ФОНД РАЗВИТИЯ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ДИПЛОМ

НАГРАЖДАЕТСЯ

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ

Волченская Тамара Викторовна,
Князьков Владимир Сергеевич
(г. Пенза)

лауреаты конкурса на лучшую научную книгу 2003 года среди преподавателей высших учебных заведений

Президент Фонда развития отечественного образования,
директор государственного Научно-образовательного центра Российской академии образования,
академик РАО, доктор педагогических наук, профессор *М.Н. Берулава*

16 сентября 2004
Сочи

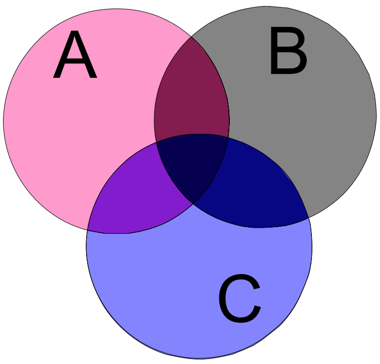
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т. В. Волченская, В. С. Князьков

КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1. Теория множеств и комбинаторика

Учебное пособие



ПЕНЗА 2003

Министерство образования Российской Федерации
Пензенский государственный университет

Т. В. Волченская, В. С. Князьков

Компьютерная математика

Часть 1. Теория множеств и комбинаторика

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям 220100 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети», 220400 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» направления «Информатика и вычислительная техника»

Наградной
логотип
вуза

Издательство
Пензенского государственного
университета
Пенза 2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДК 519.6(0.75.8)
ББК 22.18
В 68

Р е ц е н з е н т ы:
Кафедра “Вычислительные машины и системы”
Пензенского технологического института
Кандидат технических наук,
доцент кафедры “Прикладная математика и информатика”
Пензенского государственного педагогического университета
им. В. Г. Белинского
В. В. Дрождин

Волченская Т. В., Князьков В. С.

В 68 Компьютерная математика**:** Часть 1. Теория множеств и комбинаторика: Учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 88 с. : 62 ил., 1 табл., библиогр. 7 назв.

Содержится материал для практического изучения основ современной дискретной математики. Приведены основные понятия из теории множеств, теории отношений и функций и комбинаторики. Значительное место уделено решению задач из этих разделов. Предлагаемое учебное пособие позволяет значительно облегчить процесс овладения необходимыми элементами современной дискретной математики.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Математическое обеспечение и применение ЭВМ» и предназначено для студентов младших курсов специальностей 201800, 220400 и студентов других специальностей, изучающих дисциплины “Дискретная математика” и “Прикладная математика”.

УДК 519.6(0.75.8)
ББК 22.18

Введение

В последние годы особое значение приобрели те разделы математики, которые имеют отношение к развитию цифровых устройств, цифровой связи и цифровых вычислительных машин. Базой для преподавания этих дисциплин наряду с классическими методами анализа непрерывных физических моделей стали алгебраические, логические и комбинаторные методы исследования различных моделей дискретной математики.

Теория множеств является важнейшим разделом дискретной математики и составляет основу многих ее разделов в силу того, что является математическим языком описания современных математических моделей дискретной математики. Поэтому овладение математическим аппаратом теории множеств становится необходимым для специалистов в области программного обеспечения, компьютерной и цифровой техники самого различного профиля.

Широкое применение теория множеств и комбинаторика получили при исследовании так называемой проблемы оптимизации, возникающей при конструировании больших систем, как технических, так и программных. Применение компьютеров позволило решать задачи большой размерности. Оказалось, что при решении таких задач различные усовершенствования алгоритмов с применением комбинаторных методов могут дать существенный выигрыш во времени работы или уменьшении объемов памяти. Очевидна перспективность использования комбинаторных алгоритмов и для программистов, что в свою очередь требует изучения основ дискретной математики всеми будущими инженерами.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теория множеств

1.1. Начальные сведения о множествах

Одним из основных исходных понятий математики является понятие **множества** и его элементов. Основатель теории множеств Кантор дал такую трактовку: “Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью".

Понятие множества как и любое другое исходное понятие не имеет строгого математически точного описания. Можно дать следующее определение.

“Множество – это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет.”

Как правило, элементы множества обозначаются маленькими буквами, а сами множества – большими. Принадлежность элемента **m** множеству **M** обозначается так: $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, где знак $\in$ является стилизацией первой буквы греческого слова ∈στι (есть, быть), знак непринадлежности – $\notin$.

Множества могут быть конечными, бесконечными и пустыми. Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным.** Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым** и обозначается $\varnothing$. Например:

S – множество студентов потока 99ПС – конечное множество;

Z – множество звезд во Вселенной – бесконечное множество;

L – множество студентов потока 98СП, хорошо знающих три иностранных языка (японский, китайский и французский), видимо, пустое множество.

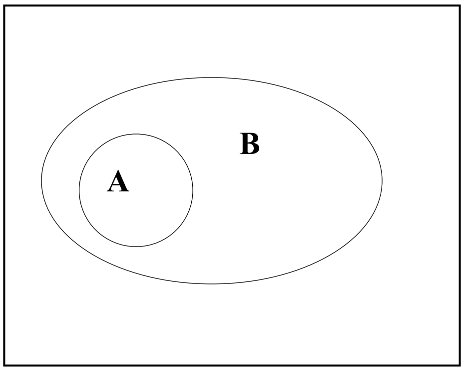


Рис. 1x

Множество **A** называют **подмножеством** множества **B** (обозначается $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$), если всякий элемент множества **A** является элементом множества **B**: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbf{B}$ (рис. 1).

При этом говорят, что **B** содержит **A,** или **B** покрывает **A.** Невключение подмножества **C** в множество **B** обозначается так: $\mathbf{C} \not\subset \mathbf{B}$.

Множества **A** и **B** **равны** ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$) тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, и $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, т. е. элементы множеств **A** и **B** совпадают.

Множество **A** называется собственным подмножеством множества **B**, если $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, а $\mathbf{B} \not\subset \mathbf{A}$. Обозначается так: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Например: **B** ={a, b, c, d, e, f }, **A** = {a, c, d}, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Мощностью конечного множества **M** называется число его элементов. Обозначается | **M** |. Например, | **B** | = 6, | **A** | = 3.

Принято считать, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества. Множество может обладать иерархической структурой. В этом случае говорят о семействе множества или булеане.

Семейством множества **M** или **булеаном β (M)** является множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества **M.**

Например, **M** = [a, b, c }, **β (M)** = { $\varnothing$, { a }, { b }, { c }, { a, b },

{ a, c }, { b, c }, { a, b, c }. | **M** | =3, | **β (M)** | = 8.

В общем случае мощность булеана | **β (M)** | = $\mathbf{2}^{|\mathbf{M}|}$.

Универсальным множеством **E** называется множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Упражнения 1.1

1. Какие из приведенных множеств заданы верно?

A = {1, 2, 3, 4}, **B= {2, 4, 5, 6, 2, 7},** M – множество цифр (арабских), P – множество чисел.

Ответ: Верно заданы множества . . . . и . . . . .

2. Даны множества **C = { a, b, c, d, e} и D {c, a}.**

Найти мощности этих множеств: I**C**I **= . . . ., I DI =** . . . .. Является ли множество **D** подмножеством множества **C** ?

Ответ: . . . .

3. Даны множества **X = { 1, 2, 3} и Y {3, 1, 2}.** Равны ли они?

Ответ: . . . . . Записать элементы множества **Z,** равного множествам **X** и **Y.**

Ответ: **Z = { . ., . ., . . }.**

Сколько вариантов записи множества **Z** существует?

Ответ: . …. .

4. К какому типу относятся следующие множества? Представить элементы множеств в явном виде, если это возможно, и подсчитать мощность множеств.

- **M –** множество цифр, например, арабских.

Ответ: **M –** . . . . множество. | **M** | = . . ., **M** ={ . . . . }.

➢ **P** – множество целых положительных четных чисел.

Ответ: **–** . . . . множество. | **P** | = . . . **P** ={ . . . . }.

➢ **Q** – множество двузначных чисел, являющихся степенями 2, которые нацело делятся на 5.

Ответ: **Q –** . . . . множество, | **Q** | = . . ., **Q** =. . . . .

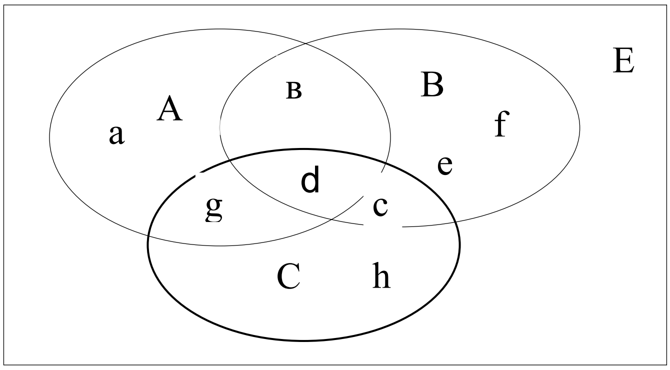


Рис. 2

5. Заданы универсальное множество **E** = {a, b, c, d, e, f, g, h} и множества **A, B** и **C** на (рис. 2). Записать элементы множеств.

Ответ: **A = { . ., . ., . ., . . }. B = { . ., . ., . ., . ., . . }. C = { . ., . ., . ., . . }.**

6. Даны множества **M** = {Коля, Оля, Толя } и **S** ={1, 2, 3, 4 }. Составить булеаны множеств и определить их мощности.

Ответ: **β (M)** = { . . . {. . . . }, { . . . . }, { . . . . }, { . . . ., ...}, { . . . ., ... }, { . . . ., ...}, { . . . ., ..., ...}. | **M** | =. . ., | **β (M)** | = ...

β (S) = { . ., {. . }, { . . }, { . . }, { . . }, { . ., . . }, { . ., . . }, { . ., . . }, ... { . ., . ., . ., . . }}. | **S** | =. . ., | **β (S)** | = ...

1.2. Способы задания множеств

Множества могут быть заданы списком, порождающей процедурой, арифметическими операциями, описанием свойств элементов или графическим представлением.

1. Задание множеств **списком** предполагает перечисление элементов. Например, множество **A** состоит из букв a, b, c, d: **A** = = {a, b, c, d} или множество **N** включает цифры 0, 2, 3, 4: **N** = = {0, 2, 3, 4}.

Пример: {0, 2, 3, 4} = {3, 4, 2, 0} = {4, 0, 2, 3} = ...

2. Задание множеств **порождающей процедурой** или арифметическими операциями означает описание характеристических свойств элемен-

тов множества: **X= {x | H(x)},** т. е. множество **X** содержит такие элементы **X**, которые обладают свойством **H(x**).

Например: а) $\mathbf{B = \{ b \mid b = \pi / 2 \pm k\,\pi, k \in N_0\}},$

N_0 – множество всех натуральных чисел;

б) $\mathbf{M_2^n}$ = 1, 2, 4, 8, 16, ... или

$\mathbf{M_2^n = \{m \mid m = 2^n, n \in N_0\}}$;

в) $\mathbf{C = A + B = \{x: x = a + b, a \in A, b \in B\}}.$

3. Задание множества **описанием свойств** элементов: например, **M** – это множество чисел, являющихся степенями двойки.

К описанию свойств естественно предъявить требования *точности* и *недвусмысленности*. Так, “множество всех хороших песен 2003 года” каждый составит по-разному. Надежным способом однозначного задания множества является использование разрешающей процедуры, которая для любого объекта устанавливает, обладает ли он данным свойством и соответственно является ли элементом рассматриваемого множества.

Например, **S** – множество успевающих студентов. Разрешающей процедурой включения в множество **S** является отсутствие неудовлетворительных оценок в последней сессии.

4. **Графическое** задание множеств происходит с помощью диаграмм Эйлера–Венна. Замкнутая линия–круг Эйлера – ограничивает множество, а рамка – универсальное пространство **E** (рис. 3). Заданы два множества: **A={a, b, c} и B={b, d, e, f}.** Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно.

Упражнения 1.2

1. Заданы множества **A, B, C**: **A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {6, 2, 4, 8 }, C = {2, 4, 0, 8, 6}.**

Определить: а) **A = B ?**

Ответ:……….. .

б) **A = C ?**

Ответ:……….. .

2. Перечислить элементы, входящие в множество $\mathbf{X=\{x \mid x= 3^n - 1 \text{ и } x \le 50, n \in N_0\}}$.

X={…., …., ... … … . . . .}.

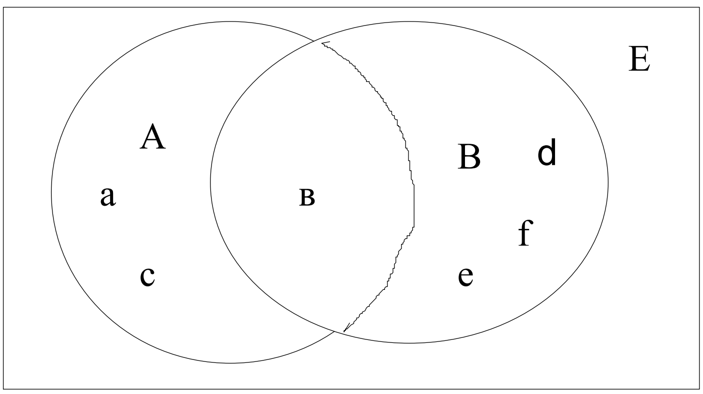


Рис. 3

3. Заданы множества **A, B**: **A = {1, 2, 3}, B = {0, 1}.**

Найти множества:

а) **C = {c| c= a + b, a ∈ A, b ∈ B, C = {**. . . . . **}.**

б) **D = {d| d = a – b, a ∈ A, b ∈ B, D = {**. . . . . **}.**

в) **F = {f| f = a½b, a ∈ A, b ∈ B, F = {**. . . . . **}.**

г) **G = {g| g = a½b, a ∈ A, b ∈ A, G = {**. . . . . **}.**

4. Записать явно элементы множества **S,** которые являются положительными четными числами, меньшими 30 и не кратными 3. **S = {** . . . . **}.**

5. Пусть множество **X** включает в себя корни уравнения **x(x+1)(x–2) =0,** а множество **Y** содержит значения **{–1, 0, 1}.** Найти элементы множества **Z = { z | z = x + y, x ∈ X, y ∈ Y }, Z = = {**. . . . . **}.**

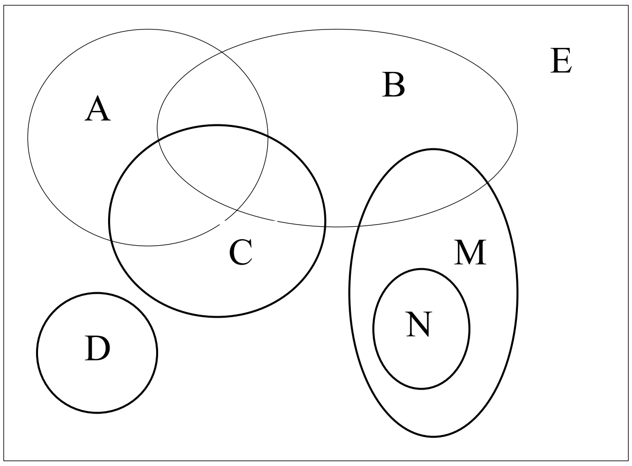


Рис. 4

6. Заданы универсальное множество **E** = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0} и множества **A, B C, D, M** и **N** (рис. 4). Записать элементы множеств, если | **A** |= = 4, | **B** | = 4, | **C** | = 4, | **D** | = = 2, | **M** | = 2, | **N** | = 1.

Ответ:

A = { . ., . ., . ., . . },

B = { . ., . ., . ., . . }.

C = { . ., . ., . ., . . }.

D = { . ., . . },

M = { . ., . . },

N = { . . }.

1.3. Операции над множествами

Рассмотрим такие операции над множествами, как объединение, пересечение, разность, симметрическая разность и дополнение.

Объединением множеств A и **B (A ∪ B)** называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A** или **B**. (рис. 5).

A ∪ B = {x| x ∈ A или x ∈ B}.

В общем случае операция объединения может быть использована для нескольких множеств: **A ∪ B ∪ C ∪ D** или **S = { A_1, A_2, ..., A_k }.**

Последнее можно представить в следующем виде:

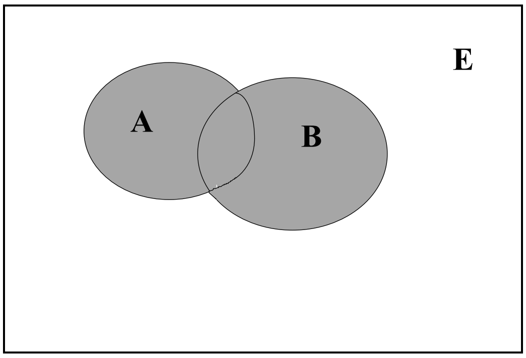


Рис. 5

$$\mathbf{S = \bigcup_{i=1}^{k} A_i,}$$

где k – количество объединенных множеств.

Пример. Даны два множества: **A = {1, 2, 4, 6} и B = {0, 3, 4, 6}.** Найдем множество **C = A ∪ B. C = {0, 1, 2, 3, 4, 6}.**

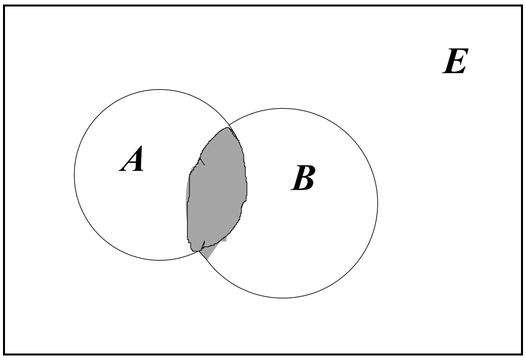


Рис. 6

Пересечением множеств **A** и **B (A ∩ B)** называется множество, состоящее из элементов, входящих как в множество **A**, так и в множество **B** (рис. 6):

A ∩ B={x| x ∈ A и x ∈ B}.

Операция пересечения так же может быть многоместной: **A ∩ B ∩ C ∩ D** или

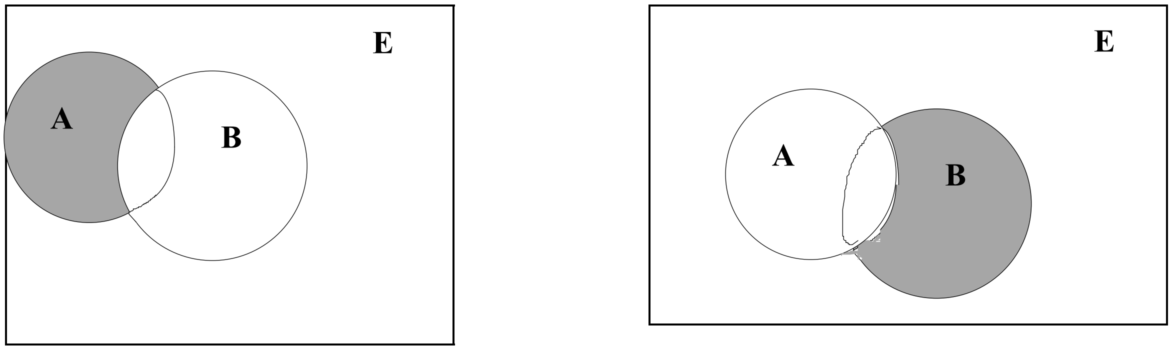
$$\mathbf{S = \bigcap_{i=1}^{k} A_i,}$$

где k – количество объединенных множеств **A_1, A_2, ..., A_k.**

Пример. Даны множества **A = {1, 2, 4, 6}** и **B = {0, 3, 4, 6}.** Найдем их пересечение: **D = A ∩ B = {4, 6}.**

Разностью множеств **A** и **B (A\B)** называется множество всех элементов множества **A**, которые не содержатся в **B** (рис. 7,*а*):

A\B = {x | x ∈ A и x ∉ B}; B\A = {x | x ∈ B и x ∉ A} (рис. 7,*б*).



а *б*

Рис. 7

Пример. Даны два множества **A** и **B**. Найдем их разность.
A\B = {1, 2}; B\A = {0, 3}.

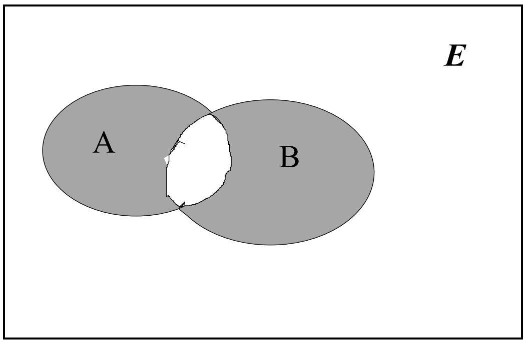


Рис. 8

Симметричная разность множеств **A** и **B**, **(A Δ B): A Δ B = = (A ∪ B)\(A ∩ B) = {0, 1, 2, 3, 4, 6}\{4, 6} = {0, 1, 2, 3}** (рис. 8).

Дополнением (до универсального множества) множества **A** называется множество всех элементов, не принадлежащих **A**, но принадлежащих универсальному множеству (рис. 9).

A = { x | x ∈A и x ∉ E}.

Пример. Пусть универсальное множество **E** состоит из букв русского алфавита, **A** – множество гласных букв, тогда $\overline{\mathbf{A}}$ – множество согласных букв и букв **ь** и **ъ**.

Приоритет выполнения операций: сначала выполняются операции дополнения, затем пересечения и только потом объединения и разности. Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

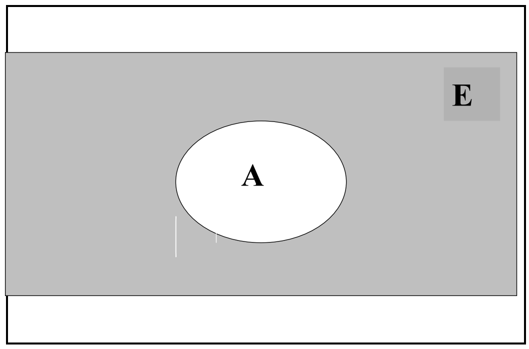
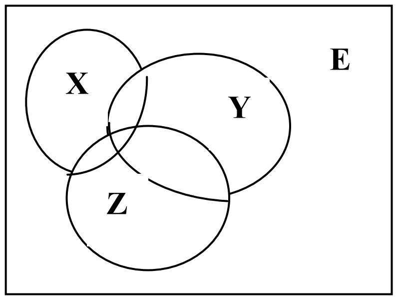


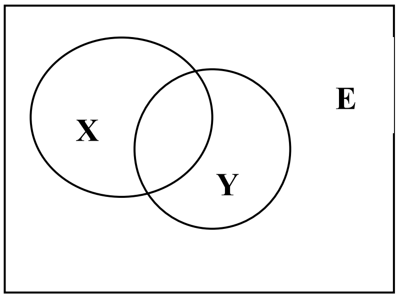
Рис. 9

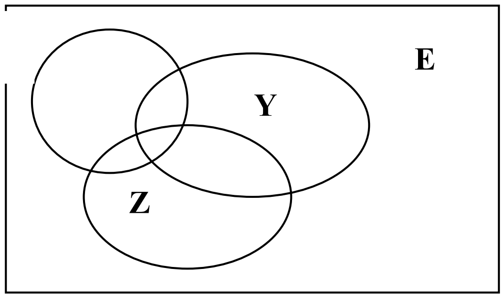
Упражнения 1.3

1. Заданы множества **X = {1, 2}, Y = {0, 2, 3}.** Найти множества: **X ∩ Y = { . . . .}, X ∪ Y = { . . . . }, X\Y = = { . . . . }, Y\X = { . . . . }, X Δ Y = { . . . . }.**



в





а *b*

2. Пусть $\mathbf{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbf{X} = \{1, 5\}$, $\mathbf{Y} = \{1, 2, 4\}$, $\mathbf{Z} = \{2, 5\}$. Найти множества и дать графическую интерпретацию операциям:

а) $\mathbf{X} \cap \overline{\mathbf{Y}} = \{1, 5\} \cap \{\overline{\quad\quad}\} = \{1, 5\} \cap \{3, 5\} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\}$ (рис. 10,*а*);

б) $(\mathbf{X} \cap \mathbf{Z}) \cup \overline{\mathbf{Y}} = (\{1, 5\} \cap \{2, 5\}) \cup \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} \cup \cup \{.\ .\ .\ .\ .\ \} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\}$ (рис. 10,*б*);

Рис. 10. Начало

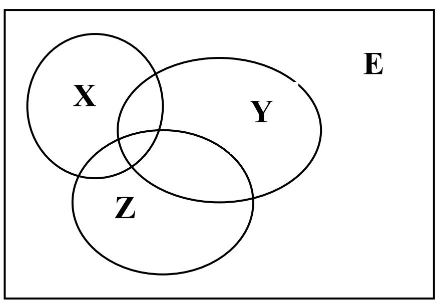
в) $\mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) = \{1, 5\} \cup (\{1, 2, 4\} \cap \{2, 5\}\ ) = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} \cup \cup \{.\ .\ .\ .\ .\ \} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\}$ (рис. 10,*в*);

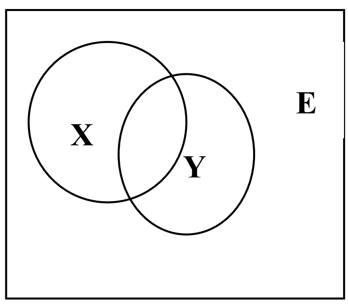
Рис. 10. Продолжение

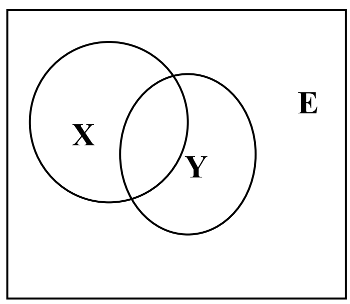
г) $(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X} \cup \mathbf{Z}) = (\{1, 5\} \cup \{1, 2, 4\}) \cap (\{1, 5\} \cup \{2, 5\}) = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} \cap \{.\ .\ .\ .\ .\ \} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\}$ (рис. 10,*г*);

д) $\overline{(\mathbf{X} \cup \mathbf{Z})} = \overline{(\{1, 5\} \cup \{2, 5\})} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} = \overline{\{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\}}$ (рис. 10,*д*);

е) $\overline{\mathbf{X}} \cap \overline{\mathbf{Y}} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} \cap \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\} = \{\ .\ .\ .\ .\ .\ .\}$ (рис. 10,*е*);







г *д* *е*

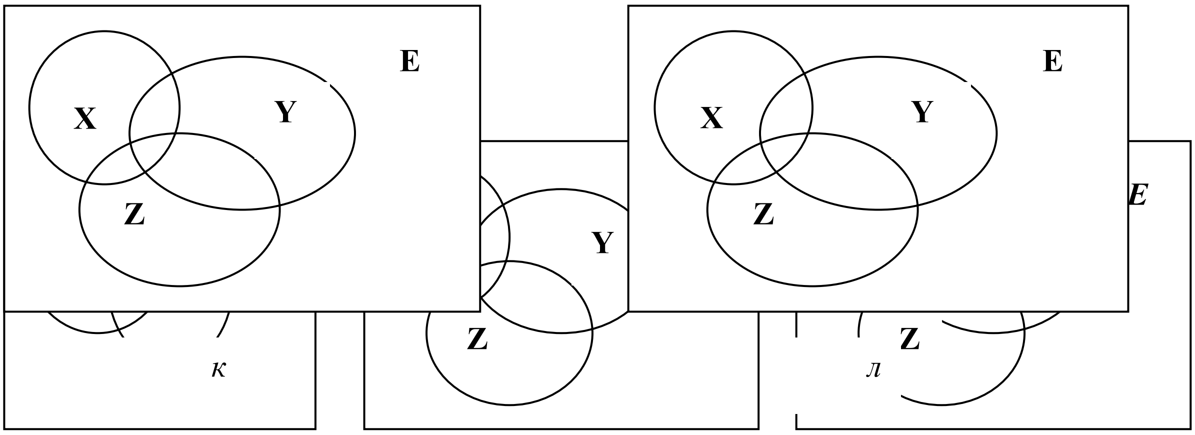
Рис. 10. Продолжение

ж) $\overline{\mathbf{X \cap Y}}$ **=** $\overline{\{\ldots\ldots\} \cap \{\ldots\ldots\}}$ **= { . . . . . . }=** $\overline{\{\ldots\ldots\}}$ (рис. 10,*ж*);

з) **(X ∪ Y) ∪ Z = ({1, 5} ∪ { 1, 2, 4}) ∪ { 2, 5} = { . . . . . . } ∪ ∪ { 2, 5} = { . . . . . .}** (рис. 10,*з*);

и) **X ∪ (Y \Z) = { 1, 5} ∪ ({1, 2, 4} \ {2, 5}) = { . . . . . .} ∪ ∪ {. . . . . } = { . .. . .}** (рис. 10,*и*);

к) **(X \ Z) ∪ (Y \Z) = ({1, 5} \{2, 5}) ∪ ({1, 2, 4} \ {2, 5}) = = { . . . . . .} ∪ {. . . . . } = { . . . . . .}** (рис. 10,*к*);



ж *з* *и*

л) **Z ∩ (X Δ Y)= {2, 5} ∩ ({1, 5} Δ {1, 2, 4})= {2, 5} ∩ { . . . .} = { . . . . }** (рис. 10,*л*).

Рис. 10. Окончание

3. Заданы универсальное множество **E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}** и множества **A, B, C: A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 5, 6, 8}, C = {0, 3, 5, 8, 9}.**

Найти A ∪ B ∩ C \ B и дать графическую интерпретацию (рис. 11).

1. **B ∩ C = {5, 8},**
2. **A ∪ B ∩ C = {1, 3, 5, 8},**
3. **A ∪ B ∩ C \ B = {1, 3}.**

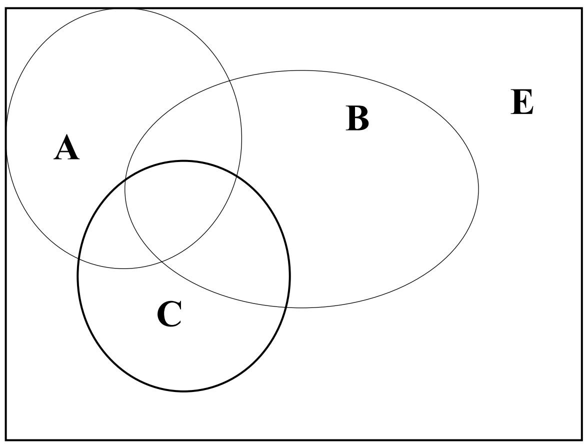
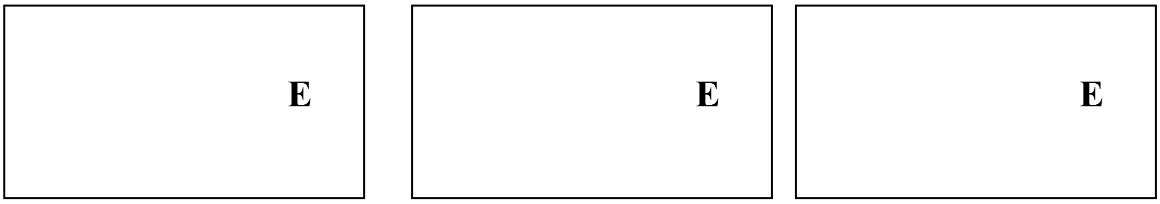


Рис. 11

4. Даны два произвольных множества **A** и **B**, такие, что $\mathbf{A} \cap \cap \mathbf{B} = \varnothing$. Что представляют собой множества **A\B** и **B\A** (рис. 12)?



$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$. **A\B** **B\A**

Рис. 12

5. Даны два произвольных множества **C** и **D**, такие, что $\overline{\mathbf{C}} \cap \cap \mathbf{D} = \varnothing$. Что можно сказать о $\mathbf{C} \cap \mathbf{D}$ и $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$? $\mathbf{C} \cap \mathbf{D}$= **. . . . .,** $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ = **. . . . .**

$c\,\overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{D} = \varnothing$ $\mathbf{C} \cap \mathbf{D}$ $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$

Рис. 13

6. Дано произвольное множество **X**. Найти множества:

а) $\mathbf{X} \cap \overline{\mathbf{X}}$ = **. . . . .** ; б) $\mathbf{X} \cup \overline{\mathbf{X}}$= **. . . . . . .** ; в) $\mathbf{X} \setminus \overline{\mathbf{X}}$ = = **. . . . . . .**

1.4. Алгебра множеств

Алгеброй A называется совокупность множества **M** с заданными в нем операциями **S: A=<M,S>,** где **M** – носитель, **S –** сигнатура.

Алгеброй множеств **A** называется совокупность булеана универсального множества с заданными в нем операциями:

$$\mathbf{A_k = < \beta(E), S_{M}>,}$$

где $\mathbf{S_M}$ – множество операций: пересечение, объединение, дополнение, разность.

Законы алгебры множеств

Для операций объединения, пересечения и дополнения выполняются следующие законы:

1) коммутативности:

$$\mathbf{A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A};$$

2) ассоциативности:

$$\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C},$$

$$\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C};$$

3) дистрибутивности:

а) пересечения относительно объединения:

$$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)};$$

б) объединение относительно пересечения:

$$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)};$$

4) идемпотентности:

$$\mathbf{A \cup A = A, A \cap A = A};$$

5)действия с универсальным и пустым множествами:

$$\mathbf{A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing},$$

$$\mathbf{A \cup E = E, \ A \cap E = A};$$

$$\mathbf{A \cup \overline{A} = E, \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing};$$

6) де Моргана:

$$\overline{\mathbf{A \cap B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}},$$

$$\overline{\mathbf{A \cup B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}};$$

7) двойного дополнения:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}.$$

Доказательство законов можно выполнить графически или посредством последовательности утверждений типа “если P, то Q”, которое записывается как “P =>Q”.

Докажем закон дистрибутивности:

$$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).}$$

Графическое доказательство состоит в построении диаграмм Эйлера–Венна для правой и левой частей (рис. 14).

Доказательство

Если $\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$ => $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$ => $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и ($\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ или $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$) => ($\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$) или ($\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$) => ($\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$) или ($\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$) => $\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$.

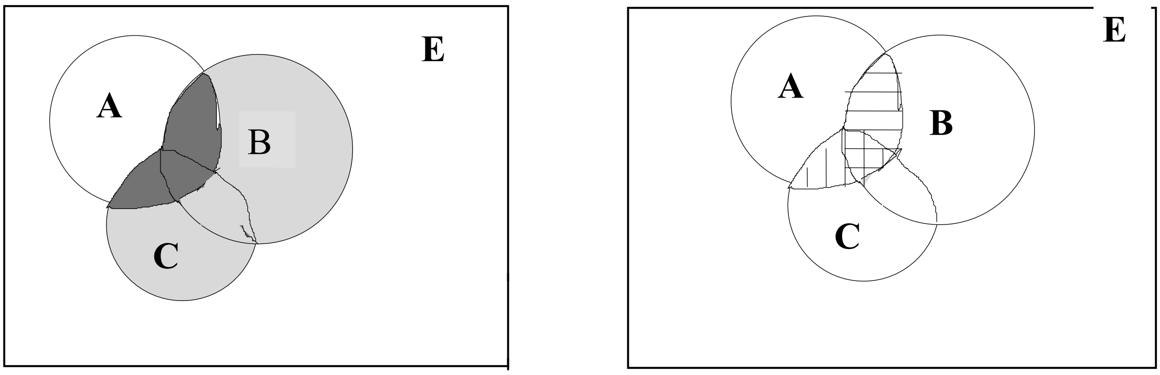


Рис. 14

Таким образом, $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$. Необходимо доказать включение в обратную сторону:

$\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$ => ($\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$) или ($\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$) =>

($\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$) или ($\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$) => $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ **и** ($\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ или $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$) => $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$ => $\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$.

Следовательно, $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$.

Докажем закон де Моргана

$\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$.

Графическая интерпретация представлена на рис. 15.

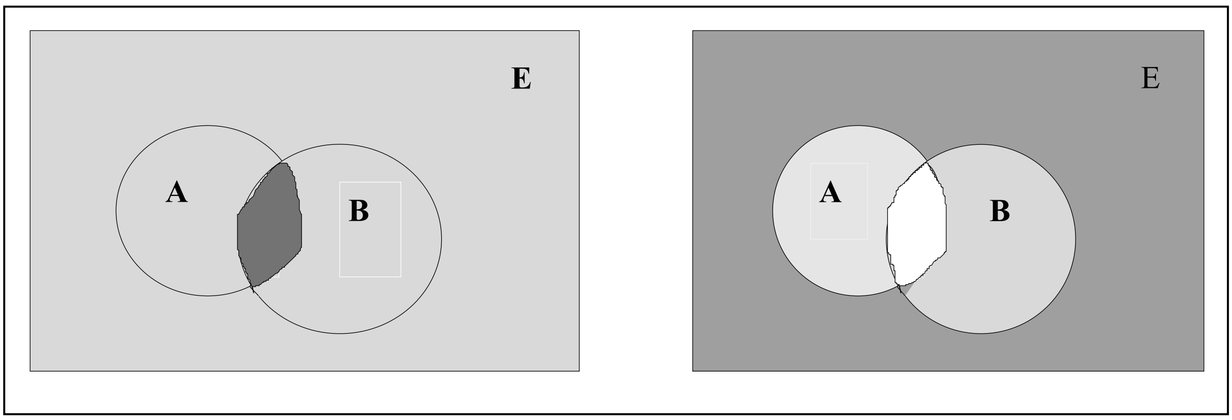


Рис. 15

Рассмотрим графическую интерпретацию левой части закона де Моргана, в которой можно выделить три составные части (рис. 16).

$$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow$$

Используя закон идемпотентности [x ∪ x = x], получим:

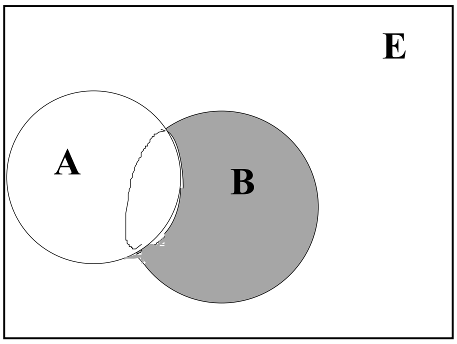
$$x \in (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow$$

$$x \in ((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})) \cup ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})) \Rightarrow$$

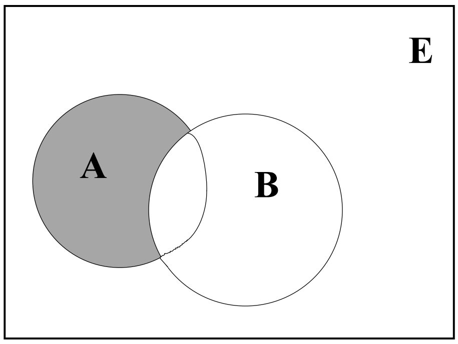
по закону дистрибутивности

$$x \in ((\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})) \cup (\bar{B} \cap (A \cup \bar{A})) \Rightarrow õ \in (\bar{A} \cap E) \cup (\bar{B} \cap E) \Rightarrow$$

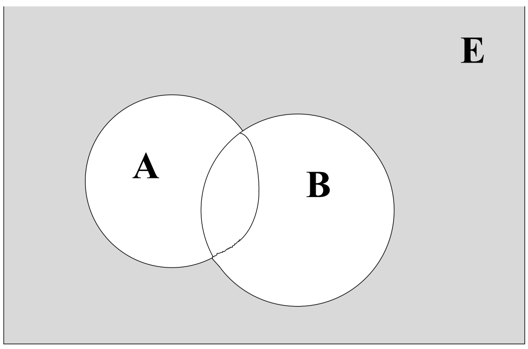
$$x \in \bar{A} \cup \bar{B}.$$



$\bar{A} \cap B$ *а*



$A \cap \bar{B}$ *б*



$\bar{A} \cap \bar{B}$ *в*

Рис. 16

Таким образом, $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

Аналогично доказывается включение в обратную сторону:

$\mathbf{x \in A \cup B \Rightarrow x \in E \cap A \cap B \Rightarrow x \in E \cap A \cap E \cap B \Rightarrow x \in A \cap B.}$

Следовательно,

$$\mathbf{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.}$$

Упражнения 1.4

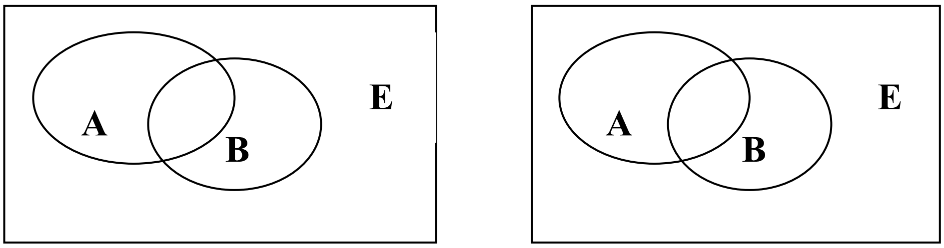
1. Доказать, что $\mathbf{A \setminus B = \varnothing}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A \cap B = = A}$.

. . . .

. . . .

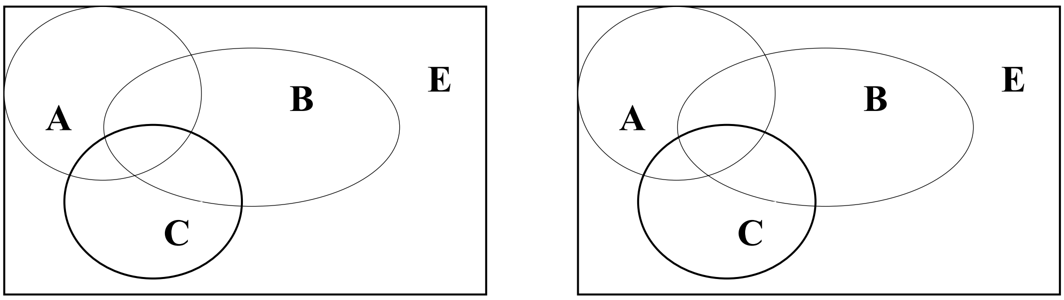
2. Доказать соотношения:

а) $\mathbf{(A \cup B) \setminus B = A \setminus B}$ (рис. 17,*а*);



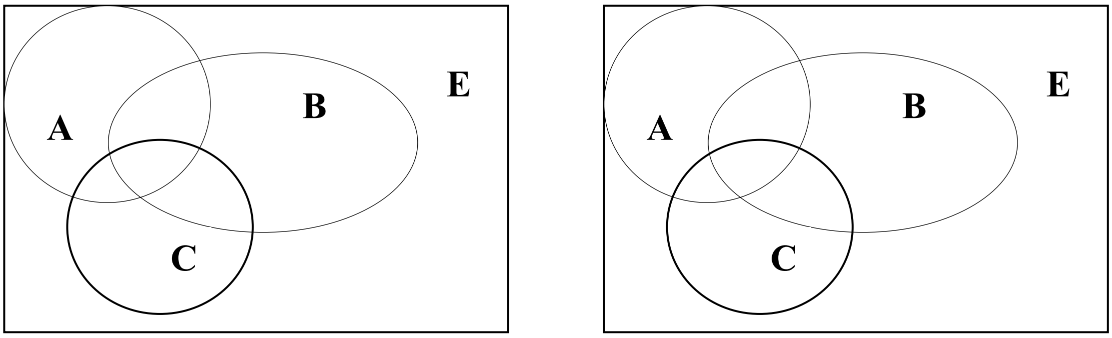
а

б) $\mathbf{A \cap (B \cup C) = A \setminus (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$ (рис. 17,*б*);



б

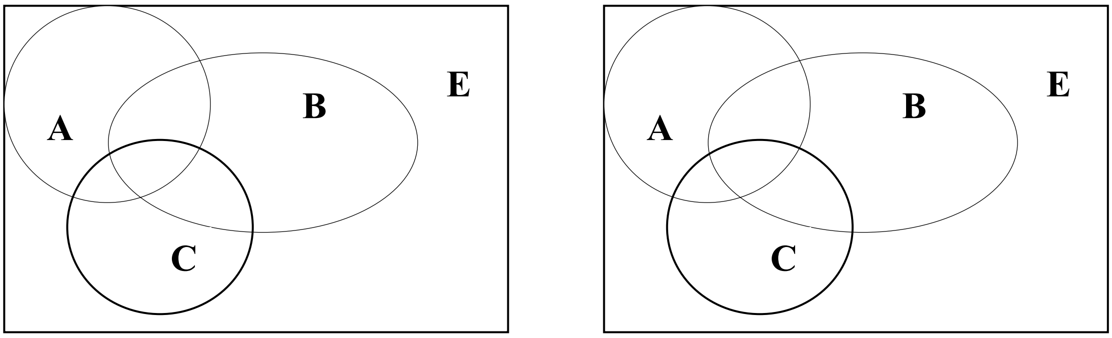
в) $\mathbf{(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)}$ (рис. 17,*в*);



в

Рис. 17. Начало

г) $\mathbf{A \cap B \cap C = A \setminus (A \setminus (B \cap C))}$ (рис. 17,*г*);



г

Рис. 17. Окончание

3. Найти множество, выполнив предварительные преобразования, используя законы алгебры множеств:

$\mathbf{(\overline{\overline{\overline{X}} \cup \overline{\overline{Y}} \cup \overline{Z}}) =}$ [используем закон де Моргана и закон двойного дополнения] = ...

4. Упростить выражение $\mathbf{\overline{A \cap B \cap C} \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) =}$ [. . . .] = ...= [. . . .] = ...

1.5. Нахождение мощности объединения множеств

1. Мощность объединения двух множеств:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (рис. 18).

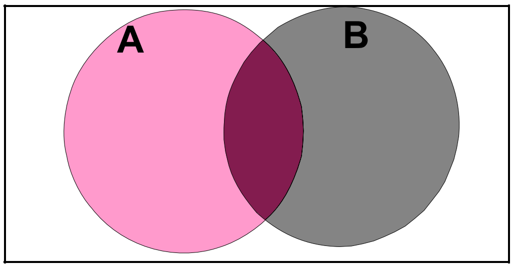


Рис. 18

2. Мощность объединения трех множеств:

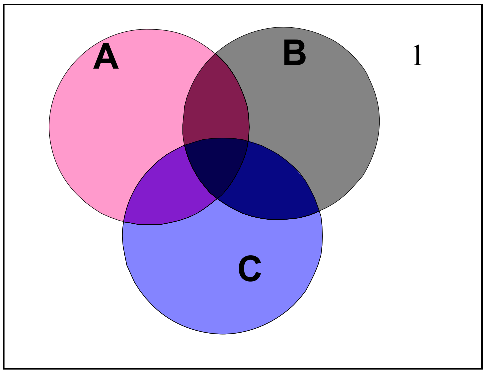


Рис. 18а

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \text{ (рис. 18а).}$$

Доказательство:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| =$$

$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| -$$

$$- |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| -$$

$$- |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

3. Мощность объединения **n** множеств:

Теорема. $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ – некоторые множества, тогда мощность объединения **n** множеств определяется по формуле

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| -$$

$$- [\, |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n| \,] +$$

$$+ [\, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots +$$

$$+ |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \,] -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| .$$

Правая часть этой формулы является суммой n слагаемых, k-е по порядку слагаемое имеет вид $(-1)^{k-1} S_k(A_1, \ldots, A_n)$, где $S_k(A_1, A_2, \ldots,$

$\mathbf{A_n)}$ есть сумма чисел мощностей $|\mathbf{A_{i1}} \cap \mathbf{....} \cap \mathbf{A_{lk}}|$ по всем возможным пересечениям k разных множеств из множеств $\mathbf{A_1, ..., A_n}$.

Пример. На потоке из 100 студентов 28 человек изучают английский язык, 30 человек – немецкий язык, 42 человека – французский язык. Причем 8 человек изучают два языка – английский и немецкий, 10 человек изучает английский и французский языки, 5 человек – немецкий и французский языки. 3 человека изучают все 3 языка. Сколько студентов не изучает ни один из перечисленных языков?

Пусть **S** – множество студентов, |**S**| = 100 (студентов). **А** – множество студентов, изучающих английский язык, |**А**| = 28; **Н** – множество студентов, изучающих немецкий язык |**Н**| = 30, **Ф** – множество студентов, изучающих французский язык, |**Ф**| = 42.

Соответственно множества студентов, изучающих по 2 или 3 иностранных языка заданы следующим образом: $|\mathbf{А} \cap \mathbf{Н}| = 8$, $|\mathbf{А} \cap \mathbf{Ф}| = 10$, $|\mathbf{Н} \cap \mathbf{Ф}| = 5$, $|\mathbf{А} \cap \mathbf{Н} \cap \mathbf{Ф}| = 3$.

Y – множество студентов, изучающих иностранные языки.

$$|\mathbf{Y}| = |\mathbf{А}| + |\mathbf{Н}| + |\mathbf{Ф}| – |\mathbf{А} \cap \mathbf{Н}| – |\mathbf{А} \cap \mathbf{Ф}| – |\mathbf{Н} \cap \mathbf{Ф}| +$$

$$+ |\mathbf{А} \cap \mathbf{Н} \cap \mathbf{Ф}| = 28 + 30 + 42 – 8 – 10 – 5 + 3 = 80$$

X – множество студентов, не изучающих иностранный язык.

$$|X| = 100 – 80 = 20.$$

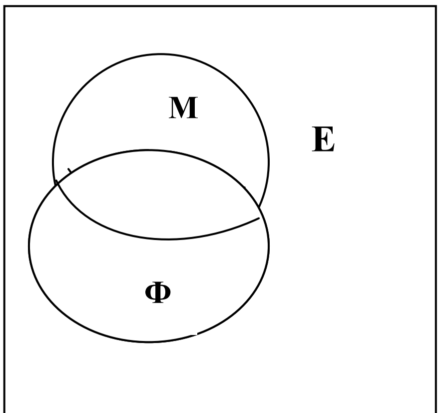
Упражнение 1.5

1. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков: а) сколько учеников посещают и математический и физический кружок? б) сколько учащихся посещают только математический кружок?

Решение

Введем обозначения: пусть **М** – множество учащихся, которые посещают математический кружок, т. е. $|\mathbf{М}|=20$, $|\mathbf{Ф}|$ – множество учащихся, которые посещают физический кружок, т. е. $|\mathbf{Ф}|=11$ (рис. 19).

Всего в классе 35 человек, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Следовательно, хотя бы один кружок посещают 25 человек.



Р

ис. 19

$|\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}| = |\mathbf{M}| + |\mathbf{\Phi}| - |\mathbf{M} \cap \mathbf{\Phi}|$. Следовательно, $|\mathbf{M} \cap \mathbf{\Phi}| = \ldots\ldots\ldots\ldots$. Только математический кружок посещают . . . . .учащихся.

Ответ: а). . . . . . б) . . . .

2. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 300 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3 и 5.

Решение

Введем следующие обозначения: пусть $\mathbf{D_2}$ – множество чисел, которые делятся на 2, т. е. $|\mathbf{D_2}| = 150$; $\mathbf{D_3}$ – множество чисел, которые делятся на 3, т. е. $|\mathbf{D_3}| = 100$. Аналогично, $\mathbf{D_5}$ – множество чисел, которые делятся на 5, т. е. $|\mathbf{D_5}| = 60$. Количество чисел, которые одновременно делятся на 2 и на 3 равно 50, т. е. $|\mathbf{D_2} \cap \mathbf{D_3}| = 50$ (рис. 20). Аналогично, $|\mathbf{D_2} \cap \mathbf{D_5}| = 30$, $|\mathbf{D_5} \cap \mathbf{D_3}| = = 20$, $|\mathbf{D_2} \cap \mathbf{D_3} \cap \mathbf{D_5}| = 10$. Найдем количество чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3 или 5 по формуле включения– исключения: $|\mathbf{D_2} \cup \mathbf{D_3} \cup \cup \mathbf{D_5}| = |\ldots\ldots| + |\ldots\ldots| + |\ldots\ldots| - |\ldots\ldots\ldots| - |\ldots\ldots| - |\ldots\ldots\ldots| + |\ldots\ldots\ldots\ldots| = \ldots\ldots\ldots\ldots$ Следовательно, число целых положительных чисел, не превосходящих 300 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3 и 5 = ...

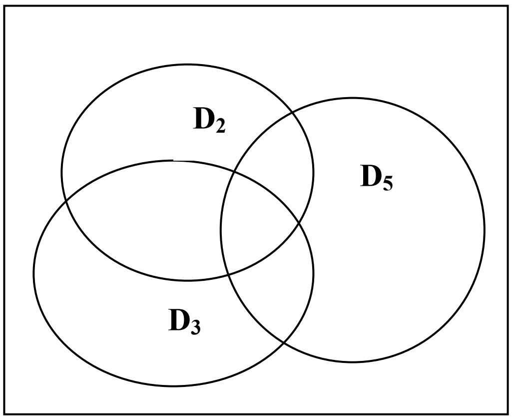


Рис. 20

3. а) сколько чисел в первой сотне, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5? б) сколько чисел в первой сотне, которые делятся нацело на 3 и не делятся на 5? в) сколько чисел в первой сотне, которые делятся нацело на 5 и не делятся на 3? г) сколько чисел в первой сотне, которые делятся нацело либо на 5, либо на 3 и не делятся на 15?

Решение

Введем следующие обозначения: пусть $\mathbf{D_3}$ – множество чисел, которые делятся на 3, т. е. $|\mathbf{D_3}| =. \ldots .$; $\mathbf{D_5}$ – множество чисел, которые делятся на 5, т. е. $|\mathbf{D_5}| =. \ldots\ldots$ (рис. 21). Количество чисел, которые одновременно делятся на

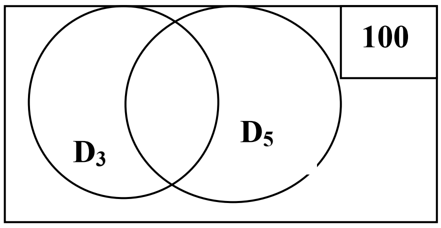


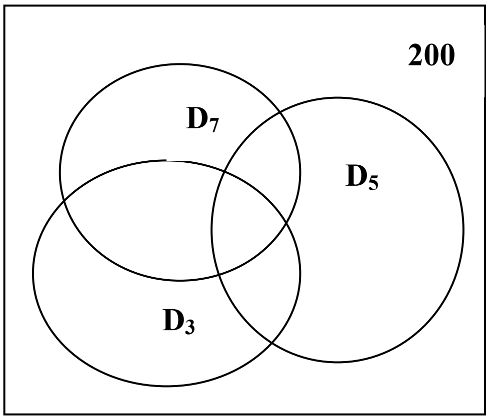
Рис. 21

3 и на 5 равно . . . . ., т. е. $|\mathbf{D_3} \cap \mathbf{D_5}| = \mathbf{\ldots\ldots}$. а) найдем количество чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 3 или 5 по формуле включения–исключения: $|\mathbf{D_3} \cup \mathbf{D_5}| = |\ldots\ldots| + |\ldots\ldots|\ |-|\ \ldots\ldots\ldots\ |= \ldots\ldots\ldots$

Следовательно, число целых положительных чисел, не превосходящих 100 и не делящихся ни на 3 ни на 5 равно . . . . Нанесем численные значения на рисунок; б) чисел в первой сотне, которые делятся нацело на 3 и не делятся на 5 будет . . . . . ; в) чисел в первой сотне, которые делятся нацело на 5 и не делятся на 3 будет. . . . . . .; г) чисел, которые делятся нацело либо на 5, либо на 3 и не делятся на 15 будет . . . . . .

4. а) сколько чисел от 1 до 200, которые делятся нацело либо на 3, либо на 5, либо на 7? б) сколько чисел от 1 до 200, которые делятся нацело на 3 и не делятся на 5? в) сколько чисел от 1 до 200, которые делятся нацело на 5 и не делятся на 3 и 7?

Решение



Введем следующие обозначения: пусть $\mathbf{D_7}$ – множество чисел, которые делятся на 7, т. е. $|\mathbf{D_7}|$=. . . . ., $\mathbf{D_3}$ – множества которые делятся на 3, т. е. $|\mathbf{D_3}|$=. . . . (рис. 22). Аналогично, $\mathbf{D_5}$ – множества чисел, которые делятся на 5, т. е. $|\mathbf{D_5}|$=. . . . Количество чисел, которые одновременно делятся на 7 и на 3 равно. . . ., т. е. $|\mathbf{D_7} \cap \cap \mathbf{D_3}|$ = **. . . .** Аналогично, $|\mathbf{D_7} \cap \mathbf{D_5}|$ =

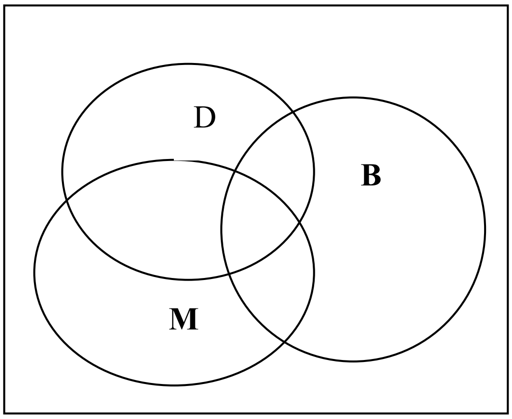
Рис. 22

= . . . ., $|\mathbf{D_5} \cap \mathbf{D_3}|$ = **. . . .**, $|\mathbf{D_7} \cap \mathbf{D_3} \cap \mathbf{D_5}|$ = **. . . . . .** Найдем количество чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 7, 3 или 5 по формуле включения–исключения : $|\mathbf{D_7} \cup \mathbf{D_3} \cup \mathbf{D_5}|$ = | . . . . | + | . . . . . | + | . . . . . | - | . . . . | - | . . . . . . | - | . . . . | + | . . . . | = ... Следовательно, число целых положительных чисел, не превосходящих 200 и не делящихся ни на одно из чисел 7, 3 и 5, равно . . . . Нанесем численные значения на рисунок. б) количество чисел, которые делятся нацело на 3 и не делятся на 5 будет равно . . . . .; в) количество чисел, которые делятся нацело на 5 и не делятся на 3 и 7 будет равно . . . .

5. Каждый ученик класса либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика– блондина, математику из них любят 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику – 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

Решение

Выделим множества девочек **D,** блондинов – **B**, и тех, кто любит математику – **M** (рис. 23). Найдем мощности соответствующих множеств и их пересечений: $|\ldots| = \ldots$, $|\ldots| = \ldots$, $|\ldots| = \ldots$, $|\ldots \cap \ldots| = \ldots$, $|\ldots \cap \ldots| = \ldots$, $|\ldots \cap \ldots| = \ldots$, $|\ldots \cap \ldots \cap \ldots| = \ldots$. Так как каждый ученик класса либо девочка, либо блондин, либо любит математику, то по формуле включения–исключения найдем количество учеников в классе:



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Рис. 23

6. На соревнованиях были школьники и студенты. Все они были либо с коньками, либо с лыжами. Мальчиков было 16. С лыжами пришли 24 человека. Девочек с коньками было ровно столько, сколько мальчиков с лыжами. Сколько человек участвовало в соревнованиях по лыжному и конькобежному видам спорта?

Решение

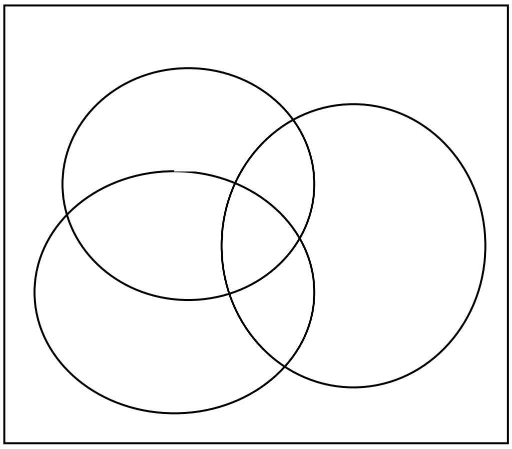
Выделим множества : . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. По результатам опроса студенческой группы из 32 человек 12 регулярно читают журнал "Мир ПК", 10 человек читают журнал " Компьютерпресс", 8 человек предпочитают журнал "Знание–сила", 3 человека читают и "Мир ПК" и "Компьютерпресс", 4 человека читают "Мир ПК" и "Знание–сила", 5 человек – "Компьютерпресс" и "Знание–сила", а 1 человек читает все три журнала.

а) сколько человек читают только "Мир ПК" ?

б) сколько человек читают только журнал "Знание–сила" (рис. 24)?

Решение



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Рис. 24

. . . .

8. На потоке обучается 65 студентов, все они посещают дисциплины по выбору. "Теорию графов" изучает 39 человек; "Теорию вероятности" – 26 человек; "Математическую статистику" – 24 человека; 10 человек изучает "Теорию графов" и "Теорию вероятности", 9 человек – "Теорию графов" и "Математическую статистику", а 8 человек изучает "Теорию вероятности" и "Математическую статистику".

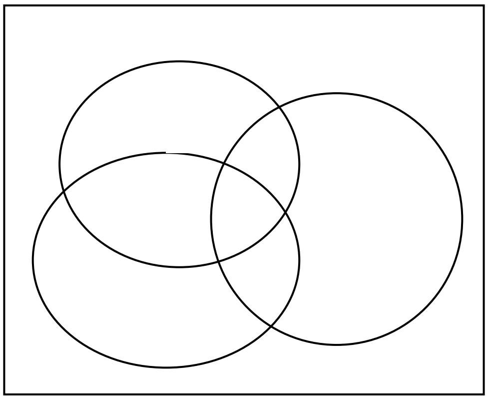
а) сколько человек изучает все три дисциплины?

б) сколько человек изучает одну дисциплину?

с) сколько человек изучает две дисциплины?

г) сколько человек изучает только "Теорию графов" (рис. 25)?

Решение



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Рис. 25

. . . .
. . . .
. . . .

1.6. Векторы и прямые произведения

1.6.1. Векторы. Проекция вектора

Вектор (или кортеж) – это упорядоченный набор элементов. Например, (0; 1; 3). Элементы вектора называются *координатами* или *компонентами*. Число координат – длина вектора (размерность).

Координаты вектора могут совпадать (0; 5; 4; 5).

Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и равны соответствующие координаты: $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ **и** $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$m = n,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_m = b_n.$$

Проекцией вектора V на ось i (пр$_i$V) называется его i-я компонента. $V = (a; b; c; d)$, **пр$_2$V** $= (b)$.

Проекцией вектора $V = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **на оси с номерами** $i_1, i_2, \ldots, i_k$ **называется вектор** $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ **длины k: пр$_{i1,\ldots,ik}$ V.**

Пример: **V = {(a; b; d); (c; b; d); (d; b; b)},**

пр$_1$ V = {a, c, d},

пр$_2$ V = {b},

пр$_{2,3}$V = {(b,d); (b, b)}.

1.6.2. Прямое произведение

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B ($A \times B$) называется множество всех векторов (a; b), таких, что $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{ x : x = (a; b),\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Если **A = B**, то $A \times A = A^2$. Аналогично для нескольких множеств. **Прямым произведением множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ называется множество всех векторов длины m, таких, что $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_m \in A_m$ $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$** .

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{x: x=(a_1, a_2, \ldots, a_m),\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_m \in A_m\}.$$

Примеры.

1) Множество **R½R=**R^2 – множество точек плоскости, точнее пар вида **(a, b),** где **a, b** $\in$ **R** и являются координатами.

2) **A={a, b, c, d, e, f, g, h}, B={1, 2, .., 8}.**

Тогда **A ½ B={ (a; 1), (a; 2), ..., (d; 7), (d; 8), ... (h; 7), (h; 8)}** – множество всех 64 клеток шахматной доски.

3) **A** – множество букв, символов, знаков препинания и т. д. Тогда элементы множества A^n – слова длины n. Множество всех слов $A^* = \cup A_i = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots;\ i \in N$ составляет язык.

4) **X={2, 3}, Y={a, b}. X ½ Y = {(2; a), (2; b), (3; a), (3; b)}.**

Y ½ X = {(a; 2), (a; 3), (b; 2), (b; 3)}.

Следовательно, $\mathbf{X ½ Y \neq Y ½ X}$.

1.6.3. Теорема о мощности прямого произведения

Пусть $\mathbf{A_1, A_2, ..., A_n}$ – конечные множества. Соответственно мощности этих множеств равны: $|\mathbf{A_1}| = \mathbf{m_1}$, $|\mathbf{A_2}| = \mathbf{m_2}, ..., |\mathbf{A_n}| = \mathbf{m_n}$.

Тогда мощность прямого произведения **n** множеств равна произведению мощностей соответствующих множеств, т.е. $|\mathbf{A_1½A_2½A_3½...½A_n}| = \mathbf{m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n}$.

Доказательство методом математической индукции.

Для $\mathbf{n} = 1$ теорема тривиально верна. Предположим, что она верна и для $\mathbf{n = k}$ и докажем ее справедливость для $\mathbf{n = k+1}$.

По предположению $|\mathbf{A_1½A_2½...½A_k}| = \mathbf{m_1m_2...m_k}$. Возьмем любой вектор $(\mathbf{a_1, a_2, ... a_k})$ из $\mathbf{A_1½A_2½...½A_k}$ и припишем справа элемент $\mathbf{a_{k+1}} \in \mathbf{A_{k+1}}$. Это можно сделать $\mathbf{m_{k+1}}$ способом, т. е. получим $\mathbf{m_{k+1}}$ различных векторов из $\mathbf{A_1½A_2½...A_k½A_{k+1}}$.

Таким образом, из всех $\mathbf{m_1\ m_2\ ...\ m_k}$ векторов приписыванием справа элемента из $\mathbf{A_{k+1}}$ можно получить $\mathbf{m_1\ m_2\ ...\ m_{k+1}}$ векторов, причем все они различны. Поэтому для $\mathbf{n=k+1}$ теорема верна и, следовательно, верна для любых **n.**

Следствие: $|\mathbf{A^n}| = |\mathbf{A}|^{\mathbf{n}}$

Упражнения 1.6

1. Даны множества $\mathbf{A} = \{a, b\}$ и $\mathbf{X} = \{1, 2, 3\}$. Найти прямое произведение $\mathbf{A \times X}$.

$\mathbf{A \times X} = \{ (a, 1); (a, 2);$ . . . . $\}$.

2. Пусть $\mathbf{M} = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2)\}$. Найти $\mathbf{пр_1\ M} = \{$ . . . .$\}$.

3. Дано множество $\mathbf{S} = \{x, y, z\}$. Найти прямое произведение $\mathbf{S^2}$. $\mathbf{S^2} = \{$ . . . . $\}$.

2. Отношения и функции

2.1. Основные понятия отношений

Часто в вычислениях необходимо выбирать элементы множеств, которые удовлетворяют некоторому “отношению”. Это понятие довольно общее, поэтому широко применимо. При соответствующем выборе отношения его аргументы могут быть связаны какой-либо формулой, иногда достаточно простой, если возможно найти удачное описание.

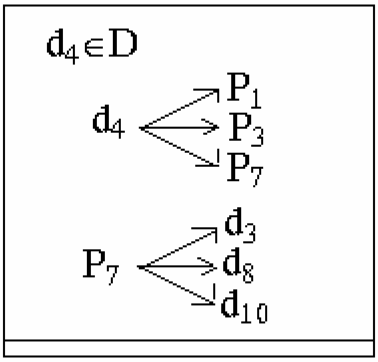


Рис. 26

Рассмотрим пример, иллюстрирующий понятие отношения (рис. 26):

Предположим, что **P** – множество программ; **D** – конечное множество данных; **R** – множество результатов.

Если мы выберем конкретное значение из **D**, то оно может использоваться в некоторых программах из **P** и для каждой программы из **P** существует совокупность значений из **D**, которые в ней используются. Таким образом, мы имеем соответствие между значениями данных и программами, и, следовательно, существуют элементы **D**×**P**, представляющие интерес. Аналогично, если мы сведем рассмотрение к **p** ∈ **P**, то **p** связывает соответствующие данные из **D** с результатами из **R**.

Можно рассматривать данные, приводящие к остановке, или результаты, которые не могут быть получены из **p**. Следовательно, мы приходим к подмножеству **D**×**R**.

Определение. **n-местным отношением R на множествах A_1, ..., A_n называется подмножество прямого произведения A_1x...x A_n.**

Другими словами, элементы x_1, ..., x_n (где $x_1 \in A_1$, ..., $x_n \in A_n$) связаны отношением **R** тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$, а $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – упорядоченный набор из **n** элементов.

Наиболее часто встречаются отношения при **n** = 2; в этом случае они называются *бинарными отношениями*. Следовательно, бинарные отношения между множествами **A** и **B** являются просто подмножеством **A**×**B**. Если эти множества эквивалентны (скажем, равны **A**), то будем говорить, что подмножество A^2 определяет отношения на **A**.

Отношения не являются чем-то новым. Можно построить отношения, которые несомненно будут знакомы вам.

Пример 1. Пусть $\mathbf{A}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Тогда $\mathbf{R=\{(x, y): x, y \in A}$, где $\mathbf{x}$ – делитель $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \le 5\}$.

В явном виде $\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (5, 10)\}$.

Пример 2 (шахматы). Пусть $\mathbf{F} = \{\mathbf{a, b, c, d, e, f, g, h}\}$, $\mathbf{R} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и пусть $\mathbf{S} = \mathbf{F}\times\mathbf{R}$.

Таким образом, $\mathbf{S}$ – множество всех клеток, обозначаемых парами $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}$.

Определим бинарное отношение $\mathbf{C}$ для ладьи на множестве $\mathbf{S}$ так, что $(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$ – элементы $\mathbf{S}$ и ладья может пройти от $\mathbf{s}$ к $\mathbf{t}$ одним ходом на пустой доске.

$$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{S}\times\mathbf{S} \text{ и } \mathbf{C} = \{((\mathbf{f_s}, \mathbf{r_s}), (\mathbf{f_t}, \mathbf{r_t})) : (\mathbf{f_s}=\mathbf{f_t} \text{ и } \mathbf{r_s}\neq \mathbf{r_t}) \text{ или } (\mathbf{f_s}\neq \mathbf{f_t} \text{ и } \mathbf{r_s}=\mathbf{r_t})\}.$$

Напомним, что ладья может изменять либо горизонтальную координату, либо вертикальную, но не обе одновременно.

В общем случае ряд различных отношений на множестве $\mathbf{A}$ зависит от $|\mathbf{A}|$. Большая часть этих отношений не представляет интереса, но отдельные оказываются полезными.

Определение 1. Для любого множества $\mathbf{A}$ определим **тождественное отношение $\mathbf{I_A}$ и универсальное отношение $\mathbf{U_A}$** следующим образом**:**

$$\mathbf{I = \{(a, a) : a \in A\}, U = \{(a, b) : a \in A, b \in A}\}.$$

Таким образом, $\mathbf{U_A} = \mathbf{A}^2$. Так как $\varnothing \subseteq \mathbf{A}^2$, то $\varnothing$ является отношением на $\mathbf{A}$ и называется **пустым отношением**.

Пусть отношение $\mathbf{R}$ определено в соответствии с изображением на рис. 27. Свяжем с каждым бинарным отношением $\mathbf{R}$ между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – **область определения $\mathbf{D(R)}$ и область значений $\mathfrak{R}(\mathbf{R})$.** Они определяются следующим образом.

Определение 2. **Область определения** – это множество значений $\mathbf{x}$, таких, что пара $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принадлежит отношению $\mathbf{R}$: $\mathbf{D(R) = \{x : (x, y) \in R\}}$, а **область значений $\mathfrak{R}(\mathbf{R})$** это множество значений $\mathbf{y}$, таких, что пара $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принадлежит отношению $\mathbf{R}$: $\mathfrak{R}(\mathbf{R}) = \{\mathbf{y : (x, y) \in R}\}$.

Пример 3. Пусть отношение **R** такое же, как и в примере 1, **R={ (x, y): x, y** $\in$ **A**, где **x** – делитель **y** и **x** $\le$ 5 }. В явном виде **R** = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (5, 10)}.

Тогда **D** (**R**) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, т. е. $\Re$ (**R**) = **A**.

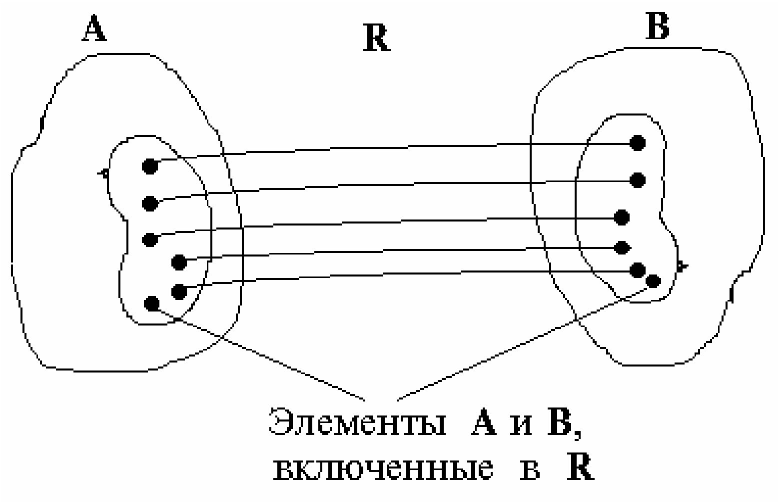


Рис. 27

Хотя каждое отношение является множеством и может быть обозначено прописной буквой, иногда отношения обозначаются строчными греческими буквами: **ρ, τ, σ.**

Например:

а) (**a, b**) $\in$ **ρ,** т. е. (**a, b**) находится в ρ;

б) **a** ρ **b**: **a** связано с **b** отношением ρ;

в) **b** $\in$ ρ(**a**).

Определение 3. Пусть **R** – бинарное отношение. Определим **обратное отношение** $\mathbf{R^{-1}}$ следующим образом**:**

$\mathbf{R^{-1} = \{ (x, y) : (y, x) \in R\}}$.

Таким образом, $\mathbf{R^{-1}}$ связывает те же пары элементов, что и **R**, но "в другом порядке". Следовательно, если $\mathbf{R \subseteq A \times B}$, **то** $\mathbf{R^{-1} \subseteq B \times A}$, $\mathbf{D(R^{-1})} = \Re(\mathbf{R})$ и $\Re(\mathbf{R^{-1}}) = \mathbf{D(R)}$.

Можно **D**(**R**) писать $\mathbf{D}_R$ и $\Re$(**R**) как $\mathbf{R}_R$.

Упражнение 2.1

1. Пусть имеется множество **X** = {2, 4, 6, 8} и задано отношение $\mathbf{P \subseteq X \times X}$, **P** = {(**x, y**) : **x, y** $\in$ **X, x** $\le$ **y**}. Записать отношение в явном виде .

Ответ: **P** = {(2, 2), (2, 4), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .)}.

2. Пусть имеется множество **X** = {2, 4, 6, 8} и задано отношение ρ = {(**x, y**) : **x, y** $\in$ **X** и **x**<**y**}. Выписать все элементы ρ и ρ^{-1}.

Ответ: ρ = {(. , .), (. , .), (. , .), (. , .), (. , .), (. , .)}.
ρ^{-1} = {(. , .), (. , .), (. , .), (. , .), (. , .), (. , .)}.

3. Предположим, что имеется некоторая программа , в которую вводятся два любых числа из множества **A** = {1, 2, 3, 4, 5}, обозначаемых **x** и **y** (рис. 28). Если **x** < **y**, то на печать выдается некоторое число **z** ∈ **A**, такое, что **x** ≤ **z** < **y** . Программа останавливается после считывания всех чисел из А. Определить отношение **P** ⊆ **A**×**A.** Записать отношение в явном виде.

Ответ: **P** = {((. . , . .), . .)) : . . . . }, **P** = = ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .) , . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .), ((. , .), . .)}.

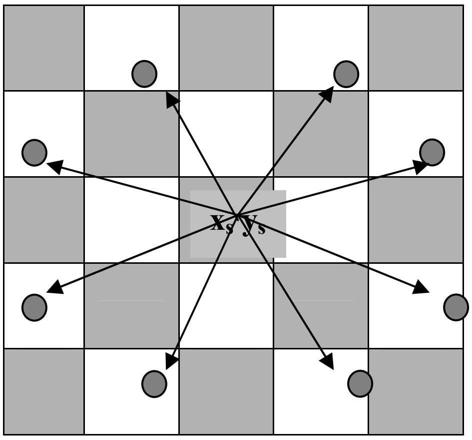


Рис. 28

4. Пусть **F** = {**a, b, c, d, e, f, g, h**}, **R** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} и пусть **S**=**F**×**R**. Таким образом, **S** – множество всех клеток, обозначаемых парами (**x, y**), где **x** ∈ **F**, **y** ∈ **R**. Отношение **K** связывает клетки, которые определяются ходом коня так, что (**s, t**) ∈ **K** тогда и только тогда, когда **s** и **t** – элементы **S** и конь может пройти от **s** к **t** одним ходом на пустой доске. Определить **K** при помощи символов.

Ответ: **K** ⊆ **S**×**S** и **K** = {((x_s, y_s), (x_t, y_t)): . . . . }.

5. Дано множество **M** = {a, b, c}. Найти тождественное и универсальное множества.

Ответ: **I** ={ . . . . }, **U** = {. . . . . }.

6. Даны множества **A** = {1, 2} и **B** = {1, 2, 3}. а) записать элементы множества **M** в явном виде, если **M** = {**m : m** = **a** × **b**, **a** ∈ **A, b** ∈ **B**}; б) записать элементы отношения **R** = {(**a, b**) : **a, b** ∈ **M,** и **a** + **b** – четное }; в) найти область определения **D**(**M**) и область значений $\Re$(**M**).

Ответ: а) **M** ={ . . . . }; б) **R** = { (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . . }; в) **D**(**M**) ={ . . . . }, $\Re$(**M**) ={ . . . . }.

7. Дано множество $\mathbf{M} = \{1, 2, 5, 7, 9\}$: а) записать элементы отношения $\rho = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}$, и $\mathbf{a} - \mathbf{b} > 3\}$; б) найти область определения $\mathbf{D}(\mathbf{M})$ и область значений $\Re(\mathbf{M})$.

Ответ: а) ρ = {(. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), ... }; б) **D**(**M**) ={ . . . . }, ℜ(**M**) = { . . . . }.

8. Даны множества $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ и $\mathbf{B} = \{1, 2, 4\}$: а) записать элементы множества **M** в явном виде, если $\mathbf{M} = \{\mathbf{m} : \mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$; б) записать элементы отношения $\mathbf{R} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}$, и **a** и **b** имеют общий делитель}; в) найти $\mathbf{R}^{-}$.

Ответ: а) **M** = { . . . . }, б) **R** = {(. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . . }; б) $\mathbf{R}^{-}$ = { (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . . }.

2.2. Графические представления отношений

Записанное в виде множества упорядоченных пар отношения иногда нелегко расшифровываются.

Отношения – это множества, обладающие определенной структурой; их элементы имеют несколько компонентов, и поэтому, в принципе, мы можем использовать диаграммы Венна для их изображения, но существуют более эффективные методы, особенно для бинарных отношений.

2.2.1. Координатный метод

Пусть дано множество $\mathbf{X}=\{a, b, c, d, e\}$ и отношения:

тождественное $\mathbf{I}_x$, универсальное $\mathbf{U}_x$ и некоторое отношение $\mathbf{R} = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e, b)\}$.

Координатный метод относится к традиционной аналитической геометрии (рис. 29).

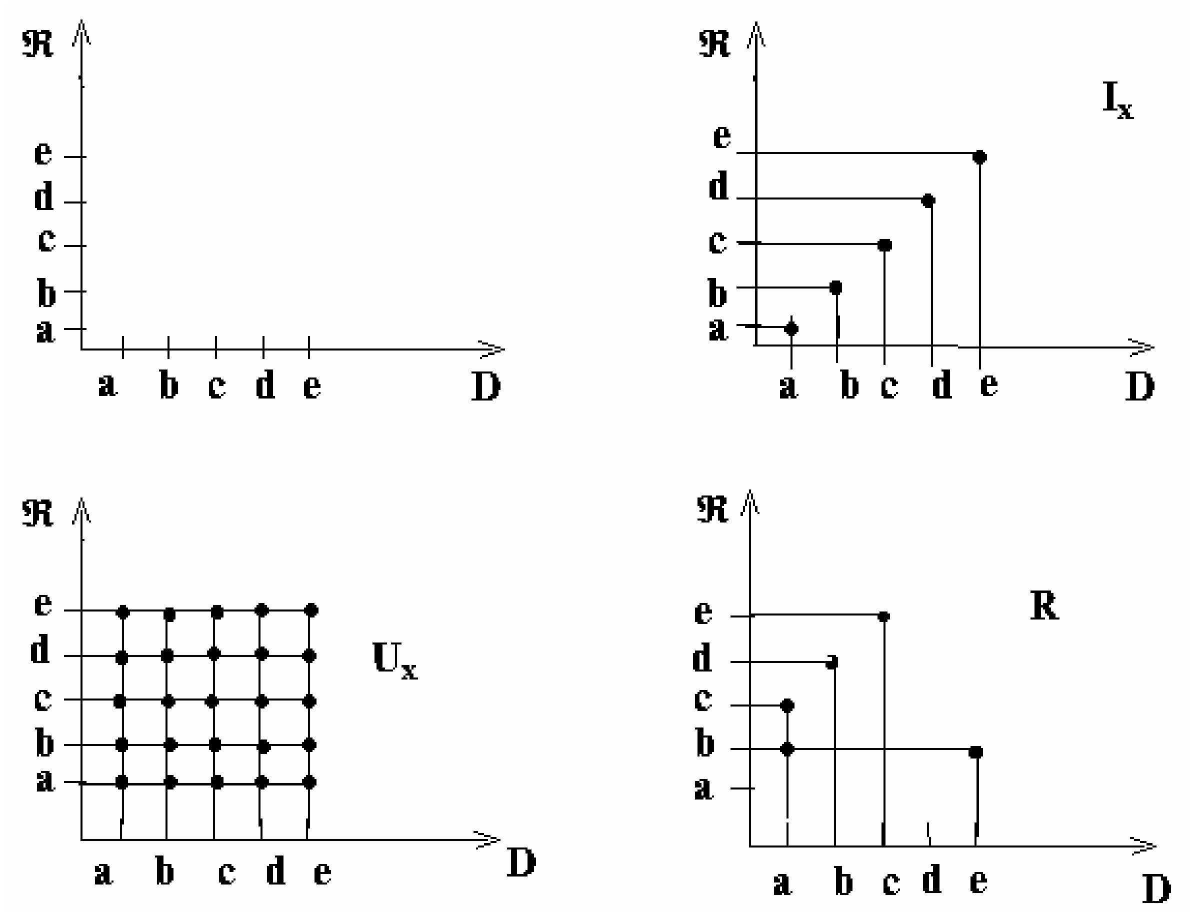


Рис. 29

Основной недостаток этого метода заключается в том, что при увеличении мощности |**X**| трудно увидеть элементы в области и установить соответствие с точками, обозначающими отношения.

2.2.2. Линейно-координатный метод

Для преодоления недостатка предыдущего метода можно опустить точки и соединить стрелкой **x** ∈ **D** и **y** ∈ **R**, когда (**x, y**) принадлежат отношению. Иллюстрация предыдущего примера линейно-координатным методом показана на рис. 30.

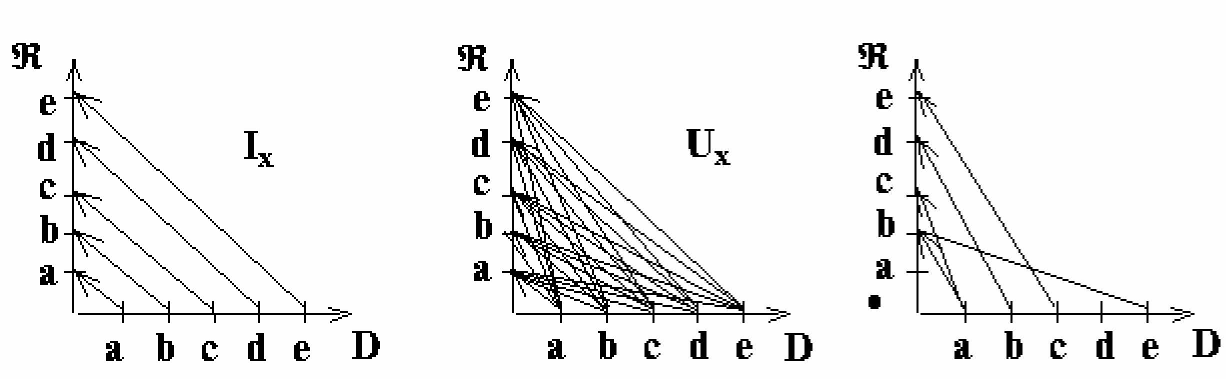


Рис. 30

Диаграмма $\mathbf{U}_x$ получилась довольно запутанной, зато отношения $\mathbf{I}_x$ и **R** получились наглядными.

2.2.3. Линейный метод

Используя параллельные вертикальные линии для **D** и **R** получаем диаграммы, в которых стрелки не требуются в принципе, так как мы двигаемся слева направо (рис. 31).

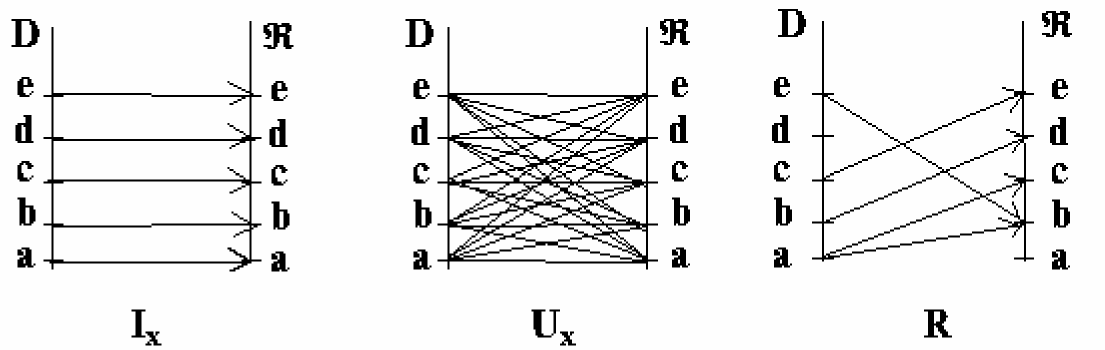


Рис. 31

2.2.4. Графовый метод

Элементы множества, на котором строится отношение, представлены вершинами графа, а сами отношения – дугами графа (рис. 32). Так как точки **a, b, c, d, e** в областях **D** и **R** одни и те же, их можно объединить.

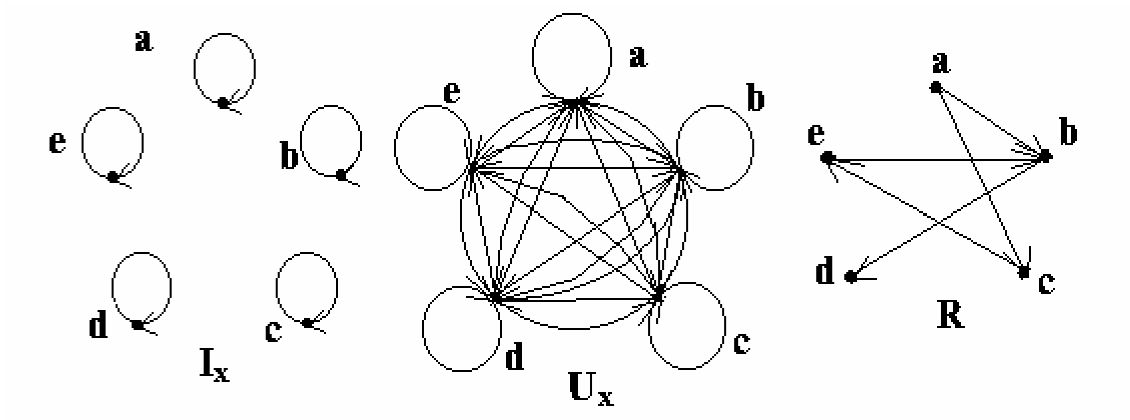


Рис. 32

Упражнение 2.2

1. Пусть имеется множество $\mathbf{M} = \{-3, -1, 1, 3\}$ и задано отношение ρ $= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M},\ \mathbf{x} + \mathbf{y} < 1\}$: а) записать отношение в явном виде; б) представить ρ линейно-координатным, линейным и графическим способами (рис. 33).

Ответ: а) ρ = { (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . .}; б).

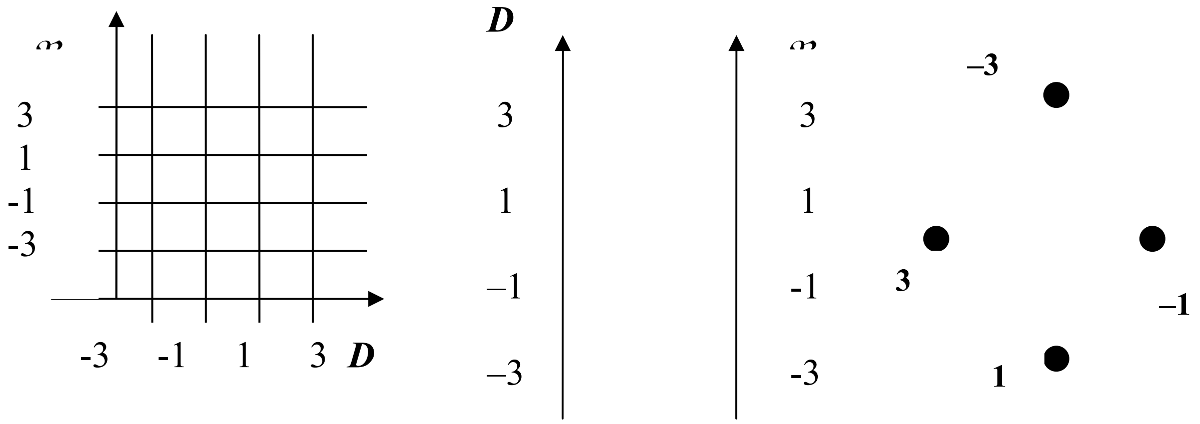


Рис. 33

2. Пусть имеется множество $\mathbf{X} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ и задано отношение ρ $= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ и $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, **x** и **y** имеют общий делитель $\}$. Выписать все элементы ρ и представить ρ линейно-координатным, линейным и графическим способами (рис. 34).

Ответ: ρ = { (. , .), (. , .), ...}.

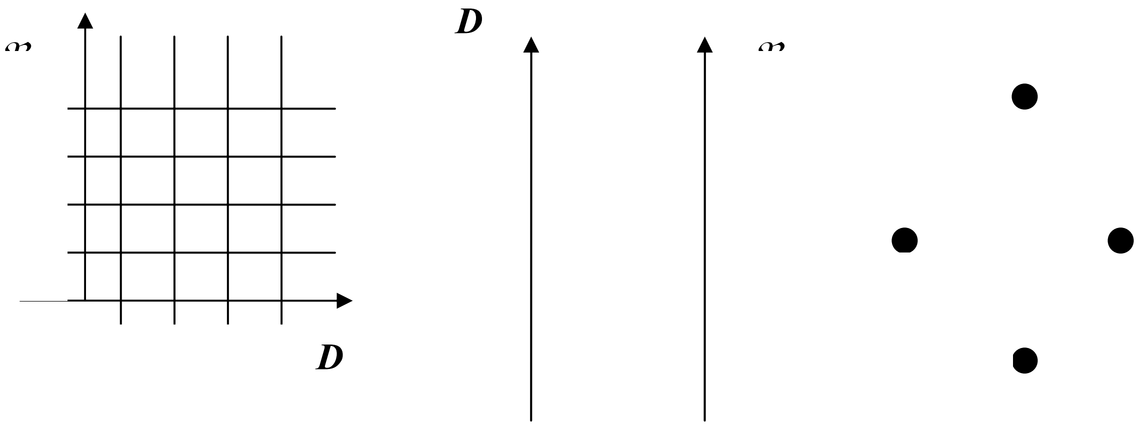


Рис. 34

2.3. Свойства отношений

Пусть ρ – отношение на множестве **A**.

Тогда а) ρ рефлексивно, если **x** ρ **x** для ∀ **x** ∈ **A**;

б) ρ симметрично, если **x** ρ **y** влечет **y** ρ **x**;

в) ρ транзитивно, если **x** ρ **y** и **y** ρ **z** влечет **x** ρ **z**;

г) ρ антисимметрично, если **x** ρ **y** и **y** ρ **x** влекут **x = y**.

Пример 1. Пусть ρ = {(**x, y**) : **x, y** ∈**N** и **x** – делитель **y**}, **N** = = 1, 2, ¾ …, 9.

В явном виде ρ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ¾ …, (1, 9), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)}.

Тогда ρ

– рефлексивно, так как **x/x** = 1 для всех **x** ∈ **N;**

– несимметрично, поскольку 2 – делитель 4, то 4 не является делителем 2;

– транзитивно, так как (2, 4) и (4, 8) влечет (2, 8);

– антисимметрично, так как если **x/y** ∈ **N** и **y/x** ∈ **N**, то **x = y**.

Пример 2. Пусть **P** – множество всех людей, **A** и **S** определяются следующим образом: **A** = {(**x, y**) : **x, y** ∈ **P** и **x** – предок **y**} **S** = {(**x, y**) ∈ **P** и **x** и **y** имеют одних и тех же родителей}.

Очевидно, что **A** транзитивно, а **S** рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример 3. Пусть **P** – множество всех людей. Определим отношение **B** такое, что **x B y** тогда и только тогда, когда **x** является братом **y**. **B**={(**x, y**)**: x, y** ∈ **P** и **x** – брат **y**} (рис. 35).

В семье, состоящей из двух братьев **p** и **q** и сестры **r**, имеем ситуацию: отношение **B** не симметрично, так как **p B r**, но не **r B p**; **B** не антисимметрично, так как **p B q** и **q B p**, хотя и **p** и **q** различны.

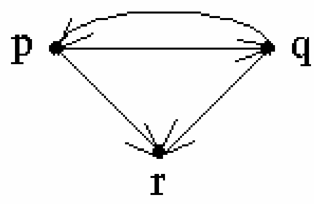
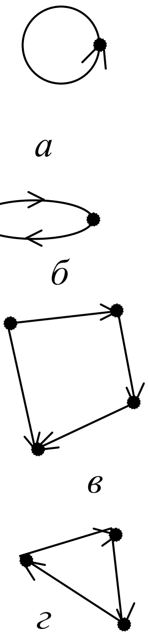


Рис. 35

В более общей ситуации мы можем интерпретировать рассмотренные выше характеристики отношений путем построения диаграмм:



а) отношение **рефлексивно** тогда и только тогда, когда для каждого узла на диаграмме существует стрелка-петля;

б) отношение **симметрично** тогда и только тогда, когда для каждой стрелки, соединяющей два узла, существует также стрелка, соединяющая два этих узла в обратном направлении.

в) отношение **транзитивно** тогда и только тогда, когда для каждой пары узлов **x** и **y**, связанных последовательностью стрелок от **x** к $\mathbf{a_1}$ и от $\mathbf{a_1}$ к $\mathbf{a_2}$, …¾, от $\mathbf{a_{n-1}}$ к $\mathbf{a_n}$, от $\mathbf{a_n}$ к **y**, существуют также стрелки от **x** к **y**.

г) отношение антисимметрично тогда и только тогда, когда не существует двух различных узлов, связанных парой стрелок (рис. 36).

Рис. 36

Для примера 1 (рис. 37) ρ = {(**x, y**): **x, y** ∈ **N** и **x** – делитель **y**}, **N** = 1, 2, …¾, 9.

В явном виде ρ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ¾…, (1, 9), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)} отношение ρ рефлексивно, несимметрично, транзитивно и антисимметрично.

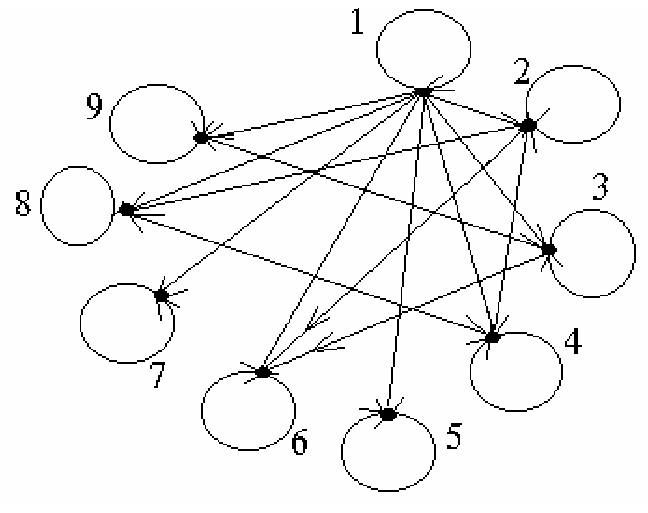


Рис. 37

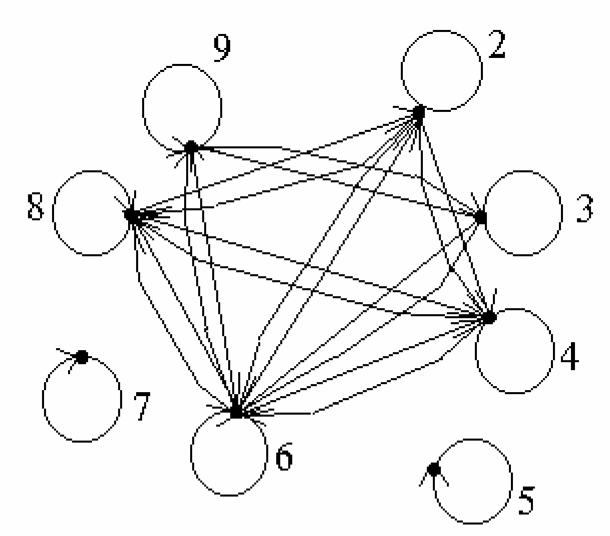


Рис. 38

*Пример 4 (*рис. 38). $\tau = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$ и $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют общий делитель$\}$, $\tau = \{(2, 2),\ (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (4, 6), (5, 5), (6, 3), (6, 2), (6, 6), (7, 7), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (9, 9), (6, 4), (8, 6), (6, 8), (9, 6), (6, 9)\}$.

Отношение τ рефлексивно, симметрично, но не транзитивно и антисимметрично.

Упражнения 2.3

1. Пусть имеется множество $\mathbf{M} = \{2, 4, 6\}$ и задано отношение $\rho = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M}$, и $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ имеют общий делитель $\}$: а) записать отношение в явном виде; б) представить ρ графическим способом; в) определить свойства отношения $\boldsymbol{\rho}$.

Ответ: а) $\rho = \{$ (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . . $\}$;

б)

в) свойства отношения $\boldsymbol{\rho}$:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. Пусть имеется множество $\mathbf{M} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ и задано отношение $\rho = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M}, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 2\}$: а) записать отношение в явном виде; б) представить ρ графическим способом; в) определить свойства отношения $\boldsymbol{\rho}$.

Ответ: а) $\rho = \{$ (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . .$\}$.

б)

в) свойства отношения $\boldsymbol{\rho}$:

. . . .
. . . .
. . . .

. . . .

. . . .

3. Пусть имеется множество **M** = {–3, –1, 1, 3} и задано отношение ρ = {(**x**, **y**) : **x**, **y** ∈ **M**, **x** + **y** < 1}. Определить, какими свойствами обладает данное отношение.

Ответ: отношение ρ . . . .

4. Пусть имеется множество **X** = {2, 3, 4, 5, 6} и задано отношение ρ = {(**x**, **y**) : **x, y** ∈ **X** и **x < y, x** и **y** имеют общий делитель}. Определить, какими свойствами обладает данное отношение.

Ответ: отношение ρ . . . .

2.4. Отношения эквивалентности и порядка

Определение. **Бинарное отношение на множестве называют отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.**

Пример 1. На множестве всех треугольников отношение, определяемое как $\mathbf{R}_1$ = {(**x**, **y**) : **x** и **y** имеют одинаковую площадь}, является тривиальным отношением эквивалентности.

Пример 2. Отношение, определяемое на множестве всех программ $\mathbf{R}_2$ = {(**a**, **b**) : **a** и **b** вычисляют одну и ту же функцию на определенной машине}, это является отношением эквивалентности.

Поскольку из понятия равенства (скажем, между числами) возникает математическое понятие эквивалентности, некоторые неравенства могут также использоваться как модели для более широкого класса отношений.

Частичным порядком на множестве A назовем отношение, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Порядок (называемый также отношением порядка) – это обобщение отношения ≤ на N. Поэтому можно легко проверить требуемые три свойства. Заметим, что мы могли бы в качестве определения взять отношение <. Тогда отношение порядка было бы только транзитивно. Следовательно, **свойство транзитивности является наиболее важным для отношения порядка**.

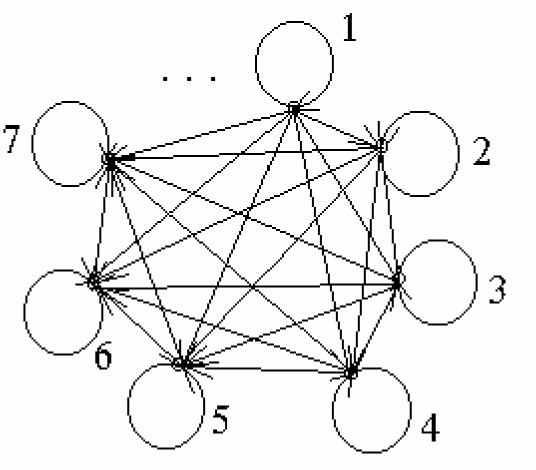


Рис. 39

Определив отношение $\leq$, можно определить отношение $<$ следующим образом: $\mathbf{a < b \Leftrightarrow a < b}$ **и** $\mathbf{a \neq b}$**.**

Аналогично, если задано $<$, то $\mathbf{a \leq b \Leftrightarrow a = b}$ или $\mathbf{a < b}$.

Пример 1. Порядок чисел на действительной оси **R** является полным.

Пример 2 (рис. 39). Отношение $\sigma = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{N}$ и $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}\}$ рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Упражнение 2.4

1. Пусть имеется отношение $\rho = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Обладает ли данное отношение свойством эквивалентности?

Ответ:. . . . .

2. Пусть имеется множество $\boldsymbol{M} = \{4, 6, 8, 10\}$ и задано отношение $\rho = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M}$ и **x** и **y** имеют общий делитель}.}. Обладает ли данное отношение свойством эквивалентности?

ρ = { (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . .}

Ответ:. . . . .

3. Пусть имеется множество $\mathbf{X} = \{2, 4, 6\}$ и задано отношение $\rho = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ и $\mathbf{x} < \mathbf{y}$**,** **x** и **y** имеют общий делитель}.}. Обладает ли данное отношение свойством эквивалентности?

Ответ:. . . . .

4. Обладает ли отношение ρ из примера 1 упражнения 2.1 свойством порядка?

Ответ:. . . . .

5. Имеется множество $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ и задано отношение $\rho = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M}$ и $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ – нечетное }.

ρ = { (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .), (. . , . .) . . . .}

Обладает ли отношение свойством эквивалентности?

Ответ:. . . . .

2.5. Функции

Подмножество $F \subset M_x \times M_y$ называется функцией, если для каждого элемента x, $x \in M_x$, найдется не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$;

При этом если для каждого элемента **x** имеется один элемент **y** вида $(x, y) \in F$, то функция называется **всюду** (полностью) **определенной,** в противном случае **– частично определенной** (недоопределенной).

Множество M_x образует область определения функции F, множество M_y – область значения функции F. Часто вместо записи $(x,y) \in F$ используют запись **y = F(x)**; при этом **x** называют **аргументом** или переменной, а **y** – **значением функции**.

Пример. $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$ (рис. 40).

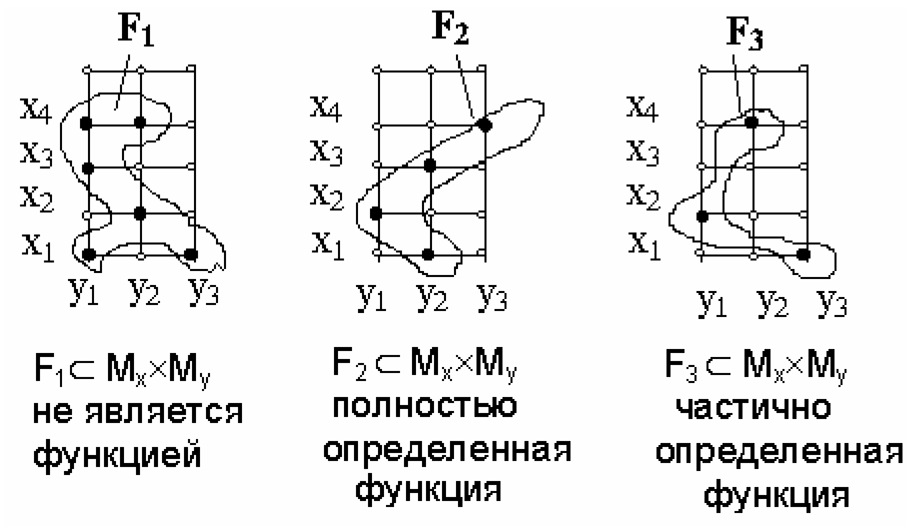


Рис. 40

Функция f: **A** $\rightarrow$ **B** является отображением, если область ее определения совпадает с **A**, т. е. D_f=**A**. Отображение на множество называют *трансформацией* (преобразованием).

Упражнение 2.5

1. Дано отношение $\rho = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 5)\}$. Является ли оно функцией (рис. 41)?

Ответ: . . . . . .

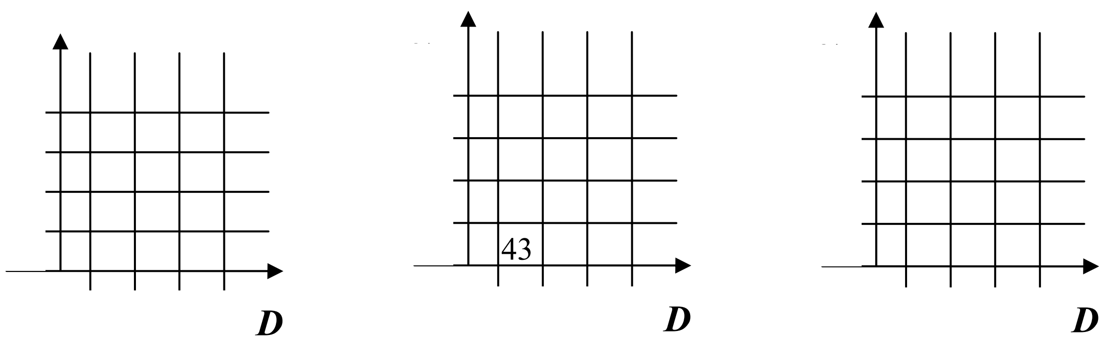


Рис. 41

2. Имеется множество $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ и задано отношение $\rho = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M}, \mathbf{x} < \mathbf{y}$, и $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ – нечетное$\}$. $\rho = \{$(. . , . .), (. . , . .), (. . , . .),. . . . .$\}$. Является ли оно функцией?

Ответ: . . . . . .

3. Дано множество $\mathbf{M} = \{3, 5, 6, 7\}$ и задано отношение $\rho = \{(3, 7), (5, 3), (6, 6), (7, 5)\}$: а) является ли оно функцией? б) является ли оно отображением?

Ответ: а). . . . . . ; б) . . . .

3. Комбинаторика

Комбинаторика – один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его в ВТ, кибернетике, робототехнике. Большинство задач комбинаторики можно сформулировать как задачи теории конечных множеств, поэтому эти две темы – элементы теории множеств и комбинаторика – рассматриваются взаимосвязано.

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Например, сколькими способами могли быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали на Олимпийских играх в Сеуле по баскетболу; или сколькими различными способами можно разместить здания на площади? Задачи такого типа называются *комбинаторными*.

С комбинаторными вычислениями приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому-химику при рассмотрении различных возможных типов связи атомов в молекулах, биологу – при изучении возможных последовательностей чередования аминокислот в белковых соединениях, диспетчеру – при составлении графика движения и т. д.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В то время в жизни привилегированных слоев общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Были широко распространены лотереи. Возникали вопросы: сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей? Эти и другие проблемы оказались движущей силой в развитии комбинаторики.

Теоретические исследования вопросов комбинаторики предприняли Паскаль и Ферма, Бернулли, Лейбниц и Эйлер и др.

Для инженерных специальностей университета комбинаторные задачи приходится решать в следующих случаях:

1) при конструировании:

- для оптимального размещения элементов системы;
- для размещения микросхем на плате или элементов на кристалле;
- при трассировке (выборе маршрута);

2) при синтезе схем и проектирования:

- при решении вопроса, какой набор стандартных микросхем выбрать, чтобы реализовать разработанную схему устройства;
- при разработке схемы на подсхемы для реализации различными блоками и т. д.;

3) при контроле, выбирая–перебирая последовательность тестирующих сигналов;

4) в организации систем, решая вопрос, каким выбрать оптимальный маршрут передачи информации по сети и т. п.

3.1. Общие правила комбинаторики

Рассмотрим некоторые конкретные задачи.

Задача. 1. «Суеверные велосипедисты»

«Опять восьмерка» – воскликнул председатель клуба велосипедистов, – а все потому, что у меня билет № 008. Надо менять номера и проводить перерегистрацию».

Итак, сколько членов было в клубе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной цифры 8?

00	01	02	....	09
10	11	12	....	19
20	21	22	....	29
30	31	32	....	39
40	.	.	....	.
50	.	.	....	.
60	.	.	....	.
70	.	.	....	.
90	.	.	....	.

Для решения этой задачи определим сначала, сколько однозначных номеров не содержит цифру 8? Это 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 – всего девять цифр, а теперь найдем все двузначные номера: их 9½9 = 81 (таблица). За каждым двузначным номером можно поставить любую допустимую цифру, следовательно, 9½9½9 = 9^3 = = 729. Значит в клубе было 729 велосипедистов.

В другом клубе велосипедисты были ещё суевернее и решили, что цифра 0 тоже похоже на вытянутое колесо и они отказались от этой цифры .

Сколько членов было в клубе, если номера билетов были трехзначными и не включали цифр 0 и 8? 8½8½8= 8^3 = 512.

Задача 2. «Секретный замок»

В сейфах применяют секретные замки, которые открываются, когда набран шифр. Этот шифр набирают с помощью одного или нескольких дисков. Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово-шифр состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим шифра?

Всего попыток 12½12½12½12½12 = 12^5, одна из которых удачная, следовательно неудачных попыток $12^5 – 1$.

Задача 3. «Команда космического корабля»

В случае, когда число возможных выборов на каждом шаге зависит от того какие элементы были выбраны ранее, удобно решение изображать в виде «дерева». Сначала из одной точки проводят столько отрезков, сколько различных выборов можно сделать на 1-м шаге. Из конца каждого отрезка проводят столько отрезков, сколько можно сделать на 2-м шаге и т. д. В результате получается «дерево решений».

Рассмотрим задачу о формировании команды космического корабля. Известно, что возникнет вопрос психологической совместимости. Предположим, надо составить команду из 3-х человек: командира, инженера и врача. На место командира есть четыре кандидата: a_1, a_2, a_3, a_4, на место инженера три – b_1, b_2, b_3, на место врача три – c_1, c_2, c_3. Проведенная проверка показала, что a_1 совместим с b_1, b_2, c_2, c_3; a_2 совместим с b_1, b_2, c_1, c_2, c_3; a_3 совместим с b_1 и b_2, c_1, c_3; a_4 совместим с b_1, b_2, b_3, c_2; b_1 не совместим с c_3; b_2 не совместим с c_1; b_3 не совместим с c_2.

Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда корабля? По результатам совместимости строится дерево решений (рис. 42). Итак, всего 11 комбинаций, а без ограничения 4½3½3 = 36.

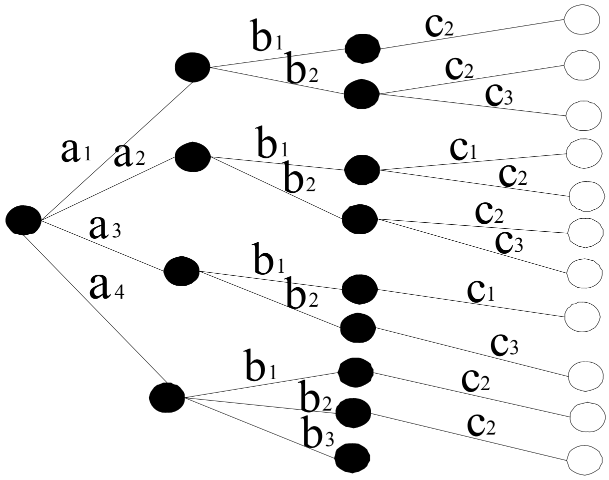


Рис. 42

Упражнение 3.1

1. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0,1, 2, 3, 4, 5 (рис. 43)?

Решение

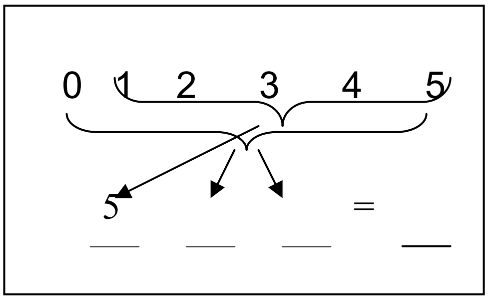


Рис. 43

На первое место можно поставить любую цифру, кроме 0. Следовательно, для первой цифры 5 вариантов выбора. На второе и третье место можно поставить любую цифру. Таким образом, имеем . . . . . вариантов выбора второй цифры и . . . . . вариантов выбора третьей цифры. Всего вариантов . . . . .

Ответ: . . . . .

2. Сколько пятизначных чисел, у которых все цифры нечётные?

Решение

Нечетных цифр 5. О вариантах выбора рассуждаем так же, как в первой задаче (рис. 44).

Ответ: . . . . .

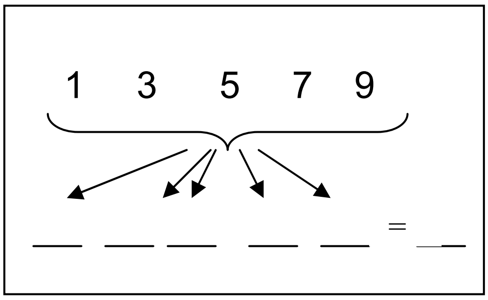


Рис. 44

3. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5 (рис. 45)?

Решение

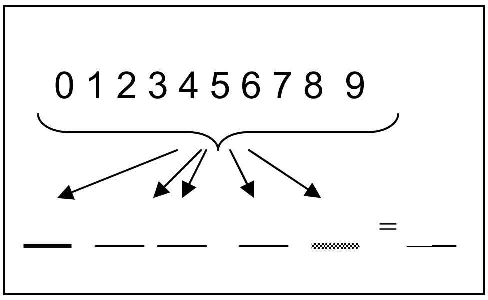
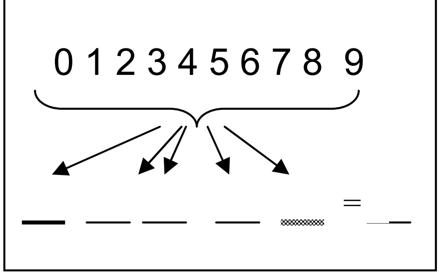


Рис. 45

На первое место можно поставить любую цифру, кроме 0. Следовательно, для первой цифры . . . вариантов выбора. На второе, третье и четвертое места можно поставить любую цифру. На пятое место можно поставить . . . . . Таким образом, имеем . . . . . вариантов.

Ответ: . . . . .

4. Сколько пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, 67876,17071) (рис. 46) ?



Решение

О вариантах выбора рассуждаем также как в предыдущих задачах.

Ответ: . . . . .

Рис. 46

5. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причём все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник (рис. 47)?

Решение

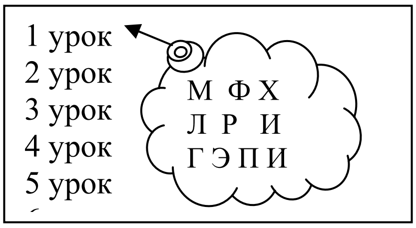


Рис. 47

1-м уроком может быть любой из 10 предметов. 2-м уроком может быть любой из 9 предметов и т. д.

Таким образом получаем . . . . вариантов.

Ответ: . . . . .

6. В селении живут 1500 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.

Решение

В русском языке всего 33 буквы. Отбросим ь, ъ, оставшиеся буквы могут использоваться в качестве инициалов. Следовательно, всего вариантов . . . . , а это . . ., чем 1500.

7. Сколько трёхзначных чисел, которые записываются с помощью цифр 0,1,2,3,4,5 и делятся на 3, можно составить?

Решение

На первое место можно поставить любую цифру, кроме 0. Следовательно, для первой цифры . . . вариантов выбора. На второе место можно поставить любую цифру. Таким образом, имеем . . . . . вариантов выбора второй цифры. Вспомним признак деления на 3 и составим комбинации выбора, например так, как показано на рис. 48. Всего вариантов выбора третьей цифры –. . . . .

Ответ: . . . . .

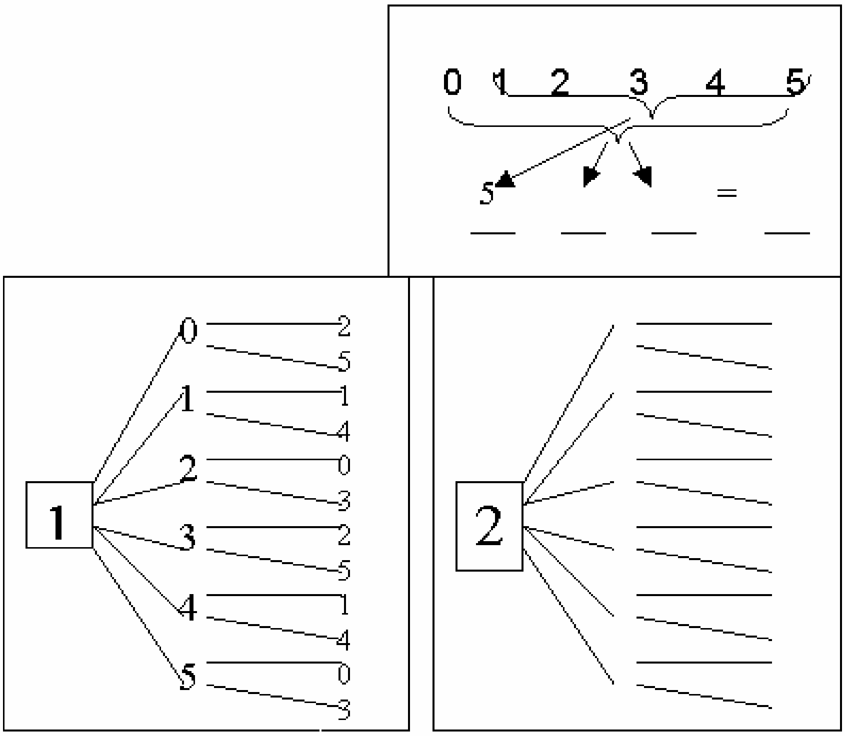


Рис. 48

3.2. Упорядоченные множества. Перестановки

Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n , где n – число элементов множества.

Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы множества в некоторый список (a, b, c, ...), а затем каждому элементу присвоить номер.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, называются перестановками этого множества.

Пример. Перестановки множества A = {a, b, c} из 3-х элементов имеют вид A_p = {(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)}.

Число перестановок из n элементов $\mathbf{P_n = n\,!}$

Задача 1. Сколькими способами можно разместить на плате 4 элемента? $P_4 = 4! = 24$.

Задача 2. Сколькими способами можно выстроить в линейку 10 человек (5 девушек и 5 юношей) с условием, чтобы девушки и юноши чередовались? 5 девушек можно разместить 5! способами, а 5 юношей аналогично 5!. Следовательно, всего способов $(5!)^2 = = (120)^2 = 14400$.

3.2.1. Перестановка с повторением

Если рассматривать упорядоченные k-элементные наборы из множества M, которые состоят не только из различных элементов множества M, но содержат некоторые повторяющиеся элементы, то получим *перестановки с повторением*.

Пусть $M = \{S_1, S_2, \ldots\ldots S_n\}$ – множество из n элементов и $i_1, i_2, \ldots\ldots i_n$ – натуральные числа, такие, что их сумма равна k,а $k > n$.

Каждый упорядоченный набор k элементов $\overline{P}_k$ содержащий элемент S_j равно i_j раз ($1 \le j \le n$) называется *перестановками множества M с повторением*:

$$\overline{P}_k = \frac{k!}{i_1!\, i_2! \ldots\ldots i_n!}.$$

Примечание: при $i_1 = i_2 = \ldots\ldots i_n = 1$ получим перестановки множества из n элементов без повторений.

Пример. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 1, 5, 5, 9? Подставим в формулу $\overline{P}_6 = 6! / (3!\ 2!\ 1!) = 4 \times 5 \times 6 = 120$ различных шестизначных чисел.

Задача 2. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

$$\overline{P}_{10} = 10! / (2!\ 3!\ 2!) = 151200.$$

3.2.2. Перестановки предметов, расположенных в круг

Задача 1. «Хоровод». Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг (рис. 49,*а*)?

Если бы они стояли на месте, то количество способов – 7! = = 5040. Но так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих не имеет роли, следовательно, важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга, надо считать одинаковыми. Но из каждой перестановки можно получить еще 6 путем вращения – 7 мест: 5040 : 7 = = 720 различных перестановок девушек в хороводе.

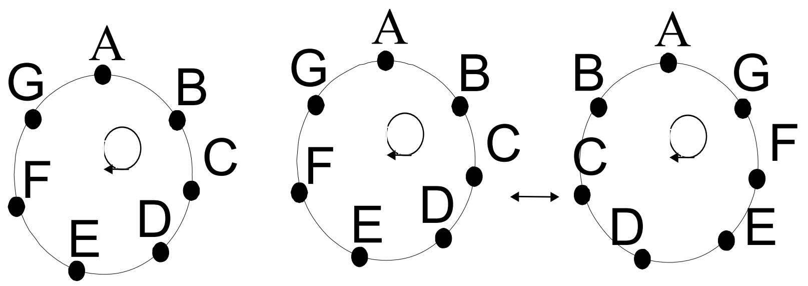
В общем случае, если рассматривать n предметов, расположенных в круг, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно

$$\mathbf{P_{вр(n)} = (n - 1)\ !}$$

Задача 2. Сколько ожерелий можно составить из 7 бусинок?

По аналогии с предыдущей задачей можно подумать, что 720. Но ожерелье можно не только вращать, но и перевернуть (рис. 49,*б*). Поэтому ответ 720 : 2 = 360, т. е.

$$\mathbf{P_{вр.\ и\ пов.}} = \frac{(n-1)!}{2}.$$



а *б*

Рис. 49

Упражнения 3.2

1. Сколькими способами можно составить предложение, переставляя 3 слова: «мама» «мыла» «раму»?

Решение. Перестановки трех различных слов можно получить $\boldsymbol{P_3}$ способами, т. е. всего вариантов . . . . .

Ответ: . . . . .

2. Пассажир забыл номер, набранный в автоматической камере хранения. Он только помнил, что были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру нужно правильно набрать 5 цифр. Какое наибольшее количество номеров нужно набрать, чтобы открыть камеру?

Решение. Необходимо рассмотреть все варианты перестановок элементов «5», «23» и «37», т. е. всего вариантов . . . . .

Ответ: . . . . .

3. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «комбинаторика», «знание»?

Решение. Следует подсчитать перестановки с учетом повторений некоторых букв.

$\tilde{P}_{13}$ =--------------- =. . . . . $\tilde{P}_{6}$ =--------------- =. . . . .

Ответ: . . . .

4. Сколькими способами можно расставить белые шахматные фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

Решение. Следует подсчитать перестановки с учетом повторений некоторых фигур.

$$\tilde{P}_8 = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = .\ .\ .\ .\ .$$

Ответ: . . . .

5. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие 2 лица одного пола не сидели рядом (рис. 50)?

Решение. Для мужчин имеется 5 мест и для женщин 5 мест, схематично показанных на рисунке. Следовательно мужчин можно рассадить . . . . . вариантами, а женщин . . . . . вариантами. Всего . . . . . . способов.

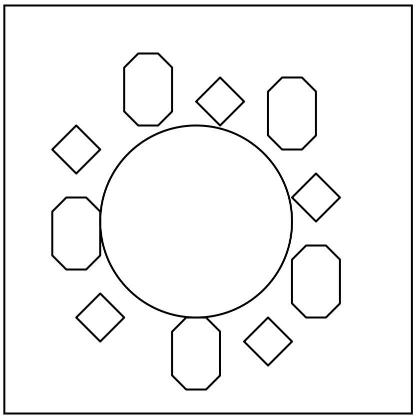


Рис. 50

Ответ: . . . .

6. Та же задача, но они садятся не за круглый стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

Решение: . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ответ: . . . .

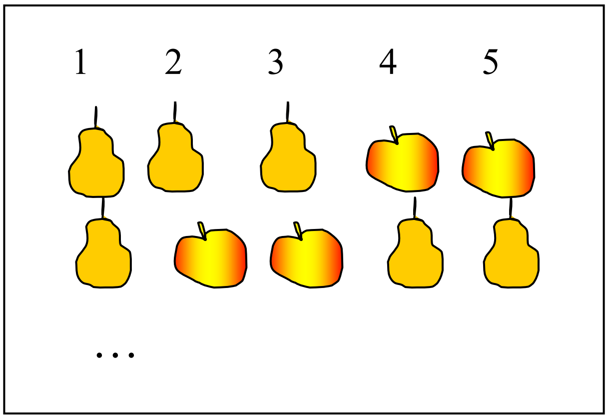


Рис. 51

7. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течении 5 дней подряд она выдаёт по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение. Например, можно выдавать фрукты в такой последовательности, как показано на рис. 51. Можно рассматривать данную последовательность как перестановки с повторениями. Следовательно, всего способов . . . .

Ответ: . . . .

8. Решите предыдущую задачу при условии, что яблок m, а груш n.

Решение. . . . .

Ответ: . . . .

9. Решите ту же задачу, если имеется 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина.

Решение: . . . .

Ответ: . . . .

3.3. Упорядоченные подмножества. Размещения

Упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются размещениями из n элементов по k .

Различные размещения из n по k отличаются компонентами либо их порядком . Общее число размещений без повторений из n элементов по k обозначаются A_n^k и равно

$$\mathbf{A_n^k = n(n-1)......(n-k+1),}\ n > k.$$

Так как повторение элементов не допускается, то всегда n => k. Будем считать, что при k = 0 имеем одно размещение (элементы вообще не выбираются), т. е. положим $A_n^0 = 1$.

Размещение k элементов можно представить себе как заполнение некоторых k позиций элементами заданного множества. При этом 1-ю позицию можно заполнить n различными способами. После того как 1-я позиция заполнена, элемент для заполнения 2-й позиции можно выбрать (n – 1) способами. Если этот процесс продолжить, то после заполнения позиций с 1-й по
(k – 1)-ю будет иметься (n – k – 1) способов заполнения последней k-й позиции. Перемножая эти цифры, мы получаем формулу.

В частном случае, когда k = n , имеем

$$A_n^n = P_n = n!.$$

Пример. Пусть дано множество из четырех элементов S = {a, b, c, d}. Какие различные размещения по два элемента можно составить и сколько их, т. е. A_4^2?

Количество размещений $A_4^2 = 4\times3 = 12$.

Множество размещений S_A = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)}.

Задача. Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно это сделать, если в один день сдавать не более одного экзамена?

Искомое число способов равно числу четырехэлементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов:

$$A_8^4 = 8\times7\times6\times5 = 1680 \text{ способов.}$$

3.3.1. Размещения с повторением

Любой упорядоченный набор k элементов множества, состоящего из n элементов называется размещением с повторением $\bar{A}_n^k$ из n элементов по k . Число различных размещений с повторениями есть

$$\bar{A}_n^k = n^k .$$

Пример. Для множества S = {a, b, c, d} предыдущего примера число различных двухэлементных размещений с повторениями $\bar{A}_4^2 = 4^2 = 16$. В множество S_A к тому, что записано, добавляются следующие элементы (a, a), (b, b), (c, c), (d, d).

Задача. Все буквы, цифры, знаки в ЭВМ кодируются двоичными последовательностями определенной длины, компоненты которой равны 0 или 1.

Например: 0 – 0 3 – 11 6 – 110
1 – 1 4 – 100 . . .
2 – 10 5 – 101 A – 1001

Максимальное число символов (букв, цифр, ...), которые могут быть представлены с помощью q двоичных символов (q бит) равно числу размещений с повторениями q элементов из множества, содержащего два различных элемента {0 и 1}, т. е. $\bar{A}_q^2 = 2^q$.

Обратная задача. Сколько различных чисел (знаков) может быть записано двоичными словами длиной 4, 8 , 16:

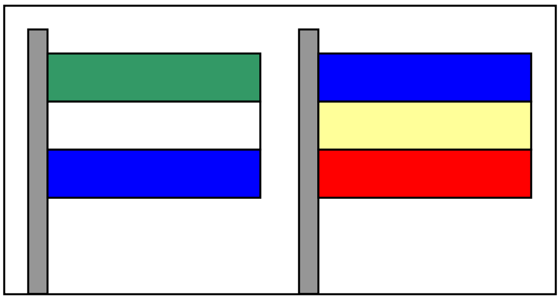
$$2^4 = 16$$
$$2^8 = 256$$
$$2^{16} = 65536.$$

Или имеется алфавит из 64 слов. Сколько необходимо разрядов, чтобы закодировать в двоичной системе.

$$N = 64, \quad 64 = 2^q, \ q = 6 .$$

Упражнения 3.3

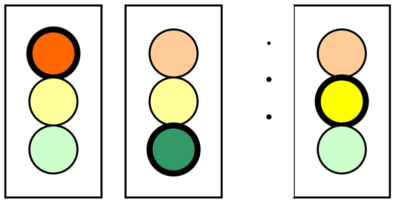
1. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов (рис. 52)?



Решение. Размещение пяти различных материалов на трех местах можно получить A^3_5 способами, т. е. всего вариантов . . . . .

Ответ: . . . . .

Рис. 5.2



2. Решите ту же задачу, при условии, что одна из полос должна быть красной?

Решение. . . . .

Ответ: . . . .

3. У англичан принято давать детям несколько имён. Сколькими способами можно назвать ребёнка, если общее число имён равно 300, а ему дают не более 3 имён?

Решение. . . . .

Ответ: . . . .

4. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать ?

Решение: . . . .

Ответ: . . . .

5. На железнодорожной станции имеется **m** светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: красный, желтый и зеленый?

Решение. Каждый светофор имеет три состояния, а всего светофоров **m** (рис. 53). Следовательно, различных комбинаций может быть столько, сколько размещений с повторениями:

$$\mathbf{A}_3^{\mathbf{m}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ответ: . . . .

Рис. 53

6. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

Решение. . . . .

Ответ: . . . .

3.4. Сочетания

Любое подмножество из k элементов множества M, содержащего n элементов, называется сочетанием C_n^k из n элементов по k . Сочетания различаются компонентами .

Примечание. Если объединить все размещения из n элементов по k, состоящие из одних и тех же элементов (не учитывая расположения) в классы эквивалентности, то каждому классу будет соответствовать ровно одно сочетание C_n^k и наоборот:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример. Для множества S = {a, b, c, d} из предыдущего примера число различных двухэлементных сочетаний $C_4^2 = 4!/(2!\ 2!) = 6$.

$$S_c = \{(a, b)(a, c)(a, d)(b, c)(b, d)(c, d)\}.$$

Задача. Сколько различных комбинаций может выпасть в спортлото «5 из 36»:

$$C_{36}^5 = 36! / 5!(36 - 5)! = 36! / 5!\ 31! = 6992,$$

а в спортлото «6 из 45» – $C_{45}^6 = 568260$.

3.4.1. Сочетания с повторениями

Сочетаниями из n элементов по k элементов с повторениями называются группы, содержащие k элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из n типов.

Например. Для множества S = {a, b, c, d} двухэлементные сочетания с повторениями $\tilde{S}_c = \{(a, a)(a, b)(a, c)(a, d)(b, b)(b, c)(b, d)(c, c)(c, d)(d, d)\}$.

Число различных сочетаний из n элементов по k с повторениями равно

$$\tilde{C}^k = C^{n-1}_{n+k-1} = C^k_{n+k-1}$$

Пример. Кости домино можно рассматривать как цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число сочетаний по два элемента равно

$$\tilde{C}_7^2 = (n+k-1)! / (k!(n-1)!) = 8! / (2!6!) = 7\times 8/2 = 28.$$

Упражнения 3.4

1. Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из имеющихся 5?

Решение. Сочетание трех различных красок из имеющихся пяти можно выбрать C_5^3 способами, т. е. всего вариантов . . . . .

2. Сколькими способами можно выбрать три пирожных из 6 различных сортов. Сколькими способами можно выбрать 8 пирожных из имеющихся в наличии 6 различных сортов?

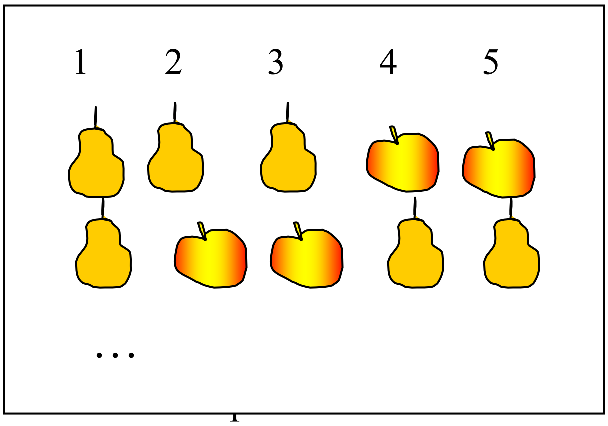
Решение. 3 пирожных из 6 можно выбрать C_6^3 способами, т. е. всего вариантов . . . . . 8 пирожных из имеющихся в наличии 6 различных сортов можно выбрать лишь с повторениями, следовательно, $\tilde{C}_6^8$ = ...

Ответ: . . . .

3. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдаёт по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано (рис. 54)?

Решение. (2-й вариант) Например, можно найти количество сочетаний из 5 по 2, т. е. найти число вариантов дней, когда выдаются яблоки. Следовательно, всего способов . . . .

Ответ: . . . .



ис. 54

3.5. Свойства сочетаний

1. $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$ (1)

Первое свойство непосредственно вытекает из формул:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (2)

Доказательство:

Составим k-элементные сочетания из n элементов $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ и разобьем их на два класса:

1-й класс – сочетания, содержащие элемент a_n ;

2-й класс – сочетания, не содержащие элемент a_n .

Если из любого сочетания 1-го класса откинуть элемент a_n, то останется (k-1) сочетание из $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}$, их число C_{n-1}^{k-1} .

Сочетания 2-го класса являются k-элементными сочетаниями, составленными из $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}$, их число C^k_{n-1}. Поскольку любое k-элементное сочетание из $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число равно C^k_n, то приходим к равенству (2).

Пример.

Пусть дано множество **M** = {a, b, c, d, e}. Тогда $\mathbf{M}_c$ = {(a,b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)}.

$\mathbf{M}^1{}_c$ = {(a, e), (b, e), (c, e), (d, e)}. $\mathbf{M}^2{}_c$ = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, c),(b, d), (c, d),}.

С другой стороны, $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$. $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2$ = 4 + 6 = 10.

$$3.\ \boxed{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n} \qquad (3)$$

Доказательство:

2^n – это число всех n размещений с повторениями из элементов двух типов. Разобьем эти размещения на классы, отнеся в k-й класс те, в которые входят k элементов 1-го типа и (n–k) элементов 2-го типа. Размещения k-го класса – это не что иное, как всевозможные перестановки из k элементов 1-го типа и (n–k) элементов 2-го типа. Мы знаем, что число таких перестановок равно

$$P = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Вспомним формулу

$$P_m = \frac{m!}{i_1! i_2! \ldots i_n!},$$

где $i_1 = k$, $i_2 = n–k$, $P(k, n–k) = C^k_n$. Значит, общее число размещений всех классов равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$. С другой стороны, это же число равно 2^n. Тем самым соотношение доказано.

4. Рассмотрим m-элементные сочетания с повторениями, составленные из элементов n+1типов, скажем из n+1 букв a, b, c,..., x. Число таких сочетаний равно

$$\bar{C}_{n+1}^m = C_{n+m}^m.$$

Разобьем все сочетания на классы, отнеся к k-му классу сочетания, в которые k раз входит буква a, остальные (m–k) мест могут быть заняты оставшимися n буквами с повторениями. Поэтому в k-й класс входит столько сочетаний, сколько можно составить (m–k)-элементных сочетаний с повторениями из элементов n типов, т. е. $C^{m-k}_{n+m-k-1}$, значит, общее число всех сочетаний равно $C_{n+m-1}^{m}+C_{n+m-2}^{m-1}+\ldots+C_{n}^{1}+\ldots+C_{n-1}^{0}$. С другой стороны, мы видим, что это число равно C_{n+m}^{m}, т. е. утверждение доказано.

$$\boxed{C_{n+m-1}^{m}+C_{n+m-2}^{m-1}+\ldots+C_{n}^{1}+C_{n-1}^{0}=C_{n-m}^{m}}. \qquad (4)$$

5. Заменяя n на n+1 и m на m+1 в соотношении (4), и помня, что $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$, получаем, что

$$\boxed{C_{n}^{n}+C_{n+1}^{n}+C_{n+2}^{n}+\ldots+C_{n+m-1}^{n}=C_{n+m}^{n+1}}. \qquad (5)$$

Частными случаями формулы (5) при n =1, 2, 3 являются следующие суммы рядов:

а) n =1:

$$C_{1}^{1}+C_{1+1}^{1}+C_{1+2}^{1}+\ldots+C_{1+m-1}^{1}=C_{1+m}^{1+1};$$

$$\boxed{1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}}; \qquad (6)$$

$$C_{m+1}^{2}=\frac{(m+1)!}{2!\,(m-1)!}=\frac{m(m+1)}{2};$$

б) n = 2:

$$C_{2}^{2}+C_{3}^{2}+C_{4}^{2}+\ldots+C_{m+1}^{2}=C_{m+2}^{3};$$

$$1+3+6+\ldots+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{(m+2)!}{3!(m-1)!}=\frac{m(m+1)(m+2)}{2\times3};$$

$$\boxed{1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+m(m+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}}; \qquad (7)$$

в) аналогично для n =3:

$$C_{3}^{3}+C_{4}^{3}+C_{5}^{3}+C_{6}^{3}+\ldots+C_{m+2}^{3}=C_{m+3}^{4};$$

$$1+4+10+20+\ldots+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}=\frac{(m+3)!}{4!(m-1)!}.$$

Следовательно,

$$1+4+10+20+\ldots+\frac{m(m+1)(m+2)}{1\times2\times3}=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1\times2\times3\times4}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}&1\times2\times3+2\times3\times4+2\times3\times2\times5+2\times3\times4\times5+\ldots+m(m+1)(m+2)=\\&\qquad=1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+4\times5\times6+\ldots+m(m+1)(m+2)=\end{aligned}} \qquad (8)$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}.$$

С помощью формулы (7) легко найти сумму квадратов натуральных чисел от 1 до m .

3.5.1. Сумма степенных рядов

Перепишем формулу (7).

$$1 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \ldots + m^2 + m = \frac{m(m+1)(m+2)}{3};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Зная, что $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$, а $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$ $\ldots + m^2)$ – это искомое выражение, тогда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} =$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+4-3)}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \qquad (9)$$

Аналогично, используя формулу (8), можно найти сумму кубов:

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.} \qquad (10)$$

$$6 + 24 + 60 + 120 + \ldots + m\,(m+1)\,(m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4};$$

$$2^3 - 2 + 3^3 - 3 + 4^3 - 4 + 5^3 - 5 + \ldots + (m+1)^3 - (m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + (m+1)^3 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + m+1) = = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4} + + \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m+1)^3}{1} =$$

$$= (m^4 + 3m^3 + 2m^2 + 3m^3 + 9m^2 + 6m + 2m^2 + 6m + 4 - 4m^3 -$$

$$- 12\,m^2 - 12m - 4) = (m^4 + 2m^3 + m^2)/4 = m^2(m^2 + 2m + 1)/4 =$$

$$= \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

3.6. Правила суммы и произведений

Комбинаторные задачи бывают самых разных видов, но большинство задач решается с помощью *правила суммы* и *правила произведения*.

Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. Ясно, что в этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение и называется правилом суммы.

Правило суммы: если объект A можно выбрать **m** способами, а объект B другими **n** способами, то выбор "либо A, либо B" может быть осуществлен **m + n** способами.

Второе правило – правило произведения. Часто при составлении комбинации из двух элементов известно, сколькими способами можно выбрать 1-й элемент, и сколькими способами второй, причем число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент.

Правило произведения: если объект A выбран **m** способами и после каждого из таких выборов, объект B, в свою очередь может быть выбран **n** способами, то выбор «A и B» в указанном порядке может быть осуществлен **m × n** способами.

Задача 1 (о шашках)

Сколькими способами можно поставить на доску две шашки – белую и черную – так, чтобы белая шашка могла бить черную?

Правила игры в шашки известны.

Сложность этой задачи состоит в том, что для разных положений белой шашки есть разное число положений черной шашки, при которых эту шашку можно бить (рис. 55).

	5		5		5		6
1		2		2		1	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	2		4		4		2

2		4		4		2	
	1 ☸		2		2		1
1 ○		2		2		1	

Рис. 55

Если белая шашка стоит на поле a1, то существует лишь 1 положение, при котором она находится под боем. Если белая шашка стоит на поле c3, то число искомых положений черной шашки равно 4. Наконец, если белая шашка прошла в «дамки», на поле h8, то имеется 6 положений черной шашки, на которых ее можно бить белой шашкой.

Складывая полученное число вариантов для каждой позиции, получим 87.

Ясно, что существует ровно столько же положений, при которых черная шашка может бить белую. А положений, при которых обе шашки могут бить друг друга, меньше (рис. 56).

	0		0		0		0
0		2		2		1	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	1 ☸		2		2		0
0 ○		0		0		0	

Рис. 56

Например, если белая шашка стоит на краю доски, то ее нельзя бить, где бы ни стояла черная шашка. Поэтому всем полям на краю соответствуют нули. Точно так же находим числа, соответствующие другим полям. Складывая их, получаем, что искомая расстановка возможна 50 способами.

Найдем число положений, при котором ни одна из 2 шашек (черная или белая) не может бить другую. Эту задачу можно было бы решить так же, как и предыдущие, ставя белую шашку на каждое из черных полей и подсчитывая, сколькими способами можно поставить черную шашку так, чтобы ни одна из этих шашек не могла бить другую. Но, здесь проще свести задачу к уже решенной. Для этого сначала найдем общее число положений, которыми можно поставить на доску белую и черную шашки. Белую шашку можно поставить на любую из 32 клеток, следовательно, для черной останется 31 позиция. Отсюда вытекает, что расстановка возможна $32 \times 31 = 992$ способами. Но из них 87 способов, при которых черная шашка бьет белую и 87 способов, при которых белая шашка бьет черную. Поэтому надо отбросить $2 \times 87 = = 174$ способа. Однако следует учесть, что при этом некоторые способы оказываются отброшенными дважды: из-за того, что черная шашка может бить белую шашку, и белая шашка может бить черную шашку. Таких положений 50. Поэтому число положений, в которых ни одна шашка не может бить другую, равно $992 - 174 + 50 = 868$.

Упражнения 3.6

1. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. 1 учебник алгебры можно выбрать 3 способами, учебник геометрии и учебник тригонометрии можно выбрать 7 способами каждый. Следовательно, по правилу произведения способов выбора комплекта из трех учебников . . . .

Ответ: . . . .

2. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева ”Рудин”, 3 экземпляра его же романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети“. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы ”Рудин“ и “Дворянское гнездо”, и 7 томов, содержащих романы ”Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по 1 экземпляру каждого из этих романов?

Решение. Можно сделать покупку, выбрав отдельно изданные романы: выбор романа ” Рудин” можно осуществить 6 способами, выбор романа “Дворянское гнездо” можно осуществить 3 способами, а выбор романа “ Отцы и дети“ можно осуществить 4 способами. Либо покупку можно сделать из томов, содержащих романы ”Рудин “ и “Дворянское гнездо” и отдельного издания романа “ Отцы и дети “. Такой выбор может быть сделан . . . . способами. Либо покупку можно сделать из томов, содержащих романы ”Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”, и отдельного издания романа” Рудин”. Такой выбор может быть сделан . . . .

По правилу суммы общее количество вариантов покупки: . . . .

Ответ: . . . .

3. Решите предыдущую задачу при условии, что если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят “Рудин “ и “Отцы и дети”.

Решение. . . . .

Ответ: . . . .

4. В корзине находятся 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Надя берёт и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или он взял апельсин?

Решение: Если Ваня выбирает из корзины яблоко, то для Нади остается 11 яблок и 10 апельсинов, т. е. вариантов выбора . . . . Если Ваня выбирает из корзины апельсин, то для Нади остается 12 яблок и 9 апельсинов, т. е. вариантов выбора . . . . Таким образом, Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял . . . .

Ответ: . . . .

3.7.Формула включения–исключения

Разобранные выше примеры позволяют сформулировать общий закон.

Пусть имеется N предметов, некоторые из них обладают свойствами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Обозначим через $N(a_i, a_j, \ldots, a_k)$ количество предметов, обладающих свойствами $a_i, a_j, \ldots, a_k$ (и, может быть, еще некоторыми из других свойств).

Если надо подчеркнуть, что берутся предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство пишется со штрихами. Например, $N(a_1,$

$a_2, \ldots, a_4')$ – количество предметов, обладающих свойством a_1, a_2, но не обладающих свойством a_4'.

В самом простом случае при одном свойстве

$$N(a') = N - N(a),$$

где N общее число элементов, формула очевидна.

Если имеются два свойства a_1, a_2, то $N(a_1', a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1, a_2)$.

Действительно, каждый элемент, обладающий свойствами a_1 и a_2 одновременно вычитается дважды, следовательно, к этой разности нужно добавить $N(a_1, a_2)$.

Обобщением этого правила является принцип включения–исключения:

$$N(a_1', a_2', \ldots, a_n') = N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_n) + + N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + \ldots + N(a_{n-1}a_n) - N(a_1a_2a_3) - N(a_1a_2a_4) - \ldots - N(a_{n-2}a_{n-1}a_n) + \ldots + (-1)^n N(a_1a_2 \ldots a_n).$$

Задача 1. Сколько чисел в первой сотне, которые не делятся нацело ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Эта задача решается с помощью формулы включения–исключения.

Введем следующие обозначения:

- a_1 – свойство чисел делиться на 2;
- a_2 – свойство чисел делиться на 3;
- a_3 – свойства чисел делиться на 5.

Следовательно,

- a_1a_2 означает, что число делится на 6;
- a_1a_3 означает, что число делится на 10;
- a_2a_3 означает, что число делится на 15;
- $a_1a_2a_3$ означает, что число делится на 30.

По формуле включения–исключения имеем

$$N(a_1'a_2'a_3') = 100 - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + N(a_2a_3) - N(a_1a_2a_3);$$

$$N(a_1) = 50;\ N(a_2) = 33;\ N(a_3) = 20;\ N(a_1a_2) = 16;$$

$$N(a_1a_3) = 10;\ N(a_2a_3) = 6;\ N(a_1a_2a_3) = 3.$$

$N(a_1'a_2'a_3') = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$

Таким образом, 26 чисел из100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

Аналогичная задача 2. Сколько чисел не делятся нацело на 2, 3, 5, из первой тысячи? Эти задачи в математике были сформулированы математиком Эратосфеном. В математике Эратосфена интересовал как раз вопрос о том, как найти все простые числа среди натуральных чисел от 1 до N.

Задача 3. “В чем ошибка ?“ Староста одной группы дал следующие сведения о студентах: в группе учатся 45 студентов, в том числе 25 юношей. 30 студентов учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 юношей. Спортом занимаются 28 студентов, в том числе 18 юношей и 17 студентов, которые учатся на хорошо и отлично. 15 юношей учатся на 4 и 5 и занимаются спортом.

Введем следующие обозначения:

- a_1 – принадлежность к мужскому полу;
- a_2 – хорошая успеваемость;
- a_3 – увлечение спортом.

Найдем $N(a_1'a_2'a_3')$, т. е. число девушек, которые учатся на 3 и ниже и не занимаются спортом.

$N(a_1) = 25$; $N(a_2) = 30$; $N(a_3) = 28$; $N(a_1a_2) = 16$;

$N(a_1a_3) = 18$; $N(a_2a_3) = 17$; $N(a_1a_2a_3) = 15$; $N = 45$.

$$N(a_1'a_2'a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1a_2) +$$
$$+ N(a_1a_3) + N(a_2a_3) - N(a_1a_2a_3) =$$
$$= 45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 = -2.$$

Но отрицательного ответа не может быть, следовательно, в сведениях есть ошибка.

Упражнения 3.7

1. По результатам опроса студенческой группы из 32 человек 12 человек регулярно читают журнал "Мир ПК", 10 человек читают журнал " Компьютерпресс", 8 человек предпочитают журнал "Знание–сила", 3 человека читают и "Мир ПК" и "Компьютерпресс", 4 человека читают "Мир ПК" и "Знание–сила", 5 человек – "Компьютерпресс" и "Знание–сила", а 1 человек читает все три журнала. Сколько человек не читают ни одного из перечисленных журналов?

Решение. Эта задача может быть решена с помощью формулы включения–исключения.

Введем следующие обозначения:

- a_1 – регулярное чтение журнала "Мир ПК";
- a_2 – регулярное чтение журнала "Компьютерпресс";
- a_3 – регулярное чтение журнала "Знание–сила";
- a_1a_2 означает, что читаются журналы "Мир ПК" и " Компьютерпресс";
- a_1a_3 означает, что читаются журналы "Мир ПК" и "Знание–сила";

- a_2a_3 означает, что читаются журналы " Компьютерпресс" и "Знание–сила";

- $a_1a_2a_3$ означает, что читаются все три журнала.

Найдем $N(a_1'a_2'a_3')$, т. е. число студентов, которые не читают ни одного из перечисленных журналов.

$N(a_1)$ =. . . ; $N(a_2)$ =. . . ; $N(a_3)$ =. . . ; $N(a_1a_2)$ =. . . ;

$N(a_1a_3)$ = . . ; $N(a_2a_3)$ =. . . ; $N(a_1a_2a_3)$ =. . . ; $N = 32$.

$N(a_1'a_2'a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1a_2) +$

$+ N(a_1a_3) + N(a_2a_3) - N(a_1a_2a_3)$ = ...

Ответ: . . . .

2. На потоке обучалось 65 студентов, все они посещали дисциплины по выбору, такие, как "Теория графов", "Теория вероятности" и "Математическая статистика". Во время сессии "Теорию графов" успешно сдали 35 человек; "Теорию вероятности" – 24 человека; "Математическую статистику" – 22 человека. 8 человек сдали "Теорию графов" и "Теорию вероятности", 7 человек – "Теорию графов" и "Математическую статистику", а 6 человек сдали "Теорию вероятности" и "Математическую статистику". 2 человека изучали все три дисциплины и успешно их сдали. Сколько человек не сдали экзамена ни по одной из перечисленных дисциплин?

Решение. Эта задача может быть решена с помощью формулы включения–исключения.

Введем следующие обозначения:

- a_1 – . . . . ;

- a_2 – . . . .;

- a_3 – . . . . ;

- a_1a_2 – . . . . ;

- a_1a_3– . . . . ;

- a_2a_3 – . . . . ;

- $a_1a_2a_3$ – . . . .

Найдем $N(a_1'a_2'a_3')$, т. е. число студентов, которые . . . .

$N(a_1)$ =. . . ; $N(a_2)$ =. . . ; $N(a_3)$ =. . . ; $N(a_1a_2)$ =. . . ;

$N(a_1a_3) = . . ;$ $N(a_2a_3) =. . . ;$ $N(a_1a_2a_3) =. . . ;$ $N = 32.$

$N(a_1'a_2'a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1a_2) +$

$+ N(a_1a_3) + N(a_2a_3) - N(a_1a_2a_3) = ...$

Ответ: . . . .

3.8. Комбинаторные задачи с ограничениями

3.8.1. Задачи с ограничением на порядок

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых на порядок элементов в комбинациях не накладывалось никаких ограничений или дополнительных условий. Либо (как в сочетаниях) порядок вообще не учитывался. Рассмотрим задачи с ограничением.

Задача 1. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену 5 львов и 4 тигра, при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

Обозначим львов буквой Л. Для тигров имеется 6 мест.

_____$Л_1$_____$Л_2$_____$Л_3$____$Л_4$_____$Л_5$______

Львов можно расположить 5! способами, т. е. 120. На шести местах для тигров их можно расположить $A^4_6 = 6\times5\times4\times3 = 360$ способами.

Общее число способов $120\times360 = 43200$.

Для задачи в общем виде, если имеется k тигров и n львов.

$P_nA^k_{n+1} = n!(n+1)n(n-1) \times.....\times (n-k)$, но так как $A^k_n = P_kC^k_n$, то

$$P_nP_kC^k_{n+1}= \frac{n!k!(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)!}{(n-k+1)!}.$$

Это возможно лишь при условии, что $n - k + 1 \geq 0$, или $k \leq n + 1$.

Задача 2. Строится лестница из точки A в точку B. Расстояние AC = 4,5 м, BC = 1,5 м. Высота ступеньки 0,3 м, ширина – 0,5 м или кратное 0,5 (рис. 57). Сколькими способами можно построить лестницу?

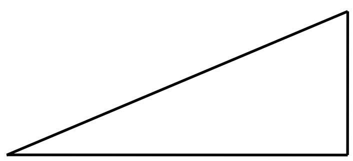


Рис. 57

Из условия видно, что лестница должна иметь 1,5/0,3 =5 ступеней, при этом имеется 10 мест, где можно устроить ступеньку: 4,5/0,5 = 9 ступеней и одна крайняя.

Следовательно, надо выбрать 5 мест для

ступеньки из 10: C^5_{10} = 10!/5!5! = = 252 способов.

Варианты построения показаны на рис. 58.

1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0

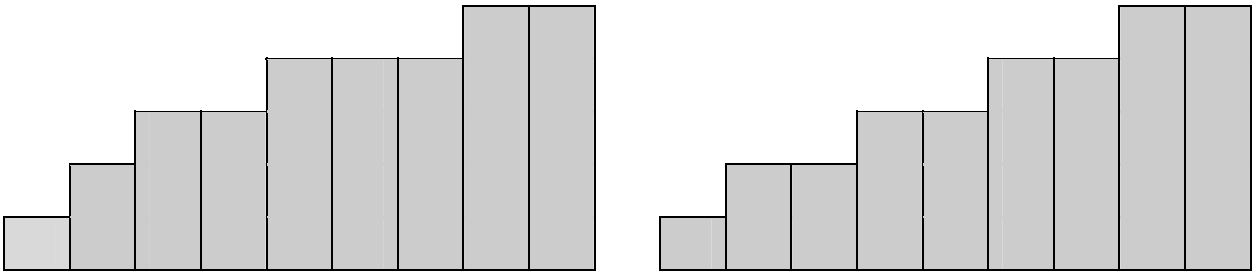


Рис. 58

В общем случае (если k ступенек, то лестницу можно построить $\mathbf{C^k_{n+1}}$ способами.

Эта задача похожа на предыдущую: укротитель не может ставить двух тигров, а строитель – делать ступеньки удвоенной высоты. Но есть существенное различие: все звери разные, а ступеньки одинаковые, поэтому выбор у строителя меньше.

Обобщением задачи о лестнице (лестницу зашифровать с помощью 1 и 0: 1– вертикальная ступенька, 0 – горизонтальная) может быть следующее: сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц, чтобы две единицы не стояли рядом.

Это можно сделать $\mathbf{C^k_{n+1}}$ **способами.**

3.8.2. Ограничения на порядок выбора

Задача 1. На книжной полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать 5 из них так, чтобы никакие две из них не стояли рядом.

Зашифруем выбор 0 и 1: каждой оставленной книге поставим в соответствие 0, каждой выбранной – 1. Таким образом, имеем 5 единиц и 7 нулей и задача сводится к предыдущей:

$$\mathbf{C}^5_{7+1} = \mathbf{C}^5_8.$$

В общем виде: если стоит n книг, а выбирается k книг, не стоящих рядом, то это можно сделать

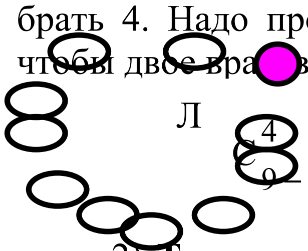
$$\mathbf{C}^{\mathbf{k}}_{(\mathbf{n}-\mathbf{k})+\mathbf{1}}.$$

Задача 2. За круглом столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует с соседом. Надо выбрать 5 рыцарей (например, в экспедицию, чтобы освободить заколдованную принцессу), причем так, чтобы среди них не было враждующих (рис. 59). Сколькими способами это можно сделать?

Отличие от предыдущей задачи состоит в том, что рыцари сидят не в ряд, а по кругу. Но ее легко свести к случаю, когда рыцари сидят в ряд. Для этого возьмем рыцаря, например, сэра Ланселота, и разомкнем круг. Все выбираемые комбинации распадаются на два класса: в одном участвует сэр Ланселот, в другом – нет. Подсчитаем, сколько комбинаций входит в каждый класс.

Рис. 5.9

1) **Если сэр Ланселот отправился в поход,** то его соседи справа и слева не должны участвовать. Остаются 9 рыцарей из которых надо выбрать 4. Надо проследить, чтобы среди выбранных не было врагов, т. е. чтобы двое врагов не сидели рядом. Цепь разорвана, следовательно,



$$C^{4}_{9-4+1} = C^{4}_{6} = \frac{6!}{4!2!} = 15 .$$

2) **Так как сэр Ланселот не участвует** в экспедиции, то его можно исключить, остается 11 рыцарей, из которых выбирается 5. $C^{5}_{11-5+1} = C^{5}_{7} =$ **21**. По правилу суммы всего $C^{4}_{6} + C^{5}_{7}$ = 15 + + 21 = 36.

<u>В общем случае</u>, если по кругу расположены **n** элементов, а надо выбрать **k** так, чтобы в их число не попали два соседа, то это можно сделать $C^{k-1}_{n-k-1} + C^{k}_{n-k}$ способами.

Это доказывается аналогично. Все комбинации элементов разбиваются на два класса в зависимости от одного из них (сэра Ланселота). В первом варианте будет C^{k-1}_{n-k-1} комбинаций, а во втором C^{k}_{n-k}.

Легко проверяется, что $C^{k-1}_{n-k-1} + C^{k}_{n-k} = \frac{n}{n-k} C^{k}_{n-k}$.

Доказательство:

$$\frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-k-1-k+1)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-k-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k-1)!\,(n-k)k}{(k-1)!(n-2k)!\,(n-k)k} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} =$$

$$=\frac{(n-k)!\,k}{k!(n-2k)!\,(n-k)}+\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}=\mathbf{C}^{k}_{n-k}\left(\frac{k}{n-k}+1\right)=\frac{n}{n-k}\,\mathbf{C}^{k}_{n-k}.$$

Упражнения 3.8

1. На собрании должно выступить 5 человек: А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что Б не должен выступать до того, как выступит А?

Решение. Список ораторов может быть составлен, например, так, как показано на рис. 60. Общее число вариантов составления списка из 5 элементов может быть найдено как число перестановок 5 элементов. Все перестановки можно разбить на два класса: 1-й класс содержит перестановки, в которых элемент А предшествует элементу Б, а 2-й класс содержит перестановки, в которых элемент Б предшествует элементу А.

А, Б, В, Г, Д

В, А, Д, Б, Г

В, А, Д, Г, Б

. . .

Рис. 60

Оба класса равнозначны. Следовательно, количество перестановок, в которых элемент А предшествует элементу Б, равно количеству перестановок 2-го класса. Всего перестановок . . . . . . , а искомое число перестановок . . . .

Ответ: . . . .

2. Решите ту же задачу при условии, что оратор А должен выступить непосредственно перед оратором Б.

Решение. Рассмотрим перестановки, в которых два элемента стоят рядом, т. е. элементы А, Б можно рассматривать как один элемент (рис. 61). Следовательно, общее число перестановок . . . .

А, Б, В, Г, Д

В, А, Б, Д, Г

В, Д, Г, А, Б

. . .

Рис. 61

Ответ: . . . .

3. Сколько можно сделать перестановок из **n** элементов, в которых элементы А и Б не стоят рядом; элементы А, Б, С не стоят рядом (в любом порядке)?

Решение. Известно общее число перестановок **n** элементов – . . . . Как и в предыдущей задаче мы можем найти перестановки, в которых два элемента стоят рядом, т. е. элементы А , Б можно рассматривать как один элемент. Число таких перестановок . . . . Учтем, что элементы А, Б можно поменять местами. Из общего числа перестановок вычтем число перестановок, в которых два элемента стоят рядом . . . . Аналогично рассуждаем для трех элементов. Следует учесть, что три элемента между собой можно переставить .... способами. Из общего числа перестановок вычтем число перестановок, в которых три элемента стоят рядом ....

Ответ: ....

4. На полке находится **m+n** различных книг, из которых **m** в чёрных переплётах, а ***n*** в красных (рис. 62): а) сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в чёрных переплётах занимают первые m мест? б) сколько положений, в которых все книги в чёрных переплетах стоят рядом?

Решение. а) на **m** местах книги в чёрных переплётах могут быть размещены .... способами, а **n** книг в красных переплётах могут быть размещены .... способами соответственно. Таким образом общее число вариантов перестановок ....;

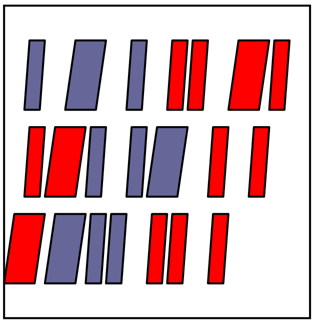


Рис. 62

б) все книги в чёрных переплётах могут быть приняты за 1 элемент, тогда число перестановок ...., но внутри группы книг в чёрных переплётах они могут переставляться относительно друг друга .... способами. Таким образом общее число вариантов перестановок ....

Ответ: ....

5. Сколькими способами можно переставить буквы слова “перешеек” так, чтобы 4 буквы “е” не шли подряд?

Решение. Как и в задаче 3. ....
....
....

Ответ: ....

6. Сколькими способами можно переставить буквы слова “опоссум” так, чтобы буква “п” не шла непосредственно после буквы “о”?

Решение. Аналогично. ....
....
....

Ответ: ....

3.9. Задачи о смещениях

3.9.1. Смещение элементов

Задача 1. Берутся все перестановки из пяти чисел 1, 2, 3, 4, 5. Во скольких перестановках ни одно число не стоит на своем месте?

Используя метод включения–исключения, обозначим через α свойство перестановки, заключающееся в том, что число α стоит на своем месте, а через $N(\alpha)$ – количество перестановок, обладающих этим свойством. $N\alpha\beta$ – число перестановок, обладающих свойством $\alpha\beta$; $N^{(0)}$ – число перестановок, не обладающих ни одним из перечисленных свойств (1), (2), (3), (4) и (5), т. е. число перестановок, в которых ни одно число не стоит на своем месте.

По формуле включения-исключения имеем

$$\mathbf{N}^{(0)} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_3 - \mathbf{N}_4 - \mathbf{N}_5 + \mathbf{N}_{12} + \ldots + \mathbf{N}_{45} - \mathbf{N}_{123} - \ldots - \mathbf{N}_{345} + \mathbf{N}_{1234} + \ldots + \mathbf{N}_{2345} - \mathbf{N}_{12345}, \qquad (11)$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{P}_5$ – общее число всех перестановок из пяти элементов.

Задача облегчается тем, что свойства (1), (2), (3), (4) и (5) совершенно равноправны, поэтому ясно, что $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = = N_5$. Точно так же имеем $N_{12} = N_{23} = \ldots = N_{45}$. Но число пар, которые можно выбрать из чисел 1, 2, 3, 4, 5 – C^2_5. Свойства (1, 2) и (2,1) совпадают, поэтому порядок нас не интересует. Точно так же имеем C_5^3 троек, C_5^4 четверок, C_5^5 пятерок. Формулу (11) перепишем следующим образом:

$$N^{(0)} = N - C_5^1 N^{(1)} + C_5^2 N^{(2)} - C_5^3 N^{(3)} + C_5^4 N^{(4)} - C_5^5 N^{(5)}, \quad (12)$$

где $\mathbf{N}^{(k)}$ – количество перестановок, в которых заданные k чисел остались на своих местах; $\mathbf{N}^{(1)}$ – одно число на своем месте, остальные переставляются, т. е. $\mathbf{P}_4 = 4! = 24$. Следовательно, $\mathbf{N}^{(1)} = = 24 = \mathbf{P}_4$; $\mathbf{N}^{(2)}$ – два числа на месте, три переставляются; $N^{(2)} = = P_3 = 6$, аналогично $\mathbf{N}^{(3)} = P_2 = 2$; $N^{(4)} = P_1 = 1$; $N^{(5)} = P_0 = 1$. Подставляем эти значения в формулу (12).

$$\mathbf{N}^{(0)} = \mathbf{P}_5 - \mathbf{C}_5^1 \mathbf{P}_4 + \mathbf{C}_5^2 \mathbf{P}_3 - \mathbf{C}_5^3 \mathbf{P}_2 + \mathbf{C}_5^4 \mathbf{P}_1 - \mathbf{C}_5^5 \mathbf{P}_0 =$$

$$120 - 5\times24 + 10\times6 - 10\times2 + 5\times1 - 1\times1 = 44.$$

Итак, в 44 случаях из 120 ни одно число не стоит на своем месте.

Так же можно найти, во скольких случаях ровно один элемент стоит на своем месте. Если это первый элемент, то

$$\mathbf{N}^{(0)} = \mathbf{P}_4 - \mathbf{C}_4^1 \mathbf{P}_3 + \mathbf{C}_4^2 \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_4^3 \mathbf{P}_1 + \mathbf{C}_4^4 \mathbf{P}_0 = 9 \text{ способов.}$$

Общее количество способов, при которых один элемент стоит на своем месте, равно 5×9 = 45, так как $C_5^1 = 5$. Итак, можно посчитать, что два элемента стоят на своих местах в 20 случаях, три – в 10 случаях, четыре – в 0 случаях, пять – в 1-м случае:

$$\mathbf{N^2} = \mathbf{P}_3 - \mathbf{C}_3^1 \mathbf{P}_2 + \mathbf{C}_3^2 \mathbf{P}_1 - \mathbf{C}_3^3 \mathbf{P}_0 = 6 - 3\times2 + 3 - 1 = 2,$$

$$\mathbf{C}_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10, \;\; \Rightarrow 2\times10 = 20.$$

$$\mathbf{N}^3 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{C}_2^1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{C}_2^2 P_0 = 2 - 2 + 1 = 1,$$

$$C_5^3 = 10, \;\; \Rightarrow 10\times1 = 10. \;\; \mathbf{N}^4 = \mathbf{P}_1 - C_1^1 \mathbf{P}_0 = 0.$$

Результат для четырех элементов объясняется тем, что если четыре элемента стоят на своем месте, то и пятый должен стоять на своем месте. Итак, 120 разных способов перестановок из 5 элементов распадаются на: 44 перестановки, в которых ни один элемент не остается на месте, 45 перестановок, в которых ровно один элемент не меняет своего положения, 20 перестановок, в которых ровно два элемента не меняют своего положения, 10 перестановок, в которых ровно три элемента не меняют своего положения, 0 перестановок, в которых ровно четыре элемента не меняют своего положения, 1 перестановка, в которой ровно пять элементов не меняют своего положения.

$$120 = 44 + 45 + 20 + 10 + 0 + 1.$$

3.9.2. Общая задача о смещении

1. Число D_n перестановок из n элементов, при которых ни один элемент не остается в первоначальном положении:

$$\mathbf{D}_{(n)} = \mathbf{P}_n - \mathbf{C}_n^1 \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}_n^2 \mathbf{P}_{n-2} - \ldots + (\mathbf{-1})^n \mathbf{C}_n^n \mathbf{P}_0 =$$

$$= \mathbf{n![1} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\mathbf{]} \,. \qquad (13)$$

2. Число перестановок, в которых ровно r элементов остаются на месте, а остальные $n - r$ меняют свое положение, выражается формулой

$$\mathbf{P}_{n,r} = \mathbf{C}_n^r\,\mathbf{P}_{n-r}. \qquad (14)$$

В самом деле, сначала нужно выбрать, какие именно r элементов остаются на месте. Это можно сделать $\mathbf{C}_n^r$ способами, а остальные переставлять.

Перестановку можно произвести $\mathbf{P}_{n-r}$ способами. По правилу произведения получаем $\mathbf{C}_n^r\,\mathbf{P}_{n-r}$.

3. Сумма всех смещений равна

$$\mathbf{n!} = \sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r D_{n-r}, \qquad (15)$$

причем $D_0 = 1$.

4. Число перестановок из n элементов, при которых данные r элементов смещены (остальные могут быть смещены, а могут оставаться на своих местах), выражается формулой

$$\mathbf{D}_{n,r} = \mathbf{P}_n - \mathbf{C}_r^1\,\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}_r^2\,\mathbf{P}_{n-2} - \ldots + (-1)^r\,\mathbf{C}_r^r\,\mathbf{P}_{n-r}\ (\mathbf{r}^- \text{–смещение});$$

$$\mathbf{D}_{n,r} = \mathbf{n! - C}_r^1\,\mathbf{(n-1)!} + \mathbf{C}_r^2\,\mathbf{(n\text{-}2)!} - \ldots + \mathbf{(-1)}^r\,\mathbf{(n-r)!}. \qquad (16)$$

3.9.3. Смещение пар

Задача 2. По пустыне идет караван из 9 верблюдов. За много дней путешествия надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда.

Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого шел другой верблюд, чем до этого?

Для решения задач пронумеруем верблюдов в первоначальном порядке от конца каравана к его началу числами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нам нужно найти все перестановки из чисел, в которых не встречаются пары (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9).

Используем формулу включения–исключения.

1. Сосчитаем во сколько перестановок входит пара (1, 2). Можно обозначить в этих перестановках пару за один элемент. Следовательно, всего 8 элементов, и число перестановок из 8 элементов, содержащих пару (1, 2) равно $\mathbf{P}_8$.

Тот же результат получаем для всех 8 пар.

2. Рассмотрим перестановки, содержащие данные <u>две пары</u>. В этом случае объединяем элементы, входящие в две пары:

а) если обе пары содержат один и тот же элемент, например, (1, <u>2</u>) и (<u>2</u>, 3) => (1, 2, 3), 4, 5, 6, 7, 8, 9, то всего P_7 перестановок;

б) если в парах элементы разные, например, (1, 2) и (3, 4,), {1, 2, 3, 4} => (1, 2), (3, 4), 5, 6, 7, 8, 9.

В обоих случаях получаем **7** новых элементов, которые можно переставлять друг с другом $\mathbf{P}_7$ способами. А две пары из 8 можно выбрать $\mathbf{C}_8^2$ способами. Так же доказывается, что количество перестановок, содержащих **k** пар, равно $\mathbf{P}_{9-k}$. При этом **k** пар, можно выбрать $\mathbf{C}_8^k$ способами. По формуле включения-исключения получаем, что количество перестановок, не содержащих ни одной из заданных пар, равно $N^{(n)}=P_9 - C_8^1 P_8 + C_8^2 P_7 - C_8^3 P_6 + C_8^4 P_5 - C_8^5 P_4 + C_8^6 P_3 - C_8^7 P_2 + C_8^8 P_1 = 8!\,[9 - \frac{8}{1!} + \frac{7}{2!} - \frac{6}{3!} + \frac{5}{4!} - \frac{4}{5!} + \frac{3}{6!} - \frac{2}{7!} + \frac{1}{8!}] = 148\,329$.

Аналогично доказывается, что количество перестановок из n чисел 1, 2, ... , n не содержащих ни одной из пар (1, 2), (2, 3), ... , (n – 1, n) выражается формулой

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{C}_{n-1}^1 \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}^2 \mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{C}_{n-1}^3 \mathbf{P}_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^{n-1} \mathbf{P}_1 . \qquad (17)$$

Так же доказывается, что **количество перестановок из n элементов, в которые не входят заданные r < n–1 пар**, равно

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{C}_r^1 \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}_r^2 \mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{C}_r^3 \mathbf{P}_{n-3} + \ldots + (-1)^r \mathbf{C}_r^r \mathbf{P}_{n-r} . \qquad (18)$$

Если r > n – 1, то

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{C}_{n-1}^1 \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}^2 \mathbf{P}_{n-2} - \ldots - (-1)^k \mathbf{C}_n^k \mathbf{P}_{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^{n-1} \mathbf{P}_1 = \mathbf{n}!\,[\mathbf{1} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}] = \mathbf{n}\,\mathbf{D}_{n-1}. \qquad (19)$$

Задача 3. “Карусель”

На карусели катаются **n** ребят. Они решили пересесть таким образом, чтобы впереди каждого оказался другой, чем был раньше. Сколькими способами они могут это сделать?

Эта задача похожа на предыдущую, но теперь число запрещенных пар равно n: (1, 2), (2, 3), ..., (n – 1, n), (n, 1). Кроме того, перестановки, получаемые друг из друга пересадкой по кругу , считать не будем. Поэтому из k элементов, можно сделать $P_к = = (k - 1)!$ существенно различных перестановок.

В этой задаче могут быть все n пар, так как $C_n^1 = n$], а перестановок всего $C_n^1 P_{n-2}$. По формуле включения–исключения получаем

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{C}_n^1 \mathbf{P}_{n-2} + \mathbf{C}_n^2 \mathbf{P}_{n-3} - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \mathbf{C}_n^{n-1} \mathbf{P}_0 + (-1)^n \mathbf{C}_n^n. \qquad (20)$$

Исходя из формулы (17) мы берем n пар, а не (n – 1), но так как следует учитывать вращение, то $\mathbf{P}_{n-1}$, а не $\mathbf{P}_n$. Формула смещения в общем виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{C}_{n-1}^1 \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}^2 \mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{C}_{n-1}^3 \mathbf{P}_{n-3} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^{n-1} \mathbf{P}_n.$$

Упражнения 3.9

1. Сколькими способами можно переставить буквы слова “логарифм” так, чтобы ни одна буква не осталась на своем месте?

Решение. Используем общую формулу о смещении элементов.

Число $\tilde{D}_8$ перестановок из 8 элементов, при которых ни один элемент не остается в первоначальном положении

$\tilde{D}_8 = 8![1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + 1/6! - 1/7! + + 1/8!] =$ . . . . . .
. . . .
.

Ответ: . . . .

Ответы

Упражнения 1.1

1. **А** и М (в множестве В дважды записан элемент 2, а множество Р не определено).

2. 5 и 2, да, является.

3. Да. **Z** = {1, 3, 2 }, 6.

4. **М –** конечное множество. | **М** | = 10, **М** = {0, 1, 2, 3, . . ,9}; **Р** – бесконечное множество, | **Р** | = ∞, **Р** = = {2, 4, 6, . . . }; **Q** – пустое множество, | **Q** | = 0, **Q** = ∅.

5. **А** = {a, b , d, g}, **B** = {b, c, e, d}, **C** = {**c**, d, g, h}.

6. β (**М**) = {∅, {Коля}, {Оля}, {Толя}, {Коля, Оля}, {Коля, Толя}, {Оля, Толя}, {Коля, Оля, Толя}. | **М** | = 3, | β (**М**) | = 8.

β (**S**) = {∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {3, 2}, {4, 3}, {2, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {4, 3, 2}, {1, 4, 3}, {1, 2, 3, 4}}.

|**S**| = 4, | β **(S)** | = 16.

Упражнения 1.2

1. а) нет. **B** ⊂ **A**;
б) да.

2. **X** = {0, 2, 8, 26}.

3. а) **C =** {1, 2, 3, 4};
б) **D =** {0, 1, 2, 3};
в) **F =** {0, 1, 2, 3};
г) **G =** {1, 2, 3, 4, 6, 9}.

4. **S =** {2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28}.

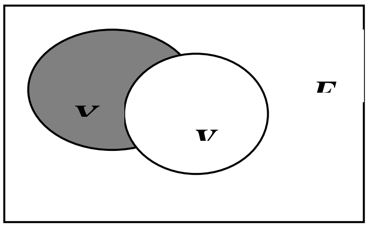
5. **Z**= {–2, –1, 0, 1, 2, 3}.

6. Например, **А** = {1, 2, 3, 5}, **В =** {1, 2, 4, 6}, **С =** {1, 4, 3, 7}, **D =** {0, 8}, **М** = {6, 9}, **N =** {9}. Возможны и другие варианты расстановки элементов в множествах.

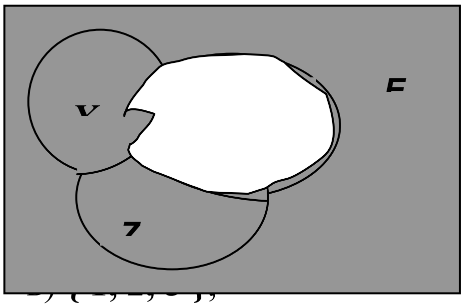
Упражнения 1.3

1. **X ∩ Y = {2}, X ∪ Y = = {0, 1, 2, 3}, X \ Y = {1}, Y \ X = {0, 3}, X Δ Y = {0, 1, 3}.**

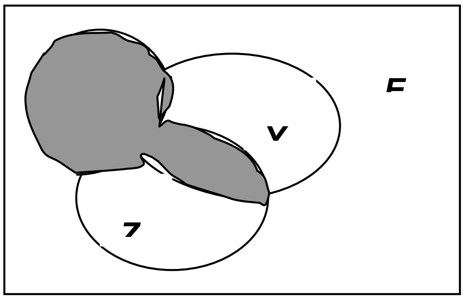
2. а) **{ 5 }**;



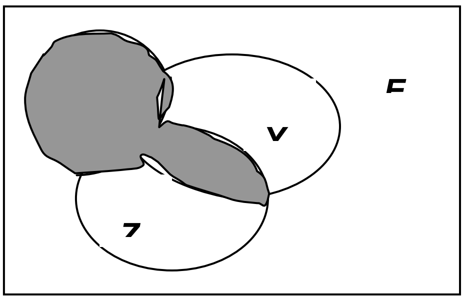
б) **{ 3, 5 };**



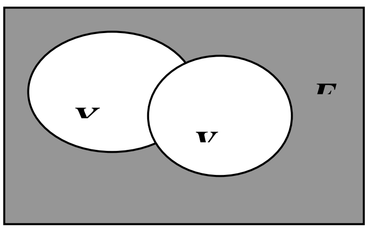
в) { 1, 2, 5 };



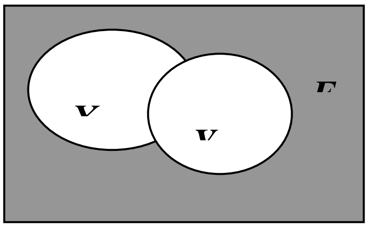
г) **{ 1, 2, 5 }**;



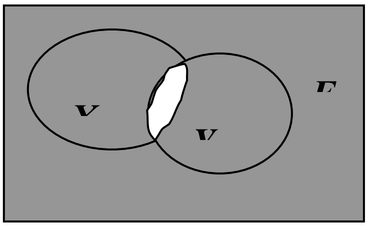
д) **{ 3, 4 }**;



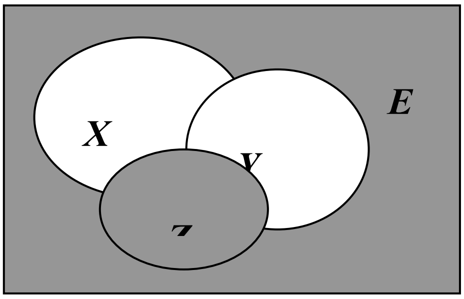
е) { **3** };

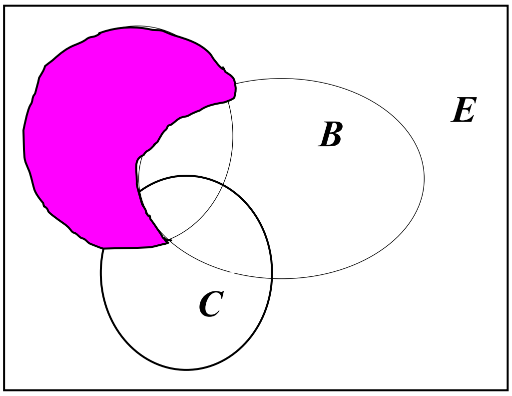


ж) { **2, 3, 4, 5** };

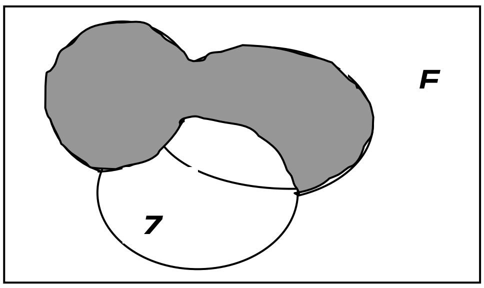


з) { **2, 3, 5** };



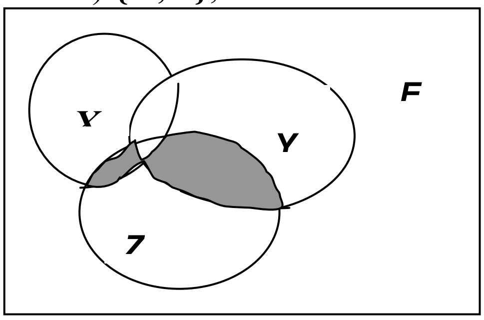


и) { **1, 4, 5** };



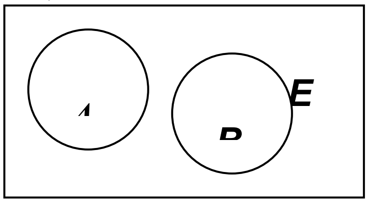
к) { **1,4** };

л) { **2,5** };

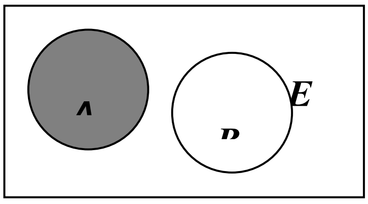


3. { **1, 3** }.

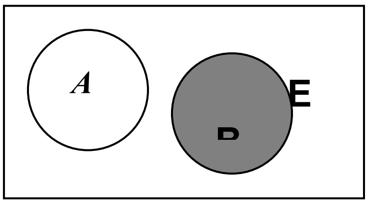
4.



A ∩ B = ∅.

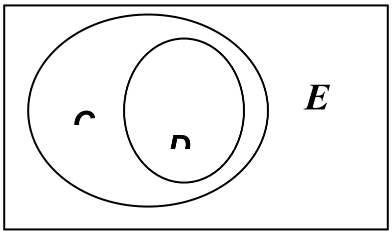


A \ B=A

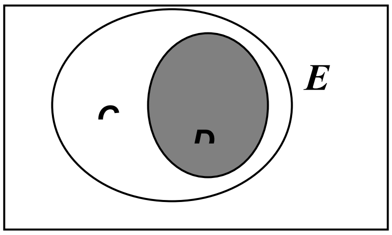


B\A=B

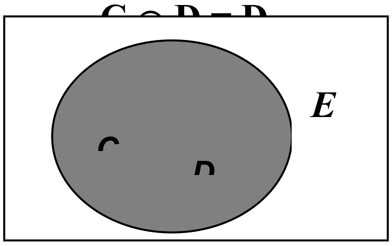
5.



$\overline{\mathbf{C}} \cap \mathbf{D} = \varnothing$



$\mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \mathbf{D}$



$\mathbf{C} \cup \mathbf{D} = \mathbf{C}$

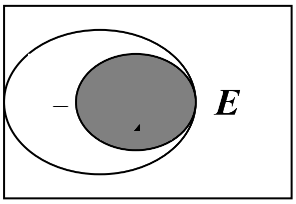
6. а) $\mathbf{X} \cap \overline{\mathbf{X}} = \varnothing$;

б) $\mathbf{X} \cup \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{E}$;

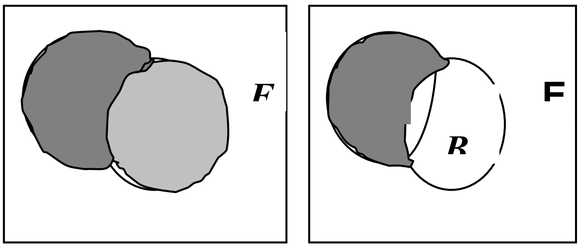
в) $\mathbf{X} \setminus \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$.

Упражнения 1.4

1. Если $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \Rightarrow \forall\ \mathbf{a} \in \mathbf{B}$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \varnothing$.



2. а)



(A ∪ B) \ B   A \ B

б) соотношение не верно;

в) соотношение верно;

г) соотношение верно.

3. $\overline{\mathbf{X}} \cap \overline{\mathbf{Y}} \cap \mathbf{Z}$.

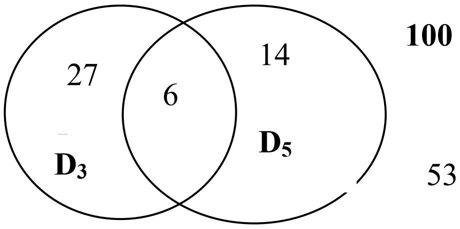
4. $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}}$.

Упражнения 1.5

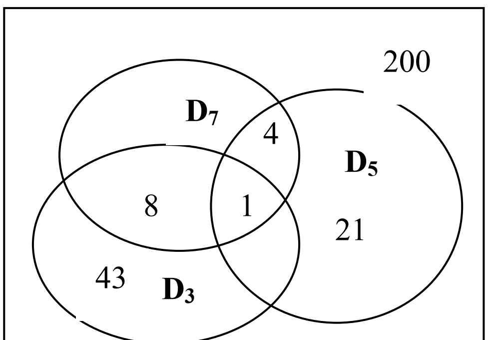
1. а) 6 человек;
   б) 14 человек.

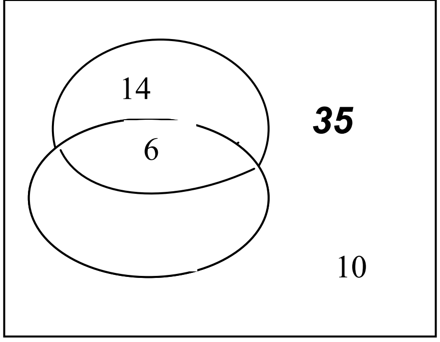
2. 80.

3. а) 53; б) 27; в) 14; г) 41.



4. а) 108; б) 51; в) 21.

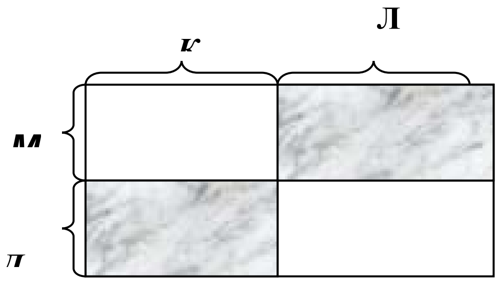




5. 32.

6. 40. Решение поясним подробнее.

$|\mathbf{М}| + |\mathbf{Д} = |\mathbf{М}| + |\mathbf{Д} \cap \cap \mathbf{К}| + |\mathbf{Д} \cap \mathbf{Л}|$ = [девочек с коньками столько же, сколько мальчиков с лыжами] = $|\mathbf{М}| + |\mathbf{М} \cap \mathbf{Л}| + |\mathbf{Д} \cap \mathbf{Л}|$ = = [девочки с лыжами и мальчики с лыжами – это все лыжники] = $|\mathbf{М}| + |\mathbf{Л}|$



7. а) 6; б) 0.

8. а) 3; б) 44; в) 18; г) 23.

Упражнения 1.6

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{X}$ = {(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (a, 3); (b, 3)}.

2. $\mathbf{пр}_1\ \mathbf{M}$ = {a, b}.

3. $S^2 = \{(x, x); (x, y); (x, z); (y, x); (y, y); (y, z) (z, x); (z, y); (z, z)\}$.

Ответы

Упражнения 2.1

1. $\mathbf{P} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (6, 6), (6, 8), (8, 8)\}$.

2. $\rho = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8)\}$.

$\rho^{-1} = \{(4, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 4), (8, 4), (8, 6)\}$.

3. $\mathbf{P} = \{((\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z})) : \mathbf{x} < \mathbf{y}, \mathbf{x} \le \mathbf{z} < \mathbf{y}\}$, $\mathbf{P} = \{ ((1, 2), 1), ((1, 3), 1), ((1, 3), 2), ((1, 4), 1), ((1, 4), 2), ((1, 4), 3), ((1, 5), 1), ((1, 5), 2), ((1, 5), 3), ((1, 5), 4), ((2, 3), 2), ((2, 4), 2), ((2, 4), 3), ((2, 5), 2), ((2, 5), 3), ((2, 5), 4), ((3, 4), 3), ((3, 5), 3), ((3, 5), 4), ((4, 5), 4)\}$.

4. $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{S}\times\mathbf{S}$ и $\mathbf{K} = \{((\mathbf{x_s}, \mathbf{y_s}), (\mathbf{x_t}, \mathbf{y_t})) : \mathbf{x_s} = \mathbf{x_t} \pm \mathbf{1}, \mathbf{y_s} = \mathbf{y_t} \pm \mathbf{2}$ или $\mathbf{x_s} = \mathbf{x_t} \pm \mathbf{2}, \mathbf{y_s} = \mathbf{y_t} \pm \mathbf{1}$.

5. $\mathbf{I} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $\mathbf{U} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

6. а) $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
б) $\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$;

в) $\mathbf{D}(\mathbf{M}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\mathfrak{R}(\mathbf{M}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

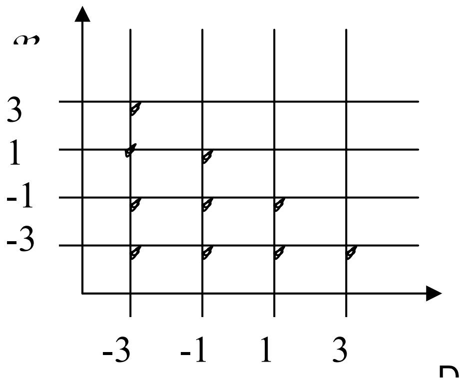
7. а) ρ = { (5, 1), (7, 1),
(7, 2), (9, 1), (9, 2), (9, 5),
D(ρ) = {5, 7, 9}, ℜ (ρ) = {1, 2, 5}.

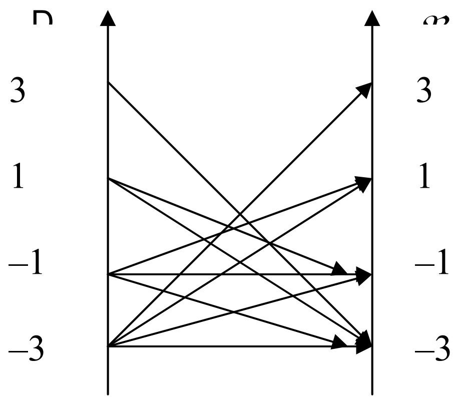
8. а) **M** = {2, 3, 4, 5, 6};
б) **R** = { (2, 4), (2, 6), (2, 2),
(3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 6), (4, 2), (6, 3), (6, 4)};
в) **R** = { (4, 2), (6, 2), (2, 2),
(3, 3), (6, 3), (4, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 6), (2, 4), (3, 6), (4, 6)}.

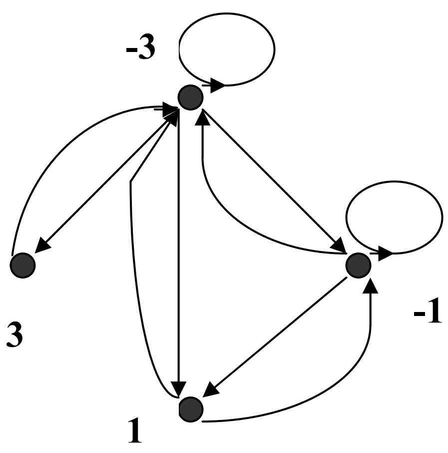
Упражнения 2.2

1. а) ρ = {(–3, –3),
(–3, –1), (–3, 1), (–3, 3),
(–1, –1), (–1, 1), (3, –3),
(–1, –3), (1, –3), (1, –1)}.

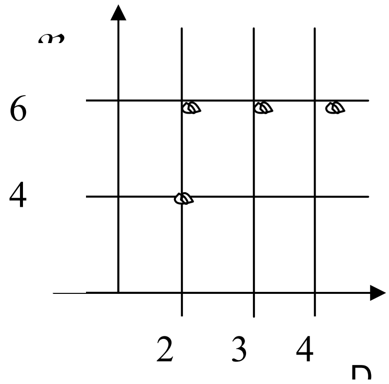
б)

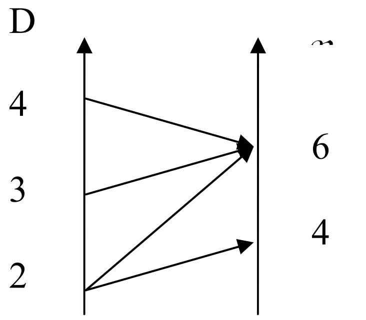


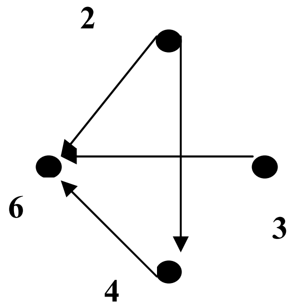


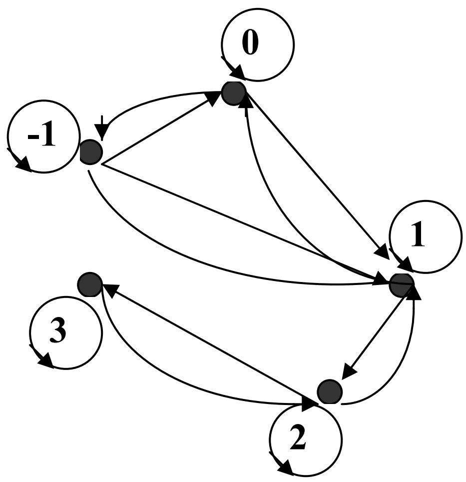


2. ρ = {(2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 6)}.





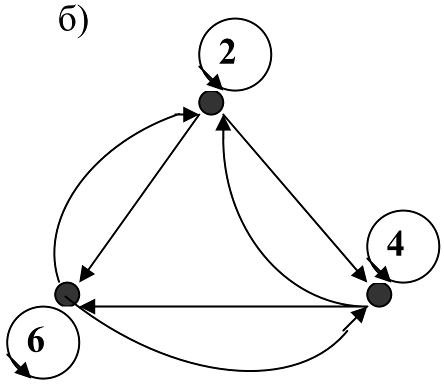




Упражнения 2.3

1. а) $\rho = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (6, 2), (4, 6), (6, 4), (4, 4), (6, 6)\}$.

б)



в) свойства отношения ρ**:**

- рефлексивность;
- симметричность;
- транзитивность.

2. а) $\rho = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, -1), (0, -1), (1, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

б)

в) отношение ρ обладает свойством рефлексивности и симметричности.

3. Отношение ρ **с**имметрично, нерефлексивно и нетранзитивно.

4. Отношение ρ анти**с**имметрично.

Упражнения 2.4

1. Да. 2. Да. $\rho = \{(4, 6), (6, 4), (4, 8), (8, 4), (4, 10), (10, 4), (6, 8), (8, 6), (6, 10), (10, 6), (8, 10), (10, 8), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (10, 10)\}$.

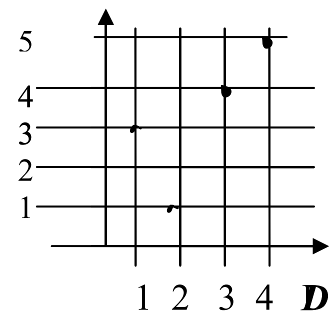
3. Нет, так как отношение несимметрично.

4. Да.

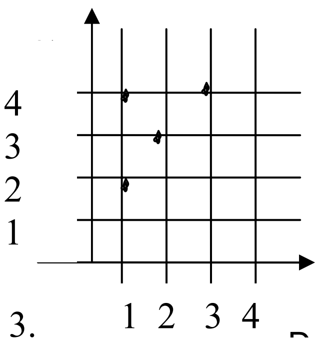
5. Нет ρ = {(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1), (3, 4), (4, 3) }.

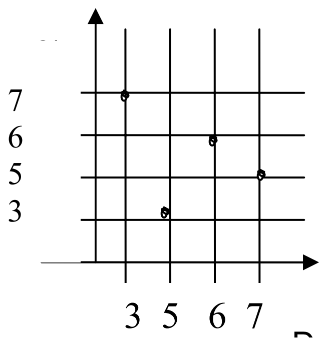
Упражнения 2.5

1. Да.
2. Нет, ρ = {(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)}.



3.





Ответы

Упражнения 3.1

1. 180.

2. 5^5.

3. 9×10×10×10×2= 18000.

4. 9×10×10×1×1=900.

5. 10×9×8×7×6×5 = = 151200

6. Всего вариантов 31×31 = 961, а это меньше, чем 1500.

7. $5\times6\times2 = 60$.

Упражнения 3.2

1. 6.
2. 5, так как всего комбинаций этих чисел 6, но одна из них удачная.
3. $\tilde{P}_{13} = \dfrac{13!}{2!2!2!2!}$

$\tilde{P}_6 = \dfrac{6!}{2!} = 360$.

4. 6720.
5. $5! \times 5!$
6. $4! \times 4!$.
7. 10.
8. $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$

9. 1260.

Упражнения 3.3

1. 60.
2. 36, так как один цвет выбран, то из оставшихся 4 выбираем 2. Кроме того, следует учесть, что красная полоса может быть на любом из 3 мест.
3. $300 \times 299 \times 298$.
4. 504.
5. 3^m.
6. 81.

Упражнения 3.4

1. 10.
2. 20, 1287
3. 10.

Упражнения 3.6

1. 147.
2. 134
3. 143.

4. Надя имеет большую свободу выбора, если Ваня взял яблоко.

Упражнения 3.7

1. 13.
2. 3.

Упражнения 3.8

1. 60.
2. 24.
3. n! – 2(n-1)!, n! – 6(n – – 2)!
4. а) m! n!, б) (n+1)! m!
5. 8! –5!
6. 7! –6!

Упражнения 3.9

1. 14833.

Список литературы

1. *Волченская Т. В*. Теория графов: Учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1998.

2. *Волченская Т. В.* Теория множеств и комбинаторика: Учеб. пособие. – Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2001.

3. *Волченская Т. В.* Основы дискретной математики: Учеб. пособие / *Т. В. Волченская, Б. Г. Хмелевской*. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1991.

4. *Виленкин Н. Я*. Комбинаторика. – М.: Наука, 1970.

5. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1986.

6. *Ежов И. И.* Элементы теории множеств. – М.: Наука, 1970.

7. *Кук Д*. Компьютерная математика / *Д. Кук*, *Г. Бейз.* – М.: Наука, 1990.