HOW GROUPS APPEAR WHEN EXAMINING SEMIGROUPS

L. N. SHEVRIN

A number of conditions are given under which a semigroup is in fact a group. Some properties of semigroups are discussed in connection with a consideration of subgroups in a semigroup; finally, problems of embedding semigroups in groups are touched on.

Приводятся условия, при которых полугруппа будет группой. Обсуждаются некоторые свойства полугрупп, связанные с рассмотрением подгрупп в полугруппе, и затрагивается вопрос о вложении полугрупп в группы.

КАК ВОЗНИКАЮТ ГРУППЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОЛУГРУПП

Л. Н. ШЕВРИН

Уральский государственный университет, Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Эту статью можно рассматривать как продолжение статьи [1]. Мы не раз будем упоминать те или иные примеры полугрупп, рассмотренные в [1], но прежде всего желательно, чтобы для читателя были уже достаточно привычными следующие понятия, ключевые для данной статьи: полугруппа, группа, подполугруппа, изоморфизм. Очень кратко напомню их, избирая здесь (и всюду ниже) мультипликативную терминологию, то есть считая рассматриваемые бинарные операции умножением.

Полугруппа – множество с заданной на нем ассоциативной (то есть удовлетворяющей тождеству $(xy)z = x(yz)$) операцией. *Группа* – полугруппа, удовлетворяющая следующим двум условиям: в ней есть единица (то есть такой автоматически единственный элемент e, что $xe = ex = x$ для любого x) и каждый элемент x имеет обратный (то есть такой элемент y, что $xy = yx = e$; обратный элемент к x единствен, его обозначают x^{-1}). *Подполугруппа* – всякое подмножество полугруппы, замкнутое относительно умножения, то есть содержащее вместе с любыми двумя своими элементами их произведение. *Изоморфизм* полугруппы S на полугруппу T – такое взаимно однозначное отображение φ полугруппы S на T, что $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для любых $x, y \in S$.

Группа представляет собой специальный тип полугруппы, однако нельзя сказать, что теория групп составляет часть теории полугрупп. Это было бы неправильно ни с исторической точки зрения (первая начала развиваться фактически на сто лет раньше второй), ни с логической: аксиомы группы позволяют развить самостоятельную, очень содержательную и мощную теорию, в которой в большинстве случаев нет нужды обращаться к более общему понятию полугруппы. Вместе с тем в теории полугрупп, специфические особенности которой проявляются преимущественно при рассмотрении полугрупп, не являющихся группами, нередки ситуации, когда в тех или иных рассмотрениях возникают группы. Перечислим наиболее типичные ситуации такого рода.

Ситуация первая: среди полугрупп рассматриваемого типа встречаются группы. Тогда надо знать, каковы они, и либо для этого можно воспользоваться соответствующими сведениями из теории групп (если таковые имеются), либо возникает определенная теоретико-групповая проблема, требующая своего решения. Иногда *любая* группа удовлетворяет рассматриваемым полугрупповым условиям (что, как правило, легко усматривается). Тогда полезно знать, при каких дополнительных условиях полугруппа рассматриваемого типа будет группой.

Ситуация вторая: у каждой полугруппы рассматриваемого типа имеются *подгруппы*, то есть подполугруппы, являющиеся группами. Тогда надо знать, каковы могут быть эти подгруппы, в частности, может ли любая группа выступать в такой роли. Но главный интерес в подобной ситуации представляют вопросы о взаимодействии подгрупп друг с другом и с другими частями полугруппы.

Ситуация третья: для каждой полугруппы S рассматриваемого типа существует группа G, в которой имеется подполугруппа, изоморфная S. В этом случае говорят, что полугруппа *S вложима* в группу G. Представляет интерес, при каких условиях полугруппа вложима в группу. Этот центральный вопрос дал толчок многим другим вопросам соответствующей проблематики.

Описанные варианты не исчерпывают ситуаций, когда в исследованиях полугрупп возникают теоретико-групповые мотивы. Отметим еще одну такую ситуацию, имеющую общий характер, то есть относящуюся к любым математическим структурам, – речь идет об автоморфизмах. *Автоморфизмом* математической структуры (в частности, полугруппы) называется ее изоморфизм на себя. Множество всех автоморфизмов структуры, заданной на множестве X, является, как нетрудно проверить, подгруппой в полной полугруппе преобразований $T(X)$ (мы определили $T(X)$ в [1]). Эта подгруппа называется *группой автоморфизмов* данной структуры.[1] Группам автоморфизмов полугрупп нередко уделяется внимание в исследованиях.

В статье мы проиллюстрируем три описанные выше ситуации некоторыми примерами, сформулируем и, как правило, докажем некоторые факты, большей частью хрестоматийные. Этому посвящены соответственно разделы 1, 2 и 3. Излагаемый материал, по мнению автора, может быть использован при чтении факультатива для учащихся старших классов.

1. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ПОЛУГРУППА ЯВЛЯЕТСЯ ГРУППОЙ

Вспомним, как определяется действие деление для чисел: частным при делении b на a называется такое число c, что $ac = b$. Тем самым деление определяется в терминах умножения: можно сказать, что это отыскание одного из множителей, если даны произведение и другой множитель, или что это решение уравнения вида $ax = b$. (В силу указанной связи деление и принято называть действием, обратным к умножению.) Можно задаться вопросом об аналогичном определении деления в случае произвольной мультипликативной полугруппы (или даже произвольного *группоида* – так называют множество с одной бинарной операцией, необязательно ассоциативной). Но при этом сразу следует обратить внимание на два момента.

Во-первых, умножение чисел коммутативно, поэтому частное $b : a$ – это корень как уравнения $ax = b$, так и уравнения $xa = b$. Но в некоммутативной полугруппе, даже если указанные два уравнения разрешимы, они вовсе не обязаны иметь общий корень. Для уравнения $ax = b$ корень можно назвать *правым частным* элементов b и a, для уравнения $xa = b$ – *левым частным*. Если для b и a существует правое [левое] частное, то будем говорить также, что *b делится на a справа* [*слева*].

Во-вторых, мы привыкли к тому, что частное двух данных чисел *единственно*, но можно ли то же самое гарантировать для правого и левого частных, если они существуют?

В общем случае из существования правого или левого частных двух данных элементов полугруппы не следует их единственность. Например, в мультипликативной числовой полугруппе $\{0, 1\}$ уравнение $0x = 0$ (в силу коммутативности полугруппы совпадающее с уравнением $x0 = 0$) имеет корнями 0 и 1. Однако (удивительный факт!) если в полугруппе *любые* два элемента делятся друг на друга справа и слева, то соответствующие частные единственны, причем любопытно, что полугруппы с указанным условием – это в точности группы. Итак, верна следующая

Теорема 1. *Для того чтобы в полугруппе S любые два элемента делились друг на друга справа и слева, необходимо и достаточно, чтобы S была группой. При этом для любых $a, b \in S$ каждое из уравнений $ax = b$, $xa = b$ имеет единственный корень.*

Достаточность в теореме и единственность корней указанных уравнений усматриваются без труда. А именно, в группе для уравнения $ax = b$ корнем, и притом единственным, будет элемент $a^{-1}b$. Действительно,

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b,$$

то есть $a^{-1}b$ есть корень уравнения $ax = b$. Если c – какой-то корень того же уравнения, то $ac = b$ и, умножая обе части этого равенства слева на a^{-1}, получаем $a^{-1}(ac) = a^{-1}b$, но $a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$, так что c обязан совпадать с $a^{-1}b$. Аналогичными выкладками доказывается, что единственным корнем уравнения $xa = b$ в группе является ba^{-1}.

Докажем теперь **необходимость**. Пусть S – полугруппа, в которой для любых a, b каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$ разрешимо. В частности, полагая $b = a$, констатируем существование таких элементов

[1] Концепция автоморфизма и рассмотрение групп автоморфизмов определяют наиболее общий подход в учении о симметрии. Имеется много книг, трактующих различные аспекты этого учения. Укажем только одну, которую по праву можно назвать классической в данной области, – книга Г. Вейля [2].

c и d, что $ac = a$ и $da = d$. Покажем, что $sc = s$ для любого $s \in S$, то есть, как обычно говорят, c есть *правая единица* в полугруппе S. Уравнение $ya = s$ по условию имеет корень, пусть это t. Тогда $sc = (ta)c = t(ac) = ta = s$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что d есть *левая единица*, то есть $ds = s$ для любого $s \in S$. Но левая и правая единицы обязаны совпадать. В самом деле, произведение dc, с одной стороны, равно d (поскольку c – правая единица), с другой – равно c (поскольку d – левая единица). Итак, $c = d$, и этот элемент – обозначим его теперь e – есть единица в S.

Осталось показать, что для любого $a \in S$ существует обратный элемент. Уравнения $ax = e$ и $xa = e$ разрешимы, значит, существуют элементы g, $h \in S$ такие, что $ag = e$, $ha = e$. Убедимся, что $g = h$, чем и завершится доказательство, так как тем самым будет установлено, что этот элемент является обратным к a. Имеем $g = eg = (ha)g = h(ag) = he = h$, что и требовалось доказать.

Теорема полностью доказана.

Идея разрешимости тех или иных уравнений в полугруппе приводит к выделению важных типов полугрупп. Один из них – так называемые простые полугруппы, которые могут быть определены следующим образом: полугруппа называется *простой*, если в ней для любых элементов a, b разрешимо уравнение $xay = b$ (с двумя неизвестными). Отметим, что обычно простые полугруппы вводятся в терминах специальных подполугрупп, называемых *идеалами* (и, кстати, термин *простая* отражает отсутствие у соответствующей полугруппы идеалов, отличных от нее самой). Избранный нами способ приводит к тому же понятию без обращения к дополнительным определениям. Легко усмотреть, что всякая группа будет простой полугруппой. Любопытно, что для коммутативных полугрупп верно и обратное, что непосредственно обеспечивается теоремой 1. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Коммутативная полугруппа проста тогда и только тогда, когда она есть группа.*

К простым полугруппам мы еще вернемся в разделе 2. А теперь обратимся к важному типу полугрупп, которые будут к тому же главным "действующим лицом" в разделе 3, – полугруппам с законом сокращения. Говорят, что полугруппа S удовлетворяет *закону сокращения*, если для любых x, y, $z \in S$

$$\text{из} \quad xz = yz \quad \text{следует} \quad x = y \tag{1}$$

и

$$\text{из} \quad zx = zy \quad \text{следует} \quad x = y. \tag{2}$$

В этом случае S называют также *полугруппой с сокращением*. Оба условия (1), (2) привычны для числовых полугрупп (впрочем, не любых, а не содержащих нуля: ведь $a0 = b0$, однако a и b могут при этом быть различными). На самом деле их выполнимость обеспечивается в следующей общей ситуации: *любая группа является полугруппой с сокращением.* Это вытекает из установленной при доказательстве теоремы 1 единственности корней рассмотренных там уравнений. Обратное неверно: один из простейших примеров полугрупп с сокращением, не являющихся группами, – мультипликативная полугруппа натуральных чисел. Все примеры полугрупп с только что указанным свойством могут быть лишь среди бесконечных полугрупп. Дело в том, что верна

Теорема 3. *Всякая конечная полугруппа с сокращением является группой.*

Докажем эту теорему. Пусть S – конечная полугруппа с сокращением. Мы установим, что в S для любых элементов a и b разрешимы уравнения $ax = b$ и $xa = b$, после чего останется только сослаться на теорему 1. При этом рассмотрение уравнения $xa = b$ аналогично случаю уравнения $ax = b$ (надо будет по существу переписывать все выкладки "справа налево"), поэтому достаточно провести проверку только для уравнения $ax = b$. Пусть S состоит из n элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Рассмотрим элементы $as_1, as_2, \ldots, as_n$. Мы утверждаем, что все они различны; это вытекает из справедливости в S закона сокращения, в данном случае его "левосторонней" части (2). Итак, $as_1, as_2, \ldots, as_n$ представляют собой *все* элементы полугруппы S; значит, один из них равен b. Пусть $as_k = b$. Но тогда s_k и будет корнем рассматриваемого уравнения. Теорема доказана.

В заключение этого раздела обратимся к регулярным полугруппам, являющимся предметом довольно интенсивных исследований в теории полугрупп. Полугруппа называется *регулярной*, если в ней для любого элемента a разрешимо уравнение $axa = a$. Регулярной будет, например, полная полугруппа преобразований $T(X)$ для произвольного множества X. (Проверка этого факта может служить неплохим упражнением для заинтересованного читателя.) Для нас важно подчеркнуть, что *любая группа является регулярной полугруппой.* Это очевидно: корнем уравнения $axa = a$ в группе будет a^{-1}. Обратное утверждение, конечно, неверно: контрпримеры многочисленны, самый простой из них – мультипликативная числовая полугруппа $\{0, 1\}$. Однако справедлива

Теорема 4. *Всякая регулярная полугруппа с сокращением является группой.*

Нетрудно доказать и эту теорему. Пусть полугруппа S удовлетворяет условию теоремы. Возьмем произвольный ее элемент a. По условию существует $b \in S$ такой, что $aba = a$. Умножая обе части этого равенства поочередно слева и справа на произвольный элемент из S и сокращая затем справа [соответственно слева] на a, мы получим, что ab [соответственно ba] есть правая [левая] единица в S, откуда (см. доказательство теоремы 1) $ab = ba$ есть единица и, следовательно, b – обратный элемент к a.

2. ПОДГРУППЫ В ПОЛУГРУППЕ

Элемент e полугруппы называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$. Если полугруппа содержит идемпотент, то она имеет хотя бы одну подгруппу. В самом деле, идемпотент e составляет одноэлементную подполугруппу $\{e\}$, являющуюся, очевидно, группой. Но справедливо и обратное: в полугруппе, содержащей подгруппы, имеются идемпотенты – единицы этих подгрупп. Таким образом, подгруппы имеются у тех и только тех полугрупп, которые содержат идемпотенты. Отметим два типа полугрупп, наверняка обладающих этим свойством; оба они фигурировали в рассмотрениях предыдущего пункта.

а) **Регулярные полугруппы.** То, что регулярная полугруппа содержит идемпотенты, вытекает из умножения обеих частей равенства $aba = a$ справа или слева на b.

б) **Конечные полугруппы.** Здесь наличие идемпотентов менее очевидно. Соответствующее доказательство позволяет выявить требуемое свойство сразу у полугрупп более широкого класса, а именно у таких, в которых для каждого элемента a среди его степеней $a, a^2, ..., a^n, ...$ имеется лишь конечное число различных. Такие полугруппы называются *периодическими*. Мы установим сейчас, что *в периодической полугруппе некоторая степень любого элемента является идемпотентом*. Итак, рассмотрим произвольный элемент a периодической полугруппы. По условию существуют такие различные натуральные числа m и n, что $a^m = a^n$. Пусть для определенности $m < n$. Положим $n - m = d$. Равенство $a^m = a^n$ перепишется тогда в виде $a^m = a^{m+d}$, откуда, как легко понять, $a^m = a^{m+qd}$ при любом натуральном q. Выберем q такое, чтобы было $qd > m$. Тогда a^{qd} – искомый идемпотент. В самом деле, имеем $qd = m + l$ при некотором натуральном l, откуда

$$(a^{qd})^2 = a^{2qd} = a^{qd+m+l} = a^{qd+m}a^l = a^m a^l = a^{m+l} = a^{qd}.$$

Верно и утверждение, обратное к только что доказанному: *если в полугруппе S некоторая степень любого элемента является идемпотентом, то S – периодическая полугруппа*. В самом деле, если a^m – идемпотент, то $a^m = (a^m)^2 = a^{2m}$, откуда вытекает, очевидно, что среди степеней элемента a не более $2m - 1$ различных.

Простейшие примеры бесконечных периодических полугрупп можно выявить среди примеров, обсужденных в [1]: это полугруппы, указанные в п. 1.4, а также в пунктах 1.5, 1.7 и 1.12 при бесконечном множестве M. Отметим, что все они, кроме полугрупп в) из п. 1.12, обладают даже более сильным свойством, нежели просто периодичность: *все* их элементы являются идемпотентами. Полугруппы с указанным свойством так и называются – *полугруппы идемпотентов*.

Принципиален тот факт, что в любой полугруппе, имеющей идемпотенты, для каждого идемпотента e существует подгруппа G_e, в которой e служит единицей и которая содержит все подгруппы с идемпотентом e в качестве единицы. Такая подгруппа, как вытекает из ее описания, единственна. Она состоит в точности из тех элементов данной полугруппы, на которые e действует как единица и на которые e делится слева и справа. Проверка того, что множество всех элементов с указанным свойством является подгруппой, будет легким упражнением для заинтересованного читателя. Небольшая догадка, как использовать соотношения делимости для подходящих элементов, позволит доказать и следующее утверждение: *для различных идемпотентов e и f подгруппы G_e и G_f не пересекаются*. Подгруппы G_e (где e пробегает множество всех идемпотентов полугруппы) называются *максимальными подгруппами* данной полугруппы. Интересно отметить для примера, что в полной полугруппе преобразований $T(X)$ на произвольном множестве X максимальные подгруппы изоморфны симметрическим группам на подмножествах из X (определение симметрической группы см., например, в [1]).

Элементы полугруппы, принадлежащие максимальным подгруппам, называются *групповыми*. Особый интерес представляют полугруппы, все элементы которых групповые. Такие полугруппы называют *вполне регулярными* или *клиффордовыми*. Первый термин отражает более сильное их свойство, нежели свойство быть регулярной полугруппой: ясно, что для группового элемента a разрешимо уравнение $axa = a$, мы уже отмечали это выше для случая групп. Второй термин, которым мы ниже и будем пользоваться, дан в честь А. Клиффорда (1908–1992) – американского математика, одного из пионеров теории полугрупп, выявившего среди многого другого основополагающие свойства обсуждаемых полугрупп (которые он называл объединениями групп).

Среди регулярных, но не клиффордовых полугрупп – все полугруппы $T(X)$, где X состоит более чем из двух элементов. Так, в полугруппе $T(\{1, 2, 3\})$ негрупповым элементом будет, например, преобразование $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; это вытекает из того, что, как легко убедиться, f^2 – идемпотент, $G_{f^2} = \{f^2\}$ и $f \neq f^2$. Что касается полугрупп $T(X)$ для одно- и двухэлементного множеств X, то обе клиффордовы: первая из них одноэлементна (и тем самым является даже группой), а вторая, скажем $T(\{1, 2\})$, состоит из четырех групповых элементов

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

распределенных по трем максимальным подгруппам: $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{e, g\}$.

Два специальных типа клиффордовых полугрупп играют особо важную роль в общей теории полугрупп. Один из них – уже упоминавшиеся выше полугруппы идемпотентов. Они обладают многими интересными свойствами и нередко возникают в различных теоретико-полугрупповых ситуациях. Очевидно, максимальные подгруппы в полугруппе идемпотентов вырожденные, то есть одноэлементные.

Второй тип – так называемые *вполне простые полугруппы*. Не имея возможности ввести их здесь в полной общности, ограничимся случаем конечных или, более общо, периодических полугрупп. В этом случае указанное понятие эквивалентно понятию простой полугруппы, которое мы рассматривали в разделе 1. Справедлив следующий удивительный факт.

Теорема 5. *Всякая периодическая* (*и, в частности, конечная*) *простая полугруппа клиффордова, причем все ее максимальные подгруппы изоморфны друг другу.*

На самом деле может быть сформулировано более точное и очень красивое утверждение (называемое часто в литературе теоремой Риса–Сушкевича), прозрачно характеризующее строение произвольной вполне простой полугруппы в терминах некоторой группы и двух множеств. Эта фундаментальная теорема приводится во всех руководствах по теории полугрупп (см., например, [4, 6–8] из списка литературы в [1]).

3. ВЛОЖЕНИЕ ПОЛУГРУПП В ГРУППЫ

Как отмечено в разделе 1, любая группа удовлетворяет закону сокращения, откуда следует, что и всякая подполугруппа группы будет полугруппой с сокращением. Таким образом, сразу видно необходимое условие вложимости полугруппы в группу – выполнимость закона сокращения. Будет ли это условие достаточным?

Сначала рассмотрим поставленный вопрос применительно к коммутативным полугруппам. Для них ответ утвердительный.

Теорема 6. *Всякая коммутативная полугруппа с сокращением вложима в группу, причем даже коммутативную.*

Доказательство этой теоремы в техническом отношении несложно, а в идейном плане весьма поучительно. Мы приведем его, лишь опуская кое-где детальное проведение выкладок.

Пусть S – полугруппа, удовлетворяющая условию теоремы. Мы должны построить группу, в которой найдется подполугруппа, изоморфная S. В качестве "строительного материала" возьмем всевозможные упорядоченные пары (a, b) элементов из S, но некоторые пары будем считать равными. А именно, договоримся, что, по определению,

$$(a, b) = (c, d) \text{ означает, что } ad = bc. \qquad (3)$$

Такое определение требует проверки на корректность: надо убедиться, что введенное отношение равенства будет *отношением эквивалентности*, то есть: 1) любая пара равна самой себе, 2) если $(a, b) = (c, d)$, то и $(c, d) = (a, b)$, 3) если $(a, b) = (c, d)$ и $(c, d) = (e, f)$, то $(a, b) = (e, f)$. Убеждаясь в этом, читатель увидит, что при проверке свойств 1) и 2) придется воспользоваться только коммутативностью, а при проверке свойства 3) понадобятся к тому же и ассоциативность умножения в S, и выполнимость закона сокращения.

Множество всех рассматриваемых пар с введенным отношением равенства обозначим через G. Отметим, что в силу определения (3) все пары вида (a, a) равны друг другу; обозначим этот элемент G через ε. Ключевой момент доказательства – задание на G операции умножения. Положим

$$(x, y)(u, \upsilon) = (xu, y\upsilon). \qquad (4)$$

Прежде всего надо убедиться в корректности такого определения, то есть в независимости результата умножения от записи множителей в виде пар:

$$\text{если } (x, y) = (p, q) \text{ и } (u, \upsilon) = (s, t),$$
$$\text{то } (x, y)(u, \upsilon) = (p, q)(s, t).$$

Читатель без труда убедится в этом. Затем, также без затруднений, устанавливаем, что относительно введенной операции G оказывается группой, причем коммутативной. Ее единицей является указанный выше элемент ε; для элемента (x, y) обратным будет (y, x).

Осталось найти в группе G подполугруппу, изоморфную S. Зафиксируем элемент $c \in S$ и через T обозначим множество всех элементов из G, представимых парами (xc, c), где x пробегает S. Поскольку $(xc, c)(yc, c) = (xyc^2, c^2)$, а в силу определения (3) $(xyc^2, c^2) = (xyc, c)$, видим, что T – подполугруппа в G. Отображение φ полугруппы S на T, заданное условием

$$\varphi(x) = (xc, c), \qquad (5)$$

является искомым изоморфизмом. В самом деле, несколькими строками выше мы фактически установили, что $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Проверим взаимную однозначность φ: если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то, по определению (5), $(xc, c) = (yc, c)$, откуда с учетом определения (3) получаем $xc^2 = yc^2$ и, сокращая на c^2, приходим к требуемому равенству $x = y$.

Группа G, построенная в доказательстве теоремы, называется *группой частных* или *группой дробей* полугруппы S. Такое название обусловлено важнейшим конкретным примером рассмотренной в теореме ситуации, когда в роли S выступает мультипликативная полугруппа натуральных чисел. Здесь роль G играет в точности мультипликативная группа положительных рациональных чисел $\mathbf{Q}^+$; для осмысления этого надо только принять во внимание, что элементы $\mathbf{Q}^+$ традиционно записываются не в виде пар, а в виде дробей: $(a, b) = \frac{a}{b}$. Обращение к указанному примеру проливает дополнительный свет на определения (3) и (4): в данном случае они демонстрируют условие равенства дробей и правило умножения дробей.

Вернемся к вопросу, поставленному в первом абзаце этого раздела. Одно время казалось, что и в общем случае выполнимость закона сокращения не только необходимое, но и достаточное условие вложимости полугруппы в группу. В 30-х годах была даже опубликована статья с доказательством этого факта. Однако доказательство, как вскоре выяснилось, оказалось ошибочным: А.И. Мальцев (в работе, посвященной родственной проблеме вложения колец в тела, см. [3, с. 12–15]) опроверг соответствующее утверждение, построив пример полугруппы с сокращением, не вложимой в группу. В следующих работах той же линии (см. [3, с. 39–45, 46–57]) он нашел необходимые и достаточные условия обсуждаемой вложимости, имеющие вид “из данной совокупности равенств следует данное равенство”, и доказал, что не существует конечной системы условий такого вида, которая была бы необходимой и достаточной для вложимости полугруппы в группу.[1] Академик А.И. Мальцев (1909–1967) внес выдающийся вклад в алгебру и математическую логику. Упомянутые работы 1937–1940 годов были среди первых, принесших их автору широкую известность в математическом мире.

В последующие годы было проведено немало дальнейших исследований, посвященных вложению полугрупп в группы. Обзор основных исследований по этой проблематике дан в первом параграфе статьи [5]. Детальное изложение многих полученных здесь результатов на середину 60-х годов содержится в монографии [6], см. гл. 1 и 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеврин Л.Н.* Что такое полугруппа // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 4. С. 99–104. Поправка // Там же. № 7. С. 127.

2. *Вейль Г.* Симметрия. М.: Наука, 1968. 192 с.

3. *Мальцев А.И.* Избранные труды. М.: Наука, 1976. Т. 1: Классическая алгебра. 484 с.

4. *Шеврин Л.Н.* Тождества в алгебре // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 7. С. 111–118.

5. *Бокуть Л.А.* Вложение колец // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 4. С. 87–111.

6. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.; Т. 2. 422 с.

* * *

Лев Наумович Шеврин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и дискретной математики Уральского государственного университета, председатель правления Уральского математического общества, заслуженный деятель науки Российской Федерации, академик Академии гуманитарных наук, член редколлегии журнала “Известия вузов. Математика” и международного журнала “Semigroup Forum”. Лауреат Международной премии по образованию им. Хосе Васконселоса Всемирного совета по культуре. Автор более 160 работ, в том числе нескольких обзорных статей, трех монографий, двух школьных учебников, трех научно-художественных книг по математике для маленьких детей.

[1] Условия указанного вида в современной терминологии называются *квазитождествами*. Примеры квазитождеств – условия (1) и (2), определяющие закон сокращения. Для читателя, знакомого с понятием тождества (например, по статье [4]), отметим, что произвольное тождество можно считать специальным типом квазитождества – когда в посылке участвует какое-либо заведомо верное равенство; например, тождество $xy = yx$ можно переписать в виде “из $x = x$ следует $xy = yx$”. Такой унифицированный подход полезен с точки зрения осмысления некоторых общеалгебраических феноменов.