М. Громов

КОЛЬЦО ТАЙН: ВСЕЛЕННАЯ, МАТЕМАТИКА, МЫСЛЬ

М. Громов

Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51.0
ББК 22.1
Г87

Громов М.
Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
288 с.
ISBN 978-5-4439-3117-3

Перед читателем книга, написанная одним из ведущих математиков наших дней, посвящённая самым различным проблемам математики, физики, биологии, лингвистики, философии и истории науки и даже педагогики.

Книга в той или иной степени доступна самому широкому кругу читателей, которые интересуются научными вопросами. Читатель познакомится с современными научными концепциями, изложенными автором по-своему, а также с его новыми идеями в разных областях. Особый интерес представляют разбросанные по тексту увлекательные очерки об известных научных открытиях, авторский взгляд на которые подчас нетрадиционен. Но особую роль, объединяющую все части книги вместе, играют мысли автора о Математике, о её текущем состоянии и о её будущем, которое не так легко предсказать.

Подготовлено на основе книги:
Громов М. Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль. Пер. с англ. яз. Н. В. Цилевич. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1117-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-08-04
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-3117-3

Об этой книге

По аналогии с широко известным произведением эту книгу можно было бы назвать «Что такое жизнь и что такое мысль с точки зрения математика».

Автор обсуждает не только роль самой математики как организующей субстанции всей науки, не только её многочисленные проблемы, трудности и приложения, но и проблемы собственно физики, биологии, наук о Жизни в целом: в каждой из них он является глубоким специалистом. Он высказывает иногда парадоксальные точки зрения на давние и новые исторические открытия и их перспективы. Жанр книги — свободный рассказ знатока, перемежаемый массой неожиданных параллелей, аналогий, сравнений. Однако главной темой книги остаётся всеобъемлющая Математика, которой автор посвящает проникновенные, полные глубокого смысла слова:

> *Существование Математики в том виде, как мы её знаем, представляется столь же невероятным, как возникновение Жизни на Земле.*

А. Вершик

* * *

Божественный замысел *Математики* для нас непостижим, но если что-нибудь и может осветить тайны мира человеку, так это *Математика*.

Математика заполняет своим огнём всё, что зовётся *физическими науками*: облака, скрывавшие от нас то, что теперь мы пишем как *законы природы*, рассеиваются в лучах такой физики. Но свет только-только проник в царство королевы *Жизнь* и ещё не коснулся покрывал принцессы *Мысль* — её лик вовеки скрывается во мраке. И пока мы не знаем, что есть *Мысль*, нам не понять, что такое *Математика*.

В первой части книги рассеяны искры идей тех, кто увидел свет в темноте неизвестного, — для нас это знаки на пути к пониманию *Тайны Мысль*. Во второй части мы прослеживаем несколько линий из математики, вдоль которых может проходить этот путь.

Я благодарен Анатолию Вершику, предложившему идею данной публикации, и особенно Наталии Цилевич за её творческое превращение моего Russian English в русский текст и за советы по организации изложения. Также я хочу сказать спасибо Александру Шапиро за литературный перевод нескольких стихотворных цитат.

Миша Громов,
Париж, 2016 г.

Оглавление

I. **Цитаты и идеи**

II. **Меморандум эрго**

Часть I

Цитаты и идеи

Глава 1

Прекрасное далёко

Round us, near us, in depth and height,
Soft as darkness and keen as light.

Сверху, снизу, вокруг и вслед,
Мягкий мрак и глубокий свет[1].

Алджернон Суинбёрн, «Лох-Торридон»

«Mathématiques, un dépaysement soudain» («Математика, неожиданное путешествие») — так называлась выставка, организованная в Париже Фондом современного искусства Картье. Одним из её экспонатов стала «Библиотека тайн»:

тайна физических законов,
тайна жизни,
тайна разума,
тайна математики.

Её представлял фильм Дэвида Линча, в котором с точки зрения художника осмыслялись идеи Времени, Пространства, Материи, Жизни, Разума, Знания, Математики, явленные цитатами из трудов великих учёных.

Мишель Кассе и Эрве Шандес уговорили меня попытаться проделать то же самое с точки зрения *наивного математика* — спроектировать эти идеи на незримый экран нашего разума, осветив их не отражением блеска богини искусств, но вечным сиянием математики.

---

[1] Перевод А. Шапиро.

Я знал, что ничего не получится, но всё же рискнул. Многое из того, что здесь написано, родилось в беседах с Джанкарло Луччини, а мой английский кое-где подправила Бронвин Махони. Книга представляет собой слегка видоизменённый вариант того, во что вылилась эта попытка.

Глава 2

Наука

Не существует ничего, кроме атомов и пустоты; всё остальное — лишь мнение.

Демокрит Абдерский (?), 460–370 до н. э.

Все люди от природы стремятся к знанию. Мышление — это безмолвная беседа души с самой собой. Горячее желание знания есть единственный двигатель, привлекающий и поддерживающий исследователя в его усилиях, и это знание, ⟨...⟩ постоянно ускользающее из его рук, составляет его единственное счастье и мучение. Мыслить — значит страдать.

Большой шаг вперёд был сделан в науке тогда, когда люди убедились, что для понимания природы вещей они должны начать не с вопроса о том, хороша ли вещь или плоха, ⟨...⟩ но с вопроса о том, какого она рода.

Наука — это вера в невежество экспертов. Именно то, что нам кажется, что мы что-то знаем, мешает нам чему-то научиться. Здравый смысл — это сумма предубеждений, приобретённых до восемнадцатилетнего [восьмилетнего?] *возраста.*

Простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней — домом. Факт сам по себе есть ничто: он имеет значение, лишь поскольку с ним связана идея или поскольку он служит доказательством чего-либо. Тот, кто не знает, чего ищет, не поймёт и того, что найдёт. Исследователь должен иметь безграничную веру — и при этом всё же сомневаться.

По мере того, как наука увеличивает наше могущество, она уменьшает нашу гордость собой. Тот, кто осмеливается считать себя судьёй в области истины и знания, будет повержен смехом богов.

Боги любят шутить — я подозреваю, что Вселенная не только страннее, чем мы себе представляем, но и страннее, чем мы можем себе представить. Самое непостижимое в этом мире — то, что он постижим.

В звучании струн заключена геометрия, а в расположении сфер — музыка. Скрытая гармония сильнее явной. Размышления о прекрасном и новом поистине божественны.

Самое прекрасное, что мы можем испытать, — это ощущение тайны. Она источник всякого подлинного искусства и науки — ветвей одного и того же дерева. Тот, кто никогда не испытывал этого чувства, ⟨...⟩ подобен мертвецу, и глаза его закрыты.

Когда дело доходит до атомов, может быть использован только язык поэзии. Поэзия ближе к жизненной правде, чем история. Знание ограничено. Воображение охватывает весь мир.

Но при входе в лабораторию снимайте воображение, как пальто. Уходя, надевайте его вновь.

Объективная реальность вещей останется вечно скрытой от нас; нам дано знать лишь отношения. Всё, что мы называем реальным, состоит из вещей, которые нельзя рассматривать как реальные. Настоящая объективная реальность есть внутренняя гармония мира.

Время и пространство не навязаны нам природой — мы сами навязываем их природе, потому что полагаем это удобным для себя. ⟨...⟩ Различие между прошлым, настоящим и будущим — не более чем иллюзия, хотя и весьма навязчивая.

Человек — это часть целого, которое мы называем Вселенной, часть, ⟨...⟩ ограничивающая нас миром собственных желаний и привязанностью к узкому кругу близких нам людей. Наша задача — освободиться из этой тюрьмы, расширив сферу своего участия до всякого живого существа, до целого мира во всём его великолепии.

Пифагор
Гераклит
Платон
Аристотель
Чарльз Дарвин
Клод Бернар
Джеймс Клерк Максвелл
Анри Пуанкаре
Нильс Бор
Альберт Эйнштейн
Джон Холдейн
Ричард Фейнман

То, что думают эти люди, то, как они пишут, просвещает наш разум и возвышает дух, но своей собственной жизнью эти мысли почти не живут. Не растут, не преображаются, не пускают свежие зелёные побеги — лишь сверкают, подобно застывшим в вечности кристаллам огненных цветов. Это не совсем то, что математики называют *идеями*, а нечто промежуточное между *идеями* и *мнениями*[1].

С великими научными *идеями* всё иначе: они живут, они наполняют душу восторгом, они приглашают оспаривать и опровергать себя.

---

[1] Мнение об X — это функция, скажем $OP_X = OP_X(p)$, которая приписывает значение «да» (согласен) или «нет» (не согласен) каждому человеку p, рвущемуся сообщить, что он думает об X, например о существовании (несуществовании) *вакуума*. Демокрита не заботили конкретные значения функции $OP_X(p)$ — за исключением разве что случая, когда p — это его лучший друг. Однако сей философ был бы рад обнаружить корреляцию между $OP_X(p)$ и расстоянием от жилища персоны p до Абдеры.

Вырвитесь из клетки обыденных представлений, дайте волю воображению, начните играть с подобными идеями, как щенок со своими игрушками, — и вы окажетесь в мире *прекрасного далёка*, которое называется *математикой*.

Глава 3

Числа

> *Все применения математики в науке основаны на соотношениях между законами, которым подчиняются физические величины, и законами математики.*
>
> Джеймс Клерк Максвелл, 1856 г.

> *Между числами, упоминаемыми мной в книге, ⟨...⟩ есть числа, превышающие число песчинок, которые можно вместить не только в пространстве, равном объёму Земли, ⟨...⟩ но и целого мира.*
>
> Архимед, «Псаммит, или Исчисление песчинок», 250 г. до н. э.

> *Архимед ⟨...⟩, жизнь которого есть целая эпоха в жизни человечества и существование которого представляется одной из милостей природы.*
>
> Никола Кондорсе

Архимед оценил диаметр Вселенной примерно в два световых года, т. е. $\approx 2 \cdot 10^{13}$ км — двести тысяч миллиардов километров, — что, как нам теперь известно, составляет около половины расстояния до ближайших к нам звёзд, двойной системы Альфа Центавра A и B.

Затем Архимед изобрёл экспоненциальную форму записи больших чисел и оценил количество песчинок или, скорее, маковых зёрнышек размером $\approx 0{,}2$ мм, необходимых, чтобы эту Вселенную заполнить, числом, в современных обозначениях не превосходящим 10^{63}. (Я взял эти числа из статьи в Википедии. На самом деле куб со стороной $2 \cdot 10^{13}$ км имеет объём $8 \cdot 10^{57}$ мм^3, что даёт 10^{60} кубиков со стороной 0,2 мм.)

Если бы некий философ этим не впечатлился, заявив, что

> *решения следует принимать на основе знания, а не чисел,*

Архимед, вероятно, ответил бы, что решения следует оставить могущественным правителям, числа же — хранители нашего истинного знания.

Большие числа окружают нас повсюду. Даже Сократ, Платон и Аристотель согласились бы, что ваши *знания о себе* неполны без представления о примерно 10^{14} (100 000 миллиардах) бактерий, живущих у вас внутри, — по несколько бактерий на каждую клетку вашего собственного тела.

(Размер бактерии составляет примерно 1 мкм — одну тысячную миллиметра = одну миллионную метра, так что по объёму она в несколько тысяч раз меньше ваших собственных клеток. Если бы внутри каждой вашей клетки находилась бактерия, вы и не заметили бы этого — к сему моменту уже благополучно скончавшись.)

Одна-единственная бактерия, имея достаточно питательных веществ, способна делиться каждые 20–30 минут, так что через 24 часа она превратится в сгусток размером в 10^5 мкм = 10 см, содержащий около $2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 \approx 1000^5 = 10^6 \times 10^9$ (миллиона миллиардов) бактерий.

Дальнейшее может подсчитать каждый школьник.

День 2. Сгусток содержит $10^{15} \times 10^{15} = 10^{30}$ бактерий и в диаметре составляет 10^{10} мкм = 10 км — примерно 1 кг бактерий на каждый квадратный метр поверхности Земли.

День 4. Сгусток увеличивается в размере до 10^{20} мкм = 10^{11} км и достигает самых отдалённых участков Солнечной системы. Он поглощает Солнце ($\approx 1{,}5 \times 10^8$ км от Земли) и все планеты, включая Плутон ($\approx 6 \times 10^9$ км), но не охватывает орбиту Седны в самой далёкой от нас точке ($\approx 1{,}4 \times 10^{11}$ км).

(Аристотель, настаивавший на том, что

небо должно иметь форму сферы,

рад был бы узнать, что бактерии по-прежнему находятся внутри *сферического* (гипотетического) *облака Оорта* — облака комет, окружающих Солнце на расстоянии примерно одного светового года.)

День 7. Сгусток содержит $10^{15\times7} = 10^{105}$ бактерий и в диаметре составляет $10^{5\times7}$ мкм $= 10^{26}$ км $\approx 10^{13}$ световых лет, что в сотни раз превышает диаметр видимой Вселенной ($\approx 10^{11}$ световых лет).

Бактерии существуют уже миллиарды дней, но имеют ли хоть какой-то смысл числа, подобные $10^{100000\dots}$? Ответ на этот вопрос — и *да*, и *нет*. До этих чисел нельзя добраться, считая $1, 2, 3, \dots$, по крайней мере в нашем пространственно-временном *континууме*; нельзя и представить их *набором каких-либо физических объектов*. Однако нереально большие (и нереально маленькие) числа играют важную роль в нашем понимании законов природы, которые проявляются в наблюдаемых свойствах *объектов* Вселенной.

Как природе, которая, по словам Эйнштейна, *интегрирует эмпирически*, удаётся удовлетворять этим законам?

Есть ли в её распоряжении нечто *значительно большее*, нежели пространство/время (что-то вроде квантовых полей?), позволяющее *интегрировать эмпирически*?

Или в неё встроена какая-то *секретная логическая штуковина* и она, подобно математикам, пользуется МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИЕЙ?

Или же она обнаружила *простой логический путь*, в обход приводящий к этим законам, мы же не можем найти его, ибо обречены держаться мысленных путей, доступных нашему разуму?

Эти вопросы, по-видимому, не имеют смысла; как всё-таки досадна наша неспособность сформулировать правильный вопрос!

И всё же математик может найти утешение в попытке оценить число N_{can} различных логических рассуждений (мысленных путей), состоящих, скажем, из L слов, которые в принципе *в состоянии* породить мозг разумного существа. Если бы кто-то объяснил нашему математику, что означают слова «может» и «в принципе», он, вероятно, оценил бы N_{can} величиной $\sim L \log L$ или того меньше, что весьма далеко от числа $N_{all} \sim 2^L$ *всех* таких рассуждений и значительно уступает возможностям бактерий.

Математик мог бы почувствовать себя уязвлённым, но вскоре осознал бы, что его собственные логика и язык скрывают числа, оставляющие далеко позади самых быстроразмножающихся бактерий.

В самом деле, *представим себе* кота Шрёдингера. Его тело состоит из $N \approx 10^{26}$ молекул (воды и небольших молекулярных остатков/мономеров в макромолекулах). Предположим, что каждая молекула может находиться в одном из двух состояний. Тогда у *кота* имеется всего $S = 2^N \approx 10^{0{,}3N}$ *состояний*. Некоторые из них мы относим к состояниям *живого* кота, другие — к состояниям кота *мёртвого*. Число — назовем его, скажем, $\mathcal{CAT}$ — возможных суждений/мнений о коте равно

$$2^S = 2^{2^{10^{26}}} > 10^{10^{10^{25}}}.$$

Как же выбрать верное суждение из этого колоссального универсума возможностей? Математики не понимают, как это происходит, но кот, покуда он жив и не озабочен математикой, как-то умудряется сделать правильный выбор и… остаётся в живых.

Храбрецы отваживаются играть и с невообразимо бо́льшими числами — порождениями *теоремы Гёделя о неполноте*. Попадись вам такое число в рассуждениях о «реальном мире» — и вашу логику уже ничто не спасёт. К счастью, в «реальном мире» вы их не встретите — если сами не позовёте сих уродливых монстров по имени.

Монстр **SToP**. Если у вашего компьютера M битов памяти, где, скажем, $M = 10^{10}$, то, отвечая на любой ваш «вопрос», он либо *остановит работу*, совершив меньше 2^M шагов, либо зациклится и будет работать вечно. (Вместо «шагов» можно использовать любые удобные «единицы времени»; число $2^{10^{10}}$ настолько велико, что всё равно, будут ли это наносекунды или миллиарды лет.)

То, что мы называем здесь *вопросом* или *программой*, выполнить которую вы просите свой компьютер, — это последовательность *букв*, представляющих собой названия клавиш, которые необходимо нажать на клавиатуре для запуска этой *программы*.

Забудем о «реальном мире» и позволим компьютеру иметь *бесконечную* (неограниченную) память. Как и в конечном случае, компьютер может остановиться, совершив конечное число шагов, либо же работать бесконечно долго *в зависимости от вашего вопроса* (а также конфигурации своего аппаратного и программного обеспечения), правда, *работать бесконечно долго* в случае бесконечной памяти не обязательно означает *зациклиться*. Например, если вы попросите компьютер найти файл под названием `cell_phan_nimber_Bull_Gytes`, тот либо найдёт его и остановится, либо же, если такого файла не существует, будет работать вечно.

(Ваш *медленно работающий* мозг, в отличие от *быстро работающей* поисковой системы OS Windows, обладает фундаментальной способностью дать на подобный вопрос *почти мгновенный* ответ «ТАКОГО ФАЙЛА НЕ СУЩЕСТВУЕТ». Простой, хотя и структурно нетривиальный пример того же рода — реакция «ГОРЬКО», возникающая на вашем языке в ответ на всё, химически далёкое от потенциальных питательных веществ, с редкими ошибками, такими как реакция «СЛАДКО» на сахарин.

Можно — вместе с Робертом Гуком, Чарльзом Бэббиджем и Аланом Тьюрингом — строить правдоподобные догадки об архитектуре человеческой памяти, которая обеспечивала бы эту фундаментальную способность. Экспериментальных средств для проверки нетривиальных гипотез в этой области не существует, однако имеется математически привлекательная теория такой памяти, предложенная Пентти Канервой под названием *разреженная распределённая память*.)

Выберем (умеренно большое) число L и рассмотрим *все программы*, состоящие из L букв, выполняя которые компьютер *в конце концов остановится*. Поскольку число этих программ конечно (меньше 100^L, если при написании программ используется меньше 100 букв), наибольшее (но всё же конечное!) время исполнения такой программы, измеряемое, скажем, в годах, также *конечно*; назовем его SToP(L).

Несмотря на свою конечность, это число, даже для скромных значений L, скажем $L = 50\,000$ (запись программы, состоящей из 50 000 букв, занимает около десятка страниц), практически неотличимо от бесконечности в некотором точном логическом смысле. Наша Вселенная ничтожно мала не только для того, чтобы вместить в себя что-либо подобного размера, но и для того, чтобы содержать *запись явной формулы* или *явного словесного описания* такого числа, даже если буквами в этой записи будут служить атомы. (Способ, которым мы только что описали число SToP, не считается: требование отличать время остановки программы от бесконечности без указания конкретного «экспериментального протокола», с помощью которого это предполагается делать, трудно назвать *явным* описанием.)

По сравнению с монстром SToP число $\mathcal{CAT}$ кажется крошечным — соответствующая экспоненциальная формула выражается несколькими десятками двоичных символов (и *физически* записывается с помощью нескольких тысяч атомов, управляемых посредством *атомно-силового микроскопа*).

Если быть до конца честными, следует признать, что с нашим определением числа SToP(L) не совсем всё в порядке.

Представьте, например, что память нашего компьютера всё-таки содержит строку `cell_phan_nimber_Bull_Gytes`, но так далеко, что добраться до неё нельзя меньше чем за T единиц времени. Поскольку T можно выбрать сколь угодно большим, из логики нашего определения с неизбежностью следует, что SToP(L) равно бесконечности, даже если ограничить длину L допустимых программ какой-нибудь совсем малой величиной, не превосходящей, скажем, одной тысячи букв.

Следует как-то запретить такую возможность, потребовав, чтобы все «ячейки памяти» нашего компьютера, до которых *нельзя добраться* меньше чем, скажем, за 10^{10} единиц времени, были пустыми, т. е. в этих «удалённых ячейках» ничего не было записано. Более того, следует предполагать, что компьютер знает, когда он пересекает границу «непустого пространства», и не будет тратить время на поиски в пустом.

С другой стороны, в процессе вычислений компьютеру разрешается записывать данные в эти «удалённые ячейки» и стирать их; в конце концов это может привести к тому, что объём занятых ячеек памяти станет огромным, а их чтение — мучительно долгим.

С этой оговоркой определение числа STOP(L) становится корректным — оно действительно даёт некое *конечное* число, при условии, что вы *точно* определили, что такое «удалённые ячейки» и что значит «добраться до той или иной ячейки памяти».

Но можно ли, используя *конечное число* слов, *явно* описать *бесконечную* память и программу поиска в этой памяти?

Общепринятое решение этой проблемы, сформулированное Тьюрингом, состоит в том, чтобы *всем* числам $1, 2, 3, 4, \ldots, 1000$ сопоставить ячейки/блоки памяти, которые снабжены метками «пусто»/«непусто», и считать, что в каждой «непустой» ячейке записан символ 1 или 0. Тогда один шаг поиска в памяти определяется как переход от ячейки i к ячейке $i+1$ или $i-1$, причём каждая посещённая ячейка помечается как «непустая».

Если на вас действует магия слова «все» и вы верите, что оно на самом деле задаёт бесконечное количество чисел, вы получите «математически точное» определение числа[1] STOP(L).

И всё же с числом STOP не совсем всё в порядке: это побочный продукт аппарата формальной логики, а не *настоящее математическое* число. Но около тридцати лет назад были открыты **поистине** ГИГАНТСКИЕ числа, как, например, время, необходимое Гераклу, чтобы расправиться с гидрой в некой математической модели этого прискорбного происшествия. Но все эти ГИГАНТСКИЕ КРАСАВЦЫ несравненно меньше уродливого монстра STOP.

---

[1] В мире есть, вероятно, 5–10 математиков и логиков, которые полагают, что такие монстры, как STOP, демонстрируют фундаментальные изъяны в наших понятиях «чисел», «конечности» и «бесконечности».

Глава 4

Законы

> *Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare*[1].
>
> Исаак Ньютон, «Математические начала натуральной философии», 1687 г.[2]

> *⟨...⟩ Общие законы, известные или неизвестные, регулирующие явления вселенной, необходимы и постоянны.*
>
> Никола Кондорсе

> *Всё, что мы знаем о* [законах природы]*, есть результат последовательных усилий величайших умов.*
>
> Майкл Фарадей

Один физик утверждал, что самое поразительное отдельное событие в истории науки — это открытие в 1916 г. *общей теории относительности*; согласно его прикидкам, если бы не Эйнштейн, оно задержалось бы на двадцать-тридцать лет — в два раза больше, чем любое другое научное открытие.

Наш физик, будучи теоретиком, не мог подкрепить свои вычисления экспериментом, но за него это сделала история... показав, что он ошибался.

> *Истинной логикой для нашего мира является исчисление вероятностей.*
>
> Джеймс Клерк Максвелл

---

[2] Закон I. Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние (*лат.*).

[2] Исторически *первый записанный* закон — соотношение между скоростью и силой для *движения в вязкой среде* — был сформулирован Аристотелем. (Более поздние версии этого закона были предложены Ньютоном в 1687 г. и Стоксом в 1851 г.) Спустя сто лет после Аристотеля Архимед открыл фундаментальные законы *статики механических систем*: закон рычага и закон равновесия твёрдых тел в жидкостях.

Предложенная Менделем теория гена — единицы наследственности — была опубликована в 1866 г. Само существование генов и их основные свойства Мендель вывел из

> *поразительной закономерности, с которой всегда повторялись одни и те же гибридные формы*

в тысячах его опытов на горохе.

Открытие генов стало величайшим событием в биологии со времён открытия *клеток* Робертом Гуком в 1665 г. и открытия *инфузорий* Антони ван Левенгуком в 1674 г.

Методология Менделя, включающая

комбинаторное проектирование многоступенчатых интерактивных экспериментов

+

извлечение специфической структурной информации из статистики наблюдаемых данных математическими методами,

была новаторской для всей науки того времени. Вот почему почти тридцать лет биологи игнорировали его статью.

Когда же на рубеже XX века аналогичные данные были получены и проанализированы Де Фризом, Корренсом и Чермаком, биологи о ней вспомнили. Многих, в том числе Альфреда Рассела Уоллеса, идеи Менделя привели в ужас, но и самых благожелательно настроенных биологов смущала его «контринтуитивная» и «биологически невозможная» алгебра.

В 1908 г. ведущий английский математик Г. Х. Харди и немецкий врач Вильгельм Вайнберг независимо выразили это *контринтуитивное* в виде

$$\frac{\left[(p+q)^2+(p+q)(q+r)\right]^2}{\left[(p+q)^2+(p+q)(q+r)\right]\cdot\left[(p+q)(q+r)+(q+r)^2\right]}=\frac{(p+q)^2}{(p+q)\cdot(q+r)},$$

и законы наследственности Менделя получили (почти) повсеместное признание.

(Харди называл эту свою работу *математикой уровня таблицы умножения*. Он не заметил математическую красоту *менделевской динамики отображений M перехода к следующему поколению* в пространствах *усечённых многочленов*, описывающих преобразования *распределений аллелей* в популяции при *случайных скрещиваниях*. В простейшем примере такое отображение M действует на матрицы $P=(p_{ij})$, заменяя каждый элемент p_{ij} на произведение сумм элементов, стоящих в i-й строке и j-м столбце. Поразительным, хотя и очевидным образом выполняется соотношение $M(M(P)) = \mathrm{const}\cdot M(P)$, где $\mathrm{const} = \sum_{ij} p_{ij}$, которое для симметрических матриц размера 2×2 сводится к приведённой выше (p, q, r)-формуле в обозначениях Харди.)

> ⟨...⟩ *Имеем ли мы право ⟨...⟩ рассматривать* [гены] *как материальные единицы, как химические тела более высокого порядка, чем молекулы?* [Для генетики это] *не представляет ни малейшей разницы. ⟨...⟩ Между признаками, которыми оперируют генетики, и генами, которые постулируются их теорией, лежит целое поле эмбрионального развития.*
>
> Томас Хант Морган, 1934 г.

В 1913 г., спустя почти полвека после выхода статьи Менделя *«Versuche über Pflanzen-Hybriden»*[3], двадцатиоднолетний Альфред Стёртевант сделал следующий шаг на том логическом пути, который наметил Мендель, и определил *относительные положения* некоторых генов в одной из хромосом дрозофилы, проанализировав частоты специфических морфологических признаков во множестве поколений подходящим образом скрещиваемых мух.

Только представьте себе это! Вы разводите плодовых мушек, вы подсчитываете количество мушек, обладающих той или иной *комбинацией* определённых признаков, например регистрируете распределение частот следующих восьми $(2\times 2\times 2)$ возможностей:

[полосатое тельце]/[*жёлтое* тельце],
[красные глаза]/[*белые* глаза],
[обычные крылья]/[*мелкие* крылья],

и ясно видите (даже если вам, подобно Стёртеванту, случилось быть дальтоником) своим математически сфокусированным мысленным взором, что все соответствующие гены — абстрактные сущности из теории Менделя, — связанные с этими признаками, занимают опре-

---

[3] «Опыты над растительными гибридами» (*нем.*).

делённые относительные положения на воображаемой прямой, существование которой, как и в случае менделевских генов, выводится из того, как *повторяются одни и те же гибридные формы*. В частности, вы отводите «гену глаза» положение *между* «геном тельца» и «геном крыла», поскольку среди потомков данных родителей

сочетание [мелкие крылья] + [жёлтые тельца] **влечёт** [белые глаза]

с аномально высокой вероятностью.

Спустя много десятков лет молекулярная биология и технология секвенирования генов раскрыли тайну «прямой Стёртеванта», идентифицировав её как сегментированную генами цепь ДНК, но о математической разработке идеи Стёртеванта по-прежнему приходится только мечтать.

О Роберте Гуке, Антони ван Левенгуке, Drosophila melanogaster и идее Стёртеванта

Имя *Гука* ассоциируется с *законом упругости Гука*, однако это лишь одно достижение из множества его экспериментальных открытий, оригинальных концепций и практических изобретений. К примеру, Гук осознал, что окаменелости представляют собой остатки *вымерших видов*, создал почти современную *модель памяти*, предложил (1665 г.?) конструкцию *пружинных часов* (данное Гюйгенсом описание его собственной конструкции датируется 1675 годом) и разработал (1684 г.) подробную схему *оптического телеграфа с использованием семафоров*. (Первая действующая линия оптического телеграфа, включавшая около 500 станций, была построена в 1792 г. во Франции.)

Левенгук придумал метод изготовления маленьких стеклянных шариков для шлифовки линз своих микроскопов, а всех остальных заставил думать, что денно и нощно шлифует крошечные линзы вручную. Помимо инфузорий он наблюдал и описал серповидные бактерии (рода *Selenomonas*), вакуоль клетки и сперматозоиды. Секрет левенгуковых микроскопов был раскрыт в 1957 г.

Drosophila melanogaster (чернобрюхая дрозофила) — это плодовая мушка (длиной около 2,5 мм, обычно имеющая красные глаза и полосатое брюшко), которая благодаря Томасу Ханту Моргану стала основным модельным организмом в генетике. Морган и его ученики подсчитывали мутантные признаки тысяч мушек и изучали их наследственность. Проанализировав полученные данные, Морган показал, что гены переносятся хромосомами; он также ввёл понятия *генетического сцепления* и *кроссинговера*.

Стёртевант математически «синтезировал» свою нитку генов из «субстрата» результатов и идей, почерпнутых из работ Моргана, — подобно тому, как Кеплер «выкристаллизовал» эллиптические орбиты из астрономических таблиц Тихо Браге. Этот великий момент Стёртевант вспоминает так:

> *Внезапно я понял, что вариации в силе сцепления, уже приписанные Морганом различиям в пространственном расположении генов, открывают возможность определения последовательности в линейном измерении хромосомы. Я отправился домой и (забросив домашнее задание) провёл большую часть ночи, составляя первую карту хромосом, которая содержала сцепленные с полом гены y, w, v, m и r в том же порядке и примерно с теми же относительными расстояниями, с какими они и сейчас изображаются на стандартных картах.*

Идея Стёртеванта о (ре)конструкции (апостериори линейной) геометрии генома подобна гипотезе Пуанкаре о том, как мозг (ре)конструирует (апостериори евклидову) геометрию внешнего мира исходя из набора образов на сетчатке глаза.

Грубо упрощая, можно считать, что неизвестная геометрическая (или не геометрическая) структура S из данного класса $\mathcal{S}$ структур на изучаемом множестве X — будь то множество (типов) генов в геномах (организмов) данного вида или множество фоторецепторных клеток сетчатки — представляется некой вероятностной мерой на множестве подмножеств Y в X. Важно здесь то, что эта мера сосредоточена на *$\mathcal{S}$-простых (специальных) подмножествах Y*, допускающих *короткие описания на языке класса $\mathcal{S}$*; это позволяет реконструировать структуру S исходя из относительно небольшой выборки образцов.

Эта выборка далеко не случайна. В генетике $Y = Y(O)$ есть подмножество генов, соответствующих определённым аллельным вариантам в геноме данного организма O, а организмы O являются результатом *направленной* селекции, специальным образом разработанной экспериментатором.

В случае зрения $Y = Y(t)$ есть множество возбуждённых фоторецепторных клеток на сетчатке вашего глаза в данный момент времени t, а его изменение в зависимости от t чаще всего вызвано движением объекта относительно глаза; мозг, который управляет мышцами, отвечающими за движение глаза, обладает способностью учитывать/контролировать подобные изменения.

При поиске структуры S самый трудный шаг — *догадаться*, что представляет собой множество $\mathcal{S}$. В конце концов, что такое *структура*?

Законы Менделя — это не более чем платонова тень, статистически усреднённый образ мастерской Жизни на плоском экране чисел. Молекулярное здание клетки на этом экране оказывается грубо смятым, и реконструировать его изысканную структуру одним лишь чистым усилием мысли невозможно. Для восстановления огромного количества потерянной информации требуются сотни (тысячи?) изощрённых экспериментов.

> *⟨...⟩ Я считаю истиной то, что чистая мысль способна постичь реальность, как об этом мечтали древние.*
>
> Альберт Эйнштейн

В отличие от того, что мы наблюдаем в биологии, математический образ фундаментальных механизмов, управляющих миром физики, сохраняет информацию о тончайших деталях этих механизмов. Наш *наивный математик*, вероятно, может даже решить, что чем меньше вы знаете, тем лучше понимаете, как устроена Вселенная.

К примеру, давайте забудем о скоростях, силах и ускорениях. Представим себе мир, населённый лишь ходячими хронометрами, которые лишены восприятия скорости и силы, но, встретившись, могут узнать друг друга и сравнить свои записи об интервалах времени между последовательными встречами.

Хронометр-математик резюмирует то, что, как ему кажется, он «наблюдает» в мире хронометров, в виде *самоочевидных аксиом* и, поразмыслив несколько столетий о том, что из них вытекает, придёт к заключению, что в любой данной размерности существует ровно одно простейшее максимально симметричное *пространство хронометров*. Это *пространство-время Лоренца—Минковского*, которое в той Вселенной, где нам довелось обретаться, имеет размерность четыре.

Идея этого чудесного пространства приведёт математика в восторг, но также и в недоумение, ибо его мысленная картина мира не объясняет,

> *почему хронометры, лишённые физического контакта за исключением моментов встречи, сохраняют синхронизацию.*

(Здесь, на Земле, недоумение вызывает не эта поразительная синхронизация, а её нарушение.)

Но затем друг-физик нашего математика выдвинет идею скорости, а его коллега-экспериментатор сконструирует быстро движущиеся хронометры. Математик вздохнёт с облегчением: формулы его теории (которая на Земле называется *специальной теорией относительности*) абсолютно верны, и для хронометров, относительная скорость которых близка к 1, рассинхронизация хорошо заметна. (На Земле эта единица, т. е. скорость света, выражается изящной формулой в виде произведения числа 299 792 458… на другую единицу скорости, смысла которой так и не удалось постичь ни одному хронометру-математику.)

> *Силовые линии несут гораздо более правильную и чистую идею ⟨…⟩*[4]
>
> Майкл Фарадей, 1833 г.

> *Thy reign, O force! is over. Now no more*
> *Heed we thine action;*
> *Repulsion leaves us where we were before,*
> *So does attraction.*
>
> *Власть, Сила, кончилась! Нам не грозит*
> *Твоё теченье;*
> *Ни твой ущерб нас не пошевелит,*
> *Ни приращенье*[5].
>
> Джеймс Клерк Максвелл, 1876 г.

---

[4] *«Благодаря своему безошибочному инстинкту Фарадей хорошо понимал ⟨…⟩ состояния пространства, сегодня называемые полями ⟨…⟩».* Альберт Эйнштейн, 1940 г.

[5] Перевод А. Шапиро.

> *Теория относительности Эйнштейна ⟨...⟩ должна рассматриваться как великолепное произведение искусства.*
>
> Эрнест Резерфорд[6]

Далее наш математик начнёт искать не максимально симметричное пространство, а максимально симметричный *закон* «движения», применимый ко всем мыслимым для него пространствам хронометров, заполненным/деформированным *силовыми линиями/полями* типа фарадеевских.

Сначала ему покажется, что такого выделенного закона быть не может, но затем некоторые члены в его выкладках чудесным образом сократятся и внезапно возникнет красивейшее уравнение. Без сомнения, наш математик назовёт его *вакуумным уравнением Эйнштейна*. (Именно так это уравнение вывел Давид Гильберт[7].)

Затем друг-физик введёт в обиход понятие *энергии/материи*, а экспериментатор/космолог, ко всеобщему удовлетворению, покажет, что Вселенная ведёт себя в точном соответствии с предсказаниями полученного уравнения — простейшего математически мыслимого описания хронометро-пространственных миров, *общей теории относительности*.

> *Величайший со времён Ньютона переворот ⟨...⟩ в наших представлениях о структуре реальности ⟨...⟩ произвели работы Фарадея и Максвелла об электромагнитных полях.*
>
> Альберт Эйнштейн, 1931 г.

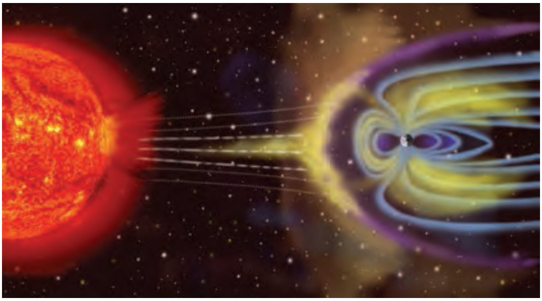
> *⟨...⟩ В истории человечества (если посмотреть на неё, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики.*
>
> Ричард Фейнман, «Лекции по физике», 1964 г.[8]

---

[6] Резерфорд, которого называли Фарадеем ядерной физики, экспериментально идентифицировал альфа-, бета- и гамма-излучения, открыл атомное ядро и указал, что его составными частями являются протоны и «ядерные электроны». (Нейтроны были открыты и встроены в модель ядра на 20 лет позднее.) Ему приписывают фразу *«Все науки делятся на физику и коллекционирование марок»*. Очевидно, Резерфорд считал химию частью физики, а до того, чтобы увидеть, как из менделевской хромосомной теории наследственности выросла молекулярная биология, он не дожил.

[7] Гильберт — человек, который вместе с Пуанкаре возглавлял в математике переход от девятнадцатого века к двадцатому.

[8] Сто двадцатое столетие — это слишком уж нескоро: *«судить о том иному веку»* — писал Чарльз Бэббидж в своём «*Девятом Бриджуотерском трактате*» (1837 г.). Созда-



Идея о симметрии *мира хронометров*, которую бурно приветствовали земные физики XX века, берёт свое начало в трудах Максвелла: в 1855–1873 гг. он придумал систему из двадцати дифференциальных (волновых) уравнений, которые логически включают в себя и унифицируют *закон Ампера* (1826 г.) о магнитных эффектах, вызываемых электрическими токами, и *закон индукции Фарадея* (1831 г.) об электрических токах, порождаемых переменными магнитными полями.

Формально эти уравнения представляют собой *уравнения Лагранжа—Гамильтона*, обусловленные *принципом Мопертюи* для электромагнитных полей; они обладают поразительно высокой — как теперь говорят, *лоренцевой* — симметрией, которая, по словам Эйнштейна (1953 г.),

> *выходит за рамки уравнений Максвелла.*

(Исторически первое *волновое уравнение* — уравнение колеблющейся струны — было выписано и изучено Даламбером в 1747 г.; то, что оно обладает *лоренцевой симметрией*, очевидно, было замечено лишь гораздо позже.)

Главенствующая роль этой симметрии в физике, на которую намекал Фитцджеральд в 1889 г. и о которой говорили Лармор в 1897 г. и Лоренц в 1899 г., была окончательно закреплена в двух статьях 1905 года:

> *«Sur la dynamique de l'électron»*[9] Пуанкаре[10]

и

ние Бэббиджем *аналитической машины* (которая представляла собой реализацию того, что сейчас называется *универсальной машиной Тьюринга*) — наиболее вероятный претендент на первое место в списке самых значительных событий XIX века по версии робота XXII века.

[9] «О динамике электрона» (*фр.*).

[10] В этой работе *группа Лоренца* материализовалась в словах

> *⟨...⟩ уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть преобразованиями Лоренца ⟨...⟩.*

«Zur Elektrodynamik bewegter Körper»[11] Эйнштейна.

Двумя годами позже Герман Минковский, интересовавшийся (помимо *выпуклых тел*) многомерной геометрией *квадратных уравнений от многих переменных* (квадратичных форм) и их группами преобразований, предложил четырёхмерную геометрическую реализацию симметрии (Пуанкаре—) Лоренца. В 1916 г. Эйнштейн расширил четырёхмерную геометрию Минковского до *пространств (Эйнштейна—) Лоренца*, которые использовал в качестве математической базы *общей теории относительности*.

Теперь представим себе технически отсталую цивилизацию хронометров, в которой недоступны эксперименты с высокими энергиями. Тамошнему математику придётся изобрести таинственное *абсолютное время*, которое будет синхронизировать не взаимодействующие между собой хронометры, как безоконные *монады* Лейбница.

> *Абсолютное, истинное, математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.*
>
> Исаак Ньютон

Затем друг-физик пробьёт где-нибудь окно, через которое сможет наблюдать за движением других хронометров, и математик осознает, что наделение пространства Лоренца *абсолютным временем* с необходимостью влечёт существование *абсолютного пространства*, в котором возможно движение.

В конце концов наши два друга, математик и физик (на Земле такая пара называется *Исааком Ньютоном*), придут к трём законам движения, а оказавшись на Земле, включат в свою теорию и закон обратных квадратов для силы тяжести, в котором на «квадраты» намекает (влечёт их?) геометрический

закон R^2 для площадей: площадь поверхности сферы радиуса R пропорциональна R^2, причём показатель 2 есть $2 = 3 - 1$, где 3 — размерность нашего физического пространства.

(Ньютон *доказал* математически, что *только* тяготение, подчиняющееся закону обратных квадратов, согласуется с астрономическими

В более ранних статьях Пуанкаре обсуждал *принцип относительного движения*, но это было не совсем то, что мы называем *специальной теорией относительности*, как её сформулировал Эйнштейн.

[11] «К электродинамике движущихся тел» (*нем.*).

наблюдениями[12], однако неясно, кто первым *высказал* соответствующую *гипотезу*. Роберт Гук утверждал, что он. Действительно, в сообщении Королевскому обществу в 1666 г. Гук писал:

> *Небесные тела ⟨...⟩ взаимно притягивают друг друга внутри их сфер действия ⟨...⟩ тем сильнее, чем ближе они расположены.*

Однако и другие, в том числе сам Ньютон, высказывали схожие идеи о тяготении примерно в то же время.

Ньютон считал, что доказать закон обратных квадратов гораздо труднее, чем угадать его формулировку. А поскольку он был единственным человеком на Земле, а то и во всей астрономически наблюдаемой[13] Вселенной, способным подступиться к этой проблеме и оценить её математическую сложность, мы принимаем его суждение.)

Но несмотря на поразительное согласие теории с данными наблюдений за орбитами планет в течение коротких промежутков времени (в несколько тысяч лет), наших друзей будет преследовать один мучительный вопрос.

Согласуются ли эти законы — законы классической механики + закон обратных квадратов — с наблюдаемой устойчивостью Солнечной системы на временно́й шкале, охватывающей миллионы и сотни миллионов лет?

Сам Ньютон полагал, что ответ на этот вопрос отрицателен и что планеты не падают на Солнце лишь благодаря периодическому божественному вмешательству. Но примерно через 250 лет после Ньютона *шанс* на оптимистическое «может быть» дала нам контринтуитивная математическая теорема, обычно называемая *теоремой КАМ*, которая (в очень грубых чертах) утверждает, что *довольно многие* физически значимые динамические системы могут демонстрировать «асимптотически почти периодическое поведение» — вопреки тому, что всегда думали физики (равно как и математики). (Интуиция подсказывала всем, что *подавляющее большинство* механических систем, имеющих более двух степеней свободы, должны демонстрировать «асимптотически хаотическое» поведение.)

В основе этой теоремы лежит скрытая *симплектическая симметрия* между кинетической и потенциальной энергией, которая видна на ещё

---

[12] Движения планет, к которым применимы законы Ньютона, *невозможно* наблюдать напрямую. Для того чтобы данные наблюдений поддавались обработке методами математического анализа, потребовались *последовательные усилия величайших умов* (не только) Коперника, Тихо Браге и Кеплера.

[13] Термин «наблюдаемая Вселенная» здесь, на несколько провинциальный манер, подразумевает, что наблюдатель расположен где-то в окрестности нашей *Галактики — Млечного Пути*.

одном математическом экране, открытом Гамильтоном примерно через сто лет после смерти Ньютона.

> *Квантовая электродинамика даёт совершенно абсурдное с точки зрения здравого смысла описание Природы. И оно полностью соответствует эксперименту.*
>
> Ричард Фейнман, «КЭД: странная теория света и вещества», 1985 г.

> *Ничто не может быть слишком чудесным, чтобы оказаться правдой, если только оно согласуется с законами природы; а в подобных вопросах лучшей проверкой такого согласия является эксперимент.*
>
> Майкл Фарадей, запись в лабораторном журнале, 1849 г.

Управляется ли ход самих «хронометров» классической или релятивистской механикой?

Вероятно, нетрудно «доказать», рассуждая в духе *парадоксов Зенона*, что никакая механическая/электромагнитная модель Ньютона + Максвелла + Эйнштейна не согласуется со свойствами *вещества*, которые мы наблюдаем вокруг. Судя по всему, наши прекрасные физические законы — это «всего лишь» подобные менделевским образы чего-то иного, а это «иное», как полагают физики, живёт в *квантовом мире*.

Быть может, нашему восприятию и доступны отдельные математические фрагменты *квантового мира*, но при попытке представить его себе целиком наш разум восстаёт, а упорствуя, мы начинаем испытывать головокружение, теряясь в клубке парадоксов и неопределённостей. И слабое утешение дают нам слова, которые физики вновь и вновь повторяют вслед за Нильсом Бором[14]:

> *Тот, кто считает, что может думать о квантовой механике без головокружения, ровно ничего в ней не понял.*

Едва ли, испытывая головокружение, можно что-либо ясно себе представить, но вам стало бы легче, если бы удалось математически доказать невозможность построения удовлетворяющей здравому смыслу (и в том числе строгой математике) модели *чего-либо* напоминающего *физический мир*.

---

[14] В 1913 г. Бор ввёл понятие *квантования физической системы* в контексте *планетарной модели атома*, предложенной Резерфордом в 1911 г.

«Квантовое мышление» несовместимо с глубоко укоренённым в нас интуитивным восприятием «реальности». Вольфганг Паули[15] писал об этом так:

> *Когда люди говорят «реальность», они обычно полагают, что речь идёт о чём-то самоочевидном и хорошо всем известном; в то время как для меня это представляется наиболее важной и в высшей степени сложной задачей нашего времени — заложить новую идею реальности.*

Паули писал также следующее:

> *Подобно тому, как в теории относительности некая группа математических преобразований связывает все возможные системы координат, в квантовой механике некая группа математических преобразований связывает все возможные исходы экспериментов.*

Это лишь намёк на то, что реальность есть свойство некой группы преобразований, однако реалистичная идея «физической реальности» по-прежнему недоступна нам и в самых смелых мечтах.

Вновь процитируем Паули:

> *Максимум, на что большинство из нас может рассчитывать в физике, — это заблуждаться на более глубоком уровне.*

И всё же, быть может, у нас остаётся надежда увидеть образ мира в зеркале математики.

> ὰγεωμίρτος μηδελταεὶς είστω.
>
> *Пусть не входит сюда тот, кто не знает геометрии.*

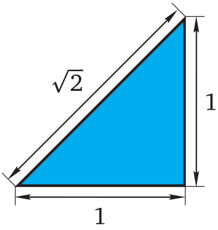
Эту фразу связывают с именем Платона, который был весьма невысокого мнения о тех несчастных, которые

> *не знают, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

(Двадцать четыре века спустя некие последователи Платона пошли ещё дальше, утверждая, что отличительной чертой *истинного человеческого сознания* является способность его обладателя осознать справедливость, важность и следствия несоизмеримости между некоторыми *теориями* чисел (а не отдельными числами), которая следует из *теоремы Гёделя о неполноте*.

---

[15] Паули (1900–1958) ввёл в квантовую механику понятие *спина*, сформулировал *принцип запрета Паули* и предсказал существование *нейтрино*.



По их предположению, любую мыслимую *имитацию* человеческого разума, будь то электронное воплощение универсальной машины Тьюринга или биоробот, можно мгновенно распознать по вопиющему отсутствию этой способности.

Однако никаких серьёзных данных о наличии/отсутствии её в человеческих популяциях собрано не было, несмотря на возродившийся интерес нейропсихологов к проблеме сознания.)

Тот, кто хулит высшую мудрость математики, питается одними заблуждениями.

Леонардо да Винчи

Всякое новое в открытии является математическим по форме, ибо нет никакой другой возможной для нас путеводной нити.

Чарльз Дарвин

Тем, кто не знает математики, трудно постичь подлинную, глубокую красоту природы.

Ричард Фейнман

Когда фрагмент науки достоин считаться законом Природы? Почему для нахождения этих законов необходимы *последовательные усилия величайших умов*?

Разве закон не есть *всего лишь сжатая форма информации, запись систематических корреляций* между *фактами* — корреляций, которые можно обнаружить, *анализируя наблюдения*?

Ответ на этот вопрос зависит от того, как вы понимаете слова *«всего лишь»*, *«информация»*, *«систематические»* и т. д., а ключевую (но не единственную) трудность, поджидающую «законодателя», иллюстрирует следующий пример.

Представьте себе, что ваши *факты* или *события* — это числа и наблюдать вам довелось такую их последовательность:

7, 19, 56, 61, 91, 127, 189, 208, 296, 342, 386.

Единственный эффективный подход к обнаружению «закона», стоящего за этими числами, состоит в том, чтобы... *догадаться*: это РАЗНОСТИ КУБОВ[16]

$$1 = 1^3, \quad 8 = 2^3, \quad 27 = 3^3, \quad 64 = 4^3, \quad 125 = 5^3, \quad 216 = 6^3, \quad 343 = 7^3, \ldots$$

Например,

$$91 = 216 - 125, \quad 127 = 343 - 216, \quad 189 = 216 - 27, \quad 386 = 9^3 - 7^3.$$

(Нечто подобное имеет место в боровском изложении *формулы Бальмера—Ридберга* для длины волны λ спектра водорода, наблюдаемого, например, в звёздах. Эта формула, записанная в подходящих единицах, утверждает, что $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$, объяснение чему даёт квантовая модель Бора атома водорода.)

В общем случае математик может сказать, что закон $\mathcal{L}$ — это «простое» отображение (функция) из некоторого «маленького и простого» *множества параметров* P (например, множества пар кубов целых чисел) *на* «сложное» подмножество Obs наблюдаемых событий (разностей кубов целых чисел) внутри другого «простого, но, возможно, большого» множества Ima всех мыслимых событий (например, всех целых чисел или, если угодно, всех вещественных чисел, которые составляют гораздо большее, но логически столь же простое множество).

Количество мыслимых *простых законов* $\mathcal{L}$, например законов, которые описываются несколькими десятками слов, огромно — оно растёт экспоненциально с ростом числа слов/символов, используемых для записи. Не существует (?) общего правила, позволяющего в каждом конкретном случае угадать закон $\mathcal{L}$ исходя из реалистичного числа образцов из Obs[17]. А ведь, как говорит Клод Бернар, *тот, кто не знает, чего ищет, не поймёт и того, что найдёт*.

(Возможное возражение состоит в том, что мозг животного/человека строит согласованную мысленную картину внешнего мира путём *систематического* обнаружения корреляций и отсечения лишнего в потоках электрических/химических сигналов, получаемых им от других частей тела.

С этим трудно спорить, ибо какую именно *систему* использует мозг, мы не знаем, но в любом случае Природа создала её *вовсе не для* того, чтобы та выявляла её внутренние механизмы.)

---

[16] *Математика уровня таблицы умножения* покажет вам, что подавляющее большинство чисел *не* являются разностями кубов. В силу этого обстоятельства данный $(m^3 - n^3)$-*закон* весьма ограничителен — а значит, информативен.

[17] *Угадать* правильный ответ в большинстве случаев гораздо сложнее, чем *доказать* его. В математике существует несколько *гипотез*, например $P \neq NP$, которые пытаются выразить эту идею в строгих терминах, но, вероятно, мы пока ещё не знаем, как *правильно сформулировать* данную проблему.

Если вы не математик, а биохимик, вы можете представлять себе *закон Природы* как некую «молекулу» затейливой формы, нечто вроде «логического фермента» для «каталитического синтеза теорий» из «раствора эмпирических фактов», где роль растворителя, который обеспечивает как бы поддерживающую структуру вокруг этого процесса, играет математика.

Архитектура логики может меняться от закона к закону, соответствующие *химии фактов* могут не иметь между собой ничего общего (как, например, в случае статистической механики и классической генетики), но принципы *математического катализа* остаются одними и теми же для (всех?) *ферментативных законов*, достойных называться законами Природы.

Однако будьте осторожны: строка из сотни символов, представляющая собой краткое выражение закона (например, закона инерции — *Corpus omne perseverare...*), столь же мало говорит о структуре и функции закона, как сама по себе последовательность из сотни аминокислот — о физиологической роли соответствующего белка. Чтобы прочитать сообщение, закодированное такой строкой, необходимо глубоко понимать математическую природу *растворителя как поддерживающей структуры*, а также *естественную химию фактов*.

Если же в вашей голове нет подходящей математики, вы мало что, если вообще хоть что-нибудь поймёте в соответствующем законе[18].

Именно это произошло с идеями Менделя — очевидно, в то время в программу обучения биологов математика и физика не входили. Если бы вместо Негели Мендель переписывался с кем-то вроде Больцмана, Гульдберга и Вааге или Вант-Гоффа, график развития генетики, быть может, сдвинулся бы на четверть века.

Негели, Больцман, Гульдберг, Вааге, Вант-Гофф

Карл Вильгельм фон Негели (1817–1891) — ведущий ботаник XIX века, ввёл понятие *меристемы* — группы клеток растения, способных к делению; он также осознал роль последовательностей клеточных делений в морфологии растений. Но прославился тем, что стал первым в списке людей, не сумевших понять и оценить сделанное Менделем.

---

[18] Законы механики в этом отношении стоят особняком — они встроены в моторные системы мозга. *Инстинктивно* мы всегда пытаемся найти механистические объяснения (модели) всего, что нас окружает. Однако эти «законы мозга» по необходимости являются неньютоновыми — истинная ньютонова механика *инстинктивно* отвергается большинством людей (всеми людьми?), даже если формально они её понимают. (Интересно, могут ли проверить это утверждение психологи-экспериментаторы.)

Людвиг Эдуард Больцман (1844–1906) получил докторскую степень за работу по кинетической теории газов в 1866 г. — в год публикации *«Versuche über Pflanzen-Hybriden»* Менделя.

Като Максимилиан Гульдберг (математик) и *Петер Вааге* (химик) в 1864 г. выдвинули *закон действующих масс* в химической кинетике, схожий по логике с законами Менделя; их работа оставалась незамеченной, пока в 1877 г. не была переоткрыта Вант-Гоффом.

Якоб Хендрик Вант-Гофф (1852–1911) стал первым лауреатом Нобелевской премии по химии благодаря своим открытиям в области химической кинетики, химического равновесия, осмотического давления и стереохимии.

Эти люди сразу поняли бы значение полученных Менделем данных гибридизации, сходных с *законом простых объёмных отношений* для вступающих в реакцию газов, который был открыт Гей-Люссаком и описан в его статье 1808 года

> *«Sur la combinaison des substances gazeuses, les unes avec les autres»*[19].

В формулировке Авогадро этот закон утверждает, что

> *соединение газов друг с другом всегда происходит в простейших объёмных отношениях, и, когда в результате образуется газообразное соединение, его объём также находится в очень простом отношении к объёмам его составных частей.*

Больцману — горячему стороннику атомической теории вещества и энергии — особенно понравилась бы идея Менделя об *атомах наследственности*, логика которой сходна с логикой, применявшейся Авогадро при выводе закона объёмных отношений из его атомической гипотезы:

> *⟨...⟩ Количество молекул любого газа всегда одинаково в равном объёме или пропорционально объёму.*

Это то, что теперь называется законом Авогадро. Он хорошо согласуется с законом объёмных отношений, если предположить, что химические вещества состоят из отдельных идентичных друг другу единиц (атомов или молекул), но априори нельзя исключить возможность того, что эти единицы *бесконечно малы* в смысле Лейбница и, соответственно, *число* молекул в конечном объёме газа *бесконечно велико*. (Подобные *бесконечно большие/малые* числа сегодня описываются на языке *нестандартного анализа*. Например, число **SToP** можно рассматривать как бесконечно большое, а частицы массы **SToP**$^{-1}$ — как бесконечно малые.)

---

[19] «О соединении газообразных тел друг с другом» (*фр.*).

Однако же это *число* (которое сегодня определяется как число атомов в 12 граммах чистого углерода ^{12}C) оказалось конечным и не столь уж большим: число (*Авогадро*) N_A молекул в $\approx 22{,}4$ литрах газа при температуре 0°C и давлении в 1 атмосферу составляет $\approx 6 \cdot 10^{23}$. Оно также примерно равно числу молекул в 18 г воды H_2O молекулярного веса ≈ 18. Будь атомы в миллион раз меньше — так что N_A равнялось бы $6 \cdot 10^{41}$, а не $6 \cdot 10^{23}$ — идея атомов могла навсегда остаться не более чем идеей[20]. (Будь атомы настолько малы, возраста Вселенной — нескольких миллиардов лет — не хватило бы для появления клетки размером 1 мкм, а значит, и организмов нашего размера. В этом случае не могла бы возникнуть даже *идея* атомов: нет мозгов — нет и идей... разве что при маленьких атомах могли бы существовать разумные организмы размером 1 мкм.)

Идеям Авогадро относительно атомов повезло не больше, чем идеям Менделя относительно генов, — всеобщего признания им пришлось ждать много лет. Но если проблема Менделя заключалась в том, что современные ему биологи не дотягивали до необходимого уровня математических и естественно-научных познаний, то скептическое отношение к атомам физиков XIX века объяснялось их (физиков) высокими стандартами в вопросе о принятии новых идей. К примеру, Фарадей, который понимал проблему атомов не хуже Авогадро, писал:

> *Хотя об атомах очень легко говорить, но весьма трудно составить себе ясное представление об их природе, особенно когда речь идёт о сложных веществах.*

(Логическая/философская проблема атомов сильно занимала также и Лавуазье; сегодня мы знаем, что понятие атома в контексте классической (неквантовой) физики внутренне противоречиво. Но в естественных науках, в отличие от математики, противоречие не обязательно дискредитирует идею.)

Атомы и молекулы занимали умы физиков всегда. Максвелл, к примеру, писал:

> *Допуская, что объём вещества, приведённого в жидкое состояние, не слишком превышает совокупный объём молекул, мы получим из этой пропорции диаметр молекулы. Этим путём Лошмидт в 1865 г. впервые вычислил диаметр молекулы. Независимо от него и от других Стони в 1868 г. и сэр В. Томсон в 1870 г. обнародовали результаты подобного же рода, причём Томсон пришёл к своим результатам не только этим путём, но и из*

---

[20] Уменьшение линейных размеров в 10^{-6} раз означает уменьшение объёма и массы в 10^{-18} раз, и $18 = 41 - 23$.

> *соображений, основанных на рассмотрении толщины мыльных пузырей и электрических свойств металлов.*
>
> *Согласно таблице, вычисленной мной на основании данных Лошмидта, размеры молекул водорода таковы, что два миллиона их, положенные рядом, заняли бы всего миллиметр, а миллион миллионов миллионов миллионов их весили бы больше четырёх, но меньше пяти граммов.*

Быть может, Максвелл и не был стопроцентно уверен, *есть ли какая-то истина в динамической теории газов ⟨…⟩*, но в конце концов атомы победили — благодаря усилиям Больцмана и после того, как Эйнштейн и Смолуховский выписали уравнение, описывающее стохастическое, называемое *броуновским*[21], движение микроскопических частиц, взвешенных в жидкости, которое позволило оценить «размер атомов».

Идея, лежащая в основе этого уравнения, стара и проста:

> *⟨…⟩ тела основные мятутся*
> *В вечном движеньи всегда, ⟨…⟩*
> *⟨…⟩ меняют*
> *Путь свой от скрытых толчков ⟨…⟩.*
> *Так, исходя от начал, движение мало-помалу*
> *Наших касается чувств*[22].
>
> Тит Лукреций Кар, 50 г. до н. э.(?).

Однако понадобилось почти две тысячи лет, чтобы превратить поэзию в науку, переведя эти строки на математический язык.

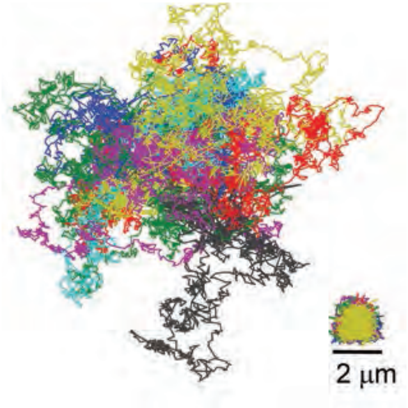
Авторами этого «перевода» в разных контекстах независимо (?) стали *Тиле* (1880 г.), *Башелье* (1900 г.), *Эйнштейн* (1905 г.), *Смолуховский* (1906 г.), *Винер* (1923 г.), причём соответствующая математика оказалась не так уж далека от *математики уровня таблицы умножения*.

(Сама идея была бы очевидна Паскалю и Бюффону, а Эйлер и/или Лаплас без труда провели бы вычисления во всех подробностях — ЕСЛИ бы только кто-нибудь из них задумался на эту тему.)

---

[21] Роберт Броун (1773–1858) не открывал броуновского движения, но дал подробное описание ядра клетки и других клеточных структур. Впервые (?) систематическое изучение броуновского движения было предпринято Яном Ингенхаузом примерно в 1785 г. (Ингенхауз также обратил внимание на роль солнечного света в процессе фотосинтеза.)

[22] Перевод Ф. А. Петровского.



Чистым ли везением или *слабым антропным принципом* объясняется тот факт, что броуновское смещение частиц можно наблюдать в оптический микроскоп с увеличением в 1000 раз?

Молекулы слишком малы, чтобы их мог различить человеческий глаз в видимом световом спектре, но их удары ощущают объекты промежуточной величины.

Скажем, молекулы воды размером около $0{,}3 \cdot 10^{-3}$ мкм *всего* (!) в 1000 раз (в два раза по логарифмической шкале, которой пользуется наше зрение) меньше мельчайших оптически различимых объектов/смещений величиной $\approx 0{,}2$ мкм. К примеру, бактерия размером в 1 мкм, будучи увеличена в 1 000 000 раз до человеческих размеров (1 м $= 10^6$ мкм), «видела» бы молекулы воды как песчинки.

Кроме того, молекулы воды движутся очень быстро: их средняя (среднеквадратичная) скорость при комнатной температуре составляет около 650 м/с $\approx 1000^3 \cdot 0{,}5$ мкм/с. (Скорость пули на вылете из ствола для большинства видов оружия колеблется в пределах 200–1200 м/с.)

То, что мы наблюдаем в реальности, — это смещения взвешенных в воде частиц под действием *множественных* столкновений с молекулами воды, из которых непропорционально большое количество движется в одном и том же определённом направлении. Частота и средний размер этих смещений связаны с числом Авогадро (или, что по существу эквивалентно, с *постоянной Больцмана*) формулой Эйнштейна — Смолуховского. (Обратная величина к *числу Авогадро* соответствует «величине объёма атома».)

Провести необходимые измерения и точно оценить константу Авогадро было делом отнюдь не простым; решить эту задачу удалось Жану-Батисту Перрену и его группе в 1913–1914 гг., и для числа Авогадро они получили значение $6{,}03 \cdot 10^{23}$. (Принятое сегодня значение, полученное с помощью рентгеновской кристаллографии монокристаллов кремния, составляет $6{,}0221\ldots\cdot 10^{23}$.)

Могут ли законы классической (*немолекулярной*) *генетики* и/или *классические законы* физики и физической химии XIX века преподнести нам ещё какие-нибудь новые и интересные сюрпризы?

Представитель естественных наук счёл бы это маловероятным, однако математик может думать иначе: мы не считаем что-либо понятым, пока оно не выражено на языке математики XXI века. Но даже задача изложения на языке математики XX века (например, в терминах римановой и/или интегральной геометрии) такой безобидной вещи, как *законы идеального газа* XVIII века, кажется весьма нетривиальной. (Математика XX века «растворяет» закон инерции в «матрице» геодезических потоков на пространствах с аффинными связностями; в XXI веке мы ожидаем от такой «матрицы» чего-нибудь поинтереснее.)

Математика служит также *пуповиной*, связывающей законы с наблюдениями, — *эмпирическая истинность* закона не видна в пассивно наблюдаемых *фактах*. Математические идеи, зачастую неявно, определяют схему и интерпретацию экспериментов.

К примеру, никто никогда не видел *тело*, движущееся само по себе прямолинейно с постоянной скоростью, — закон инерции входит в острое противоречие с тем, что мы наблюдаем вокруг. Однако без этого закона вам не удастся создать математически непротиворечивую/элегантную картину механики, например, вы не сможете записать эстетически приемлемую (скажем, задаваемую аналитическими функциями) формулу для описания галилеевских шариков, катающихся по наклонным плоскостям, не *полагая* скорость шариков *постоянной* при *нулевом* угле наклона.

Глава 5

Истина

> *Мысль никогда не должна подчиняться ни догме, ни направлению, ни страсти, ни интересу, ни предвзятой идее.*
>
> Анри Пуанкаре

Указав на наивное или даже откровенно глупое высказывание того или иного учёного прошлого, вы рискуете услышать в ответ, что сами совершаете глупость, оценивая вчерашнюю идею с сегодняшней точки зрения.

Что ж... этот аргумент был бы убедительным, если бы не такие люди, как Лавуазье, Клод Бернар, Фарадей, Пуанкаре. Их слух очень тонко улавливал научную истину — они никогда (почти никогда?) не говорили бессмысленные вещи; ошибочные — возможно, но никогда — тривиальные, бессодержательные или внутренне противоречивые.

> *Меняет ли предмет своё состояние или только положение, это передаётся нам всегда одним и тем же способом: изменением во всём составе впечатлений.*
>
> Анри Пуанкаре, «Наука и гипотеза», 1902 г.

Всё, к чему прикасался ум Пуанкаре, начинало блистать, будь то математика, физика или что-нибудь ещё. Его анализ восприятия пространства, приведённый в четвертой главе книги *«Наука и гипотеза»*, до сих пор не имеет равных по глубине и ясности. Гипотеза Пуанкаре о том, как мозг, исходя из движущихся образов на сетчатке глаза, реконструирует *апостериори евклидову* геометрию внешнего пространства с его вращательной (ортогональной[1]) симметрией, которая прекрасно согласуется с открытиями нейропсихологии XX века, бросает вызов психологам-экспериментаторам (математикам?) XXI (XXII?) века.

---

[1] *Ортогональная группа* $O(3)$ вращений трёхмерного пространства есть базовый *некоммутативный атом* геометрии нашего мира. Чтобы постичь его удивительную структуру, математикам понадобилось два с половиной тысячелетия — чтобы пройти путь от *теоремы Пифагора* до теории *групп Ли*, созданной на рубеже XX века, и сегодняшней евклидовой (эллиптической) калибровочной теории над четырёхмерными пространствами. Поразительно, но мозги всех активно движущихся животных на Земле разработали (посредством обучения?) довольно неплохие модели этой структуры.

> *⟨...⟩ Науки наблюдения — это пассивные науки. В науках экспериментальных человек ⟨...⟩ сознательно провоцирует явления, которые ⟨...⟩ следуют естественным законам, но в таких условиях, которые природа ещё не создавала.*
> *⟨...⟩ Астроном совершает активные наблюдения, т. е. наблюдения, обусловленные заранее имеющейся у него идеей о причине возмущения.*
>
> Клод Бернар, «Введение к изучению экспериментальной медицины», 1865 г.

Если вы процитируете Клода Бернара в аудитории, состоящей из математиков, они решат, что цитата, вероятно, принадлежит Пуанкаре, физики подумают об Эйнштейне или Фейнмане, биологи — о Дарвине. А кто-то, возможно, припомнит, что ровно эти же слова видел в меморандуме, подписанном несколькими нобелевскими лауреатами и опубликованном в последнем выпуске журнала «Nature».

Едва ли можно добавить что-то существенное к тому, что Клод Бернар сказал об экспериментальной науке, но его слова применимы также и к теориям, ибо построение логического рассуждения подобно разработке эксперимента.

Клод Бернар настаивал на том, что основа *активной науки* — это экспериментальные исследования, которые должны *не подтверждать, а формировать* наши идеи. Продолжая эту мысль, он мог бы сказать, что и *активная логика* должна не подтверждать наши идеи, а формировать их. Не следует решать наперёд, куда приведёт нас рассуждение; однако правила логики должны быть установлены заранее. Затем мы шаг за шагом проводим рассуждение и принимаем полученный результат, даже если он противоречит нашим исходным идеям.

Осуществить подобное почти невозможно без математики, в которой *проведение рассуждения* представляет собой что-то типа доказательства теоремы или «просто» вычисления; поразительно, как часто результат простого вычисления противоречит нашей интуиции.

Один из таких примеров — уже встречавшаяся нам формула (Менделя—) Харди—Вайнберга, которая выражает (контринтуитивную) идею о том, что (наивно понимаемая) *эволюция путём естественного отбора* может стабилизироваться уже во втором поколении[2].

---

[2] Математика этой формулы диктует необходимость перехода от дарвиновской идеи *вариации* к более абстрактному (и более адекватному) понятию, которое предвосхитил Мопертюи в своей картине Жизни. (Термин «*мутация*» для внезапно возникающих вариаций был введен Хуго Де Фризом в его двухтомной «*Мутационной теории*», 1900–1903 гг.)

Приведём ещё один пример, который заодно иллюстрирует замечание Клода Бернара о том, что, *имея своей целью унификацию, усреднения сбивают с толку*.

Предположим, что средняя вероятность успеха некой операции на мозге, проводимой в двух больницах H_1 и H_2, зависит от того, был ли отец пациента праворуким или леворуким.

Правых пациентов отправляют в больницу H_1, поскольку

в H_1 **выше вероятность успеха** для ***правых*.**

Левых пациентов также отправляют в больницу H_1, поскольку

в H_1 **выше вероятность успеха** и для ***левых***.

Однако если вы не знаете, относитесь ли вы к *левой* или *правой* категории, вас отправляют в больницу H_2, поскольку

в H_2 **выше вероятность успеха** для ***правых*** + ***левых*** вместе.

Озадачены?[3] Тогда взгляните на следующую формулу, выражающую средний коэффициент успеха S_{r+l} для *правых* + *левых* вместе через соответствующие коэффициенты для *правых* и *левых* по отдельности, обозначаемые S_r и S_l:

$$S_{r+l} = \frac{N_r S_r + N_l S_l}{N_r + N_l},$$

где N_r и N_l — количество *правых* и *левых* пациентов, подвергшихся данной операции. Теперь вы видите, как такое всё-таки *возможно* в некоторых случаях: S_{r+l} зависит не только от S_r и S_l, но также и от N_r и N_l, а эти числа могут очень сильно различаться в разных больницах.

Перефразируя Эйнштейна, можно сказать, что *законы математики надёжны, даже если они имеют отношение к реальности; это та реальность, к которой они имеют отношение, ненадёжна.*

> *⟨...⟩ искать истину только в естественной связи опытов и наблюдений, подобно тому как математики приходят к решению задачи.*
>
> Антуан Лавуазье, «Предварительные рассуждения к начальному курсу химии», 1787 г.

> *Вот вам корифей шарлатанов, господин Лавуазье.*
>
> Жан-Поль Марат, друг народа, январь 1791 г.

---

[3] Все знакомые математики отказывались верить в то, что такое может быть, но те из моих друзей, которые не были уверены в своей математической подготовке, делали вид, что допускают подобную возможность.

> *Сколь недостойные мотивы властвуют нынче, прикрываясь пышными фразами.*
>
> Майкл Фарадей

Лавуазье был арестован в ноябре 1793 г. по обвинению в торговле подмоченным табаком и гильотинирован 8 мая 1794 г. в возрасте пятидесяти лет.

Лагранж[4] так прокомментировал казнь Лавуазье:

> *Довольно было мгновения, чтобы срубить эту голову, но, возможно, Франции не хватит и столетия, чтобы произвести другую такую же.*

Клод Бернар родился в 1813 г., Анри Пуанкаре — в 1854 г.

Но кто такой Жан-Поль Марат? Он проводил многочисленные опыты и публиковал работы об огне, теплоте, электричестве и свете, которые не принимались всерьёз современным ему французским «академическим истеблишментом», в том числе Лавуазье и Кондорсе.

Некоторые историки, симпатизирующие Марату, утверждают, что согласно некоторым данным он был знающим и увлечённым исследователем, к которому во Французской королевской академии отнеслись необъективно, и несправедливо сравнивать его с такими людьми, как Месмер. (В 1784 г. Лавуазье и Бенджамин Франклин, возглавлявшие *Королевскую комиссию по расследованию животного магнетизма*, провели исторически первое контролируемое клиническое испытание и опровергли притязания Месмера.)

Может быть, и так, но очевидно, что, сколь бы *знающим* ни был Марат, он не осознавал степень своего *непонимания*. Так, он напечатал

---

[4] Лагранж (1736–1813), урождённый Джузеппе Лодовико (Луиджи) Лагранжиа, был математиком. Следы его аналитического изложения *принципа наименьшего действия* (более точного, чем у Мопертюи, и более общего, чем у Эйлера) хорошо видны до сих пор — в виде *лагранжианов динамических систем*, которые, наряду с их младшими братьями *гамильтонианами*, широко используются (вместо ньютоновых сил) во многих областях математической физики.

том в несколько сотен страниц, посвящённый исследованиям электричества, в то время как Лавуазье, полагавший, что

> *электричество не только проливает свет на грозовые эффекты, но и объясняет огромное число природных явлений,*

и размышлявший об электричестве бóльшую часть своей жизни, почти ничего на эту тему не опубликовал. Одно время Лавуазье думал, что

> *электрический флюид и магнитный флюид, подобно воде, сами состоят из двух ещё более тонких флюидов, способных соединяться и разъединяться и каким-то образом нейтрализовать друг друга,*

но не смог обнаружить достаточных экспериментальных подтверждений своим идеям и оставался в неуверенности относительно природы электричества; однако Марат полагал, что понимает, что это такое. Хочется согласиться с Лавуазье, оценившим работу Марата как малозначительную[5].

Марат отказался принять это суждение и возненавидел Лавуазье, однако не был *напрямую* замешан в расправу с ним: Марат был убит в июле 1793 г.

---

[5] Своё мнение о Марате Лавуазье мог бы выразить словами Паули: *«Я не против того, чтобы вы думали медленно; я против того, чтобы вы публиковались быстрее, чем думаете»*.

Глава 6

Жизнь

> *⟨...⟩ Равным образом невозможно представить себе костяк человека, лошади или другого живого существа слишком большой величины, который держался бы и соответствовал своему назначению; достигнуть чрезвычайной величины животные могли бы только в том случае, если бы вещество их костей было значительно прочнее и крепче, нежели обычное, или же если бы кости их изменились, соразмерно увеличившись в толщину, отчего животные по строению и виду производили бы впечатление чрезвычайной толщины.*
>
> Галилео Галилей, «Математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки», 1638 г.

Учение об *аллометрии*, рождение которого вы наблюдаете, читая процитированные строки, до сих пор ставит нас в тупик некоторыми из своих находок. Почему, например, скорость обмена веществ R животного массы M хорошо описывается *законом Клайбера*

$$R \sim M^{3/4}?$$

> *Природа предлагает множество вариаций, а выбор доверяется мастерству случая.*
>
> Пьер-Луи Мопертюи, «Физическая Венера», 1745 г.

Мопертюи обратил внимание на роль естественного отбора в процессе эволюции, наметил (не вполне менделевскую) картину наследственности, дал набросок теории мутаций и описал механизм зародышевой плазмы, близкий к вейсмановскому. Тот факт, что он был математиком, оправдывает биологов, проигнорировавших его идеи.

> *⟨…⟩ Сколько механизмов ⟨…⟩ заключено в этом маленьком кусочке материи, который составляет тело животного! ⟨…⟩ сочетаний ⟨…⟩ принципов, о которых мы можем судить лишь по их последствиям, настолько трудным для понимания, что они перестали считаться чудесами только в силу приобретённой нами привычки вовсе о них не думать!*[1]
>
> Жорж-Луи Бюффон, «Естественная история животных», 1749 г.

Бюффон нашёл интегральные формулы для вычисления вероятностей случайных событий геометрического характера. Например, согласно формуле Бюффона, если бросить иглу единичной длины на плоскость, разделённую параллельными линиями на полосы единичной ширины, то вероятность того, что игла пересечёт одну из линий, составляет $2/\pi$, где $\pi = 3{,}14\ldots$

(Это привело к появлению на свет интегральной геометрии и геометрической теории вероятностей, а также послужило вдохновением для А. Н. Колмогорова[2], заложившего в 1933 г. общепринятые в настоящее время математические основания теории вероятностей.)

Бюффон спроектировал эффективные линзы для маяков.

Бюффон изобрел конструкцию вогнутых зеркал, применяемую с тех пор уже два столетия.

Бюффон предложил первый научный сценарий образования планет, а именно описал их возникновение в результате столкновения кометы с Солнцем.

Бюффон, исходя из скорости седиментации, оценил возраст Земли в несколько (сотен?) миллионов лет, а также утверждал, что для охлаждения из первоначального расплавленного состояния Земле необходимо было не менее 75 000 лет, что он вычислил путем «масштабирования» результатов опытов по нагреванию и охлаждению железных ядер.

(Идея горячей расплавленной Земли содержалась в работах Декарта и Лейбница.)

---

[1] Не благодаря ли своему математическому образованию смог Бюффон это понять? Был ли он первым, кто это осознал? Можно ли было вообще оценить сложность Жизни и беспомощность наших попыток дать структурное описание живых существ до того, как стали доступны достижения молекулярной биологии нескольких последних десятилетий?

[2] Кроме современной теории вероятностей из работ Колмогорова выросло несколько других областей математики и математической физики XX века, в том числе *КАМ-теория* в классической (гамильтоновой) механике, стохастическая теория *турбулентности* и *энтропийная* теория динамических систем.

Бюффон дал определение вида:

> *К одному виду следует относить особей, которые посредством спаривания продолжают свой род, сохраняя общие черты данного вида ⟨...⟩. Если же плод такого спаривания сам оказывается бесплодным, как мул, то его родители относятся к разным видам. Любой другой критерий, в частности внешнее сходство, является недостаточным, ⟨...⟩ ибо мул похож на лошадь более, чем водяной спаниель на борзую.*

Оно несколько отличается от формулировки натуралиста Джона Рея, который (в 1686 г.) определил виды через их

> *⟨...⟩ отличительные признаки, которые сохраняются при развитии из семени*[3]*.*

По-видимому, Бюффона — в глубине души математика — интриговал и завораживал тот примечательный факт, что препятствие к межвидовому скрещиванию проявляется во *втором* поколении, и он определил *отношение эквивалентности* между группами организмов, которое позволило ввести понятие вида[4].

Бюффон был бы рад узнать, что математически ориентированная научная мысль близкого ему толка вернулась в биологическую таксономию в конце XX века вместе со сравнительным изучением геномных последовательностей.

Бюффон использовал своё определение для доказательства единства человеческого рода:

> *Азиаты, европейцы и негры одинаково легко производят потомство с американцами.*

Бюффон писал:

> *⟨...⟩ Равным образом можно заявить, что человек и обезьяна, подобно лошади и ослу, имеют общее происхождение, что любое животное или растительное семейство имеет общего предка и что все животные произошли от одного-единственного*

---

[3] В английском оригинале: «distinguishing features that perpetuate themselves in propagation from seed».

[4] В 1942 г. влиятельный эволюционный мыслитель Эрнст Майр воспроизвёл определение Бюффона в следующей формулировке:

> *⟨...⟩ группа скрещивающихся естественных популяций, которая репродуктивно изолирована от других подобных групп.*

Интересно, что подумал бы Бюффон об «эволюционных мыслителях» XX века, пытающихся столь хитроумно сформулировать мысль о том, что для того чтобы два организма, размножающиеся половым путём, могли иметь общее потомство, их жизненные линии должны пересекаться в какой-то точке пространства-времени.

> *животного, из которого с течением времени, благодаря усовершенствованию и вырождению, возникли все животные расы.*

Бюффон, имевший уже достаточно неприятностей с церковными властями, на письме отрёкся от этой идеи, ибо она противоречила библейской версии творения.

Он увидел бы иронию в том, что некоторые постдарвиновские эволюционные мыслители, свободно черпавшие из его идей, унаследовали от его церковных оппонентов додекартово почтение к *власти* и покорность *идеологии*[5]. Они не приняли Бюффона в свой клуб как *неверующего* в дарвинизм.

Бюффон подверг тщательному пересмотру значительную часть знаний своего времени и выработал взгляд на Природу и Жизнь, опиравшийся на широкую научную перспективу. Однако до смерти, постигшей его в 1788 г., он успел записать лишь тридцать шесть томов своей *«Histoire naturelle, gènèrale et particuliere»*[6] из запланированных пятидесяти.

(Бюффон, подобно Эйнштейну, жаловался на то, что природная лень не позволила ему достичь в науке большего.)

Идею Бюффона об оценке возраста Земли в 1862 г. перенял Уильям Томсон (Кельвин), который, вычислив скорость диффузии тепла от земной коры в её изначально расплавленном состоянии, пришёл к выводу, что возраст Земли имеет порядок не более 100 миллионов лет. (Это входило в противоречие с геологическими оценками де Майе, Лайеля и Дарвина.)

Томсон знаменит также своей работой над проектом трансатлантического телеграфа, введением понятия *абсолютного нуля* $0^\circ\text{K} \approx \approx -273{,}15^\circ\text{C}$ и идеей *тепловой смерти Вселенной*:

> *Если бы Вселенная была конечна и подчинялась существующим законам, неизбежным результатом стало бы состояние универсального покоя и смерти. ⟨...⟩ Наука же указывает скорее на бесконечный прогресс, ⟨...⟩ включающий в себя преобразование потенциальной энергии в ощутимое движение и, следовательно, теплоту.*

---

[5] Мы ценим в идеях *красоту* и *новизну*; мы ценим в людях глубину и оригинальность *понимания* нетривиальных идей. Напротив, носители той или иной идеологии (которых зачастую можно узнать по болтающемуся у них на хвосте суффиксу *-ист*) могут проявлять терпимость к тем, кого их тезисы приводят в замешательство, — ибо это потенциальные неофиты, — но их страшно возмущает любой, кто *ясно понимает и отвергает* их взгляды.

Слова Фарадея

«Нет ничего более пугающего, чем человек, знающий, что он прав»

относятся именно к таким людям.

[6] «Всеобщая и частная естественная история» (*фр.*).

Томсон прославился также фразой

> *«Летательные аппараты тяжелее воздуха невозможны»*

и характерным поздневикторианским высказыванием

> *«В физике больше нельзя открыть ничего нового»,*

которое резко контрастирует с (часто неверно цитируемым) тезисом Максвелла

> *«Мы не вправе так думать о непостижимых богатствах творения».*

Непосредственное влияние Бюффона на физику было, вероятно, весьма ограниченным, но поток идей, исходящих из его «Естественной истории», формировал умы не одного поколения биологов и естествоиспытателей вплоть до середины XX века.

> *⟨…⟩ Именно со статистической точки зрения структура важнейших частей живого организма полностью отличается от структуры любого вещества, с которым мы, физики и химики, имели до сих пор дело. ⟨…⟩ Деятельность живой материи, ⟨…⟩ по-видимому, подчиняется до сих пор неизвестным другим законам физики, которые, однако, как только они будут открыты, должны будут составить такую же неотъемлемую часть этой науки.*
>
> Эрвин Шрёдингер, «Что такое жизнь?», 1944 г.

> *Благодаря принципу непрерывности, возможно, в будущем удастся показать, что принцип Жизни является частью, или же следствием, некого общего закона.*
>
> Чарльз Дарвин, письмо Джорджу Уолличу, 1882 г.

В то время как Дарвин мечтал о неком *математическом/философском* Принципе Жизни, Шрёдингер хотел осмыслить Жизнь в свете законов физики. Но Жизнь нарушает физические симметрии/регулярности и создаёт новые[7] симметрии совершенно иной природы, например

> *удивительную закономерность, с которой повторяются одни и те же гибридные формы.*

---

[7] Не всегда ясно, что следует считать «нарушением», а что «созданием» симметрии. Например, нарушает или создаёт стохастическую симметрию в ансамблях молекул выбор биологическими системами той или иной *хиральности*?

Законы физики, очевидно, накладывают ограничения на возможную структуру и возможное поведение живых систем — в той же степени, в какой правила шахмат накладывают ограничения на перемещения фигур по шахматной доске. Однако ходы, совершаемые гроссмейстером в шахматной партии, правилами шахмат объясняются не более, чем математические теоремы — законами логики.

Можно возразить, что эти правила неплохо объясняют статистику ходов человека, играющего в шахматы впервые в жизни, — но не игрока, имеющего несколько лет практики. Именно так обстоит дело с большинством *физических систем* — они по сути начинают игру с нулевого уровня, на котором ещё применимы законы физики[8].

Но в игру «Жизнь» на Земле Природа играет уже несколько миллиардов лет. Как заметил Галилей, законы физики говорят вам, что не существует летающих слонов, но не помогают проследить путь, по которому на Землю попали *ходячие* слоны. Совместимость с законами физики — лишь крошечная часть основания для существования в биологии.

Это не случайность, что, пытаясь описывать Жизнь на языке физики, Бюффон и Шрёдингер начинают говорить поэтически[9]. Смысл великой картины Жизни кроется не в физике холста и не в химии красок.

Но разве физическое и биологическое не объединяет отличительная черта «истинной науки» — *фальсифицируемость*?

---

[8] Исключением является второе начало термодинамики: как указал Больцман, оно применимо лишь к *подготовленным состояниям* физических систем — подготовленным их *историей*. *Наивному Математику* этот закон представляется физическим следствием некой общей математической теоремы — теоремы, которую ещё никому не удалось сформулировать.

[9] Это напоминает Тревиза из книги Азимова *«Основание и Земля»*, который видит Млечный Путь как развёртку Космической Жизни.

> *Чтобы опровергнуть теорию, не нужно сотни знаменитых интеллектуалов. Достаточно одного простого факта.*
>
> Альберт Эйнштейн

Рассмотрим, например, *закон падающих тел Галилея*:

если уронить с одной и той же высоты предметы ✤, ✺ и ✣ весом в 300, 30 и 3 г, все они достигнут пола за $\approx \frac{1}{4}$ с *практически независимо от весов.*

Рухнуло бы здание классической механики, если бы в неком эксперименте один из этих предметов, скажем предмет ✺ весом в 30 грамм, прежде чем опуститься на землю, завис бы в воздухе на 10 секунд?

Ответ на этот вопрос был бы положительным, ЕСЛИ бы на Земле не было жизни. И не нужно сотни интеллектуалов — достаточно всего лишь одного *здорового взрослого воробья* в качестве ✺. Но на языке физики невозможно выразить наличие или отсутствие *жизни*.

Основное препятствие, мешающее «*свести Жизнь к Физике*», состоит не в отсутствии некого «Закона Природы», а в несовместимости контекстов, лежащих в основе языков, которые используются для описания физических и биологических явлений. То, что мы называем *физикой*, точнее *теоретической физикой*, — это не только набор математических моделей, но и множество *негласных* правил относительно того, когда, где и как эти модели следует связывать с результатами экспериментов.

Можно представить себе вселенную, в которой физические законы сильно отличаются от наших, однако населённую существами, очень похожими на нас, например виртуальный мир сложной компьютерной программы. Вероятно, очертания Жизни можно увидеть в том, как *математический порядок* (*таинственным образом*) «собирается» из простых «логических кусков», а не в самих этих кусках.

Но существует ли абстрактное понятие *системы*, подходящее для биологии?

Можно ли рассматривать клетку как *одну* физическую систему?

Каково истинное «гротендиковское»[10] определение «*единицы*» в биологии?

Некоторые аспекты жизни можно описать на языке теории вероятностей, широко применяемом в физике, но эти описания, как указывает Шрёдингер, не похожи на картины, которые мы наблюдаем в физике

---

[10] Александр Гротендик (1928–2014) — создатель и кристаллизатор корпуса фундаментальных понятий математики XX века.

и химии. *Статистика Жизни* — в отличие от *статистики не-Жизни* — характеризуется

- *неправдоподобно* ***высокой повторяемостью*** *предположительно редких и на первый взгляд независимых событий.*

Пример такой повторяемости — существование тысяч *почти идентичных* случайных на вид *сложных* белковых молекул в клетке. (Однако *две* снежинки *сложной* формы, обнаруженные в Антарктиде, никогда не будут в точности одинаковыми.)

Явление иного масштаба, имеющее несколько иную причину (причины), — наличие в лужице воды триллионов *копий* полинуклеотидных молекул (ДНК и РНК) *длиной в несколько тысяч остатков* и/или одинаковых вирусных частиц, не говоря о семи миллиардах огромных мультимолекулярных агрегатов почти неразличимых составов и форм, на двух ногах передвигающихся по поверхности Земли.

Это явление *невероятной повторяемости* частично объясняется

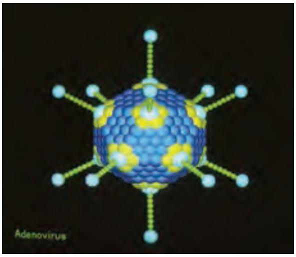
- *амплификацией редких и/или низкоэнергетических событий,* например выгодных мутаций в популяциях и химических сигналов в клетках.

(Последнее явление напоминало бы цепную реакцию горения, возбуждаемую случайной искрой, если бы не *механизмы «замок–ключ»,* всегда присутствующие в биологических системах.)

Эта амплификация также ответственна за

- *огромную разницу между «статистически средними», «важными» и «типичными» событиями/поведениями.*

В Жизни процессы часто напоминают лотерею — ничей выигрыш не близок к среднему, — что составляет разительный контраст с относительно большими *стохастически однородными* физическими системами, такими как большие объёмы газов и жидкостей, где *типичное* стремится приблизиться к *среднему*.



Во многих (но не во всех) случаях описанные черты связывают с *информацией, закодированной* в биологической системе и способной *передаваться* от одной биологической (под)системы к другой.

«Информация» — ресурс, более ценный для Жизни, нежели энергия. К примеру, икосаэдральная симметрия вирусной частицы, изображённой на рисунке, диктуется «принципом экономии информации», применяемым к информации, которую необходимо генетически закодировать для формирования этой частицы в физическом пространстве, обладающем вращательной симметрией. Так и развитию у термитов умения строить небоскрёбы, вероятно, значительно способствовала возможность *симметричной* имплементации строительной программы в *идентичных* геномах строителей.

Является ли эта *информация* поэтической метафорой или же предвосхищает нетривиальное математическое понятие?

У физики нет средств, позволяющих подступиться к подобным вопросам. Но почему — спросит читатель, вкрадчиво улыбаясь, — физикам доводилось вносить фундаментальный вклад в биологию, математикам же — почти никогда, если вообще когда-нибудь?

Я мог бы ответить на этот вопрос, но это было бы... лишь мнение.

Глава 7

Эволюция

Ничто в биологии не имеет смысла, кроме как в свете эволюции[1].

Название статьи Феодосия Добржанского, опубликованной в 1973 г.

Теперь мы, возможно, способны понять её [эволюцию] *в биологии.*

Жак Моно, «О молекулярной теории эволюции», 1975 г.

У нас есть достаточно полное понимание основного генетического состава последнего общего предка всех бактерий, который, вероятно, жил около 3,5 миллиардов лет назад.

Евгений Кунин, «Логика случая», 2011 г.

Последнее утверждение — это не очередная хитро сочинённая сказка просто так[2], но результат статистического анализа (*множественного выравнивания*) геномов из базы данных, собранных за последние десять лет и измеряемых *петабайтами* (1 петабайт = 10^{15} байтов). С петабайтной высоты *«свет»* Добржанского и *«понимание»* Моно выглядят столь же туманными, как эволюционная теория начала XX века, которую часто называют *синтетической теорией эволюции*, подогнанная под стандарты молекулярной биологии 1970-х гг.

Идеи же XVIII и XIX веков служат молекулярным биологам лишь как отсылки к стоящим за ними именам. Однако такие понятия, как *размножение — наследование — отбор — конкуренция*, по-видимому, несут в себе ещё не расшифрованные послания, которые мы сумели бы прочитать, если бы смогли перевести *естественную поэзию* былых времён

---

[1] Говоря языком математики, Жизнь на Земле становится *связной*, а значит, топологически *нетривиально* структурированной сущностью *только* при наличии *временнóй* координаты. Не эту ли связность, или *полную* топологию (геометрию?) Жизни на Земле, Добржанский называет *смыслом*?

[2] «Сказки просто так» («Just So Stories») — сборник сказок Редьярда Киплинга, в большинстве из которых речь идёт о том, как те или иные животные приняли свой нынешний облик. — *Прим. перев.*

на наш математический язык, желательно не совсем *уровня таблицы умножения*.

> *First forms minute, unseen by spheric glass,*
> *Move on the mud, or pierce the watery mass;*
> *These, as successive generations bloom,*
> *New powers acquire and larger limbs assume;*
> *Whence countless groups of vegetation spring,*
> *And breathing realms of fin and feet and wing.*
>
> *Сперва в мельчайших формах всё росло,*
> *Не видимых и в толстое стекло,*
> *Которые, кишa, скрывались в иле*
> *Иль водяную массу бороздили;*
> *Но поколенья множились, цвели,*
> *Усилились и члены обрели;*
> *Восстал растений мир, и средь обилья*
> *Разнообразной жизни в ход пошли*
> *Животных ноги, плавники и крылья*[3].

Эразм Дарвин, «Храм природы», 1802 г.

> ⟨...⟩ *Кажется почти невозможным представить себе, что самые сложные органы и инстинкты могли быть усовершенствованы* ⟨...⟩ *путём кумуляции бесчисленных незначительных вариаций.* ⟨...⟩ *Тем не менее,* ⟨...⟩ *все части организации и инстинкты представляют по крайней мере индивидуальные различия, борьба за существование ведёт к сохранению полезных уклонений в строении или инстинкте.*

Чарльз Дарвин, «Происхождение видов», 1859 г.

Несколькими страницами далее Дарвин пишет:

> ⟨...⟩ *В сотворение миллионов существ так же легко поверить, как и в сотворение одного, но философская аксиома «наименьшего действия», высказанная Мопертюи, невольно склоняет ум в пользу малого числа.* ⟨...⟩ *Аналогия заставила бы меня сделать ещё один шаг — допустить, что*

все животные и растения происходят от одного общего прототипа.

Это звучит почти как математическое утверждение! Пифагору понравилась бы столь совершенная формулировка идеи эволюции. Он мог

---

[3] Перевод Н. А. Холодковского.

бы узнать о ней от Анаксимандра и сформулировать почти так же, как это сделал Дарвин.

Теорема 1. *Любые два организма на Земле, будь то растения, животные или люди, имеют общего предка.*

Но сквозь пучину времени до нас дошло лишь пифагоровское следствие:

> *До тех пор, пока человек продолжает быть безжалостным истребителем низших живых существ, он никогда не обретёт здоровья и покоя. Ибо до тех пор, пока люди будут резать животных, они будут убивать друг друга.*

Дарвин, ненавидевший рабство любого рода, добавляет:

> *Животных, которых мы сделали нашими рабами, мы не хотим принимать как равных.*

Ламарк, Дарвин и Уоллес тщательно изучили и систематизировали огромное количество материала, отчасти ими же и собранного, что привело их к вере в изменение видов и эволюцию в целом. Дарвин и его последователи решили представить свои идеи широкой публике, сформулировав их на языке политэкономии: *конкуренция за ресурсы, борьба за существование* и т. п. Такой подход был хорошо воспринят их викторианской аудиторией, знакомой с *«Богатством наций»* Адама Смита и подготовленной к эволюционным идеям книгой *«Следы естественной истории творения»*, анонимно опубликованной в 1844 г. Робертом Чамберсом.

Но по-настоящему *доказать* **теорему 1** удалось лишь сто лет спустя, с появлением молекулярной биологии и техники секвенирования, которые выявили *однозначное* структурное сходство между молекулярными архитектурами всех живых клеток.

Каждый, кто в состоянии *понять* теорему Пифагора, *поймёт* и то, что подобная степень сходства не может ни возникнуть случайно, ни явиться следствием какой-либо *конвергентной эволюции*. *Убеждать* больше никого не нужно, и можно отбросить разговоры о *борьбе за существование, выживании наиболее приспособленного* и *созидательной силе отбора*. Теперь, когда накопились данные о геномах и молекулярной структуре, всё, что вам нужно, — это, в терминологии Харди, *немного математики уровня таблицы умножения*.

(Дарвиновская *метафора борьбы за существование* применима — вне всякой возможности буквального толкования — к *числам* $R_1 > 1$ и $R_2 > 1$: в формуле $\sqrt[T]{R_1^T + R_2^T}$, если время T велико, выживает большее из двух чисел. Но, применяя данную метафору к животным, скорости размножения которых выражаются этими числами, вы можете получить неверное представление о происходящем.)

Однако **теорема 1** порождает две проблемы.

1. Из неё логически (и очевидно) следует, что

существовала первая *протоклетка*, от которой произошли все остальные клеточные организмы (вирусы?), где приставка *«прото»* есть сокращение от *«понятия не имею, о чём я тут говорю»*[4].

2. Второй вопрос таков.

Где скрытая красота? Какие физические/химические/биологические механизмы кроме наследственности управляют эволюцией?

Идею (мнение?[5]) о ЕСТЕСТВЕННОМ ОТБОРЕ можно свести к одному-единственному слову:

НИКАКИЕ[6],

ибо *потенциально экспоненциальная* скорость роста популяций позволяет *случайным* изменениям охватить *все* возможности; Природе/среде достаточно лишь *отбирать* те из них, которым она отдаёт предпочтение.

Дарвин настаивал также на том, что последовательные шаги эволюции совершаются путём *малых* изменений[7]. Он утверждал, что такие изменения имеют больше шансов оказаться безвредными; кроме того, в этом случае повышается вероятность (более или менее) одновременного появления нескольких, скажем двух, изменений, которые благоприятны лишь совместно.

(Вопреки тому, что подумал бы Дарвин, важнейшие переходы в эволюции были связаны не с накоплением *точечных мутаций*, но с *резкими* и значительными перестройками геномов, включающими *дупликацию генов и целых геномов*. Например, расхождение линий человека и шимпанзе, случившееся около пяти миллионов лет назад, вероятнее всего, было вызвано *слиянием двух хромосом*: у человекообразных обезьян насчитывается 24 пары хромосом, а у человека — только 23 пары.)

---

[4] Возраст Земли составляет около 4,5 миллиардов лет, а *кислородная революция* в земной атмосфере произошла примерно 2,5 миллиарда лет назад. Существуют ископаемые останки многоклеточных организмов, возраст которых насчитывает ≈2 миллиарда лет, и следы докислородных бактерий возрастом ≈3,5 миллиарда лет. Но когда и как протекала эра протожизни?

[5] Настойчивое выражение идеи, существующей несколько десятилетий, классифицируется как *мнение*.

[6] Данный ответ приводит на ум знаменитый апокрифический ответ Лапласа Наполеону: *«Сир, я не нуждаюсь в этой гипотезе»*.

[7] Западная идея градуализма восходит к Милону Кротонскому, сподвижнику Пифагора, который примерно в 540 г. до н. э. развил невиданную силу, нося на плечах телёнка, постепенно выросшего в быка.

Кроме того, Дарвин предложил несколько сценариев, описывающих, как те или иные эволюционные приобретения, такие как глаз позвоночных животных, могли постепенно возникнуть в результате отбора.

Однако Пифагор заметил бы, что из того, что *X не невозможно*, не следует, что *X верно*, например в случае, когда *X* — это *отбор и ничего более*[8], и что истинная биологическая проблема скрывается за пренебрежительным *«кроме»*, прицепленным к *наследственности*.

На самом деле до развития клеточной/молекулярной биологии, которое началось в конце XIX века, никто и близко не мог себе представить безмерность и красоту подспудной структурной сложности Жизни, а значит, и наследственности. Даже сегодня, скажут некоторые, мы не достигли того уровня, когда фраза *«Я знаю, что я ничего не знаю»* в устах биолога не будет лишь пустыми словами. Но ещё в начале XIX века некоторые, как ранее Ламарк (но не Мопертюи), верили в правдоподобность самопроизвольного зарождения червей из грязи.

Эта вера имела под собой логическое основание: наличие богатой флоры паразитических червей в кишечнике Адама противоречило бы идее Эдема. Но к концу XIX века (почти) всем стало ясно, что «самопроизвольное зарождение» одной-единственной клетки червя не более вероятно, чем самопроизвольное возникновение *пирамиды Хеопса* — первого из семи чудес света — из камней, песка и грязи в результате некоторого естественного физического процесса, произошедшего около сорока пяти веков назад.

В конце концов накопление данных о *делении клетки*, в частности открытие *мейоза* (деления клетки для производства *гамет*, например спермы и яйцеклеток у животных) Оскаром Хертвигом в 1876 г., привело к идее *зародышевой плазмы*, выдвинутой Августом Вейсманом примерно в 1890 г., которая повернула развитие эволюционной теории в сторону *активной науки* в смысле Клода Бернара.

В современных терминах *принцип Вейсмана* утверждает следующее:

геномы меняются, но организмы отбираются.

(Чтобы подтвердить свою идею и опровергнуть Ламарка, Вейсман отрубал хвосты нескольким сотням мышей на протяжении около двадцати поколений и не обнаружил ни одной мыши, родившейся без хвоста[9].)

---

[8] Сам Дарвин в *«Происхождении видов»* 1872 года издания писал:

> *Я убеждён, что естественный отбор был главным, но не исключительным фактором модификации.*

Однако, подобно пророчествам дельфийского оракула, это утверждение допускает много интерпретаций.

[9] Ламарк заметил бы, что если бы Вейсман совершал эту процедуру с сотнями миллионов мышей на протяжении сотен миллионов поколений, то хвосты бы выродились,

Вскоре после этого были переоткрыты идеи Менделя и началось взрывное развитие генетики, а затем и молекулярной биологии. Акцент теории эволюции сместился от организмов к геномам.

Мы хотим узнать, как геномы «летают», как работают их «моторы». Мы верим, что это приблизит нас к пониманию того, как они противостоят враждебным ветрам конкуренции и отбора. (Но не заходит ли эта метафора слишком далеко в применении к естественному отбору? Если, например, считать, что основным фактором в обеспечении безопасности полёта является *отбор* авиакомпании, можно ли всерьёз утверждать, что этот отбор — основной фактор, благодаря которому самолёт благополучно держится в воздухе? Если нет, то как можно, следуя Дарвину, считать естественный отбор *основным* фактором эволюции?)

Грубую качественную картину эволюции геномов даёт простая математика *смещённых* (несимметричных) *случайных блужданий* с *поглощением* на *конечных* (но очень больших) *графах*, вершины которых представляют геномы, а поглощение соответствует вымиранию/отбору. Но мы всё ещё далеки от *формулировки* ***теоремы 2***.

В естествоиспытателях былых времён, особенно в Дарвине, поражает то, что без опоры на какие-либо эксперименты и/или количественные рассуждения им удавалось построить согласованную картину больших фрагментов Природы, причём иногда это удавалось им (буквально) в сотни раз лучше, чем самым блестящим физикам, астрономам и математикам того же времени.

К примеру, Дарвин и его друг геолог Чарльз Лайель, следуя идеям, восходящим к работе Джеймса Геттона, оценили (немного по-разному) возраст Земли, установив, что он составляет по крайней мере несколько сотен миллионов лет. (Примерно за сто пятьдесят лет до того Бенуа де Майе нашёл, что возраст Земли насчитывает примерно два миллиарда лет, оценивая скорость образования осадочных пород и земной коры, но его рассуждения считались плохо обоснованными.)

как выродились глаза рыб, обитающих в тёмных пещерах. Он также предположил бы, что если бы Вейсман совершал эту процедуру с сотнями миллионов поколений ящериц, то вместо хвостов те начали бы отращивать вторую голову, ибо одной было бы явно недостаточно, чтобы осознать научную значимость подобного эксперимента.

С другой стороны, Уильям Томсон (Кельвин), Герман Гельмгольц и Саймон Ньюкомб получили результат примерно в тридцать миллионов лет, оценив время, необходимое Земле, чтобы охладиться из расплавленного состояния, и Солнцу, чтобы нагреваться и излучать энергию за счёт гравитационного сжатия. Если бы физики восприняли Геттона, Лайеля и Дарвина всерьёз, они могли бы прийти к идее массы–энергии за несколько десятилетий до того, как в 1896 г. Беккерель открыл радиоактивность, а в 1905 г. Эйнштейн вывел формулу $E=mc^2$.

Размышляя же о том, что

> *выживает не сильнейший, и не умнейший, а наиболее приспособленный к изменениям,*

начинаешь подумывать, не сбудутся ли эти слова через несколько сотен лет, когда Человек покончит с многоклеточной жизнью и Землю захватят наиболее приспособленные к изменениям — протисты, бактерии и вирусы.

(Успокоим читателя: эта широко распространённая цитата *ошибочно* приписывается Дарвину; он не был ни настолько глуп, ни *настолько* пессимистичен относительно будущего человечества.)

О ГЕТТОНЕ, ЛАЙЕЛЕ, ГЕЛЬМГОЛЬЦЕ И НЬЮКОМБЕ

Джеймс Геттон (1726–1797) осознал роль подземного тепла в процессе формирования новых гор, за которым следует постепенный процесс выветривания и эрозии в сверхдлинном геологическом масштабе времени — на *la route éternelle du temps*[10], как пишет Бюффон в трактате *«Эпохи природы»*, опубликованном в 1778 г. (Многие из этих идей, включая идею эволюции, присутствуют в книге *«Протогея»*, написанной Готфридом Лейбницем между 1691 и 1693 г. и опубликованной в 1749 г. К примеру, Лейбниц пишет: *«Шар Земли ⟨...⟩ затвердел из жидкого состояния, движущей силой к чему послужил свет или огонь».*)

Геттон полагал, что геодинамика Земли носит циклический характер, а время неограниченно простирается в прошлое и будущее. В вопросе об эволюции Жизни он соглашался с главенствующей ролью отбора в том, что мы теперь называем *микроэволюцией*, но, в отличие от Дарвина и Уоллеса, отрицал её в *макроэволюции*.

Чарльз Лайель (1797–1875) был активным сторонником градуализма в геологии, его униформистские идеи повлияли на Дарвина.

Герман фон Гельмгольц (1821–1894) изобрёл *офтальмоскоп* для исследования внутренности глаза и *резонатор Гельмгольца* для определения частот звуковых волн.

---

[10] Вечной дороге времени (*фр.*).

Гельмгольц измерил скорость распространения нервных импульсов и разработал математические и эмпирические теории восприятия глубины, цвета, звука и движения.

Описывая механические основы термодинамики, Гельмгольц сформулировал *закон сохранения энергии*, а также ввёл понятие *свободной энергии Гельмгольца*.

Относясь к числу тех редких учёных, чьи открытия находили немедленное применение, он тем не менее утверждает:

> *Любой, кто, занимаясь наукой, ищет немедленную практическую пользу, может быть уверен, что ищет напрасно.*

По словам Максвелла,

> [Гельмгольц,] занимаясь физикой и физиологией, приобретает тем самым не только умение решать задачи, но и мудрость знать, в чём эти задачи состоят.

Саймон Ньюкомб (1835–1909) осуществил точное измерение скорости света. Он открыл то, что теперь известно как *закон Бенфорда*: в данных, взятых из «реальной жизни», с единицы начинается больше чисел, чем с любой другой цифры. Ньюкомб полагал, что современная ему астрономия приближается к своему пределу, и, подобно Томсону, скептически относился к *летающим машинам*.

> *⟨…⟩ Те, кто более всего отклоняются от наиболее приспособленной конституции, вероятнее всего подвержены гибели, в то время как ⟨…⟩ те организованные тела, которые более всего приближаются к наилучшей для данных обстоятельств конституции, будут ⟨…⟩ умножать свою расу.*
>
> Джеймс Геттон, «Исследование принципов знания и прогресса разума, от смысла к науке и философии», 1794 г.

> *And love Creation's final law*
> *Tho' Nature, red in tooth and claw.*
>
> *Любовь — Творения венец,*
> *Но ал и коготь, и резец*[11].
>
> Альфред Теннисон, «In Memoriam A.H.H.», 1849 г.

---

[11] Перевод А. Шапиро.

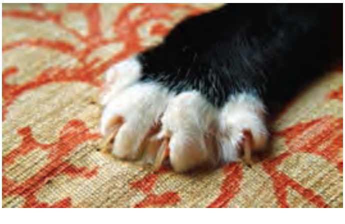
> *Мощные втягивающиеся когти соколиных и кошачьих ⟨...⟩; ⟨...⟩ дольше всего выживали те, кто обладал наилучшими средствами для захвата добычи.*
>
> Альфред Рассел Уоллес, «О тенденции вариететов неограниченно отклоняться от исходного типа», 1858 г.

Зубы, клешни, когти... — но у Матери-Природы есть и более нежные изобретения, одновременно и более существенные для выживания её детей.

У всех животных уровень смертности максимален до достижения ими зрелости. Если вам случилось быть птицей или млекопитающим, ваше выживание на 100 % зависит от ваших родителей. Не хватает материнского молока — и вы погибнете задолго до того, как узнаете, зачем вам когти.

Но трудно представить себе, как Природе удалось осуществить *одновременную* эволюцию нескольких *внутренне не связанных* (?) функций, например физиологии + психологии котёнка и *того же* животного уже в роли матери-кошки, при том, что всё должно функционировать *согласованно*. (Дарвиновская апелляция к постепенности эволюции без детального/количественного анализа данных едва ли приемлема в качестве объяснения для более чем двух «элементарных функций»[12].)

Но, как бы то ни было, Уоллес был великим (величайшим?) натуралистом XIX века. Он собрал в Индонезии и Малайзии более 100 000 образцов и открыл более тысячи новых видов, например *летающую лягушку Уоллеса*.



Не меньше Дарвина он размышлял о том, как и почему виды превращаются в новые виды и почему разделение между видами является столь резким[13]. Он пришёл к той же теории естественного отбора, что

---

[12] Исход любого подобного анализа будет зависеть, в частности, от относительного размера атомов и молекул по сравнению с клетками.

[13] Эта резкость, т. е. *дизъюнктность* соответствующих *аттракторов в динамике эволюции*, вероятно, обусловлена наличием в этой динамике петель обратной связи. Отрицательная обратная связь сдерживает распространение аттракторов, т. е. внутривидовую

и Дарвин, но, по-видимому, мыслил более экологически. Свидетельством тому является уоллесовский принцип саморегуляции в животных популяциях:

> *Действие этого принципа в точности аналогично действию центробежного регулятора парового двигателя, который контролирует и исправляет любые нерегулярности по сути до того, как они проявляются; подобным же образом никакой несбалансированный изъян в животном царстве не может достичь сколь-либо заметной величины, ибо он почувствуется на самом начальном этапе, сделав существование соответствующего организма трудным, а его скорое вымирание почти неизбежным.*

Не знаю, понимали ли Уоллес или Дарвин, что *саморегулируемое* (имеющее отрицательную обратную связь) равновесие может быть колебательным, как в случае *уравнения Лотки—Вольтерры*[14]. Но Уоллес представил разгромный анализ влияния, оказанного европейскими колонистами на экологию острова Св. Елены (прославившегося благодаря Наполеону, который его *не* изучал), и его последствий для равновесия.

Возражая Дарвину, Уоллес отверг поверхностное сходство между искусственной селекцией и естественным отбором в дикой природе:

> *⟨…⟩ Вариететы, полученные в состоянии одомашненности, более или менее нестабильны и часто имеют тенденцию, будучи предоставлены самим себе, возвращаться к нормальной форме родительского вида; эта нестабильность считается отличительной чертой всех вариететов, даже тех, что встречаются у диких животных в естественном состоянии, которая обеспечивает сохранение изначально сотворённых видов.*

Современная точка зрения (если я правильно её понимаю) состоит в том, что *нестабильность одомашненности* и межвидовая изменчивость в целом объясняются преимущественно *кроссинговером* генов в процессе мейоза, который, в отличие от мутации, является (квази)обратимым.

Уоллес, который ничего этого знать не мог, дал объяснение с точки зрения науки XIX века:

изменчивость, а цепи положительной обратной связи заставляют различные аттракторы (соответствующие различным видам) отдаляться друг от друга.

[14] Это дифференциальное уравнение в середине 1920-х гг. использовали в качестве модели для систем «хищник–жертва» математический химик Альфред Лотка и, независимо от него, математик Вито Вольтерра. Ранее аналогичное уравнение в 1838 г. ввёл математик Пьер Ферхюльст для описания числа индивидуумов, которых способна прокормить среда. Ещё ранее, в 1766 г., Даниил Бернулли, побуждаемый дискуссиями вокруг вакцинирования, решил уравнение подобного типа, изучая распространение эпидемии оспы.

> *Оказавшись в диких пампасах, такие* [одомашненные] *животные вскоре, вероятно, вымрут, или же, при благоприятных обстоятельствах, потеряют те экстремальные* [искусственно селекционированные] *свойства, которые никогда бы сами не осуществились, и через несколько поколений вернутся к обычному типу.*

Не поразительно ли, что эти два объяснения едва ли имеют хоть что-либо общее?

Первое из них было немыслимо сто пятьдесят лет назад. Оно опирается на данные клеточной/молекулярной биологии, полученные в результате множества технически изощрённых экспериментов, исходы которых никоим образом нельзя было предсказать заранее.

С другой стороны, уоллесовское рассуждение, опирающееся на здравый смысл, могло бы принадлежать Ламарку, который вместо *отбора* (неявно подразумеваемого в приведённой выше цитате) говорил бы об *адаптации*, и даже Аристотелю, у которого выбор терминов носил бы *откровенно* телеологический характер[15].

(Телеология встроена в человеческий язык и самопроизвольно выскакивает в наших рассуждениях, когда мы меньше всего этого ожидаем, особенно в эволюционной биологии и психологии[16]. Даже Дарвин, многие годы боровшийся с телеологическим мышлением в биологии, пишет:

> *Естественный отбор не может создавать какую-либо модификацию исключительно ради полезности для другого вида.*

---

[15] Аристотель подразделял «объяснительные причины» на четыре категории: *материальные, формальные, активные/воздействующие* и *конечные* причины; последняя категория соответствует чему-то типа наших *телеологических* причин. Нахальством было бы даже *спрашивать* о том, что *в точности* Аристотель понимал под этими «причинами» и каков был бы его взгляд на их соответственные роли в процессе эволюции; и всё же эта классификация очень вдохновляет. Например, она помещает концепцию эволюции, даваемую современной стохастической динамикой геномов, в ту же «материальную/активную категорию», что и ламаркианские идеи о средствах и причинах эволюционных изменений организмов, в то время как «объяснения через отбор» отправляются в «формальную категорию».

[16] Перефразируя фон Брюкке и/или Холдейна, можно сказать, что

> *для эволюционного биолога телеология — что любовница: он не может без неё жить, но опасается быть застигнутым в её обществе математическим физиком.*

Эрнст Вильгельм Риттер фон Брюкке (1819–1892), наряду с Клодом Бернаром и Германом Гельмгольцем, может считаться отцом современной физиологии. Среди множества прочего он изучал, как меняют цвет хамелеоны и как производятся звуки европейских и восточных языков.

Джон Бёрдон Сандерсон Холдейн (1892–1964) стал, наряду с Рональдом Фишером и Сьюэлом Райтом, одним из основателей *популяционной генетики*, т. е. менделевской динамики в *микроэволюционном контексте*.

По логике, любое объяснительное нетелеологическое высказывание об эволюции, содержащее слово *«ради»*, должно быть либо бессодержательным, либо внутренне противоречивым.)

Скептически относился Уоллес и к мощной дарвиновской идее *полового отбора*. Очевидно, он находил её чрезмерно мощной. С её помощью можно объяснить практически всё что угодно:

> *Тот или иной признак развивается, потому что он нравится противоположному полу.*

(*Это освобождает от необходимости думать*, сказал бы Пуанкаре.)

Так, например, Уоллес установил истинную роль того, что теперь называется *предупреждающей окраской у животных*, которую Дарвин исходно приписывал половому отбору.

Существенной точкой расхождения между Уоллесом и Дарвином была главенствующая роль отбора, в частности полового отбора, в *человеческой* эволюции, которая заняла всего от 200 000 до 2 000 000 лет, в зависимости от того, откуда начинать отсчёт.

> *Первоначально человек произошёл от животных другого вида, так как прочие животные скоро начинают самостоятельно добывать пищу, человек же один только нуждается в продолжительном кормлении грудью. Вследствие этого первый человек, будучи таковым, никак не мог бы выжить*[17].

Трудно не согласиться с тем, что половой отбор *является* наиболее вероятной причиной, скажем, изощрённого ритуала ухаживания у птиц, — только подумайте о павлине, несущем бремя своего «бесполезного» хвоста. Однако расходным материалом могут служить лишь (взрослые?) самцы: рискованное для матерей деторождение и затяжное детство кажутся слишком высокой платой за большой человеческий мозг.

По-видимому, эволюция мозга + языка прошла через петлю положительной обратной связи. Такими петлями, положительными или отрицательными, должны изобиловать системы «организмы–среда», ибо организмы меняют/формируют среду. (Взаимодействие между противоположными полами одного вида даёт базовый пример такого рода; положительные петли обнаружить легче, потому что они способствуют половому отбору[18].)

---

[17] (Псевдо?)-Плутарх (II век?) приписывает эту фразу Анаксимандру, 610–546 гг. до н. э.

[18] *Развитие оперения у самцов и сексуальное предпочтение такого развития у самок должны, таким образом, прогрессировать вместе, и до тех пор, пока этот процесс не будет сдерживаться суровым контротбором, он будет нарастать ⟨...⟩ в геометрической прогрессии.* — Рональд Фишер.

Помимо партнёров, очевидную среду индивидуума на ранней стадии эволюции человеческого мозга составляло его *племя, определяемое наличием общего языка*:

> в сообществе ораторов и слушателей отбор
> благоприятствует тем, кто говорит наиболее отчётливо.

Кроме того, сами эти племена стали *единицами отбора*, причём известно, что в случае популяции, разделённой на N конкурирующих тесно связанных групп, эволюция ускоряется со значительным коэффициентом. (*Математика уровня таблицы умножения* подсказывает, что этот коэффициент может практически достигать значения N, но насчёт этого я не уверен.)

Сам Уоллес утверждал, что за появление у людей высших когнитивных способностей должно отвечать *нечто трансцендентное*. Это утверждение не выглядит *научным*, если только не трактовать *«нечто трансцендентное»* как

> *простую, хотя и абстрактную структуру, лежащую в основе человеческого мышления и достижимую эволюционным путём.*

Замечательный пример подобной структуры — *эффект запечатления у молодых животных* — был описан в 1872 г. в статье Дугласа Сполдинга. Это открытие ознаменовало собой рождение психологии как *науки*, отдельной от нейрофизиологии, и... результаты Сполдинга разделили судьбу идей Менделя — их игнорировали на протяжении нескольких десятилетий.

Привлекательность данной структуры для теоретически мыслящего *Наивного Математика*, как и для практически мыслящей Матери-Природы с её бесхитростной стратегией эволюции путём отбора, состоит в *универсальности* эффекта запечатления: детёныш животного (определённого класса видов) принимает за мать первый движущийся объект, *чем бы он ни был*. (Не из-за этой ли простоты запечатления, выявленной Сполдингом и привлекающей математиков, её так мало уважают психологи?)

Быть может, многие (все?) фундаментальные модели/единицы человеческой/животной психологии/этологии относительно просты/универсальны с математической точки зрения, а значит, достижимы эволюционным путём. Но они могут не иметь очевидных непосредственных проявлений и с трудом поддаваться обнаружению в прямых экспериментах[19].

---

[19] Ещё одна такая модель, *эффект ястреба/гуся*, представляет собой поведенческую реакцию детёныша животного, который приучается не бояться *часто* наблюдаемых фигур, скользящих над головой.

> *Развитие жизни, последовательность её форм, точное определение того, какие из них появились первыми, одновременное рождение некоторых видов, их постепенное вымирание помогут нам, быть может, понять суть организма.*
>
> Жорж Кювье, «Исследования ископаемых костей четвероногих», 1812 г.

Кювье был волшебником палеонтологии и сравнительной анатомии:

> *⟨...⟩ Изучив одну-единственную кость, человек* [скромно говорит он о себе] *зачастую может определить класс, а иногда даже и род животного, которому она принадлежала, особенно если эта кость из головы или конечности. ⟨...⟩ Потому что число, расположение и форма костей, составляющих каждую часть тела животного, всегда находятся в определённом отношении ко всем другим частям таким образом, что — до некоторой степени — по любой из них можно сделать вывод о целом и наоборот.*

Проведённый Кювье анализ ископаемых останков был основным источником эволюционных теорий XIX века, но Кювье отвергал идею постепенного преобразования видов, выдвинутую Ламарком, ибо палеонтологические данные свидетельствовали скорее о резких, нежели постепенных изменениях, и к предложенным Ламарком механизмам эволюции он относился с презрением.

Принял бы Кювье естественный отбор в качестве научно обоснованного решения проблемы эволюции? Имел бы Гексли — *бульдог Дар-*

Структура *запечатления* и *эффекта ястреба/гуся* выглядит не такой простой, если хотеть докопаться до сути. Чтобы понять проблему, попытайтесь честно описать её на *языке мозга* — в терминах сетчаточных образов и/или свойств потоков сигналов, получаемых центрами обработки изображений в мозгу.

вина, как его называли, — шансы выстоять против аргументов, которые мог бы выдвинуть Кювье?[20]

(Томас Генри Гексли — вероятно, второй великий сравнительный анатом после Кювье — одержал победу над епископом Уилберфорсом в публичном диспуте об эволюции. Но то была риторика, а не наука.)

Разрывы в палеонтологической летописи, которые ставили в тупик Кювье, до сих пор остаются загадкой, и, быть может, его идея о важной роли *геологических катастроф* в управлении эволюцией верна. Кто знает, если бы не происходили катастрофы, если бы Земля двигалась во времени, не натыкаясь на выбоины и кочки, — этакое приятное, гладкое и беспрерывное путешествие, — может, Природа удовольствовалась бы докембрийскими медузами, не испытывая нужды в роскоши «высших» растений, животных и людей?

> *Растения представляют собой живые, организованные тела, части которых никогда не обладают раздражимостью. Они не переваривают пищи и не способны двигаться ни под влиянием воли, ни вследствие истинной раздражимости.*
>
> Жан-Батист Ламарк, «Философия зоологии», 1809 г.

Определение, достойное так называться, — математики узнали это от Александра Гротендика — представляет собой не сжатую формулировку того, что всем известно, а стрелку, указывающую путь к неизвестному. То, что выросло из семян идей, содержащихся в его определениях, принесло множество неожиданных плодов.

Ламарк никогда не читал Гротендика. Его определение не только упускает из виду движущиеся плотоядные растения, такие как *венерина мухоловка* (о которой Ламарк, без сомнения, знал); его критерии неприменимы к большей части древа жизни. Две мелкие веточки этого древа — растения и животные — неудачные представители (преимущественно одноклеточной) жизни на Земле.

Трагедия Ламарка состояла в том, что над входом в построенное им здание эволюционной теории он вывесил неверные знаки. Подобно Колумбу, который, стоя на берегу новой земли, принял *Америку* за *Индию*, Ламарк вместо *«отбор»* по ошибке написал *«адаптация»*.

Хуже того, в отличие от своих последователей-эволюционистов, Ламарк предложил несколько биологических механизмов эволюции. «Не-

---

[20] Кювье не испытывал бы проблем с (додарвиновской) концепцией *очищающего отбора*, который подобен выветриванию, сглаживающему формы древних гор и холмов, но тезис о *«созидательной мощи отбора в формировании видов»* звучал бы для него не менее странно, чем утверждение о *«созидательной мощи эрозии в формировании гор»*.

достатком» его идей было то, что они содержали в себе научные (*материальные* и/или *воздействующие* в терминологии Аристотеля) ингредиенты, что позволяло проверить их экспериментально; и эти ингредиенты оказались (по существу, но не полностью) неверными[21].

Если считать само собой разумеющимся чудо адаптации организмов к окружающей среде на протяжении их жизни, можно с тем же успехом принять ламаркианскую идею адаптации на эволюционной временнóй шкале посредством некого нетелеологического (?) механизма, позволяющего потенциальному будущему воздействовать через окружающую среду на некоторые внутренние процессы, происходящие в организме, благоприятным для потомков этого организма образом.

Эта идея не создаёт логических проблем во многих случаях, когда *отбор* и *адаптация* взаимозаменяемы в качестве «объяснений» эволюции; однако, как отмечает Дарвин, ни один конкретный обусловленный окружающей средой механизм (например, предложенный Ламарком) не выглядит правдоподобно в том, что касается *эволюции режима воспроизводства* — этой наиболее важной характеристики любого вида. (Пример подобного «неламаркианского» свойства — это *устойчивость соотношения полов* 1:1 у таких видов, как морской слон, у которых самцы обладают гаремами в несколько десятков самок.) Другая «неламаркианская картина» наблюдается, что тоже отмечено Дарвином, в *эволюции общественных насекомых*. (Однако в том, что касается

---

[21] Некоторые дарвинисты так радуются, находя нестыковки у Ламарка, будто бы те придают бóльшую основательность их собственным теориям.

фольклорной идеи о наследовании приобретённых признаков, между Ламарком и Дарвином существенных разногласий нет.)

Говоря на языке геометрии, связность Жизни на Земле вдоль временно́й координаты, которая обеспечивается наследственными связями между организмами, является весьма слабой, в отличие от мощной пространственной связности/единства отдельных организмов.

Но можно ли *напрямую* опровергнуть идею Ламарка об адаптации и показать, что благоприятные мутации происходят *раньше* тех изменений окружающей среды, которые делают их благоприятными? Разглядывая окаменелые останки вымерших животных, этого не сделаешь.

Однако в 1943 г. Сальвадор Лурия (биолог) и Макс Дельбрюк (физик) придумали эксперимент, логика и красота которого восхитили бы Грегора Менделя. В общих чертах он заключается в следующем.

Вырастим колонию в миллиард бактерий, начав с одной-единственной клетки, например обожаемой бактериологами кишечной палочки E. coli. (E. coli заселяет ваш кишечник в течение нескольких часов после вашего рождения, переключается из аэробного режима в анаэробный, прилипает к слизистой оболочке и живёт там до самой вашей смерти.)

Предположим, что при воздействии на такую колонию некоторого смертельного для клеток фактора X (например, бактериофага T1 — лучшего друга E. coli) существует всё же маленькая вероятность, скажем $p_1 = 0{,}02$, что какая-то клетка выживет. Выживание клетки есть результат мутации, придающей ей некое новое свойство П, проявляющееся в устойчивости мутанта к фактору X. Более того, и это существенно, свойство П передаётся всем потомкам нашей П-клетки.

Если применить эту процедуру, скажем, к тысяче различных колоний, то примерно в двадцати из них обнаружатся уцелевшие клетки. Забудем про вымершие колонии и посмотрим, в скольких из оставшихся уцелели *две* (или более) бактерии. Существуют две гипотетические альтернативы.

1. *Ламарковская адаптация.* Если свойство П развивается как ответ на фактор X *после* его введения, то вероятность обнаружить две уцелевшие клетки равна $p_2(\text{адапт}) = 0{,}0004 = p_1^2$, ибо это результат одновременного появления двух *независимых* p_1-событий. В этом случае **наличие трёх колоний с двумя уцелевшими клетками крайне маловероятно**.

2. *Чистая случайность.* Если некоторые бактерии мутируют *до* введения фактора X, то перед последним циклом деления, когда колония насчитывала *пол*миллиарда бактерий, это произошло с вероятностью $0{,}01 = p_1/2$. Отсюда получаем $p_2(\text{случ}) \geqslant 0{,}01$, так что, скорее всего, мы увидим **от семи до тринадцати колоний с двумя уцелевшими клетками.**

Это то, что Клод Бернар называет *активной наукой*, в которой *эксперименты ставятся не для подтверждения идей, а для их формирования*.

Проверив, что же произошло на самом деле, вы видите, что однозначно имеет место вариант 2: примерно половина не полностью вымерших колоний содержит хотя бы две живые бактерии.

(Ламарк нашёл бы, что этот факт противоречит его представлениям об эволюции не более, чем, скажем, отрубленная гильотиной голова доставляет контрпример к тезису о влиянии использования/неиспользования органа на адаптивную эволюцию этого органа в *медленно* меняющейся среде.)

Стоп! А как определить, сколько бактерий из *миллиарда* выжило?

Элементарно, мой дорогой Ватсон! Встряхните клетки в жидкости, чтобы перемешать их случайным образом, и поместите культуру на пластину с питательной средой. (С технической точки зрения, лучше сначала поместить на пластину полностью живую культуру, а затем применить фактор *X*.) Тогда каждая уцелевшая клетка — П-клетка — начнёт делиться, и в скором времени вы увидите на пластине столько колоний, сколько П-клеток имелось изначально.

(Если не вводить фактор *X*, а поддерживать размер живой колонии ограниченным за счёт постоянного потока питательных веществ, то через некоторое время уцелевшие потомки останутся лишь у небольшого числа клеток, а в конце концов — лишь у одной клетки. Это следует из анаксимандровой **теоремы 1**, если усилить её оценкой *вероятности вымирания*, полученной Фрэнсисом Гальтоном и Генри Уильямом Уотсоном в статье 1874 года. Едва ли есть хоть один шанс на миллион, что через несколько лет у П-клеток из исходной колонии останутся потомки.

Исходная сопротивляемость фактору *X* не сохраняется, и никакой сопротивляемости в колонии не видно; однако «спящие хранители» на месте, и, когда колонию атакует фактор *X*, они «дают отпор». Ламарк сказал бы, что колонии адаптируются, «голосуя за выживание» своих наиболее удачливых членов, и что, возможно, женская яйцеклетка точно так же выбирает из сотен миллионов доступных сперматозоидов самого подходящего претендента, обеспечивая таким образом адаптацию потомства. Пусть Дарвин с Вейсманом это опровергают.)

Другая идея Ламарка состоит в наличии *усложняющей силы*, которая, вместе с накладывающимся на неё «давлением» окружающей среды, *заставляет* организмы развиваться от простых форм к сложным. Эту идею нельзя просто отбросить, размахивая знаменем естественного отбора, попробуйте придумать что-нибудь похитрее.

Подобная «сила», если она существует, вероятно, кроется в *логике случая* эволюционной игры (структуры?) «Жизнь», которая, возможно, выразима на языке гротендиковской математики. Но выбрать тот или иной ответ, по-видимому, сложнее, чем, например, (квази)*строго* «вывести» необратимость в термодинамике из обратимых законов физики; существующее сегодня математическое изложение соответствующего рассуждения Больцмана не представляется удовлетворительным.

Так или иначе, кажется, что от *математики уровня таблицы умножения*, которой достаточно для эксперимента Лурии—Дельбрюка, тут мало толку. (Но, может быть, главная проблема в том, что мы не понимаем *таблицу умножения*.)

> *Много животных тогда поколений должно было сгинуть,*
> *Коль размноженьем приплод не могли они выковать новый.*
> *Те же, что, видишь, теперь живительным воздухом дышат,*
> *С юности ранней всегда берегут и блюдут своё племя,*
> *Или отвагой храня, или хитростью, или проворством*[22].
>
> Тит Лукреций Кар, «О природе вещей», 50 г. до н. э. (?).

> *⟨...⟩ И те виды, которые мы наблюдаем сегодня, — всего только крошечная часть того, что произвела слепая судьба.*
>
> Пьер-Луи Мопертюи, «Опыт космологии», 1750 г.

> *⟨...⟩ Количество существовавших когда-то промежуточных разновидностей должно быть поистине огромным в соответствии с тем огромным масштабом, в каком совершается процесс истребления.*
>
> Чарльз Дарвин, «Происхождение видов», 1859 г.

Драматическая срезка экспоненциально растущих функций в ограниченном пространстве, которую Дарвин назвал *естественным отбором*, представляет собой очевидную логическую необходимость, а не внутреннее биологическое свойство живых организмов.

Принцип естественного отбора «объясняет» эволюцию не более, чем дифференциальные уравнения «объясняют» механическое движение, но он даёт концептуальный контекст и предлагает язык для описания возможных математических моделей эволюции.

Это должны были хорошо понимать Мопертюи и любой, кто когда-либо размышлял о росте численности населения и мог осознать грандиозность величины $\exp T$. Например, Бюффон, который вместе с Мопертюи задавался вопросом,

---

[22] Перевод Ф. А. Петровского.

> *какой цели служит тогда эта неисчислимая цепь поколений, это изобилие зародышей, где на каждого родившегося приходятся многие тысячи нежизнеспособных,*

Бенджамин Франклин, который в 1751 г. писал, что

> *предел плодовитости растений и животных ставит лишь их скученность и вред, причиняемый средствам существования друг друга,*

Эйлер, который в «*Introductio in analysin infinitorum*»[23] (1748 г.) иллюстрирует поведение экспоненциальной функции примерами из популяционной динамики, и Фибоначчи, который смакует численные тонкости идеализированной модели воспроизведения кроликов в своей «*Liber Abaci*»[24] (1202 г.).

Дисбаланс между скоростью роста популяции и ресурсов также был известен многие века. Эта проблема и подход к её решению обсуждаются, например, в трактате Джованни Ботеро «*Delle cause della grandezza delle città*»[25] (1588 г.).

Гуманистический взгляд на решение проблемы перенаселения был предложен, почти в современных терминах, Никола Кондорсе в сочинении «*Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*»[26], опубликованном посмертно в 1795 г. Однако в методах, которыми проблемы (пере)населения на протяжении миллионов лет решала Природа, нет ни малейшего гуманизма.

Кондорсе и Мальтус

Математики помнят Кондорсе благодаря его сочинению 1785 года

> *«Sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix»*[27],

---

[23] «Введение в анализ бесконечных» (*лат.*).

[24] «Книга абака» (*лат.*).

[25] «О причинах величия городов» (*ит.*).

[26] «Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума» (*фр.*).

[27] «О применении анализа к вероятности решений, принимаемых большинством голосов» (*фр.*).

где он доказывает свою *теорему о жюри присяжных,* описывающую вероятность, с которой группа индивидуумов может прийти к правильному решению, и анализирует *парадокс* нетранзитивности *отношения порядка на решениях,* задаваемого коллективными предпочтениями.

Его страстный манифест

«Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain»

был написан в интервале между октябрём 1793 г. мартом 1794 г., когда Кондорсе был вынужден скрываться, ибо правительство Робеспьера приговорило его к смерти за гуманистические политические взгляды.

(Примерно сто лет спустя в Париже воздвигли памятник, состоящий из торса Лавуазье, которому отрубили голову через сорок дней после того, как Кондорсе был найден мёртвым в своей тюремной камере, и головы Кондорсе. Это было сделано не специально.)

Томас Мальтус, в своём *«Опыте закона о народонаселении»,* опубликованном в 1798 г., берёт сторону Природы в вопросе о методах решения проблемы перенаселения и выражает скептицизм относительно общественной целесообразности решения, предложенного Кондорсе.

Влияние Мальтуса объясняется двумя обстоятельствами.

1. В XIX веке количество читателей, готовых заплатить за книгу, в которой упоминается $\exp T$, достигло критической массы, необходимой, чтобы публикация такой книги приносила прибыль.
2. В число этих читателей входили Дарвин и Уоллес.

Но тезис о том, что технический прогресс может скомпенсировать мальтузианскую экспоненту $\exp T$, сегодня так же противоречит таблице умножения, как и во времена Мальтуса. Правила арифметики не меняются, по крайней мере на такой короткой временно́й шкале.

> *⟨…⟩ Сохранение благоприятных индивидуальных различий и вариаций и уничтожение вредных я назвал Естественным отбором, или выживанием наиболее приспособленного.*
>
> Чарльз Дарвин, «Происхождение видов»,
> 5-е издание, 1869 г.

Однако мысли Дарвина прежде всего занимала не эта риторика выживания, а навязчивая идея превратить *эффект срезки экспоненциального роста в биологии* в *принцип отбора* (*непрерывности*?), нечто вроде *принципа наименьшего действия* Мопертюи[28].

---

[28] Мопертюи определил величину, называемую *действием* $A = A$(движение), такую, что *движущаяся* физическая система S её минимизирует, или, точнее говоря, *движение*

Мопертюи, трудившийся над своим принципом два десятилетия, полагал, что Природа всегда минимизирует/оптимизирует все свои деяния, и, должно быть, попытался вывести формулу для «эволюционного действия», минимизируемого Природой в ходе отбора. Он наверняка решил, что такая формула должна включать в себя *время*, ибо победителем вас делает не столько *совершенство* вашей приспособленности, сколько скорость, с которой ваша приспособленность, пусть и несовершенная, может быть достигнута в процессе эволюции. Но, вероятно, он не мог угадать и записать другие члены этого «действия».

Кроме того, Мопертюи мог бы заметить, что для того, чтобы *эволюция путём отбора и только отбора* была логически/математически возможна, мутабельность и коэффициент воспроизводства должны быть достаточно высоки.

Очень грубо говоря, функция R^T, где R — коэффициент воспроизводства, должна «забивать» величину типа 2^P, где P — число «изменяемых частей» организма; при этом наличие отбора, осуществляющего эволюцию путём отсекания большей части математически возможных ветвей развития, скорее увеличивает, нежели уменьшает ожидаемое время T, необходимое для эволюции.

С другой стороны, частота появления мутаций не может быть слишком высокой; в противном случае вредные мутации, которые составляют подавляющее большинство, приведут к вымиранию. Особенно опасны *скрытые вредные мутации*, например те, что увеличивают частоту появления мутаций.

Будучи воспитан на ньютоновой (неаристотелевой) механике (с импульсами в качестве координат), Мопертюи мог бы предположить, что главная *биологическая наблюдаемая* (характеристика), которая развивается путём отбора, — это «мутабельность», или, скорее, её противоположность — *точность воспроизведения*. (Природа изо всех сил стремится удержать частоту появления мутаций на как можно более низком уровне: эволюция — это случайный танец на лезвии бритвы между стагнацией и вымиранием[29].)

системы S, понимаемое как пространственная кривая, удовлетворяет соответствующим (*дифференциальным*) *уравнениям Лагранжа—Эйлера*. Лагранжево и гамильтоново воплощения этого принципа наличествуют во всех областях математической физики.

[29] Природа сталкивается с той же проблемой, что и общественная система образования, — она должна быть *почти, но не вполне совершенной*: если ученики на 100 % подчиняются требованиям своих учителей, общество приходит к стагнации; однако недостаток строгости приводит к *катастрофе ошибок*, раку коррупции и вымиранию.

Поразительно (для неламаркианцев) то, что Природа не только допускает мутации по чистой небрежности, но и предусматривает возможность (квазислучайных) «желательных мутаций», например в определённых участках геномов паразитов, пытающихся обойти иммунную систему хозяина, а также в геномах бактерий в условии стресса.

Наконец, Мопертюи, будучи скорее математическим физиком, нежели чистым математиком, мог бы попытаться сопоставить грубые численные оценки подобного рода с временно́й схемой, полученной на основе анализа ископаемых останков.

Что ж... Мопертюи ничего этого не сделал, равно как и Дарвин, который сохранял неудовлетворённость теорией эволюции путём отбора, судя по тому, сколь настойчиво он *убеждал* себя в том, что естественный отбор объясняет эволюцию, и сколь красноречиво провозглашал, что начал *верить* в правильность этой идеи. *Объяснять* мир и жизнь — дело мифов, а не науки, а *убеждать* людей в чём бы то ни было должны проповедники и политики, но не учёные.

Дарвин хотел, чтобы его теория отбора представляла собой нечто большее, нежели просто *убедительное объяснение* эволюции Жизни на Земле, но математики XIX века ничего не могли предложить ему для реализации этой мечты.

Осторожный математик XXI века не стал бы ожидать воплощения дарвиновской мечты в одной-единственной чётко сформулированной математической теореме/теории, однако может надеяться на разработку пусть туманного, но всё же *истинно математического* контекста, охватывающего идею Жизни.

Пример такой не вполне точной, но чисто математической идеи, часто применяемой в физике, — представление состояния диссипативной динамической системы, например квазистационарного потока вязкой жидкости, как *ансамбля аттракторов* в соответствующем фазовом пространстве.

Но кажется, что ни одно такое понятие — ничто из динамики XX века — не годится для выражения какой-либо значительной части идеи Жизни в целом.

(Могут существовать динамические модели некоторых фрагментов Жизни. К примеру, не исключено, что мультимасштабные временны́е свойства *эволюции путём отбора*, с различными классами *единиц отбора*[30] в различных масштабах времени, можно описать на языке «многоярусных динамических систем», аттракторы которых возникают в результате диссипации и *предоминантного динамического сжатия*.)

По-видимому, до удовлетворительного понимания стохастической динамики геномов и превращения математической поэзии дарвиновской идеи эволюции путём отбора в строгую научную теорию ещё очень далеко.

---

[30] Говоря математическим языком, единицы отбора — это *особые* биологические наблюдаемые, но неясно, в каком именно смысле они *особые*. Например, можно ли взять в качестве такой «единицы» *точность воспроизведения* — одну из фундаментальных и наиболее медленно меняющихся в ходе эволюции наблюдаемых?

> *⟨...⟩ Наш* [XIX] *век будет называться ⟨...⟩ веком механического миропонимания природы — веком Дарвина.*
>
> Людвиг Больцман

Абстрактно логичный — *формальный* в смысле Аристотеля — дарвиновский принцип отбора может прельщать математиков и *математических* физиков, таких как Больцман; однако его *формальность* приводит в замешательство. Как может некоторое свойство логики/синтаксиса/математики используемого языка быть *основной причиной* чего-то, что происходит *физически* или биологически?

Может показаться, что изощрённые математические понятия помогают постижению суровых истин реального мира не более, чем поэтические метафоры. К примеру, лишь *Наивный Математик* может принять правила суммирования бесконечных рядов за «объяснение» *парадоксов Зенона*, а общую теорию (классических и/или квантовых) пространств Эйнштейна—Лоренца — за полную физическую модель Пространства–Времени. Однако *Наивный Математик* мог бы возразить, заметив, например, что Лаплас, когда он пишет, что

> *разум, которому в каждый определённый момент времени были бы известны все силы, ⟨...⟩ смог бы объять единым законом движение величайших тел Вселенной и мельчайшего атома,*

едва ли полагает, что решению проблемы детерминизма способствовало бы экспериментальное изучение мозга этого метафорического *разума* нейропсихологом (как предлагают некоторые мыслители XXI века), но согласился бы, что (квази)детерминистическое поведение планетарных движений, возможно, объясняется в свете *однозначной разрешимости дифференциальных уравнений* и/или теорем типа *КАМ*.

Скептицизм упёртых учёных не должен отвлекать нас от поисков математики, которая бы пролила «свет смысла» на эволюционную биологию.

Глава 8

Мозг

Tell me where is fancies bred,
Or in the heart or in the head.

Скажи мне, где любви начало?
Ум, сердце ль жизнь ей даровало?[1]

Шекспир, «Венецианский купец»
(написано, вероятно, между 1596 и 1598 г.).

⟨...⟩ *Умственная активность объясняется исключительно поведением нервных клеток, глиальных клеток, а также атомов, ионов и молекул, которые составляют их и воздействуют на них.*

Фрэнсис Крик, «Удивительная гипотеза», 1994 г.[2]

Шекспир не испугался бы высокоучёной *«умственной активности»*, занявшей место его *«любви»*[3], и *гипотеза* не показалась бы ему такой уж удивительной.

В конце концов, примерно с 3000 г. до н. э. было известно, что различные типы травм головы вызывают различные симптомы, что зафиксировано в *хирургическом папирусе Эдвина Смита*, который относится

---

[1] Перевод Т. Щепкиной-Куперник.

[2] В начале 1950-х гг. Фрэнсис Крик и Джеймс Уотсон, используя данные, полученные Розалинд Франклин методом рентгеновской кристаллографии, открыли правильную спиральную модель ДНК. (Неверную спиральную модель с тремя нитями ранее предложил Лайнус Полинг.) Они пришли к следующему выводу:

> *По-видимому, точная последовательность оснований есть код, который переносит генетическую информацию.*

Крик выдвинул также

центральную догму молекулярной биологии: ДНК→РНК→ белки.

> [Эта догма] *относится к детальному, остаток за остатком, переносу информации, содержащейся в последовательностях. Она утверждает, что такая информация не может передаваться обратно от белка к белку либо нуклеиновой кислоте.*

С шестидесяти лет и до самой смерти (в 2004 г.) Крик изучал мозг; в частности, пытался определить специфические нейронные процессы, отвечающие за сознание.

[3] Как бы вы ни старались, о стрелке [мозг]⇝[разум] мало что можно сказать, не прибегая к метафорам. (Поэтическое *«любви начало»* рождает вихрь идей, а сухое *«исключительно вследствие»* несёт нулевую положительную информацию.)

примерно к 1500 г. до н. э. и представляет собой неполную копию текста, созданного в Древнем царстве и впервые содержащего идею мозга.

Шекспир не мог знать о *хирургическом папирусе*, который был обнаружен лишь в середине 1800-х гг., но, возможно, ему было знакомо следующее.

> *Вместилищем ощущений является мозг. ⟨…⟩*
> *Все чувства так или иначе связаны с мозгом. ⟨…⟩*
> *Эта способность мозга синтезировать ощущения делает его также вместилищем мысли.*
>
> Приписывается Алкмеону Кротонскому, ≈450 г. до н. э.

> ⟨…⟩ *Не из иного места возникают в нас удовольствия, радости, смех и шутки, как именно от мозга, откуда также происходят печаль, тоска, скорбь и плач.*
>
> Гиппократ (?), «О священной болезни», ≈425 г. до н. э.

> ⟨…⟩ *Чувственное восприятие у полнокровных животных сосредоточено в области сердца.*
>
> Аристотель, «О сне и бодрствовании», ≈350 г. до н. э.

Трудно поверить, что клинические наблюдения Алкмеона и Гиппократа не убедили Аристотеля, который не принял «удивительную гипотезу», потому что

(1) сердце, в отличие от мозга, связано со всеми органами чувств;[4]
(2) сердце расположено ближе к центру;
(3) у эмбриона сердце развивается раньше, чем мозг;
(4) беспозвоночные, у которых есть сердце, но нет мозга, способны испытывать ощущения;
(5) эмоции воздействуют на сердце, а не на мозг;
(6) сердце тёплое, а мозг холодный;
(7) сердце, а не мозг, необходимо для жизни.

Полвека спустя александрийский анатом Герофил (335–280 гг. до н. э.) обнаружил, что нервы расходятся из мозга по всему телу, — что согласуется с идеей о том, что мозг в человеческом организме является управляющим органом.

Его молодой коллега Эразистрат (304–250 гг. до н. э.), который полагал, что психическая пневма передаётся к мышцам по двигательным нервам, различал отдельные проводящие пути для моторных и сенсорных функций. Он предполагал также, что уровень интеллекта у живот-

---

[4] Нервы менее заметны, чем кровеносные сосуды.

ных коррелирует с тем, насколько извилистую структуру имеют полушария головного мозга.

Однако экспериментальные подтверждения того, что мозг управляет телом, появились лишь четыре столетия спустя, когда Гален из Пергама (129–200?) продемонстрировал, что свинья, которой перерезали возвратные гортанные нервы, управляющие мышцами гортани, перестаёт визжать, но не перестаёт отбиваться[5].

Вот как Гален реагировал на тех свидетелей этого опыта, кого он всё же не убеждал в господстве мозга над телом:

> *Услышав это, я вспылил и покинул их, сказав лишь, что совершил ошибку, не понимая, что отправляюсь на встречу к невежественным скептикам; иначе я бы не пришёл.*

Древние не имели понятия о клетке и не могли постичь, как работает мозг. И когда на рубеже XX века красота клеточной структуры мозга начала раскрываться, вдохновлённые этим создатели *нейронной теории* заговорили о мозге поэтическим языком:

> *Мозг просыпается, и с его пробуждением возвращается сознание. Он похож на Млечный Путь, начинающий свой космический танец. Вскоре* [кора мозга] *становится волшебным ткацким станком, где миллионы поблёскивающих челноков ткут переливающийся узор, всегда полный смысла, но никогда не статичный, изменчивую гармонию деталей.*
>
> Чарльз Шеррингтон, «Человек о своей природе», 1942 г.

> *Понять, как устроен мозг, ⟨...⟩ — всё равно что установить материальный ход мысли и воли, открыть сокровенную историю жизни в её вечном поединке с внешними силами.*
>
> Сантьяго Рамон-и-Кахаль,
> «Воспоминания о моей жизни», 1917 г.

Кахаль и Шеррингтон, очевидно, говорят о *человеческом* мозге, но экспериментальная нейробиология и отчасти анатомия мозга опираются на изучение животных — начиная с Галена, рассекавшего мозг

---

[5] Помимо того что Гален стал основателем экспериментальной медицины, в том числе экспериментальной нейрофизиологии, он существенно продвинул вперёд анатомию, физиологию, патологию и фармакологию своего времени. К примеру, он показал, что мочу выделяют почки, продемонстрировал, что голос рождается в гортани, и установил существенное различие между венозной и артериальной кровью. Он также разработал несколько хирургических методов, в том числе для лечения катаракты.

быков и свиней, и продолжая микроскопическими исследованиями мозга насекомых, проводившимися с XVII века.

> *⟨...⟩ Мозг муравья есть один из самых удивительных комплексов вещественных атомов, может быть, удивительнее, чем мозг человека.*
>
> Чарльз Дарвин, 1859 г.

К примеру, коллективный разум муравьёв способен «логически определять» кратчайшие пути между точками на пересечённой местности:

> *оживлённая муравьиная тропа, соединяющая муравейник с источником пищи, обычно реализует почти кратчайшую возможность.*

Согласились бы муравьи со следующим тезисом?

> *Если мои убеждения суть результат химических процессов, происходящих в моём мозге, то они определяются законами химии, а не логики.*
>
> Джон Холдейн, «Неравенство людей», 1932 г.

Химическая логика муравьёв

Существует более 10 000 различных видов муравьёв, и вариации внутри одного вида также могут быть значительными. В среднем (?)

мозг муравья содержит около четверти миллиона клеток. Но муравьи муравьям рознь, их вес колеблется от 0,01 мг до полуграмма, и у маленьких муравьёв мозг составляет более 10 % от веса всего тела, что сравнимо с соответствующим показателем для мозга новорождённого ребёнка и намного превышает те 2 %, которыми могут похвастаться взрослые люди.

Муравьи помечают свой путь феромонами и, в свою очередь, выбирают пути, сильнее всего пахнущие феромонами. При прочих равных условиях,

> *число муравьёв, пробегающих по некоторому пути, скажем, за один час, обратно пропорционально длине этого пути*;

таким образом, кратчайший путь становится наиболее пахучим, а значит, наиболее предпочтительным для муравьёв.

Достижимость этого алгоритма путём эволюции обеспечивается его простотой и универсальностью. Вероятно, базовые программы, работающие в нашем мозге, должны быть сравнительно простыми и универсальными — это необходимо для самого их существования.

Кахаль и Шеррингтон

Кахаль изучал нервные и мозговые ткани, используя *метод окрашивания серебром*, изобретённый Камилло Гольджи в 1873 г., и установил, что базовыми единицами нервной структуры являются *нейроны*. Эту теорию дополнил Шеррингтон, введя понятие *синапса*. В своей книге «Интегративная деятельность нервной системы», опубликованной в 1906 г., Шеррингтон пишет:

В месте контакта между клетками, если не происходит действительного слияния, должна существовать поверхность раздела. ⟨...⟩ Поэтому, ввиду вероятной важности этого вида контакта между нейроном и нейроном для физиологии, удобно иметь для него специальный термин. Он получил название «синапс».

Глава 9

Разум

Энергия разума — это сущность жизни.

Аристотель

Как естествоиспытатели мы ничего не знаем о какой-либо связи между мыслями и мозгом, за исключением весьма ощутимой корреляции во времени и пространстве.

Чарльз Шеррингтон

Что такое разум? Что такое мысли?

Сколько мы должны узнать о мозге, чтобы постичь разум?

Представьте себе, что к середине XXI века мы узнали о мозге столько, сколько знаем сегодня о фундаментальных квантовых законах материи и энергии. Поможет ли нам это?[1]

Или мы только яснее осознаем нашу беспомощность и, вслед за Паули, скажем, что «разум», подобно «реальности», есть

> *нечто самоочевидное, ⟨...⟩* [но] *представляется наиболее важной и в высшей степени сложной задачей ⟨...⟩ — заложить новую идею* разума[2].

Но можно ли вообще перевести следующий поэтический образ мозга/разума на язык науки?

> *День напролёт ⟨...⟩ в клеточно-волокнистый лес мозга глаз шлёт непрерывный ритмический поток крошечных, мимолётных электрических потенциалов.*

---

[1] Молекулярный механизм живой клетки *транскрибирует* + *транслирует* каждый *кодон* (триплет из четырёх базовых нуклеотидов в ДНК), за исключением трёх стоп-кодонов, в одну из двадцати стандартных аминокислот (один из стоп-кодонов иногда прочитывается как *селеноцистеин*). Конкретное правило кодировки/трансляции, используемое Природой, которое *одинаково для* (почти) *всех* организмов на Земле и называется *генетическим кодом*, для экспериментатора является наиболее фундаментальным законом биологии. С другой стороны, если бы этот код был немного другим, ничто (?) в жизни заметно не изменилось бы. С точки зрения математика, в биологии важен *принцип* кодирования, а не *особенности* используемого кода.

Не исключено, что такого «произвола кодирования» в нашем мозге огромное количество; лавина подробной информации об этом «коде» может не столько способствовать, сколько мешать нашему пониманию стрелки [мозг] ⇝ [разум].

[2] Идея «реальности» неотделима от идеи «разума»: *Cogito ergo sum.*

> *Эта пульсирующая струящаяся масса наэлектризованных движущихся точек на губчатой ткани мозга не имеет никакого видимого сходства в пространственной структуре, и даже во временно́м отношении лишь очень отдалённо напоминает тот крошечный двумерный перевёрнутый образ внешнего мира, который глазное яблоко рисует на начальных участках нервных волокон, ведущих к мозгу.*
>
> *Но этот маленький образ вызывает целую электрическую бурю. А разразившаяся электрическая буря воздействует на целую популяцию мозговых клеток. Электрические заряды, не содержащие в себе ни малейших видимых элементов — ничего, что относилось бы к «расстоянию», «правосторонности», «вертикальности», «горизонтальности», «цвету», «яркости», «тени», «круглости», «квадратности», «контуру», «прозрачности», «непрозрачности», «близости», «далёкости» и прочим визуальным характеристикам, — всё же вызывают к жизни все эти понятия.*
>
> *Лавина крошечных электрических токов творит для меня пейзаж, когда я на него смотрю; замок на холме; лицо друга, за приближением которого я наблюдаю; они говорят мне, как далеко он от меня находится.*
>
> *Доверяясь им, я делаю шаг вперёд, и остальные мои чувства подтверждают, что друг действительно рядом.*

Шеррингтон, «Человек о своей природе»

Что означает понять разум? Как здесь поставить правильные вопросы? По всей видимости, существует незримый интерфейс, соединяющий мозг с тем, что мы воспринимаем как наш разум, — интерфейс, сравнимый по своей структурной сложности с *механизмом эмбрионального развития*, который, по словам Томаса Ханта Моргана, осуществляет преобразование того, что «записано» в генах, в [фенотипические] *признаки, которыми оперирует* [классический] *генетик*.

> *То, чего я не могу воссоздать, я не понимаю.*

Ричард Фейнман

Мы говорим здесь о создании *абстрактных моделей*, не обязательно реализуемых физическими устройствами[3]. И построение некоторых из них, возможно, не требует знаний о мозге, по крайней мере

---

[3] Из способности воссоздать не следует понимание. Животные (равно как и растения и бактерии) умеют воссоздавать свои приблизительные копии, но даже умнейшие представители человеческого рода имеют лишь весьма смутные представления о путях эмбрионального развития их потомства.

если речь идёт о моделировании отдельных «частей» мозга, таких как, к примеру, *память*.

> *Память ⟨...⟩ орган, подобный глазу, уху или носу, где пересекаются и сходятся нервы, идущие от других чувств. ⟨...⟩ Я мыслю не чем иным, как вместилищем идей, образованных частично чувствами, но главным образом ⟨...⟩ возбуждаясь подобными впечатлениями, они возобновляют своё прежнее впечатление.*
>
> Роберт Гук, «О гипотетическом объяснении памяти», лекция в Королевском обществе, 1682 г.

Данный пассаж выглядит почти как словесное описание *математической модели* памяти, но эта идея не всем нравится.

> *Интеллектуальный снобизм заставляет их* [математиков?] *верить, что им удастся получить результаты, одновременно глубокие и мощные математически и применимые к мозгу.*
>
> Фрэнсис Крик, «Безумный поиск», 1988 г.

Однако новые идеи относительно разума/мозга пришли из математики вместе с концепциями *информационных потоков* и *машин Тьюринга*, которые позволили ставить вопросы нового типа, например такие:

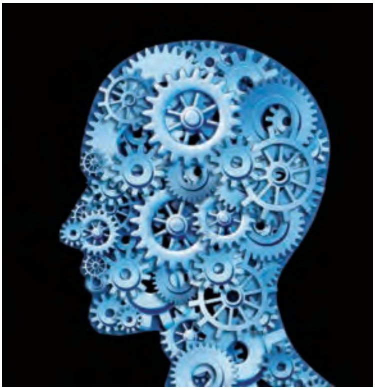
> *Могут ли машины делать то, что можем делать мы (как мыслящие создания)?*
>
> Алан Тьюринг, «Вычислительные машины и разум», 1950 г.

Попытки опровергнуть рассуждение Тьюринга, доказывающее, что цифровой компьютер в состоянии имитировать человеческий разум, сродни аргументу о том, что люди не могли произойти от одной расы с обезьянами, так как обезьяны лишены моральных добродетелей и не соблюдают правила дорожного движения.

Однако не только обезьяны, но и бактерии в нашем кишечнике — наши дальние родственники в том, что касается биологии. Единство жизни на Земле носит более глубокий характер, нежели сходство в анатомии и физиологии. Нечто подобное должно быть верно и в отношении «разума» — только мы не знаем, что это такое.

Трудность понимания человеческого разума — в том, что он *единствен в своём роде*; поэтому нет языка, позволяющего о нём рассуждать. Мозг же, напротив, имеется почти у всех животных на этой планете. Вот почему нейробиология развивается, но научная теория разума не сдвигается с места уже несколько тысячелетий.

И как вообще можно опровергнуть Тьюринга? Мы же и *есть* биологические машины — в той же степени, как, например, муравьи, хотя мозг каждого из нас по отдельности содержит больше нейронов:



> *Человек — настолько сложная машина, что совершенно невозможно составить себе о ней ясную идею, а следовательно, дать точное определение.*
>
> Жюльен Офре де Ламетри, «Человек-машина», 1748 г.

Но, быть может, работа нашего разума с его шестерёнками внутри шестерёнок внутри шестерёнок слишком сложна, чтобы допускать описание на языке чистой математики? Об этом размышлял Эдгар Аллан По в связи с шахматами.

> *Арифметические и алгебраические действия по самой своей природе неизменны и определённы. ⟨…⟩* [Но] *ни один ход в шахматах не требует однозначно выполнения другого хода.*
>
> Эдгар Аллан По, «Шахматный аппарат доктора Мельцеля», апрель 1836 г.

Конечно, По не мог знать о Тьюринге, но он имел представление о вычислительной машине Бэббиджа и утверждал, что игру в шахматы *нельзя* промоделировать на такой машине. И хотя то, что он говорил, формально неверно, фундаментальная проблема[4], которую он вычленил, остаётся неразрешённой по сегодняшний день.

Другая трудность с пониманием человеческого разума состоит в том, что наша интуитивная концепция *интеллекта*, формируемая *экзистенциальным эго* декартовского *cogito ergo sum*, скрыта под многослойным коконом *телеологии* — *цель, функция, полезность, выживание*. Тьюринг сознательно избегает вопроса *«Что такое интеллект?»* — поскольку на этот вопрос нельзя ответить, не разработав подходящего языка. (Это как с вопросом *«Что такое* Жизнь?», на который нельзя ответить на языке Жизни на Земле.)

Однако Тьюринг полагает, что у машины, если подвергнуть её обучению, может сформироваться «человекоподобный разум». В самом деле, *обучение* — более разумное понятие, чем *человеческий разум*[5], но от него будет мало толку, если предполагать, что мозг ребёнка — это *«очень много чистой бумаги»*.

> *Почему бы нам, вместо того чтобы пытаться создать программу, имитирующую ум взрослого, не попытаться создать программу, которая бы имитировала ум ребёнка? Ведь если ум ребёнка получает соответствующее воспитание, он становится умом взрослого человека. Как можно предположить, мозг ребёнка в некотором отношении подобен блокноту, который мы покупаем в киоске: совсем небольшой механизм и очень много чистой бумаги.*
>
> Алан Тьюринг, «Вычислительные машины и разум»

---

[4] При попытке проанализировать позицию на много ходов вперёд нас захлёстывает лавина экспоненциально растущего количества ветвей потенциальных игровых стратегий.

[5] *Обучение* привносит в описание *разума* относительно медленно меняющуюся *временну́ю координату*, подобно тому как *эволюция* привносит такую координату в описание *Жизни на Земле*, в котором *эволюционное обучение* описывается на языке *естественного отбора*.

Неуёмное восхищение блеском нашего «интеллекта» ослепляет нас, не давая разглядеть сущность разума, но моделирование процесса обучения ребёнка может пролить свет на эту картину.

> *Ближе всего к своей истинной природе человек бывает тогда, когда достигает серьёзности, присущей ребёнку во время игры.*
>
> Гераклит

Ребёнок умеет только играть, и учится он, именно играя. Математика этого *игрового процесса обучения* — преобразования потока электрических/химических сигналов, получаемых мозгом, в связную картину *внешнего мира* на протяжении первых двух лет человеческой жизни — столь же сложна и таинственна, как математика зарождения и эволюции *живых структур*.

Причём речь идёт о, так сказать, *свободном обучении*: подвергая человеческого детёныша (или детёныша животного) процессу «образования», вы только мешаете его обучению, ибо понятия не имеете о том, что происходит в мозге/разуме ребёнка. (Не то чтобы вы лучше понимали, как работает ваш собственный разум.) Применять ваш «взрослый интеллект», чтобы способствовать развитию ребёнка, — всё равно что помогать амёбе делиться с помощью щипцов. Неудивительно, что все созданные до сих пор обучающие программы и рядом не стояли с мечтой Тьюринга.

Вместо того чтобы изобретать всё более «интеллектуальные» определения *интеллекта*, *мы должны признать своё невежество*, как говорит Фейнман, забыть/подправить[6] наше «естественное» ви́дение себя самих и начать с вопросов, потенциально имеющих ответы.

Из каких *логических (молекулоподобных) единиц*[7] состоит *абстрактный интеллект*?

Отсутствие (наличие?) какой структуры (структур) в мозге детёныша человекообразной обезьяны приводит к тому, что в возрасте около полутора лет способность и желание учиться опускаются у него ниже

---

[6] *«Человеческий разум подчиняется точке зрения»*, — говорит Лавуазье в своей статье о *флогистоне* — концепции, выражающей интуитивную идею *теплоты* и маскировавшейся в предшествовавшей Лавуазье химии под научное понятие.

Продолжив ход мысли Лавуазье, вы обнаружите, что его слова уместны также в отношении «интеллекта» и «сознания». Эти понятия полезны для практической психологии, но никакое интуитивное определение *интеллекта* и/или *сознания* нельзя считать *научным* согласно тому пониманию науки, которое принимал Лавуазье.

[7] Такая единица должна быть функцией *абстрактных, не имеющих контекста/цели* «переменных», подобно *эффекту запечатления*, при котором в памяти фиксируется [*первый/второй*...] (движущийся объект), и *эффекту ястреба/гуся*, который основан на [*частоте/редкости*] (события).

уровня человеческого детёныша, но всё же остаются выше, чем у взрослого человека?

Какой механизм отвечает за редкость в «человеческом интеллекте» таких сложных структур, как исключительные музыкальные и математические способности? Имеются ли аналоги этого явления у животных?

Появляются ли эти структуры — скорее вредные, нежели полезные для *выживания в дикой природе* — путём естественного отбора, и если да, то какова совокупность возможностей/вариаций для этих структур?

Как нетелеологически описать роль, которую в работе «интеллектуальной системы» играет *предсказуемое будущее*?

Как выглядит простой/короткий список вопросов (или, скорее, интерактивный алгоритм, генерирующий вопросы исходя из истории разговора), на которые легко ответил бы человек любой культуры, например детёныш кроманьонца (ЕСЛИ бы удалось как-нибудь решить проблему языка), но которые создали бы непреодолимые трудности для доступных в настоящее время «имитационных программ»[8].

Нам нужно разработать аргументы и/или эксперименты, позволяющие находить ответы на эти вопросы, которые помогали бы скорее формировать, нежели подтверждать наши идеи, вызывая наибольшее удовлетворение, если конечный результат не похож ни на что из того, что приходило нам в голову. Тогда мы сможем проследить и перекрыть путь, по которому пришла льстящая нам иллюзия нашего «интеллекта», и начать движение к пониманию того, в чём заключается математическая суть разума/обучения/интеллекта.

Вполне вероятно, что полную инструкцию по созданию человекоподобной обучающейся системы можно изложить на нескольких сотнях страниц.

Но даже если вы стоите на правильном пути к решению этой задачи, он может оказаться очень длинным. Природе потребовалось полмиллиарда лет и квадрильоны попыток, чтобы прийти к современной конструкции нашей нервной системы, и нам могут понадобиться квадрильоны человеко/машино-часов, чтобы разработать сравнимую с ней систему самостоятельно[9]. При этом детальное знание устройства человеческого мозга необязательно окажется полезным — из-за не поддающейся расшифровке стохастической избыточности в его архитектуре.

---

[8] Такие вопросы должны ссылаться на (и/или повторно использовать) фразы, уже использованные в ходе диалога. Вероятно, длина L (подходящим образом определённой) *кратчайшей наивной* имитационной программы, которую умный алгоритм не сможет распознать после обмена n предложениями, должна расти по крайней мере экспоненциально: $L \sim 2^n$.

[9] Допустить такую возможность можно, если верить, что $NP \neq P$.

Глава 10

Тайны остаются

> *Ignoratus et ignorabimus*[1].
>
> Эмиль Дюбуа-Реймон, 1872 г.[2]
>
> *В математике не существует ignorabimus.*
>
> Давид Гильберт, 1900 г.
>
> *Мы должны знать — мы будем знать!*
>
> Давид Гильберт, 1930 г.

Дюбуа-Реймон предполагал[3], что, вероятно, люди *никогда* не смогут понять следующее.

1. *Природу материи и силы.*
2. *Происхождение движения.*
3. *Происхождение видов.*
4. *Зарождение в Природе кажущейся целенаправленной организации.*
5. *Генерацию сознательных ощущений лишёнными сознания нервами.*
6. *Источник умственного мышления и языка.*
7. *Недетерминизм свободной воли в детерминистической Вселенной.*

---

[1] Не знаем и не узнаем (*лат.*).

[2] Дюбуа-Реймон открыл *нервный потенциал действия* и описал химическую природу синаптической передачи.

[3] *«Über die Grenzen des Naturerkennens»* (*«О границах познания природы»*), 1872 г., и *«Über die Grenzen des Naturerkennens: Die sieben Welträtsel»* (*«О границах познания природы: Семь мировых загадок»*), 1891 г.

«Природа математики» в этом списке отсутствует. Дюбуа-Реймон, вероятно, не осознавал, что в математике существует проблема «ignorabimus», но Гильберт, размышлявший об этом, не раз решительно заявлял, что *в конце концов* все математические проблемы будут решены, и даже предложил программу *математического* доказательства этого утверждения.

Как обстоят дела сегодня?

Двадцатый век научил нас смирению. Теперь мы не уверены даже в том, что именно означает фраза «в конце концов» применительно к человеческой цивилизации. Возможно, наши дни сочтены.

А восхитительную глубину нашего сегодняшнего *непонимания* физического мира — материи, силы, энергии, движения — не могли бы себе представить люди XIX века, не подозревавшие об идеях относительности и квантовых полей и не обладавшие информацией о крупномасштабной динамике наблюдаемой Вселенной.

Кроме того, вопреки верованиям Гильберта, его наивные «оптимистические» гипотезы о логической организации математики были математически *опровергнуты*[4].

Математика — это не «логическое занудство», как думал Гильберт, но чудесная структура, не имеющая права на существование ни по своей внутренней природе, ни по тому, как она переплетается с фундаментальной физикой и с человеческим разумом.

(Необъяснимым образом, несмотря на провал гильбертовской программы, вопросы, которые мы ставим в математике, получают ответы почти мгновенно — зачастую значительно быстрее, чем за миллион человеко-часов серьёзных размышлений. Правда, ответы иногда далеки от ожидаемых.

Скорее всего, нетрудно сконструировать устройство, которое будет случайным образом генерировать математические проблемы, допускающие простые решения, но эти решения нельзя будет не только найти, но и *постичь* за реалистическое время, скажем миллиард лет интенсивных исследований, проводимых преуспевающей галактической цивилизацией, насчитывающей квадрильон активных математиков. Но человеческий мозг, по-видимому, неспособен ставить такие проблемы по собственной воле[5].)

---

[4] Гёдель показал (1931 г.), что в математике существуют бесспорно *верные, но недоказуемые утверждения*. Ещё более драматический результат принадлежит Полу Коэну, который доказал (1963 г.), что существуют несколько параллельных миров Математики, таких, что некоторые утверждения, *верные в одном из миров, могут быть ложными в другом*.

[5] Быть может, к этому типу относится проблема $P \neq NP$.

И мы верим, что фундаментальные вопросы о Природе можно сформулировать в чисто математических терминах. Глубинную суть двух стрелок

$$\text{Пространство/Время/Материя/Энергия} \underset{?_1}{\rightsquigarrow} \text{Жизнь/Мозг}$$

и

$$\text{Жизнь/Мозг} \underset{?_2}{\rightsquigarrow} \text{Разум/Мысль}$$

можно постичь лишь в окружении Математики.

Великий круг тайн замыкается стрелками

$$\text{Мозг/Разум/Мысль} \underset{?_3}{\leftrightsquigarrow} \text{Математика}$$

и

$$\text{Математика} \overset{?_4}{\leftrightsquigarrow} \text{Пространство/Время/Материя/Энергия}.$$

Мы кое-что знаем о стрелке $?_4$ — математические физики рассказывают нам о ней всё новые истории. Но никакая доступная нам математика не проясняет тайны стрелок $?_1$, $?_2$ и $?_3$. Время этой математики ещё впереди.

Часть II

Меморандум эрго

Глава 1

Мозг, эрго-мозг и разум

> *Вселенная построена по плану, глубокая симметрия которого некоторым образом запечатлена в самых потаённых уголках нашего сознания.*
>
> Поль Валери

Нельзя расшифровать Разум, не создав широкий (полу)математический контекст, позволяющий последовательно и непротиворечиво рассуждать о *разумоподобных структурах*.

Но

какая математика нужна, чтобы говорить о Разуме?

Следует ли нам держаться *математики чисел* — того языка, на котором о своём мире говорят физики?

Некоторые полагают, что радикально отходить от физики не требуется. К примеру, Фрэнсис Крик[1] считал, что в основном разум может быть понят в терминах физиологии мозга:

> *Умственная активность объясняется исключительно поведением нервных клеток, глиальных клеток, а также атомов, ионов и молекул, которые составляют их и воздействуют на них*[2].

Никто не спорит с тем, что единственный источник наших мыслей — это наш мозг: данная идея в ходу уже более 4000 лет[3]. Но как бы вы ни изукрашивали её убедительными словами, всё, что вы скажете о стрелке

$$[\text{МОЗГ}] \rightsquigarrow [\text{РАЗУМ}],$$

остаётся метафорой. Ни одно предложение в духе «*Разум*

> *производится/порождается/создаётся* или *определяется/управляется/администрируется*

---

[1] Фрэнсис Гарри Комптон Крик (1916–2004), внёсший огромный вклад в молекулярную биологию, получил образование как физик.

[2] Это цитата из книги Крика «*Удивительная гипотеза*» (1994), где он пропагандирует то, что, по его мнению, является научным подходом к проблеме сознания.

[3] Эта идея, как мы знаем, присутствует в *хирургическом папирусе Эдвина Смита*, датированном ≈ 1500 г. до н. э., который представляет собой неполную копию текста, созданного в египетском Древнем царстве (около 2686–2181 г. до н. э.).

мозгом» не проливает никакого света на природу этой стрелки. Нам остаётся лишь согласиться[4] с тем, что нехотя признал Чарльз Шеррингтон почти сто лет назад[5]:

> *Как естествоиспытатели мы ничего не знаем о какой-либо связи между мыслями и мозгом, за исключением весьма ощутимой корреляции во времени и пространстве.*

Но чем это плохо? Какие связи нам ещё нужны?

Наш собственный мозг — точнее, то, что мы называем *эрго-мозгом*, — воссоздаёт целый мир во всём его великолепии исходя из пространственных/временны́х корреляций между различными событиями[6]. С небольшой помощью математики мы можем попытаться осуществить что-то подобное следующим образом.

Различные типы повреждений мозга приводят к различным психологическим нарушениям[7], и экспериментальная нейрофизиология (в идеале) устанавливает соответствие между состояниями мозга и наборами нейронов мозга, активных в данном конкретном состоянии. Поскольку анатомия мозга примерно одинакова у всех людей, мы получаем возможность объективного сравнения подобных наборов у разных индивидуумов.

Например, если бы можно было универсальным образом идентифицировать восприятие какого-то конкретного цвета, скажем ☻, по набору возбуждённых мозговых нейронов репрезентативной[8] группы людей (животных), мы могли бы с полным правом присвоить «предикат *существования» квалиа* этого цвета.

Интереснее то, что естественное комбинаторное расстояние, называемое *метрикой Хэмминга*, между различными наборами нейронов в мозге[9] даёт нам способ измерять расстояния между состояниями мозга.

Имей мы такую метрику в реальности, психологию можно было бы приравнять к «*геометрии разума*»; и хотя текущее состояние науки не

---

[4] Крик бы не согласился.

[5] Это цитата из книги Шеррингтона «*Человек о своей природе*», в основу которой легли его гиффордовские лекции (1937–1938); в ней учёный излагает свои философские идеи о месте человека во Вселенной с точки зрения естественных наук.

[6] Само пространство-время, в представлении эрго-мозга, возникает как результат таких корреляций.

[7] Это было отмечено ещё в хирургическом папирусе.

[8] Вполне вероятно, что определённая таким образом квалиа белого для инуитов, живущих в арктических областях Гренландии, соответствовала бы зелёному для обитающих в Амазонии индейцев пираха.

[9] Это расстояние определяется как число нейронов, принадлежащих *ровно одному* из двух наборов.

даёт нам никакой подобной метрики, сама идея такого расстояния намекает на возможность математического подхода к изучению разума.

Но, с другой стороны, кажется, что никакой «математики Разума» *быть не может*: сколь бы вы ни старались, вам не удастся увидеть ничего «математического» в том, что вы сознательно воспринимаете как «свой Разум»: оно слишком рыхло организовано, в нём не видно каких бы то ни было структурно важных паттернов — регулярно повторяющихся «мотивов» или «форм».

Что ж… смотря на экране лэптопа мыльные оперы, вы тоже вряд ли разглядите структуру операционной системы компьютера. Её следует искать где-то в другом месте.

> *Именно в признании нашего невежества, нашей неуверенности кроется надежда на непрерывное движение ⟨…⟩ в некотором направлении.*
>
> Ричард Фейнман

Гипотеза об эрго-мозге. Существует некая сложная ментальная сущность, которую мы называем *эрго-мозгом* и которая служит посредником между электрофизиологической динамикой мозга и мыслительными процессами в сознательном разуме.

Эрго-мозг отвечает за *глубинные процессы обучения* у человека, в частности процессы изучения родного языка детьми и математики будущими математиками.

Мало что из свойств эрго-мозга может быть исследовано путём интроспекции. Однако некоторые «эрго-паттерны» можно увидеть в естественных языках и математике.

Гипотеза об эрго-структурах/эрго-системах. Существуют специальные математические, по существу комбинаторные структуры, которые мы называем *эрго-структурами*, и класс (математическая категория?) математических объектов, которые мы называем *эрго-системами* и которые несут в себе такие структуры. Эрго-мозг есть частный пример эрго-системы.

Нашей конечной целью является разработка теории эрго-структур, которая предоставила бы *математические* средства для *анализа и синтеза универсальных самообучающихся систем*[10].

Мы представляем себе такую систему $\mathcal{LEARNER}$, взаимодействующую со *входящим потоком сигналов*, как фотосинтезирующее растение, развивающееся в потоке фотонов света, или амёбу, плавающую в море химических питательных веществ и/или меньших микробов:

---

[10] Такая теория может также прояснить природу математики.

система $\mathcal{LEARNER}$ распознаёт в таком потоке и отбирает из него то, что ей *интересно*, и использует отобранное для *построения* своей собственной структуры.

Эта аналогия не столь уж притянута за уши. *Принципиальной* разницы между человеческой деятельностью и деятельностью амёб и даже бактерий нет... ну, по большому счёту. Скажем, вероятность обнаружить в каком-то месте воображаемой вселенной «запись» первого миллиона цифр числа $\pi = 3{,}14159265359\ldots$ возрастёт более чем в миллиард умножить на миллиард умножить на миллиард раз, если вы найдёте в какой-то точке, находящейся на расстоянии многих тысяч световых лет от этого места, бактериеподобную машину, питающуюся от источника почти аморфной *свободной энергии*.

Эрго-логика — это конкретный способ мышления, необходимый, чтобы подступиться к нашим гипотезам.

Эрго-логика резко отличается от всего, что мы считаем само собой разумеющимся касательно нас самих, и того, что происходит в наших головах. Когда речь идёт об эрго-мозге и эрго-обучении, мы отказываемся от таких понятий, как

разумный — рациональный — интуитивный — важный,

заменяя их на

интересный — любопытный — забавный — информативный.

Хоть это и контринтуитивно, но проявления данной логики встречаются в недрах математики, а также в *молекулярных структурах* живых систем, открытых биологами за последние 50 лет.

Идея эрго-мозга возникает также при оценке *возможностей естественного отбора* в том, что касается возникновения и эволюции человеческого познания.

Хотя структурные паттерны, которые мы обнаруживаем в эрго-мозге, и имеют эволюционное происхождение, их нельзя объяснить лишь механизмом выживания/отбора; скорее, важную роль тут играют неизбежные ограничения на возможные архитектуры эрго-систем. По своей сути эти ограничения являются математическими, и, как это ни покажется парадоксальным, они увеличивают вероятность достижимости эрго-мозга эволюционным путём по сравнению с «аморфным» человеческим Разумом.

Поэтому, вдохновляясь *историей* эволюционной теории, где прозрение Дарвина и Уоллеса состояло *не столько в идеях, относящихся к биологии как таковой, сколько в осознании потенциальных возмож-*

ностей экспоненциальной функции[11], мы ищем ключ к тайне Разума *не в нейрофизиологии, а в математике.*

Препятствием к установлению связей между миром мыслей в нашем разуме и миром нейронов в нашем мозге служит различие между этими двумя структурами и несовместимость языков, их описывающих[12], и накопление информации о Мозге мало чем тут поможет[13]. Стрелка [мозг] ⇝ [разум] столь же яростно сопротивляется любым попыткам заключить её в кандалы умных слов, как и её младшая сестра, стрелка

[материя/энергия] ⇝ [жизнь].

Нельзя утверждать (как, несомненно, стал бы утверждать Крик), что все жизненные процессы *полностью объясняются* взаимодействиями между атомами, ионами и молекулами, составляющими биологические организмы.

Конечно, физики с этим тезисом не согласятся. Так, Ричард Фейнман в «*Шести простых фрагментах*» своих знаменитых «*Лекций по физике*» говорит:

> ⟨…⟩ *Что бы ни делали живые существа, это можно понять с той точки зрения, что они состоят из атомов, действующих по законам физики.*

Однако законы физики не парят в логическом вакууме, они погружены в математический контекст. Физика, которой занимаются люди, представляет собой «*сеть идей*»[14] внутри этого контекста, некоторые «узлы» которой принимаются за «законы физики».

«Дух физики» кроется в *комбинаторной архитектуре* этой сети, которую сдерживают и направляют многие соглашения, инструкции, предположения, такие как

симметрия, инфинитезимальная линейность, устойчивость, общность.

---

[11] Чудовищность экспоненциального роста ничем не сдерживаемых популяций людям с математическим складом ума была очевидна со времён античности. Но для биологов XIX века, мало сведущих в математике, она, вероятно, явилась откровением — сам Дарвин, обладавший тонким интуитивным пониманием больших чисел, не мог правильно оценить количество потомков пары слонов через 500 лет.

[12] Это напоминает стрелку, символизирующую *коллапс квантовых состояний*, которая должна была бы осуществить (всё еще отсутствующий) перевод «квантового языка» на классический.

[13] Это всё равно что пытаться добиться понимания *белков* — их трёхмерных структур и функций в клетке, — собирая данные о химии *полинуклеатидных кислот* — ДНК, управляющих синтезом этих белков.

[14] Под «идеей» может пониматься запись наблюдения или эксперимента, а также рецепт/правило для изобретения, проведения и интерпретации экспериментов.

Но Жизнь, хоть и *подчиняется* «физическим законам», *прекрасно умеет нарушать* «физические соглашения и предположения» — что и делает её Жизнью.

Подумайте, например, что произойдет со стокилограммовым ТЕЛОМ при столкновении с чем-нибудь крошечным, что весит менее одной миллиардной грамма.

Очевидно, не произойдёт ничего. Но… пусть ТЕЛО — это тело *хищника*, а «что-то крошечное» — это несколько миллиардов молекул, которые вылетают из *пахучих желёз* в *теле* потенциальной *добычи* и «сталкиваются» с *обонятельным эпителием в носовой полости* ТЕЛА.

Предсказывая временну́ю эволюцию расстояния между ТЕЛОМ и *телом*, будете ли вы полагаться только на *закон сохранения импульса*, особенно если это второе *тело* случайно оказалось вашим собственным?[15]

Идея «математики Разума» не нова. «Алгебру мысли» задумал Лейбниц примерно в 1676 г.

В 1869 г. Уильям Джевонс[16] построил механическое *логическое пианино*, которое, по его словам, представляло собой

> *разум, наделённый мыслительными способностями, но полностью лишённый знаний.*

В 1887 г. Чарльз Пирс[17] спрашивал, насколько

> *можно было бы заставить машину мыслить.*

В 1950 г. эту идею развил Алан Тьюринг в статье *«Вычислительные машины и разум»*, где он утверждает, что нет никаких препятствий на пути

ПОСТРОЕНИЯ МАШИН, УМЕЮЩИХ ДУМАТЬ.

Но какова та *логическая структура* наших мыслительных процессов, которую можно промоделировать математически и реализовать с помощью машины?

Структурно богатая *нейрофизиология мозга* слишком далека от того, что мы хотим моделировать, например от процесса освоения ребёнком родного языка, а *потоки наших сознательных мыслей* лишены интересных структур.

---

[15] Индийские леопарды (40–80 кг) и реже тигры (150–300 кг) могут нападать на людей.

[16] Уильям Стенли Джевонс (1835–1882) был экономистом и логиком. Его книга «*Общая математическая теория политической экономии*» (1862) положила начало разработке математических методов в экономике.

[17] Чарльз Сандерс Пирс (1839–1914), «отец прагматизма» и основатель *семиотики*, был первопроходцем в философии математической логики.

Наше предложение состоит в том, чтобы переключить внимание с *динамики мозга* и *логики мыслей* на

невидимые и, очевидно, иллогичные подводные течения мыслей,

которые мы собирательно называем *эрго*.

Базовая структура «эрго» обусловлена *математической* необходимостью простоты и универсальности, а «форма», принимаемая им в человеческом разуме, связана с ограничениями, которые накладывает нейронная организация мозга, а также с (гипотетическими) ограничениями на возможности эволюционного отбора[18].

В главах с первой по двадцать первую этого «меморандума», за исключением, может быть, «формалистской» главы 3, мы неформально обсуждаем, что может представлять собой «эрго», а в оставшихся более технических главах обращаемся к конкретному анализу двух фундаментальных вопросов относительно Разума.

Обладает ли процесс «мышления» достаточной структурной универсальностью, которая позволила бы моделировать его математически?

Что предположительно могло бы служить математикой эрго-мозга?

---

[18] Так бутылка определяет форму растущего в ней огурца.

Глава 2

Проект «Эрго»

> *Не знание, а процесс обучения ⟨…⟩ доставляет наибольшее наслаждение.*
>
> Карл Фридрих Гаусс

Конечной целью *проекта «Эрго»* является создание *универсальной самообучающейся программы*, которая, встречая *интересный поток сигналов*, например представляющих естественный язык, начинала бы *спонтанно взаимодействовать* с ним и в конце концов приходила бы к *пониманию смысла* сообщений, переносимых этим потоком.

Мы знаем, что такие программы существуют, мы носим их в глубине нашего РАЗУМА — в том, что мы называем *эрго-мозгом*, — но не имеем ни малейшего представления о том, как они выглядят.

Прежде чем подступаться к созданию таких программ, мы должны

- описать *потоки сигналов*, встречающиеся в повседневной жизни, с математической точки зрения и дать формальное определение того, чем они нам *интересны*;
- сформулировать пусть в общих, но математических терминах, что означают слова *«обучение», «понимание», «смысл»*;
- выработать общую концепцию самообучения.

Приступая к решению этих задач, необходимо следовать принципам того, что мы называем *эрго-логикой*, и таким образом *дистанцироваться* от *общепринятых* представлений о Человеческом Разуме, доминирующих в нашем *эго-разуме* и глубоко укоренённых в нашей (*популярной*) *культуре*.

Эго-разум есть часть некого большего РАЗУМА; именно его вы обычно воспринимаете как свой разум. Но РАЗУМ в нашем понимании включает в себя также эрго-мозг, который, в отличие от эго-разума, недоступен вашему мысленному взору.

Схематически РАЗУМ можно изобразить в виде *конечного связного графа* — сети идей, — состоящего из двух подграфов, соответствующих (очень грубо говоря) эрго-мозгу и эго-разуму:

$$\text{РАЗУМ} = M_{\text{эрго}} + M_{\text{эго}},$$

где $M_{\text{эрго}}$ — своего рода *ядро* РАЗУМА, представляющее собой *объединение циклов*, а *периферия* $M_{\text{эго}}$ есть дизъюнктное объединение *деревьев*[1],

---

[1] *Деревья* — это связные графы без циклов.

каждое из которых пересекается с $M_{\text{эрго}}$ в единственной точке — корне, из которого оно растёт[2].

Эго *рационально*: здравый смысл — логика эго — хранит в себе накопленную в ходе эволюции мудрость, необходимую для нашего выживания и выживания наших генов. Популярная культура — это своего рода коллективный эго-разум.

Человеческое эрго *иррационально*[3]. Его манят восхитительно интересные, а не практически полезные структуры, его увлекает игра, искусство, наука. В ядре нашего *коллективного эрго* пребывают естественные науки и математика.

Идеи и мнения, диктуемые здравым смыслом, — в отличие от идей научных — неоспоримо самоочевидны, они не терпят возражений. Например,

> если на вас падает что-то тяжёлое, поскорее увернитесь: тяжёлые предметы падают быстрее и бьют сильнее, чем лёгкие.

Это прекрасно способствует вашему выживанию. Но никакой подобный принцип — ничто из того, что подсказывает вам здравый смысл, — не даст хорошую научную идею.

Мы не хотим сказать, что знаем, какая модель человеческого разума ближе всего к истине, но она должна быть настолько отлична от того, что нашёптывают вам интуиция и здравый смысл, насколько возможно себе представить.

---

[2] Разумеется, любой конечный граф обладает разложением указанного вида.

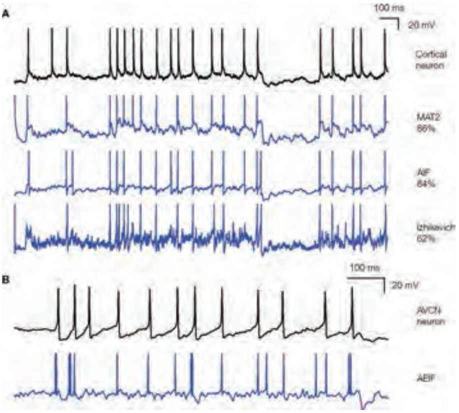
[3] Человек — наименее рациональное из всех животных. Что бы ни делал таракан, даже если в конце концов он погибает, его поведение на 100 % рационально. О людях того же сказать нельзя.

Глава 3

Формальность и универсальность — смысл, фолдинг и понимание

Потоки сигналов, которые мы получаем, могут иметь разные источники и передаваться по разным каналам: зрительным, слуховым, тактильным. Но все они поступают в мозг в одной и той же форме:

массивы «строк» флуктуирующих электрохимических сигналов.



Сигналы → мозг → разум → проблема смысла. До какой степени *смысл*, кодируемый подобными «строками», можно восстановить и *понять* с помощью *формальных символьных* манипуляций, следующих неким *универсальным математическим* правилам?

Смысл и *понимание* — расплывчатые понятия, для них нет определений, позволяющих подступиться к этому вопросу. Но полезно провести формальную параллель с центральной проблемой *молекулярной генетики*.

Проблема генотип ⇝ фенотип. До какой степени *анатомию, физиологию, поведение* организма — бактерии, растения или животного — можно восстановить с помощью *формального* анализа *последовательности ДНК* генома этого организма?

Жизнь реализует зелёную стрелку «⇝» в нескольких процессах развития организмов, из которых мы выделяем следующие два:

⋆ *фолдинг белка*

и

★ *эмбриональное развитие.*

Что касается $\star$, напомним, что белки синтезируются в клетках в виде *полимерных цепей*, состоящих из 20 (иногда 21) молекулярных единиц — *аминокислот*[1]. (Молекула самой маленькой аминокислоты, *глицина*, состоит из 10 атомов, а самой большой, *триптофана,* — из 27 атомов.)

Затем такая цепочка «сворачивается», приобретая специфическую (часто «картофелеподобную») *пространственную структуру* (*конформацию*)[2], которая определяет *физиологическую функцию белка*. Эта функция есть *raison d'être* белка, его *смысл* с точки зрения клетки.

(Стохастическая) динамика фолдинга свободно подвижной цепи $\mathcal{S}$ аминокислот развивается в водянистой среде E, стимулируясь взаи-

---

[1] Синтез белков реализует *трансляцию* (перевод) информации, записанной с помощью четырёх букв в молекулах мРНК, которые по существу являются репликами фрагментов ДНК, на двадцатибуквенный язык белков. Этот химический процесс — вероятно, самый сложный во Вселенной — осуществляют большие агрегаты, состоящие из белков и РНК и называемые *рибосомами*, которым помогают десятки других белков и молекул РНК.

[2] Это верно для (многих, но не всех) относительно коротких цепей, скажем длиной в 50–300 единиц, причём некоторые белковые молекулы состоят из нескольких цепей. Например, молекула *гемоглобина* (в крови взрослого человека) включает две идентичные 141-цепи и две 146-цепи — в общей сложности 574 аминокислот.

модействиями цепи $\mathcal{S}$ со случайно движущимися молекулами воды[3], а также с другими молекулами и ионами, присутствующими в E в достаточных концентрациях.

Но окончательная компактная форма белка[4] P определяется прежде всего взаимодействиями — своего рода силами *притяжения* — между частями строки $\mathcal{S}$, когда они вступают в тесный контакт друг с другом.

Говоря метафорически, физическая химия среды *понимает* последовательность $\mathcal{S}$ и извлекает её *смысл*, формируя белок P.

Затем физиологическая среда клетки реализует на практике информацию, закодированную в строке $\mathcal{S}$, отводя белку P ту функцию, для которой предназначена его цепь аминокислот.

С физической точки зрения фолдинг можно разбить на элементарные шаги/движения: изгибание, скручивание и растягивание химических связей $\mathcal{S}$-молекулы. Эти процессы происходят параллельно в разных участках строки $\mathcal{S}$, до 10^{14} движений в секунду в каждом участке, и одновременно во многих копиях строки $\mathcal{S}$, содержащихся в клетке.

Но механической скорости молекулярной динамики было бы недостаточно для быстрого — за несколько секунд или даже меньше — фолдинга белков, наблюдаемого в клетке, если бы не помощь со стороны эволюционной биологии: *нативные* цепочки белков «спроектированы», среди прочего, для быстрого фолдинга в физиологических условиях.

С вычислительной точки зрения предсказание структуры белка *ab initio* (исходя из полной информации о межмолекулярных взаимодействиях[5]) остаётся далеко за пределами возможностей самых быстрых компьютеров.

С экспериментальной точки зрения если — и это очень большое если — белок удаётся кристаллизовать, то его структуру можно определить (это нетривиальная задача) исходя из *рентгеновских изображений полученных кристаллов*.

С точки зрения биоинформатики белок $\mathbf{P}_{\text{нов}}$ изучается путём сравнения его последовательности с последовательностями близких белков, структура которых уже установлена, а окончательное определение структуры белка $\mathbf{P}_{\text{нов}}$ опирается на *стереохимию* белков.

---

[3] Средняя (квадратичная) скорость молекул воды при комнатной температуре составляет примерно 650 м/с.

[4] Эта форма — во что математику трудно поверить — по существу единственна и для большинства белков в живых организмах *определяется*, с точностью до контролируемой стохастической ошибки, *последовательностью аминокислот*.

[5] Доступная информация об этих взаимодействиях далека от того, чтобы быть полной и точной.

С точки зрения логики стрелка

$$\text{последовательность} \mapsto \text{структура}$$

преобразует информацию, содержащуюся в строке $\mathcal{S}$, в информацию, кодируемую геометрией[6] *наружной поверхности* ∂P белка P. Это происходит со значительной потерей (некоторые называют её «сжатием») информации: разные последовательности могут приводить по существу к одной и той же белковой структуре[7].

Несмотря на то что даже *понятие* белка P как «физического тела» невозможно выразить на языке $\mathcal{S}$-последовательностей, если рассматривать P *изолированно*, пространство $\mathcal{P}\mathcal{B}$ всех таких «белковых тел» можно описать на этом языке как

подфактор (фактормножество некоторого подмножества) множества последовательностей из 20 букв по *отношению эквивалентности* на подмножестве последовательностей, которые правильно сворачиваются в белки правильной формы, где

две последовательности объявляются эквивалентными, если соответствующие поверхности ∂P *имеют по существу одну и ту же геометрию.*

Комментарии

- Условия «правильного сворачивания» и «правильной формы» могут варьироваться и задавать различные классы последовательностей, но все они должны содержать большинство нативных (глобулярных?) белков.

- *Общий* (т. е. общего типа) белок «правильной формы» с «правильно свёрнутой» последовательностью не выполняет что-либо, что можно назвать «функцией», в какой-либо живой клетке; он *биологически бессмыслен*, походя в этом отношении на грамматически корректное, но бессмысленное (это свойство общего положения) предложение в естественном языке[8].

С другой стороны, среди «общих правильно свёрнутых» последовательностей имеется много (скажем, $> 2^{200} > 10^{60} < 20^{300}$) *ненативных*, т. е. тех, которые никогда не были и никогда не будут обнаружены

---

[6] Под «геометрией» здесь имеется в виду геометрия «раскрашенной» поверхности ∂P, где «цвета» соответствуют физическим/химическим свойствам, таким как *полярность и гидрофобность*, аминокислот, образующих эту поверхность.

[7] Вопрос о том, обладает ли отображение *последовательность* ↦ *структура* и/или соответствующее *преобразование информации из линейного кода в трёхмерие* какой-либо (стохастической?) непрерывностью, является спорным.

[8] Грамматика фолдинга и семантика функций белков в различных клетках ближе друг к другу, чем грамматика и семантика предложений в различных человеческих языках.

в природе, но могли бы после фолдинга выполнять определённые функции не хуже — если не лучше, — чем нативные белки.

- Будем понимать слова «по существу» выше как «приближённо». Тогда наше пространство «белковых тел» будет зависеть от используемой аппроксимации, и вместо одного пространства $\mathscr{P}\mathscr{B}$ мы получим ансамбль (*малую категорию*?) $\{\mathscr{P}\mathscr{B}_a\}$, элементы которого параметризуются/индексируются всевозможными аппроксимациями a, при этом «идеальное пространство» $\mathscr{P}\mathscr{B}$ возникает как (*проективный*?) предел пространств $\mathscr{P}\mathscr{B}_a$.

Имея формальное *определение* «фолдинга белка», можно говорить о формальном *решении проблемы фолдинга белка* как о множестве $\mathscr{R}$ математических правил, позволяющих, получив на входе множество $\mathcal{N}$ (образцов) последовательностей нативных белков, про которые известно (или считается), что они правильно сворачиваются, построить ансамбль $\{\mathscr{P}\mathscr{B}_a\}$ (или что-то близкое).

Такое множество $\mathscr{R}$ может существовать и даже быть не слишком большим. Но поскольку оно должно зависеть от физической/химической специфики межмолекулярных взаимодействий, которые обладают огромной вычислительной сложностью, вряд ли его можно найти исходя из *универсальных математических* принципов, *без априорной идеи* относительно геометрии и физики фолдинга и/или информации об источнике множества $\mathcal{N}$.

> *Решить проблему фолдинга белка с помощью чисто формальных математических рассуждений невозможно.*

Однако некоторые фрагменты (говоря математически, *подфакторы*) ансамбля пространств $\{\mathscr{P}\mathscr{B}_a\}$, соответствующие некоторым «осмысленным свойствам» белков, например повторяемости определённых паттернов в последовательностях, скажем соответствующих *α-спиралям*, легко поддаются формальному выявлению. А исчерпывающая математическая модель белков, открытая для ввода экспериментальных данных, может дать решение проблемы фолдинга.

Цвета логики меняются разными способами, когда мы смотрим на стрелку

$$\textit{структура белка} \to \textit{функция белка}.$$

(∗) *Коллегиальность функций белков.* Функция данного белка P в клетке имеет смысл только в окружении других белков, которые взаимодействуют с P. (Это формально похоже на *функцию*, или *семантический смысл*, предложения S в тексте: в отличие от синтаксиса предложения S, его смысл нельзя определить вне обширного лексического контекста.)

Соответственно, формальному представлению поддаются не пространства функций отдельных белков, а пространство (*макро*)*молекулярных динамик клеток* — $\mathscr{MDC}$ в роли $\mathscr{PB}$, — при этом $\mathscr{MDC}$ должно быть представлено подфактором множества последовательностей ДНК (реальных и мнимых) геномов клетки.

($**$) *Превосходство биологии над физикой*. Некоторые (не все) специальные функции белка P зависят от «раскрашенной формы» поверхности ∂P, отвечающей за прямые *физические взаимодействия* этого белка с другими молекулами, например белками, которые подобны силам притяжения между различными локусами в молекулярной цепи белка P.

Но «спроектированная» эволюцией организация функций белков в клетке очень *непохожа* на то, что наблюдается в естественных *физических* системах. У этой организации нет физического воплощения, нет ничего подобного «белковому телу» P.

(Некоторые функции белков отражаются, хотя и в ограниченной степени, в *сетях белковых взаимодействий*, которые описывают систематические близкие контакты между белковыми молекулами в клетке[9].)

Поднимемся выше по лестнице сложности и попытаемся понять в формальных терминах, как физиологический *смысл*, закодированный в геноме организма, т. е. *фенотип* этого организма, «разворачивается» в процессе эмбриогенеза.

Потенциальным математическим форматом для такого понимания может быть, как и раньше, представление «пространства» $\mathscr{APO}$ *анатомий + физиологий мультиклеточных организмов* как подфактора пространства $\mathscr{DNA}$ (реальных и мнимых) геномных последовательностей[10]. Однако достижение этой цели не кажется реалистичным по следующим причинам.

☹ «Пространство» $\mathscr{APO}$, в отличие от (настоящего) пространства белков $\mathscr{PB}$, неизвестно в своей полноте, а пространства $\mathscr{APO}_\alpha$ *доступных атрибутов* α организмов никоим образом не аппроксимируют (по большей части неизвестное) пространство[11] $\mathscr{APO}$.

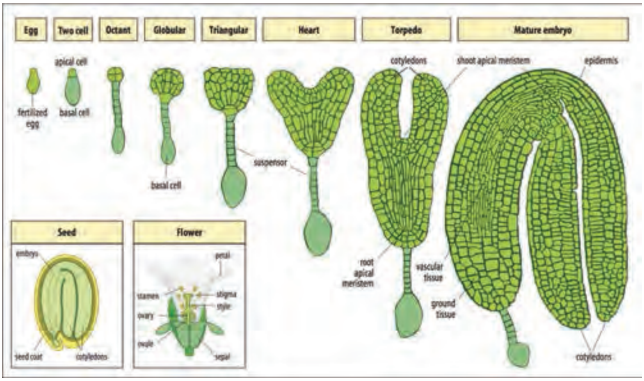
---

[9] Сеть идей, изображённая на рисунке в гл. 2 (с. 112), на самом деле представляет собой модель белковой сети, заимствованную из `http://blogs.discovermagazine.com/loom/2004/02/29/networks-under-construction/`.

[10] Возможно, это пространство $\mathscr{DNA}$ придётся расширить с помощью дополнительной *эпигенетической* информации (например, информации, молекулярно «закодированной» в материнской яйцеклетке), а также, быть может, эволюционных данных об организмах и их геномах.

[11] Структура ансамбля $\{\mathscr{APO}_\alpha\}$, даже тех его частей, которые были поняты, непредставима чем-либо столь логически простым, как математическая категория.

☹☹ Мы не знаем, даже в самых общих терминах, как выглядят правила *межклеточных взаимодействий*, в том числе *система клеточных сигналов*, управляющая *биологией морфогенеза*.



☹☹☹ Ни одна известная математическая модель не способна отразить ключевые свойства морфогенеза, такие как устойчивость форм животных (скажем, млекопитающих и птиц) в процессе их роста с детства до зрелости.

Тогда как тело простого жука читает и понимает сообщения, закодированные в его геноме, и реализует их *смысл* посредством развития и поддержания собственной жизни, наш просвещённый разум терпит унизительное поражение, пытаясь разглядеть *смысл* этих сообщений.

Но если мы уступаем в интеллекте телу жука, есть ли у нас шанс понять человеческий мозг?

Можем ли мы преуспеть в моделировании того, как *мозг* извлекает *смысл* из сигналов, которые он получает, и придаёт *смысл* сигналам, которые он порождает?

Затея кажется безнадёжной. *Смысл* мозга, в отличие от *смысла* белков в клетках и от межклеточных сигналов, даже не обладает физическим или физиологическим воплощением — это каприз, порождаемый воображением мозга.

Однако, парадоксальным образом, именно эта «нефизичность» *смысла* и делает возможным построение формальной математической модели того, как мозг понимает естественные сигналы, равно как и неестественные — порождаемые другим мозгом.

Поводом для оптимизма служат очевидные *ограничения* человеческого мозга. Сигналы, получаемые и издаваемые мозгом, не обладают тонко настроенной специфичностью межклеточных химических сигналов. Мозг, в отличие от живой клетки, не вступает в непосредственный контакт со средой, он не обладает внутренним знанием внешнего мира, как и встроенной способностью физиологического моделирования внешнего физического мира и/или мира человеческих отношений[12].

> *«Логический фолдинг» «последовательностей» электрохимических «символов», получаемых, а также порождаемых мозгом, придающий им осмысленные формы — тени событий и объектов «реального мира», — с необходимостью является* (*почти*) *полностью формальным процессом.*

Говоря математически, мы представляем себе *смысл*, возникающий в результате этого «фолдинга», как ансамбль подфакторов $\mathscr{M}_\alpha$ в пространстве (потоков определённого класса) сигналов $\mathscr{S}$, при этом *понимание* есть нечто вроде *операционного представления* стрелки, символизирующей переход к этим подфакторам:

$$\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{M}_\alpha.$$

Разумеется, это ни в коем случае не *решение* проблемы *смысла*, но предложение возможного *языка для формулировки* этой проблемы. Приняв такой язык, мы сможем искать решение как описание *определённой математической структуры* в ансамбле $\mathscr{M}_\alpha$, а также в ансамбле $\mathscr{A}$ самих *атрибутов*[13] α.

Структуры этих ансамблей $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}_\alpha$, а также *стрелы понимания* «$\rightsquigarrow$», зависят от набора $\mathcal{S}$ модельных сигналов, использованных для их построения. Эти структуры затейливы и запутанны, но далеко не просты и не универсальны.

Просто и универсально, по нашему убеждению, *множество правил обучения*, которые позволяют перейти от $\mathcal{S}$ к «$\rightsquigarrow$» и тем самым к $\mathscr{M}_\alpha$.

Универсальность — самое главное свойство, выполнение которого мы требуем от самобучающихся систем/программ: они должны быть применимы ко *всем без исключения классам* поступающих сигналов, независимо от их «смыслов», и пользоваться одним и тем же арсеналом правил для изучения языков, шахмат, математики и искусства хождения по канату.

---

[12] Мозг способен отображать геометрию внешнего мира в свою собственную внутреннюю геометрию. Кроме того, управление движением (частей) тела, например вращением глазного яблока и суставами скелета, возможно, играет ключевую роль в способности мозга воспринимать *вращательную симметрию* трёхмерного пространства. Но едва ли эти *несимволические представления* лежат в основе высших когнитивных способностей человека, таких как язык и последовательные рассуждения.

[13] Мы говорим «ансамбль» и «атрибут», чтобы раньше времени не связывать себя с точными математическими понятиями, такими как, например, *множество*.

Без универсальности у нас нет шансов на некосметическое использование математики[14], и только «умная математика» может обеспечить универсальность процесса обучения[15].

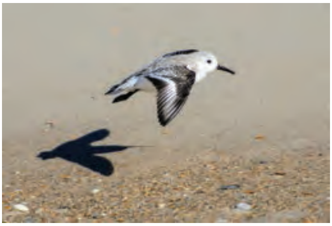
Но в дальнейшем мы в основном объясняем идеи эрго-обучения, не апеллируя к «абстрактной» математике.

ТЕРМИНОЛОГИЯ: *фактормножество, редукция, категоризация, сжатие.*

Если дано то, что математики называют *множеством* S, т. е. корректно определённый[16] «набор» «объектов», то его *фактормножество* $\underline{S}$ получается отождествлением — как бы «склеиванием» или «связыванием» — некоторых элементов этого множества, где «правило склеивания» пар элементов множества S, которое обычно записывается в виде $s_1 \sim s_2$, называется *отношением эквивалентности*, задающим фактормножество $\underline{S}$.

(Возможный пример: множество S состоит из строк, скажем длины 50, из 40 символов — 26 букв английского алфавита, 13 знаков препинания и символа «пробела», — а две строки объявляются эквивалентными, если они отличаются лишь в последних 5 позициях.)

Символически переход от S к $\underline{S}$, называемый *факторизацией*, или *фактоотображением*, представляется стрелкой $Q\colon S \to \underline{S}$, которая записывается также в виде $s \mapsto \underline{s} = Q(s)$, причём Q отображает S *на всё* множество $\underline{S}$. В наглядных терминах, $\underline{S}$ — это как бы тень множества S, задаваемая стрелой лучей света.



---

[14] Это утверждение не имеет смысла, если не уточнить, какого сорта математика имеется в виду. Математические создания — скажем, *машина Тьюринга* и *теорема Пифагора* — отличаются друг от друга так же, как вирус с одноцепочечной РНК — от человеческого эмбриона.

[15] Наши цели отличны от задач, которые ставят перед собой *математические психологи* (например, Роберт Дункан Люс и Джеймс Тарлтон Таунсенд, см. [22, 9, 35], а также `http://www.indiana.edu/psymodel/publications/all.shtml`), поскольку нас интересует не столько моделирование Человеческого Мозга, сколько те «невидимые» процессы, которые формируют Мозг.

[16] Это условие «корректной определённости» делает проблематичным, например, утверждение о том, что *осмысленные предложения* некоторого языка составляют множество.

(В приведённом выше примере со строками фактормножество $\underline{S}$ состоит из всех строк длины 45 и применение отображения Q сводится к опусканию последних 5 букв в строках.)

Наоборот, если дано сюръективное отображение Q из множества S на другое множество T, то склейка, или отождествление, элементов s_1 и s_2 в S выражается равенством $Q(s_1)=Q(s_2)$, и тогда T можно рассматривать как фактор множества S по отношению эквивалентности

$$s_1 \underset{Q}{\sim} s_2 \Leftrightarrow Q(s_1) = Q(s_2).$$

Подфактор множества S есть фактормножество некоторой части (подмножества) P в S. Таким образом, отношение эквивалентности и соответствующее факторотображение заданы только на P.

(Например, P может быть «множеством» *осмысленных* английских предложений, выражаемых строками из пятидесяти символов в «алфавите» из 26+13+1 знаков, причём две такие строки объявляются *эквивалентными*, если они несут *один и тот же смысл*. Здесь расплывчатость терминов «осмысленный» и «один и тот же смысл» вынуждает рассматривать не отдельные P и Q, а скорее семейства отображений $Q_{\alpha,\beta}$, заданных на подмножествах P_β в S.)

В физике факторотображения между *пространствами состояний*, например отображения, получаемые отбрасыванием некоторых координат, описывающих «состояния», называются *редукциями*.

В лингвистике говорят о *классификации*, или *категоризации*, и подмножества взаимно эквивалентных элементов s в S называются *классами* или *категориями*[17].

В нашем контексте стрелку $S \to \underline{S}$ можно назвать, пусть и только метафорически, *сжатием информации* или *устранением избыточности*.

Однако слово «устранение» не значит, что избыточность — это что-то плохое; наоборот, она играет ключевую роль в «логическом фолдинге» естественных потоков сигналов, подобно тому как фолдинг белков опирается на избыточность информации, кодируемой последовательностями аминокислотных остатков. Из потока, лишённого избыточности, нельзя извлечь никакого смысла[18].

Но, в отличие от ситуации с белками, у нас нет чёткого понимания того, что представляет собой этот «логический фолдинг». И речь идёт не просто о технических подробностях — у нас до сих пор нет представления о *сути* математики, отвечающей за *понимание* и *обучение пониманию смыслов*, переносимых потоками сигналов.

---

[17] Они не имеют никакого отношения к *математическим категориям*.

[18] Таким образом, логически идеальная формализация некой математической идеи, перенаправляющая математические потоки из удобных каналов, которые математика делит с естественными языками, в узкие канавы мысли, вырытые логиками, наносит ущерб пониманию этой идеи.

Глава 4

Универсальность, простота и эрго-разум

> *Из хаоса господь создал мир; из могучих страстей рождается народ.*
>
> Байрон

Наше увлечение самообучающимися системами вызвано кажущейся почти божественной способностью мозга младенца (а также детёнышей некоторых животных) воссоздавать *согласованную* модель *внешнего мира* из *видимого* хаоса получаемых им потоков *электрических/химических сигналов*.

Представьте себе, что на экране компьютера вы видите то, что «видит» мозг младенца: «пульсирующую струящуюся массу наэлектризованных движущихся точек», в которой непостижимым образом закодирована некая никогда прежде не виданная и даже невообразимая «реальность». Удастся ли вам воссоздать что-нибудь из этой «реальности»? Придёте ли вы к таким понятиям, как *«тень»*, *«круглость»*, *«квадратность»*?

Сможете ли вы извлечь хоть какой-нибудь *смысл* из Фурье-подобного преобразования звуковой волны, которое получает слуховая система мозга?

Нет. «Зрелый мозг» эту способность утрачивает. Мы не в состоянии даже распознавать двумерные образы, глядя на графические изображения уровней освещённости, а это гораздо более простая задача. То, что совершает мозг детёныша шимпанзе, более «абстрактно» и трудно, чем недавно найденное доказательство *Великой теоремы Ферма*.

И тем не менее мы предполагаем, что эрго-мозг младенца функционирует в соответствии с

универсальным набором простых правил обучения.

Следуя этим правилам, эрго-мозг *извлекает структурную информацию*, «растворённую» в потоках сигналов, и постоянно *перестраивается*, вбирая в себя эту структуру.

(Нет шансов сформулировать разумную гипотезу относительно того, как эти правила имплементированы в нейрофизиологии человеческого мозга, хотя кажется правдоподобным, что они встроены в «архитектуру путей» обработки сигналов в мозге. Но мы попытаемся выдвинуть как можно больше догадок об этих правилах, глядя на универсальную проблему обучения с точки зрения математики.)

Пока мы можем приводить лишь умозрительные доводы в защиту этой универсальности, апеллируя к «эволюционной экономии Природы» и «пластичности мозга», причём главное свидетельство в пользу простоты и универсальности работы эрго(мозга) заключается в способности человека усваивать языки и изучать математику.

Сие может показаться вам парадоксальным: как столь *сложные* процессы, скажем изучение тысячи страниц математического текста, приводящее к *пониманию* доказательства *Великой теоремы Ферма* (мы уж не говорим о том, что происходит в головах тех, кто придумывает такие доказательства), могут проистекать из чего бы то ни было *простого*?

Однако специализированная и/или сложная программа обучения, *достижимая эволюционным путём*, не смогла бы овладеть математикой, далёкой от той приземлённой деятельности, для которой «предназначен» мозг.

В конечном итоге мы хотим составить *короткий* список *общих* принципов «извлечения» *математических структур* из *общих* «потоков сигналов». Эти потоки могут быть очень разными — хорошо организованными и структурированными, как процессы математической дедукции, или же беспорядочными, как *«лавина крошечных электрических токов»*, изображённая Чарльзом Шеррингтоном в его описании мозга.

Разумеется, самообучающаяся система (будь она универсальной или специализированной) может обнаружить *нетривиальные* структуры только в *интересных* потоках сигналов. Скажем, из полностью случайных или константных потоков ничего извлечь нельзя.

Но сигналы, модулируемые *чем-то осмысленным* из «реального мира», таят в себе *математические структуры*, которые мозг младенца умеет обнаруживать и воссоздавать.

Универсальные модели в поведении животных

> *Когда, будто по волшебству, из куколки появляется прекрасная бабочка, окрылённая и совершенная, ⟨…⟩ ей по существу нечему учиться, ибо её коротенькая жизнь вытекает из её организации, как мелодия из музыкальной шкатулки.*
>
> Дуглас Сполдинг[1]

---

[1] Дуглас Сполдинг (1840(41?)–1877), основатель *этологии*, может, наряду с Георгом Менделем, по праву считаться самым оригинальным мыслителем XIX века в области биологии (и психологии). Он открыл *эффект запечатления* у детёнышей животных (который в 1930-е годы популяризировал Конрад Лоренц) и начал изучение оборонительных реакций. В отличие от Дарвина и Фрейда, он не пытался изложить свои идеи обывателям, и его имя осталось неизвестным широкой публике.

Почему универсальные? Нереально ожидать, что эволюция могла успеть создать путём отбора длинные самообучающиеся программы, специально предназначенные для различных целей, однако «умные» универсальные программы могут обслуживать несколько разных ситуаций.

Пример: эффект ястреба/гуся. Детёныш животного отличает *часто наблюдаемые* фигуры, скользящие у него над головой, от тех, что появляются *редко.*

Первые в конце концов перестают вызывать реакцию «Прячься!», однако любая необычная форма, например фигура ястреба, заставляет животное бросаться в укрытие.

Подобные универсальные программы развиваются в окружении эволюционно более старых *общих «идей»*, которые представляют собой своего года *ярлыки* типа опасно/безвредно, съедобно/бесполезно и т. д., выборочно ассоциированные в мозге животного/человека с разнообразными *конкретными* «реальными сущностями» внешнего мира.

Однако *НИ ОДНА универсальность* в биологии не является математически идеальной: «законы биологии» — не чета законам физики.

Для биолога самый общий закон Природы — это *генетический код, конкретное* соответствие между двумя множествами, случайным образом застывшими во времени: одно из них содержит 61 из 64 возможных триплетов четырёх оснований (аденина, тимина, цитозина и гуанина), встречающихся в ДНК, а второе — 20 канонических аминокислот, из которых строятся белки[2]:

$\{AAA, AAT, \ldots, TTT, AAC, \ldots, GGG\} \rightsquigarrow$ {❀, ✲, ❊, ✾, ❁, ❉, ✼, ✹, ✷, ✤, ✺, ✵, ✥, ✳, ✶, ❃, ❄, ❂, ❋, ✿, ✖}.

Однако для эрго-мыслящего математика фундаментальная универсальность в биологии заключается в

⋆ *одномерности* полинуклеотидов и полипептидов,

⋆⋆ *цифровом* характере генетического кода,

⋆⋆⋆ *преобразовании информации из линейного кода в трёхмерие*, которое реализуется в *фолдинге гетерополимеров*.

---

[2] Три нуклеотидных триплета — TAA, TAG и TGA — являются *стоп-кодонами* и не соответствуют аминокислотам. Однако TGA может кодировать двадцать первую аминокислоту — *селеноцистеин*.

Эволюция, универсальная грамматика и теория Хомского

> *⟨…⟩ идеи, которые состоят из «символических образов». Первый шаг к мышлению — красочное ви́дение этих внутренних картин, ⟨…⟩ которые создаются «инстинктом воображения» и ⟨…⟩ воспроизводятся независимо разными индивидуумами.*
>
> Вольфганг Паули

Согласно Хомскому, Леннебергу и их последователям, *бедность стимула* (т. е. ограниченность данных) не позволяла бы детям, обладающим поразительной врождённой способностью к языкам, усваивать родной язык настолько быстро, если бы не *универсальная грамматика*, «вписанная» в их *механизм усвоения языка* — «языковой орган» мозга, или, скорее, модуль человеческого разума, возникший в процессе *эволюции* человека как результат некой странной *мутации*.

Лингвисты обычно не утруждают себя попытками предоставить генетическую или нейрофизиологическую информацию об этой «мутации», но оперируют с понятиями «эволюции» и «мутации» *метафорически*.

Вопреки тому, на чём настаивает Хомский, более вероятно, что (цитируя [13])

> *язык ⟨…⟩ не абсолютное новшество, но ⟨…⟩ реконфигурация наследственных систем.*

С точки зрения нашего проекта «Эрго», «универсальные глубинные механизмы обучения» не только позволяют усваивать языки, но выполняют и множество других функций, как, например,

- позволяют ~95 % (не страдающих дислексией) людей на Земле научиться читать и писать;
- позволяют школьникам с математическими способностями, которые составляют 10–30 % всех детей, изучать математику[3];
- позволяют особо одарённым детям (так говорят про Морфи, Капабланку, Таля, Вайцкина) научиться играть в шахматы, наблюдая за игрой взрослых.

---

[3] Для возраста 3–5 лет этот процент, возможно, близок к 30 % (100 %?); в конце концов он опускается, вероятно, ниже 1 % — отчасти под (неосознанным) давлением «математически дислектичных» родителей и учителей.

Наличие этих способностей в человеческих популяциях решительно опровергает наивные аргументы дарвиновской[4] адаптивной эволюции.

Техническая (не)практичность универсальности. Многофункциональные устройства не входят в список величайших инженерных достижений XX века: *летающие подводные лодки* имели успех разве что в фильмах про Джеймса Бонда[5]. С другой стороны, машинные вычисления XX века пришли к универсальности; базовое машинное обучение, скорее всего, будет следовать этому пути и в XXI веке.

---

[4] Слово «дарвиновский» часто используется как синоним «истинно научного». Однако мы, употребляя его, имеем в виду то, как понималась эволюция до генетической революции последних десятилетий.

[5] Существуют морские птицы, такие как *берингов баклан* или *тонкоклювая кайра*, которые (достаточно) хорошо летают, а также умеют нырять более чем на 50 (150?) метров. Возможно, в будущем нас ждёт технология создания столь же универсальных/адаптирующихся машин.

Глава 5

Свобода, любопытство, интересные сигналы и обучение без цели

Сущность математики заключается в её свободе.

Георг Кантор

Эти слова Георга Кантора применимы не только к математике, но и к обучению. Из универсальности с необходимостью следует *непрагматичность* обучения. В самом деле, *формулировка* каждой утилитарной цели *специфична* — на «множестве целей» нет универсальной структуры. Таким образом,

> *базовый механизм обучения не имеет цели и не зависит от внешнего принуждения*[1],

и простейший пример свободного обучения — усвоение ребёнком родного языка.

Способность естественных самообучающихся систем функционировать

> *без цели, без руководства, без принуждения*

не более парадоксальна, чем, скажем, движение механической системы в отсутствие силы.

Внешние ограничения и силы изменяют поведение таких систем, но *источником* движения остаётся *инерция*. (Метафоры в науке приводят к путанице. *Заставляет* предметы падать сила притяжения, но едва ли её можно назвать *источником* движения Земли вокруг Солнца.)

Вот более близкий к телу пример: подумайте о своей пищеварительной системе. Биохимия метаболических сетей в клетках вашего тела не нуждается в учителе, хотя процесс пищеварения запускается голодом.

Так и вы, быть может, начинаете учиться играть в шахматы или ходить по канату, чтобы произвести впечатление на приятелей, но самообучающиеся программы в вашем (эрго)мозге не несут следов этой цели.

---

[1] Боль от падения или столкновения с чем-нибудь, может, и помогает вам научиться бегать, хотя и это вопрос спорный; но, вопреки тому, что думают бихевиористски настроенные методисты, *вознаграждение/наказание/принуждение* направляет процесс обучения, не столько *подкрепляя* его, сколько *сокращая и ограничивая*. Ср. [24], [41].

Эрго-системы. Это универсальные самообучающиеся системы, которые мы хотим создать. Они должны учиться по собственной инициативе, самопроизвольно, не нуждаясь в руководстве и принуждении. (Строго говоря, наше понятие эрго-системы шире, в частности, оно не исключает естественные самообучающиеся системы эрго-мозга.)

Любопытство как внутренняя мотивация. Идея того, что мы называем *эрго-системами*, близка к понятию, ранее предложенному Шмидхубером [31], а также Удейером, Капланом и Хафнер [27] под названием *внутренне мотивированных роботов, побуждаемых любопытством.*

Данная «мотивация» реализуется в виде некоторого класса *прогнозирующих программ*, зависящих от параметра B, который связан с поведением роботов (например, являясь его функцией).

Эти программы $Pred = Pred(H, B)$ определённым образом «предсказывают» входящие сигналы исходя из истории H, а роботы запрограммированы на то, чтобы оптимизировать (специальным формально определённым образом) качество этого предсказания, варьируя параметр B.

Таким образом, «свобода» для эрго-мозга — это не только возможность порождать любые сигналы, какие ему «хочется», но, скорее, возможность получать на эти сигналы «интересные» ответы среды.

К примеру, жук, ползущий по *бесконечному* листу, обладает *нулевой* свободой: куда бы он ни пополз, он не узнает ничего нового. Однако доступность края листа увеличивает его «свободу».

Аналогично[2] эрго-мозг приходит к «пониманию» мира, «пытаясь максимизировать» свою «предсказательную силу», но что именно предсказывает эрго-мозг на каждом этапе, зависит от того, какая структура уже была построена. «Архитектура понимания» в человеческом разуме строится из «кирпичиков предсказуемости» всевозможных форм и размеров; это трудно примирить со словами Рене Тома *«Предсказать — не значит объяснить»*.

Но чтобы максимизировать нечто, необходима какая-то свобода выбора, например, ваш глаз должен иметь возможность пробежаться по строчкам/страницам, а при игре в шахматы в вашем распоряжении имеется определённый запас ходов.

Когда этот запас становится слишком ограниченным, эрго-мозг ощущает *скуку* и *досаду*. Так происходит, например, когда зануда-лектор сдерживает ваше любопытство, показывая слайды построчно и не позволяя вам увидеть всю страницу целиком.

---

[2] Плотность распределения жуков на листе похожа на плотность распределения времени, которое ваш глаз, разглядывающий этот лист, проводит в той или иной его точке.

Самый драматичный пример препятствования обучению описан Хелен Келлер[3]:

> *Когда-то я знала лишь темноту и тишину, ⟨...⟩ моя жизнь не имела ни прошлого, ни будущего, ⟨...⟩ но одно маленькое слово стекло с чьих-то пальцев в мою хватающую пустоту руку, и моё сердце затрепетало от восторга жизни.*

Идею «*интересного*» — того свойства структуры, которое возбуждает «любопытство» ученика, — проще всего ухватить, глядя на экстремальные примеры *неинтересных* сигналов — постоянные последовательности:

●●

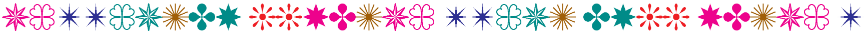
○○

Здесь (почти) нечего предсказывать, нечему учиться, в этом потоке нет материала для строительства вашей внутренней эрго-структуры. (Если бы вас лишили свободы обучения, поместив на бесконечную гладкую плоскость без единой выделяющейся черты, вы бы вскоре испытали умственную смерть; скука калечит и убивает — не метафорически, а буквально.)

Случайные *стохастически постоянные* последовательности выглядят не сильно интереснее:

○●○●●○○●●○●○○○●●○○●●●○●●●○○●●○○○○●●●○●○○●●○●○●○●●●●○●

Этот поток нам «неинтересен», потому что мы теряем контроль над входящими сигналами, однако из следующей строки, которая доставляет вашему любопытному эрго гораздо больше удовольствия, можно многому научиться:



Наша эрго-идея «интересного» балансирует между *максимальной новизной* входящего сигнала и *контролем* над происходящим.

(Вашему глазу чистая случайность представляется утомительно однообразной, однако ваши *вестибулярная* и *проприоцептивная/соматосенсорная системы*[4] с удовольствием прогнали бы ваше тело по пересечённой местности, и периодические прыжки по скользким камням придавали бы этой прогулке приятную рискованность[5].)

---

[3] Хелен Келлер, потерявшая зрение и слух в 18 месяцев, познакомилась с *тактильным языком* лишь в возрасте почти семи лет.

[4] Эти сенсорные системы сообщают вам текущие (абсолютные и относительные) координаты, скорости и ускорения вашего тела и его частей; при этом ускорения по большей части ощущаются как напряжения в мышцах скелета.

[5] *Иррациональность* — отличительное свойство человечества. Лишь в исключительных случаях взрослые животные, *отличные от человека*, способны получать удовольствие от чего-либо, что не несёт ярлык выживания/воспроизводства.

Глава 6

Информация, предсказания и жук, ползущий по листу

Идея *оптимизации прогноза* Шмидхубера—Удейера—Каплана—Хафнер играет ключевую роль в нашем представлении об эрго-системах, однако мы делаем упор не на «поведение», а на «структуру» и понимаем *степень предсказуемости* как часть структуры потоков сигналов внутри и вне эрго-системы.

Эта «степень» определяется как функция трёх (групп) переменных: *самообучающейся системы* УЧЕНИК *и двух фрагментов,* $\overleftarrow{\textit{прошлое}}$ *и* $\overrightarrow{\textit{будущее}}$*, потока сигналов; при этом*

УЧЕНИК *предсказывает «нечто» в* $\overrightarrow{\textit{будущем}}$ *исходя из своего знания* $\overleftarrow{\textit{прошлого}}$*.*

Это «нечто» являет собой результат *редукции* — некой процедуры упрощения, применяемой к $\overrightarrow{\text{будущему}}$, которую предлагает либо сам УЧЕНИК, либо другая эрго-система, например человеческий эрго-мозг.

Пример такого рода — предсказание *класса слова* в *тексте* исходя из нескольких предыдущих слов или классов слов. Рассматриваемые классы могут быть либо синтаксическими, например содержать различные *части речи* — глаголы, существительные, …, — либо семантическими, как, например, классы слов, относящихся к зрению, слуху, движению, животным, неодушевлённым предметам или чему-то ещё.

При этом «степень предсказуемости» класса *слова*, зависящая от корреляций этого класса со словами, *следующими за* ним или предшествующими ему, также несёт в себе структурную информацию.

(*Правильное направление*, т. е. различие между «следованием» и «предшествованием», *не является внутренним* свойством (записи) речевого потока: если язык вам не знаком, то неочевидно, следует ли читать строки слева направо или справа налево.

Однако не исключено, что направление можно восстановить, используя некое *универсальное* свойство «профиля предсказуемой информации» такого потока, *общее для всех* языков[1], подобно (но не вполне аналогично) тому, как стрелу времени можно восстановить по эво-

---

[1] Фонетика записанной речи предлагает одно простое решение, но интереснее было бы задействовать более глубокие уровни лингвистических структур. К примеру, в английском языке *короткие* слова сильнее коррелируют со *следующими* за ними словами, чем с предшествующими; но в других языках это может быть не так.

люции макроскопических наблюдаемых больших физических ансамблей.)

Применим идею оптимизации прогноза к ползущему по листу жуку или к вашему глазу, наблюдающему *зелёное* пятно на *коричневом* фоне.

Мы предполагаем (допуская несправедливость по отношению к жукам), что из всей окружающей среды жук воспринимает лишь две «буквы» G и B — цвета (или, если угодно, фактуры) точек листа, в которых он находится; при этом жук не имеет представления о цветах (или фактурах), но умеет отличать зелёные G-точки от коричневых B-точек.

Обдумывая два своих последовательных положения, наш жук порождает/наблюдает следующие четыре «слова»: GG, GB, BG, BB.

Но может ли жук отличить GB от BG?

Верно ли, что слово GG «больше похоже» на GB, чем на BB?

Алгебраически мыслящий жук переведёт эти вопросы на язык *преобразований* «цветных слов», а именно:

1) *переключение цветов*: GG ⟷ BB, GB ⟷ BG;
2) *изменение порядка букв*: GB ⟷ BG, слова GG и BB не меняются[2].

Эти преобразования по существу не меняют «смысла» слов: зелёный квадратик на коричневом фоне для большинства целей идентичен коричневому квадратику на зелёном фоне. (Признают ли это «равенство» животные?)

Алфавит перемещений жука. Кроме способности наблюдать/различать цвета наш жук (как и наш глаз) обладает некоторым арсеналом возможных перемещений, но знает о них не больше, чем о цветах. Говоря метафорически, жук движется, нажимая определённые «кнопки» и фиксируя цвета тех точек, где он в результате оказывается.

Жук не знает, где именно он находится на листе, и *равенство двух перемещений* — нажатий *одной и той же кнопки* — его мозг воспринимает как постоянство направления и скорости движения.

---

[2] Имеется ещё одно преобразование — изменение цвета первой буквы: GG ⟷ BG, BG ⟷ GG. Вместе с преобразованием, меняющим порядок, оно порождает *некоммутативную группу* из 8 элементов, называемую *сплетением* $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$; роль этой группы в жизни насекомых остаётся неясной.

(В отличие от жука, глаз «знает» своё местоположение s, и, чтобы повторить перемещение, он должен его «забыть». Кроме того, глаз имеет несколько независимых массивов кнопок, соответствующих различным режимам его движений, и некоторые из них являются стохастическими.)

Поразительным, хотя и очевидным образом, именно это нужно для реконструкции *аффинной геометрии* евклидовой плоскости, которая сообщает вам, какие тройки точек • • • плоскости расположены на одной прямой и, более того, когда одна из точек, скажем •, находится в точности *посередине* между • и •.

Если же жук может «сосчитать», сколько раз повторяются одинаковые перемещения, то он может оценить расстояния и таким образом целиком реконструировать *евклидову (метрическую) структуру* объемлющего пространства, т. е. в данном случае двумерной плоскости.

Какие кнопки должен нажимать жук, чтобы эффективно исследовать лист и узнать что-нибудь о его смысле — форме листа?

Поначалу жук чувствует себя прекрасно, будучи в состоянии предсказывать, что при небольших перемещениях цвет обычно не меняется. (Глаз, в отличие от жука, может быстро совершать большие перемещения.) Но затем от повторяемости сигналов он начинает скучать, пока не натыкается на край листа. Неожиданная смена цветов поражает жука, и он пытается нажимать кнопки, позволяющие ему оставаться на краю.

(Как всякий неоднократно имел возможность наблюдать, настоящие жуки проводят непропорционально много времени на краю листа. То же относится к человеческому глазу.)

Чтобы оставаться на краю, жук (это звучит более реалистично в случае глаза) должен помнить несколько более ранних перемещений/кнопок. Если в прошлом они позволяли ему оставаться на краю, то, вероятнее всего, их повторение будет решать эту задачу и в будущем. (Данная стратегия работает, если край листа достаточно гладок, чтобы по масштабам жука являться почти прямым.)

Таким образом, жук обучается искусству передвижения вдоль края, которое позволяет ему наслаждаться удвоенной предсказательной силой по сравнению с той, что доступна ему внутри или вне листа: жук знает, какой цвет он увидит, если нажмёт как «левую», так и «правую» кнопку, в предположении, что такие кнопки у него есть. (Соответствие «лево»⟷«право» добавляет ещё одну инволюцию к группе симметрий вселенной жука.)

Поразительным (случайным?) образом, этот крошечный выигрыш в предсказательной силе, который делает край интересным для жука, сопровождается гигантским сжатием информации: информация, априори необходимая для кодирования листа, пропорциональна его площади, скажем $A \cdot N^2$ битов на N^2-пиксельном экране (где A — относительное число пикселей внутри листа), в то время как его край, представляющий собой кривую длины l, кодируется $\mathrm{const} \cdot l \cdot N \cdot \ln N$ битами (и даже меньшим их числом, если край достаточно гладок). Неудивительно, что распознавание границ встроено в нашу зрительную систему.

(Распределение цветов вблизи края имеет бóльшую энтропию, чем внутри или вне листа, но это лишь один фактор, привлекающий жуков. Например, распределение цветных пятен может иметь энтропию, почти не меняющуюся при переходе через край листа, но характер этого распределения может заметно различаться на листе и вне него, что нелегко описать в терминах классической энтропии.)

В конце концов жуку надоедает ползать вдоль края, но тут он опять встречает что-нибудь новое и интересное — кончик листа или его Т-образное соединение с черенком. Жук остаётся там дольше, нажимая на подходящие кнопки и запоминая, какие последовательности нажатий оказались самыми интересными.

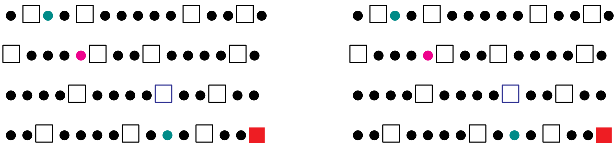
Когда жук вновь отправится в путешествие, возможно уже по другому листу, он попытается делать то, что раньше приводило его в интересные места, а попав в такое место, будет испытывать сигнал «дежа-вю», который представляет собой ещё одну букву/слово в языке жука.

Мы подчёркивали сходства между движениями жука и глаза, но между ними есть также (как минимум) три существенных отличия.

1. Глаз движется гораздо быстрее, чем жук, на неврологической временнóй шкале.

2. Оставаясь внутри своего поля зрения, каждое (относительно большое) перемещение глаз может повторить лишь несколько раз.

3. Кроме «повторения» глазу доступно ещё одно *выделенное* движение, а именно *задний ход*[3]. Кажется, что движения вперёд-назад глаз совершает непропорционально часто, особенно при сравнении похожих изображений:



Но проблемы, с которыми сталкивается наш жук, сложнее, чем определение метрики в *заданном* пространстве.

---

[3] Геометрические воплощения «заднего хода» более любопытны, чем аффинные пространства, связанные с «повторением». Это *римановы симметрические пространства*.

Представьте себя таким жуком на клавиатуре из кнопок, о которых вы абсолютно ничего не знаете. Когда вы нажимаете кнопку, либо не происходит ничего — цвет не меняется, — либо раздаётся сигнал, свидетельствующий о смене цвета.

Сможете ли вы установить соответствие между кнопками и перемещениями на плоскости, а также между сигналами и пересечениями границ одноцветных областей?

Какова оптимальная стратегия нажатия кнопок, позволяющая как можно быстрее реконструировать форму области?

Разумеется, ответ зависит от доступных перемещений и форм областей: вам необходим богатый (но не настолько, чтобы вызывать путаницу) арсенал движений, а области должны иметь не слишком безумную форму.

Сделать вам нужно будет следующее: создать язык, буквами которого являются ваши кнопки/сигналы и в котором геометрические свойства (областей на) плоскости выражались бы последовательностями нажатий кнопок, сопровождаемых сигналами. Если в ходе экспериментов с нажатием кнопок вы видите, что эти свойства (закодированные средствами вашего языка) выполняются со значительной (подавляющей?) вероятностью, вы понимаете, что угадали верно.

Но задача, стоящая перед жуком, ещё сложнее, поскольку его мозг, по-видимому, *не содержит априорной идеи пространственной геометрии*[4]. Геометрия жука — это грамматика «языка кнопок»[5].

Поэтому мозг жука (и вообще любой эрго-мозг) не может использовать стратегию, разработанную для какого-то конкретного случая, а должен следовать *универсальным* правилам, как, по нашему мнению, и поступают настоящие жуки. Успех зависит от относительной простоты/универсальности плоской геометрии; точнее, от групп(ы) симметрий плоскости. (Эта симметрия нарушается «цветными областями», и, как ни странно, именно *нарушение* симметрии делает её заметной для «наблюдателя» — жука или глаза за клавиатурой.)

Жук может составить адекватное представление о мире, потому что, невероятным образом, *универсальность универсальна*:

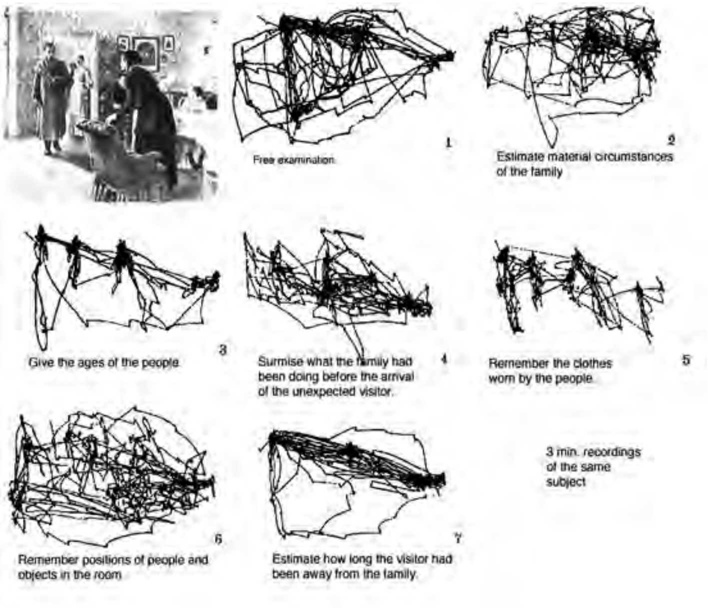
> математическая универсальность стратегий жука соответствует универсальным математическим свойствам мира.

Эта универсальность формирует механизмы ваших мыслительных процессов, равно как и мыслительных процессов жука. Ваш глаз про-

---

[4] В мозге некоторых животных, например мышей, имеются *программы составления карт*.

[5] Это похоже по духу, но отличается во всех конкретных деталях от того, как математики аксиоматически определяют геометрии.



водит больше времени, фокусируясь на *границах* изображений, в точности как жук, ползающий по краю листа, а больше всего внимания вы обращаете на концы слов, так что обычно не оечнь внажо, в ккаом пдрояке иудт бвкуы в слове.

> Движения глаз отражают процессы человеческого мышления, и поэтому записи их позволяют в какой-то мере судить о мышлении наблюдателя. ⟨…⟩ Внимание зрителя часто обращается к элементам, которые не дают важную информацию, но, по его мнению, могут сделать это. Часто внимание зрителя останавливается на элементах, необычных в данной ситуации, незнакомых, непонятных и т. д.[6]

---

[6] А. Л. Ярбус, «Движения глаз при восприятии сложных объектов». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.

Глава 7

Камни и цели

> *Reach high, for stars lie hidden in you.*
>
> *Стремись ввысь, ибо в тебе кроются звёзды.*
>
> Рабиндранат Тагор

Некоторые антропологи полагают, что овладение искусством точного броска — способностью, присущей лишь человеку[1], — явилось ключевым фактором в эволюции мозга первых гоминидов[2]. Согласно *унитарной гипотезе*, соответствующие нейронные сети, возможно, отвечают и за другие виды последовательной двигательной активности, включая те, что связаны с речеобразованием и языком [7], [42].

Мы не можем оценить правдоподобность этой гипотезы с точки зрения нейрофизиологии[3], но в том, что касается математики процессов обучения, между метанием и языком существует бездна различий.

Овладение меткостью — это *одноуровневая задача*. Любой мыслимый алгоритм её решения, сколь бы наивен он ни был — даже тот, который не требует знания законов механики, — будет работать. В наше время ничего не стоит создать механическое устройство, которое многократно выиграет в меткости у любого человека, включая лучших охотников палеолита.

Гораздо труднее, но всё же, наверное, возможно создать аналогичную программу, имитирующую то, что управляет вашим языком и гортанью при правильном производстве звуков. Однако Язык — это сложная многоуровневая структура. Никто и близко не подошёл к созданию «говорящего алгоритма», результаты работы которого хоть отдалённо напоминали бы наиглупейший человеческий разговор[4].

Унитарная гипотеза, верна она или нет, едва ли (?) имеет отношение к нашему «эрго», однако поучительно взглянуть на метание с точки зрения обучения без цели.

---

[1] Возможно, слоны превосходят людей в меткости.

[2] На раскопках в Кату-Пан (Южная Африка) были найдены каменные наконечники для копий длиной 4–9 см, возраст которых насчитывает 500 000 лет, `http://www.newscientist.com/article/dn22508-first-stonetipped-spear-thrown-earlier-than-thought.html`.

[3] У детей наблюдается параллелизм между стихийной тягой к тому, чтобы учиться говорить и учиться ходить/бегать/прыгать, но бросание на меткость — это совсем другая история.

[4] Исключение составляют фразы, которые пациент ожидает услышать во время сеанса психоанализа: ELIZA — программа, написанная Джозефом Вайценбаумом в середине 1960-х гг., — успешно имитирует психоаналитика.

Для метателя самое главное — *мишень*, в которую нужно попасть, выбрав правильные *начальные условия* — вектор скорости камня; тогда камень будет следовать траектории, ведущей к желаемой цели. При этом можно (и даже нужно) полностью забыть о законах ньютоновой механики.

Но с точки зрения физики движение задаётся *вторым законом Ньютона + силовым полем* (гравитацией и сопротивлением воздуха), а начальные условия, и тем более конечная цель, играют второстепенную роль.

Математик ещё на шаг удаляется от древнего охотника, подчёркивая общую идею процесса, зависящего от времени, который описывается/моделируется *дифференциальными уравнениями.*

Мы — физики и математики, со всей нашей наукой вместе — в метании копья не имели бы ни шанса против *гейдельбергского человека*[5]; однако мы — по крайней мере, некоторые из нас — лучше справимся, например, с математическим расчётом траекторий полётов с Земли к другим телам Солнечной системы с использованием *гравитационного манёвра*.

Но с точки зрения гейдельбергского человека[6] неразумно — чтобы не сказать глупо — целиться в несъедобную мишень.

Что ж, давайте скажем прямо: *обучение без цели* отнюдь не является «простым и разумным»; скорее, оно следует за математическим физиком в его понимании механического движения: нет ничего особенного, ничего *внутренне* интересного *ни в мишени охотника*, сколь бы голоден он ни был, *ни в начальных условиях*, пусть для их достижения и требуется большое мастерство. *Универсальным* и наиболее важным с нашей точки зрения является *преобразование*

$$\textit{начальное положение} \mapsto \textit{цель},$$

в котором спрятаны законы движения, выражаемые дифференциальными уравнениями.

Есть много потенциальных мишеней и начальных условий, но не так много фундаментальных законов L и связанных с ними преобразований *начальное положение* $\mapsto$ *цель*[7]. Именно это придаёт им такую ценность в наших глазах.

---

[5] *Гейдельбергский человек* (Homo heidelbergensis), предположительный предок человека разумного, а также неандертальца и денисовского человека, обитал в Африке, Европе и Западной Азии 1 000 000–200 000 лет назад.

[6] Эту точку зрения сформулировал Лев Толстой в своём эссе о науке, где он выступает от лица *простого и разумного человека*. Но, конечно, не все гейдельбергские люди были простыми и разумными. Те, кто были, вернулись на деревья.

[7] Это входит в острое противоречие с *теоремой Кантора*: *логически мыслимых* функций $f : x \mapsto y = f(x)$ больше, чем аргументов x. Но когда речь заходит о «математике реальной жизни», логику не следует понимать буквально.

Аналогичным образом, можно понимать обучение как преобразование *начальных данных* и/или *обучающих инструкций* в *конечную цель* обучения.

Здесь наше положение ещё более плачевно, чем у древнего охотника: едва ли мы имеем хоть отдалённое представление о том, что именно совершает «обучающее преобразование», перенося вас от начальных данных/инструкций к вашей цели.

В каком «пространстве» всё это происходит?

Какова структура «траектории» *начальные данные* $\underset{?}{\rightsquigarrow}$ *цель обучения*?

В отличие от учителя мы интересуемся не *наблюдаемыми* начальными данными и целями, но математическими моделями *невидимых* внутренних структур преобразований *начальные данные* → *цели*, которые строятся в соответствии с «универсальными законами обучения».

Мы не то чтобы отрицаем важность целей, учителей и внешних стимулов для обучения, но отводим им второстепенные роли в «формуле преобразования», отвечающей за стрелку *начальные данные* → *цели*. Мы пытаемся понять процессы обучения вне зависимости от их конкретных целей, или, скорее, хотим увидеть *целеполагающие механизмы* внутри «универсальных законов обучения».

Глава 8

Эго, эрго, эмоции и эрго-настроения

> *Можно понять космос, но не себя; расстояние между собственно человеком и его внутренним «Я» подчас больше, чем расстояние до звёзд.*
>
> Гилберт Кит Честертон

Наши главные предпосылки состоят в том, что механизмы обучения у человека (и некоторых животных) *универсальны, логически просты и не зависят от цели*. Структурированная совокупность этих механизмов есть то, что мы называем *эрго-мозгом,* — важнейшая, хотя и почти невидимая «часть» человеческого разума, сложная умственная машина, которая служит *интерфейсом* между нейрофизиологическим мозгом и (*эго*)разумом.

Говоря метафорически, чтобы сфокусироваться на этом «невидимом», следует переписать декартову формулу

Я мыслю, следовательно, **я** существую

в виде

cogito ERGO sum.

«Я мыслю» и *«Я существую»* суть то, что мы называем *эго-понятиями,* — структурно бессодержательные порождения *здравого смысла*. Но эрго — умственное преобразование *хаотического* на первый взгляд *потока* электрических/химических сигналов, получаемых мозгом, в согласованную картину *мира,* которое определяет вашу личную идею существования, — обладает прекрасно организованной *математической структурой*.

Разум, как мы его графически представили в гл. 2, содержит две совершенно разные обособленные сущности; мы их назвали *эго-разумом* и *эрго-мозгом.*

Эго-разум есть то, что вы осознаёте как вашу личность. В него входит всё, что вы воспринимаете как своё собственное «я», — все ваши мысли, чувства и страсти, а также ваше подсознание, являющееся побочным продуктом *эго*.

Ваше «разумное и рациональное» эго, сформированное процессом эволюционного отбора, воздействовавшим на десятки миллионов поколений наших животных предков, и нацеленное на ваше выживание и воспроизводство, также несёт отпечаток популярной культуры вашей социальной группы.

Эго-процессы наблюдаются в поведении людей и животных, некоторые из них можно узреть с помощью ретроспекции.

Эго-разум «реален», огромен и *структурно бессодержателен*. (Почти) всё, что мы знаем о нём, выражается на языке *здравого смысла*, отражающем логику эго-разума. Этот язык адаптирован к нашим социальным взаимодействиям; его достаточно и для выражения идей *теории разума* в *этнической психологии*.

Эго-разум отвечает за все ПОЧЕМУ? о ваших мыслях; если же вы хотите понять КАК?, следует обратиться к *эрго-мозгу*.

Эрго-мозг логически служит посредником между электрохимической динамикой нейронных сетей мозга и тем, что мы воспринимаем как наше «мышление».

Эрго-мозг — это нечто абстрактное и с точки зрения эго едва ли вообще существующее. В конечном счёте, он описывается на языке того, что мы называем (математическими универсальными самообучающимися) *эрго-системами*, но на данном этапе трудно сказать, чем он является на самом деле, ибо он почти полностью скрыт от сознательного (эго)разума. (Пример такой «скрытой» структуры — механизм *условных рефлексов*, ответственность за который традиционно приписывают мозгу, а не разуму.)

Эрго-мозг, в отличие от эго-разума, есть структурная сущность, лежащая в основе более глубоких умственных процессов у человека и высших животных; до них нельзя добраться ни с помощью ретроспекции, ни наблюдая за поведением людей и/или животных. Поэтому трудно (но не невозможно) изучать его методами экспериментальной психологии. (Этническая психология, психоанализ и иже с ними столь же малополезны для исследования глубин разума, как астрология — для изучения синтеза тяжёлых атомных ядер при вспышках сверхновых.)

Эрго-мозг и эго-разум — автономные сущности. У детёнышей, как человеческих, так и животных, они, вероятно, не слишком обособлены друг от друга; наличие *эрго в разуме* видно по отношению детей к игре.

По мере развития эго-разума («личности», говоря на эго-языке) он отгораживается от эрго-мозга некой стеной[1]. Из-за этого почти вся деятельность эрго-мозга оказывается скрытой.

У взрослых людей эрго хоть и с неохотой, но вынуждено подчиняться требованиям эго:

«*Сосредоточься и реши эту чёртову задачу! Мне нужно повышение по службе*».

---

[1] Драматические последствия случайного разрушения этой стены описаны в работах [26], [29], [28], [36], [37].

Но эти двое с трудом выносят друг друга.

Человеческое эрго обладает серьёзностью играющего ребёнка. Как ребёнок, оно не слишком послушно следует вашим указаниям и неохотно участвует в решении ваших проблем. Эго это раздражает. С его точки зрения, занятия эрго, например составление совершенно бесполезных шахматных задач, откровенно глупы и бессмысленны.

Для эрго же невыносимо скучна утилитарная деятельность эго, скажем тщательное заполнение налоговых деклараций.

Некоторые процессы, косвенно связанные с эрго, такие как *саккады глаз*, можно наблюдать экспериментально, однако прямой доступ к эрго-процессам ограничен[2].

Тем не менее некоторые свойства эрго, работающего в нашем мозге/разуме, явственно видны.

Например, *максимальное число* $N_\circ$ понятий, с которыми наш эрго-мозг может работать, *не организуя их структурно* (на жаргоне психологов это называется «укрупнением»), равно трём или четырём[3]. Этот факт наблюдается на уровне сознания, но, скорее всего, подобная оценка применима ко всем сигналам, обрабатываемым эрго-мозгом.

Например, для правил игры в шахматы это число $N_\circ$ заключено между тремя и четырьмя: три неорганизованных понятия — это «ладья», «слон» и «конь», а короля/ферзя различает слабая структура.

Подобные ограничения существуют и в структурах естественного языка, где они касаются того, сколько раз разрешённые порождающей грамматикой операции могут применяться в одном предложении[4].

Эмоциональные реакции животных (в том числе человека) на внешние стимулы довольно прямолинейны, так как между нейронной и эндокринной системами не посредничает структурно сложное эрго.

Представим себе эмоции в виде различных цветов или шрифтов: их существует несколько десятков, и мозг выбирает подходящий цвет/шрифт для написания каждого конкретного сообщения, например

беги! беги! БЕГИ! БЕГИ!

---

[2] Похожим образом дело обстоит с клеточными/молекулярными структурами и функциями: можно сказать, что «эрго клетки» — это механизмы, управляемые *генами домашнего хозяйства, не вовлечёнными напрямую ни в какое производство, осуществляемое клеткой.*

[3] Некоторые люди утверждают, что для них число $N_\circ$ достигает (миллеровской) «магической семёрки», но с нашей математической точки зрения это представляется маловероятным; некоторые психологи также находят число четыре более реалистичным.

[4] Часто повторяемое утверждение, что «в любом языке потенциально *можно* составить *бесконечно* много предложений», является, вежливо говоря, логическим прегрешением.

Осмысленное понятие «бесконечности» существует только в математике, но в ней нет места для понятия «можно». (Попытки спрятаться за слово «потенциально» или апеллировать к определениям «языка как множества строк» ничего не дают.)

Эрго-настроения также окрашены в различные цвета —

любопытно, интересно, забавно, поразительно*,* *непонятно, скучно,* —

которые служат индикаторами, а также динамическими компонентами деятельности эрго-мозга. Эти индикаторы показывают, сколь далёк наш эрго-мозг от животной рациональности.

Нашу зрительную систему *забавляют* оптические иллюзии, *поражают* трюки фокусников, *очаровывают* выступления гимнастов.

Нашу слуховую систему *пленяет* музыка.

Нашу обонятельную систему привлекают экзотические ароматы.

Наша вкусовая система жаждет странной и зачастую опасно горькой пищи.

Наша моторная/соматосенсорная система играет нашими телами, заставляя нас танцевать, ходить на руках, крутиться на перекладине, жонглировать неудобными предметами, с риском для жизни карабкаться на гибельные скалы, играть в теннис и т. п.

Эрго-настроения, не зависящие от прагматического содержания сигналов, получаемых эрго-разумом, служат универсальными сигнатурами/наблюдаемыми эрго-состояний.

Эти настроения явственно видны как реакции эрго-разума на *внешние* сигналы; однако мы предполагаем, что подобными сигнатурами отмечаются и направляются также *внутренние эрго-процессы*.

Глава 9

Здравый смысл, эрго-идеи и эрго-логика

Говоря, что

> *здравый смысл — это сумма предубеждений, приобретённых до восемнадцатилетнего возраста,*

Эйнштейн не стремился к нарочитой парадоксальности. Имеется длинный список концептуальных прорывов человечества, обусловленных *нетривиальными* отказами мыслить *по-старому, да кроме того, и по здравому смыслу*[1]. Первым номером в этом списке идёт *гелиоцентризм*, предугаданный, хоть и в не совсем привычном нам виде, Филолаем двадцать четыре столетия назад. Век Просвещения был отмечен контринтуитивной идеей Галилея об *инерции*, а XX век внёс в список *квантовую физику* — *абсурдную с точки зрения здравого смысла,* по словам Ричарда Фейнмана. (Любопытно, что в вопросе о *квантах* Эйнштейн занимал сторону здравого смысла.)

Трудно противиться здравому смыслу с его нескончаемым жужжанием у вас в голове и бормотанием в животе.

Развесистое дерево житейской (эго)мудрости, так же как и наше эмоциональное «я», полное переливающихся через край «благородных чувств», есть результат миллионов лет эволюционной обрезки бесчисленных невезучих ветвей этого дерева по принципу «выживает сильнейший». И окончательную форму эго-разумное «я» приняло за последние несколько тысяч лет под культурным давлением социального окружения, столь же беспощадного, как давление эволюционного отбора. Неудивительно, что прагматически-телеологический, эгоцентричный способ мышления, встроенный эволюцией в наше сознание вместе с клокочущим котлом высоких страстей, интуитивно кажется нам естественным и логически неизбежным. Но он был избран природой вовсе не для структурного моделирования мира, в том числе самого разума.

Эрго-идеи проистекают из другого источника, и их направление может быть каким угодно, но только не прагматическим.

Эрго, в отличие от эго, никогда не являлось ни целью эволюционного отбора, ни мишенью для давления массовой культуры — эволюция приняла его из чистой логической необходимости. (Похожим образом, одномерность молекул ДНК не возникла в результате какой бы то ни было селекции: природа не выбирала между одномерностью и, скажем, двумерностью своих любимых молекул.)

---

[1] Именно так мыслит *простой, разумный рабочий человек* Льва Толстого.

Неслучайно эрго находится в постоянном конфликте с доминирующими культурными традициями социального окружения индивидуума.

> *Главный принцип — не дурачить самого себя.*
> *А себя как раз легче всего одурачить.*
>
> Ричард Фейнман

Эго-словарь льстящих нашему самолюбию терминов —

интуитивный, умный, рациональный, серьёзный, объективный, важный, продуктивный, эффективный, успешный, полезный —

собьёт вас с пути при любой попытке рационального описания процессов обучения; эти слова можно использовать только как метафоры. Мы *не можем*, как говорит Лавуазье,

> *улучшить науку, не улучшив язык, или номенклатуру, ей присущую.*

Интуитивное, диктуемое здравым смыслом понятие *человеческого интеллекта* — идея, защищённая многослойным коконом *телеологии* — «цель», «функция», «полезность», «выживание», — есть непреходящая человеческая иллюзия. Если мы хотим понять *структурную сущность* разума, необходимо вырваться из этого кокона, освободиться из плена этой иллюзии и отправить мысль по другому пути.

Трудно, даже для математика, смириться с тем, что вашим сознательным разумом, в том числе базовой (но не всей) математической/логической интуицией, управляет слепая эволюционная программа, ставшая результатом «эго-обработки», которой подвергался разум ваших животных/человеческих предков на протяжении миллионов лет «отбора через выживание», и допустить, что

> математика — это единственная состоятельная альтернатива здравому смыслу.

Однако мы не полностью запрещаем здравый смысл, а, скорее, ограничиваем его применение идеями и понятиями *внутри* математики. Чтобы не сбиться пути, мы используем полуматематические рассуждения — мы называем их *эрго-логикой* — нечто, что нам приходится строить по дороге. Ориентиром при этом нам служит следующий

ЭРГО-ЛИСТ ИДЕЙ:

интересно, осмысленно, информативно, смешно, красиво, любопытно, забавно, поразительно, удивительно, запутанно, непонятно, предсказуемо, бессмысленно, скучно.

С точки зрения эго-разума эти понятия не обладают ни «объективностью», ни «серьёзностью», но они *универсальны*. Напротив, такие понятия, как «полезный», зависят от того, что *конкретно* понимается под «полезностью».

Будем надеяться, что эрго-логика и эрго-идеи укажут нам путь к созданию эрго-программ, моделирующих процессы обучения в разуме ребёнка. В конце концов, этот разум едва ли можно назвать серьёзным, рациональным или объективным.

Трудно склонить ваш эго-разум к эрго-мышлению. Вероятно, поэтому наши попытки разрешить тайны Разума до сих пор были столь безрезультатными.

На примере шимпанзе

Об эрго мало что можно узнать, изучая поведение животных[2], однако наши эго похожи. Это демонстрирует следующий эксперимент, поставленный Сарой Бойзен более двадцати лет назад.

X (Сара) и Y (Шеба) — две самки шимпанзе, которые освоили понятия «больше» и «меньше», а также обожали конфеты — чем больше, тем лучше.

Пока Y просто наблюдала за процессом, экспериментатор предлагал X выбрать одну из двух тарелок, стоящих на столе: «большую», на которой лежало много конфет, или «маленькую», на которой конфет было мало. Выбранную тарелку отдавали Y.

Раз за разом X выбирала «большую» тарелку, получая в результате лишь несколько конфет. По всей видимости, она понимала, что ведёт себя глупо, но не могла побороть стремление «хватать, сколько сможешь».

Затем конфеты заменили пластиковыми жетонами. Теперь X неизменно выбирала «маленькую» тарелку, тем самым получая больше конфет[3], чем Y.

---

[2] Имеются исключения. К примеру, орангутанги питают склонность к *трёхмерной топологии*. Им нравится играть с узлами не меньше, чем людям-математикам.

[3] Как мы будем обсуждать позже, абстрактные понятия «больше» и «меньше» не являются внутренне присущими эрго-мозгу. У шимпанзе эти понятия применительно к еде (в зависимости от интенсивности запаха?) и к несъедобным предметам могут располагаться в не связанных между собой частях мозга/разума.

Предлагаем читателю найти ещё одну интерпретацию данного эксперимента помимо данной и очевидной.

Глава 10

Эрго в нашем разуме

> *Те, кто не слышат музыку, часто считают танцующих безумцами.*
>
> Дао дэ цзин

Самые яркие свидетельства наличия в наших головах чрезвычайно мощных равнодушных к выживанию умственных механизмов возникают в тех редких случаях, когда *эрго-изолирующая стена* даёт *«протечки»*.

Наследие эволюции удерживает «эрго-мощь» нашего разума внутри *эго-изолирующей стены*: охотник-собиратель, у которого эрго-мозг возобладал над прагматичным эго-разумом, жил недостаточно долго, чтобы передать свои гены.

Но если прежде люди с такими «протечками» не имели шансов на «выживание», то современные цивилизованные общества позволяют им жить; и они вспыхивают, как сверхновые, если только их пламя не придушат образовательные учреждения.

Сриниваса Рамануджан (1887–1920) — ярчайшая такая сверхновая во Вселенной Математики; лишь случайно, благодаря вмешательству Годфри Харолда Харди, он получил шанс стать видимым.

В шестнадцать лет Рамануджан прочитал книгу Дж. Ш. Карра «Сборник элементарных результатов чистой и прикладной математики», где были собраны 5000 теорем и формул. Впоследствии за свою короткую жизнь Рамануджан выписал около 4000 новых формул, среди которых одной из первых была формула

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}} = 3.$$

Всю жизнь Рамануджан записывал свои открытия в четыре тетради. Четвёртая, так называемая «потерянная» тетрадь, представлявшая собой просто пачку отдельных листов и содержащая около 650 рамануджановских формул, большинство из которых новые, была обнаружена в 1976 г. Джорджем Эндрюсом в библиотеке Тринити-колледжа[1].

---

[1] Над изданием четырёх томов с доказательствами формул Рамануджана из потерянной тетради, вышедших в 2005, 2009, 2012, 2013 гг., работали Джордж Эндрюс и Брюс Берндт, `http://www.math.uiuc.edu/~berndt/lostnotebookhistory.pdf`.

Отмахиваться от «рамануджанов» и «моцартов» как от *статистически незначимых*[2] явлений — всё равно что считать *вспышки сверхновых простой случайностью* только потому, что в нашей галактике, содержащей миллиарды звёзд, зарегистрирован всего лишь десяток таких вспышек (и ни одной после 9 октября 1604 г.).

Скрытая умственная мощь любого — не только рамануджановского — (эрго)мозга должна на много порядков превосходить то, что доступно эго-разуму, ибо *редкие* умственные способности не могли быть отобраны эволюцией, а структурно сложные функциональные свойства (анатомические или умственные) не могли появиться случайно[3].

Математическая структура какого типа могла бы адекватно описать то «таинственное нечто» в человеческом мозге/разуме, которое вызвало преобразование потока символов из книжки Карра в формулы, выписанные Рамануджаном?

Пока мы не получим ясное представление об этом, мы не сможем принять никакие гипотезы ни о природе математики, ни о природе человеческого разума, ни от психологов, ни от математиков.

Дальнейшие свидетельства существования эрго-разума — универсальной математически сложной машины, скрытой в голове *каждого* человека и отвечающей за непрагматичные механизмы обучения, — можно увидеть в следующем.

1. *Спонтанное усвоение детьми родного языка.*

Хотя человеческая речь зависит от нашей врождённой способности различать и произносить широкое разнообразие фонем, структурное ядро усвоения родного языка следует неким *универсальным правилам,* не привязанным к конкретной физической среде, поддерживающей «лингвистический поток». Об этом свидетельствует изучение языков и написание поэзии слепоглухими людьми.

2. *Овладение чтением и письмом.*

Эти навыки, в отличие от умения говорить, не имеют за собой эволюционной истории.

3. *Овладение прямохождением.*

Нам всё ещё не удалось создать двуногих роботов, способных ходить, бегать и прыгать в неоднородной среде.

---

[2] Эрго-логика, в отличие от страховых компаний, приписывает *значительные* веса *невероятным, чудом происходящим* событиям.

[3] Развитие мозга — случайный процесс, и генетически запрограммированы лишь его общие контуры. Редкие флуктуации неких средних «чисел связности» могут быть усилены «хеббовским синаптическим обучением». Чтобы как следует объяснить его, необходимо рассуждать в терминах не отдельного эрго-мозга, а *(стохастических) пространств модулей эрго-мозгов.*

4. *Увлечение сложными движениями тела: танцами, акробатикой, жонглированием.*

5. *Игровое поведение некоторых животных, например человеческих детёнышей, в те периоды жизни, когда ответственность за их выживание находится в лапах их родителей.*

6. *Тяга людей к бесполезным для выживания видам деятельности, таким как альпинизм и игра в шахматы.*

Хотя и редко, но случается, что взрослые животные, например дельфины, также предаются подобной бесполезно игровой деятельности.

7. *Создание математики и передача математических идей.*

Вероятно, несколько сотен, если не тысяч или даже миллионов людей на Земле обладают достаточным умственным потенциалом, чтобы понять *доказательство Великой теоремы Ферма*[4], прочитав его тысячестраничную *запись*.

Следующий пример демонстрирует человеческое эрго во всей его алогичной красоте.

Ребёнок четырёх-пяти лет, увидев, как кто-нибудь балансирует палкой на кончике пальца, попытается повторить этот трюк, и в конце концов, без какой-либо помощи или поощрения взрослых, он, скорее всего, им овладеет[5].

---

[4] Не существует целых чисел $x>0$, $y>0$, $z>0$ и $n>2$, удовлетворяющих равенству $x^n+y^n=z^n$.

[5] Не исключено, что младенец обезьяны хоть изредка, но также попытается проделать это, но *разумный* взрослый человек или нечеловек и не подумает заниматься подобной ерундой.

Какая математика стоит за этим?

Наивным/тривиальным решением было бы переформулировать задачу в терминах классической механики и теории управления. В этих терминах задачу о равновесии решить легко, но полученное решение имеет несколько недостатков.

- Его нельзя применить, если неизвестны внешние силы.
- Его невозможно масштабировать: ни один робот и близко не сравнится со здоровым человеком в ловкости.
- Оно не выявляет никакой универсальной связи между балансированием палки и рамануджановской формулой $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots}}}$.

Более удачное решение (в стиле эрго) задачи о равновесии с единственной степенью свободы — углом наклона α — можно получить, следя за величиной $\mathrm{grad}_v(T)$, где $T=T(\alpha,\alpha',v)$ — эмпирическое «время падения», α' — угловая скорость, а v — параметр управления, (горизонтальная) скорость опоры.

Но даже это решение уводит вас в сторону от ключевого вопроса:

Что же заставляет детей пытаться повторять подобные трюки? Что заставляет Рамануджана придумывать невозможные формулы?

Дети поменьше любят ставить карандаш на стол вертикально, заточенным концом вверх. Если бы вас поймали и посадили в клетку инопланетяне, а вы не умели бы выписывать формулы в стиле Рамануджана, то доказывать свой «неживотный уровень интеллекта» вам пришлось бы, ставя палочку вертикально в *центр* клетки.

О звёздах

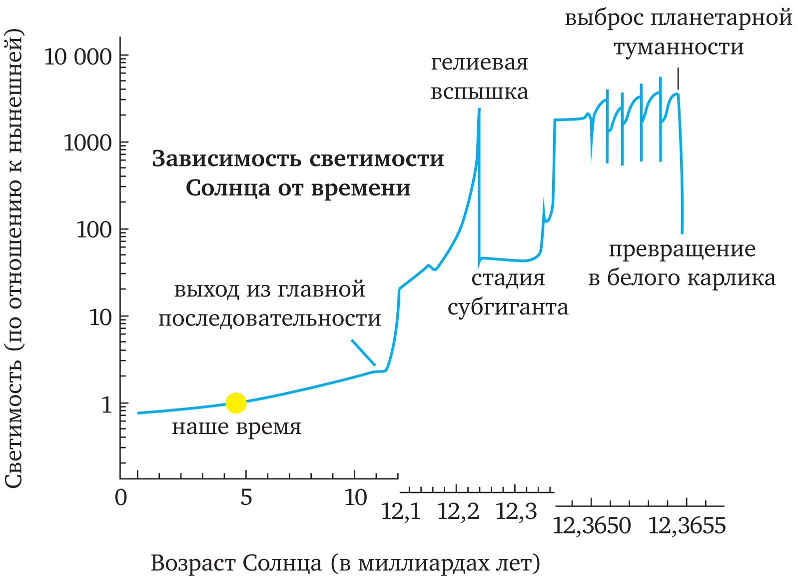
Наша Галактика насчитывает от 100 до 1000 миллиардов звёзд, из которых менее 10 тысяч видны с Земли невооружённым взглядом. По современным оценкам, здесь происходит 2–4 вспышки сверхновых в столетие[6].

Большинство звёзд не становятся сверхновыми. Например, ожидаемая продолжительность жизни солнцеподобных звёзд составляет около 10 *миллиардов* лет, а их смерть *относительно* спокойна.

В десять раз бóльшие звёзды сияют в 10^4 раз ярче и живут только ≈ 10 *миллионов* $(=(10\cdot 10^{10})/10^4)$ лет. Они умирают, вспыхивая в виде

---

[6] Ярчайшей сверхновой в небе науки XIX века, как нам видится это из XXI века, стала опубликованная в 1866 г. статья «*Versuche über Pflanzen-Hybriden*» («Опыты над растительными гибридами») Грегора Менделя, который вывел *существование генов* — атомов наследственности — из статистического анализа результатов своих опытов с растениями гороха. Мир оставался слеп к свету этой звезды на протяжении более чем 30 лет.



сверхновых. Кроме того, некоторые звёзды в двойных системах становятся сверхновыми, наращивая на себя материю своих компаньонов.

Несколько недель сверхновая излучает с интенсивностью в 1–100 миллиардов Солнц.

Глава 11

Язык и языки

> $\langle\ldots\rangle$ *вполне могли возникнуть как сопутствующие структурным свойствам мозга.*
>
> Ноам Хомский

Бо́льшую часть того, что мы знаем о структуре человеческого эргомозга, составляет то, что мы видим сквозь окно человеческого Языка. Это «окно» — изобретение самого мозга, своего рода *полушаг* эргомозга на пути к *смыслу* получаемых и производимых им сигналов. Формально, в смысле гл. 3, это разложение стрелки (подфакторотображения) сигналов/смысла $\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{M}_\alpha$ в композицию

$$\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{LANG} \rightsquigarrow \mathscr{M}_\alpha.$$

Но что такое Язык в простых терминах? Это *разговор, письмо, чтение*?

Какие важные *математические* структуры характерны для языков?

Что позволило бы нам классифицировать полученные из космоса сигналы как «*язык*», а не «*музыку*» или *запись ходов сложной игры типа шахмат*?

Мы не будем и пытаться дать определение[1], а просто обрисуем в нескольких словах ситуацию с языками в мире.

Лингвисты насчитывают ≈ 7000 языков, используемых в настоящее время[2] или вымерших недавно[3], при этом *различные языки* (а не диалекты) определяются как *кластеры* вершин в графе $\mathcal{L}_{Earth}$, где узлы соответствуют наречиям, на которых говорят небольшие сообщества людей, а рёбра (снабжённые весами) выражают степень *взаимопонятности* этих наречий[4].

---

[1] Определять *язык*, ссылаясь на человеческую деятельность, для нас столь же бесполезно, как для молекулярного биолога — определять *растения*, приводя рецепты их приготовления.

А определять *языки* как множества строк символов ничем не лучше, чем определять *растения* как множества атомов.

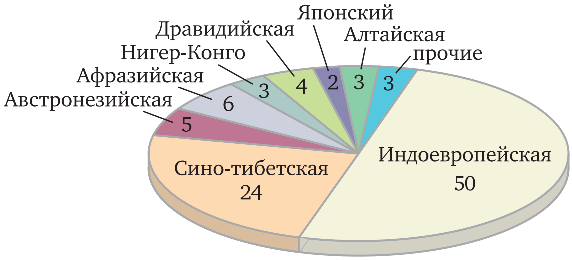
[2] Данные о системах письма (не все из которых широко используются) существуют для ≈ 3500 языков, а про ≈ 700 языков известно, что они не имеют письменности.

[3] В мире существует ≈ 1000 языков, на каждом из которых говорит $\lessapprox 1000$ человек, и каждый год исчезает 20–30 языков.

[4] Такой граф $\mathcal{L}_{Earth}$, разумеется, существует только в мечтах лингвистов; кроме того, идентификация языков как кластеров зависит от используемого *алгоритма кластеризации*.

Языки, общее происхождение которых удаётся проследить, собраны в ≈ 150 *языковых семей*.

Языковые семьи
(число носителей в процентах)



Свистящие языки. В мире существует несколько десятков регионов, где носители коренных языков могут общаться также посредством свиста, что позволяет им передавать сообщения на расстояния в несколько километров.

На языке *сильбо,* в основе которого лежит один из диалектов испанского языка, говорят 20 000 жителей острова Гомера, входящего в состав Канарских островов.

В сильбо испанские фонемы заменяются свистящими звуками, различающимися по высоте и непрерывности. (Пяти испанским гласным соответствуют два вида свиста, а для согласных используется ещё четыре вида.)

Магнитно-резонансная томография показывает, что свистящие звуки обрабатываются в тех же участках мозга, что и предложения испанского языка.

Масатекские языки, на которых говорят 200 000 человек в южной Мексике, являются *тональными* и, таким образом, хорошо приспособлены для свиста. В общинах, говорящих на этих языках, свист как средство коммуникации используется в основном мужчинами, но понимают его и женщины.

Звуки языка *пирахан,* на котором говорят 200–300 индейцев пираха, живущих в тропических лесах Амазонки в Бразилии, можно свистеть, напевать с закрытым ртом или передавать с помощью музыки.

Этот язык, не имеющий связей ни с одним другим живым языком, изучали Керен и Дэн Эверетт, прожившие с народом пираха почти десять лет.

По их данным, в языке пирахан нет специальных названий для цветов, формы множественного числа и понятия *числа,* быть может, даже числа «*два*». Полемику вызывают и многие другие свойства этого языка, например то, что его предложения не строятся согласно *трансформационной грамматике* Хомского.

Пиджины и креольские языки. Пиджины, которые служат для общения между людьми, например торговцами, не имеющими общего языка, строятся из слов и прочих единиц нескольких других языков.

Дети, выучивающие пиджин в качестве родного языка, в процессе обучения создают креольский язык, который, в отличие от пиджина, обладает столь же сложной грамматической структурой, как естественные языки.

Жестовые языки. Сообщества глухих людей по всему миру используют более ста различных жестовых языков. По большей части они не зависят от разговорных языков; их грамматики (почти) не имеют сходства с грамматиками разговорных языков того же региона. Например, *британский язык жестов* (более 100 000 носителей) и *американский язык жестов* (более 300 000 носителей) не являются взаимопонятными.

С точки зрения структуры жестовые языки сравнимы с разговорными, но содержат значительный элемент *непоследовательности*: многие «фонемы» «произносятся» одновременно, за счёт комбинаций форм, ориентаций и движений ладоней, рук и тела, а также выражения лица. Это значительно усложняет разработку письменных форм жестовых языков, и большинство из них таких форм не имеют[5].

Усвоение и развитие жестовых языков следует тем же эрго-путям, что характерны для разговорных языков, и вмешательство благонамеренного, но слепого к эрго учителя может лишь блокировать процесс изучения и тем более создания языка.

Никарагуанский жестовый язык. Единственный известный случай появления нового языка — это возникновение *никарагуанского жестового языка*; этот язык в 1980-е гг. создали в Никарагуа 400 глухих детей, после того как попытки обучить их «жестовому испанскому» провалились и дети оказались в лингвистической изоляции от своих учителей.

Эту историю многие считают ярким свидетельством *врождённой способности человека к языкам.*

---

[5] Вероятно, существует (эрго)алгоритм, кодирующий потоки жестов последовательностями «фонем» и создающий тем самым *фонетические* представления жестовых языков, которые могли бы дать детям возможность усваивать эти языки, слушая и воспроизводя «потоки фонем»; но едва ли этот факт можно проверить экспериментально. Ср. [17].

Усвоение языка слепоглухими детьми

> *Глухота — гораздо большее несчастье* [нежели слепота]. *Ибо она означает потерю самого насущного стимула — звуков голоса, который несёт в себе язык, будит мысли и позволяет нам интеллектуально оставаться в обществе людей.*
>
> Хелен Келлер

Основная часть получаемой нами информации поступает в мозг через глаза и уши[6] (более 50 % коры головного мозга человека посвящено зрению), и внешний мир, реконструированный мозгом слепоглухого человека, — мир, определяющийся тем, чего и кого этот человек касается, — должен сильно отличаться от мира тех, кто видит и слышит.

Однако, получив соответствующие возможности, слепоглухие дети овладевают языками до такой степени, что могут писать стихи. Это поразительно.

> *Жизнь — это или великое приключение, или ничто.*
>
> Хелен Келлер

Великое приключение Хелен Келлер, которая лишилась зрения и слуха в 18 месяцев, началось в возрасте шести лет под руководством двадцатиоднолетней Энн Салливан[7].

Первые попытки понять смысл тактильных знаков потерпели болезненное фиаско, но затем наступил прорыв, когда Хелен связала ощущение от воды, струящейся по её ладони, со знаком Брайля для воды.

---

[6] Младенцы и маленькие дети жаждут *тактильной информации*, поступающей через губы, язык и руки.

[7] Энн Салливан (1866–1936) — блестящий педагог, которую Марк Твен называл «чудотворцем», — сама страдала нарушениями зрения. Родившись в бедной безграмотной семье ирландских иммигрантов, в возрасте семи лет она заразилась трахомой и почти полностью лишилась зрения. Образование Энн началось в 1880 г., когда она научилась читать и писать, а также пользоваться тактильным алфавитом Брайля. К этому времени она перенесла несколько операций на глазах, которые улучшили её зрение. Вскоре после окончания образования в 1886 г. она поступила наставницей к слепоглухой Хелен.

Благодаря творческим методам обучения, применявшимся Энн и специально приспособленным к нуждам Хелен, девочка за несколько месяцев выучила шрифт Брайля, 600 слов и таблицу умножения. Со временем она овладела чтением по губам с помощью осязания, машинописью и дактилологией. Позже она научилась говорить.

За свою жизнь Хелен написала десяток книг, а также множество эссе: о вере, о предотвращении слепоты, о противозачаточных мерах, о взлёте фашизма в Европе, об атомной энергии. Она прочитала также много публичных лекций, ратуя за избирательное право для женщин, права трудящихся, социальное равенство.

Поэзия слепоглухих

Следующие отрывки дают представление о том, как воспринимают мир слепоглухие.

………………………………………………………

В том царстве чудес, где я обитаю,
Я исследую жизнь при помощи рук;
И я счастлива узнаванию;
Мои пальцы вечно жаждут земли,
Чтоб с восторгом испить её чудеса…

Отрывок из стихотворения Хелен Келлер «*Песнь темноты*»[8].

………………………………………………………

Мои руки — это…
Мои уши, мои глаза, мой голос…
Моё сердце.
Они выражают мои желания, мои нужды
Это свет
Что ведёт меня сквозь темноту
……………………………

При помощи рук я пою
Так громко, что слышат слепые
Так ярко, что видят глухие…

Отрывок из стихотворения Аманды Стайн «*Мои руки*»[9].

Свободное использование обычного языка слепоглухими, у которых внутренняя модель внешнего мира сильно отличается от нашей,

---

[8] `http://www.deafblind.com/hkchant.html`.

[9] `http://www.deafblind.com/myhands.html`.

свидетельствует о том, что, в соответствии с идеями Хомского, язык в значительной степени независим от нелингвистических стимулов.

Хоть язык и занимает крошечную часть человеческого мозга по сравнению с той, что отведена зрению, но, по словам Людвига Витгенштейна,

> *границы моего языка означают границы моего мира.*

Необъяснимая способность детей усваивать и использовать язык более всего поражает в слепоглухих. Однако в восьмисотстраничном «Руководстве по лингвистике»[10] этому чудесному явлению посвящено лишь две строчки:

> *Даже такой ребёнок, как Хелен Келлер, потерявший и слух, и зрение, всё же может овладеть языком посредством символов, выражаемых прикосновением и движением.*

Говоря словами Хелен Келлер,

> *единственное, что хуже слепоты, — это видеть, но не уметь прозревать истину.*

---

[10] Blackwell Publishing (2007), p. 466.

Глава 12

Смысл смысла

Всё, что мы называем осмысленным, состоит из вещей, которые не могут рассматриваться нами как осмысленные. ⟨…⟩ «Смысл» — это слово, которое мы должны научиться употреблять правильно.

Искажённая цитата из Нильса Бора[1]

Смысл слов в значительной степени определяется их дистрибутивным характером [тем, как они распределены в окружении других слов в языке].

Зелиг Харрис

Пропагандируемая Харрисом идея «*смысла*» сильно отличается от обычного понимания этого слова, которое неизбежно содержит отсылку к «реальному миру», так что «осмысленность» оказывается почти синонимом того, что способствует сохранению и распространению ваших генов и видимых черт, в них закодированных. (Те, кто произносят слово «смысл», обычно пребывают в счастливом неведении относительно этого факта и очень расстраиваются, услышав такую интерпретацию смысла их собственных действий.)

Первое — это *структурный смысл*, осознать который в полном объёме можно, лишь изучая динамику процессов обучения у людей; второе же понятие — *прагматический смысл* — одинаково для всех живых организмов, по крайней мере для всех животных начиная с насекомых[2]. Это представление о смысле — как о заповеди выживания — было накрепко вмонтировано эволюционным отбором в физический аппарат нашего мозга за несколько сотен миллионов лет до того, как возникло что-либо напоминающее человека.

Один из возможных способов на время избавиться от образа мышления, ориентированного на выживание, состоит в том, чтобы занять мозг чем-нибудь типа шахмат, что (вопреки утверждениям фрейди-

---

[1] В оригинале вместо «осмысленного» фигурирует «реальное», а вместо «смысла» — «реальность».

[2] Семиотически мыслящие *зелёные мартышки* без колебаний заявили бы, что смысл *слов-жестов* их языка состоит в (опасных) объектах-событиях, попадающих в поле их зрения: леопард, орёл, питон, павиан.

стов) не несёт на себе достаточно яркого отпечатка эволюционного успеха предков.

Но даже если вам удастся переключить мозг из эго- в эрго-режим, вы, вероятно, не избавитесь от сомнений в том, что (эрго)шахматы могут поведать что-то нетривиальное об усвоении языков и понимании их смысла.

На поверхностном уровне (это похоже, но не совсем совпадает с тем, что предлагал Витгенштейн) диалог на естественном языке можно рассматривать как игру типа шахмат, которая подсказывает идею (эрго)смысла: *смысл* изречения *UTT* выявляется подобно смыслу позиции *POS* в шахматах: последняя задаётся своей комбинаторикой внутри эрго-структуры $\mathcal{CHESS}_{ergo}$ «всех» эрго-интересных шахматных позиций/партий, а первая аналогичным образом определяется своим положением в архитектуре $\mathcal{TONGUE}_{ergo}$ языка.

Более общим образом, мы хотим рассмотреть следующую идею, которая есть развитие «формальной дискуссии» из гл. 3.

> *Смыслы, придаваемые эрго-структурами (например, нашим эрго-мозгом) сигналам,* ***полностью*** *определяются системами комбинаторных конфигураций и статистических распределений «единиц сигналов», будь то слова, мелодии, формы или другие виды «единиц».*
>
> *Понимание — это* ***структурированный*** *ансамбль таких систем в эрго-мозге человека/животного или в более общей эрго-системе.*

Но даже если вынести за скобки отсутствие точности во всех этих «системах», «конфигурациях» и т. п., данная идея может вызвать несколько возражений.

Самое очевидное из них состоит в том, что слова, и сигналы в целом, — это «лишь названия» объектов «реального мира», в котором и кроется «истинный смысл». Однако с точки зрения мозга единственная «реальность» — это его взаимодействие и/или общение со входящими потоками сигналов. «Реальный мир» — это абстракция, изобретённая мозгом модель, гипотетическое «незримое внешнее что-то», отвечающее за эти потоки. Только эта «реальность мозга» и её смысл могут допускать математическое описание и в конечном счёте поддаваться компьютерной проверке[3].

(Лингвисты, психологи и философы предлагают множество разных ответов на вопросы «Что такое смысл?», «Что такое понимание?»[4].

---

[3] Мы хотим вырваться не из *реального мира*, но из-под гипноза сопутствующих ему слов СУЩЕСТВОВАНИЕ/НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ.

[4] Ссылки можно найти на соответствующих страницах Википедии.

Напротив, мы не даём такого ответа, ибо наше понимание соответствующих эрго-структур считаем пока незрелым. Выражение *«структурированный ансамбль»* предлагается не как определение, но, скорее, как намёк на возможный язык для продуктивного обсуждения понятия *смысла*.)

Другое возражение может состоять в следующем: в отличие от того, как дети усваивают родной язык, чтобы научиться играть в шахматы и понимать их смысл, требуются специальные вербальные объяснения учителя.

Однако некоторые (пусть и очень редкие) дети — мы об этом уже говорили, — такие как Пол Морфи, Хосе Рауль Капабланка, Михаил Таль и Джошуа Вайцкин, выучиваются играть в шахматы, наблюдая за игрой взрослых. Как и в случае сверхновых, было бы глупо отбрасывать эти примеры как «статистически незначимые».

Более серьёзные проблемы, отмахнуться от которых труднее, таковы.

($\circ$) Структура $\mathcal{TONGUE}_{ergo}$ естественных языков *качественно* отличается от структуры $\mathcal{CHESS}_{ergo}$ в нескольких отношениях.

Правила языков, в отличие от правил игры в шахматы, недетерминированны, их не выдают нам в явном виде, многие из них так и остаются неизвестными. Языки прогибаются под тяжестью (эго)прагматики и терпят искажения, вызванные необходимостью упаковки древовидных синтаксических структур в одномерные строки.

«Я» и время. Самое интересное свойство естественных языков — *автореференция* их (эрго)синтаксиса (выражаемая, например, *местоимениями* и/или некоторыми *придаточными предложениями*), которая позволяет языкам *осмысленно* «говорить» о себе.

Наиболее конденсированно это явление проявляется в *анафорах*, как, например,

«X думает, что он хорошо играет в шахматы»;

близкие свойства, общие для всех человеческих языков, наблюдаются в *дейксисе*:

«но я боюсь, что тебя разочарует наивность его ходов»,

а также проявляются в существовании различных *видов* глаголов, связанных с *идеей времени*.

(Трудно сказать, в какой степени *время, воспринимаемое разумом,* продиктовано временно́й динамикой нейромозга, что здесь было встроено эволюцией, а что поступает вместе с потоками входящих сигналов. Неясно также, является ли *время* важной структурной компонентой эрго-мозга и следует ли считать его необходимым ингредиентом универсальных самообучающихся программ.)

Ничто из этого не имеет аналогов в шахматах[5], равно как и в других нелингвистических структурах, например в музыке. Однако в математике автореференция наблюдается на стыке с естественными языками, скажем при передаче математических идей от одного мозга к другому, а также в её логических основаниях, например в *теореме Гёделя о неполноте*.

(○○) Знания внутренней комбинаторики структуры $\mathcal{TONGUE}_{ergo}$ может быть недостаточно для *полного* воссоздания структуры соответствующего языка.

Скажем, лингвистические сигналы, получаемые ребёнком, обычно сопровождаются (необязательно синхронно) сигналами, поступающими через все его сенсорные системы, прежде всего *зрительную* и/или *соматосенсорную* (ощущения прикосновения, тепла, боли, положения частей тела), а также *обонятельную* и *вкусовую*.

Полная структура $\mathcal{TONGUE}_{ergo}$ и/или смысл отдельного слова может зависеть также от (эрго)комбинаторики зрительной структуры $\mathcal{VISION}_{ergo}$ в сочетании с $\mathcal{TONGUE}_{ergo}$.

Структура $\mathcal{VISION}_{ergo}$ обширна и вместительна — зрению отведено более половины коры головного мозга приматов (в том числе человека); однако, по-видимому, глубина структуры «визуального» внутри $\mathcal{TONGUE}_{ergo}$ ограничена, о чём свидетельствует способность слепоглухих овладеть речью, по сути опираясь на *тактильную* сенсорную систему, т. е. ощущения прикосновения[6].

Проприоцепция (ощущение вашего тела/мышц) и *система управления движениями* играют в усвоении (и понимании?) языка более важную роль, чем зрение, поскольку процесс речеобразования запускается возбуждением мотонейронов, которые активируют соответствующие мышцы — мышцы *гортани, языка* и многие другие (у немых — мышцы ладоней/рук); таким образом, значительная часть лингвистической памяти человека есть память о последовательной организации этих возбуждений.

(Проприоцепция, в отличие от зрения, слуха и обоняния, не обладает независимым структурным существованием вне вашего тела; кроме того, она на 100 % интерактивна — вы почти не чувствуете свои мышцы, пока не начинаете их использовать. Внутренняя структура проприоцепции достаточно сложна, но, вероятно, никоим об-

---

[5] Содержится ли «смысл» следующего предложения в играемой партии или же в соединении синтаксических петель автореференции?

«Я думал, что понимаю, почему X поставил белого коня на a1, но следующий его ход оказался для меня сюрпризом».

[6] Имеются весьма интригующие различия в усвоении первого языка зрячими и слепыми детьми, см. [2]. Вероятно, похожие особенности наблюдались бы в усвоении языка зрячим ребёнком, рождённым в сообществе слепых, не осознающих свою слепоту.

разом не является «дискретной/цифровой», сильно отличаясь от того, что мы наблюдаем в языке. Трудно оценить, до какой степени язык может существовать независимо от проприоцептивной структуры $\mathcal{PROPRIOCEPTION}_{ergo}$, которая, вероятно, включает в себя тактильную структуру $\mathcal{TACTILE}_{ergo}$ вместе с системой управления движениями, поскольку серьёзные нарушения в работе этих систем в раннем возрасте приводят к неспособности человека к общению.)

Несмотря на всё сказанное, (эрго)программы (в нашем понимании) для обучения шахматам и языку, равно как и соответствующие идеи *смысла* и *понимания*, имеют много общего.

Чтобы понять, о какого типа программах может идти речь, представьте себе некое *эрго-существо* из другой вселенной, назовём его $\mathcal{EE}$, которому вы хотите сообщить идею/смысл шахмат и с которым хотите поиграть в эту игру.

На подготовительном этапе неплохо бы определить, является ли $\mathcal{EE}$ *мыслящим* существом; эта задача может оказаться несложной, если $\mathcal{EE}$ обладает эрго-мозгом, подобным нашему, что весьма вероятно, если эрго универсально.

Пусть, например, $\mathcal{EE}$ обладает мышлением шестилетнего кроманьонского ребёнка, причём этот «ребёнок» отделён от вас стеной и единственным средством сообщения между вами является перестукивание.

Сможете ли вы определить по стуку, доходящему до ваших ушей, произведён ли он обладателем эрго-мозга (более гибкого, чем ваш, если вам существенно больше шести лет) или дятлом?

Если и вам случится быть шестилетним, вдвоём вы создадите общий игровой язык стуков и будете *осмысленно* наслаждаться общением с его помощью, но разделённые стеной обладатели двух зрелых человеческих мозгов преуспеют не больше, чем два взрослых дятла.

Чтобы стать хорошим учителем шахмат (да и чего угодно), вы должны поставить себя на место $\mathcal{EE}$ и подумать, чему и как вы сами могли бы научиться, рассматривая (статичные) записи партий, и насколько вам мог бы помочь благожелательный динамичный преподаватель. Вскоре вы обнаружите, что этот процесс обучения/преподавания трудно ограничить шахматами — что уже было видно на его начальной стадии.

Даже первый (*эрго-тривиальный*) этап — изучение *правил*, описывающих ходы фигур на доске, — в изоляции был бы почти непреодолим, ибо эти правила нельзя угадать по неисчерпывающему списку (скажем, из тысячи) примеров, не обладая в дополнение к эрго простым и адекватным представлением о геометрии шахматной доски.

Если вы не осознаёте симметрии шахматной доски, число возможных ходов белой ладьи ♖ в присутствии белого короля ♔, которые вам нужно изучить (в $64 \cdot 63$ позициях), составляет более $64 \cdot 63 \cdot 13 > > 50\,000$. «Понимание» пространства с его симметриями — заранее ли оно в нас запрограммировано или приобретено в *процессе изучения пространственных структур* — есть необходимое условие не только для возможности научиться играть в шахматы, но и для передачи/восприятия самой грубой идеи шахмат[7].

Если же у вас в голове нет эрго-аналогов таких понятий, как «*некая фигура на некой линии*»[8], то вам придётся изучать допустимые ходы ладьи во *всех* ($> 10^{45}$) возможных шахматных позициях.

И чем больше вы об этом думаете, тем яснее становится, что единственный реальный путь к разработке программы изучения/понимания шахмат ведёт через некую общую/универсальную математическую теорию, равно приложимую к изучению шахмат и изучению языков.

---

[7] Геометрию доски можно восстановить по скромному списку типовых шахматных партий с помощью *алгоритмов познания пространства*, основанных на идеях Пуанкаре и Стёртеванта, но эти алгоритмы работают медленно.

[8] Зрительная эрго-система ребёнка, вероятно, усваивает подобные «абстракции» намного раньше, чем что-либо настолько «конкретное», как *белый конь в конкретной позиции на шахматной доске*.

Глава 13

Игра, юмор и искусство

Без игры и «игрового мышления» мы не были бы людьми.

Ребёнок носит в себе волшебный фонарь — мир в его мозге проецируется на экран игровой площадки. И всем нам знакомо такое же *игровое поведение* котят и щенков.

Играет большинство молодых млекопитающих, а также некоторые птицы, например воро́ны и во́роны. (Правда, не всегда ясно, какое поведение можно классифицировать как «игру».)

Склонность к игре, у людей и собак сохраняющаяся и в зрелости, сопровождается и другими младенческими характеристиками. В дикой природе некоторые взрослые животные тоже играют, например *красные волки*[1].

Медведь и собака[2]

> [Собака] виляла хвостом, скалила зубы и кланялась медведю, будто приглашая. На языке тела медведь отвечал энтузиазмом и неагрессивной мимикой. Эти два представителя обычно враждебных видов говорили на одном языке: «Давай играть!» Нача-

---

[1] Красные волки, которых иногда называют также горными волками, — проворные и умные животные, несколько односторонне описанные Киплингом [под именем рыжих псов — *Прим. перев.*] в «Книге джунглей».

Местное население систематически уничтожало красных волков, а во времена Британской Индии их уничтожению поспособствовали и британские охотники-спортсмены. Впоследствии некоторые европейские «натуралисты» призывали к истреблению этих животных, поскольку у них нет ни одного «достоинства», а только шерсть между пальцами. Несмотря на предпринимаемые с недавних пор меры по охране красных волков, их популяция (<2000) продолжает уменьшаться.

[2] Источник: `http://www.onbeing.org/program/play-spirit-and-character/feature/excerpt-animals-play/1070`.

> лась шумная возня. Несколько минут собака с медведем резвились и боролись.

Игра не имеет общепринятого объяснения с точки зрения адаптивной эволюции. По-видимому, структуры игровых программ отражают какие-то грани ментальной архитектуры эрго-мозга, возникшие не благодаря, а *вопреки* отбору[3].

Эго и эрго в игре. Стремление *выиграть* коренится в эго, однако с точки зрения структуры «выигрыш/проигрыш» — тривиальная компонента игры.

Чистая эрго-система пыталась бы не выиграть, а скорее подладиться под более слабого игрока, чтобы сделать игру *максимально интересной*[4].

Эго-разум подходит к проблеме игры (и ко всему остальному), интересуясь «почему?»; эго одобряет целевые решения и принимает такие «объяснения» игры в шахматы, как *эдипов комплекс*.

Напротив, мы, последователи эрго, признаём, что не понимаем глубинной природы игры, но при этом отвергаем саму идею любого её (телеологического) объяснения на уровне здравого смысла.

Например, пытаясь постичь «смысл» игры типа шахмат, мы не интересуемся тем, что заставляет человека стремиться к победе, но скорее размышляем об архитектуре сложной сети *интересных игровых позиций*. Алгоритмы для представления таких сетей лежат в основе *универсального обучения.*

> *Фраза, возвещающая о новых открытиях, — вовсе не «Эврика!», а «Вот забавно...».*
>
> Айзек Азимов[5]

Чувство юмора, смех над «комичным» тесно связаны с игрой, это хорошо видно в детях. Данное «чувство» есть пример того, что мы называем *эрго-настроением*, — реакция эрго-мозга на «*смешную конфигурацию идей*».

Кажется, что заставить универсальную программу распознавать такие «смешные конфигурации», скажем, на страницах Интернета проще, чем заставить её распознавать *интересные конфигурации фигур* на шахматной доске.

---

[3] В конце концов отбор может добиться своего и населить Землю исключительно бактериями, не обладающими рискованной тягой к игре. В «ансамбле» из $10^{10^{10}}$ землеподобных планет такое состояние биосферы было бы наиболее устойчивым/вероятным.

[4] Это может оказаться не очень *интересно* для второго игрока, например при игре в кошки-мышки.

[5] Может быть, пятьдесят на пятьдесят?

Искусство — театр, танец, живопись, скульптура, музыка, поэзия — выросло из детской игры на эго-почве человеческого разума, в котором *эстетическое восприятие* — чувство красоты природы или художественной красоты — едино с *ощущением красоты противоположного пола*.

Музыка, поэзия, архитектура растений, животных и соборов, калейдоскопическая симметрия павлиньих хвостов — всё это, не несущее на себе ярлык «воспроизводства»[6], возбуждает у нас чувства, схожие с теми, что вызывает притяжение к противоположному полу.

Но это может лишь увести нас в сторону от того, что мы хотим понять. Например,

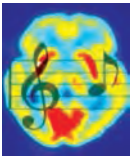
какими *универсальными структурами*, отделёнными от «эго», обладает искусство?

Ну... формальное изучение искусств, особенно музыки, восходит к Пифагору.

Кроме того, существуют и активно развиваются такие области, как *нейробиология искусства, нейроэстетика, когнитивная нейробиология музыки*, и в открытом доступе лежит масса соответствующих публикаций.

Например,

> *«позитронно-эмиссионная томография в сочетании с измерениями психофизиологической активности автономной нервной системы зафиксировала выброс эндогенного дофамина в полосатом теле мозга на пике эмоционального возбуждения в процессе слушания музыки»*[7].



А лавина превосходных степеней, которую обрушивают на вас меломаны, говоря о музыке[8], даёт вам информацию об уровне выброса эндорфинов в их крови, но не помогает ответить на вопросы следующего типа.

Каким начальным уровнем сложности должна обладать эрго-система, чтобы, обучаясь самостоятельно, достичь способности «правильно» оценивать эстетическую значимость произведений искусства?

---

[6] Павлиньи хвосты сексуально значимы для самок.

[7] См. `http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21217764`.

[8] Так же и математики говорят о своей любимой науке.

Скорее всего, этот уровень не обязан быть запредельно высоким, если «значимость» представляется *не числом* $V = V(A)$, которое приписывается произведению искусства A, а отношением (частичного?) порядка

$$V(A_1) >_c V(A_2), \quad c \in C,$$

которое зависит от параметра c, выбираемого из множества C групп искусствоведов[9].

---

[9] Владельцы художественных галерей регулярно решают задачу присваивания клиентозависимых цен $P_c(A)$ произведениям A современного искусства.

Глава 14

Эрго в науке

> *Учёный ⟨…⟩ — это любопытный человек, подглядывающий в замочную скважину природы.*
>
> Жак-Ив Кусто

> *Гармония различных частей, их симметрия, их удачная уравновешенность; словом, всё то, что вводит в них порядок, что придаёт им единство, что позволяет нам ясно видеть и постигать сразу же и целое, и детали.*
>
> Анри Пуанкаре

Обольщение подлинной красотой мира берёт верх над прагматическим диктатом эволюции и заставляет нас тянуться к шахматам, искусству и величайшей из человеческих игр — безумному поиску гармонических структур, которому посвящены естественные науки и математика. Именно «эрго» в человеческом характере формирует ментальную структуру учёного. Само существование науки возможно благодаря «эрго».

Анри Пуанкаре сформулировал это так:

> *Ученый изучает природу не потому, что это полезно; он исследует её потому, что это доставляет ему наслаждение, а это даёт ему наслаждение потому, что природа прекрасна. ⟨…⟩ Я имею в виду ту более глубокую красоту, которая кроется в гармонии частей и которая постигается только чистым разумом.*

Однако, могут возразить, Пуанкаре был верховным жрецом чистой мысли. Согласятся ли с его мнением экспериментаторы?

Майкл Фарадей — учёный-экспериментатор, который единолично внёс самый крупный вклад в нашу жадную до электричества техногенную цивилизацию[1]. Вот что он пишет:

> *⟨…⟩ Великая красота нашей науки химии ⟨…⟩ открывает ⟨…⟩ двери к дальнейшему более обширному познанию, полному красоты и пользы.*

---

[1] Без него мировая история сдвинулась бы на несколько лет назад и мир сегодня, конечно, сильно отличался бы от привычного нам.

Однако учёные-медики — врачи и изобретатели лекарств — не играли в «научное любопытство», ими двигала забота о процветании ближних. Разве не так?

Послушаем, что говорят Александр Флеминг, открывший пенициллин, и Говард Флори, наладивший его использование в терапевтических целях.

Флеминг:

> *Я играю с микробами. В этой игре, конечно, есть множество правил, но ⟨…⟩ очень приятно нарушать эти правила.*

Флори:

> *Это было интересное научное упражнение, и хотя отрадно, что оно оказалось небесполезным для медицины, работу над ним мы начали не поэтому.*

Не нам отмахиваться от того, что эти люди говорят о науке. Пенициллин спас около 100 миллионов человеческих жизней[2]. Без Флеминга и Флори половины из нас сегодня не было бы в живых, а более молодые вообще бы не родились.

> *Наука производит незнание, а незнание подстёгивает науку.*
>
> Стюарт Файрстайн[3]

> *Наука никогда не решает вопроса, не поставив при этом десятка новых.*
>
> Бернард Шоу

Шоу полагал, что шутит, однако наука действительно есть искусство *не*понимания. Мы стремимся понять, но нас не удовлетворяют детсадовские объяснения типа *зубы — чтобы жевать*, а *крылья — чтобы летать*. Для того чтобы понять[4] то, что мы видим перед глазами, мы ищем *новое, неизвестное, невидимое*[5]. Мы счастливы обнаружить десять новых вопросов там, где изначально видели только один.

---

[2] Для сравнения: число жертв «борцов за народное счастье» в XX веке оценивается в 180–220 миллионов.

[3] Файрстайн — биолог. В его лаборатории изучается *обонятельный рецепторный нейрон у позвоночных как модель для исследования общих принципов и механизмов трансдукции сигналов.*

[4] Под «пониманием» здесь имеется в виду то, что называется так в естественных науках. Это «понимание» отличается от «понимания» математиков и имеет мало общего с «пониманием» гуманитариев.

[5] Редкий для гуманитарных наук пример объяснения (пусть всего лишь *гипотетического*) известного неизвестным — это теория Джулиана Джейнса, который выдвинул

Четырёхлетний ребёнок спрашивает:

Почему трава зелёная? Почему мы дышим? Почему вода мокрая, а камни твёрдые? Почему мы не видим в темноте? Почему мы не падаем вверх?

Простой и разумный человек Льва Толстого улыбнулся бы наивности этих вопросов, но учёный XXI века с готовностью признается, что сам ничего этого не понимает, но затем, быть может, сформулирует дальнейшие и лучше поставленные вопросы.

Как хлорофилл способствует фотосинтезу?
Когда и как именно произошла кислородная катастрофа?
Как клетка преобразует химическую энергию окисления в механическую энергию?
Какова работоспособная микроскопическая модель жидкой воды?
Какова природа расходимостей в квантовоэлектродинамической модели света и вещества?
Существует ли непротиворечивая теория квантовой гравитации?…

Естественно, *простой и разумный человек* и слышать об этом не желает. Если он и хочет понять Природу, то в «нескольких простых словах».

Что ж, устройство мира, быть может, и прекрасно в своей простоте, но Природа создала наш разум не для созерцания его красоты. Восприятие этой красоты требует от нас гигантского интеллектуального усилия.

В науке даже самые знакомые и простые на первый взгляд вещи трудно принять на интуитивном уровне. Возьмём, например, второй закон Ньютона, который являет собой откровенно математический (эрго)способ думать о движении:

> *Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur*[6].

Этот закон даже в большей степени, чем первый, входит в противоречие с тем, как наша зрительная и соматосенсорная система (прежде всего *проприоцепция* — ощущение собственного тела) представляют

предположение, что основные средиземноморские религии возникли в результате *краха бикамерального разума* около трёх тысяч лет назад. Гипотеза Джейнса в принципе фальсифицируема — она может быть либо верной, либо неверной. (Теориям религий, да и чего угодно другого в стиле «зубы — чтобы жевать», невозможно присвоить истинностное значение.) Однако проведение реального эксперимента для проверки гипотезы Джейнса недопустимо с этической точки зрения.

[6] Закон II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует (*лат.*).

свойства движения в нашем мозге[7]. Большинство из нас — даже те, кто могут правильно процитировать три закона движения, — в них не верит. Мы интуитивно отвергаем эти законы ввиду их кажущейся несовместимости почти со всем, что мы наблюдаем своими собственными глазами, как, например, движение маятника, которое как будто бы явно противоречит *закону сохранения импульса*.

Но основная причина, по которой наш мозг сопротивляется впитыванию научного знания, заключается в сложности комбинаторной организации этого «знания», которую он должен смоделировать внутри себя[8]. Предположительно число синаптических связей, необходимых для *понимания* «N единиц знания», к примеру, в *теории струн* (представляющей собой раздел математической физики), растёт (по крайней мере) как N^2, в отличие от $\mathrm{const} \cdot N$ связей, необходимых для *впитывания*[9] того же числа «единиц знания», скажем, в *культурной антропологии*, которая удобно ложится в заранее заготовленные ячейки вашего эго-разума.

---

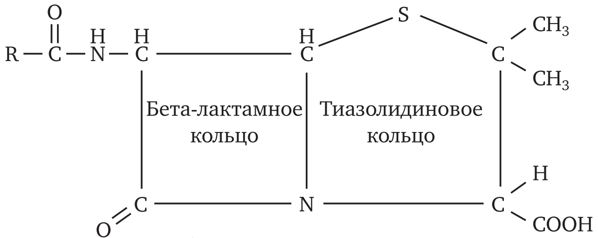
[7] За базовую логику этой реконструкции отвечает эрго, но она служит выживанию нашего эго, и служит хорошо — лучше, чем могла бы служить математическая ньютонова модель.

[8] Трудность с пониманием «абстрактных» математических идей отчасти связана с защитной стеной, отделяющей эго от эрго.

[9] Память в мозге, в отличие от магнитной ленты, устроена не прямолинейно. Так, запоминать длинные плохо структурированные (квазислучайные) последовательности, такие как страницы телефонных справочников и массивы данных «великих исторических событий», трудно — *убийственно трудно* для тех из нас, кто мыслит математически.

Глава 15

Неразумные люди и альтернативная история



Общая структура пенициллина

> *Она* [наука] *с торжеством объявляет ему, сколько миллионов миль от солнца до земли, сколько миллионов колебаний эфира в секунду для света и сколько колебаний воздуха для звука; рассказывает о химическом составе млечного пути, новом элементе — гелии, о микроорганизмах и их испражнениях, о тех точках руки, в которых сосредоточивается электричество, об икс-лучах и тому подобном.*
> *— Но мне этого ничего не нужно, — говорит простой разумный человек, — мне нужно знать, как жить.*
>
> Лев Толстой

Ничто в истории с пенициллином — чудесным лекарством, спасшим многие миллионы людей, — не было разумным. И те, кто его открыли и разработали, были кем угодно, но только не *простыми и разумными людьми*.

Начало современной главе в истории пенициллина положила *пластина со стафилококками* из лаборатории Флеминга, которая в промежутке между 27 июля и 6 августа 1928 г. оказалась неразумным и необъяснимым образом заражена редким по своей антибактериальной активности штаммом плесени *Penicillium notatum*; вероятно, заражение было вызвано спорами, улетучившимися из лаборатории Ла Туша — миколога из больницы Святой Марии, работавшего этажом ниже Флеминга.

В течение 1928–1929 гг. Флеминг установил, что вещество, извлекаемое из плесени *Penicillium notatum*, которое он назвал *пенициллином*, эффективно против многих бактерий.

(Пенициллин подавляет рост так называемых *грамположительных* бактерий, которые не имеют защитной внешней мембраны, например *стрептококков* и *стафилококков*, блокируя рост клеточной стенки при их размножении.)

Флеминг предположил, что пенициллин может использоваться как низкотоксичный[1] дезинфектант; он указал также на возможность лабораторного применения пенициллина для выделения *Bacillus influenzae.* Но, несмотря на несколько терапевтических успехов[2], Флеминг был разочарован нестабильностью пенициллина и занялся другими своими проектами[3].

В 1938 г. Эрнст Чейн (1906–1979), прочитав статью Флеминга 1929 года, предложил Флори заняться исследованием пенициллина.

В 1939 г. Говард Флори (1898–1968) создал (и возглавил) группу учёных для исследования антибактериальных веществ, получаемых из плесени. Используя образец Penicillium notatum, сохранённый Флемингом, они выделили и очистили *пенициллин* — активный антибактериальный агент, содержащийся в плесени, — и произвели его в терапевтически значимых количествах (1940 г.); ключевую роль в этой деятельности сыграли три биохимика: Чейн, Хитли[4] и Абрахам[5].

> *Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?*
>
> Эдвард Лоренц

---

[1] Пенициллин убивает бактерий, но безвреден для человека. Однако для некоторых млекопитающих он ядовит, например для морских свинок, кишечный тракт которых заселён грамположительными бактериями. К счастью, Флеминг и сотрудники Флори — Чейн и Хитли — испытывали пенициллин только на мышах, очевидно, в силу ограниченности доступных им запасов этого лекарства.

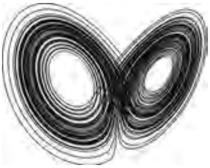
[2] В 1930 г. Сесил Джордж Пейн, лечивший гонококковую инфекцию у детей, с помощью пенициллина добился первого зарегистрированного случая излечения. Затем он вылечил ещё четырёх пациентов с глазными инфекциями, но не смог вылечить пятого.

[3] Александр Флеминг (1881–1955) являлся сотрудником исследовательского отдела лондонской больницы Святой Марии, создателем и руководителем которого был Элмрот Эдвард Райт (1861–1947).

В первый год Первой мировой войны Райт и Флеминг работали над лечением инфицированных ран; с тех пор Флеминг постоянно занимался поиском антибактериальных агентов. До пенициллина, в 1921 г., он открыл *лизоцим* — фермент, присутствующий в слезах, слюне, человеческом молоке, слизи и защищающий от грамположительных возбудителей.

[4] Норман Хитли (1911–2004) разработал основные стадии производства пенициллина в терапевтических количествах. В сочетании с наработками ферментативной технологии органических кислот это привело к быстрому развитию производства пенициллина в промышленных масштабах.

[5] В 1943 г. Эдвард Абрахам (1913–1999) определил химическую структуру пенициллина, включающую в себя *бета-лактамное кольцо*; его результаты были подтверждены в 1945 г. Дороти Ходжкин при помощи рентгеноструктурного анализа. В 1950-е гг. Абрахам внёс значительный вклад в дело выделения и усовершенствования *цефалоспорина*, который убивает бактерии, устойчивые к пенициллину.



История знает несколько поворотных моментов, когда идеи, прозрения и решения таких людей, как Флеминг, Флори, Чейн, Хитли, Абрахам, направляли человечество к его нынешнему курсу[6].

Вот ещё два даже более ярких примера (потенциальной) неустойчивости хода человеческой истории.

1. В 1896–1897 гг. Эрнест Дюшен (1874–1912) провёл первое (?) научное исследование антибактериальных свойств плесени. Свои результаты, касающиеся *Penicillium glaucum*, сходные с теми, что впоследствии получил Флеминг, в 1897 г. он изложил в диссертации «*Contribution à l'étude de la concurrence vitale chez les micro-organismes: antagonisme entre les moisissures et les microbes*»[7], которую отослал в *Институт Пастера.*

Если бы сотрудники (один-единственный сотрудник?) Института Пастера *приняли работу Дюшена всерьёз,* разработка антибиотиков (и развитие мировой фармакологической промышленности в целом) могла бы начаться на несколько десятков лет раньше[8].

Трудно представить тот мир, в котором бы мы сейчас жили, если бы это произошло.

2. Мальчик не может вспомнить название реки, на которой стоит город Берлин, и его не принимают в одесскую гимназию. В поисках возможности получить образование он вынужден перебраться в Соединённые Штаты, где через несколько десятков лет начинает исследование почвенных бактерий. К 1940 г. «мальчик» разрабатывает комплексную программу тестирования антибактериальной активности *актиномицетов*. Это приводит к открытию десятка антибиотиков, включая *стрептомицин* (1943 г.) — препарат, воздействующий на *грамотрицательные* бактерии, первое эффективное средство против *микобактерий*, вызывающих туберкулёз[9].

---

[6] Эти люди оказывали на историю человечества более тонкое возмущающее воздействие, чем то, что описано Стефаном Цвейгом в «Звёздных часах человечества».

[7] «К исследованию борьбы за существование у микроорганизмов: антагонизм между плесенью и микробами» (*фр.*).

[8] Можно сравнить это с тем, что могло бы произойти, если бы Негели понял Менделя. Возможно, в обоих случаях ничего бы и не изменилось: всё научное сообщество в целом, стабилизированное инерцией, не было готово к этим идеям.

[9] Сто лет назад туберкулёзом было вызвано 10–15 % смертей в Европе. В 2013 г. около девяти миллионов человек в мире заболели туберкулёзом, а 1,5 миллиона от него умерли.

«Мальчика» звали Зельман Ваксман (1888–1973)[10]. Стрептомицин был открыт Альбертом Шатцем (1920–2005), работавшим в группе Ваксмана.

Будь одесский экзаменатор Ваксмана менее педантичным, открытие стрептомицина и других антибиотиков могло бы задержаться на несколько лет, за которые туберкулёз унёс бы ещё сотни тысяч людей.

Об антибиотиках и их первооткрывателях

Гвин Макферлейн — гематолог, работавший вместе с Флори, — написал два прекрасных рассказа о жизни и работе первооткрывателей пенициллина: [20], [21].

Дополнительную информацию можно найти в [38], [25], [5], [6], [39], [32], [16], [4], [40], [14], [18], [10], [32], [30].

---

[10] Важным фактором, привлёкшим интерес Ваксмана к антибиотикам, помимо достижений оксфордской группы Флори, стала работа Рене Дюбо (1901–1982), который в 1939 г., под влиянием Освальда Эвери (1877–1955) и с помощью Роллина Хотчкисса, в нью-йоркском Университете Рокфеллера выделил из спорообразующих почвенных бацилл бактерицидное вещество, которое он назвал *грамицидином*.

Глава 16
Математика и её границы

> *⟨…⟩ Объектом чистой математики* [является] *раскрытие законов человеческого познания.*
>
> Джеймс Джозеф Сильвестр

Врождённое[1] умение считать роднит нас с *голубями* и *зелёными мартышками*, но от *восприятия* животными (в том числе людьми) *количества и формы* очень далеко до таких явлений, как *таинственная формула Рамануджана*

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(1103+\frac{24\cdot 27493}{396^4}+\ldots\right).$$

Эта формула, подобно столь же невероятной, но более знакомой *формуле Лейбница*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4},$$

связывает *геометрически* заданное число $\pi = 3{,}14159265\ldots$ с *арифметически порождённой* бесконечной суммой, которая в рамануджановском случае состоит из немыслимо сложных членов[2].

Благодаря чему в математике возможны такие чудеса?
Что такое математика с точки зрения эрго?
Какая математика лежит в основе эрго?

---

[1] Врождённое? Не совсем, по крайней мере у *людей*. Наше арифметическое мышление сплетено с языком, усвоенным в колыбели.

[2] Ряд $1103+\frac{4!(1103+26390)}{396^4}+\frac{8!(1103+26390\cdot 2)}{(2!)^4 396^8}+\frac{12!(1103+26390\cdot 3)}{(3!)^4 396^{12}}+\ldots$, в отличие от лейбницевского ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots$, сходится с экспоненциальной скоростью; это позволяет использовать формулу Рамануджана на практике для вычисления десятичных знаков числа π.

Взаимоотношения между математикой и эрго, с необходимостью закольцованные, можно подытожить следующим образом.

Математика по своей сути есть «всего лишь» пример эрго-структуры.

Математика есть «всего лишь» фрагмент коллективного[3] человеческого эрго.

Математика есть инструмент и язык для изучения эрго-структур, которые являются «всего лишь» частными случаями математических структур.

Поговорим об этом ещё немного.

Небо должно иметь форму сферы.

Аристотель

1. *Ядро математики* — это наука о *поразительных структурах,* связанных с *симметриями* — идеальными симметриями, скрытыми симметриями, суперсимметриями, частичными симметриями, нарушенными симметриями, обобщёнными симметриями, стохастическими симметриями. Удалите оси симметрии — и это ядро на две трети разрушится, вместе с большей частью теоретической физики.

Важнейшие прорывы в развитии математики достигались не сведением неизвестного к известному, но — вопреки здравому смыслу — введением «нереальных объектов», таких как *отрицательные,* а позже и *мнимые* числа, *бесконечно малые, идеальные числа, n-мерные пространства* и т. д., подобно тому как в физике прогресс толкали «нереальные идеи» *атомов, волновых функций, квантовых полей.*

Поразительно, как математике удаётся вмещать в себе все эти симметрии и выражать, например, «*круглость*», внутренне присущую числу $\pi = 3{,}14159265\ldots$, либо бесконечной, но *арифметической* формулой типа рамануджановской, либо же в комбинаторном, почти цифровом виде аксиом, лемм, теорем и доказательств.

---

[3] Мы, математики, составляем крошечное сообщество, которое охватывает порядка 0,001 % всего населения, и, вероятно, лишь несколько сотен из нас (сам я в их число не вхожу) понимают формулу Рамануджана.

Этот факт может показаться неудивительным, ибо (коллективный) эрго-разум, сотворивший математику, представляет внешний мир именно таким образом. Но он может быть также и *эндогенным* свойством математики[4].

Эту «комбинаторную» природу математики можно сравнить и с тем, как Жизнь кодирует виды организмов последовательностями ДНК, правда, в математике нет (?) аналога *передачи информации при помощи фолдинга*. (В некоторых математических доказательствах можно разглядеть примитивную форму «эмбрионального развития».)

> *Математик — это способ эрго-мозга разговаривать с самим собой.*
>
> Искажённая цитата из Нильса Бора

2. Математика — младшее дитя эрго-мозга, она развивается под влиянием наших эрго.

Как говорит Кеплер, математика *сияет в божественном разуме*, но мы не боги и наш разум состоит не только из эрго, он насквозь пронизан эго — поэтому нам так трудно отличать «истинное и интересное» от «важного» и совершать (эрго)правильный выбор.

Эго-разум находит бóльшую часть математики *абстрактной и трудной*, а то, что видно перед глазами, — *простым и конкретным*.

Но эта простота обманчива: то, что «видят» ваши глаза, совсем *не* просто — это результат сложного процесса создания образа, осуществляемого вашей зрительной эрго-системой, которая, вероятно, более абстрактна и трудна, чем почти вся наша математика.

«Эрго» принуждает нас искать «простоту» иного рода, *красивую и интересную* — а вовсе не тривиальную; *тривиальное* нагоняет на нас смертельную скуку. Мы приходим в восторг, когда «простое и очевидное» эго-разума получает объяснение в терминах «абстрактного и трудного», которое априори могло вообще не существовать.

Наши математические алмазы постоянно подвергались шлифовке и огранке — век за веком мы отскребали с их граней слои эго, особенно в последние пятьдесят лет. Кое-что из полученного в результате может показаться «абстрактной чепухой», но, как говорит Александр Гротендик,

> *введение нуля или понятия группы тоже было абстрактной чепухой, и математика находилась в застое несколько тысяч лет, потому что некому было совершить такое ребячество.*

---

[4] Утверждение о том, что «*математика обладает независимой сущностью*», можно понимать лишь метафорически. Обосновать его невозможно никаким мысленным экспериментом или аргументом. Но... чтобы заниматься математикой, необходимо в неё верить. Так же и физики понимают *реальность физического мира*.

3. Создавая математический каркас для «эрго», мы должны выяснить, какие куски нашей математики готовы служить «частями» эрго-систем, что следует отбросить и что требуется создать заново. И помните, что, как сказал Герман Вейль,

> *невозможно применять математику, пока слова затемняют реальность.*

Наш выбор компонент для логической реконструкции человеческого эрго-мозга, назовём его $\mathcal{HEB}$, следует критериям, повсеместно применяемым в математике:

ЕСТЕСТВЕННОСТЬ, УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ, ЛОГИЧЕСКАЯ ЧИСТОТА,
ДЕТСКАЯ ПРОСТОТА.

Математическая универсальность нашего эрго-мозга, в частности его самообучающихся стратегий (программ), проявляется в том, что нам *удаётся научиться играть во множество разных* логически сложных игр и что нам *нравится в них играть*. Поэтому, скажем, программа обучения игре в шахматы в $\mathcal{HEB}$ должна быть *специализацией универсальной* программы обучения.

Но почему такие программы должны быть простыми? В конце концов, ведь

> *человеческий мозг — самый сложный объект во Вселенной, разве нет?*

Ответ заключается в том, что большинство наиболее общих/универсальных теорий логически наиболее просты[5]. Что непросто, так это открыть и сформулировать такую теорию.

Как математики мы готовы признать, что мы в сотню раз глупее эволюции, однако не считаем, что это позволяет ей совершать такие чудеса, как наделение ребёнка логически сложным мозгом в момент рождения.

Веря в простоту, мы ищем собственное решение *проблемы универсального обучения*, адаптируя *чистейшую* математику к «грязному миру» *потоков сигналов* и их *преобразований*, осуществляемых нашим (пусть и гипотетическим) эрго-мозгом.

Но осторожно — математика, направляющая ваши мысли к «логически совершенным структурам», может обмануть вас, когда дело дойдёт до «реальной жизни».

(Арифметика чисел соблазнительно красива, но температуры поверхности шестнадцати поименованных звёзд в созвездии Большой Медведицы, даже будучи выражены в кельвинах, предназначены не для того, чтобы их складывать и умножать.)

---

[5] Простота универсальной идеи, например *теоремы Гёделя о неполноте*, может быть скрыта за обилием технических деталей.

Структуры «эрго» произрастают на почве математики, но до неузнаваемости отклоняются от своих чисто математических прототипов[6].

И может показаться — в исследованиях по искусственному интеллекту эта философия до сих пор доминировала, — что для понимания умственных процессов важна не столько собственно математика, сколько такие понятия, как *аксиоматические системы, автоматы, машины Тьюринга, теоремы Гёделя и т. п.*

Однако эти идеи, как доказывают их весьма слабые успехи в реализации исходной программы Тьюринга, столь же недостаточны для того, чтобы понять природу человеческих мыслительных процессов, сколь и для того, чтобы прояснить природу человеческой математики.

---

[6] Это не так в теоретической физике, но весьма похоже на ту роль, которую играет математика в формировании (по большей части неизвестных) фундаментальных принципов биологии.

Глава 17

Числа, симметрии и категории

Существование Математики в том виде, как мы её знаем, представляется столь же невероятным, как возникновение Жизни на Земле. Ничто в основаниях математики не намекает на такую возможность, как ничто в земной химии не намекает на то, что она может породить Жизнь.

Можно сказать, что математика начинается с *чисел*. Мы так привыкли к идее числа, что забываем, сколь *невероятными* свойствами обладают *вещественные числа*. Безупречная согласованность нескольких различных структур — *непрерывности, порядка, сложения, умножения, деления,* — воплощённых в этом *одном* понятии, воистину поразительна.

Невероятно совершенные *симметрии* в геометрии и физике — *группы Ли, гильбертовы пространства, калибровочные теории, …* — прорастают в мире чисел из зерна теоремы Пифагора. Математика и теоретическая физика суть два аспекта этих симметрий, которые по существу выражаются одним и тем же математическим языком.

Как говорит Пуанкаре,

> *⟨…⟩ без этого языка бóльшая часть внутренних аналогий вещей осталась бы навсегда неизвестной для нас, и мы никогда не знали бы о той внутренней гармонии мира, которая, как мы увидим, есть единственная истинная объективная реальность.*

В «суровом реальном мире», вне чистой математики и теоретической физики, гармония полного «спектра симметрий» чисел проявляется лишь изредка. Может даже показаться, что числа бывают разные: одни хороши для *упорядочения* объектов в соответствии с их размерами, а другие удобно использовать для *сложения* измеренных величин.

Употребление всемогущих вещественных чисел в скромных целях можно счесть расточительным и неестественным.

Например, *положительные* числа в классической физике возникают как *массы* кусков вещества; электрические заряды могут представлять как положительные, так и отрицательные числа. Адекватная *операция* над этими числами — *сложение*, поскольку и масса, и электрический заряд обладают естественной (и почти идеальной) аддитивностью: операция $(a, b) \mapsto a+b$ соответствует соединению двух физических объектов с образованием единого $(a+b)$-объекта из двух объектов, соответствующих числам a и b.

Но нельзя так же легко реализовать, скажем, преобразование $a \mapsto 2a$ — мы не можем просто взять и скопировать или удвоить физический объект[1]. Запись $2a = a+b$, где $a = b$, проблему не решает, так как равные макроскопические объекты сами собой в физике не появляются.

Напротив, в Жизни удвоение встречается повсеместно. Все мы, скорее всего, произошли из одной полинуклеотидной молекулы, успешно удвоившейся около четырёх миллиардов лет назад. Организмы растут и размножаются путём удвоения клеток. Эволюцию движут дупликации целых геномов и значительных участков геномов (а не так называемые «случайные малые изменения»).

В *биологии как таковой* редко (если вообще) можно увидеть настоящее числовое сложение, но, например, аддитивность электрических зарядов в нейронах играет важную роль в работе мозга. Она лежит в основе большинства математических моделей нейромозга, даже таких грубых, как нейронные сети. Однако эрго-мозг имеет мало отношения к аддитивности и линейности[2].

Кажущаяся простота *вещественных чисел*, представляемых точками бесконечной прямой, столь же иллюзорна, как простота зрительных образов «реального мира» перед нашими глазами. Общепринятое подробное построение вещественных чисел с помощью *дедекиндовых сечений*, принадлежащее Эдмунду Ландау и опирающееся на порядковую структуру, занимает около сотни страниц. В своей книге «*О числах и играх*» Джон Конвей отмечает (и мы ему верим), что для того, чтобы сделать это изложение полным, потребовалось бы ещё несколько сотен страниц.

Чтобы прочувствовать эту «проблему чисел», попытайтесь «объяснить» вещественные числа компьютеру, не используя слово «очевид-

---

[1] Некоторые энергетические/силовые величины, например измеряемые в *децибелах*, живут на мультипликативной (логарифмической) шкале, и их удвоение абсолютно осмысленно.

[2] Под «*нелинейными*» обычно понимают системы, рассматриваемые в контексте чисел, *аддитивная структура* которых искажена произвольным и неестественным образом.

но» и не прибегая к таким искусственным конструкциям, как десятичные/двоичные разложения. Такая «объясняющая компьютерная программа» растянется на многие страницы и будет содержать ошибку на каждой второй.

Мы не будем пытаться встраивать в наши эрго-системы полную теорию вещественных чисел во всём её великолепии, но некоторые «аспекты чисел» будут нам полезны. К примеру, мы наделим эрго-обучающегося способностью различать частые и редкие события, которую демонстрируют детёныши животных, приучающиеся не бояться *часто* наблюдаемых фигур.

С другой стороны, описывая и анализируя такие системы, мы будем свободно пользоваться вещественными числами без всяких ограничений.

Чисел в вашем эрго-мозге нет, но идея симметрии там есть. В основном она относится к симметриям нашего (евклидова) трёхмерного пространства, важнейшая компонента которого — (*трёхмерная*) *группа* (*Ли*) всевозможных движений, назовём их *вращениями* евклидовой *круглой* 2-*сферы*, — не одно тысячелетие увлекала математиков и философов. Не только *небо* Аристотеля, но и ваши глаза, и некоторые суставы вашего скелета, которые «говорят» с мозгом, по необходимости сферичны, а значит, обладают *вращательной симметрией*.

Создание и обнаружение симметрий — важнейший руководящий принцип эрго-обучения. На взгляд со стороны, эта цель достигается путём *статистического анализа*[3] *сигналов*, *нарушающих* пространственные и временны́е симметрии.

Например, входные данные зрительной системы можно представить множеством выборок из (не вполне) вероятностного распределения на множестве подмножеств световых рецепторов на вашей сетчатке. *В принципе*, этого достаточно, чтобы реконструировать евклидову геометрию, подобно тому как Альфред Стёртевант составил генетическую карту X-хромосомы дрозофилы, проанализировав распределения фенотипических связей.

Однако ваш мозг не смог бы (?) «составить карту» трёхмерного пространства, не получая наряду со зрительными сигналами также сигналы, вызываемые возбуждением мотонейронов, которые управляют вашими движениями, особенно движениями глаз.

Глаз, в силу необходимости обладать свободой вращения, сферичен[4]. Движения глаза, очевидно, подготовили мозг к идее простран-

---

[3] Исходные самообучающиеся программы, которые мы хотим создать, не содержат счётного механизма, но эрго-обучающийся должен быть в состоянии распознавать «значимые/систематические» сигналы и игнорировать «случайные».

[4] Сферическая симметрия — свойство, которое глаз разделяет с плечевым и тазобедренным суставами, также обладающими тремя степенями свободы. А вот цилиндри-

ственных симметрий и помогли ему научиться распознавать образы, движущиеся в поле его зрения[5].

Наш эрго-мозг чувствителен также к *арифметическим симметриям*, коренящимся в простых числах, что проявляется, к примеру, в постоянном всплывании *магической пентаграммы*, изображающей то, что математики называют *пятиэлементным полем Галуа*. Это поле можно наглядно представить множеством вершин пятиугольника ⬠; на нём действуют 20 преобразований, из которых лишь 10 геометрически очевидны — [5 вращений] × [2 отражения]. Но есть ещё одно преобразование, наличие которого обусловлено тем, что 5 — *простое* число, и которое можно графически изобразить в виде ⬠ ↦ ⛤.

Фантастическое виде́ние, которое и не снилось древним мистикам и средневековым оккультистам, возникает из *соответствия Ленглендса* между арифметическими симметриями и *симметриями Галуа* алгебраических уравнений, и многое здесь ещё скрыто за облаком гипотез. Мучительно заманчивая задача — проследить путь, следуя которому эрго-мозг дошёл до постижения такого типа симметрий[6].

ческий коленный сустав позволяет совершать только круговые движения. Шарнирные локтевые суставы «спроектированы» так, чтобы иметь *ровно две* степени свободы.

[5] Это объясняется в § IV книги «*Наука и гипотеза*» Пуанкаре.

[6] На взгляд со стороны, симметрия в математике растворяется вплоть до полной невидимости в *полезных формулах, трудных вычислениях, эффективных алгоритмах, логических аксиомах, достоверных (или недостоверных) статистиках*, ...

Категории, функторы и смысл. Мысленные эрго-объекты, скажем предложения некоторого языка, редко (если вообще когда-нибудь) обладают идеальными внутренними симметриями, такими как вращения сфер, пятиугольников или икосаэдров,[7] которые сохраняют их геометрические структуры. (Икосаэдр допускает 120 таких преобразований, где — и это не совсем случайно — $120 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.)

Однако некоторые преобразования таких объектов можно описать, пусть и приближённо, в *математической теории категорий.*

Простейшие преобразования, скорее геометрические, нежели синтаксические, — это *вставки* строк в более длинные строки, расположенные где-то в другом месте текста:

$$\begin{tikzcd} \ldots ABC \ldots \arrow[r, bend left] & \ldots DEABCMN \ldots \end{tikzcd}\ .$$

Математическая теория категорий расширяет понятие симметрии, допуская преобразования подобного типа, которые «перемещают» один объект внутрь другого.

Такие преобразования изображаются стрелками между объектами, например $string_1 \to string_2$, или, в символьной записи, $\circ \xrightarrow{r} *$, и структура данной конкретной категории задаётся *правилом композиции* между входящими и исходящими стрелками для всех её объектов.

Именно, выделяются некоторые тройки стрелок, скажем (r, s, t), между тройками объектов, скажем $(\circ, *, \star)$, такие, что $\circ \xrightarrow{r} *$, $* \xrightarrow{s} \star$, $\circ \xrightarrow{t} \star$, и провозглашается, что стрелка t есть композиция стрелок r и s; этот факт изображается следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "t"'] & * \arrow[d, "s"] \\ & \star \end{tikzcd}$$

(В географических терминах объекты — это «местоположения», а стрелки между парами «местоположений» (их может быть много) — это возможные пути между ними; при этом композиция двух путей есть путь, полученный последовательным прохождением, скажем, сначала пути r из $\circ$ в $*$, а затем пути s из $*$ в $\star$.)

Комбинаторика (больших) конфигураций, состоящих из таких треугольников стрелок, несёт неожиданно богатую информацию о *внутренних* структурах объектов нашей категории. Например, туманная, на

---

[7] Вирусы — не подчиняющиеся никакому эрго — любят икосаэдральную симметрию за то, что она минимизирует площадь их белковых оболочек, которые должны содержать все ДНК, кодирующие сами эти оболочки.

Так работает Жизнь: информация с геометрией (физической материи) идут рука об руку. Но математики в решении *инфориметрических задач* плетутся далеко позади вирусов.

первый взгляд, идея «*естественности*» математической конструкции строго формулируется в терминах *функторов* между категориями.

В применении к языку это даёт пригодное для работы (иногда его называют «холистическим», см. [3, с. 242]) определение «смысла» текста без каких-либо отсылок к «реальному смыслу», в духе идей Зелига Харриса: *смысл слова в значительной степени определяется статистикой распределения сопутствующих ему других слов*.

Глава 18

Логика и иллюзия строгости

Поскольку мы метим в самый источник математики — сам эгомозг — и пытаемся развить теорию эрго-систем, важнейшее значение приобретает чистота и простота строительных кирпичиков такой теории. На кону стоит не просто логическая строгость и технические детали: не достигнув ясности, вы не увидите алмазов — в тумане пронизанной эго атмосферы они не сверкают.

Эволюция математических понятий на пути к тем чётким формам, которые они приобрели в XXI веке, подсказывает, как можно строить эрго-системы. Однако не все изведанные дороги приводили нас к земле обетованной; понимание того, что и почему не сработало, может оказаться более полезным, чем празднование успехов.

С математическими идеями проблема не в том, что они слишком абстрактны, слишком трудны или слишком надуманны, а в том, что нам не хватает воображения, чтобы вымысливать «с потолка» абстрактные, трудные и надуманные идеи. Не хватает нам и дара предвидения, чтобы угадывать, как будет развиваться та или иная идея.

> *Если бы это было так, это бы ещё ничего, а если бы ничего, оно бы так и было, но так как это не так, так оно и не этак! Такова логика вещей!*[1]
>
> Льюис Кэрролл

Согласно *логицизму* Фреге, Дедекинда, Рассела и Уайтхеда, математика состоит из атомических *законов мысли*, диктуемых формальной логикой, и без строгости формальной логики невозможно обойтись при создании правильных математических конструкций и корректных определений.

Нельзя не признать, что логики сыграли свою роль в деле выметания пыли из тёмных закоулков в основаниях математики, но… большинство математиков глухо к мелодиям формальной логики[2]. Мы с по-

---

[1] Перевод Н. Демуровой.

[2] Не вся логика сводится к сбору, очищению и классификации крупинок здравого смысла — как ни трудно в это поверить, но логическое мышление может быть креативным. Однако эта «креативная логика» есть то, что мы называем *математикой*. Мы с радостью принимаем *теорию моделей, теорию множеств, теорию алгоритмов* и другие логические теории, ставшие частью математики.

дозрением относимся к «интуитивной математической истине» и не доверяем *мета*математической строгости[3] формальной логики.

(Логики и сами друг другу не доверяют. К примеру, Бертран Рассел указал на внутреннюю противоречивость *основного закона V* Фреге; при этом, по словам Гёделя,

> *изложение* [Рассела] *⟨…⟩, страдающее столь явным недостатком формальной точности в своих основаниях ⟨…⟩, в этом отношении представляет собой серьёзный шаг назад по сравнению с Фреге.*

Слова Рассела

> *«Математика может быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем ни о чём говорим, ни того, верно ли то, что мы говорим»*

применимы скорее к формальной логике, нежели к математике.)

Чистота сама по себе математиков не привлекает. Логический педантизм волнует нас не больше, чем поэта — проповеди грамматистов.

Достоверность математики гарантирует не строгость техники безопасности при строительстве её зданий, а их ***невероятно сбалансированная*** *гармония*. На фоне того чуда, которое являет собой формула Лейбница $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}$, полученная в 1682 г. с использованием бесконечно малых, обвинения в недостаточной строгости, выдвинутые Джорджем Беркли (1734 г.), равно как и идея «реабилитации» лейбницевского исчисления, принадлежащая Абрахаму Робинсону (1966 г.), выглядят жалкими[4].

Исторически система математического анализа, катящаяся на шатких колёсах *бесконечности* и *бесконечно малых*, была основной интеллектуальной силой, двигавшей развитие математики и естественных наук на протяжении более трёхсот лет. Но всего в одном шаге от математики тома философских спекуляций об «истинной природе» бесконечности год за годом пылятся без дела на библиотечных полках.

(Невероятно, но ещё в начале XX века Флориан Каджори, бывший в ту пору ведущим историком математики, провозглашал «*Аналитика*» — трактат Джорджа Беркли, в котором тот разносил «нестрогость бесконечно малых», — *ярчайшим событием* [XVIII] *века в истории британской математики.*

---

[3] Понятие *логической строгости*, в отличие от *математической строгости*, нельзя определить с соблюдением хотя бы минимальных требований к точности и строгости.

[4] С точки зрения работающего математика, достижение Робинсона состояло не столько в строгом обосновании лейбницевской идеи бесконечно малых, сколько в её далёком и мощном обобщении.

Ландшафт, являемый британской математикой XVIII века, и впрямь был настолько уныл, что на его фоне и «*Аналитик*» был заметным событием. Однако есть два английских математика, которые, в отличие от Беркли, оставили нетривиальный след в науке XVIII века: Томас Байес, предложивший то, что теперь называется *байесовским* подходом к эмпирической вероятности[5], и Эдмунд Галлей, прославившийся вычислением орбиты *кометы Галлея*[6].)

Мы не можем всерьёз относиться к определениям типа $(a,b) := := \{\{a\},\{a,b\}\}$[7]. Чтобы «убедить себя» в ценности такого определения, вы должны согласиться с апелляцией логиков к метаматематической интуиции, однако *никакую* осмысленную идею нельзя передать, *не используя естественный язык*, метафорическая природа которого разрушает «идеальную строгость» в понимании логиков.

Математические же идеи мы передаём, не копируя массу логических символов из одного разума в другой, а заставляя эрго-мозг другого человека входить в резонанс с теми мелодиями, которые мы слышим внутри себя.

И мы не склоняем голову перед «чудотворной силой интуиции», которую так превозносят логики и математики, но скорее пытаемся понять источник этой интуиции в человеческом эрго-мозге/разуме.

Никто не спорит с тем, что установление «истин» определённого сорта требует идеальной — на все 200 % — точности; вот пример такой «истины»:

$$4579+8763-3459+4686-6537+7763-4579+1099- \\ -8765+1238-3677 = 1111.$$

Однако — и с точки зрения логика это чудо — формально неточные контуры «ключевой идеи» *осмысленного* утверждения, даже имеющего такую относительно простую структуру, как, например, *первая теорема Гёделя о неполноте*, в глазах математика свидетельствует о её достоверности.

(Так, глядя на неполное и искажённое изображение животного, быть может, вам вообще неизвестного, вы улавливаете, что это «*что-то живое*».)

---

[5] Байесовский подход основан на постоянном обновлении условных вероятностей событий, а не на анализе частот; он систематически применяется в современном *машинном обучении*.

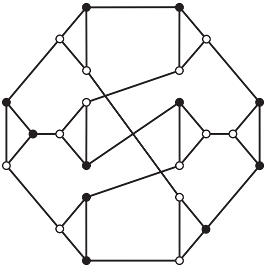
[6] Комета Галлея — единственная комета, обладающая коротким периодом (около 75 лет) и хорошо различимая с Земли в те моменты, когда она возвращается во внутреннюю область Солнечной системы.

[7] Это определение *упорядоченной пары*, данное Куратовским в 1921 г.

(Под предлогом строгости[8] в наши учебники просачивается столетняя пыль из оснований математики — например, когда *граф* G определяется как

упорядоченная [кем?] *пара* $G = (V, E)$*, состоящая из множества* V *вершин...*

Брр... гораздо больше толка даст простой рисунок графа, чем такое определение.)



Проблема порядка

Понятие *логической строгости* не слишком удачно вписывается в эрго-среду. К примеру, невозможно логически строго определить абстрактное понятие *порядка*, не ссылаясь на предсуществующий порядок в той физической или психологической среде, в которой идея порядка формулируется.

Упорядочение пары означает разрушение симметрии $-1 \longleftrightarrow +1$, аналогичной той, что встретилась *буриданову ослу*. (Для живописной иллюстрации этого факта попробуйте перейти от привычной записи

---

[8] Навязчивое стремление некоторых умов к «жёсткой строгости» напрашивается на то, чтобы подвергнуть его психоанализу фрейдистского толка.

$A \prec B$ к обозначению ▲ ❖ ▼, которое графически, но не контекстуально инвариантно относительно поворота[9] на 180°.)

Помимо математической невозможности алгоритмически разрешить «проблему порядка» (читателю предлагается сосчитать число логических дефектов в приведённом выше «решении» $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$) имеются также убедительные свидетельства того, что наш эрго-мозг не содержит врождённой «идеи порядка». Например, дети, только научившиеся писать, часто пишут буквы в зеркальном отражении, а математики склонны (в уме, а также графически) путаться и менять свои неравенства на противоположные.

Соответственно, мы не должны (?) постулировать *базовую идею* порядка в нашем проекте эрго-системы.

Вообще, следует очень придирчиво относиться к выбору терминологии и наделению наших самообучающихся систем базовыми понятиями/операциями:

> *никакую элементарную структуру, сколь бы просто и «очевидно» она ни выглядела, нельзя принимать как данность.*

Например, ребёнок, который научился считать на пальцах и способен сообразить, что $2+3=5$ и $2\times 3=6$, отказывается соглашаться с тем, что $3=3$ и $1\times 5=5$. И если вы думаете, что его следует научить тому, что $[3=3] = [3+2=5]$, то это *вам* не хватает образования: $[3=3] \neq [3+2=5]$ — математика в конце концов приняла точку зрения ребёнка и стала разрабатывать средства (близкие к *теории категорий*) для различения типов «равенств». Эта *иерархия равенств* играет важную роль в наших моделях эрго-мозга.

Логика в естественных науках

Математическая строгость и логическая достоверность недостижимы не только в логических основаниях математики, но и во всех естественных науках, включая даже теоретическую физику. Эйнштейн сформулировал это так:

> *Насколько законы математики относятся к реальности, настолько они не определённы; а насколько они определённы, настолько они не относятся к реальности.*

Однако «физический уровень строгости» обладает большей определённостью, чем логический, поскольку воспроизводимые эксперименты надёжнее интуиции любого человека, будь то Эйнштейн или Гёдель.

---

[9] Можно только гадать, каким предстало бы лицо математики в мире, где «формулы» всегда изображаются *симметричными* комбинаторными конфигурациями символов на плоскости.

Глава 19

Бесконечное внутри, конечное снаружи

> *Если попросить любого философа дать определение бесконечности, он, возможно, и породит некий невразумительный вздор, но заведомо не сможет дать определение, имеющее хоть какой-то смысл.*
>
> Бертран Рассел

Математика — истинная обитель бесконечности. Почти все наши теоремы касаются бесконечных объектов, например связанных с *вещественными числами*, как *группы Ли*[1], или бесконечных совокупностей конечных объектов, например *простых чисел*[2].

А фундаментальные свойства конечных объектов, таких как простые числа, можно понять, лишь рассматривая их в окружении трансцендентных бесконечностей вещественных, а также *p-адических чисел*[3] и несчётных *групп аделей*[4], представляющихся вращениями *бесконечномерных геометрических (гильбертовых) пространств*.

Бесконечность такого типа необходима нам и для описания физической вселенной и её фрагментов. Для моделирования большинства (всех?) физических систем используются (несчётные) бесконечные множества *вещественных чисел*. (Разумеется, физические констан-

---

[1] Простейший пример такой группы — группа *вращений воображаемого твердого тела* в трёхмерном пространстве.

[2] Каждое конкретное (особенно трансцендентное) вещественное число, например $\pi = 3{,}141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307\ldots$, едва ли могло бы существовать вне объемлющего и поддерживающего океана бесконечности.

[3] p-адические числа — это пределы рациональных чисел, при задании которых обычное правило $\varepsilon^i \to 0$ при $|\varepsilon| < 1$ и $i \to \infty$ формально заменяется на правило $p^i \to 0$ для данного простого числа p и $i \to \infty$. Поразительным образом, это определение приводит к осмысленному понятию «числа».

[4] Это бесконечные произведения некоторых групп Ли и всех их p-адических аналогов, $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

ты, даже безразмерные, как, например[5], 0,00729735257…, — это не совсем числа, однако трудно точно сформулировать, в чём именно заключается это совсем.)

Но, если смотреть со стороны, всё тело математики, назовём его $\mathcal{M}$, есть скромный математический объект, описываемый *конечным* числом слов[6]. Однако эти слова порождают язык, назовём его $\mathcal{M}'$, представляющийся чем-то *бесконечным*, — «фрагмент», изъятый из $\mathcal{M}$ и помещённый вне его.

Таким образом, $\mathcal{M}$ начинает напоминать гигантский калейдоскоп со множеством крошечных зеркал $\mathcal{M}'$, каждое из которых полностью отражает в себе всё $\mathcal{M}$ вместе со всеми его зеркалами[7], включая само $\mathcal{M}'$.

Сосуществование «эквивалентности» $\mathcal{M}' \sim \mathcal{M}$ со *строгим* «включением» $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}$ позволило Гёделю распутать автореференцию в *парадоксе лжеца* — *утверждение «Я недоказуемо» недоказуемо* — и тем самым доказать свою теорему о существовании *формально недоказуемых математических утверждений*.

(Гёделевское $\mathcal{M}'$ состоит из бесконечного множества слов-строк, состоящих из конечного числа, скажем 10, символов/букв: эти строки представляют доказательства в $\mathcal{M}$, которые описываются предложениями в языке с десятибуквенным алфавитом. Это множество $\mathcal{M}'$ «вкладывается» в $\mathcal{M}$ с помощью *нумерации Гёделя*, при которой «буквы» изображаются символами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; таким образом, формулы из $\mathcal{M}'$ «переходят» в *десятичные* числа из $\mathcal{M}$, а свойства этих формул, в частности их доказуемость/недоказуемость, — в арифметические свойства этих чисел[8].

---

[5] Это *постоянная тонкой структуры* $\alpha = \pi \cdot [\text{элементарный заряд}]^2/(hc)$, введённая Зоммерфельдом в 1916 г. для объяснения спектра атома водорода.

[6] С точки зрения учёного-нематематика, $\mathcal{M}$ есть *математическая модель* (не в том смысле, как это понимают математические логики) «реальной математики», которой занимаются люди-математики на планете Земля.

[7] Автор благодарит В. Каймановича за предоставленный рисунок.

[8] Логики — очевидно, чтобы продемонстрировать своё уважение к Гёделю, — рассматривают композицию этого вложения с отображением $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, задаваемым формулой $\{a_i\} \to \prod_i p_i^{a_i}$, где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, …, p_i, … — простые числа.

Доказательство Гёделя существенно использует «жёсткое» физическое пространство-время нашей Вселенной, которое служит необходимой поддерживающей основой для *позиционной* записи чисел. Оно было бы невозможно в «жидком мире», не содержащем *ничего* настолько «жёсткого», как наше пространство-время.)

Всю математику, со всеми её *несчётными множествами*, которые несопоставимо больше множества $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, можно отразить в счётном зеркале арифметики согласно следующей по-детски простой теореме, называемой *парадоксом Сколема*.

«Все» математические объекты, составляющие несчётные множества, можно «адекватно представить» счётным числом их «вербальных описаний».

Но и тут ещё речь идёт о «бесконечностях»; в «реальности» же все эти бесконечности фиктивны: число математических утверждений, которые могут быть когда-либо сформулированы разумными существами нашей или любой другой мыслимой вселенной, ничтожно мало[9] по сравнению с неизмеримой бесконечностью «объектов», разрешённых грамматикой математического языка.

Кроме того, поскольку все физические, биологические и/или ментальные структуры могут функционировать лишь в рамках конкретной пространственной/временно́й/сложностной шкалы, трудно, если вообще возможно, достичь осмысленных философских интерпретаций теоремы Гёделя.

В большинстве (во всех?) спекулятивных (а не чисто математических) рассуждений об этих структурах (например, в философии искусственного интеллекта), содержащих хоть тень намёка на гёделевские или схожие с ними «теоремы о бесконечности», такие как *теорема Тьюринга об остановке* или *сложность Колмогорова—Чейтина*, неизменно скрываются грубые искажения понятий, лежащих в основе этих теорем.

Эрго-логическая модель математики

> *Из бесконечности решений математик выбирает одно за его красоту, а затем низводит его на землю.*
>
> Марстон Морс

Принимаемая логиками модель $\mathcal{M}$ математики, например *арифметика Пеано*, имеет малопривлекательную аморфную структуру, кото-

---

[9] Количество строк символов, которые может породить любая мыслимая вселенная за свой жизненный цикл, можно смело ограничить числом $10^{10^{10}}$.

рую можно сравнить с трясиной *всех позиций* на шахматной доске, достижимых из начальной позиции в соответствии с правилами шахмат.

(Арифметика Пеано — это аксиоматическое описание структуры натуральных чисел $n=1, 2, 3, \ldots$ через *функцию следования* $n \mapsto n'$ (где, скажем вам по секрету, $n'=n+1$),

$$\overset{1}{\bullet}\mapsto\bullet\mapsto\ldots,$$

и фундаментальную аксиому *индукции*:

если «утверждение (или определение), выражаемое формулой» F, верно при $n=1$ и из F-для-n следует F-для-n', то F верно для всех n.

Например, сложение $m+n$ *определяется* формулой

$$m+1 = m' \;\&\; m+n' = (m+n)'.$$

В традиционной логике нет средств, позволяющих распознать «интересное» и описать структуру «множества» $\mathcal{M}^{ergo}$ всех «интересных» теорем[10].

Одна из задач эрго-логики состоит в достижении этой цели, но пока мы не можем достаточно точно и убедительно сформулировать, что такое *интересные* теоремы (и/или интересные шахматные позиции). Однако имеются некоторые поучительные примеры[11].

Например, Харрингтон и Пэрис обнаружили несколько настоящих математических утверждений, таких как *теорема Гудстейна о замене основания*, недоказуемых в арифметике Пеано[12].

---

[10] Естественным образом «интересные» теоремы не составляют то, что мы называем «множеством».

[11] Быть может, стоит позаимствовать идеи из эволюционной биологии (а также иммунологии?) и рассмотреть понятия *конкуренции, отбора, адаптации*, (частично) ответственные за возникновение «интересных структур» в живых системах и, взяв масштаб поменьше, в комбинаторных играх типа шахмат.

[12] См. A. Bovykin, *Brief introduction to unprovability*, `https://www.cs.umd.edu/~gasarch/TOPICS/largeramsey/bovINTRO.pdf`, и следующий параграф.

Глава 20

Маленькое, большое, недоступное

Математики со всеми числами обходятся одинаково, будь то

$$\begin{array}{lc} & 2, 3, 4, \\ \text{или} & 10, 20, 30, 40, \\ \text{или} & 1\,000, 10\,000, 100\,000, 1\,000\,000, \\ \text{или} & 10^{10}, 10^{20}, 10^{30}, 10^{40}, \\ \text{или} & 10^{10^{2}}, 10^{10^{30}}, 10^{10^{400}}, \\ \text{или} & 2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{399^{400}}}}}}}\quad . \end{array}$$

Но в «реальном мире», будь то физическая Вселенная или человеческий эрго-мир, «демократия чисел» разрушается.

Отчасти это объясняется тем, что свойства чисел (и вообще формул) зависят от того, как их символьные представления располагаются на имеющемся фоне либо в физическом пространстве/времени, либо в человеческом эрго-мозге.

Даже совсем маленькие числа — по существу, все числа, бóльшие четырёх, — недоступны человеческому (эрго)мозгу, если они так или иначе не представлены «структурированными сущностями».

Не случайно грамматики некоторых языков, например русского, различают числа 2, 3 и 4, а числа 5, 6, …, 20, 30, 40, …, 100, 200, … (но не 23, 101 или 202) с синтаксической точки зрения отправляются в ту же корзину, что и бесконечность[1].

Хотя некоторые психологи и заявляют, что люди могут различать и числа побольше —

•••••, •••••• и •••••••,

— однако никто(?) не станет утверждать, что способен мгновенно воспринять число ••• или даже ••••••••••.

---

[1] Любопытно, что такая же пропасть в том, что касается базовых свойств, существует между геометрическими пространствами размерностей 1, 2, 3, 4 и пространствами размерности 5 и выше.

Привычка к десятичной записи вводит нас в заблуждение. Мы понятия не имеем, что представляют из себя такие числа, как 65 536, и тем более[2] 7 625 597 484 987, пока не запишем их в виде $2^{2^{2^2}}$ и 3^{3^3}.

Даже для узнавания «*нескольких триллионов*» в числе 7 625 597 484 987, в отличие от «*миллиона*» в числе 1 048 756 ($=2^{2^{2^2}+2^2}$), нужно несколько раундов работы мысленного считающего алгоритма, не заложенного в человеческий мозг от рождения.

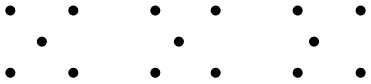
С другой стороны, человеческий (эрго)мозг, который испытывает дискомфорт при виде такого числа, как 177 148, охотно принимает то же (?) число, структурированное в виде $3^{3^3+2}+1$.

Вероятно, это объясняется тем, что «*комбинаторная геометрия (эрго)мозга*» ближе к геометрии конфигураций нагромождающихся экспонент на двумерной плоскости, чем к однообразной линейности последовательностей ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●…, а также обычной позиционной записи чисел и формул.

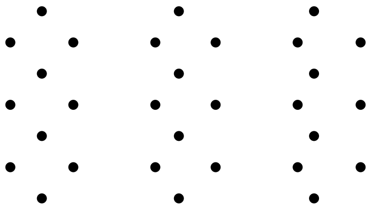
Посмотрим внимательнее на то, как это работает. Мощность множества ● ● ● ● человек может оценить мгновенно, ему нужна доля[3] секунды, чтобы опознать «(почти) неструктурированную пятёрку» ● ● ● ● ●, пара секунд — для множества ● ● ● ● ● ● ● (но значительно меньше, если симметрия нарушена, например ● ● ●   ● ● ● ●), а множество

●●●●●●●●●●●●●●●

он воспринять не может. Однако введение простой структуры решает проблему:



Числа побольше, такие как



если и поддаются восприятию, то лишь через призму математики.

---

[2] Чтобы просмотреть число

$$\underbrace{\bullet\ldots\bullet}_{7\,625\,597\,484\,987}$$

поточечно, нам понадобилось бы несколько *сотен тысяч* лет.

[3] Эта доля может быть значительной, много больше 200 миллисекунд.

Когда дело доходит до тысяч, миллионов и миллиардов, интуиция нам отказывает. Быстро ответьте на вопросы.

Что больше — число волос у вас на голове (в предположении, что вы не лысы) или число людей, вмещаемых олимпийским стадионом?[4]

Что больше — число бактерий у вас в кишечнике или число атомов в бактерии?[5]

Вот несколько чисел, важных для эрго.

• Время. Сотня лет содержит $< 3{,}2$ миллиардов секунд. Говоря со скоростью три слова в секунду, за всю жизнь вы произнесёте *менее десяти миллиардов* (10^{10}) слов.

Десять миллиардов болтливых индивидуумов[6] успеют произнести *не более*

$$10^{10} \times (3 \times 3{,}2 \cdot 10^7) \times 5 \cdot 10^9 < 5 \cdot 10^{27}$$

слов, прежде чем Солнце, примерно через пять миллиардов лет, превратится в *красного гиганта*.

Более реалистичная оценка показывает, что человечество *не сможет* породить более 10^{12}–10^{18} *различных идей* — стихотворений, теорем, компьютерных программ, описаний конкретных чисел и т. д.[7]

Возможная продолжительность жизни Вселенной, составляющая 10^{15} лет, состоит из менее чем $10^{46} = 10^{15} \times 3 \cdot 10^7 \times \frac{1}{3} \cdot 10^{24}$ *джиффи-моментов*[8].

• Мозг. Количество нейронов в человеческом мозге оценивается числом от десяти до ста миллиардов, и каждый нейрон имеет сотни синаптических связей, всего порядка 10^{12}–10^{14} синапсов.

Это даёт представление об объёме памяти мозга, который сравним с объёмом компьютерного жёсткого диска в 10^{12}–10^{13} бит.

Эффективность работы мозга (в кратковременной перспективе) ограничена *частотой импульсов* в нейронах, которая составляет около 100 раз в секунду[9]. Таким образом, скажем, сто миллионов актив-

---

[4] Оба числа составляют примерно 100 000.

[5] Бактерия содержит около 10^{11}–10^{14} атомов, а в вашем теле, преимущественно в кишечнике, живёт более 10^{12}–10^{13} бактерий.

[6] Население Земли на сегодняшний день составляет чуть более семи миллиардов человек.

[7] Жизнь на Земле, за свою примерно $3{,}9 \cdot 10^9$-летнюю историю, породила сравнимое количество «идей», записав их в последовательностях ДНК организмов, населяющих нашу планету.

[8] *Джиффи-момент* $\approx 3 \cdot 10^{-24}$ с — это время, за которое свет проходит расстояние размером в протон.

[9] Мозг крота звездорыла решает, что съедобно, а что нет, за 8 миллисекунд, — в пятьдесят раз быстрее, чем водитель решает, нажимать ли на тормоз или на газ, видя жёлтый сигнал светофора.

ных нейронов могут совершать 10^{10} «элементарных операций» в секунду[10] — что соответствует мощности среднего компьютера[11].

• Язык. В английском языке существует 10^{22}–10^{25} грамматически корректных предложений, состоящих из пяти слов.

• Пространство. *Стакан воды* содержит около 10^{25} молекул, *планета Земля* состоит из $\approx 10^{50}$ атомов, а *астрономически наблюдаемая Вселенная* насчитывает, по сегодняшним оценкам, 10^{80} частиц[12].

Таким образом, наше пространство-время содержит (гораздо) меньше 10^{130} *классических* (в отличие от квантовых) «событий», и это грубо завышенное число даёт

> *заведомо верную оценку того, что может быть когда-либо достигнуто любым мыслимым (не квантовым) вычислительным/мыслительным устройством размером со Вселенную.*

Однако... существует по крайней мере $2^{10^{10}} > 10^{3\,000\,000\,000} \gg 10^{130}$ потенциальных «текстов», которые каждый из нас, простой человек XXI века, *может* (?) записать в виде последовательности s, состоящей из 10^{10} битов, на жёстком диске своего миниатюрного компьютера. Разве не так?

Как получается, что актуализоваться может лишь ничтожный процент этих возможностей, менее чем $\frac{1}{10^{10^9}}$?

Хуже того, *невозможно* указать *ни одного примера* нереализуемой последовательности: выбрав какую-либо последовательность s, мы тем самым сделаем эту последовательность s актуальной.

Пока не ясно, допускает ли эта нестыковка между «может» и «будет» чёткую математическую формулировку, или же она относится к *парадоксу кучи*. Однако есть несколько чисто математических теорем и открытых проблем, которые рассматривают этот вопрос, пусть и не вполне удовлетворительным образом[13].

---

[10] Однако скорость обучения измеряется не секундами, а часами, днями, месяцами, годами. Это отчасти объясняется тем, что изменение силы синаптических связей происходит медленно.

[11] Скорость современных *суперкомпьютеров* измеряется *петафлопами*, соответствующими 10^{15} операций (*с плавающей точкой*) в секунду. Она достигается с помощью специальной архитектуры сетей процессоров, которые позволяют *параллельно* осуществляться тысячам (а не миллионам, как в мозге) операций.

[12] Напомним, что Архимед оценил количество песчинок, необходимых, чтобы заполнить Вселенную, в $\approx 10^{60}$, причём *экспоненциальная запись числа* была изобретена им специально для этой цели.

[13] Все они вертятся вокруг следующего вопроса. Что делает таким трудным нахождение/построение *конкретных* объектов O, обладающих свойством P, в данном классе C похожих объектов, если мы знаем, что этим свойством P обладает *большинство* элементов класса C?

Математика ли это?

1. По-видимому, нетрудно показать, что существует много *доказуемых* теорем T, у которых формулировка на стандартном математическом языке занимает одну-две страницы, но кратчайшие доказательства чудовищно длинны; таким образом, эти теоремы *не могут быть доказаны человеком*. (Для этого доказательствам не нужно быть «чудовищно» длинными — достаточно «скромных» 100^{100} символов.)

2. С другой стороны, нахождение *конкретной* априори доказуемой теоремы T, которая *недоказуема в реальности*, может оказаться невозможным для человека.

3. Чуть более спорная (и интересная) возможность такова: существует теорема T', у которой имеется стостраничное доказательство, но поиск этого доказательства требует не менее 10^{50} человеко+компьютерных часов; тем самым, оно не может быть найдено.

Объяснение. В отличие от пунктов 1 и, возможно, 2, которые (почти) полностью находятся в рамках собственно математики, к пункту 3 едва ли можно подступиться без каких-либо гипотез относительно врождённых ресурсов человеческого (эрго)разума/мозга.

На самом деле все виды рассуждений и идей — вычисления, доказательства и т. д., — которые мы можем себе представить и/или создать, пусть даже с использованием компьютеров, ограничены *композициями относительно малого числа* врождённых атомических идей, которые Природа эволюционным путём встроила в наш (эрго)мозг вместе с набором правил отбора/композиции этих идей[14].

Следовательно, существуют «идеи», представимые строками из 10^5 десятичных символов, которые никогда ни в какой форме не будут выдвинуты людьми, живущими на Земле[15].

Тени примеров. По самой своей природе, *недоступные человеку идеи* не могут быть проиллюстрированы примерами. Но следующие образцы подсказывают некоторые соображения на этот счёт.

($\star$) Фраза *«Бесцветные зелёные идеи яростно спят»* была, вероятно, задумана Хомским как пример *случайного грамматически корректного* — а следовательно, абсурдного — предложения. Но на самом деле это вполне нормальное (саркастическое) предложение — благодаря нали-

---

[14] Некоторые из этих «композиций» были имплементированы уже в ходе культурной истории человечества путём встраивания обрывков «информационных потоков», приходящих из «внешнего мира», но это не меняет сути сказанного.

[15] Если (что маловероятно) число классов эквивалентности «смыслов» этих строк (очень!) сильно меньше 10^{10^5}, то с этим тезисом можно поспорить.

чию отчётливых, пусть и отрицательных корреляций между составляющими его словами[16].

(Ваш эрго-мозг не имеет опции «*абсолютно случайный выбор*», но, имея перед собой список слов, вы можете (?) вслепую ткнуть пальцем в одно из них.

Абсурдная семёрка, полученная таким случайным выбором[17]

Незаконные глупые вздутия безрассудно сбивают.
Вытянутые тощие материалы счастливо подчёркивают.
Ясные весёлые отделы физически выбирают.
Влажные координированные предметы связно жалуются.
Деревянные прославленные недостатки равнодушно ценятся.
Деревянные координированные отделы связно ценятся.
Незаконные тощие отделы равнодушно жалуются[18].)

(⋆⋆) Чтобы научно оценить интеллект обезьяны, профессор психологии подвешивает банан высоко под потолком так, чтобы его можно было достать лишь со стула, предварительно поставленного на стол.

Но обезьяна, войдя в комнату, находит лучшее применение профессорской голове, чем сам профессор: она вскакивает ему на плечо, подпрыгивает за фруктом, используя его голову как трамплин, и благополучно приземляется на стол.

Очевидно, это решение задачи отсутствовало в арсенале идей под черепом профессора.

---

[16] Возможно, это предложение кажется осмысленным, потому что оно слишком коротко.

[17] Из совокупности 5000–10 000 наиболее употребительных слов (отобранных из «полного» английского словаря, насчитывающего более 150 000 слов).

[18] Обратите внимание на то, что последние две фразы представляют собой диагонали первых пяти, и заметьте, что чем дольше вы смотрите на эти предложения, тем больше смысла в них находите, — человеческий мозг склонен выискивать несуществующий смысл во всякой чепухе.

Глава 21

Вероятность: частицы, симметрии, языки

Можно ли примирить тезис Максвелла о том, что

> *истинной логикой для нашего мира является исчисление вероятностей,*

с утверждением Ноама Хомского, что

> *понятие вероятности предложения абсолютно бессмысленно при любой интерпретации этого термина?*

Человеческие языки несут в себе отпечатки математических структур эрго-мозга, а изучение естественного (а также математического[1]) языка — это базовый пример универсального процесса обучения, происходящего в человеческом эрго-мозге. Вряд ли мы сможем понять этот процесс, пока не получим ясное представление о том, что такое язык. Но трудно дать определение, которое ухватило бы *математическую сущность* идеи языка.

Но разве язык, с математической точки зрения, — это не *просто*

> *множество строк символов данного алфавита,*

или, более общим образом,

> *вероятностное распределение на множестве таких строк?*

Лингвист с отвращением отмёл бы такие определения, но математику они приходят в голову *сами собой*. Парадоксальным образом, именно поэтому мы должны их *отвергнуть*.

> *Математику формируют определения её базовых понятий, но нет рецепта для создания «правильных определений». Такие определения не приходят в голову сами собой, и не все охотно их принимают.*

Хорошее определение должно говорить *правду, только правду и ничего кроме правды*, но даже среди математиков нет согласия относительно того, что такое ПРАВДИВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Например, идея *алгебраической кривой*, которая есть *геометрическое* представление

---

[1] Под *математическим языком* мы понимаем язык, используемый математиками для общения, а не математический язык формальной логики.

> *решений полиномиального уравнения* $P(x_1, x_2) = 0$, *например уравнения* $2x_1^2 + 4x_2^4 + x_1x_2^3 = 0$, *на плоскости* (x_1, x_2)

объектами типа ⬭, зародилась в работах Ферма и Декарта 1630-х годов, и с тех пор эти кривые тщательно изучались многими поколениями математиков.

Но то, что теперь считается самым простым и естественным определением такой кривой, — определение на языке *схем*, предложенное Александром Гротендиком в 1950-х годах, — за несколько десятков лет до того любой математик счёл бы нелепостью.

Неудивительно, что определить «язык» и/или «обучение» труднее, чем «алгебраическую кривую», ибо кроме чисто математических они имеют и нематематические аспекты. В этом они схожи с *вероятностью*, которая к настоящему времени стала прочно устоявшимся математическим понятием.

Поучительно проследить за тем, как *«случайность»* выкристаллизовалась в *«вероятность»*, за тем, что мы приобрели и что потеряли в процессе этой «кристаллизации».

Кроме того, мы хотим понять, до какой степени «случайность» в языках и процессах (эрго)обучения (в том числе обучения языкам) поддаётся тому, что Максвелл называет «исчислением вероятностей».

Понятие *шанса* насчитывает много столетий, о чём свидетельствуют некоторые пассажи в трудах Аристотеля (384–322 г. до н. э.), а также в Талмуде[2]. Тит Лукреций (99–55 г. до н. э.), последователь Демокрита, в своей поэме «*De Rerum Natura*»[3] описывает то, что сейчас называется *стохастической моделью Эйнштейна — Смолуховского* броуновского движения[4].

Но математика «случайного» изначально была связана не с естественными науками, а с азартными играми.

> *«Я постиг таинства игры в кости, оттого и искусен в счёте»,*

— сказал Ритупарна, царь Айодхьи, который смог оценить число листьев на дереве, рассматривая одну-единственную ветвь. (Это сюжет из «*Махабхараты*», написанной около 5000 лет назад; на археологических раскопках в Иране были найдены игральные кости, возраст которых насчитывает 5000 лет.)

---

[2] Наш схематичный набросок истории теории вероятностей основан на работах [23], [8], [12], [15], [33], [34], а также использует дополнительные *«Ссылки по хронологии вероятностников и статистиков»*, опубликованные на странице Мин-Ин Ляна, `http://www.math.utep.edu/Faculty/mleung/mylprisem.htm`.

[3] «О природе вещей» (*лат.*).

[4] Это совокупность случайных движений частиц, взвешенных в жидкости или газе, которую правильно было бы называть *движением Ингенхауза*.

То, что в случайном подбрасывании костей привлекает математика, и то, что привлекает игрока, — это две дополняющие друг друга грани *стохастической симметрии*.

Случайность *выявляет и усугубляет кубическую симметрию* игральной кости (куб имеет $3! \times 2^3 = 48$ симметрий/вращений) — и именно это интригует математика.

Но случайность и *разрушает* симметрии: единственный способ, которым эрго-мозг осла (равно как и человека) может решить проблему буриданова осла, — это воспользоваться случайностью[5]. «Чудодейственная власть случая» опьяняет эрго игрока[6].

Первый (?) задокументированный пример *исчисления* вероятностей — *«измерения шансов»*, — осуществлённого европейцем[7], содержится в поэме Ришара де Фурниваля (1200–1250), где он перечисляет *количества* способов, которыми могут выпасть три кости. (В случае n костей группа симметрий имеет мощность $n! \times (48)^n$, что при $n = 3$ даёт 664 552.)

Далее, в рукописи, датированной примерно 1400 годом, неизвестный автор правильно решает частный случай *задачи о начислении очков*, т. е. о справедливом делении ставок.

В 1494 г. появилось первое (?) *печатное*[8] исследование задачи о начислении очков — в «*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*»[9] Луки Пачоли[10].

Решение Пачоли было раскритиковано/проанализировано Кардано в трактате «*Practica arithmeticae et mensurandi singularis*»[11] 1539 года, а затем Тартальей в сочинении «*Trattato generale di numeri e misure*»[12] 1556 года.

---

[5] Никакой детерминированный алгоритм не может выбрать одну из двух точек в (пустом) трёхмерном пространстве, что следует из существования *ленты Мёбиуса*. А робот бытового назначения, способный выполнить просьбу *принести* **какой-нибудь** *стул* (независимо от того, идентичны ли несколько имеющихся в наличии стульев), должен содержать в своём программном обеспечении «случайное зерно».

[6] Аналогичным образом, можно сказать, что полная асимметрия индивидуальной случайной последовательности плюсов и минусов, описывающей исходы подбрасывания монеты, дополняет грандиозную симметрию всего пространства S диадических последовательностей, на котором действует компактная абелева группа $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, и автоморфизмы этой группы.

[7] По всей видимости, некое «исчисление вероятностей» имеется в книге «*И цзин*», написанной около 31 столетия назад.

[8] Первая книга, напечатанная с помощью подвижных металлических литер, — это Библия Гутенберга, вышедшая в 1455 г.

[9] «Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций» (*ит.*).

[10] Пачоли прославился благодаря изобретению системы *двойной записи в бухгалтерском учёте*, описанной в этой книге.

[11] «Практика общей арифметики и простые измерения» (*лат.*).

[12] «Общий трактат о числе и мере» (*ит.*).

Кардано

Джероламо Кардано был врачом, слава которого в Европе уступала лишь славе Везалия. Он предложил методы для обучения глухонемых и слепых, для лечения сифилиса и сыпного тифа. Кроме этого, он внёс свой вклад в математику, механику, гидродинамику и геологию. Кардано написал две энциклопедии естественных наук, изобрёл *карданный вал*, применяемый в современных автомобилях, и издал основополагающий труд по алгебре. Он писал также об азартных играх, философии, религии и музыке.

Первое (?) систематическое исследование статистики азартных игр с математической точки зрения появилось в сочинении Кардано «*Liber de Ludo Aleae*»[13], написанном в середине 1500-х гг. и опубликованном в 1663 г., где он обсуждает также и психологию азартных игр.

В коротком трактате, написанном в промежутке между 1613 и 1623 г., Галилей по чьей-то просьбе с лёгкостью объясняет, почему при бросании трёх игральных костей сумма выпавших чисел (немного) чаще оказывается равной 10, нежели 9. Действительно, оба числа имеют по шесть разложений,

$$9 \underset{1}{=} 1+2+6 \underset{2}{=} 1+3+5 \underset{3}{=} 1+4+4 \underset{4}{=} 2+2+5 \underset{5}{=} 2+3+4 \underset{6}{=} 3+3+3$$

и

$$10 \overset{1}{=} 1+3+6 \overset{2}{=} 1+4+5 \overset{3}{=} 2+2+6 \overset{4}{=} 2+3+5 \overset{5}{=} 2+4+4 \overset{6}{=} 3+3+4,$$

однако выпадение набора $10=3+3+4=3+4+3=4+3+3$ в три раза более вероятно, чем выпадение набора $9=3+3+3$.

(Если вы улыбаетесь наивности людей, испытывавших трудности с решением столь элементарной задачи, ответьте, не задумываясь, на следующий вопрос.

Если известно, что в семье с двумя детьми один ребёнок — девочка, какова вероятность, что в этой семье две девочки?[14])

Принято считать, что формулировка основных вероятностных понятий принадлежит Паскалю и Ферма, обсуждавшим проблемы азартных игр в нескольких письмах (1653–1654), и Гюйгенсу, который в сво-

---

[13] «Книга об азартных играх» (*лат.*).

[14] Галилею потребовалось бы полсекунды: ответ равен 1/3 ($\pm\varepsilon$).

ей книге «*De Ratiociniis in Ludo Aleae*»[15], опубликованной в 1657 г., ввёл идею *математического ожидания*.

Однако ключевой результат — *закон больших чисел* (намёки на который содержались у Кардано) — был доказан Якобом Бернулли лишь в 1713 г.

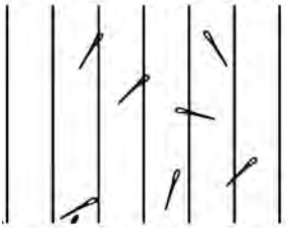
Этот результат, наряду с *теоремой Пифагора* и *квадратичным законом взаимности*[16], входит в число десяти (±2) величайших математических теорем всех времён.

«Непрерывная вероятность» была изобретена в 1733 г. Бюффоном, который размышлял об

> *игле единичной длины, бросаемой (вместо игральной кости) случайным образом на плоскость, разделённую на параллельные полосы единичной ширины.*

Бюффон доказал, что

> *вероятность того, что игла пересечёт линию между двумя полосами, равна* $2/\pi$, *где* $\pi = 3{,}14\ldots$ *— половина длины единичной окружности.*



Жорж-Луи Леклерк Бюффон

Кроме того, что он положил начало *геометрической теории вероятностей* и *интегральной геометрии*, Бюффон, глубоко понимавший современную ему физику, внёс вклад в теоретическую и практическую оптику. В качестве эксперимента он построил большое (размером около двух метров) вогнутое зеркало, состоявшее из 360 маленьких зеркал, которое, фокусируя солнечный свет, могло расплавить железо на расстоянии 10 м и поджечь дерево на расстоянии 50 м.

---

[15] «О расчётах при азартных играх» (*лат.*).

[16] Пусть p, q — нечётные простые числа и $q^* = (-1)^{(q-1)/2}q$. Тогда $n^2 - p$ делится на q для *некоторого* целого n в том и только том случае, если $m^2 - q^*$ делится на p для *некоторого* m.

Но, как мы говорили в гл. 6 первой части, наиболее важный вклад он внёс в то, что сам называл «естественной историей», — разработку синтетической картины Жизни на Земле; он дал описание многих важнейших взаимодействий между организмами и окружающей средой, и многое из открытого им теперь фигурирует под названием «биогеография».

Бюффон настаивал на доминирующей роли биологических препятствий к спариванию между различными группами организмов по сравнению с очевидными географическими препятствиями и предложил определение *вида*, устоявшее против попыток «улучшения» более поздними естественными философами, включая некоторых постдарвинистских эволюционных мыслителей XX века.

Бюффон первым (?) чётко сформулировал главную предпосылку эволюционной биологии — понятие *общего предка всех животных*, включая людей.

Взгляды Бюффона на Природу и Жизнь, изложенные в его труде «*Histoire naturelle, génèrale et particuliere*»[17], публиковавшемся с 1749 по 1789 г. в 36 томах, стали общепринятыми для образованных людей Европы на два столетия.

Игла Бюффона соединила «случайное» с «анализом континуума», вооружив их «исчислением бесконечно малых». Именно этим восхищался Максвелл и пользовались многие поколения математиков и физиков после Бюффона.

Но такое исчисление достаётся не бесплатно: вероятность — это «полноправное число», подчиняющееся своей таблице сложения/умножения. Однако приписать *конкретное точное* численное значение вероятности «случайному событию» в «реальной жизни», например предложению некоторого языка, возможно далеко не всегда.

О симметрии в случайности

Изящество и успех вероятностных моделей в математике и естественных науках (всегда?) обусловлены (зачастую неявно подразумеваемой и/или скрытой) симметрией.

Важность «равновероятности» подчёркивал ещё Кардано, а *параметризация* случайных систем «независимыми величинами» всегда была главным догматом теории вероятностей. В основе большей части (всей?) классической математической теории вероятностей лежат *(квази)инвариантные меры (типа) Хаара*, и 2000 год был отмечен самым недавним триумфом «симметричной вероятности» — открытием (по существу) *конформно инвариантных* вероятностных мер в про-

---

[17] «Всеобщая и частная естественная история» (*фр.*).

странствах плоских кривых (и кривых на римановых поверхностях), параметризованных приращениями *броуновских процессов* с помощью *эволюционного уравнения Шрамма—Лёвнера.*

Атомы и бактерии. Частичка вещества размером с бактерию может содержать $N_{AT} = 10^{12}$ атомов и/или маленьких молекул, и число N_{BA} бактерий, обитающих в вашей толстой кишке, также имеет порядок 10^{12}. Если любой объект — будь то атом или бактерия — может находиться в одном из двух состояний, то число *мыслимых* состояний всей системы, назовём её S, чудовищно,

$$M = M(S) \geqslant 2^{10^{12}} > 10^{3\,000\,000\,000},$$

и обратное к нему число

$$\frac{1}{M} < 0{,}\underbrace{000\ldots000}_{3\,000\,000\,000}1,$$

взятое за вероятность того, что система S находится в данном конкретном состоянии, слишком мало, чтобы иметь какой-либо экспериментальный/физический/биологический смысл.

Однако приписывание всем состояниям вероятности $\frac{1}{M}$ оправдано и приведёт к содержательным результатам, ЕСЛИ наличествует симметрия, делающая эти состояния «вероятностно эквивалентными», причём природа такой симметрии, если она вообще есть, очень сильно отличается в физике и биологии[18].

Но если симметрии недостаточно и мы не можем *постулировать* равновероятность (и/или что-нибудь в том же духе, например *независимость*) некоторых «событий», то классический анализ застопоривается, идёт ли речь о математике, физике, биологии, лингвистике или азартных играх.

О случайности в языках

Однако ни абсурдная малость вероятностей, ни фиаско «анализа с числами» не исключают применение теории вероятностей к исследованию языков и процессов обучения. И если вы робеете спорить с Хомским, просто воспринимайте его слова

«при любой интерпретации этого термина»

---

[18] Это не вполне случайно, что числа N_{AT} и N_{BA} имеют одинаковый порядок величины. Если бы атомы были гораздо меньше или клетки гораздо больше, скажем, была бы невозможна функциональная клетка, состоящая менее чем из 10^{20} атомов (это чуть меньше, чем у мухи дрозофилы), то, скорее всего, в нашей недолговечной Вселенной, едва насчитывающей 10^{80} атомов, жизнь в том виде, как мы её знаем, развиться бы не смогла.

как

> *«при любой интерпретации термина “вероятность”, которую можно найти в учебниках XX века».*

Теория вероятностей, применимая к языкам, должна не приписывать событиям *числа*, а скорее строить «*функтор*» из «лингвистической категории» в некую «малую и простую» категорию, однако, вообще говоря, отличную от «категории чисел».

То, что в теории вероятностей для языков мы лишились чисел, неудивительно — числа не являются фундаментальными объектами эрго-мира. В этом мире нет чисел, зато есть хорошо различимый *частичный порядок* на «правдоподобностях» различных предложений языка. Быть может, это и не бог весть что, но *иерархическое использование* данного порядка позволяет восстановить многие лингвистические структуры.

Адаптация теории вероятностей к нуждам (эрго)лингвистики потребует также пересмотра понятия «события», вероятность которого измеряется.

Современное канонизированное определение «события», предложенное А. Н. Колмогоровым в его работе «*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*»[19] 1933 года, по существу состоит в следующем.

Любую случайность в мире можно представить (промоделировать) геометрически подобластью Y единичного квадрата ■ на плоскости. Вы бросаете точки в ■, считаете попадание в область Y ***событием*** *и определяете вероятность этого события как площадь области Y.*

Сколь бы изящным ни был этот *теоретико-множественный* контекст (в котором ■ обозначает *универсальное вероятностное пространство с мерой*), ему придётся разделить судьбу *универсальных областей* Андре Вейля из его книги 1946 года «*Основы алгебраической геометрии*». Теоретико-множественный язык, введённый в математику Георгом Кантором и верно служивший нам почти 150 лет, теперь вытесняется более гибким языком *категорий* и *функторов*. Место многообразий Андре Вейля заняли схемы Гротендика, и колмогоровское определение в конце концов подвергнется аналогичной метаморфозе.

Один из возможных путей подсказывает больцмановский взгляд на статистическую механику: его идеи побуждают использовать *нестандартный анализ*, а также *категорный* язык в стиле Гротендика. Но математическая интерпретация идеи вероятности в *языках* и *обучении* требует более радикального отклонения от (модификации? обобщения?) этого пространства ■.

---

[19] «Основные понятия теории вероятностей» (*нем.*).

Кардано, Галилей, Бюффон. Само существование этих людей бросает вызов нашим представлениям о диапазоне и масштабе человеческого духа. Их разум не содержит видимой стены, отделяющей эрго от эго.

Где такие люди сегодня? Почему мы больше их не видим? За последние 200 лет никто не мог похвастаться и сотой долей интеллектуальной мощи Кардано в сочетании с его величайшим инстинктом выживания. Со времён Бюффона никому не удавалось внести долговечный вклад в столь далёкие друг от друга области, как чистая математика и науки о живой природе. Что нам делать, чтобы вернуть галилеев?

Глава 22

Потоки сигналов из мира в мозг

Сигналы, поступающие в эрго-мозг через зрение, слух и обоняние, «записываются» на некоторые физические/химические носители, структуры и симметрии которых с математической точки зрения вполне прозрачны.

1. Зрительные сигналы живут в четырёхмерном континууме *пространство+время*. Они разрушают его симметрию (и непрерывность), но в конце концов эрго-мозг эту симметрию реконструирует.

2. Слуховые сигналы живут в трёхмерном пространстве *время+частота+амплитуда*. Эрго-мозг, в отличие от математиков, по-видимому, не интересуется (симплектической) симметрией этого пространства; его заботит «информационное содержание» сигналов, а также *корреляции* и/или *избыточность* в потоках сигналов.

3. С точки зрения структуры, обоняние имеет много общего со вкусовыми ощущениями, а также с восприятием тепла, холода и боли, которые, однако, у большинства животных более примитивны, чем обоняние. Но оно коренным образом отличается от зрения и слуха.

Запахи, в отличие от образов и звуков, не могут записываться и перезаписываться на всевозможных носителях при помощи *специфических для каждого из них* физических/химических субстратов.

«Буквы запахов» — это ароматические молекулы, проникающие в ваш нос. Их потоки, *если они не связаны с какой-либо твёрдой средой*[1], имеют больше внутренних симметрий, чем потоки зритель-

---

[1] Запах, связанный с твёрдой поверхностью, может, например, проследить собака.

ных и слуховых сигналов: ароматические молекулы N различных видов, свободно плавающие в газе или жидкости, можно переставить $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times N$ различными способами[2].

Запахи не поддаются перезаписи, не допускают естественную оцифровку, не могут быть структурированы универсальным образом, подобно изображениям и звукам.

Поэтому запахи нельзя кодировать позиционно, и обонятельные входные данные обладают значительно более низким информационным содержанием, чем лучше организованные потоки зрительных и слуховых сигналов. (Это очевидная причина того, что для восприятия запахов требуется так много *различных*[3] рецепторов.)

Например, комбинациями молекул двух видов, ⬡ и □, можно закодировать лишь несколько десятков различных сигналов, так как невозможно заранее установить порядок, в котором группы таких молекул, скажем из следующей строки, попадут в ваш нос:

⬡□⬡⬡□⬡⬡□□□⬡□⬡□□□⬡□□⬡⬡□⬡□□□□⬡⬡□

Хотя существует 2^{30} — более миллиарда — таких двоичных строк, ваш нос воспринимает лишь относительное количество молекул ⬡ и □. (Для приведённой выше ⬡ □-строки это скромные 13/15.)[4]

Возможно, ищейки, полость носа которых содержит 200–300 миллионов обонятельных рецепторов, способны различать 10^6(?), 10^9(?), 10^{12}(?) запахов[5], но им далеко до зрительной системы человека, которая без усилий различает изображения, случайно выбранные из совокупности в 10^{20} штук, а при небольшом усилии (тренировке?)[6] — до 10^{1000} штук.

Внутренняя «библиотека» запахов проще, чем механизмы запоминания зрительных образов, звуков, слов и идей, — для её организации не нужно никакого эрго.

Кроме того, обоняние, в отличие от зрения, не нуждается в мышцах, оно не связано с проприоцептивной системой, и мы лишены возмож-

---

[2] Это, конечно, преувеличение. Ничто на Земле никогда не переставлялось более чем $50! > 10^{64}$ способами.

[3] Как установили Ричард Аксель и Линда Бак, соответствующие нейроны содержат более 1000 различных рецепторных белков.

[4] Изменения в интенсивности запахов дают мало информации, хотя для собаки могут играть роль часов.

[5] По-видимому, не существует ни очевидного определения «обонятельной чувствительности», ни надёжных данных, позволяющих получить убедительную оценку обонятельной способности людей и других животных.

[6] Строки, состоящие из обычных слов, различить легко, но сколько времени потребуется вам на эти: अ ल ो ए व अ न अ गअ रई हअ तए ह अइ и अ ल ो ए व अ न अ अग रई हअ तए ह अइ?

ности (вос)производить запахи по собственному желанию, даже если нам кажется, что мы их помним.

Существует не так много доступных чёткой идентификации *универсальных запахов*, общих для больших групп объектов. Неудивительно, что языки (городского населения?) содержат мало специфических названий запахов — в английском их около десяти: *musky, putrid, rotten, floral, fruity, citrus, vegetative, woody, herbaceous, spicy*[7]. В русском и того меньше: *кислый, сладкий, едкий, гнилостный, пряный, цветочный, химический, фруктовый,...*, но в некоторых языках слов-запахов чуть больше, например, в языке камерунского племени *капсики* их около пятнадцати.

Естественные языки не тратят слов на *индивидуальные* объекты/свойства, но совершенствуют искусство давать одно и то же имя *многим* различным вещам — что роднит их с математическими теориями. Не существует грамматики запахов, нет книг на языке ароматов, невозможно закодировать и «заморозить» потоки обонятельного восприятия[8]. (Именно это не позволило собакам создать язык на основе обоняния.)

4. Для соматосенсорного и тактильного (гаптического) восприятия нет явного равномерного (симметричного) пространственного носителя, но их информационный потенциал сравним с аналогичным потенциалом для зрения и слуха.

Семь потоков

> *⟨...⟩ придумать шаг, перетекающий в следующий шаг, и весь танец должен иметь единую структуру.*
>
> Фред Астер

Входящие потоки сигналов естественным образом — в соответствии с воспринимающими их сенсорными рецепторами и путями, которыми они попадают в мозг, — делятся на *зрительные, слуховые* и *соматосенсорные*, причём у последних значимы два аспекта — *проприоцепция*, ощущение собственного тела, и *тактильное чувство*, т. е. *осязание*.

Однако с точки зрения эрго-обучения сигналы различаются тем, как мы узнаём их «значения», как мы с ними взаимодействуем, как мы приходим к пониманию их структур.

---

[7] Мускусный, гнилостный, тухлый, цветочный, фруктовый, цитрусовый, растительный, древесный, травяной, пряный (*англ.*).

[8] Ду́хи не в счёт.

1. *Разговорная речь* зависит от слуховой и сенсорно-моторной системы: уши нужны, чтобы слышать, а сенсорно-моторная система — чтобы производить речь. Однако глухонемые говорят на жестовых языках, а слепоглухие общаются с помощью тактильно-жестового языка[9].

2. *Письменная речь* (в тех случаях, когда она существует естественным образом), скорее всего, сильно перекрывается в мозге (привычного к чтению) человека с разговорной, но, кроме того, создаёт и свой собственный мир. По своему характеру она не обладает интерактивностью, по крайней мере на поверхностном уровне[10], и не привязана *напрямую* к потоку времени[11]. Жизнестойкость письменной литературы трудно примирить с наивными селекционистскими взглядами на коэволюцию языка и мозга.

3. *Математика.* Обучение математике — процесс интерактивный, но трудно сказать, в каком именно смысле.

Образы, которые математик создаёт у себя в мозгу, не принадлежат ни Языку, ни какому-то конкретному «сенсорному отделу». Думать о математике — всё равно что управлять воображаемым велосипедом или исполнять/сочинять танец со сложными движениями исключительно у себя в голове. (У разных людей это может происходить по-разному.)

4. *Языки игр.* Мы в состоянии научиться играть в различные интеллектуальные и физические игры и получать от них удовольствие. Вероятно, эти игры делятся на несколько (около десятка?) классов в зависимости от того, как именно они встраиваются в эрго-мозг. Письменная речь и математика, возможно, составляют отдельные классы игр.

5. *Музыка.* Музыкально одарённые люди могут проигрывать мелодии мысленно и воспроизводить их с помощью голоса и/или музыкальных инструментов; редкие единицы в состоянии создавать новые мелодии. Но мелодии, в отличие от предложений Языка, не могут рассказывать сами о себе, и не существует общего контекста, позволяю-

---

[9] Самое поразительное, что некоторые слепоглухие могут понимать разговорную речь, улавливая колебания в гортани говорящего.

[10] Чтение и письмо — это как бы разговор с самим собой.

[11] Стрела времени реализуется *направленностью* написанного.

щего сформулировать, что такое человеческая музыка (в отличие от птичьей) и/или что следует считать «пониманием музыки»[12].

6. *Проприоцептивная/соматосенсорная система.* Бег по непредсказуемой пересечённой местности — это своего рода разговор с дорогой при помощи мышц вашего тела. Этот процесс гораздо проще обычной речи, но всё же превосходит возможности компьютеров, управляющих роботами. Современный робот не может и пришить пуговицу к вашей рубашке.

7. *Зрение.* Как минимум половина новой коры головного мозга человека посвящена зрению, но, возможно, это объясняется исключительно объёмом обрабатываемой и хранимой информации, а не структурной глубиной зрительных образов. При этом поразительно, что нарушения зрения, и даже зрения + слуха, не столь существенно сказываются на человеческом эрго. Эрго устойчиво и не зависит от конкретных сенсорных входных данных.

Три из упомянутых семи потоков — *Язык, Математика, Музыка* — обладают одним общим свойством: получатель такого потока $\overrightarrow{F}$ развивает, без какой-либо внешней помощи, способность творчески создавать новый поток $\overleftarrow{F}$ того же класса, что и $\overrightarrow{F}$. (В случае Математики и Музыки это случается редко, но чудеса, происходившие в головах Моцарта и Рамануджана, перевешивают по значимости любую статистику.)

Моделирование преобразования $\overrightarrow{F} \mapsto \overleftarrow{F}$ — один из ключевых аспектов нашего подхода к универсальной проблеме обучения. (Возможно, аналоги потоков $\overleftarrow{F}$ существуют и для других входящих потоков $\overrightarrow{F}$, но они являются как бы *внутренними*.)

Среди таких преобразований лучше всего изучено освоение родного языка детьми, механизм которого (до сих пор неизвестный) должен

---

[12] Недавно была предпринята попытка выяснить, что музыка делает с мозгом: `http://phenomena.nationalgeographic.com/2013/04/11/why-does-music-feel-so-good/` и `http://www.zlab.mcgill.ca/home.php?1592876871`.

не сильно отличаться от механизма, с помощью которого математики обучаются математике.

Самая изощрённая математическая структура, которую мы создаём у себя в голове, вероятно, проще структуры естественных языков (и меньше структуры зрения), но и она представляет значительный интерес, при этом соответствующий процесс обучения может легче поддаваться анализу благодаря не только его относительной простоте, но и огромным различиям в способности людей к обучению математике[13], а также наличию критериев для оценки её понимания.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОТОКОВ: УЧИМСЯ ЧИТАТЬ, УЧАСЬ ГОВОРИТЬ

Исходная форма сигналов, которые переносят вышеупомянутые семь потоков, отличается от того, что получают ваши сенсорные системы. К примеру, зрительные образы создаются из двумерных *проекций трёхмерных* структур на сетчатку вашего глаза; более того, осуществляемый мозгом анализ этих проекций ассоциирован с деятельностью моторных систем, управляющих движениями глаз, которые постоянно меняют эти проекции.

Аналогичным образом, согласно догмам *порождающей грамматики*, поток речи, создаваемый мозгом, имеет древовидную структуру, которая затем «упаковывается» в одну временну́ю линию.

Реконструкция потока F_{orig} из получаемого вами потока F_{rec} — важный аспект понимания сообщения, переносимого потоком F_{orig}. Например, понимание потока речи связано со способностью говорить, т. е. реконструировать/порождать поток F_{orig} или что-то близкое к нему в эрго-мозге.

Эту реконструкцию можно представить, хотя и не полностью, в виде *аннотации* к потоку F_{rec}.

Например, получив плоское изображение на своём экране (сетчатке), эрго-обучающийся $\mathcal{L}$ должен правильно найти глубину в *интерпозициях/окклюзиях* и/или «угадать» относительные значения третьих координат в важных точках этого изображения.

А древовидную глубинную структуру (записи) потока речи можно обозначить с помощью *скобок*, расставив их в предложениях нужным образом. (Аннотация может содержать также дополнительные синтаксические и/или семантические комментарии относительно отдельных слов и предложений.)

---

[13] Любой нормальный человек понимает родной язык и обладает адекватной зрительной картиной мира. Из-за этой однородности понять такие «понимания» столь же трудно, как было бы трудно понять движение в мире, где все объекты движутся одинаково.

Подобные процессы аннотирования, осуществляемые человеческим эрго-мозгом, основаны на нетривиальных умозаключениях, которые отнюдь не являются ни простыми, ни автоматическими и которые до сих пор плохо поняты. При этом эрго-мозг не только аннотирует потоки сигналов, но и дополняет их чем-то ещё.

Например, формирование зрительного образа в мозге связано с активностью мотонейронов, обеспечивающих движения глаза, и «понимание» таких образов зависит от структурного сопоставления этой активности с аналогичной активностью тех же нейронов в прошлом.

Этот активный процесс восприятия можно понимать как разговор или своего рода игру эрго-мозга с окружающей средой. Но подобные игры, в отличие от игр типа шахмат, с трудом поддаются математической формализации.

Глава 23

Характеристические свойства лингвистических сигналов

Лингвистическая информация, поступающая в эрго-мозг, в отличие от химических сообщений, которыми обмениваются клетки, не слишком зависит от физического носителя этой информации и от соответствующих каналов восприятия — слуховых, зрительных (при чтении и в жестовых языках) или тактильных (при общении слепоглухих)[1]. Свойства «вербальных сигналов» отражают свойства лежащей в их основе *синтаксической эрго-структуры*, очевидные атрибуты которой таковы[2].

1. *Быстрая кластеризация, специфичная для данного языка.* Формально/физически *различные* сигналы, скажем звуки, воспринимаются/распознаются как *тождественные* вербальные единицы, например фонемы, слова, фразы, причём отождествление происходит в пределах *полусекунды*.

Кластеризация *фонем* (и, вероятно, других, в том числе не слуховых базовых вербальных единиц) зависит от конкретного языка, и (деградирующий со временем) механизм усвоения этих кластеров детьми плохо (если вообще) понят.

Однако, абстрактно говоря, это простейшая из наших проблем, о чём свидетельствует эффективность (неконтекстуальных?) алгоритмов распознавания речи.

---

[1] Для физика языки — это примеры потоков (очень!) *низкоэнергетических* сигналов, которые, однако, способны *сильно возмущать* динамику в остальном устойчивых систем, таких как физиология человеческого тела.

[2] Мы не говорим здесь о *языковых универсалиях*, таких как *отрицательный, вопросительный* и *антонимичный*, которые отсутствуют в нелингвистических сигналах.

2. *Формализованное деление на единицы.* Потоки речи *систематически* (хотя и несовершенным образом) разделяются на *(полу)автономные единицы,* наиболее фундаментальные из которых представляют собой то, что мы называем *«словами».*

Это разделение — более жёсткое, чем в случае сигналов, поступающих из «естественных источников», — в значительной степени основано на *универсальных* принципах *сегментации,* приложимых ко всем типам сигналов, при этом маркеры, разделяющие «сегменты», ассоциированы с *ярко выраженными минимумами предсказанных профилей* потоков сигналов, а построение такого профиля опирается на структурные паттерны, характерные для данного потока.

3. *Структурные корреляции среднего и дальнего порядка.* Языки обладают бóльшим числом «структурных уровней» по сравнению с другими потоками сигналов. Отчасти это видно по наличию нелокальных «корреляций» между различными фрагментами текста.

Например, если предложение начинается словами «*У нас есть много больше...*», есть все основания ожидать, что далее с аномально высокой вероятностью последует «*чем...*»[3].

А если в книге упоминается «*Джек*» и написано, что «*он вновь сверкнул глазами*», то можно поспорить, что на одной из предыдущих страниц «*Джек сверкнул глазами*»[4].

4. *Вербальная редукция нелингвистических сигналов.* Множество различных невербальных сигналов, соответствующих предметам, событиям, свойствам или действиям, кодируется одним и тем же словом[5]. Например, сотни маленьких пушистых представителей семейства кошачьих, когда-либо попадавших в поле вашего зрения, сводятся к одному-единственному слову «кошка».

Невербальных сигналов много, а слов-названий для них мало. Применение языка позволяет заменить основную часть «сырой памяти» в мозге сетью связей «*понимания*» между отдельными пунктами. Вот почему дети получают столь явственное удовольствие от вербальной классификации/унификации «естественных сигналов», поступающих из «внешнего мира», учась одинаково называть различные объекты[6].

5. *Имитация, повторение и порождение лингвистических сигналов.* Люди, особенно дети, обладают способностью воспроизводить по-

---

[3] Попытайтесь набрать в Гугле «*У нас есть много больше*».

[4] Универсальная самообучающаяся программа сталкивается здесь с проблемой «понимания» слова «*вновь*».

[5] Это явление можно сравнить с существованием *синонимов,* но по частоте и важности последним далеко до мощи вербальной редукции.

[6] Дети этого возраста — почти идеальные эрго-ученики: стремление учиться и понимать есть основная движущая сила эрго-систем.

лучаемые ими лингвистические сигналы [*sign*], включая сигналы, издаваемые ими самими; точнее, порождаются *не сами сигналы* [*sign*], а элементы *того же класса/кластера*, причём выбор конкретного *правила классификации* — совсем не простое дело.

Вряд ли можно анализировать языки, не умея их порождать[7]; при этом в основе механизмов порождения языков — называемых *порождающими грамматиками* — лежит повторяющийся характер неточной имитации.

6. *Многоуровневая автореференция.* Никаким другим потокам сигналов и/или средствам человеческой коммуникации не свойственна такая предрасположенность к автореференции, какой обладает язык. Эрго-структуры языков содержат множественные отражения своих собственных «я», их внутренних «эго», такие как

> *пары «существительное–местоимение», отсылки к ранее сказанному/написанному, рефераты текстов, названия книг, оглавления* и т. д.

Понимание языка немыслимо без способности порождать и интерпретировать его автореферентные паттерны.

7. *Повсеместное использование метафор.* Метафоры, представленные в словарях, — это своего рода застывшие отражения их предшественников (возможно, давно забытых) в многочисленных цветных зеркалах Языка, соответствующих аналогичным зеркалам человеческого эрго-мозга.

(В случае зрения такие «зеркала», вероятно, реализуются в виде проекций «более глубоких» областей мозга на первичную зрительную кору.)

Язык в эрго-мозге

Ментальное представление языков описывается *синтаксическими/ лингвистическими эрго-структурами*, которые похожи на структуры,

---

[7] Нейронные механизмы порождения сигналов играют важную роль и в случае зрения: бо́льшую часть того, что вы «видите на самом деле», вызывает к жизни ваш собственный мозг, но детали этого процесса нам недоступны.

обычно изучаемые математиками и лингвистами, но в каком-то смысле более *элементарны и более абстрактны*. (С нашей эрго-точки зрения, понятия «*элементарного*», «*абстрактного*», «*фундаментального*», «*рудиментарного*» являются синонимами.)

Мы не имеем чёткого понимания того, что они из себя представляют, но *комбинаторное ядро* такой структуры видится как *пара многослойных цветных сетей*:

первая сеть состоит из связок между (синтаксически или семантически) взаимодействующими (часто близкими в пространственном/временно́м отношении) единицами в текстах (разговорах), а вторая — из разнообразных подобий между такими единицами.

Кроме того, (не теоретико-групповые) симметрии, вытекающие из правил преобразования внутри этих структур, напоминают явления, встречающиеся в *теории n-категорий*.

Глава 24

Понимание структур и структура понимания

> *Если бы нашёлся попугай, отвечающий на все вопросы, я заявил бы не колеблясь, что он мыслящее существо.*
>
> Дидро, «Философские мысли», 1746 г.

Но…

> *Никак нельзя себе представить, что* [машина] *расположит слова различным образом, чтобы ответить на сказанное в её присутствии, на что, однако, способны даже самые тупые люди.*
>
> Декарт, «Рассуждение о методе», 1637 г.

Оправдана ли уверенность Декарта в том, что ни одна машина не в состоянии пройти то, что теперь называется *тестом Тьюринга*, т. е. *ответить на сказанное в её присутствии*?

Гарантирует ли успешное прохождение такого теста то, что тестируемый является мыслящим существом, которое понимает сказанное, как это утверждает Дидро?

Что значит понимать язык или любой другой поток сигналов?

Дидро указывает на возможный ответ:

> *По содержанию идей, по логической последовательности фраз и связи рассуждений до́лжно заключать, что данное существо мыслит.*

Чтобы продвинуться дальше, мы предполагаем, что

- почти (?) все структуры, которые встречаются нам в жизни, такие как естественные языки, математические теории и т. п., могут быть поняты[1];
- это понимание универсальным образом приложимо к большому (?) классу *структурных* сущностей;
- понимание само по себе есть сложная структурная сущность, подлежащая, таким образом, математическому изучению.

---

[1] Слишком оптимистично? Однако согласуется с замечанием Эйнштейна о том, что *«⟨…⟩ тайна мира заключается в его постижимости»*.

Постулировав всё это, мы начинаем поиск математических моделей[2] понимания[3].

Хотя бы приблизительные ответы на следующие вопросы могут сузить диапазон этих поисков.

Вопрос 1. Каковы важнейшие (ожидаемые? желаемые?) свойства/архитектуры математических моделей структурного понимания?

Вопрос 2. Если такая модель существует, обязательно ли она единственна? В частности, должны ли гипотетические структуры понимания, скажем, языка и шахмат быть сильно похожими?

Вопрос 3. Насколько сложной должна быть такая модель и, соответственно, насколько длинной должна быть компьютерная программа, её реализующая?

Вопрос 4. Каково ожидаемое время, необходимое для построения такой модели и написания соответствующей программы?

Вопрос 5. Какой процент этого времени можно передоверить машинному (эрго)обучению при данном уровне контроля?

Вопрос 6. Насколько можно автоматизировать контроль за таким обучением?

Вопрос 7. Каковы критерии/тесты для проверки правильности работы программ «я понимаю»?[4]

---

[2] Говоря о «*математической структуре*» или «*математической модели*», мы не имеем в виду какую-то конкретную ветвь постоянно растущего и по большей части скрытого от нас огромного дерева, называемого математикой.

[3] Невозможность решить — и даже сформулировать — проблемы понимания и *думающей машины* в простых словах не ослабляет настойчивое стремление людей сообщить миру о том, что подсказывает их *внутреннее чутьё*, — о чём свидетельствует неиссякающий поток публикуемых мнений на этот счёт.

Забавно, что наличие самого *чутья*, по крайней мере во внутренностях собак, — в отличие от идей, передаваемых от внутренностей человека к его мозгу, — было экспериментально подтверждено Х. Флори и его коллегами, результаты которых опубликованы в 1929 г. в статье под названием «*Сосудистые реакции слизистой оболочки толстой кишки собаки на страх*». (Это тот же Флори, который в 1940-е гг. ввёл пенициллин в терапевтическую практику.)

[4] Способность самого разработчика пройти тест — плохой критерий для разработки такого теста.

Вопрос 8. Можно ли *алгоритмически* генерировать формальные вопросы для теста типа Тьюринга, способные заставить компьютер давать бессмысленные ответы?[5]

Вопрос 9. Существуют ли простые правила для выявления бессмысленных ответов?

Вопрос 10. Может ли опыт человеческого обучения (преподавания?) оказаться полезным для разработки умных обучающих алгоритмов?

Вопрос 11. Помогает ли эрго-логика ответить на приведённые выше вопросы?

По-видимому, понимание состоит из трёх ингредиентов:

$\bullet_U$ *некоторая комбинаторная (логическая?)* ***структура*** $\mathcal{U}$ *в разуме/мозге/программе понимающего;*

$\bullet_{[IU]}$ **процесс** $\mathcal{IMPU}$ *имплементации структуры* $\mathcal{U}$ *эрго-системой, представляющей «понимающего»;*

$\bullet_{[RU]}$ **результат** $\mathcal{RESU}$ *такой имплементации:* $\mathcal{RESU}=\mathcal{IMPU}(\mathcal{FLOW})$, *где* $\mathcal{IMPU}$ *понимается как преобразование, применяемое к потокам сигналов.*

Мы не знаем наверняка, является ли *понимание* формализуемым понятием, и если да, то у нас нет ясного представления о том, какого сорта структурой может быть $\mathcal{U}$.

Единственным убедительным аргументом в пользу существования структуры $\mathcal{U}$ было бы построение функциональной *думающей машины/программы*, а единственное мыслимое нет могло бы стать следствием невероятного открытия до сих пор неизвестного фундаментального свойства живой материи мозга.

Это исключает любые спекуляции о том, как и где можно реализовать подобную структуру. Кроме того, она заведомо не единственна: скорее, различные такие $\mathcal{U}$ организованы в некое структурное объединение, которое отчасти может быть описано в терминах теории категорий.

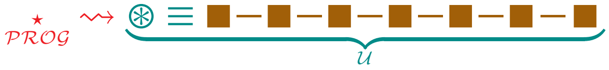
Однако у нас есть реалистичные (?) ожидания относительно возможных пространственно-временных характеристик такой структуры: структура $\mathcal{U}$ должна быть гораздо меньше по объёму всего потока $\mathcal{FLOW}$, который она «понимает», и её имплементация, т. е. применение преобразования $\mathcal{IMPU}$ к потоку $\mathcal{FLOW}$, должна происходить гораздо быстрее, чем достижение понимания $\mathcal{U}$.

---

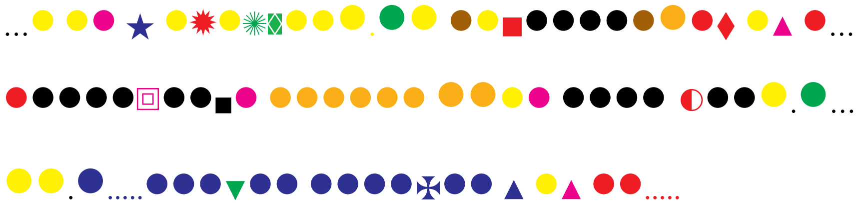
[5] Такие вопросы должны содержать отсылки к более ранним стадиям разговора. Скажем, экзаменатор в какой-то момент говорит *«пример»*, а затем, отвечая на вопрос, заданный программой, заявляет: *«Я уже привёл такой пример в моём предыдущем предложении из пяти слов»*. Но чтобы обмануть достаточно изощрённую программу, придётся сконструировать «логическую *матрёшку*» из подобных вопросов.

По-видимому, для того чтобы изучить поток $\mathcal{FLOW}$ длины l, требуется $\approx l \log l$ элементарных шагов, что выливается в месяцы или годы, когда речь заходит об изучении языка или математической теории[6]. Но после того, как обучение закончено, нужно всего несколько секунд, чтобы осознать, например, что некая строка символов в языке вашего потока $\mathcal{FLOW}$ является абсолютно новой, и ещё меньше времени, чтобы понять, что она бессмысленна.

С другой стороны, понимающая программа $\mathcal{U}$ занимает пространство/объём на несколько порядков больше, чем исходная программа обучающегося $\mathcal{PROG}$; при этом размер такой программы *универсально* (независимо от полного числа сигналов из $\mathcal{FLOW}$, полученных/изученных обучающимся) ограничен величиной типа 10^6 битов. Наглядно это можно изобразить так:



где ⊛ — это «ядро понимания», представляющее собой несколько тысяч страниц «словаря+грамматики» потока сигналов $\mathcal{FLOW}$, дополняемое некоторым количеством (десятками, сотнями или тысячами, в зависимости от $\mathcal{FLOW}$) «томов» ■ свободно организованного (представьте себе память вашего компьютера) «знания»; при этом сам доступный поток $\mathcal{FLOW}$ может насчитывать десятки или даже сотни миллионов почти не связанных единиц — томов, интернет-страниц, образов, — являя собой полный сумбур типа



Ветвь математики, которая позволяла бы описать, скажем, человеческое понимание языка, должна быть весьма сложной — она ещё не выросла на «великом древе математики».

Но иногда дело обстоит просто, как, например, в случае «*языка криков*» зелёных мартышек, который сопоставляет несколько (четыре?) слов-знаков (криков тревоги) объектам-событиям, представляющим собой разных хищников — леопардов, орлов, питонов, павианов.

---

[6] Истинная мера времени, назовём её *эрго-временем*, должна быть много-(дву?)мерной, чтобы отражать параллелизм в программах, моделирующих обучение и другие умственные процессы.

Однако ни одна мартышка не сочла бы, что математическое *взаимно однозначное соответствие*, назовём его ЯзКри, между двумя четырёхэлементными множествами *понимает* смысл криков тревоги, даже если оно реализовано обезьяноподобным роботом, который реагирует на хищников должным образом, испуская нужные крики, и тем самым проходит тест Тьюринга зелёных мартышек.

Но почему же тогда Декарт и Дидро, не говоря о самом Тьюринге, придают такое значение тесту Тьюринга?

Существует ли *значительное* различие между соответствием *«вопросы»* ⟶ *«корректные ответы»* в человеческом языке и в ЯзКри?

Ответ таков:

да, существует ОГРОМНОЕ РАЗЛИЧИЕ.

Чтобы оперировать с крошечными множествами (например, состоящими из четырёх элементов — криков тревоги зелёных мартышек) и соответствиями между ними, не обязательно, чтобы эти множества обладали какой-то структурой. Однако со звуками, издаваемыми человеком, а тем более с длинными последовательностями звуков и/или письменными текстами, невозможно работать в отсутствие структуры.

Люди с научным складом ума — Декарт, Дидро, Тьюринг, ... — неявно предполагают, что вышеупомянутое соответствие «⟶» должно быть совместимо с важнейшими структурами человеческого языка, назовём его $\mathcal{HL}$, который используется в данном тесте Тьюринга; при этом базовой (но не единственной) структурой в $\mathcal{HL}$ является структура *экспоненциального/степенного множества*: предложение, скажем, из тридцати слов в языке со словарём D понимается как элемент гигантского *степенного множества*

$$D^{30} = \underbrace{D \times D \times D \times \ldots \times D}_{30}.$$

Без подобного структурирования невозможно обойтись при реализации «думающего автомата» и/или управляющей им программы в *реалистичной* модели пространства-времени[7], которая *заведомо исключает*, например, «воображаемые программы», хранящие в своей памяти списки, состоящие, скажем, из более чем N^{15} предложений, где число N сравнимо по величине с мощностью $\mathrm{card}(D)$ словаря[8].

---

[7] В философских рассуждениях об искусственном интеллекте свойство физической реалистичности часто игнорируется.

[8] Само это предложение — «Без подобного структурирования... словаря» — содержит более сорока слов, из которых примерно половина — существительные, глаголы и прилагательные. Варьируя их, «можно» породить более чем $1000^{20} = 10^{60}$ грамматически корректных предложений. Можем ли мы оценить, сколько из них осмысленны? Думаете ли вы, что осмысленных предложений окажется около *тысячи* или, скорее, около *десяти*

(«Большие множества», конечные или бесконечные, не обладают независимым существованием, но существуют лишь как носители своих структур, подобно тому как в физике пространство-время не имеет смысла без содержащейся в нём энергии-материи. Однако теоретико-множественные обозначения не отражают сей факт, и новичка это может ввести в заблуждение. К примеру, элементарные учебники редко упоминают о том, что «соответствие» $x \mapsto y$ в «определении» *функции вещественной переменной* $y = f(x)$ — это лишь метафора и что функция $f(x)$, чтобы иметь право на существование в математике, должна *«уважать» некоторую структуру* в множестве вещественных чисел[9].)

тысяч? Можно ли представить себе, что «слабо осмысленных предложений» будет 10^6, или больше 10^{10}, или даже больше 10^{18}?

[9] Не существует общепринятого определения *«функции»*, которое бы отделяло *зёрна* — $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sqrt{x}$, $\ln x$, дзета-функцию $\zeta(x)$ Римана, дельта-функцию $\delta(x)$ Дирака, … — от *плевел*, таких как характеристическая функция множества рациональных чисел.

Глава 25

Шестнадцать правил эрго-обучающегося

Подсказываемые *эрго-логикой* общие руководящие принципы построения универсальных самообучающихся алгоритмов можно резюмировать следующим образом.

1\. Потоки сигналов, поступающие из внешнего мира, переносят определённые структуры, «растворённые» в них.

Обучение — это процесс извлечения этих структур и встраивания их в собственную *внутреннюю структуру* обучающегося.

2\. Ключевые алгоритмы обучения *универсальны* и применимы ко всем без исключения типам сигналов[1].

3\. Универсальность несовместима ни с какой априорной идеей «реальности» — «разум» обучающегося не содержит никакой мысленной картины того, что мы называем «реальным миром».

«Сообщениям», приходящим извне, обучающийся приписывает только тот *смысл*, который может быть выражен в терминах (по существу, комбинаторных) *структур*, распознаваемых и/или создаваемых им в процессе встраивания этих «сообщений» в его внутреннюю структуру.

4\. Из универсальности следует также, что действия обучающегося — построение внутренних структур и генерирование сигналов, как внутренних, так и выпускаемых наружу[2], — *не зависят от целей*, формулируемых в терминах внешнего мира.

Процессом обучения движет *«любопытство»* и *«интерес»* обучающегося к структурным схемам, которые он распознаёт во входящих потоках сигналов, и его восхищение логической/комбинаторной красотой структур, которые он извлекает из этих потоков, а также структур, которые строит сам.

Ключевые ингредиенты процесса обучения таковы.

5\. Обучающийся отличает знакомые сигналы от новинок и пытается сопоставить новые сигналы с теми, что хранятся в его памяти.

---

[1] Поведение обучающегося, т. е. его взаимодействие/разговор со входящими сигналами, зависит также от его внутренней структуры, уже построенной к данному моменту времени. В частности, длительное погружение в потоки сигналов конкретного класса делает поведение обучающегося более специализированным (более эффективным?), но при этом его способность впитывать и переваривать различные типы сигналов снижается.

[2] Это «действия», которыми занимается человеческий мозг.

6. Обучающийся пытается *структурно экстраполировать* сигналы, уже хранящиеся в его памяти, чтобы *предсказать* ожидаемые сигналы.

7. Кроме сигналов, поступающих из внешнего мира, обучающийся воспринимает, фиксирует и обрабатывает некоторые *сигналы, порождаемые* им самим внутри себя.

8. Обучающийся склонен *многократно воспроизводить* полученные сигналы, включая некоторые внутренние сигналы.

(Повторяющийся характер основных операций позволяет описывать процессы обучения как *орбиты некоторого преобразования в пространстве внутренних структур обучающегося*. Самообучающаяся программа, реализующая это преобразование, должна быть довольно простой, а процесс обучения — устойчивым. В конце концов «орбиты обучения» стабилизируются, подходя к приближённо неподвижным точкам.)

9. Обучающийся склонен *упрощать сигналы*, которые он пытается воспроизводить.

10. Обучающийся систематически строит гипотезы и «делает поспешные выводы», *формулируя общие правила* на основе регулярностей, которые он наблюдает в сигналах.

11. Обнаружив, что правило иногда нарушается, обучающийся не отбрасывает его, а добавляет к нему *исключение*.

12. Обучающийся склонен использовать *статистически значимые* сигналы как для построения своей внутренней структуры, так и для формирования предсказаний. Однако иногда он придаёт значение некоторым крайне редким сигналам, используя их как важные внутренние структурные единицы[3].

13. Вероятностные рассуждения обучающегося в условиях неопределённости подчиняются логике *да/может_быть/нет*.

На возможности наших гипотетических самообучающихся программ мы накладываем следующие ограничения, схожие с теми, которым подчинён человеческий мозг.

14. Обучающийся *не в состоянии воспринимать неструктурированные множества* более чем из четырёх-пяти элементов; встретив такое множество, он обязательно наделяет его некоторой структурой[4].

---

[3] В текстах значимы редкие слова, а не самые частые. К примеру, *gifku mfink otnid*, встретившись на трёх разных страницах книги, произведёт на вас большее впечатление, чем ooooo ooooo ooooo, встретившееся на двадцати страницах.

[4] Пример подобного рода — разбиение видимых звёзд на созвездия.

15. Обучающийся *не обладает встроенной способностью последовательного счёта* более чем до 4 (или, возможно, 3); мы постулируем, что для обучающегося $5 = \infty$.

В частности, обучающийся не способен осуществить или воспринять пять последовательных итераций одного и того же процесса, если только он не превратился в *рутину*, ответственность за которую *кора головного мозга* передаёт *спинному мозгу*[5].

Наша основная гипотеза состоит в том, что

> *универсальные алгоритмы обучения, которые сходятся к* ПОНИМАНИЮ, *существуют* и, более того, их формализованные описания *весьма просты*.

Временна́я сложность такого алгоритма должна быть не более чем логарифмически линейной (с не очень большими константами), а время работы полученной в результате обучения «компетентной программы» должно быть не хуже логарифмического.

На самом деле ключевые свойства знакомого нам (эрго)обучения имеют смысл только на «человеческой» пространственно-временно́й шкале: такое обучение применимо к потокам сигналов, переносящих в общей сложности 10^9–10^{15} битов информации, и едва ли можно существенно улучшить этот показатель[6].

Универсальность и двоемыслие. Если мы хотим, чтобы анализ *потока сигналов*, например набора текстов на некотором языке $\mathcal{L}$, имел хоть какое-то отношение к ИСТИНЕ, и если мы хотим построить алгоритм изучения языка $\mathcal{L}$, мы должны, следуя эрго-логике, *отбросить* всё, что априори знаем об $\mathcal{L}$, *забыть*, что это язык, *отказаться* от связанной с ним идеи смысла.

Однако единственный способ оценить здравость построенного алгоритма до его компьютерной симуляции состоит в том, чтобы сравнить его работу с работой соответствующих алгоритмов в человеческом мозге.

---

[5] Не обращайте внимания на *ребёнка, который ударил отца, который купил машину, которая сбила велосипед, который наехал на грузовик, который привёз лошадь, которая лягнула собаку, которая прогнала кошку, которая поймала крысу, которая сожрала хлеб.*

[6] Сами универсальные самообучающиеся программы, например те, что живут у нас в головах, не обладают встроенными идеями *смысла*, *времени*, *пространства*, *чисел*. Но любая спекуляция о естественных или искусственно созданных «интеллектуальных» системах представляется *бессмысленной*, если *не указаны пространственные* и *временны́е* параметры их возможных реализаций в пределах реалистичных *численных* оценок.

Глава 26

Учимся понимать языки: от библиотек к словарям

Процесс *изучения языка, назовём его* $\mathcal{TONG}$, математически представляется *орбитой универсальной самообучающейся программы PROG*, которая действует на *лингвистическом пространстве* языка $\mathcal{TONG}$, и эта орбита в конце концов должна (приближённо) сходиться к состоянию/программе «*я понимаю язык* $\mathcal{TONG}$».

Принципиальное существование такой программы *PROG* демонстрируют лингвистические успехи мозга (почти) любого ребёнка на Земле, который получает *электрохимические сигналы*, отчасти поступающие из лингвистических источников, и научается понимать их «смысл»[1].

Сценарий, более близкий к нашему опыту, таков: гость из другой вселенной[2] пытается «понять» записи, содержащиеся в некой человеческой «библиотеке» LIBR, например на англоязычных страницах Интернета.

В любом случае процесс, который мы называем «пониманием», интерпретируется как составление *эрго-словаря EDI* — своего рода «концентрированного экстракта» комбинаторных структур, присутствующих (но не сразу различимых) в потоках/массивах лингвистических сигналов.

---

[1] Наведение мостов между лингвистическими и нелингвистическими сигналами есть важный, но, вероятно, не необходимый ингредиент «понимания языка», о чём свидетельствуют лингвистические достижения слепоглухих людей.

[2] Кажется, ни одна мыслимая вселенная не отличается от нашей сильнее, чем то, что «видит» мозг в том электрохимическом мире, где он обитает.

Составление словаря включает в себя несколько *взаимосвязанных* задач, первой из которых является *аннотация* и *синтаксический анализ*, то есть идентификация и классификация ***текстуальных единиц*** — многократно повторяющихся и/или значимых фрагментов коротких строк s (скажем, размером до 50–100 букв-символов), — а также присвоение ***меток*** или *названий* некоторым из этих фрагментов.

Расстановку меток можно наглядно понимать как окрашивание некоторых фрагментов текстов, причём эти фрагменты и соответствующие цвета могут перекрываться. Аннотацию можно также представить в виде нескольких текстов, записанных параллельно с исходным, причём предполагается, что число различных слов-цветов невелико, не больше нескольких сотен (тысяч?), и они обладают примитивной «грамматикой», которая есть организующая их комбинаторная структура[3].

Такие аннотации можно понимать как строки, расположенные на нескольких *уровнях*[4] над оригинальными строками s, при этом новые строки-метки уровня l состоят из слов-меток, специфичных для данного уровня, и число таких l-меток (по крайней мере) экспоненциально убывает вместе с l.

Эрго-словарь есть результат нескольких последовательных *редукций* — своего рода *сжатий*, применяемых к библиотеке аннотированных текстов; при этом он обладает более изощрённой комбинаторной структурой, чем библиотека. Общее сокращение объёма оказывается тысячекратным: грубо говоря, от 10^9–10^{10} до 10^6–10^7 лингвистических единиц.

Грамматика языка составляет часть словаря EDI, причём предполагается, что структурное положение этой грамматики в EDI воспроизводит её (гипотетическую) организацию в разуме человека.

Конкретный эрго-словарь

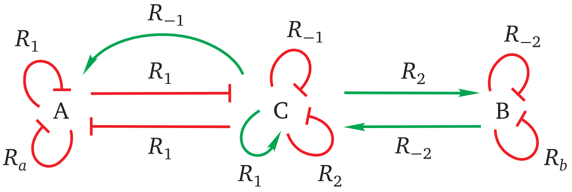
$$EDI = EDI(LIBR) = EDI_{PROG}(LIBR)$$

получается из набора текстов — того, что мы называем *библиотекой* LIBR, — применением некоторого универсального (функториального?) процесса/программы $PROG$, который радикально уменьшает размер библиотеки и в то же время наделяет оставшуюся часть *комбинаторной структурой* — своего рода «сетью идей», которая сходна со структурой *частично ориентированного графа с окрашенными рёбрами и вершинами*, но превосходит её по сложности.

---

[3] Аннотация может включать ссылки на *нелингвистические* сигналы, но это добавляет скорее *знания*, чем понимания.

[4] Уровни l можно считать числами 0, 1, 2, 3, …, где $l = 0$ соответствует строкам исходного текста и число уровней невелико, где-то от трёх до пяти. Но, как мы увидим позже, структура, организующая эти уровни, является не совсем линейным порядком.



Словарь *EDI* можно представлять себе как *понимание* соответствующего языка обучающимся, использующим программу *PROG*. Это понимание, назовём его U_t, зависит от времени, и *EDI* есть *приближённо неподвижная точка* процесса обучения

$$U_{t_1} \underset{PROG}{\rightsquigarrow} U_{t_2}, \quad t_2 > t_1,$$

где априори программу *PROG* можно применять к «пониманиям» U, не обязательно построенным самой этой программой.

Ключевая проблема здесь состоит в нахождении *равномерного/универсального* представления, которое можно реализовать как *координатизацию* «пространства пониманий» U, позволяющую наивной программе *PROG* действовать последовательной подгонкой «координат» $u_1, u_2, \ldots$, причём это пространство должно вмещать в себя как слабо структурированные входящие потоки сигналов, кодируемые библиотеками, так и жёстко организованные словарные структуры[5].

Очевидные ингредиенты эрго-словарей *EDI*, кодирующих «понимание», и процессов составления этих словарей таковы.

- *Корреляции ближнего порядка*[6]*, сегментация и идентификация/формирование единиц в потоках лингвистических сигналов.*
- *Память, информация и предсказание на различных структурных уровнях.*
- *Подобия, равенства, контекстуальная классификация, кофункциональность и кокластеризация.*
- *Локальные и нелокальные ссылки и гиперссылки.*
- *Метки, аннотации, редукция, классификация, координатизация.*
- *Структурирование и сжатие за счёт избыточности*[7].

---

[5] Мы знаем, что такие программы прекрасно работают в головах детей двух-четырёх лет.

[6] Относительные частоты «событий» важны для изучения языка, но такие понятия, как «вероятность», «корреляция», «энтропия», нельзя применять к языкам без специальных оговорок.

[7] Суть понимания состоит не столько в извлечении «полезной информации», сколько в понимании структуры избыточности. Лишённые избыточности тексты, такие как таблицы случайных чисел и телефонные справочники, дают мало материала, достойного понимания.

- *Способность и склонность к повторению и воспроизведению.*
- *Быстрое распознавание известного, неизвестного, частого, значимого, невероятного, бессмысленного.*
- *Определение степени «игривости» или «метафоричности» слов, фраз и предложений*[8].
- *Распознавание автореференции.*
- *Определение параметров возможности/качества предсказаний: скорости, точности, конкретности, успешности, задействованного объёма памяти и количества параллельно и последовательно применённых «элементарных операций» и т. д.*

Длина программы, которая могла бы имитировать человеческий разговор на естественном языке и была бы «реалистичной» с точки зрения эрго, должна составлять 10^9–10^{12} битов. Если такая программа сможет обмануть кого-нибудь типа Дидро, из этого с необходимостью будет следовать, что по уровню структурированности она сравнима с человеческим эрго-мозгом, а значит, можно будет с полным правом утверждать, что эта программа *понимает* то, что говорится[9].

Говоря более серьёзно, в правильности работы данной конкретной программы и в итоговой лингвистической компетентности обучающегося языку $\mathcal{TONG}$ можно убедиться, лишь сравнив результаты нескольких программ, скажем, запускаемых гостями из 100 различных вселенных. Предположительно 70 из них не смогут общаться на языке $\mathcal{TONG}$ с кем бы то ни было, но 30 смогут беседовать на нём друг с другом и находить разговор интересным. По определению эти 30 понимают язык $\mathcal{TONG}$.

(Компетентные в языке $\mathcal{TONG}$ и лингвистически наивные носители языка будут придерживаться иного мнения на этот счёт.)

---

[8] Игривость — самое первое наглядное проявление «эрго», демонстрируемое человеческими детёнышами (и детёнышами некоторых животных).

[9] Но остерегайтесь программ типа ELIZA, которые на любые ваши слова отвечают: «Вы правы, это очень глубокая мысль. Должно быть, вы очень умны».

Глава 27

Библиотеки, строки, аннотации и цвета

Те библиотеки LIBR, что мы имеем в виду, могут содержать 10^7–10^{11} *входных единиц*, которые представляют собой (возможно, перекрывающиеся) строки букв — от фрагмента слова до абзаца, состоящего из нескольких десятков слов[1].

Аннотацию можно понимать как сопоставление этим строкам «*цветов*», а также соединение некоторых единиц окрашенными рёбрами; цвета отображают «существенные свойства» соответствующей вершины или ребра и служат *дескрипторами входных единиц* в (аннотированной) библиотеке LIBR, а затем и в словаре EDI.

Цвет вершины *и* может описывать некоторое *предсинтаксическое* свойство строки, например,

короткая строка, средняя строка, длинная строка и *частая строка*,

а синтаксическим/семантическим свойствам строк будут присваиваться цвета из различных классов.

Аналогичным образом, цвет связующего ребра может обозначать тип геометрического/временнóго соотношения между строками, например

перекрываются, содержатся-одна-в-другой, близки-друг-от-друга, далеки-друг-от-друга, следуют-друг-за-другом, находится-между, начинается-с

и т. д., причём у этих «красочных понятий» существует несколько различных оттенков, аналогично тому (но не совсем так), как это происходит с длинами строк[2].

Связующие рёбра сами связаны соотношениями. К примеру, *близость* двух строк часто проявляется как *одновременное включение* их в некую бóльшую строку.

---

[1] Существуют и бóльшие единицы, назовём их «страницами», «томами», «пóлками», но они играют другую роль.

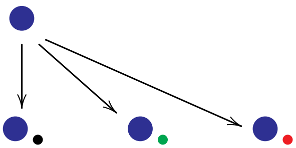
[2] Эрго-мозг, который обрабатывает поступающую информацию в параллельном режиме, разбивает длинные строки на куски и отслеживает их взаимное расположение с помощью бинарных (и тернарных, как в случае ***находится-между***) отношений.

Хотя *формально* линейный порядок ••••••••••••••• можно восстановить по отношению ***начинается-с***, наш обучающийся, подобно маленькому ребёнку, не знаком с формальной логикой и не может неограниченно долго итерировать одно и то же отношение.

Это важно для составления списка и хранения в памяти (пред)синтаксических вставок между строками, в частности всех пар идентичных слов w в языке L[3].

Ещё один класс цветов — например, для отношения подобия ↭ и стрелок редукции — может отсылать к конкретному классифицирующему алгоритму, который определяет/производит эти стрелки.

Сами цвета также являются структурными сущностями, но гораздо более простыми, чем входные единицы, такие как предложения. Можно представлять их себе в виде простых графов, например небольших деревьев с несколькими ветвями.



Библиотечные цвета — в количестве около 100 штук — переходят к *EDI*, нашему эрго-словарю, где организуются в более замысловатую окрашенную сеть с дополнительными цветами-дескрипторами, которых может насчитываться уже до 1000 штук.

Более сложный/интересный аспект процесса аннотирования — выделение «значимых строк» (это по сути то, что называется *синтаксическим анализом*), таких как ***слова***, ***фразы*** и т. д., и отбрасывание незначимых[4]. Для них тоже существуют цвета и оттенки, например, ***слово***$_{\text{редкое}}$.

Наборы, ансамбли, множества

С *наборами/ансамблями* лингвистических единиц и связок между ними нельзя оперировать бездумно, как мы это делаем с множествами, по следующим причинам.

1. Наличие данной конкретной вершины сети, например данной конкретной фразы, в долгосрочной памяти обучающегося зачастую не может быть однозначно установлено.

---

[3] Количество пар (коротких) идентичных строк неприятно велико, а именно *квадратично*, однако отождествление идентичных слов, скажем, на одной странице происходит *линейно* по времени.

И это радует. Квадратичные величины для нас неприемлемы, за исключением очень маленьких. Мы спокойно проживаем *миллион* секунд, которые составляют 12 дней нашей жизни. Но *триллион секунд* — квадрат миллиона — тянется более 31 000 лет.

[4] Важная (но не единственная) мотивация, побуждающая эрго-обучающегося производить эту операцию, — экономия места в памяти.

2. В наших сетях базовые теоретико-множественные конструкции, такие как объединение $X_1 \cup X_2$ и декартово произведение $X_1 \times X_2$, не могут (и не должны) применяться без ограничений.

Теоретико-множественный язык может ввести вас в заблуждение[5]; однако при необходимости мы используем его фрагменты.

Кроме «локализованных» отношений между строками и их соединителями в библиотеке LIBR имеется глобальная геометрия, которая проявляется в существовании (относительно больших) *контекстуальных единиц*, таких как ***страницы*** и ***книги***.

На первой стадии процесса аннотирования эти единицы классифицируются/окрашиваются в соответствии с их размером, причём различные классы должны примерно соответствовать рамкам *краткосрочной, среднесрочной* и *долгосрочной памяти*. Затем, в процессе обучения, понятие «контекста» модифицируется и уточняется, подобно тому как это происходит со строками; при этом истинные ***страницы*** и ***книги*** должны либо обладать достаточной *статистической однородностью*, либо быть *структурно унифицированными*, либо иметь *чётко выраженные границы*.

Окрашивание цветов. Кажется, нетрудно составить полное комбинаторное описание[6] библиотеки LIBR с несколькими десятками (около 100?) «цветов», являющихся *дескрипторами базовых типов* единиц и связок между ними в LIBR.

Но принципиальное значение здесь имеет не столько библиотека LIBR сама по себе, сколько построение адекватной *окрашенной сети дескрипторов* исходя из малого числа, вероятно 4–8, «общих правил». В конце концов эта сеть ляжет в основу словаря *EDI* — который есть *стационарная модель* понимания языка $\mathcal{TONG}$, как он представлен библиотекой LIBR.

---

[5] Протаскивание сюда *случайных* и/или *нечётких множеств* способно только усугубить проблему.

[6] Практически реализовать его, т. е. осуществить надлежащую аннотацию и/или синтаксический анализ, отнюдь не просто.

Глава 28

Преподавание и оценивание

Мы считаем, что универсальная программа изучения языков *PROG* моделирует разум ребёнка и ей требуется лишь минимальная помощь «учителя», такая как упорядочение текстов по сложности[1] и обеспечение гибкого доступа к текстам.

С другой стороны, оценка *качества понимания,* достигнутого программой *PROG,* представляет собой более сложную задачу (хотя она и гораздо проще, чем разработка самой программы), поскольку ни у кого нет чёткой идеи того, что такое *понимание*.

Наш формальный подход отчасти мотивирован тем положением дел, которое имеет место в физике, где невероятно *высокий уровень понимания* отражается в *предсказательной мощи* математически формулируемых *естественных законов,* резюмирующих данные в чудовищно *сжатом* виде.

Это явление совершенно иной природы, чем то, что мы называем «*знанием*».

К примеру, древние охотники *знали* о том, как планеты блуждают по небу, лучше, чем большинство наших современников. Но понять блуждание планет — значит «сжать» это знание, поместив его в стройные рамки математически формулируемых законов движения[2].

---

[1] Программу *PROG* можно также наделить способностью, сходной с той, которой обладают дети возрастом до двух-трёх лет, сопротивляться «плохому учителю», отбрасывая сигналы среды, вредящие обучению. (Эта способность с возрастом деградирует, ибо для выживания человеку приходится адаптироваться к среде.)

[2] Древние астрономы пришли к *пониманию* периодичности планетарных движений и были в состоянии делать довольно точные предсказания.

Аналогичным образом, понимание языков означает сжатие структурной избыточности[3] в потоках лингвистических сигналов, хотя это сжатие и не столь значительно, как в физике.

Понимание следует отличать не только от «чистого знания», но и от *адаптации*. К примеру, опытный грызун (или, если уж на то пошло, человек) грамотно ориентируется в своей социальной среде. Но утверждать, что грызун (или человек) «*понимает*» эту среду, можно лишь метафорически.

С учётом всего вышесказанного мы выделяем следующие два взаимосвязанных атрибута того, что мы готовы признать «*пониманием*».

1. *Структурное сжатие «информации».*
2. *Эффективность способности предсказывать.*

Есть разные способы выразить пункты 1 и 2 количественно. Например, можно говорить о степени сжатия по сравнению с «процентом» структуры, потерянной в результате сжатия, а важной характеристикой предсказания является его *конкретность* в сравнении с *частотой успеха*.

Подобного рода количественные характеристики можно использовать для *частичного упорядочения «уровней понимания»*, которое может подсказать тесты для оценки прогресса, достигнутого обучающей программой *PROG* в том, что касается этих характеристик.

Ещё один атрибут «*понимания*», который легко проверить, но трудно описать количественно, таков.

3. *Способность приобретать знания.*

К примеру, программа *PROG*, минимально сведущая в английском языке, «узнала бы», просмотрев Британскую энциклопедию, что коровы едят траву, а кошки — мышей[4].

Отличительной чертой понимания можно считать и следующее явление.

4. *Способность задавать вопросы.*

(Те, кто заняты ПОНИМАНИЕМ, — учёные и маленькие дети — превосходно умеют задавать вопросы.)

Обучающие программы *PROG* можно оценивать не только по способности к пониманию, но и по их «внутренним характеристикам», таким как используемый *объём памяти*, *число элементарных операций*

---

[3] Нельзя сильно сжать «полезную информацию», её не теряя, но если мы в состоянии «расшифровать» структуру избыточности, то мы можем зашифровать её более эффективно.

[4] Однако для правильного ответа на вопрос не «*Едят ли кошки мышей?*», а «*Едят ли чёрные кошки свежих мышей?*», программе *PROG* потребовалось бы изучить более представительный корпус английских текстов, чем Британская энциклопедия.

и *время*, необходимое для составления, скажем, конкретного предсказания.

В конечном счёте полноценные эрго-системы должны содержать *программы самоконтроля*, оценивающие, например, *улучшение* качества предсказаний при поступлении дополнительной информации. (Подобные контролирующие программы создать легче, чем базовые эрго-программы.)

Глава 29

Атомы структур: единицы, подобия, кофункциональности, редукции

Процесс обучения и понимания во многом состоит в *структурировании* воспринимаемых вами входящих потоков сигналов за счёт выявления в них избыточностей и представления «сжатых потоков» сигналов структурно эффективным образом.

Выделение *математических классов структур*, которые бы *моделировали ментальные структуры*, создаваемые человеческим мозгом для восприятия входящих «потоков сигналов», — принципиально нерешённая проблема в психологии.

Мы не знаем, что конкретно представляют из себя эти структуры, но некоторые их ингредиенты понятны.

Приведём короткий (и неполный) список из четырёх «логически (квази)атомарных составляющих» (эрго)операций, применяемых к потокам сигналов, не делая на данном этапе попытки дать точные определения этих «атомов», обосновать их реальность и/или объяснить, как обнаруживать их в потоках сигналов.

1. Дискретизация и выделение единиц

При структурировании потоков сигналов первый шаг состоит в выделении *единиц*, и простейший (но отнюдь не простой) процесс, служащий данной цели, — это *сегментация*: разбиение потока на неперекрывающиеся «геометрически простые части». (*Внутренние* корреляции/связи внутри этих «частей» должны быть существенно сильнее, чем *взаимные* корреляции/связи между различными «частями».)

Такими частями могут быть небольшие и часто встречающиеся сигналы, например *фонемы, слова* и *короткие фразы* в потоке речи или же базовые зрительные образы, такие как *рёбра* и *T-образные пересечения*. Но они могут достигать и размера *предложения, интернет-страницы, главы книги* или представлять собой внутренне согласованные зрительные образы таких объектов, как *животные, деревья, леса, здания, горы*.

Но даже если «единицами» считаются и картины, и значки ■, вряд ли ваша (зрительная) эрго-система поместит их в один и тот же «каталог единиц».

(Обработка вашим (эрго)мозгом лингвистических и зрительных входных данных, вероятно, опирается на естественный синтаксиче-

■

ский анализ входящих потоков сигналов, за которым следует комбинаторная организация полученных «единиц».

С другой стороны, *проприоцептивная сенсорная система* и моторное управление мышцами скелета, возможно, также полагаются на *непрерывность*, поскольку входящие сигналы могут (?) не поддаваться естественному разложению на «дискретные единицы».)

Однако наша эрго-структура строится из невидимых *внутренних* единиц, которые могут резко отличаться от единиц входящих потоков; для их распознавания нужны по-настоящему универсальные *дискретизаторы* — алгоритмы «осмысленной сегментации».

С наивной точки зрения, *единица* — это нечто характеризуемое несколькими простыми словами, однако... эти слова могут очень сильно различаться в зависимости не только от внутренних свойств такой единицы, но и от того, как она обрабатывается данной конкретной эргосистемой, например человеческим эрго-мозгом.

Мы следуем примеру естественных языков, которые всё — *качества, состояния, действия, процессы*... — превращают в единицы посредством того, что называется *номинализацией*:

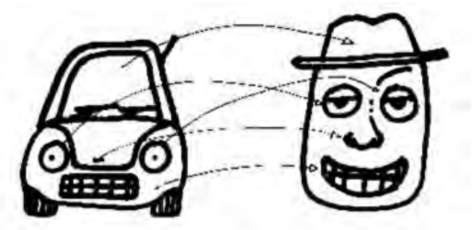
всё, что заслуживает названия, становится единицей.

Пример: нетекстуальные синтаксические единицы[1]. Чтобы реализовать приведённое «определение», нужно написать программу, которая «понимала» бы, что именно «заслуживает» названия. Это важнейший элемент понимания языков, которое, в отличие от понимания нелингвистических массивов сигналов, решающим образом зависит от выделения единиц, *не являющихся геометрическими фрагментами текстов*. Например, своего рода «заготовками» подобных единиц являются такие группы на первый взгляд непохожих слов, как

> да, нет, может быть; я, мне, мой; большой, крупный, огромный; ароматный, вкусный, хрустящий.

Выделение их — важный аспект перехода от библиотеки к эрго-словарю.

2. Аналогия, подобие, эквивалентность, равенство, одинаковость



Между единицами языков/изображений существует несколько *отношений подобия*, которые могут отличаться по типу и силе.

Например, изображения могут походить друг на друга по форме, размеру, цвету, запечатлённому предмету и т. д., а предложения — по типу и стилю используемых слов, выражаемой мысли или синтаксису. Самые сильные отношения подобия в текстах — это *побуквенные равенства различных* строк.

Как мы уже упоминали, есть разница между тем, как понятие *равенства* трактуется в математике/логике и естественных языках: мы радостно заявляем, что

$$2+3 \text{ равно } 5,$$

но сообщение о том, что

$$5 \text{ равно } 5,$$

---

[1] В данной работе слово «синтаксический» понимается в смысле «характерный для языков».

представляется не слишком информативным даже логически подкованному математику — эти два «*равенства*» не равны друг другу, и в обиходном языке нет средств для выражения этого неравенства. Скажем, заявление о том, что

5 есть то же самое, что 5,

выглядит ничуть не лучше. Но эту проблему можно решить, введя в рассмотрение эрго-систему, в которой равенства, как и более слабые отношения подобия, возникают в результате определённых *процессов*, качественно отличающихся от процессов, приводящих к *одинаковости*[2].

О сочетаемости подобий. Традиционно *эквивалентность* определяется как *симметричное бинарное отношение* на некотором множестве[3] S, обозначаемое, скажем, $s_1 \sim s_2$, которое удовлетворяет свойству транзитивности:

$$s_1 \sim s_2 \ \& \ s_2 \sim s_3 \Rightarrow s_2 \sim s_3.$$

Однако удобнее представлять эквивалентности (и подобия) сигналов s в стиле теории категорий — стрелками с «названиями», скажем $s_1 \overset{f}{\leftrightsquigarrow} s_2$; такая стрелка понимается как «*реализация отношения* $\sim$» некоторым «логическим/вычислительным процессом», например некоторым алгоритмом кокластеризации.

Тогда можно рассматривать композиции стрелок

$$s_1 \overset{f}{\leftrightsquigarrow} s_2 \overset{g}{\leftrightsquigarrow} s_3;$$

такая композиция обозначается $s_1 \overset{f\square g}{\leftrightsquigarrow} s_3$. Это позволяет, например, утверждать, что

> *композиция* $f\square g$ *двух «сильных подобий»* f *и* g *сама является «слабым подобием».*

Кроме того, теперь можно говорить о *несочетаемости* некоторых эквивалентностей f и g, например если одна из них — эквивалентность по цвету, а другая — по размеру.

3. Классификация, редукция, кластеризация, сжатие

Отношения эквивалентности E на множестве S неразрывно связаны с разбиениями этого множества S на соответствующие *классы эквива-*

---

[2] Эта идея близка по духу к тому, как работают с различными уровнями «эквивалентности» в *теории n-категорий*.

[3] Данное определение не покрывает эквивалентности между теориями и/или категориями, поскольку такие эквивалентности *не являются* отношениями на *множествах*.

лентности, которые удобно описывать с помощью такого *отображения редукции* $R = R_E$ из S *на* некоторое множество C, что

$$s_1 \underset{E}{\sim} s_2 \text{ тогда и только тогда, когда } R(s_1) = R(s_2).$$

Однако имплементации *бинарного* отношения $s_1 \underset{E}{\sim} s_2$ и *унарной* операции $R(s)$ сильно отличаются с точки зрения рабочей эрго-системы[4].

Записать $\approx N^2/2$ битов, кодирующих отношение эквивалентности на множестве S из N единиц, гораздо труднее, чем $\approx N \log N$ битов, необходимых для определения редукции $R(s)$; *подобия* и *редукции* следует рассматривать по отдельности.

Ключевым свойством *редукций*, помимо структурного сжатия информации, является

создание из исходных единиц s новых единиц $c = R(s)$.

Более общий и менее ясно очерченный класс операций составляют *кластеризации*, основанные на отношениях подобия, которые определены нечётко и не вполне обладают *транзитивностью* — свойством, обычно требуемым от «эквивалентности».

Связанное с данной кластеризацией тавтологическое отображение $R\colon s \mapsto c$, сопоставляющее каждому элементу s множества S тот кластер c в S, который его содержит (это отображение R может быть определено не для всех s), называется тем не менее *факторотображением* или *редукцией* из исходного множества S на множество C кластеров. Примером такого отображения является редукция, задающая кокластеризацию.

Сжатие, морфизмы, функторы. Кроме рассмотренных выше, существуют и редукции совершенного иного типа, соответствующие «нелокальному» *сжатию с ограниченной потерей информации*, когда мы забываем несущественные сведения, содержащиеся в тексте или зрительном образе, сохраняя значимую информацию о его структуре и содержании; такая редукция есть отличительная черта понимания.

Конечно, может случиться, что текст обладает малой избыточностью, как, например, уже не раз нами упомянутый телефонный справочник. Такой текст не поддаётся ни значительной редукции, ни пониманию.

На самом деле «совершенные тексты», не содержащие в себе избыточности, неотличимы от случайных последовательностей символов, а любой осмысленный текст T допускает много редукций — будем

---

[4] Этот вопрос подробно обсуждается в контексте когнитивной лингвистики в книге Джорджа Лакоффа «Женщины, огонь и опасные вещи», в которой *классификация* называется *категоризацией*.

изображать их стрелками, скажем $T \xrightarrow{r'} T'$, $T \xrightarrow{r''} T''$, — и основная часть процесса понимания текста состоит в разветвлённом каскаде таких редукций.

Пример важной и часто встречающейся редукции — составление *резюме*, или *краткого содержания* текста. Придумывание *заглавия* также есть пример редукции, причём *редукции окончательной*: далее редуцировать текст, не разрушая полностью его структуру, невозможно.

Если мы согласимся/предположим/заметим, что последовательное применение редукций, скажем $T_1 \xrightarrow{r_{12}} T_2$ и $T_2 \xrightarrow{r_{23}} T_3$, вновь даёт редукцию, которую мы обозначим через $T_1 \xrightarrow{r_{13}} T_3$, а также будем записывать в виде *композиции*

$$r_{13} = r_{12} \circ r_{23},$$

то редукции между текстами можно будет рассматривать как *морфизмы* **категории** (в математическом смысле) *текстов и редукций*, причём, строго говоря, само слово «*редукция*» подсказывает, что эти стрелки r суть *эпиморфизмы*, т. е. они *не добавляют новой информации* в тексты, к которым применяются.

Наверное, забавно было бы закодировать почти всю (или даже всю?) информацию о некотором языке $\mathcal{L}$ — его *синтаксисе, семантике, прагматике* — в терминах такой категории $\mathcal{R} = \mathcal{R}(L)$ редукций в $\mathcal{L}$, рассматривая переводы с одного языка на другой, $\mathcal{L}_1 \rightsquigarrow \mathcal{L}_2$, как *функторы* между этими категориями; однако раньше времени навязывать языкам теорию категорий опасно.

Редукция и агломерация подобий. Между подобиями различных типов и/или различной силы существуют круговые взаимосвязи. Например, два сигнала s_1 и s_2, обладающие эквивалентными или просто сильно похожими редукциями, можно считать слабо подобными.

Наоборот, если между сигналами s_1 и s_2 существует «много независимых» отношений слабого подобия, то они сильно подобны и, возможно, равны.

Чтобы понять, что имеется в виду, представьте, что у вас есть две книги, примерно по 200 страниц каждая. Выберите наугад номера страниц, скажем всего 150 штук, и сосчитайте, сколько раз на каждой выбранной странице i в книгах 1 и 2 встречается слово «*the*».

Схожесть полученных двух чисел N_1 и N_2 — *содержаний слова* «*the*», — выражаемая, скажем, соотношением

$$N_1 - 2 < N_2 < N_1 + 2,$$

для одной пары страниц неинформативна, однако если это соотношение выполняется для всех 150 выбранных пар страниц, то можно смело поспорить, что 1 и 2 — копии одной и той же книги.

4. Кофункциональность

Некоторые единицы в тексте T или в потоке сигналов другого типа образуют относительно тесно связанные группы, про которые можно сказать, что соответствующие единицы *выполняют общую функцию*.

Априори кофункциональность не является бинарным отношением (хотя при определении *кокластеризации* полезно считать, что является); однако её можно превратить в бинарное отношение, дав «имена» этим «*функциям*» и рассматривая их как новый тип единиц.

Таким образом, мы говорим, что *единица s выполняет функцию f*, и обозначаем этот факт ориентированным ребром $s \longleftarrow f$. Альтернативным образом, можно изображать f-кофункциональные единицы, соединяя их f-окрашенными рёбрами: $s_1 \underset{f}{\longleftrightarrow} s_2$.

Связи между единицами: их идентификация, номинализация и классификация

Распознать, какие единицы практически независимы, а какие обладают нетривиальными *взаимосвязями/соотношениями*, — один из первых приоритетов эрго-системы, и эту задачу должны решать несколько алгоритмов, которые можно назвать *соединителями*.

Такие соединители, которые сами являются особым видом единиц, должны, как полагается всем приличным единицам, подлежать классификации при помощи универсальных алгоритмов; при этом самая грубая классификация будет различать следующие три класса отношений.

- *Подобие.*
- *Кофункциональность.*

(Это отношение применимо не только к парам, но также и к тройкам и, возможно, четвёркам единиц, *совместно выполняющим* определённые функции. Такая «близость» единиц проявляется в их систематическом совместном появлении.)

- *Редукции.*

Предупреждение. Ставя отношения на одну планку с исходными единицами, мы открываем в наших эрго-системах ящик Пандоры автореференции. По-видимому, чтобы достичь того эрго-поведения, к которому мы стремимся, этот шаг необходим, но он вносит в наши системы логические парадоксы. Следует как-то найти золотую середину между тупостью и безумием эрго-программ.

Разработав алгоритмы для структурного анализа «входящих потоков сигналов» согласно приведённым выше принципам, мы сможем (?)

решить, есть ли в человеческом разуме *«ещё что-то» неизвестное*, играющее важную роль в процессе «обучения понимать», которое фундаментально отличалось бы от выделения единиц, их классификации и комбинаторной организации в соответствии с их связями и взаимоотношениями.

Фундаментальная трудность, с которой мы тут сталкиваемся, возникает при попытке структурировать не только входящие потоки сигналов, но также и потоки, *создаваемые и циркулирующие* внутри самой самообучающейся системы; при этом такие «внутренние потоки» не опираются, по крайней мере очевидным образом, на какую бы то ни было структуру, схожую с той, что лежит в основе «истинных потоков», — линейный (временно́й или пространственный) порядок между сигналами.

Данные, полученные на этот счёт нейрофизиологами и психологами, не подсказывают нам, по крайней мере напрямую, как следует поступать, — поэтому мы исходим из того, что может предложить нам математика.

Однако, рассуждая математически, не следует забывать о возможностях и ограничениях мозга — эрго-алгоритмы должны быть «широкими и мелкими»: каждый раунд (единица) вычисления (грубо соответствующая тому, что мы обычно делаем примерно за 1 секунду) не может содержать много (скажем, более пяти) *последовательных операций*, однако несколько сотен (тысяч) операций могут осуществляться параллельно[5].

---

[5] Этот параллелизм есть «техническая причина» того, почему базовые умственные (эрго)процессы недоступны нашему последовательно структурированному сознательному разуму.

Глава 30

Фрагментация, сегментация и выделение единиц

Текстуальные единицы, такие как особые фрагменты входящих сигналов[1], например конкретные строки букв, скажем «*слова*»[2], или некоторые выделенные области в поле обзора, скажем «*замеченные объекты*» или «вещи»[3], играют главную роль во всех *комбинаторных моделях понимания*. Хотя вряд ли можно дать исчерпывающее определение таких единиц, или *единиц-сигналов* вообще, их часто можно распознать по следующему свойству.

Вероятность встретить текстуальную единицу и среди множества других сигналов той же категории (здесь под «категорией» понимается *класс*) *значительно больше произведения вероятностей* её *дизъюнктных частей*.

Например, слово «вероятность», насчитывающее 11 букв, в библиотеке, содержащей миллиард книг ($\ll 26^{11}$ букв), априори может встретиться лишь один-два раза[4].

Для коротких слов этот принцип работает не столь хорошо: словари для игры в «Эрудит» предлагают ≈ 1000 трёхбуквенных английских слов и ≈ 4000 четырёхбуквенных, из которых многие, например «*qat*» («африканское растение кат») или «*scry*» («предсказывать будущее по хрустальному шару»), встречаются редко, но необычная частота такого слова может проявиться в наличии нескольких его копий в одном томе или даже на одной странице.

Однако сама по себе аномальная частота ещё не гарантирует, что мы нашли единицу: строка «роятно» встречается не реже, чем слово

---

[1] Мы временно игнорируем перекрытия между фрагментами, например между «*это трудно*» и «*трудно понять*» во фразе-единице «*это трудно понять*». («*Трудно*» — вполне законченное «единичное высказывание»; однако это более слабая единица, нежели «*трудно понять*».)

[2] Текстуальная единица может быть «разрывной», например состоять из двух (или более?) строк, разделённых в тексте другими строками. Так происходит, например, с отделяемыми приставками в немецком языке, которые перемещаются в конец предложений.

[3] Строгое понятие *единицы-объекта* модифицируется в результате классификации/редукции и применяется к «вещам», умеющим видоизменяться, таким как слова с гибкими морфологическими формами, человеческое тело или нечто по природе случайное, как, например, изображение дерева с множеством маленьких веточек. Когда мы смотрим на такое дерево, наш разум предположительно видит (своего рода) *закон распределения ветвей/формы*, а не выборку из такого распределения, реализованную данным конкретным деревом.

[4] Число различных книг в мире оценивается примерно в 100 миллионов.

«вероятность» целиком; таким образом, нужно дополнить «определение» единицы следующим

условием полноты/максимальности: если строка s является единицей, то бóльшие строки $s' \supsetneq s$ *существенно* менее вероятны, чем s.

Сегменты и границы. Фрагментация текстов на единицы естественным образом *спарена* с процессом *сегментации*, который состоит в определении *точек деления*, обозначающих границы единиц-строк в текстах[5].

Выяснение того, когда позиция d между двумя буквами строки S может быть взята в качестве точки деления, требует рассмотрения строк s «слева» и «справа» от d в S, причём тот факт, что одна из этих строк, скажем $s_{\text{лев}}$, является единицей, — важное свидетельство в пользу того, что d является точкой деления.

Но может так случиться, что подобных явно выраженных единиц рядом с позицией d в строке S нет, однако где-то в другом месте библиотеки имеется двадцатибуквенная строка S', содержащая изоморфные копии пятибуквенных строк, находящихся в S слева и справа от d, причём соответствующая позиция d' в S' опознаётся как точка деления. Тогда мы можем считать d точкой деления в S и использовать этот факт для выявления ранее не найденных единиц в S.

Фрагментация + сегментация — это многоступенчатый процесс, каждый шаг которого есть часть обучающего преобразования *PROG* на некотором пространстве пар (*Frag*, *Seg*), которое включается в полное «пространство понимания» на более поздних стадиях обучения.

Данный процесс обязан подчиняться *принципу «только никаких чисел»*: искомая программа *PROG* должна функционировать подобно мозгу младенца, который, в отличие от инопланетного учёного, имеет весьма ограниченные способности к счёту и манипулированию как большими числами (например, частотами), так и маленькими (например, вероятностями).

---

[5] В большинстве письменных языков границы так называемых «слов» отмечаются пробелами, а фразы и предложения зажаты между разделяющими знаками препинания. Но в данный момент мы делаем вид, что этого не знаем.

Это достигается последовательной «внутренней фрагментацией» самого процесса *PROG* — представлением его в виде сети простых процессоров/директорий, которые по отдельности производят (почти идентичные) «детские операции», глобальный же результат возникает в результате коммуникации между этими процессорами.

Классификация слов и разбиение на предложения. Сегментация текстов на строки, содержащие более двух-трёх слов, невозможна без предварительной синтаксической классификации *базовых единиц* — слов и коротких фраз[6]. Но если такая классификация произведена и число n базовых единиц u (для английского языка оно составляет примерно 10^5–10^6) сведено к гораздо меньшему числу $\underline{n}$ классов $\underline{u}$, где реалистичная оценка даёт $10 \leqslant \underline{n} \leqslant 30$, то библиотека, содержащая N базовых единиц, позволит реконструировать правило формирования строк длины около $\log_{\underline{n}} N$. Например, если мы строим классификацию с $\underline{n} = 20$, то скромная библиотека, включающая 10^9–10^{10} базовых единиц[7], открывает доступ к строкам длиной в 6–8 базовых единиц, поскольку $\log_{20} 1{,}3 \cdot 10^9 \approx 7$, что может позволить автоматически различать *допустимые* и *бессмысленные* строки длиной, скажем, до 12 слов. Тогда *порождение осмысленных строк* становится чисто математической задачей.

Грубая контекстуальная сегментация. В разговорном языке высказывания классифицируются в соответствии с тем, когда, где и кто с кем разговаривает, в то время как тексты письменных языков организованы в абзацы, страницы, книги, темы, библиотеки и примерно так же устроены страницы Интернета.

Эта структура важна для проведения статистического анализа языков; наоборот, тексты можно классифицировать/подразделять в соответствии с относительными частотами содержащихся в них структурных паттернов ближнего порядка, например базовых единиц.

---

[6] В *пининь кун-уок* (языке аборигенов северной Австралии) одно-единственное слово *«abanyawoihwarrgahmarneganjginjeng»* означает *«Я опять приготовил для них не то мясо»* [11].

[7] Страница содержит около 100 базовых единиц, 10^4–10^5 таких единиц составляют книгу, библиотека, насчитывающая 10 000 книг, содержит $\approx 3 \cdot 10^9$ единиц, а весь Интернет может содержать до 10^{12} базовых единиц английского языка.

Глава 31

Предсинтаксические морфизмы, синтаксические категории и энтропия ветвления

Глубокие лингвистические структуры проявляют некоторые *приближённые теоретико-категорные* свойства, например, *сокращения* текстов можно рассматривать как *семантические эпиморфизмы*, или своего рода *функторы*, а не просто «морфизмы».

Тогда переводы с одного языка на другой становятся функторами между категориями (2-*категориями*, если считать сокращения функторами) языков; при этом теоретико-категорный формализм следует смягчить, чтобы приспособить его к неточности и неопределённости лингвистических преобразований.

Но в данный момент нас будет интересовать следующая более явная комбинаторная структура типа категории, которая неизменно наблюдается во всех видах «потоков сигналов».

Пусть *библиотека* L текстов на, скажем, английском языке $\mathcal{L}$ представлена набором лент, каждая из которых содержит строки из s символов, например букв или слов, причём многие различные ленты могут содержать «идентичные», или, лучше сказать, *изоморфные* строки, что обозначается символом $s_1 \simeq s_2$; равенство же $s_1 = s_2$ зарезервировано для одних и тех же строк, находящихся в одной и той же позиции на одной и той же ленте.

Пусть стрелки $s_1 \hookrightarrow s_2$ соответствуют *предсинтаксическим вставкам* строк, т. е. такая стрелка сопоставляет строке s_1 подстроку $s_1' \subset s_2$, где $s_1' \simeq s_1$.

Мы предполагаем, что наши строки относительно коротки, содержат не более 10–20 слов; этого достаточно для описания любой «библиотеки», ибо любая строка длиной в 10 слов (с пренебрежимо редкими исключениями) может быть (не более чем) *единственным* образом продолжена до более длинной строки, так как полное число строк в любом языке значительно меньше $100^{10} \ll n^{10}$, где n — число слов-символов в этом языке[1]. Что касается библиотеки L, то можно считать, что она содержит N слов, где N находится в диапазоне 10^6–10^{12}.

Полученная ***категория*** $\mathcal{C}_{\hookrightarrow} = \mathcal{C}_{\hookrightarrow}(L)$ *несёт полную информацию о библиотеке* L.

---

[1] Не обращайте внимания на расхожую фразу «*естественный язык содержит бесконечно много возможных предложений*».

Обоснование

[+] *Инвариантность*. Категория $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$ инвариантна относительно замены «алфавита» — названий символов.

[++] *Универсальность и устойчивость.* Категорное описание языков удовлетворяет самому главному эрго-требованию — универсальности.

Например, *разговорные языки* можно описать аналогичным образом, только, в отличие от случая письменных языков, стрелки должны соответствовать *приближённым* отношениям вставки между звуковыми или зрительными образами.

На самом деле, если бы вместо синтаксических изоморфизмов между строками мы разрешили *приближённые* предсинтаксические вставки с *выравниванием последовательностей* (с допустимой погрешностью 5–10 %), увеличилась бы *устойчивость* категорных описаний и для *письменных* языков.

Свойства

[∗] *Нелокальность.* $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$-описание библиотек опирается на сравнение строк, которые могут быть расположены в текстах далеко друг от друга.

[∗∗] *Долгосрочная память.* Это сравнение строк требует наличия внутри самообучающейся программы структурно организованной, пусть и весьма простым образом, *памяти*[2].

Избыточность и чрезмерная локальная сложность категории $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$

[−] Полная категория $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}(L)$ содержит много «несущественных» стрелок, таких как вставки *одиночных букв* в предложения из десяти слов или стрелки между «нелингвистическими» строками, например «тическими стро».

Чтобы устранить эти недостатки, можно

разрешить быть объектами в $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$ только **текстуальным единицам**

и

выбрать ***репрезентативную поддиаграмму*** $\mathcal{D}_{\hookrightarrow} \subset \mathcal{C}_{\hookrightarrow}$.

---

[2] Можно предположить, что эта организация соответствует тому, как воспринимает язык основная группа обучающихся ему — дети в возрасте от года до четырёх лет, причём $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$-категорная организация памяти есть «нулевой уровень» того, что мы называем «пониманием» языка $\mathcal{L}$.

Такая диаграмма $\mathcal{D}_{\hookrightarrow}$ (представляющая собой *сеть* ориентированных *рёбер-стрелок* между *вершинами-строками*) *должна порождать* категорию $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$ (бóльшую её часть?) как моноид, а также быть «маленькой», например *минимальной* поддиаграммой, порождающей категорию $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$.

(Не существует очевидного естественного или канонического выбора поддиаграммы $\mathcal{D}_{\hookrightarrow} \subset \mathcal{C}_{\hookrightarrow}$, он может зависеть от порядка, в котором обучающийся встречает тексты в библиотеке.)

[−+] *Урезание и структурирование диаграммы* $\mathcal{D}_{\hookrightarrow}$. Как бы вы ни выбирали диаграмму $\mathcal{D}_{\hookrightarrow}$, она будет содержать *слишком много стрелок*, исходящих из некоторых (относительно коротких) строк s, причём число таких строк растёт с увеличением размера библиотеки. Таким образом, в соответствии с принципами эрго-логики, наши самообучающиеся алгоритмы должны автоматически реорганизовывать диаграмму $\mathcal{D}_{\hookrightarrow}$, внося поправку на это чрезмерное ветвление. Для этой цели служат операции *редукции*[3], применяемые к строкам и стрелкам (и их множествам).

Категории $\mathcal{C}^{\hookrightarrow\downarrow}$ и диаграммы $\mathcal{D}^{\hookrightarrow\downarrow}$ аннотированных текстов

Если тексты в библиотеке аннотированы строками-метками s', записанными на нескольких уровнях над оригинальными строками s, то категория с «горизонтальными» стрелками $s'_1 \to s'_2$ дополняется «вертикальными» *позиционными стрелками* $s'' \downarrow s'$; такая стрелка говорит, что строка s'' расположена над строкой s', и подобные «смешанные категории», а также их репрезентативные поддиаграммы обозначаются через $\mathcal{C}^{\hookrightarrow\downarrow}$ и $\mathcal{D}^{\hookrightarrow\downarrow}$ соответственно.

Наличие вертикальных стрелок служит двум целям.

1. Вертикальные стрелки значительно *увеличивают связность* диаграмм, поскольку из *оценки на число* слов-меток, лежащих на *высоких уровнях* аннотаций, следует наличие *многих* горизонтальных стрелок (синтаксических вставок) между строками этих уровней, которых нет на более низких уровнях.

2. Кроме того,

наличие вертикальных стрелок модифицирует понятие репрезентативной диаграммы $\mathcal{D}^{\hookrightarrow\downarrow}$,

так как многие горизонтальные стрелки, выходящие из строк низких уровней, заменяются соответствующими стрелками на высоких

---

[3] Которая называется также *кластеризацией, классификацией, категоризацией, факторизацией.*

уровнях, а «информация низкого уровня» кодируется (обращёнными) вертикальными стрелками. Таким образом (частично) компенсируется чрезмерное ветвление диаграммы $\mathcal{D}_{\hookrightarrow}$.

Стрела времени. Категория $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$ не знает о *стреле времени*, вдоль которой направлены лингвистические строки. Но, вероятно, это направление можно восстановить по преимущественно обратной ориентации автоссылок в текстах.

Структуры в символах. В нашем категорном описании алфавит базовых символов, скажем букв, не несёт никакой собственной внутренней структуры. Однако в реальности буквы алфавитов нетривиальным образом структурированы согласно одному из принципов эрго-логики, не допускающему неструктурированных множеств объектов, состоящих более чем из трёх-четырёх элементов. Я не знаю, что с этим делать.

Размерность зрения. Зрительные сигналы[4] обычно фиксируются на *двумерных* носителях, например на фотографии или на сетчатке глаза, а дополнительные размерности глубины и времени (в движущихся картинах) несут лишь дополнительную информацию. Морфизмы $s_1 \hookrightarrow s_2$ здесь соответствуют подобиям между зрительными паттернами s_1 и подпаттернами в s_2.

Но, вероятно, основная часть зрительного восприятия *одномерна*, поскольку она реализуется/кодируется нейробиологией *саккадических движений глаз*. Это наводит на мысль о единых алгоритмах, обучающих видеть и говорить.

От предсинтаксического к синтаксическому

В конце концов мы изолируем строки (иногда пары строк), которые служат *текстуальными единицами*, а также идентифицируем *значимые вставки* между ними, которые называем *синтаксическими вставками*.

Лингвистические 2-пространства $\mathcal{P}_{\hookrightarrow} = \mathcal{P}_{\hookrightarrow}(L)$ и $\mathcal{P}^{\hookrightarrow\downarrow}$

Будем представлять строки из данной библиотеки L отрезками, длины которых равны числу букв в строках. Приклеим к дизъюнктному объединению всех этих строк прямоугольные 2-клетки, которые представляют собой декартовы произведения $s \times [0,1]$, где s — некоторые

---

[4] Существует демаркационная линия, отделяющая зрительные структуры *Жизни* — растения, животных, людей, человеческие артефакты — от зрительных структур *не-Жизни* — водных путей, скал, гор. Возможно, эти два класса изображений обрабатываются зрительной системой по-разному.

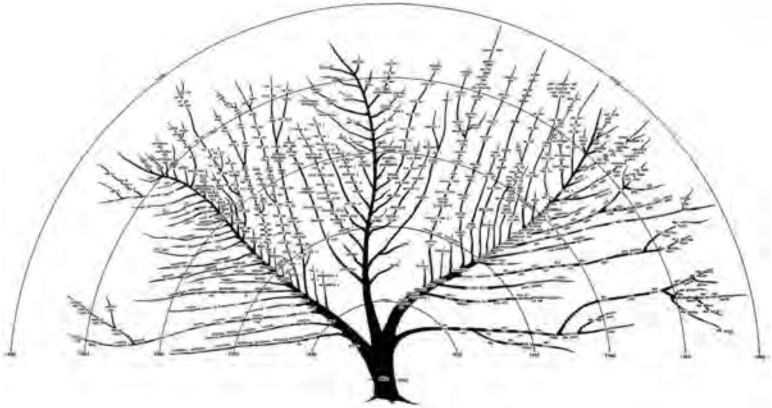
строки/сегменты длиной $\geqslant 5$ букв, а склеивающие отображения — это синтаксические вставки, действующие из сегментов $s\times 0$ и $s\times 1$ в некоторые сегменты строк S_0 и S_1, такие, что их образы суть *максимально взаимно изоморфные* (т. е. состоящие из одних и тех же букв) подстроки[5] в S_0 и S_1.

На самом деле поучительнее использовать отображения, соответствующие *не всем* синтаксическим вставкам в категории $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}=\mathcal{C}_{\hookrightarrow}(L)$, а только тем, которые принадлежат некоторой *минимальной* диаграмме $\mathcal{D}_{\hookrightarrow}\subset\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$, *порождающей* все морфизмы из $\mathcal{C}_{\hookrightarrow}$ на строках длины $\geqslant 5$.

Тогда полученный двумерный кубический (прямоугольный) многогранник $\mathcal{P}_{\hookrightarrow}=\mathcal{P}_{\hookrightarrow}(L)$ адекватно кодирует библиотеку L, и если L достаточно велика, то этот многогранник несёт всю структурную информацию соответствующего языка $\mathcal{L}$, причём в нём явно видна сегментация на базовые единицы — слова и короткие фразы.

Если мы имеем дело с категорией $\mathcal{C}^{\hookrightarrow\downarrow}$, соответствующей *аннотированной* библиотеке, или с поддиаграммой $\mathcal{D}^{\hookrightarrow\downarrow}\subset\mathcal{C}^{\hookrightarrow\downarrow}$, то кроме «горизонтальных» прямоугольников приклеиваются также «вертикальные», причём горизонтальные связаны со стрелками $s'_1\hookrightarrow s'_2$, а вертикальные — со стрелками $s''\downarrow s'$.

Энтропия ветвления



Расширения *единицы-строки* s, например слова, при помощи коротких единиц t, следующих сразу за s в библиотеке L, задают *вероятност-*

---

[5] Наша взятая с потолка оценка $\geqslant 5$ на длину служит для устранения/минимизации роли «бессмысленно изоморфных» подстрок (например, отдельных букв); той же цели можно достичь естественными ограничениями на строки и склеивающие отображения.

ную меру на этих единицах t:

$$p_{\vec{s}}(t) = p_{L,\vec{s}}(t) = N_L(st)/N_L(s),$$

где $N_L(s)$ и $N_L(st)$ — число вхождений в L строк s и st соответственно.

Набор чисел $\{p_s(t)\}$, индексированных строками t, служит индикатором вариабельности использования строки s в текстах библиотеки L, причём представляется разумным использовать не все возможные t, а лишь набор T строк-единиц (слов) t, соответствующих примерно десяти (думаю, это число должно лежать в диапазоне между 3 и 50 и устанавливаться экспериментально) *наибольшим значениям* среди $p_{\vec{s}}(t)$.

Стандартный инвариант вероятностного пространства $\{p_{\vec{s}}(t)\}$, который отражает вариабельность вероятности p и рассматривается как инвариант строки s, — это *энтропия (на один шаг вперёд)*

$$\overrightarrow{ent}(s;L) = -\sum_{t\in T} p_{\vec{s}}(t)\log p_{\vec{s}}(t).$$

Аналогичным образом определяется энтропия $\overleftarrow{ent}(s;L)$ (при помощи левых расширений ts строки s), а также соответствующие инварианты, отражающие относительные частоты «двойных расширений» строки s, т. е. t_1t_2s, t_1st_2 и st_1t_2.

Такие энтропии, очевидно, будут сильно отличаться для строк «*птицы-летают*» и «*коровы-летают*», а строка «*пчёлы-летают*» будет близка в данном отношении к «*птицы-летают*». (Это явление выражено сильнее для расширений не самих строк, а их «синтаксических вариаций».)

Глава 32

Подобия и классификации, деревья и координатизации

Многие (почти все?) лингвистические «единицы» представляют собой классы других единиц. Например, *слова* на самом деле — это *классы эквивалентности строк, содержащих эти* слова, а не просто «строки букв». Скажем, два набора строк

[лук-растёт]: *зелёный-лук, свежий-лук, горький-лук, грядка-лука, выращивать-лук, салат-с-луком, …*

[лук-стреляет]: *спортивный-лук, стрельба-из-лука, вооружённый-луком, целиться-из-лука, …*

представляют два различных слова-класса «лук»[1].

Часто (но не всегда) классификации строятся с помощью отношений *подобия* и/или *эквивалентности* R, которые кроме *подобия* и *эквивалентности* отражают также идеи

> *«одинаковости», «тождества», «равенства», «изоморфизма», «аналогии», «близости», «сходства»,*

причём такие отношения R считаются *единицами более высокого порядка* и сами подлежат дальнейшей классификации. Например, подобие $\bullet \sim_1 \circ$ отличается от подобия $\bullet \sim_2 \blacksquare$, равно как и от подобия $\triangle \sim_3 \square$, а сами подобия $\sim_2$ и $\sim_3$ схожи между собой и отличны от $\sim_1$.

Не все отношения подобия приводят к тому, что можно назвать «настоящей классификацией», отчасти потому, что в эрго-логике не выполняется «аксиома эквивалентности» $A \sim A$. Ведь вы бы сошли с ума, если бы заполняли мозг отношениями $A \sim A$ для всех A из вашей головы.

Кроме того, некоторые отношения подобия — как, например, то, что объединяет слова

$$\{\textit{сладкий, горький, солёный, кислый, острый}\},$$

— приложимы лишь к небольшим группам объектов и не продолжаются на основную массу слов.

---

[1] Тот факт, что строка «*выращивать спортивный лук*» не существует, демонстрирует, сколь далеки друг от друга эти два класса, однако строки, допускающие двоякое толкование, такие как «*стрела лука*», наводят между ними «квазипоэтические мосты».

Ещё один тип наборов слов, имеющих много общего, которые могут считаться или нет настоящими классами, — это *морфологические формы слова*, например,

{*работает, работал, работающий*}

или

{*белый, белизна, отбеливать*}.

С другой стороны, традиционные части речи — *глагол, существительное, прилагательное* и т. д. — представляют собой типичные *классы слов*; также, несмотря на свою неопределённость, важное значение имеет деление слов на «общеупотребительные» и «редкие».

Две наиболее распространённые классификационные структуры таковы.

1. Классификация как дерево. Такую классификацию можно рассматривать как последовательность разбиений, скажем, слов-единиц на более мелкие классы, в которой правило, задающее каждое следующее разбиение, зависит от предыдущего (более грубого) разбиения.

Довольно искусственный с лингвистической точки зрения пример такого рода — это классификация/расположение слов в словарях с алфавитной организацией.

Более важен пример, в котором первое разбиение делит слова на следующие два класса **A** и **B**.

A. Класс знаменательных слов: {*существительные,* (почти все) *глаголы, прилагательные, наречия*}.

B. Класс служебных слов: {*артикли, местоимения, предлоги и т. д.*}.

Второе разбиение представляет собой деление слов на «части речи».

Тогда третье разбиение может группировать знаменательные слова согласно их «общему смыслу», например существительные — в соответствии с тем, обозначают ли они «физические объекты» или «абстрактные понятия», и т. д.

2. Классификация с помощью координат. Такая классификация задаётся несколькими *координатами*, которые являются функциями тех объектов, что мы пытаемся классифицировать, причём задание/определение (но не значение!) каждой координаты не зависит от значений остальных координат.

Классы образуются присваиванием конкретных значений некоторым координатам.

Например, можно рассмотреть следующие функции $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$ на фразах-единицах u:

$\mathbf{c}_1(\boldsymbol{u})$ принимает значения «*длинная*», «*средняя*», «*короткая*», если u содержит не более 4, от 5 до 8 и более 8 слов-единиц соответственно;

$\mathbf{c}_2(u)$ принимает значения «*да*» или «*нет*» в зависимости от того, содержит ли *u знаменательное слово*;

$\mathbf{c}_3(u)$ сопоставляет фразе *u* её *ключевое слово* w;

$\mathbf{c}_4(u)$ есть ожидаемая возрастная группа (3–6, 7–11, 12–...) ребёнка, способного понять фразу *u*.

Вообще, координатизация «вкладывает» потенциально большое множество U единиц в *координатное пространство*, являющееся декартовым произведением нескольких маленьких множеств.

Наша цель — сформулировать *универсальные* правила классификации, *априори приложимые ко всем типам строк*, а также к сигналам, имеющим другую структуру, которые давали бы результаты не хуже, а в конце концов и лучше, чем классификации, основанные на «смысле».

Глава 33

Кластеризация, бикластеризация и кокластеризация

> *Не может быть изолированных знаков. Более того, знаки требуют по меньшей мере два Квази-ума.*[1]
>
> Чарльз Сандерс Пирс

Предположим, что некоторые пары точек множества V «единиц» соединены рёбрами (∘—•), отражающими некоторое *сходство* между этими точками, рассматриваемыми как вершины некого графа на множестве вершин V.

Простая кластеризация такого множества V есть его разбиение на подмножества, называемые *кластерами*, такие, что связи (количество рёбер) между элементами кластера сильнее (больше), чем между различными кластерами.

Архетипическая кластеризация — это разбиение графа на его *компоненты связности*, но, вообще говоря, не существует математического рецепта кластеризации, применимого ко всем графам, — в конце концов, многие графы не поддаются кластеризации.

С другой стороны, многие «графы сходства» в жизни допускают более или менее однозначное разбиение на кластеры.

Простая кластеризация часто применима к множествам V, на которых задана функция (типа) расстояния $d(v_1, v_2)$, например к подмножествам n-мерного пространства с *обычной евклидовой* метрикой[2].

Более интересно понятие *бикластеризации*. Представим себе язык, в котором существует простое общее определение *слова-единицы*, а также универсальное правило для нахождения *границ слов*. (В реальной жизни определить, что такое слово, и придумать алгоритм для выделения слов из потока сигналов весьма непросто.)

---

[1] Непонятно, но вдохновляюще.

[2] Это позволяет счастливо использовать полуфабрикатные формулы из книги.

Бикластеризация — это классификация слов в соответствии с их *функциями*: два слова w_1 и w_2 считаются *функционально подобными*, если другие слова, с которыми они систематически «взаимодействуют», сами имеют тенденцию быть похожими.

Условие

> *слово w_1 подобно слову w_2, если коллеги слова w_1 часто оказываются подобными коллегам слова w_2,*

может показаться вам циклическим. Тогда перепишите его в виде

> *слово w_1* подобно *слову w_2, если коллеги слова w_1 часто оказываются* подобными *коллегам слова w_2.*

Теперь оно указывает на некий итерационный процесс (алгоритм), преобразующий начальную кластеризацию в более продвинутую.

Часто бывает трудно определить и/или идентифицировать «*взаимодействие*» для пар (или бóльших групп) слов, однако выяснить, без каких-либо ссылок на «смысл» или «функцию», *часто* ли два данных слова w_1 и w_2 появляются *рядом друг с другом*, относительно легко[3].

Оба этих понятия — «*рядом*» и «*часто*» — могут меняться, причём второе зависит от первого: то, что следует считать *частым*, если речь идёт о появлении слов на соседних позициях, будет считаться редким, если рассматривается одновременное наличие этих слов на одной и той же странице текста.

Если понятия «*близко*» и «*часто*» конкретизированы, мы получаем то, что называется *графом смежности* G на множестве слов[4] W, в котором слово w_1 соединено ребром со словом w_2, если эти слова «*часто появляются рядом*»[5].

Примечательно, что такие графы, если они происходят из «реальной жизни», обладают огромной избыточностью — они очень далеки от чего бы то ни было «случайного».

Точнее, такие графы G обычно допускают *приближённые редукции*, сводящие их к некоторым гораздо более простым графам $\underline{G}$.

---

[3] Здесь предполагается, что мы понимаем, что означает «*одинаковость*» слов, находящихся в *разных* местах потока речи или письменного текста.

[4] Мы предполагаем здесь, что слова образуют *множества*.

[5] Поскольку мы теперь стоим на твёрдой математической почве, неопределённость условия «*часто появляются рядом*», как и расплывчатость терминологии, использованной на предварительной стадии изложения, вообще говоря, не представляют опасности, во-первых, потому что это изложение *не маскируется* под точное, а во-вторых, потому что математика способствует кристаллизации правильных идей в логически основательные.

Это отличается от того, что происходит почти со всеми спекулятивными рассмотрениями, питаемыми «чистой интуицией» без помощи математики.

О терминологии

Классификация для нас — это то, что в лингвистике и психологии называется *категоризацией*: разбиение «объектов» на классы.

Классификация, которая строится с помощью некоторой редукции $G \to \underline{G}$, в лингвистике называется *кокластеризацией*, а в интеллектуальном анализе данных и биоинформатике, где говорят не о «классах», а о *кластерах*, — *бикластеризацией*[6].

Мы используем термин «кокластеризация» в случае, когда функциональное взаимодействие может задействовать более двух единиц, и сохраняем термин «бикластеризация» для рассмотренного выше случая бинарного взаимодействия.

Бикластеризация применяется скорее не к графам, а к *функциям* двух переменных $G(u, v)$, у которых область изменения U переменной u и область изменения V переменной v необязательно совпадают. (Граф задаётся двузначной функцией со значениями в множестве $\{$*ребро, не ребро*$\}$, или, для краткости, $\{0, 1\}$.)

⋆ *Редукция* $R^{\downharpoonleft}$ *функции* $G(u, v)$ к функции $\underline{G} = \underline{G}(\underline{u}, \underline{v})$, определённой на паре меньших (и часто значительно меньших) множеств $\underline{U}$ и $\underline{V}$, — это пара отображений из U на $\underline{U}$ и из V на $\underline{V}$, скажем $P^{\downharpoonleft} : U \to \underline{U}$ и $Q^{\downharpoonleft} : V \to \underline{V}$, записываемых в виде

$$u, v \rightrightarrows \underline{u} = P^{\downharpoonleft}(u), \quad \underline{v} = Q^{\downharpoonleft}(v),$$

для которых композиция (иногда называемая *суперпозицией*) $G^{\downharpoonleft}(u, v)$ функций $\underline{G}$ и $R^{\downharpoonleft}$, т. е. функция

$$G^{\downharpoonleft}(u, v) = \underline{G}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{G} \circ P^{\downharpoonleft} \& Q^{\downharpoonleft}(u, v) = \underline{G}(P^{\downharpoonleft}(u), Q^{\downharpoonleft}(v)),$$

«*хорошо приближает*» функцию $G(u, v)$.

(Если $U = V$ и $G(u, v) = G(v, u)$, то можно взять $\underline{U} = \underline{V}$ и $P^{\downharpoonleft} = Q^{\downharpoonleft}$. Однако если $G(u, v) = G(v, u)$, то $\underline{U}$ и $P^{\downharpoonleft}$ необязательно равны $\underline{V}$ и $Q^{\downharpoonleft}$, даже при $U = V$.)

⋆ *Кластеры* (классы) — это подмножества в U и V, соответствующие элементам $\underline{u}$ и $\underline{v}$ под действием функций $u, v \rightrightarrows \underline{u}, \underline{v}$, т. е. множества таких u в U и v в V, для которых $P^{\downharpoonleft}(u) = \underline{u}$ и $Q^{\downharpoonleft}(v) = \underline{v}$.

«*Приближение*» здесь рассматривается в смысле, отличном от обсуждавшейся выше позиционной близости слов. Он зависит от типа функции G, от того, где она принимает свои значения. В наших примерах эта функция может быть не только двузначной, но и *трёхзначной* — указывать, является ли взаимодействие между u и v *сильным*,

---

[6] Анализ такого типа, вероятно, применялся и в других областях естественных наук/статистики, но фигурировал там под другими названиями, что затрудняет выяснение того, кем и когда исходно была выдвинута эта идея. Не исключено, что её понимал и неявно использовал Аристотель.

слабым или *вообще отсутствующим*. Она может также принимать *числовые значения*, если $G(u, v)$ есть относительная частота совместного появления слов u и v.

В любом случае множество значений функции, обозначим его I, должно быть снабжено *метрикой*, позволяющей измерять расстояния между различными значениями.

Если I совпадает с некоторым множеством положительных чисел, то в качестве такого расстояния берётся абсолютная величина $|i_1 - i_2|$; если же I — «абстрактное» множество, состоящее из двух или трёх точек, то можно реализовать их числами, скажем $\{0, 1\}$ или $\{0, 1, 2\}$, и вновь воспользоваться расстоянием $|i_1 - i_2|$.

Тогда *близость* можно определять относительно *метрики Хэмминга* (которая также называется l_1-*метрикой*)

$$\operatorname{dist}(G, G^{\flat}) = \sum_{u \in U,\, v \in V} |G(u, v) - G^{\flat}(u, v))|.$$

Чтобы увидеть, как это работает,

- возьмём в качестве $U = V$ множество, состоящее из 100 000 слов,
- слова u и v из множества W будем считать «*кофункциональными*», если v следует *сразу за* u.
- условимся, что «*часто*» означает «*по крайней мере десять раз*».

Соответствующую функцию G можно рассматривать как (несимметричную) матрицу размера $100\,000 \times 100\,000$ с элементами из множества {часто, редко}. Для достоверного определения значений $G(u, v)$, являющихся элементами этой матрицы, необходима библиотека, содержащая более $10^{11} = 10 \cdot 10^{10}$ слов[7].

Но может случиться — и в «реальной жизни» часто так и происходит, — что эта огромная матрица (приближённо) определяется чем-то гораздо меньшим, скажем матрицей размера 300×300, в которой необходимо заполнить лишь $90\,000 < 10^5$ элементов, для чего требуется только

$$90\,000 + (2 \log_2 300) \cdot 10^5 < 2 \cdot 10^6$$

битов вместо исходных 10^{10} битов.

Бикластеризация позволяет добиться такого упрощения путём редукции вашей большой матрицы/функции G к функции $\underline{G}(\underline{u}, \underline{v})$, заданной на множестве $\underline{U} \times \underline{V}$ из $300 \times 300 = 90\,000$ элементов.

---

[7] Проверяя по одной паре слов в секунду — и работая по восемь часов в день пять дней в неделю, — обработкой такой библиотеки вы будете заниматься более 10 000 лет.

Квазиединственность функций $\underline{G}$ и $P^{\downharpoonright}\&Q^{\downharpoonright}$

Априори существование редукции $G \rightsquigarrow \underline{G}$ *крайне маловероятно*, даже если не требовать, чтобы функция $G^{\downharpoonright}(u,v) = \underline{G} \circ P^{\downharpoonright}\&Q^{\downharpoonright}(u,v)$ исключительно хорошо приближала функцию $G(u,v)$.

Следовательно, даже если какая-то функция $G^{\downharpoonright}(u,v)$ лишь грубо приближает функцию $G(u,v)$, то соответствующие функции $\underline{G}(\underline{u},\underline{v})$, $P^{\downharpoonright}\colon U \to \underline{U}$ и $Q^{\downharpoonright}\colon V \to \underline{V}$ (по существу) *единственны с подавляющей вероятностью*.

Но если множества $\underline{U}$ и $\underline{V}$ малы, скажем состоят из 2–4 элементов, то на роль $\underline{G}$ и $P^{\downharpoonright}\&Q^{\downharpoonright}$ могут претендовать несколько кандидатов, и нужно выбрать из них «наилучших». Предпочтителен здесь выбор, при котором функция $\underline{G}$ максимально далека от наиболее вероятной. (Иногда этот принцип можно сформулировать как *минимизацию некоторой энтропии* функции $\underline{G}$.)

Дополнение/экстраполяция матрицы G

Вы легко храните в памяти 100 000 слов и (подсознательно) помните несколько миллионов случаев совместного появления каких-то пар этих слов на соседних позициях[8]. Но это число заведомо очень далеко от 10 000 000 000 — количества элементов матрицы G: бóльшая часть матрицы G в вашей голове заполнена вопросительными знаками.

С другой стороны, несколько миллионов примеров — это не так уж и мало, если речь идёт о матрице $\underline{G}$, содержащей лишь 90 000 элементов. Имея же эти элементы, вы заменяете $G(u,v) = ?$ на $G(u,v) = G^{\downharpoonright}(u,v) = \underline{G}(\underline{u},\underline{v})$.

В результате при необходимости вы без колебаний принимаете или отвергаете как неправдоподобный факт соседства пар относительно редких слов, например «интеллектуально апостериорный», «гидравлически превосходящий», «превосходно апостериорный», «интеллектуально гидравлический», «кортикофугально ингибированный», «интеллектуально засахаренный» и т. д.[9]

Аддитивная и вероятностная бикластеризация

Пусть все элементы u множества U снабжены *весами* — положительными числами, которые обозначаются $|u|$. Тогда *аддитивная редукция*

---

[8] Средняя книга содержит около 100 000 слов, а кроме книг существуют и другие их источники.

[9] На самом деле вам понадобится параллельная работа нескольких механизмов кокластеризации, например для того, чтобы с ходу отбросить пары типа «кластеризация ясновидствует» и прочее в том же духе.

такого *взвешенного пространства* — это отображение, суммирующее веса. А именно, если функция $P^{\downharpoonleft}$ отображает множество U на некоторое множество $\underline{U}$,

$$U \xrightarrow{P^{\downharpoonleft}} \underline{U},$$

то это множество $\underline{U}$ наделяется весами $|\underline{u}|$, которые представляют собой суммы весов всех элементов u, отображающихся в $|\underline{u}|$:

$$|\underline{u}| = \sum_{P^{\downharpoonleft}(u)=\underline{u}} |u|.$$

Аналогичным образом, если элементы матрицы (функции) $G=G(u,v)$ суть положительные числа, то её *аддитивная редукция* $\underline{G}$ под действием отображений

$$U \xrightarrow{P^{\downharpoonleft}} \underline{U} \text{ и } V \xrightarrow{Q^{\downharpoonleft}} \underline{V}$$

— это редукция, при которой веса элементов матрицы $\underline{G}$ получаются суммированием соответствующих элементов из G:

$$|G(\underline{u},\underline{v})| = \sum_{P^{\downharpoonleft}(u)=\underline{v},\, Q^{\downharpoonleft}(v)=\underline{v}} |G(u,v)|.$$

Нормализация и вероятность. Положительная весовая функция $v \mapsto |v|$ на множестве U называется *нормированной*, если сумма всех весов равна единице:

$$\sum_{u\in U} |u| = 1.$$

В этом случае веса $p_u = |u|$ интерпретируются как «*вероятности событий* u».

В общем случае, например, когда веса представляют собой частоты появления слов u, можно нормировать их по формуле

$$|u|_{\text{вер}} = \frac{|u|_{\text{част}}}{\sum_{u\in U} |u|_{\text{част}}},$$

превратив таким образом пространство $(U, |\ldots|_{\text{част}})$ в *вероятностное пространство* $(U, |\ldots|_{\text{вер}})$.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ БУКВ: ГЛАСНЫЕ & СОГЛАСНЫЕ

Аддитивная вероятностная кластеризация практична в случае маленьких множеств W, например, когда A — множество из 26 букв английского алфавита, и грубейшая такая кластеризация разбивает его на два класса, обозначим их $\circ$ и $\bullet$, в соответствии с относительной частотой пар букв в английском языке.

Используемые здесь веса $|a|$ и $G(a, b)$ — это нормированные частоты появления буквы a и буквосочетания ab в данном тексте, и мы ищем (наиболее естественную с математической точки зрения) редукцию, при которой четыре веса

$$\begin{gathered}|\underline{G}(\circ, \circ)|, \quad |\underline{G}(\circ, \bullet)|, \\ |\underline{G}(\bullet, \circ)|, \quad |\underline{G}(\bullet, \bullet)|\end{gathered}$$

элементов матрицы $\underline{G}$ размера 2×2 имеют *минимальную относительную энтропию* относительно матрицы произведений весов элементов множества $\underline{A} = \{\circ, \bullet\}$, которые равны

$$\begin{gathered}|\circ| \cdot |\circ|, \quad |\circ| \cdot |\bullet|, \\ |\bullet| \cdot |\circ|, \quad |\bullet| \cdot |\bullet|.\end{gathered}$$

Вероятнее всего (данный факт, несомненно, известен, но я его не проверял), это разбиение минимальной энтропии множества A на классы $A_\circ$ и $A_\bullet$ в целом совпадает с разбиением букв на гласные и согласные.

Графически матрица G (приближённо) «редуцируется» к графу на двух вершинах $\circ\!\!-\!\!\bullet$ с помощью разбиения множества вершин A на два класса/кластера

$$\begin{gathered}A = \quad \textbf{гл}\textit{асные} \ \& \ \textbf{согл}\textit{асные} \\ \overset{\textbf{гл}}{\circ} — \overset{\textbf{согл}}{\bullet}\ .\end{gathered}$$

Заметим, что это разбиение не использует никакого априорного знания о «природе» букв; нужно знать лишь относительные частоты букв и их пар; *смысл*, который мы приписываем этим классам, — не источник, а *результат* процесса математического структурирования, важную роль в котором играет множественная бикластеризация[10].

Геометризация функции G

Пусть для определённости функция $G(u, v)$ двух переменных принимает значения в множестве $\{0, 1, 2\}$ (элементы которого означают «*ничего*», «*что-нибудь*», «*много*»), и пусть отображение

$$U \xrightarrow{\mathcal{G}} \{0, 1, 2\}^V, \quad \text{заданное формулой} \quad u \overset{\mathcal{G}}{\mapsto} f(v) = g_u(v) = G(u, v),$$

есть тавтологическое отображение из области изменения U переменной u в пространство $\{0, 1, 2\}$-значных функций $f(v)$ на области изме-

---

[10] Для получения фонетически более точной кластеризации необходимо следить за *тройками* (четвёрками?) букв, которые позволили бы различить некоторые пары, например «th» и «wh».

нения V функции v, которое представляет собой декартово произведение копий множества $\{0, 1, 2\}$, индексированных элементами v из V:

$$\{0,1,2\}^V = \underbrace{\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}\times\ldots\times\{0,1,2\}}_{V}.$$

Пусть, скажем, U — множество из 100 000 слов, а V — его конкретное подмножество, состоящее из 30–100 слов, выбранных с помощью некоторого предварительного математически заданного процесса. Например, это могут быть

- 100 наиболее частых слов

или, что более интересно,

★ 100 наиболее частых слов из некоторого класса, полученного с помощью другого алгоритма бикластеризации,

такого как

○ репрезентативная группа служебных слов,
∗ 100 наиболее распространённых глаголов,
✤ список из 30 распространённых четвероногих животных,
☞ список из 30 распространённых профессий.

На пространстве $\{0,1,2\}^V$ имеется много функций типа расстояния; из них наиболее предпочтительна метрика Хэмминга

$$\mathrm{dist}_V(f_1(v), f_2(v)) = \sum_{v\in V} |f_1(v) - f_2(v)|,$$

которая с помощью отображения $\mathcal{G}$ переносится на множество U.

Тогда (би)кластеризацию множества U в соответствии с возможными коллегами v элемента u можно построить при помощи простой кластеризации относительно такого «расстояния» на U.

Взаимная кластеризация

Если выбрать подмножество V слов в множестве U случайным образом, то выделенной кластеризации множества U для функции расстояния, унаследованной от dist_V, не будет. С другой стороны, некоторые исключительные подмножества V приводят к «чётким» кластеризациям множества U. Эти особые подмножества V представляют собой тесно связанные группы похожих слов, такие как, например, {*the*, *a*} или

{***красный***, ***зелёный***, ***жёлтый***, ***оранжевый***, ***фиолетовый***, ***розовый***, ***коричневый***, ***чёрный***, ***серый***, ***белый***}.

КОМБИНАТОРНАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ: ПОЧЕМУ КОРОВЫ НЕ ЛЕТАЮТ

Пусть опять G — граф на множестве вершин V. Его вершины v можно классифицировать/кластеризовать в соответствии с комбинаторикой подграфов, состоящих из вершин и рёбер из некоторой окрестности вершины v; простейшей характеристикой такой «окрестности» является *валентность вершины* v, т. е. число смежных с ней рёбер.

Таким образом, можно, например, сначала разбить множество V на две части — $V_{\text{мал}}$, где эта валентность мала, и $V_{\text{бол}}$, где она велика, — а затем подразбивать эти части дальше в соответствии со значениями *пар количеств* рёбер, ведущих из v в $V_{\text{мал}}$ и $V_{\text{бол}}$.

Коровы, ласточки и голуби. «Птицы летают» на 120 000 выдаваемых Гуглом страниц, «*коровы летают*» на 7 000 страниц, «*ласточки летают*» на 27 000 страниц, а «*голуби летают*» на 15 000 страниц.

Коров от птиц отличает не только само по себе число предложений, содержащих «корова & летать» или «птица & летать», но и число комбинаторных структур, которые демонстрируют эти предложения: типов предложений, включающих слова «*корова*» и «*летать*», гораздо меньше, чем типов предложений со словами «*ласточка*» и «*голубь*» вместо «*коровы*».

Это похоже на ситуацию с предлогами в английском языке: например, предлоги *under* («под») и *in* («в») могут употребляться с *различными* типами существительных и/или глаголов, однако геометрия/комбинаторика их окрестностей в «*сети коротких английских предложений*» весьма *похожа*, что помещает все (?) предлоги в один и тот же кластер.

ОБ АЛГОРИТМАХ БИКЛАСТЕРИЗАЦИИ

Для выявления кластеров «естественных единиц» (например, слов) u в U не всегда нужна полная информация о функции $G(u,v)$ для всех (u,v), иногда достаточно знать её значения лишь для элементов v из специальных *маленьких подмножеств* в V. Например, слово «*the*» разбивает другие слова на две группы в соответствии с тем, где они систематически появляются — непосредственно перед или непосредственно после слова «*the*».

Этот метод не работает для функций G общего вида, и бикластеризация множеств, скажем, мощности 100 000, задаваемая редукциями $U \to \underline{U}$ и $V \to \underline{V}$ в множества $\underline{U}$ и $\underline{V}$ мощности порядка 300, вообще говоря, представляется вычислительно невыполнимой задачей.

С другой стороны, существуют разнообразные эвристические алгоритмы, прекрасно работающие для функций G из «жизни».

Слова в контекстах: бикластеризация и трикластеризация

Бикластеризацию можно применять к функции $G(w, x)$, где w — слова, а переменная x представляет собой контекст, например книгу из некоторого набора X.

Естественная функция G кодирует информацию о (частом) наличии/отсутствии слова w в контексте x, и бикластеризация служит для классификации книг по темам в соответствии с их «ключевыми словами», а сами слова оказываются расклассифицированными согласно темам, в которых они часто используются, например *химия растений, животная пища* и т. д.

Классификацию с более информативной структурой, например с организацией классов в виде *деревьев* с несколькими ветвями, можно построить с помощью трикластеризации для функции $G(w_1, w_2, x)$, содержащей информацию о парах слов (w_1, w_2), встречающихся в одной и той же книге x.

Однако в общем случае неясно, как строить трикластеризацию, — отчасти потому, что не существует убедительного аналога вышеупомянутой «геометризации» $\mathcal{G}$ функции G. С другой стороны, большинство (?) многосторонних взаимодействий возникают как «комбинации» двусторонних, и мультикластеризация сводится к нескольким бикластеризациям.

Заключение

Кокластеризация не является ни конечным результатом выделения структуры из «потоков слов», ни «атомарной единицей» такой структуры; скорее, это большая молекула с простой, но всё же нетривиальной внутренней архитектурой, и эта молекула, в свою очередь, служит строительным кирпичиком для более сложных синтаксических структур.

Простота этой «математической молекулы» делает её весьма гибкой: её можно модифицировать множеством способов и приспосабливать к построению разнообразных глобальных структур.

Например, редукции $U\&V$, приводящие к (приближённой) кластеризации множества U и/или V, (не всегда) могут образовывать композиции, и комбинаторика систем (не вполне) коммутативных диаграмм редукций представляет собой интересную «структуру более высокого порядка» в $U\&V$.

Более тонкую структуру языка можно извлечь также из «расстояния» на V, индуцированного вышеупомянутой функцией $\mathcal{G}$ из пространства функций на некотором вспомогательном множестве V, причём существенные свойства такого «расстояния» закодированы (не вполне) *категорией* приближённых частичных изометрий множества U относительно этого «расстояния».

В том же духе можно продолжать бесконечно, но где-то надо остановиться. Крылья воображения, питаемые мощью математики, могут унести вас за пределы всего, чего можно достичь более «пешим» образом мыслей. Но, взмыв слишком высоко в небеса математики, вы рискуете разминуться со своей конечной целью внизу на Земле.

Литература

1. *Acharya B.* The Ecology of the Dhole or Asiatic Wild Dog (Cuon alpinus) in Pench Tiger Reserve, Madhya Pradesh (PhD Thesis). Dehradum: Wildlife Institute of India, 2007.
2. *Anderesen E.*, *Dunlea A.* The impact of input: language acquisition in the visually impaired // First Language. 1993. V. 13. P. 23–49.
3. *Aronoff M.*, *Rees-Miller J.* (eds.) The Handbook of Linguistics. Blackwell Publishing, 2002–2007.
4. *Auerbacher I.*, *Schatz A.* Finding Dr. Schatz: The Discovery of Streptomycin and A Life it Saved. iUniverse, 2006.
5. *Bickel L.* Florey: The Man Who Made Penicillin. Melbourne University Press, 1996.
6. *Brown K.* Penicillin Man: Alexander Fleming and the Antibiotic Revolution. Sutton, 2005.
7. *Calvin W. H.* A stone's throw and its launch window: timing precision and its implications for language and hominid brains // J. Theoret. Biol. 1983. V. 104. P. 121–135.
8. *Cheng J.-P.* The origin of probability and the problem of points; `htpp://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers2000/cheng.html`.
9. *Coombs C. H.*, *Dawes R. M.*, *Tversky A.* Mathematical Psychology: An Elementary Introduction. Prentice-Hall, 1970.
10. *Dunnill M. S.* The Plato of Praed Street: The Life and Times of Almroth Wright. Royal Society of Medicine Press, 2000.

11. *Evans N., Levinson S. C.* The myth of language universals: Language diversity and its importance for cognitive science //Behavioral and Brain Sciences. 2009. V. 32, № 05. P. 429–448; `https://www.princeton.edu/~adele/LIN_106:_UCB_files/Evans-Levinson09_preprint.pdf`.
12. First probabilists: Galileo, Cardano, Fermat, Pascal, Huygens; `http://www.bricol.net/downloads/misc/HistProb/02.First_Probabilists.pdf`.
13. *Fisher S. E., Marcus G. F.* The eloquent ape: genes, brains and the evolution of language // Nature Reviews Genetics. 2006. V. 7. P. 9–20.
14. *Flynn E. H.* (ed.) Cephalosporins and Penicillins: Chemistry and Biology. Academic Press, 1972.
15. *Hald A.* A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. Wiley, 1990.
16. *Heatley N. G.* In Memoriam, H. W. Florey: an Episode // J. Gen. Microbiology. 1970. V. 61. P. 289–299.
17. *Johnson R., Liddell S.* Toward a phonetic representation of signs: sequentiality and contrast // Sign Language Studies. 2010. V. 11, № 2. P. 241–274. (В свободном доступе находится только первая страница этой статьи.)
18. *Kresge N., Simoni R. D., Hill R. L.* Selman Waksman: the father of antibiotics // J. Biol. Chem. 2004. V. 279. P. e7.
19. *Lawvere F., Schanuel S.* Conceptual Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
20. *Macfarlan G.* Alexander Fleming: The Man and the Myth. Harvard University Press, 1984.
21. *Macfarlan G.* Howard Florey: The Making of a Great Scientist. Oxford University Press, 1979.
22. *Margineanu N.* Logical and Mathematical Psychology: Dialectical Interpretation of Their Relations. Presa Universitara Clujeana, 1997.
23. *McFadyen D.* Review of Liber De Ludo Aleae (Book on Games of Chance) by Gerolamo Cardano; `www.link.cs.cmu.edu/15859-s11/notes/Mcfadyen_review.pdf`.
24. *McInerney D. M., Liem A. D.* (eds.) Teaching and Learning: International Best Practice. Information Age Publishing, 2008.
25. *Moberg C. L., Cohn Z. A.* Launching the antibiotic era: personal accounts of the discovery and use of the first antibiotics // Yale J. Biol. Med. 1991. V. 64, № 2. P. 195–197.
26. Near Death Experience; `http://celestial.kuriakon00.com/nde/tony_cicoria.html`.

27. *Oudeyer P.-Y., Kaplan F., Hafner V. V.* Intrinsic motivation systems for autonomous mental development // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2007. V. 11, № 1, 265–286 (2007); `www.pyoudeyer.com`.
28. *Padgett J., Seaberg M. A.* Struck by Genius: How a Brain Injury Made Me a Mathematical Marvel. Houghton Mifflin Harcourt, 2014.
29. *Piore A.* When brain damage unlocks the genius within; `http://www.popsci.com/science/article/2013-02/when-brain-damage-unlocks-genius-within`.
30. *Potter R. D.* The race to get enough penicillin (1944); `http://clickamericana.com/eras/1940s/the-race-to-get-enough-penicillin-1944`.
31. *Schmidthuber J.* Formal theory of creativity, fun, and intrinsic motivation (1990–2010); `http://people.idsia.ch/~juergen/ieeecreative.pdf`.
32. Selman Waksman and Antibiotics, Commemorative booklet produced by the National Historic Chemical Landmarks program of the American Chemical Society in 2005; `http://www.acs.org/content/acs/en/education/whatischemistry/landmarks/selmanwaksman.html`.
33. *Shafer G., Vovk V.* The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statist. Sci. 2006. V. 21, № 1. P. 70–98.
34. Sources in the History of Probability and Statistics; `www.cs.xu.edu/math/Sources/`.
35. *Townsend J. T.* Mathematical psychology: prospects for the 21st century // J. Math. Psychol. 2008. V. 52, № 5. P. 269–280.
36. *Treffert D. A.* The savant syndrome: an extraordinary condition. A synopsis: past, present, future // Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci. 2009. V. 364 (1522). P. 1351–1357.
37. *Treffert D. A.* Extraordinary People: Understanding Savant Syndrome. iUniverse, 2006.
38. *Van Epps H. L.* René Dubos: unearthing antibiotics // J. Exp. Med. 2006. V. 203, № 2. P. 259.
39. *Waksman S. A.* My Life with the Microbes. Scientific Book Club, 1958.
40. Who Saved the Most Lives in History — Science Heroes News; `http://www.scienceheroes.com/index.php?option=com_content&view=article&id=258&Itemid=27`.
41. *Wolpert D. M., Diedrichsen J., Flanagan J. R.* Principles of sensorimotor learning // Nature Reviews Neuroscience. 2011. V. 12. P. 739–751.
42. *Zhu Q., Binghamb G. P.* Human readiness to throw: the size–weight illusion is not an illusion when picking the best objects to throw // Evolution and Human Behavior. 2011. V. 32, № 4. P. 288–293.

Громов Михаил

Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль

Подписано в печать 22.11.2016 г. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 18. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, `www.pareto-print.ru`
