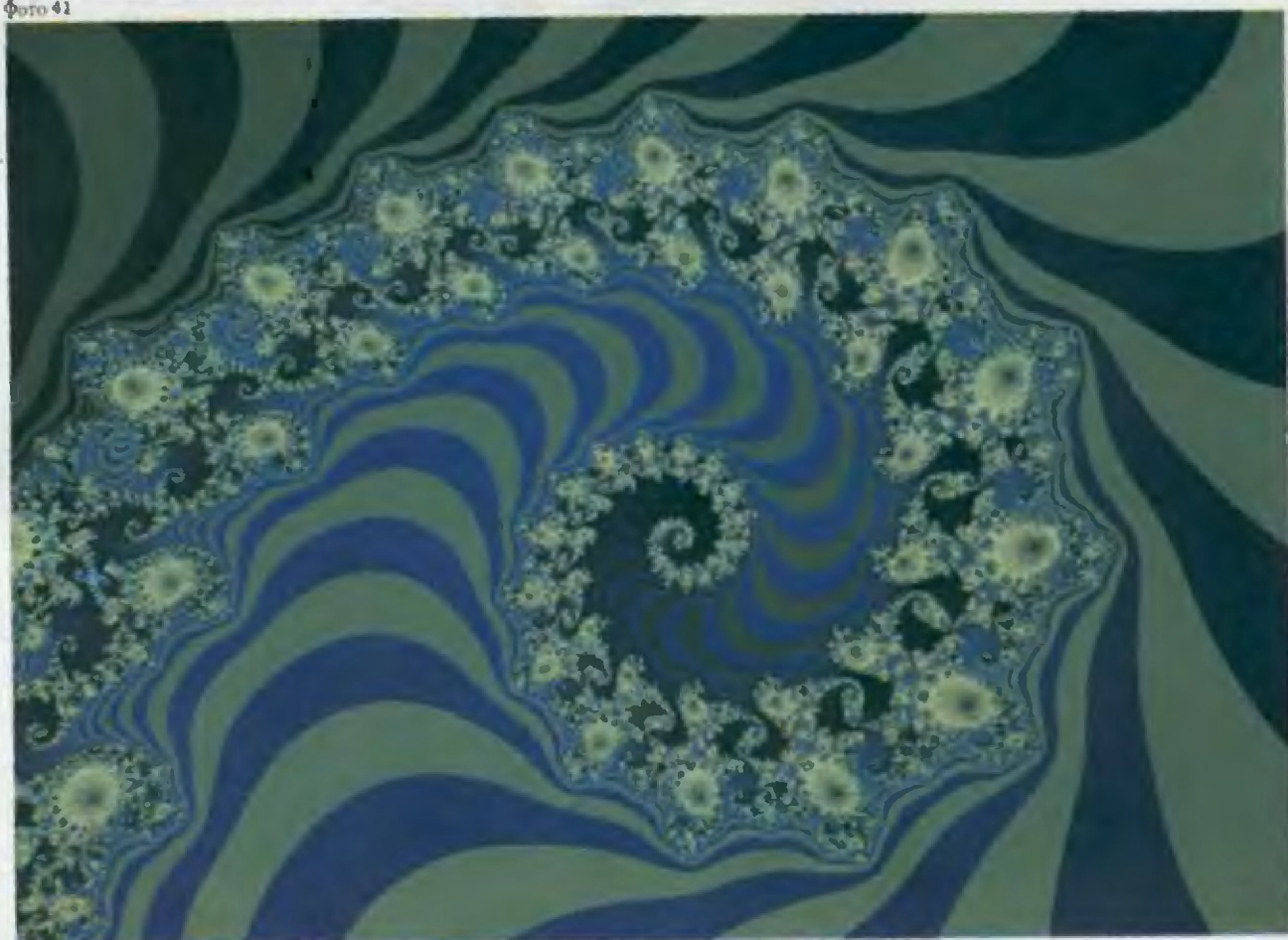
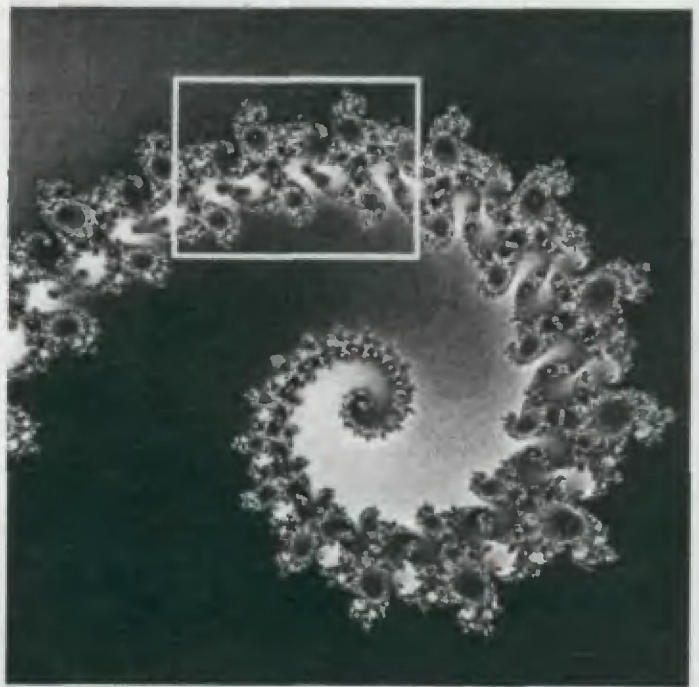
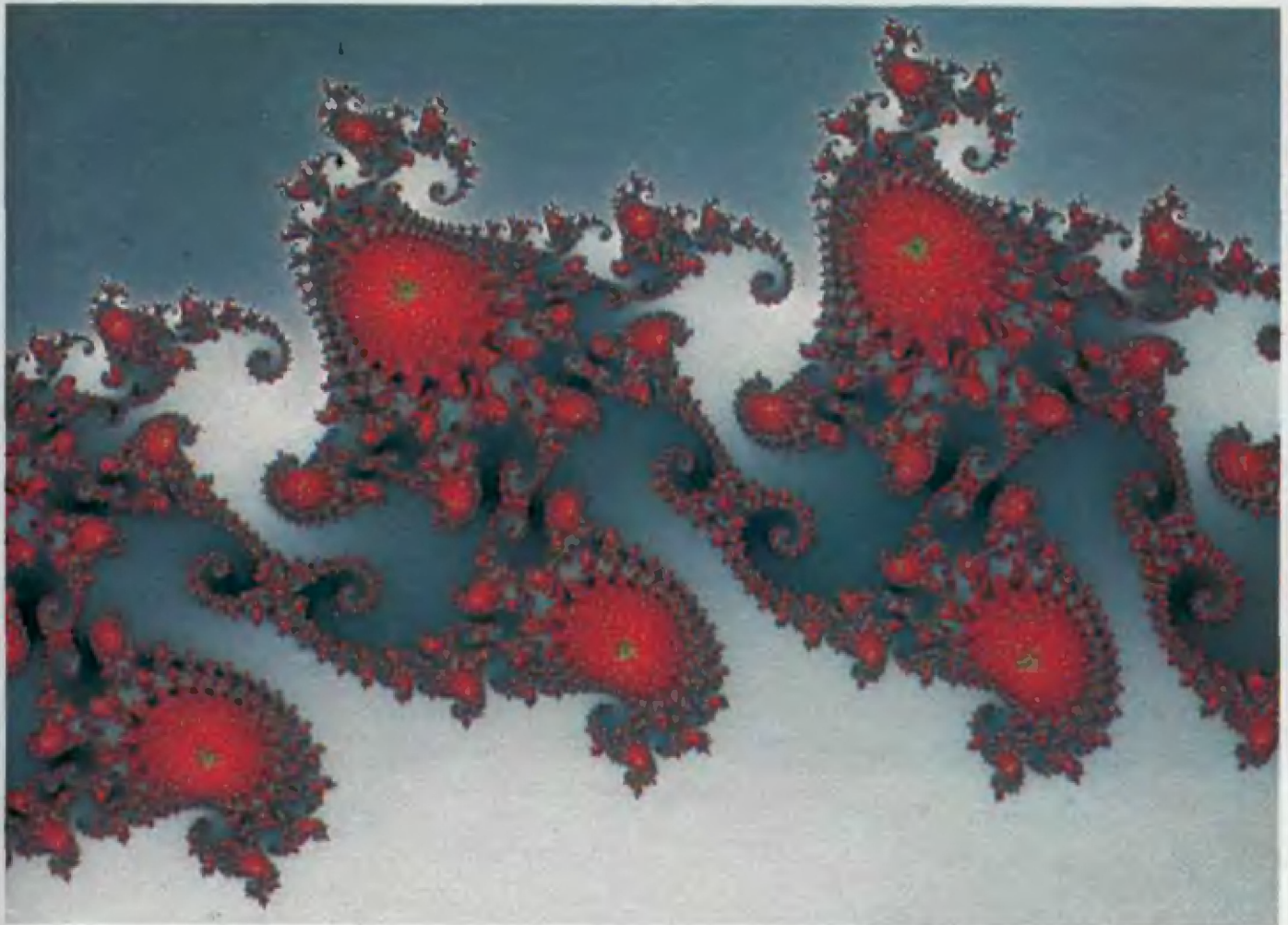


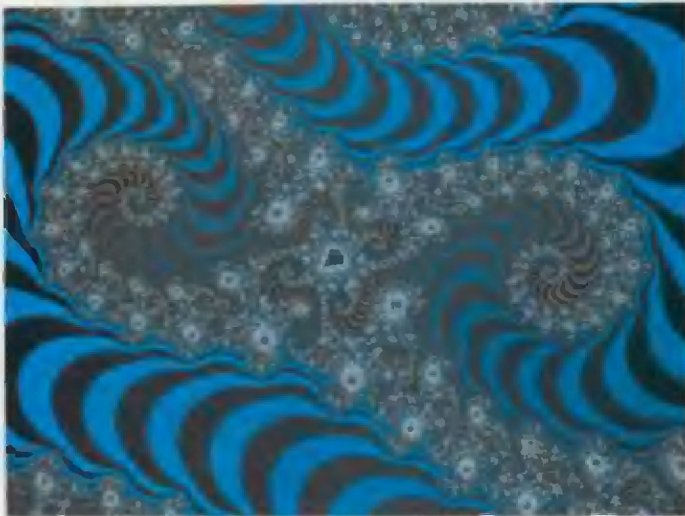
ФОТО 42



ΦOTO 43



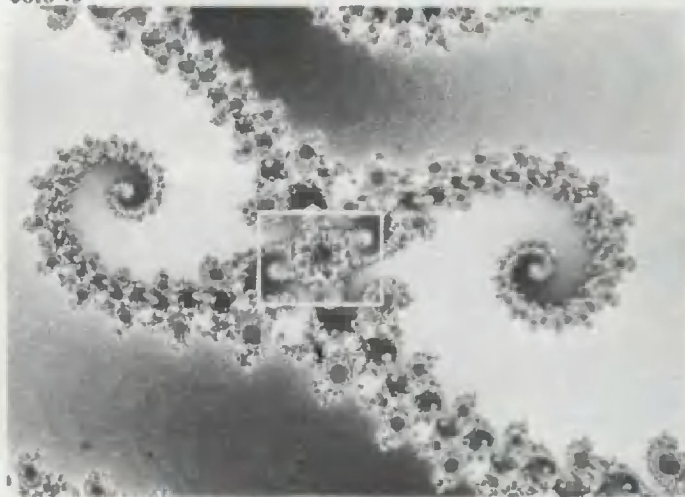
ΦOTO 44



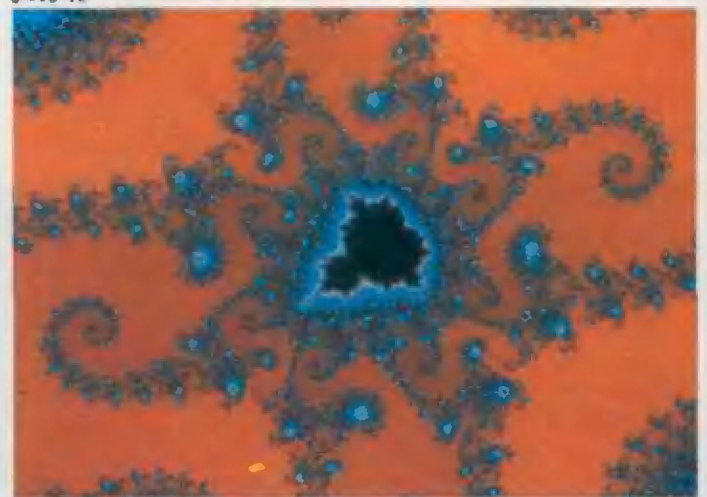
ΦOTO 45



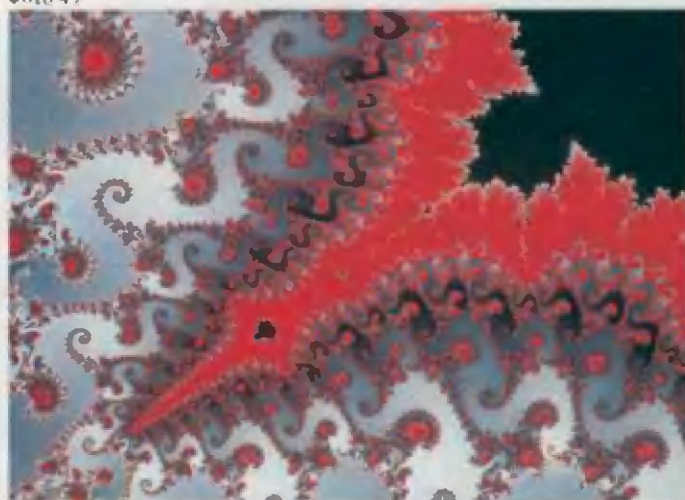
ΦOTO 46



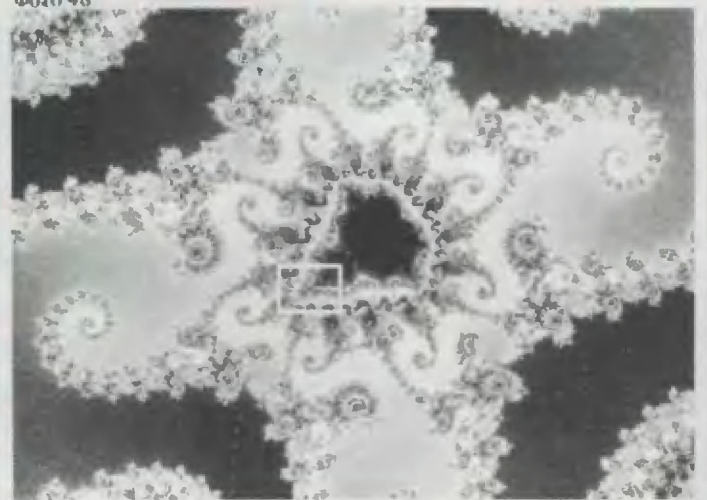
ΦOTO 47



ΦOTO 48



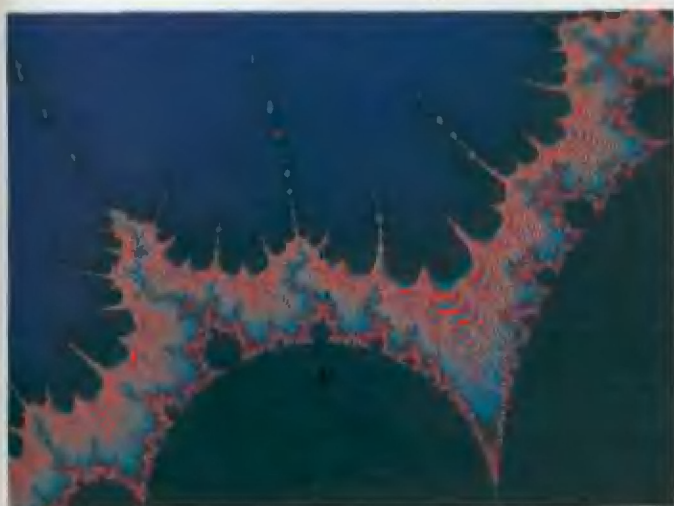
ΦOTO 49



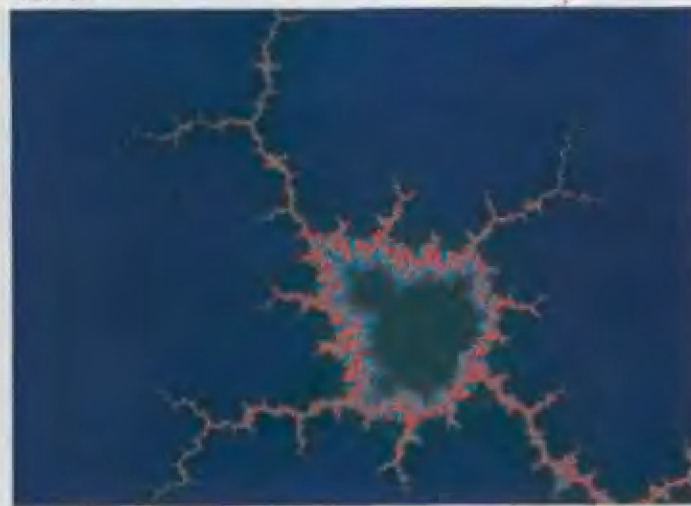
ΦOTO 50



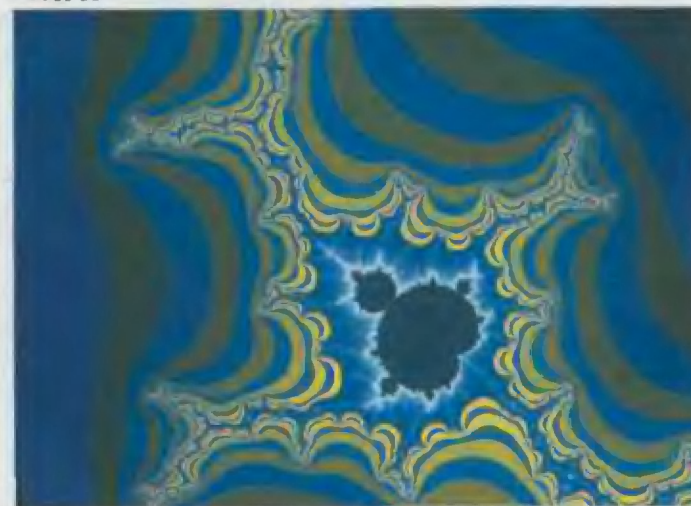
Φoto 52



Φoto 51



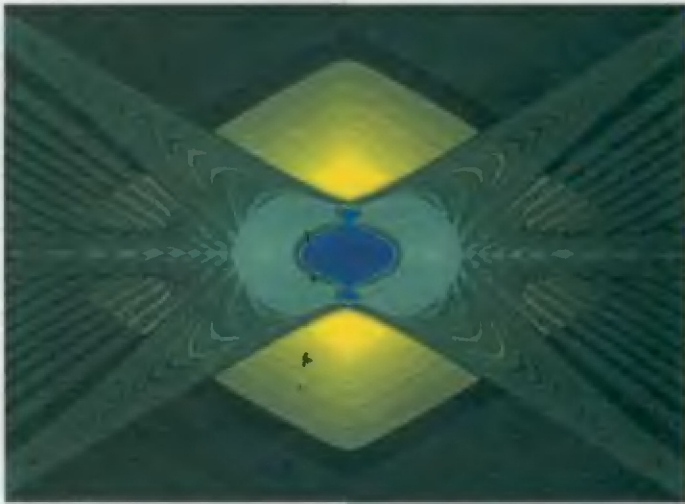
Φoto 53



Φoto 54



ΦOTO 55



ΦOTO 56



ΦOTO 57



Фото 58

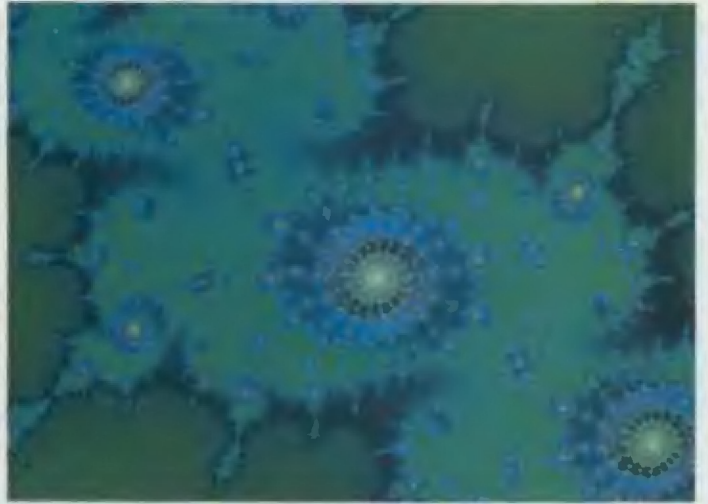


Фото 59



Фото 60



Фото 61



Фото 62

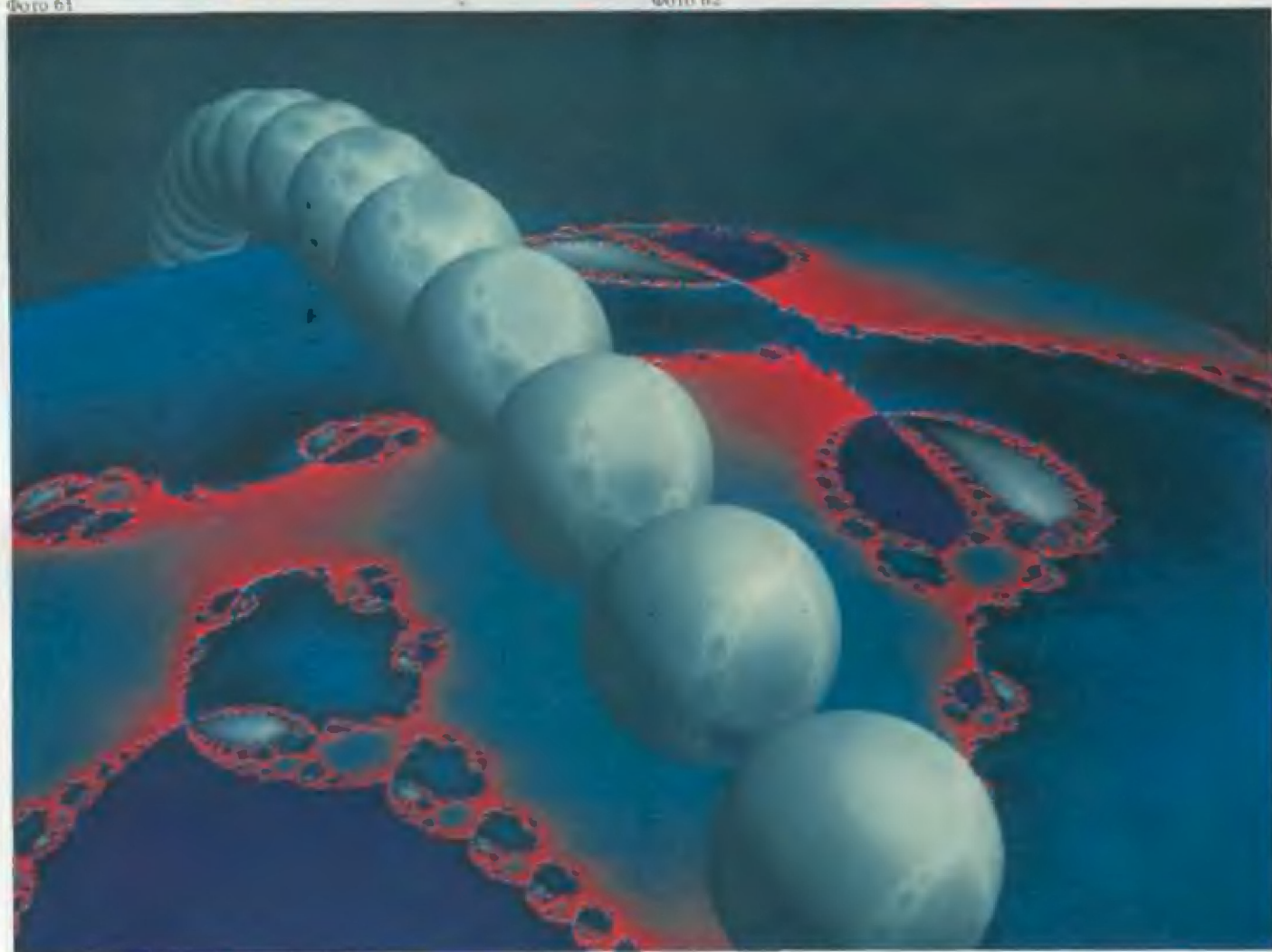


Фото 63

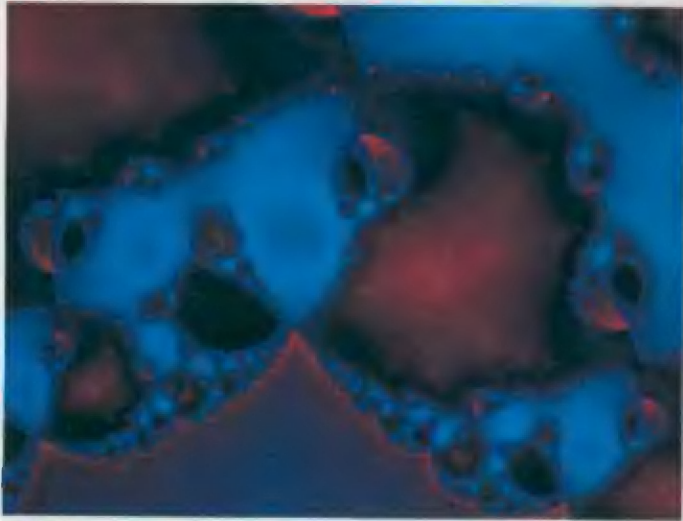


Фото 64



Фото 65



Фото 66

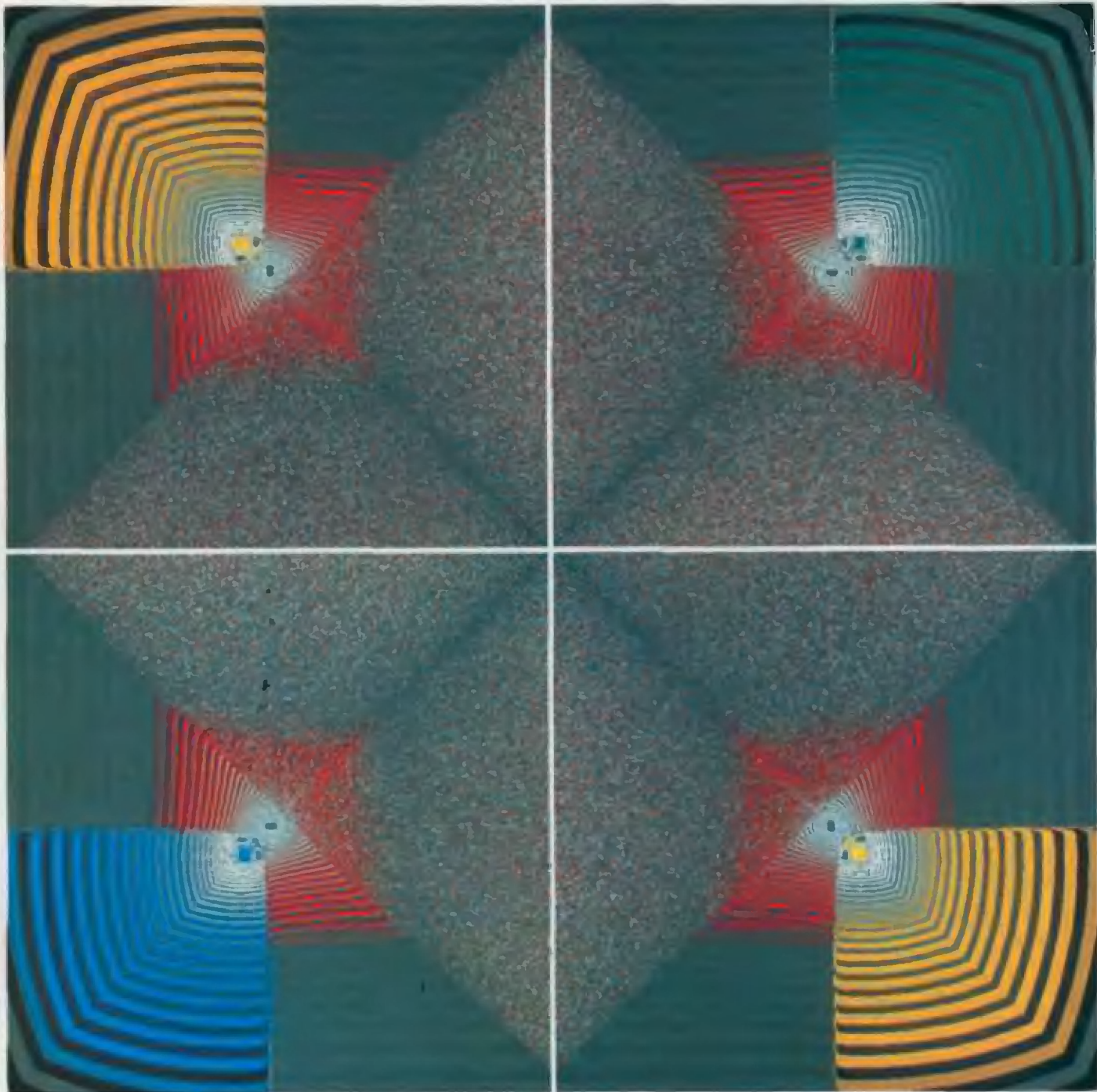


Фото 67



Фото 68





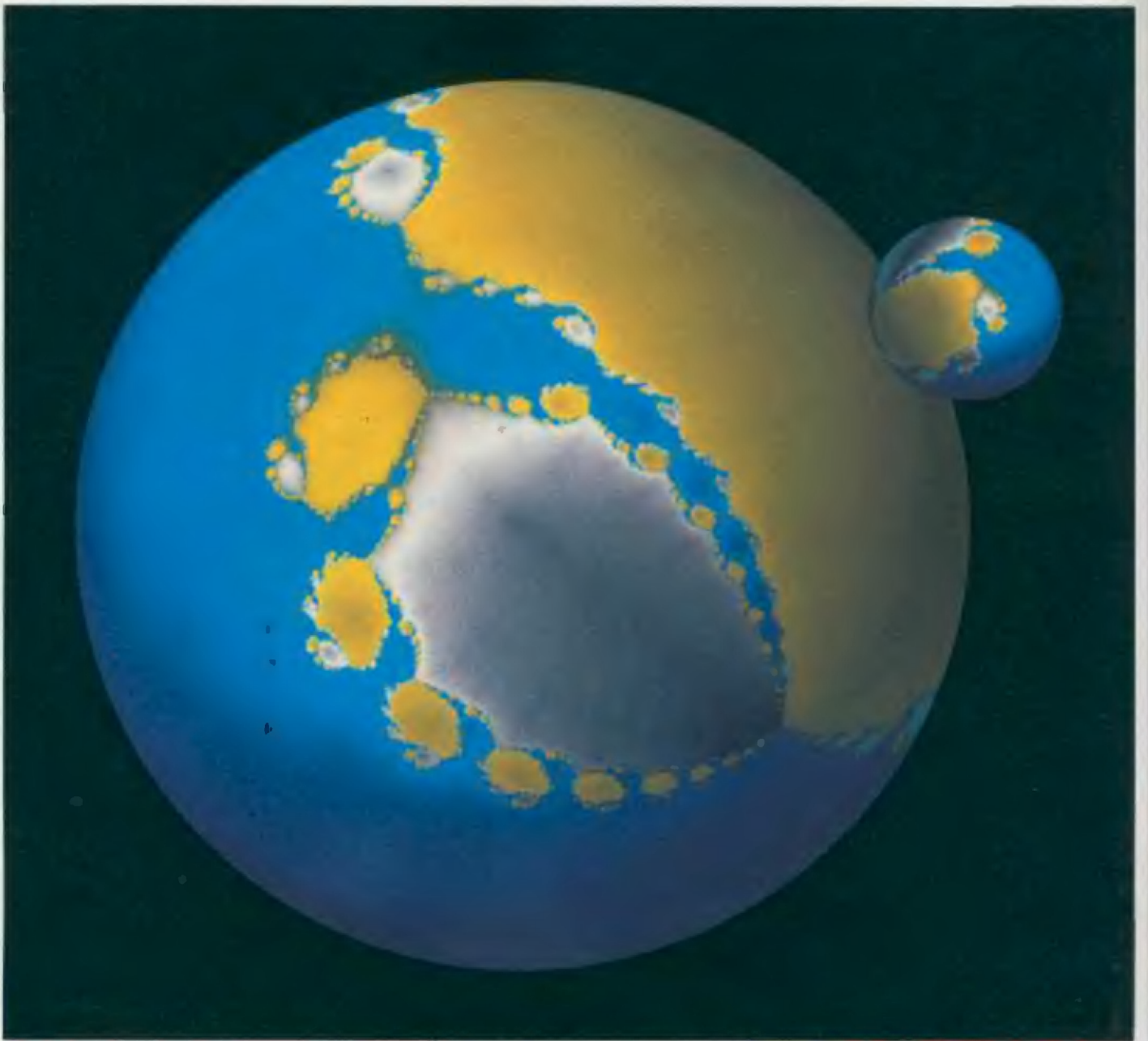


Фото 75

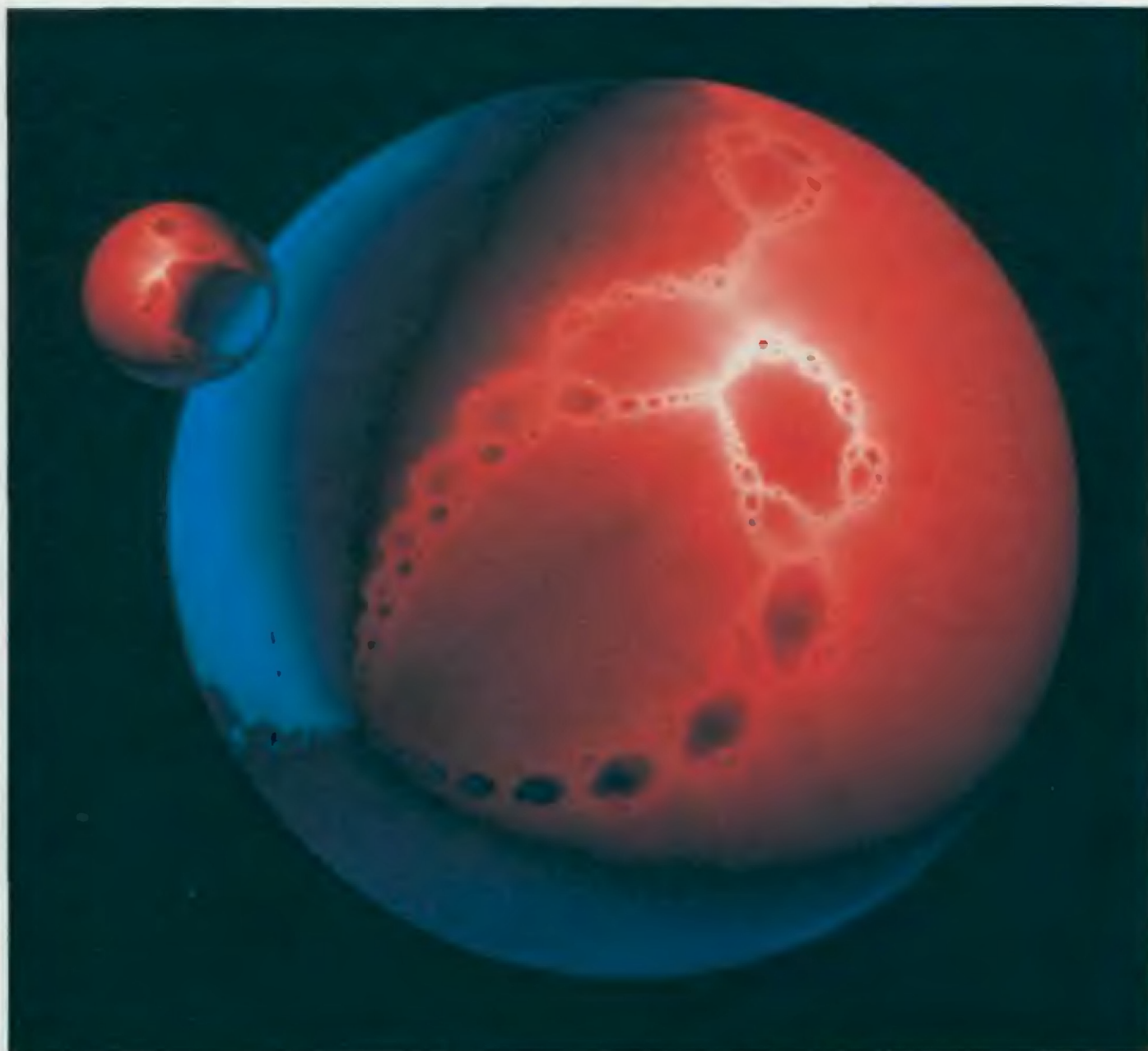
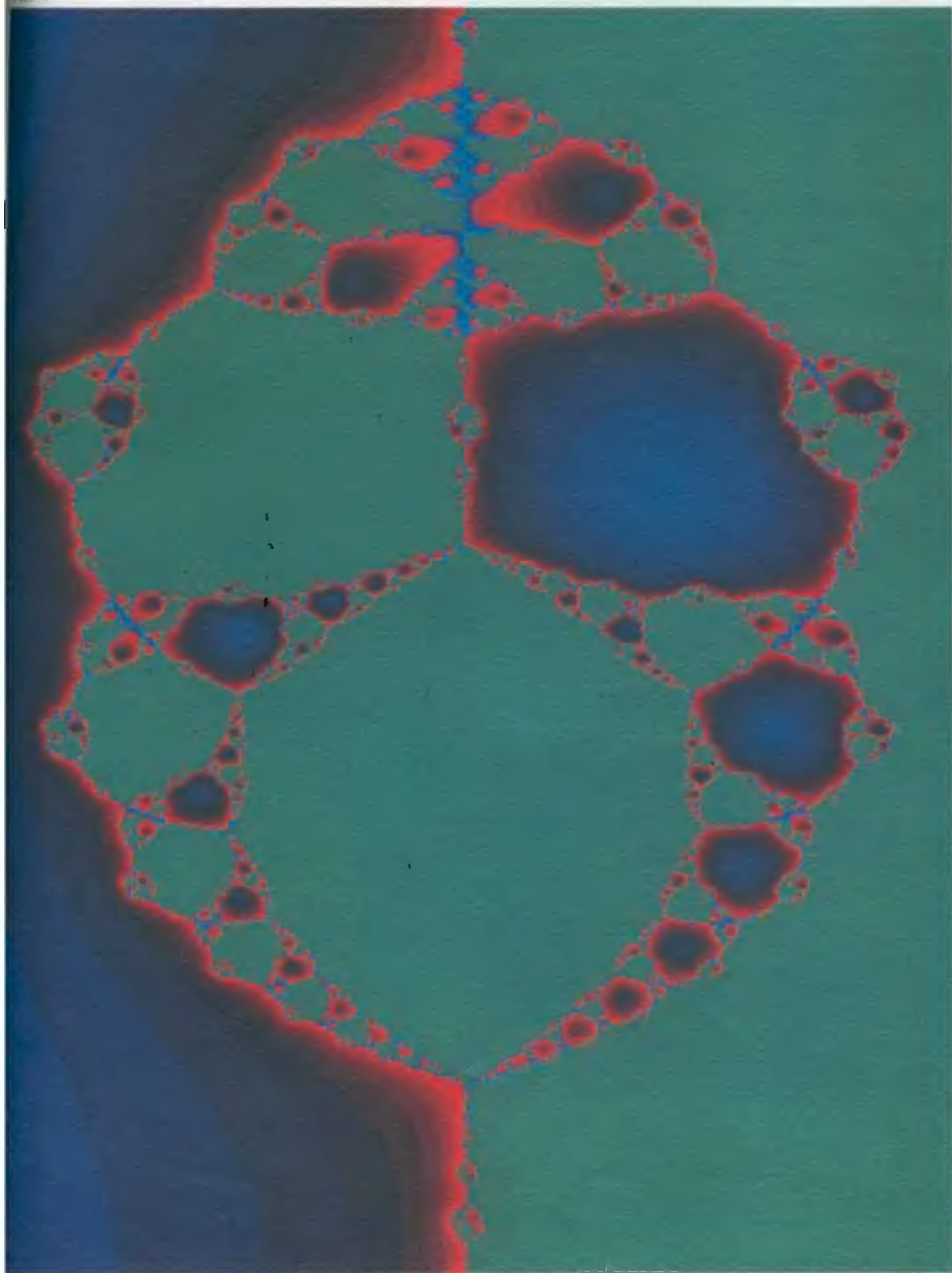


Фото 76





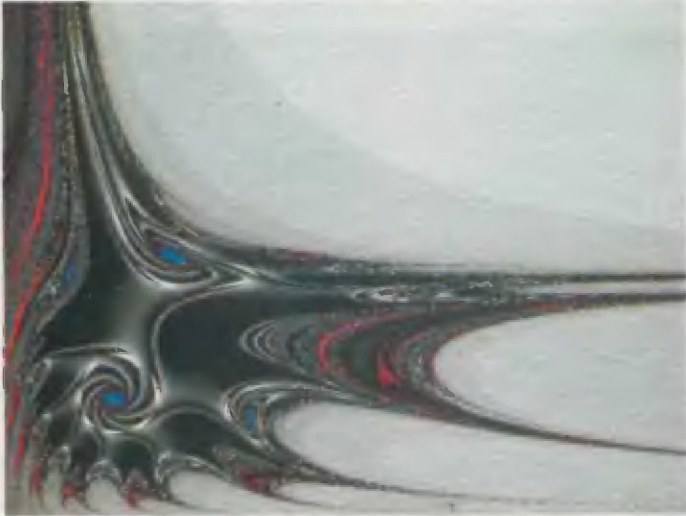


Фото 79

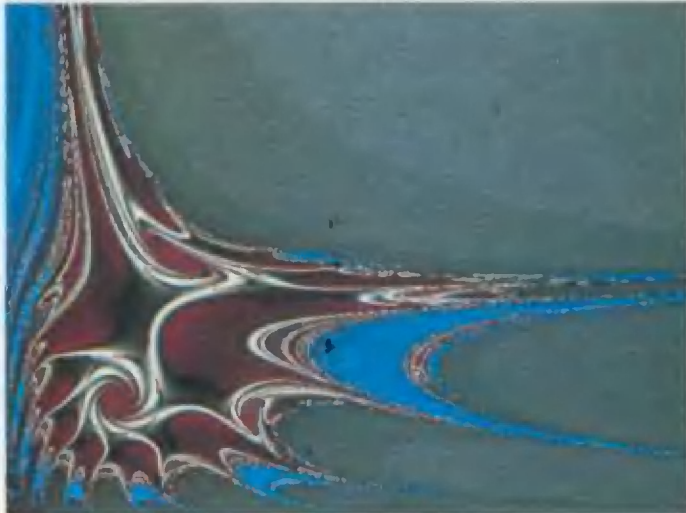


Фото 80



Фото 82



Фото 81



Фото 84

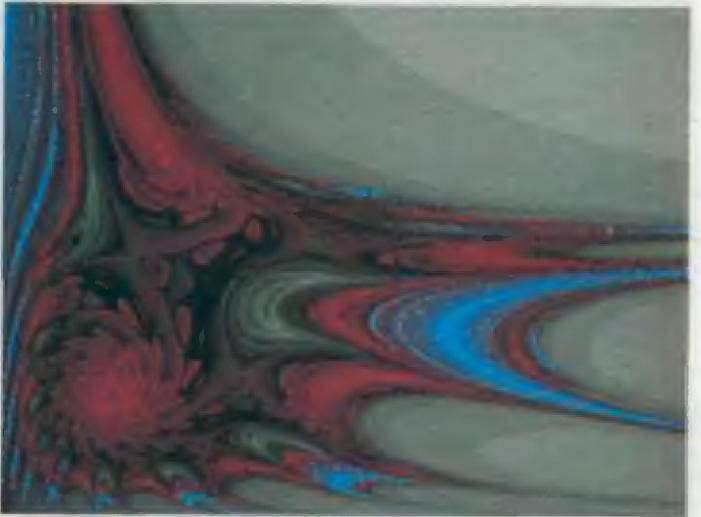


Фото 85



Фото 86

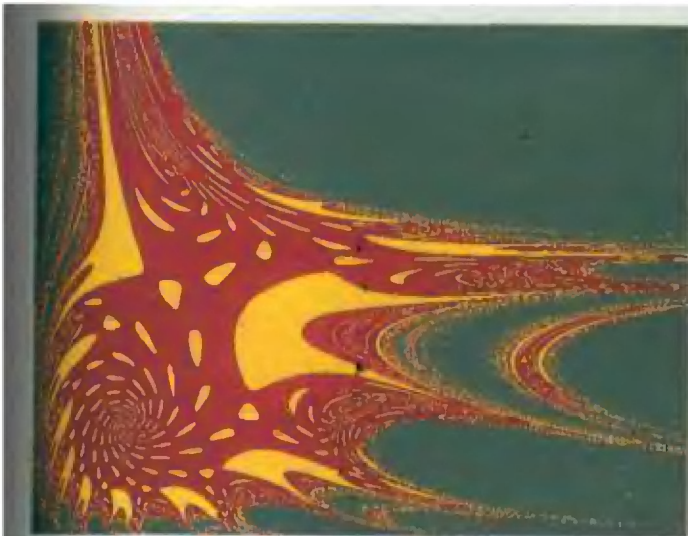


Фото 83



Фото 87

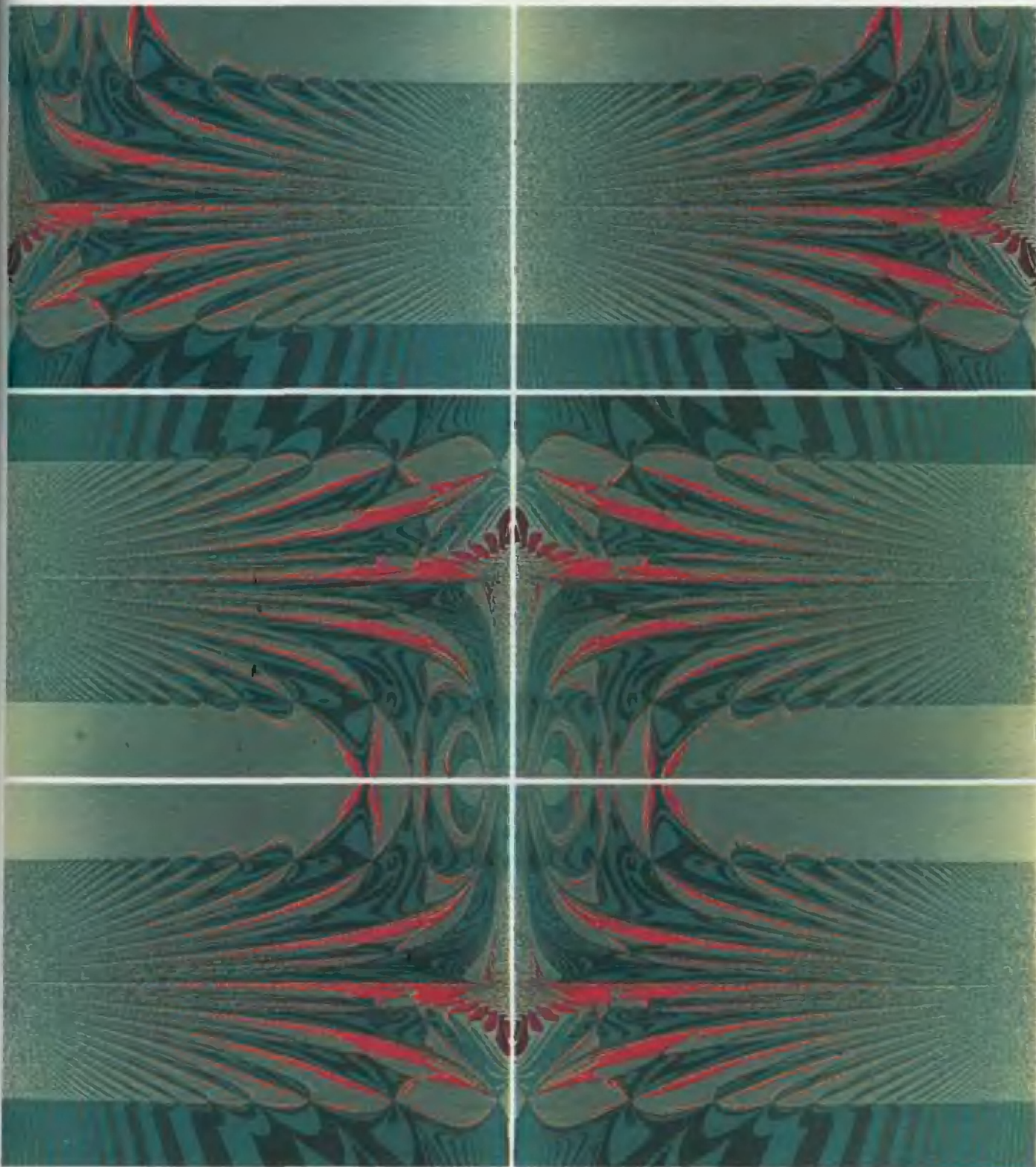
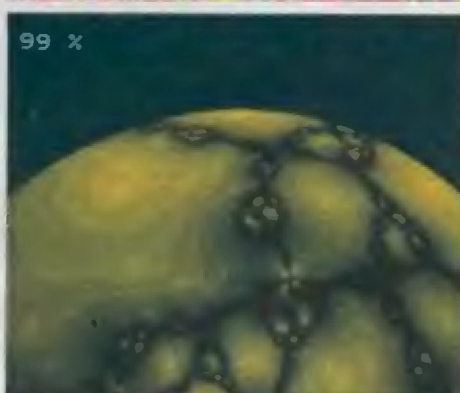
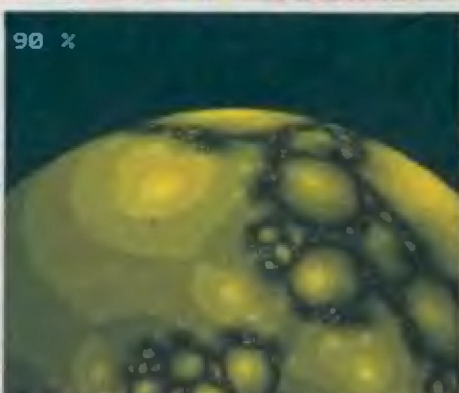
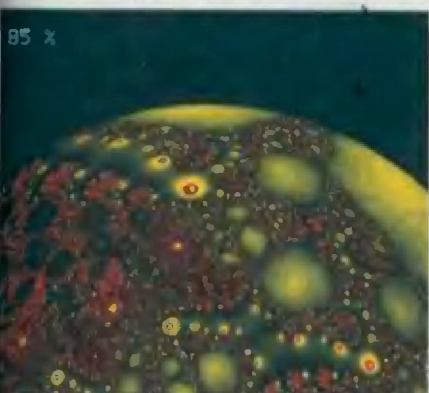
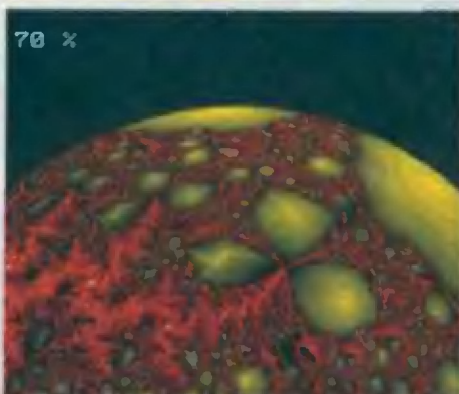
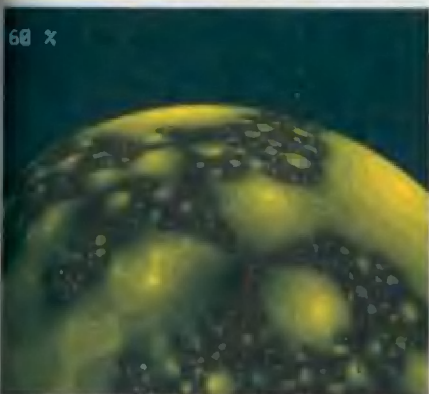
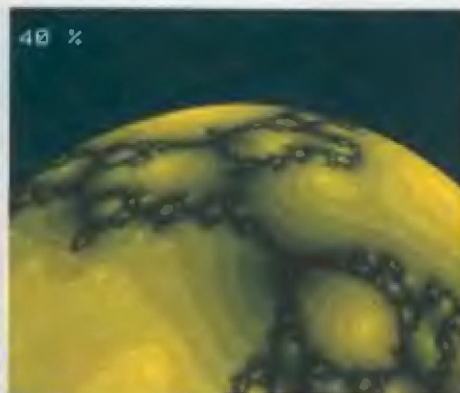
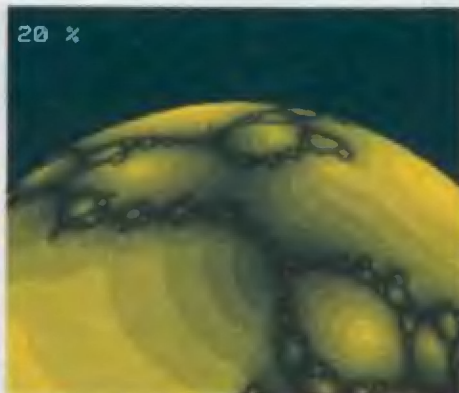
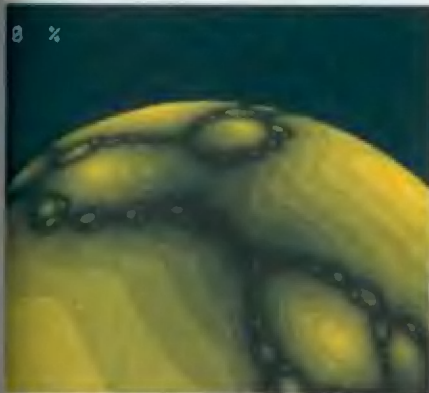


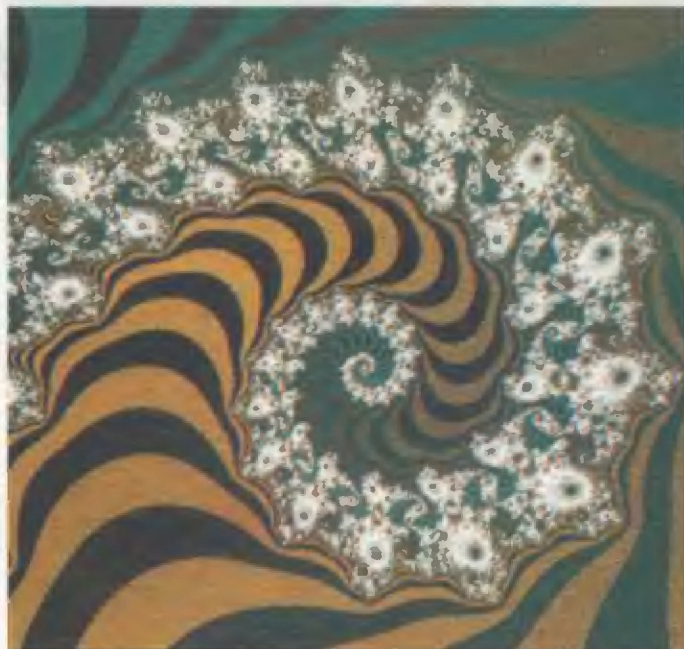


Фото 89





Φoto 99



Φoto 100



Φoto 101