Оглавление

Предисловие 9

Глава I
Преобразование Радона 14

§ 1. Преобразование Радона на плоскости 14
1.1. Преобразование Радона на евклидовой плоскости 14
1.2. Формула обращения 15
1.3. Замечания 18
1.4. Преобразование Радона на аффинной плоскости 19
1.5. Связь с преобразованием Фурье и другой вывод формулы обращения 20
§ 2. Преобразование Радона в трехмерном пространстве 23
2.1. Преобразование Радона в евклидовом пространстве . . . 23
2.2. Преобразование Радона в аффинном пространстве 26
2.3. Преобразование Радона для пространств произвольной размерности 28
§ 3. Волновое уравнение и принцип Гюйгенса 29
3.1. Двумерный случай 29
3.2. Трехмерный случай 31
§ 4. Условия Кавальери и теоремы Пэли — Винера для преобразования Радона 32
4.1. Условия Кавальери для быстро убывающих функций . . . 32
4.2. Теорема Пэли — Винера для пространства $S(\mathbb{R}^2)$ 34
4.3. Теорема Пэли — Винера для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. 35
4.4. Обращение преобразования Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ при помощи моментов 37
4.5. Восстановление неизвестных направлений по заданным значениям $\mathcal{R}f$ 37
§ 5. Формула Пуассона для преобразования Радона и дискретное преобразование Радона 39

5.1. Формула Пуассона для преобразования Радона на плоскости . . . 39
5.2. Дискретное преобразование Радона; связь с рядами Фурье 42
5.3. Задача интегральной геометрии на торе . . . 43
§ 6. Преобразование Минковского — Функа . . . 44
§ 7. Преобразование Радона дифференциальных форм . . . 47
7.1. Преобразование Радона 1-форм на плоскости . . . 47
7.2. Преобразование Радона 2-форм на плоскости . . . 49
7.3. Преобразование Радона 2-форм в трехмерном пространстве . . . 52
7.4. Преобразование Радона 3-форм в трехмерном пространстве . . . 53
§ 8. Преобразование Радона для проективной плоскости и проективного пространства . . . 55
8.1. Пространства $\mathbb{P}^3$ и $(\mathbb{P}^3)'$ . . . 55
8.2. Преобразование Радона для $\mathbb{P}^3$ . . . 55
8.3. Связь с аффинным преобразованием Радона для $\mathbb{R}^3$ и преобразованием Минковского — Функа для трехмерной сферы . . . 57
8.4. Формула обращения для преобразования Радона в $\mathbb{P}^3$ . . . 58
8.5. О формулах обращения для аффинного преобразования Радона в $\mathbb{R}^3$ и преобразования Минковского — Функа для S^3 . . . 60
8.6. Описание образа преобразования Радона для $\mathbb{P}^3$ . . . 61
8.7. Преобразование Радона для проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ . . . 62
§ 9. Преобразование Радона в комплексном аффинном пространстве . . . 65
9.1. Определение преобразования Радона . . . 66
9.2. Связь с преобразованием Фурье . . . 66
9.3. Формула обращения для преобразования Радона . . . 67
9.4. Случай $n = 2$ . . . 67

Глава II
Лучевое преобразование . . . 69

§ 1. Лучевое преобразование в вещественном аффинном пространстве . . . 71
1.1. Лучевое преобразование в $\mathbb{R}^3$ . . . 71
1.2. Лучевое преобразование и гипергеометрическая функция Гаусса . . . 73
1.3. Теорема об образе оператора $\mathcal{I}$ . . . 74
1.4. Пространство $S(H')$ . . . 76
1.5. Описание образа $S(\mathbb{R}^3)$ в пространстве $S(H')$ . . . 78

1.6. Доказательство теоремы 1.1 об образе лучевого преобразования . . . 79
1.7. Формулы обращения . . . 80
1.8. Аналоги оператора κ . . . 82
§ 2. Лучевое преобразование дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$ . . . 84
2.1. Определение лучевого преобразования дифференциальных форм . . . 84
2.2. Лучевое преобразование 3-форм на $\mathbb{R}^3$ . . . 85
2.3. Лучевое преобразование 2-форм на $\mathbb{R}^3$ . . . 88
2.4. Лучевое преобразование 1-форм на $\mathbb{R}^3$ . . . 91
§ 3. Лучевое преобразование в трехмерном вещественном проективном пространстве . . . 92
3.1. Многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ . . . 92
3.2. Лучевое преобразование в $\mathbb{P}^3$ . . . 94
3.3. Связь с лучевым преобразованием в аффинном пространстве . . . 95
3.4. Описание образа лучевого преобразования . . . 96
3.5. Другой способ определения лучевого преобразования . . . 98
3.6. Доказательство теоремы об образе лучевого преобразования. . . . 100
3.7. Лучевое преобразование как сплетающий оператор . . . 101
§ 4. Лучевое преобразование в комплексном аффинном пространстве . . . 103
4.1. Лучевое преобразование в $\mathbb{C}^3$ . . . 103
4.2. Дифференциальная форма $\kappa\varphi$ и теорема об образе лучевого преобразования . . . 105
4.3. Формула обращения . . . 105
4.4. Аналоги оператора κ . . . 107
§ 5. Задачи интегральной геометрии для комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$ 109
5.1. Задача интегральной геометрии для комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих кривую . . . 109
5.2. Определение допустимых комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$ . . . 111
5.3. Необходимые и достаточные условия допустимости комплекса K . . . 112
5.4. Геометрическая структура допустимых комплексов . . . 114
5.5. Описание допустимых комплексов . . . 116

Глава III

Интегральная геометрия и гармонический анализ на плоскости и в пространстве Лобачевского . . . 119

§ 1. Элементы планиметрии Лобачевского . . . 120
1.1. Модели плоскости Лобачевского . . . 120
1.2. Орициклы . . . 122

1.3. Геодезические 123
§ 2. Орициклическое преобразование 124
2.1. Определение оператора $\mathcal{R}^h$ 124
2.2. Формула обращения 125
2.3. Соотношения Асгейрссона 127
2.4. Соотношение симметрии 128
2.5. Формула обращения для орициклического преобразования в другой модели плоскости Лобачевского 128
§ 3. Аналог преобразования Фурье на плоскости Лобачевского и его связь с орициклическим преобразованием 129
3.1. Преобразование Фурье на $\mathbb{R}^2$. 129
3.2. Преобразование Фурье на плоскости Лобачевского 131
3.3. Связь с орициклическим преобразованием и формула обращения 132
3.4. Соотношение симметрии 134
3.5. Формула Планшереля 135
§ 4. Связь с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{R})$ 136
§ 5. Интегральное преобразование, связанное с прямыми (геодезическими) на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ 139
5.1. Определение и формула обращения в модели Пуанкаре . . 139
5.2. Связь с преобразованием Радона на проективной плоскости 142
§ 6. Орисферическое преобразование в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$ 143
6.1. Модели пространства Лобачевского 143
6.2. Орисферы 145
6.3. Орисферическое преобразование 146
6.4. Формула обращения 146
6.5. Соотношение симметрии 149
6.6. Формула обращения для орисферического преобразования в другой модели пространства Лобачевского 149
6.7. Интегральное преобразование, связанное с вполне геодезическими поверхностями в $\mathcal{L}^3$ 150
Добавление. Орисферическое преобразование для пространства Лобачевского произвольной размерности 151
§ 7. Аналог преобразования Фурье в пространстве Лобачевского и его связь с орисферическим преобразованием 152
7.1. Определение преобразования Фурье 152
7.2. Формула обращения 153
7.3. Соотношение симметрии и формула Планшереля 154
§ 8. Связь с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{C})$ 155
§ 9. Волновое уравнение для плоскости и пространства Лобачевского и принцип Гюйгенса 157

9.1. Двумерный случай 157
9.2. Трехмерный случай 160

Глава IV

Интегральная геометрия и гармонический анализ на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$ 162

§ 1. Геометрия на группе G 162
1.1. Группа G как однородное пространство. 162
1.2. Плоские сечения гиперболоида G 163
1.3. Многообразие орисфер 165
1.4. Вложение многообразия орисфер H в проективное пространство 169
1.5. Комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$, ассоциированный с многообразием орисфер 169
1.6. Многообразие параболоидов 170
§ 2. Интегральная геометрия на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$ 173
2.1. Интегральные преобразования, связанные с пространством H орисфер и комплексом прямых K 173
2.2. Соотношения симметрии для орисферического преобразования 175
2.3. Формула обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}_0$, связанного с комплексом прямых в $\mathbb{C}^3$ 176
2.4. Формула обращения для орисферического преобразования 178
2.5. Формула обращения для орисферического преобразования в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$ 180
2.6. Интегральное преобразование, связанное с параболоидами на G 181
Добавление. Замечание об орисферическом преобразовании на группе $SL(2, \mathbb{R})$ 184
§ 3. Гармонический анализ на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$ 185
3.1. Операторы Лапласа — Бельтрами на группе G 185
3.2. Орисферические функции на G 186
3.3. Преобразование Фурье на G 189
3.4. Связь преобразования Фурье на G с орисферическим преобразованием 191
3.5. Соотношение симметрии для преобразования Фурье . . . 192
3.6. Формула обращения для преобразования Фурье 192
3.7. Аналог формулы Планшереля 194
3.8. Связь преобразования Фурье на G с представлениями группы $G \times G$. 195
3.9. Связь с представлениями группы G 198
§ 4. Другая версия преобразования Фурье на $G = SL(2, \mathbb{C})$ 200
4.1. Функции $\Psi_\chi(g; \xi, \zeta)$. 201

4.2. Преобразование Фурье на G 202
4.3. Связь между двумя вариантами преобразования Фурье . 203
4.4. Соотношение симметрии 204
4.5. Формула обращения и формула Планшереля для преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$ 204
4.6. Связь с теорией представлений 205

Предметный указатель 207

Предисловие

Интегральная геометрия рассматривает в первую очередь интегральные преобразования, ставящие в соответствие функциям на многообразии X их интегралы по подмногообразиям из какого-либо семейства M. Считается, что само семейство M наделено структурой многообразия. Так возникает соответствие между функциями на многообразии X и функциями на некотором многообразии M его подмногообразий. Например, функциям на евклидовом пространстве E^n ставятся в соответствие их интегралы по всевозможным прямым; в результате возникает интегральное преобразование, переводящее функции на E^n в функции на многообразии прямых.

Кроме интегрирования функций на X по подмногообразиям из семейства M, интегральная геометрия рассматривает аналогичные интегральные преобразования других объектов (плотностей на X, дифференциальных форм и т.д.). Основные задачи состоят в описании образов и ядер этих преобразований и в построении явных формул обращения, восстанавливающих исходные объекты по их образам[1]. Первой книгой, посвященной этому направлению в математике, стала монография И.М. Гельфанда, М.И. Граева и Н.Я. Виленкина[2].

Интегральная геометрия переплетается с классическим направлением в геометрии, которое начинали Плюккер, Клейн и Ли и которое ставит во главу угла различные многообразия подмногообразий и специфические структуры таких многообразий, определяемые геометрической природой их элементов. На языке этих геометрических структур и исследуются преобразования в интегральной геометрии. Исходные примеры таких многообразий — 4-мерное многообразие всех

---

[1] Называть этот круг задач интегральной геометрией предложил И.М. Гельфанд. Ранее Бляшке использовал термин “интегральная геометрия” для несколько иной проблематики, связанной с изучением инвариантного интегрирования на однородных пространствах.

[2] Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып. 5.

прямых в 3-мерном проективном пространстве (квадрика Плюккера — Клейна) и более общо многообразие Грассмана k-мерных плоскостей в n-мерном проективном пространстве, многообразие сфер Ли и т.д. Все эти многообразия играют существенную роль в интегральной геометрии.

Наиболее известный пример интегрально-геометрического преобразования — преобразование Радона — появилось в 1917 г. в статье Радона[1)], стоящей особняком в его математическом наследии. Радон рассматривает оператор интегрирования по гиперплоскостям в евклидовом пространстве и строит изложение в удивительно совершенной форме, необычно для того времени объединяя аналитические и геометрические рассмотрения и предвидя возможность рассматривать аналоги этого преобразования для других однородных пространств. В центре его внимания формула обращения — реконструкция функции через ее интегралы по гиперплоскостям. Замечательно, что получается абсолютно явная формула, имеющая принципиально разный вид в зависимости от того, является ли размерность пространства четной или нечетной. В нечетномерном случае она локальна: усредняется некоторый дифференциальный оператор вдоль семейства параллельных гиперплоскостей (для восстановления функции в точке достаточно знать интегралы лишь по гиперплоскостям, близким к этой точке). В четномерном случае формула обращения нелокальна: усредняется некоторый интегральный оператор вдоль семейства параллельных гиперплоскостей (в отличие от дифференциального в нечетномерном случае) и мы нуждаемся в интегралах по далеким плоскостям. Это соответствует тому, что принцип Гюйгенса верен для распространения волн в нечетномерном пространстве, но не верен в четномерном.

Еще до Радона Минковский и Функ рассмотрели аналог его преобразования для сферы, когда четная функция на сфере восстанавливается через ее интегралы по большим кругам. Эту реконструкцию можно осуществить, пользуясь сферическими полиномами. Радон знал об этих результатах, но он, по-видимому, не знал, что оба эти преобразования проективно эквивалентны (см. гл. I).

В 1938 г. Йон [2)] рассмотрел естественное обобщение преобразования Радона, когда функции в трехмерном пространстве интегрируются по всевозможным прямым вместо плоскостей. В этой конструкции появляется новый исключительно важный момент. Семейство прямых зависит от 4 параметров. Тем самым преобразование Йона действует из

[1)] Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwärte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. — Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. *69* (1917), 262–277.

[2)] John F. The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables. Duke Math. J., 1938, 300-322.

функций 3 переменных в функции 4 переменных, а потому естественно ожидать, что функции из образа удовлетворяют дополнительному условию. Центральное наблюдение Йона в том, что они удовлетворяют ультрагиперболическому дифференциальному уравнению, которое полностью описывает образ. Это важнейшее для будущего интегральной геометрии наблюдение не только ввело в обращение переопределенные задачи, но и определило ее связи с дифференциальными уравнениями.

Начиная с 40-х гг. одной из центральных задач в математике была задача развить аналог интеграла Фурье для некоммутативных групп Ли. Одной из первых в поле зрения (в первую очередь из-за физических применений) попала группа Лоренца $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. группа комплексных матриц 2-го порядка с определителем 1. Для этой группы И.М. Гельфанду и М.А. Наймарку[1)] удалось построить теорию, в которой роль экспонент играли неприводимые бесконечномерные унитарные представления группы Лоренца, и в то же время сохранялись все основные черты классического интеграла Фурье. Ее высшей точкой были аналоги формулы обращения и формулы Планшереля для интеграла Фурье.

Как выяснилось позже, основной момент в доказательстве этих формул состоял в восстановлении функции в $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым, пересекающим гиперболу. Таким образом, рассматривался комплексный вариант преобразования Йона, но для восстановления функции использовались интегралы не по всем комплексным прямым (4-параметрическое семейство), а лишь по прямым из 3-параметрического семейства прямых, пересекающих гиперболу. Такая постановка задачи естественна, поскольку восстанавливалась функция от 3 переменных. Сам же аналог преобразования Фурье на группе Лоренца связан с указанным преобразованием интегральной геометрии при помощи обычного одномерного преобразования Фурье.

Это наблюдение открыло новые возможности для интегральной геометрии. Прежде всего возник вопрос, насколько общим является феномен, подмеченный в случае группы Лоренца. Оказалось, что для широкого класса однородных пространств, включающего комплексные полупростые группы Ли и римановы симметрические пространства, существует преобразование интегральной геометрии — орисферическое преобразование, связанное с аналогом преобразования Фурье для этих однородных пространств при помощи обычного преобразования Фурье. Эта связь аналогична связи между преобразованием Радона и классическим n-мерным преобразованием Фурье при помощи одномерного преобразования Фурье. С другой стороны, контекст интегральной геометрии оказался значительно более широким

[1)] Гельфанд И.М., Наймарк М.А. Унитарные представления группы Лоренца. — Известия АН СССР. —1947. — № 11. — С. 411–504. — (Сер. матем.).

по сравнению с теорией представлений. Например, вместо семейства прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих гиперболу, можно рассмотреть семейство прямых, пересекающих любую другую алгебраическую кривую, и получить аналогичную явную формулу обращения, хотя никаких связей с группами или однородными пространствами здесь уже не будет. Это наводит на мысль, что по-видимому естественная общность для многомерного гармонического анализа это не только группы или однородные пространства, но и какие-то более общие геометрические структуры, в частности, "хорошие" многообразия подмногообразий, для которых существуют явные формулы обращения.

Стало естественным развивать методы геометрического анализа, ориентированные на интегральную геометрию и позволяющие, в частности, построить гармонический анализ на широком классе однородных пространств, включающем симметрические пространства. Этот ориентир стал главным для дальнейшего развития интегральной геометрии. За последующие годы многое в этом направлении уже удалось сделать, но многое еще остается неясным. Довольно полная картина имеется в задаче о "хороших" (допустимых) семействах комплексных кривых, для которых существует явная локальная формула обращения. Однако значительно менее полны результаты о семействах комплексных подмногообразий размерности бóльшей 1 (хотя и того, что известно, достаточно, чтобы получить формулу Планшереля на комплексных полупростых группах Ли средствами интегральной геометрии). Много нерешенных проблем остается в вещественном случае; это в особенности построение нелокальных формул обращения и выяснение связи дискретных серий представлений с интегральной геометрией.

С другой стороны, обнаружились интересные и глубокие связи интегральной геометрии с многомерным комплексным анализом, симплектической геометрией, нелинейными дифференциальными уравнениями, точно интегрируемыми методами обратной задачи. Заметим также, что имеются и прикладные аспекты интегральной геометрии. Обращение преобразования Радона лежит в основе компьютерной томографии. Имеются и другие физические задачи (в астрофизике, геофизике, электронной микроскопии и т.д.), в которых данные могут быть интерпретированы как преобразование Радона.

Эта книга преследует очень скромные цели. Мы хотим на примере самых элементарных задач показать некоторые идеи и конструкции в интегральной геометрии. Мы надеемся, что основная часть материала будет доступна студентам, которые смогут увидеть на этих примерах, как взаимодействие элементарного анализа и геометрии приводит к красивым и важным результатам. Четыре главы этой книги посвящены четырем преобразованиям. Мы начинаем с преобразования Радона (глава I). Существенный момент, который часто игнорируется, здесь состоит в том, что преобразование Радона имеет проективную природу и что в проективной версии оно включает в себя не только аффинное преобразование Радона, но и преобразование Минковского—Функа на сфере. В главе II исследуется преобразование Йона (лучевое преобразование). Как мы уже отмечали, задача обращения для него переопределена, поэтому важно понять, как ее поставить и как описать некоторый класс формул обращения для подходящих трехпараметрических семейств прямых. Эта задача решается здесь в комплексном случае. В главе III излагается интегральная геометрия на 2-мерном и 3-мерном пространствах Лобачевского. Ненулевая кривизна этих пространств приводит к большему разнообразию задач. В частности, имеются две версии преобразования Радона: геодезическая и орисферическая. Однако формулы обращения похожи на евклидовские, и их вывод лишь ненамного сложнее. Вообще для интегральной геометрии типично, что явные формулы обращения имеют некоторую стандартную структуру и мало меняются при усложнении геометрии (в отличие от формул в теории представлений групп). На это есть серьезные причины, которые во многом поняты, но их обсуждение выходит за рамки нашей книги. Мы рассматриваем также аналог преобразования Фурье в пространстве Лобачевского; результаты для него получаются на основе орисферического преобразования Радона. Наконец в главе IV развивается интегральная геометрия на группе $SL(2,\mathbb{C})$, которая, как мы упоминали выше, была стартовым примером для современного развития интегральной геометрии.

Ввиду элементарной природы книги мы не приводим подробную библиографию по интегральной геометрии и ограничиваемся подстрочными ссылками на публикации, которые упоминаются по ходу изложения.

Авторы выражают глубокую благодарность М. М. Граеву (младшему) за помощь при оформлении рукописи и ряд полезных замечаний.

ГЛАВА I

Преобразование Радона

§ 1. Преобразование Радона на плоскости

1.1. Преобразование Радона на евклидовой плоскости. Преобразованием Радона на евклидовой плоскости называется интегральное преобразование, относящее функции f на плоскости ее интегралы по всевозможным прямым (относительно евклидовой длины).

Запишем преобразование Радона явной формулой. Будем задавать прямые на плоскости уравнениями

$$x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi - p = 0$$

или параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= -t \sin\varphi + p \cos\varphi, \\ x_2 &= t \cos\varphi + p \sin\varphi; \end{aligned}$$

евклидова мера на такой прямой равна dt. Тем самым мы ввели параметры (φ, p) на многообразии прямых, причем очевидно, что параметрам (φ, p) и (φ', p') отвечает одна и та же прямая тогда и только тогда, когда $\varphi' = \varphi + \pi k$, $p' = (-1)^k p$, $k \in \mathbb{Z}$. Эта параметризация показывает, что многообразие прямых на плоскости получается из бесконечного кругового цилиндра с цилиндрическими координатами (φ, p) отождествлением точек (φ, p) и $(\varphi + \pi, -p)$.

Преобразование Радона функции $f(x_1, x_2)$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R} f(\varphi, p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-t \sin\varphi + p \cos\varphi, t \cos\varphi + p \sin\varphi)\, dt. \tag{1.1}$$

Интеграл зависит от параметров φ и p; однако, так как $\mathcal{R}f(\varphi+\pi,-p) = \mathcal{R}f(\varphi,p)$, функция $\mathcal{R}f$ опускается на многообразие прямых.

Преобразование Радона можно рассматривать на различных функциональных пространствах. Сначала для простоты мы рассмотрим его на пространстве $D(\mathbb{R}^2)$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. В этом случае преобразование Радона $\mathcal{R}f$ есть финитная бесконечно дифференцируемая функция на многообразии прямых, т.е. бесконечно дифференцируемая функция от φ и p, финитная по p. В дальнейшем мы рассмотрим его и на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^2)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$, убывающих при $r \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой отрицательной степени r.

Замечание. Часто (1.1) записывают в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(\varphi,p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,\delta(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi - p)\,dx_1\,dx_2 = \\ &= \langle \delta(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi - p), f(x_1,x_2)\rangle,\end{aligned}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака от одного переменного. Здесь следует придать смысл $\delta(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi - p)$ как обобщенной функции двух переменных x_1 и x_2. Для этого мы переходим на плоскости к новым координатам u, v, где $u = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi - p$, и применяем обобщенную функцию $\delta(u)$ при фиксированном v. Непосредственно проверяется, что результат не зависит от выбора второй координаты v.

1.2. Формула обращения. Поставим задачу: восстановить функцию $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}f$. Формула обращения впервые была получена Радоном (см. сноску в Предисловии), и мы по существу воспроизводим его рассуждение. Оно основывается на том, что преобразование Радона перестановочно с движениями евклидовой плоскости. Отсюда, во-первых, следует, что достаточно научиться восстанавливать функцию f в какой-либо одной точке, например, в точке $(0,0)$, и, во-вторых, можно ограничиться радиально симметричными функциями.

Перейдем к вычислениям. Итак, мы имеем функцию $f(x_1,x_2) = F(r)$, зависящую только от расстояния $r = ({x_1}^2 + {x_2}^2)^{1/2}$ до точки $(0,0)$. Нужно восстановить $f(0,0) = F(0)$ по $\mathcal{R}f(\varphi,p)$. Из перестановочности преобразования Радона с поворотами следует, что $\mathcal{R}f$ зависит только от p: $\mathcal{R}f(\varphi,p) = \widehat{F}(p)$. В результате задача редуцируется к задаче об обращении некоторого интегрального преобразования $F \mapsto \widehat{F}$ для функций от одного переменного.

Из (1.1) непосредственно получаем:

$$\widehat{F}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{t^2 + p^2})\,dt\,,$$

т.е.

$$\widehat{F}(p) = 2\int\limits_{|p|}^{\infty} \frac{F(r)}{\sqrt{r^2 - p^2}}\,r\,dr = \int\limits_{p^2}^{\infty} \frac{F(\sqrt{t})}{\sqrt{t - p^2}}\,dt. \tag{1.2}$$

Тем самым преобразование от F к $\widehat{F}$ сводится к преобразованию Абеля (интегрирование порядка $1/2$). Как известно (это легко проверить непосредственно), из (1.2) следует, что

$$F(r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r}^{\infty} \frac{\widehat{F}'(p)}{\sqrt{p^2 - r^2}}\,dp\,. \tag{1.3}$$

В частности,

$$F(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\widehat{F}'(p)}{p}\,dp\,. \tag{1.4}$$

Заметим, что $\widehat{F}(p)$ — четная функция. Поэтому, ввиду гладкости $\widehat{F}(p)$, под интегралом стоит регулярная функция и, значит, интеграл существует.

Перейдем от формулы (1.4) к формуле обращения для произвольной функции f. Усреднив f по окружности с центром в точке 0, мы получим функцию, зависящую только от расстояния r до точки $(0,0)$:

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Заметим, что $F(0) = f(0,0)$. Пусть $\widehat{F}$ — преобразование Радона функции F. Ввиду перестановочности преобразования Радона с вращениями имеем:

$$\widehat{F}(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \mathcal{R}f(\varphi, p)\,d\varphi,$$

т.е. $\widehat{F}$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по прямым, равноотстоящим от точки $(0,0)$. На основании формулы (1.4) получаем:

$$f(0,0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\widehat{F}'(p)}{p}\,dp.$$

Отсюда, пользуясь перестановочностью преобразования Радона со сдвигами, получаем:

Теорема 1.1. *Если $\mathcal{R}f$ — преобразование Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, то имеет место следующая формула обращения:*

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\widehat{F}'_p(x_1, x_2; p)}{p}\,dp, \tag{1.5}$$

где

$$\widehat{F}(x_1, x_2, p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{R}f(\varphi, p + x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)\,d\varphi, \tag{1.6}$$

т.е. $\widehat{F}$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по прямым, равноотстоящим от точки $x = (x_1, x_2)$.

Интегрированием по частям формула (1.5) приводится к следующему виду:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\widehat{F}_p(x_1, x_2; p) - \widehat{F}_p(x_1, x_2; 0)}{p^2}\,dp. \tag{1.7}$$

Напомним, что $\widehat{F}$ — четная бесконечно дифференцируемая функция от p.

Для обращения преобразования Радона мы воспользовались формулой (1.3) лишь при $r = 0$. При $r > 0$ эта формула содержит дополнительную информацию о связи усреднений функции f и ее преобразования Радона $\mathcal{R}f$, а именно:

Теорема 1.2. *Справедливо следующее соотношение (соотношение Асгейрссона):*

$$F(x_1, x_2; r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\widehat{F}'_p(x_1, x_2; p)}{\sqrt{p^2 - r^2}}\,dp, \tag{1.8}$$

где F — среднее функции f по окружностям с центром в точке (x_1, x_2), т.е.

$$F(x_1, x_2; r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\varphi, x_2 + r\sin\varphi)\, d\varphi\,, \tag{1.9}$$

а $\widehat{F}$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по прямым, равноотстоящим от точки (x_1, x_2) (формула(1.6)). Имеем также:

$$\widehat{F}(x_1, x_2; p) = 2 \int_{|p|}^{\infty} \frac{F(x_1, x_2; r)}{\sqrt{r^2 - p^2}}\, r\, dr\,. \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) и (1.8) получаются соответственно из (1.2) и (1.3) при помощи сдвига.

Следствие. *Для любых $x = (x_1, x_2)$ и $a > 0$ условия $F(x, r) = 0$ при $r > a$ и $\widehat{F}(x, p) = 0$ при $|p| > a$ эквивалентны.*

1.3. Замечания. 1^0. В формуле обращения требование бесконечной дифференцируемости функции f можно существенно ослабить. Очевидно, достаточно, чтобы функция $\mathcal{R}f$ была дважды дифференцируемой по p, а для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы функция f была дважды дифференцируема. Более того, достаточно, чтобы функция f принадлежала пространству C^1 дифференцируемых функций с непрерывными первыми частными производными, поскольку преобразование Радона радиально симметричных функций является сглаживающим в нуле: если $F \in C^1$, то $\widehat{F}'(p) = O(p)$ при $p \to 0$. Это следует из равенства:

$$\widehat{F}'(p) = 2p \int_p^{\infty} \frac{F'(r)}{\sqrt{r^2 - p^2}}\, dr = p \int_0^{\infty} \frac{F'(\sqrt{s + p^2})}{\sqrt{s}\,\sqrt{s + p^2}}\, ds\,.$$

В последнее время проявляется интерес к преобразованию Радона в связи с задачами томографии. Для этих задач важно рассматривать преобразование Радона не только на гладких функциях, но и на кусочно гладких, у которых линии разрыва — кусочно гладкие кривые (например, на характеристических функциях области). Для таких функций формула обращения хорошо работает в точках гладкости, поскольку преобразование Радона является гладкой функцией в окрестности прямых, проходящих через эти точки. В окрестности же точек разрыва формула обращения плохо приспособлена для восстановления функции. Для преодоления этих трудностей используются специальные регуляризационные процедуры. Разработка вычислительных методов, опирающаяся на формулу обращения, требует преодоления ряда дополнительных трудностей.

2^0. Для справедливости формулы обращения нет необходимости требовать финитности функции f. Достаточно быстрого убывания f и даже более слабого условия: $f = O((1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1})$. В частности, формула обращения справедлива для функций f из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Напомним, что $S(\mathbb{R}^2)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$, убывающих при $r \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени r.

3^0. Для функций из C^1 можно в формуле обращения переставить усреднение $\mathcal{R}f = \widehat{F}(x_1, x_2; p)$ и интегрирование по p и представить формулу обращения в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{R}f)'_p(\varphi, p + x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)\, p^{-1}\, dp\, d\varphi. \tag{1.11}$$

Здесь интеграл по p нужно понимать в смысле главного значения.

1.4. Преобразование Радона на аффинной плоскости. Для определения преобразования Радона на плоскости на самом деле не требуется евклидова структура, а вполне достаточно аффинной структуры. Будем задавать прямые уравнениями

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$$

и зададим на каждой прямой $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$ меру $d\mu_\xi$ такую, что $dx_1\, dx_2 = d(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p)\, d\mu_\xi$. Эта мера в координатах x_1, x_2 имеет вид:

$$d\mu_\xi = \frac{dx_1}{|\xi_2|} = \frac{dx_2}{|\xi_1|}.$$

Определим преобразование Радона функции f на аффинной плоскости равенством:

$$\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p) = \int\limits_{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = p} f(x_1, x_2)\, d\mu_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x_1, \frac{p - \xi_1 x_1}{\xi_2}\Big) \frac{dx_1}{|\xi_2|}. \tag{1.12}$$

Полученная функция $\mathcal{R}f$ удовлетворяет условию:

$$\mathcal{R}f(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2; \lambda p) = |\lambda|^{-1}\, \mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p). \tag{1.13}$$

Таким образом, она зависит не только от прямой $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$, но и от выбора параметров ξ_1, ξ_2, p.

При $(\xi_1,\xi_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ функция $\mathcal{R} f$ совпадает с определенной в евклидовом случае функцией $\mathcal{R} f(\varphi,p)$.

Выражение для $\mathcal{R} f$ часто пишут в виде:

$$\mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2; p) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p)\,dx_1\,dx_2,$$

где определение $\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p)$ аналогично приведенному в п. 1.1.

Теорема 1.3. *Формула обращения для преобразования Радона* (1.12) *имеет следующий вид*:

$$f(x_1,x_2) = \\ = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma}\Bigl(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{R} f)'_p(\xi_1,\xi_2,p+\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)\,p^{-1}\,dp\Bigr)(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1), \tag{1.14}$$

где Γ — *произвольный контур в* $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, *пересекающий в одной точке почти каждый луч, выходящий из точки* 0.

Справедливость этой формулы следует из двух простых фактов.

1) Дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла, опускается на многообразие S лучей, выходящих из точки 0, т.е. на базу расслоения $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \to S$. Это следует из того, что она имеет степень однородности 0 по ξ и равна нулю на векторах, касательных к слоям расслоения $\bigl((d\xi_1, d\xi_2) = (\xi_1, \xi_2)\,d\lambda\bigr)$.

2) Если в качестве Γ взята единичная окружность с центром в точке 0, то формула (1.14) совпадает с уже доказанной формулой (1.11).

1.5. Связь с преобразованием Фурье и другой вывод формулы обращения. Пусть $\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2)$ — преобразование Фурье функции $f(x_1,x_2)$, т.е.

$$\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,e^{i(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)}\,dx_1\,dx_2. \tag{1.15}$$

Чтобы установить связь между преобразованием Фурье $\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2)$ и преобразованием Радона $\mathcal{R} f(\xi_1,\xi_2;p)$ функции f, представим интеграл

(1.15) при $(\xi_1,\xi_2) \neq 0$ как повторный, где интегрирование ведется сначала по прямым $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = p$, а затем по p:

$$\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{\xi_1 x_1+\xi_2 x_2=p} f(x_1,x_2)\, d\mu_\xi \Big) e^{ip}\, dp.$$

Таким образом, имеем:

Теорема 1.4. *Преобразование Радона $\mathcal{R} f$ и преобразование Фурье $\mathcal{F}$ функции f связаны следующим соотношением:*

$$\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi_1,\xi_2;p)\, e^{ip}\, dp \quad \big((\xi_1,\xi_2) \neq 0\big). \tag{1.16}$$

Пользуясь однородностью функции $\mathcal{R} f$, можно переписать эту формулу так:

$$\mathcal{F}(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi_1,\xi_2;p)\, e^{i\lambda p}\, dp. \tag{1.17}$$

Итак, двумерное преобразование Фурье является композицией преобразования Радона на плоскости и одномерного преобразования Фурье.

Приведем теперь другой вывод формулы обращения для преобразования Радона, основанный на формуле обращения для преобразования Фурье:

$$f(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F} f(\xi_1, \xi_2)\, e^{-i(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)}\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= (4\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \mathcal{F} f(\lambda\cos\varphi, \lambda\sin\varphi)\, e^{-i\lambda(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)}\, |\lambda|\, d\varphi\, d\lambda\,.$$

Подставив в эту формулу выражение (1.17) функции $\mathcal{F}f(\lambda\cos\varphi, \lambda\sin\varphi)$ через преобразование Радона $\mathcal{R}f(\cos\varphi, \sin\varphi; p) = \mathcal{R}f(\varphi; p)$, получаем:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(\varphi, p)\,e^{i\lambda(p - x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi)}\,|\lambda|\,dp\,d\varphi\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{F}(x_1, x_2, p)\,e^{i\lambda p}\,|\lambda|\,dp\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{F}'_p(x_1, x_2, p)\,e^{i\lambda p}\,\mathrm{sign}\,\lambda\,dp\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{F}'_p(x_1, x_2, p)\,p^{-1}\,dp.$$

Здесь $\widehat{F}$ задается формулой (1.6). На последнем шаге мы воспользовались фактом: преобразование Фурье обобщенной функции $\mathrm{sign}\,\lambda \in S'(\mathbb{R})$ есть обобщенная функция $2ip^{-1}$, т.е. если $\psi \in S(\mathbb{R})$ и $\widetilde{\psi}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(p)e^{i\lambda p}\,dp$, то имеет место равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\psi}\,\mathrm{sign}\,\lambda\,d\lambda = \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(p)\,p^{-1}\,dp.$$ [1)]

, Интеграл справа, вообще говоря, понимается в смысле главного значения, но, если ψ — гладкая нечетная функция, то он сходится в обычном смысле. В результате мы получили формулу обращения (1.5).

Замечание. Заметим, что при преобразовании Радона оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на функциях $f(x_1, x_2)$ переходит в оператор $\frac{\partial^2}{\partial p^2}$ на функциях $\mathcal{R}f(\varphi; p)$. Более общо, если имеется обобщенная функция $K(r^2)$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, то $K(\Delta)f \overset{\text{def}}{=} K(-r^2) * f$ переходит в свертку $K(-p^2) * \mathcal{R}f$ (свертка по p). Этими соображениями можно воспользоваться для обращения преобразования Радона негладкой функции.

Если мы имеем финитную обобщенную, в частности, негладкую функцию f, то мы можем представить ее в виде $f = (1 - \Delta)^k\varphi$, где

[1)] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз. 1959.

φ — гладкая функция, а k — натуральное число. Преобразование Радона функции f можно определить как свертку: $K(1+p^2)^k * \mathcal{R}\varphi$. На финитных непрерывных функциях это определение согласуется с уже имеющимся. Если теперь f — негладкая функция, то, беря свертку $\mathcal{R}f$ с $(1+p^2)^{-k}$, мы получаем гладкую функцию $\mathcal{R}\varphi$. Применяя к $\mathcal{R}\varphi$ формулу обращения для преобразования Радона, находим функцию φ. Применяя, наконец, к φ дифференциальный оператор $(1-\Delta)^k$, получаем искомую функцию f.

§ 2. Преобразование Радона в трехмерном пространстве

2.1. Преобразование Радона в евклидовом пространстве. Преобразованием Радона в трехмерном евклидовом пространстве называется интегральное преобразование, относящее функции на этом пространстве ее интегралы по всевозможным плоскостям (относительно евклидовой площади). Все рассмотрения проводятся здесь по той же схеме, что и для преобразования Радона на плоскости.

Зададим преобразование Радона явной формулой. Будем каждую плоскость задавать уравнением

$$\langle \omega, x\rangle - p = 0, \quad \text{где} \quad |\omega| = 1$$

($\langle \omega, x\rangle = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3$), или, по-другому, параметрическими уравнениями

$$x = t_1\alpha^1 + t_2\alpha^2 + p\omega\,,$$

где α^1, α^2 — пара единичных взаимно ортогональных векторов, т.е. $\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle = \langle \omega, \alpha^1\rangle = \langle \omega, \alpha^2\rangle = 0$; евклидова мера на такой плоскости равна $dt_1\,dt_2$. Тем самым, каждая плоскость задается парой (ω, p), где ω — точка единичной сферы, а p — число, причем, очевидно, двум различным парам (ω, p), (ω', p') отвечает одна и та же плоскость тогда и только тогда, когда $(\omega', p') = -(\omega, p)$.

Преобразование Радона функции $f(x)$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R}f(\omega, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t_1\alpha^1 + t_2\alpha^2 + p\omega)\,dt_1\,dt_2\,, \tag{2.1}$$

где α^1, α^2 — любые единичные векторы такие, что $\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle = {}$ $= \langle \omega, \alpha^1\rangle = \langle \omega, \alpha^2\rangle = 0$ (от их выбора интеграл не зависит). Так как $\mathcal{R}f(-\omega, -p) = \mathcal{R}f(\omega, p)$, функция $\mathcal{R}f$ опускается на многообразие плоскостей.

Как и в двумерном случае, (2.1) часто записывают в виде

$$\mathcal{R} f(\omega,p) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,\delta(\langle\omega, x\rangle - p)\,dx \qquad (dx = dx_1\,dx_2\,dx_3),$$

где $\delta(\cdot)$-функция на $\mathbb{R}$.

Для простоты мы будем рассматривать преобразование Радона на функциях $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. В этом случае функции $\mathcal{R}f$ — финитные бесконечно дифференцируемые функции на многообразии плоскостей, т.е. они бесконечно дифференцируемы как функции от ω и p и финитны по p.

Найдем формулу обращения для преобразования Радона в трехмерном евклидовом пространстве. Сначала рассмотрим функцию $f(x) = F(r)$, зависящую только от $r = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{1/2}$. Ее преобразование Радона не зависит от ω : $\mathcal{R} f(\omega,p) = \widehat{F}(p)$. На основании (2.1) имеем:

$$\widehat{F}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} F\left(\sqrt{{t_1}^2 + {t_2}^2 + p^2}\right) dt_1\,dt_2 = 2\pi \int\limits_{|p|}^{\infty} F(r)\,r\,dr. \tag{2.2}$$

Итак, в отличие от двумерного случая, где мы имели интеграл порядка $1/2$, здесь получился просто оператор интегрирования. Поэтому обратный оператор есть оператор дифференцирования, и мы получаем:

$$F(r) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\widehat{F}'(r)}{r}. \tag{2.3}$$

В частности,

$$f(0) = F(0) = -\frac{1}{2\pi}\,\widehat{F}''(0). \tag{2.4}$$

Чтобы получить формулу обращения для произвольной функции f, мы, как и в двумерном случае, используем перестановочность преобразования Радона с движениями евклидова пространства. Введем среднее функции f по сферам с центром в фиксированной точке x:

$$F(x;r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\omega|=1} f(x + r\omega)\,d\omega, \tag{2.5}$$

где $d\omega$ — элемент площади поверхности единичной сферы. Пусть далее $\widehat{F}(x;p)$ — среднее функции $\mathcal{R}f$ по плоскостям, равноотстоящим от точки x, т.е.

$$\widehat{F}(x;p) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|\omega|=1} \mathcal{R} f(\omega, p + \langle\omega, x\rangle)\,d\omega. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.4) и из перестановочности преобразования Радона с движениями евклидова пространства получаем:

$$f(x) = F(x,0) = -\frac{1}{2\pi}\widehat{F}_p''(\omega;0).$$

Итак, доказано:

Теорема 2.1. *Формула обращения для преобразования Радона в трехмерном евклидовом пространстве имеет следующий вид:*

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^3}\int\limits_{|\omega|=1} (\mathcal{R}f)_p''(\omega;\langle\omega,x\rangle)\,d\omega. \tag{2.7}$$

Мы видим, что трехмерный случай принципиально отличается от двумерного. Здесь, в отличие от двумерного случая, формула обращения локальна. Это означает, что для восстановления функции f в точке x нужно знать ее интегралы только по плоскостям близким к x (фактически из инфинитезимальной окрестности множества плоскостей, проходящих через x).

Одновременно мы получили следующие соотношения между усреднениями F и $\widehat{F}$ соответственно функций f и $\mathcal{R}f$:

$$\widehat{F}(x;p) = 2\pi\int\limits_{|p|}^{\infty} F(x,r)\,r\,dr, \tag{2.8}$$

$$F(r) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\widehat{F}_r'(x;r)}{r}. \tag{2.9}$$

(Эти равенства получаются из (2.2) и (2.3) сдвигом.)

Преобразование Радона функции f связано с ее преобразованием Фурье $\mathcal{F}f$ следующим равенством:

$$\mathcal{F}f(\lambda\omega) = (2\pi)^{-3/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}f(\omega,p)\,e^{i\lambda p}\,dp \qquad (|\omega|=1). \tag{2.10}$$

Исходя из этого равенства и из формулы обращения для преобразования Фурье можно получить другой вывод формулы обращения для преобразования Радона:

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F} f(\xi)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\lambda\omega)\, e^{-i\lambda\langle\omega, x\rangle}\, \lambda^2\, d\omega\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\omega, p)\, e^{i\lambda(p - \langle\omega, x\rangle)}\, \lambda^2\, dp\, d\omega\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(x, p)\, e^{i\lambda p}\, \lambda^2\, dp\, d\lambda \quad = \quad -\frac{1}{2\pi} \widehat{F}''_p(x, 0).$$

Сравнив этот вывод с аналогичным выводом для плоскости (п. 1.5), замечаем, что различие между формулами обращения для плоскости и для пространства возникает из-за различия выражений для элементов объема в полярных координатах: $|\lambda|\, d\lambda\, d\omega$ для плоскости и $\lambda^2\, d\lambda\, d\omega$ для пространства.

Замечание. В двумерном случае функция f восстанавливается по $\mathcal{R} f$ с помощью нелокальной формулы. Однако функция $\sqrt{\Delta}\, f$, где Δ — оператор Лапласа, восстанавливается по $\mathcal{R} f$ локальной формулой обращения:

$$\sqrt{\Delta}\, f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\mathcal{R} f)''_p(\varphi, x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Поскольку $\sqrt{\Delta}$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор, функция $\sqrt{\Delta}\, f$ имеет те же особенности, что и f. Этим обстоятельством пользуются иногда в томографии для определения особенностей функции $\mathcal{R} f$, исходя из ее преобразования Радона $\mathcal{R} f$.

2.2. Преобразование Радона в аффинном пространстве. Как и в двумерном случае, для определения преобразования Радона в трехмерном пространстве на самом деле не требуется евклидова структура, а вполне достаточно аффинной структуры. Будем задавать плоскости уравнениями

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p = 0$$

и зададим на каждой плоскости $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p = 0$ меру $d\mu_\xi$ такую, что $dx_1\, dx_2 = d(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p)\, d\mu_\xi$. Если в качестве координат на плоскости взята любая пара x_i, x_j, то эта мера в координатах x_i, x_j имеет вид:

$$d\mu_\xi = \frac{dx_i\, dx_j}{|\xi_k|} \quad (k \neq i, j),$$

т.е. она зависит от уравнения, задающего плоскость.

Определим преобразование Радона функции f на аффинном пространстве равенством:

$$\mathcal{R} f(\xi; p) = \mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3; p) = \int\limits_{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = p} f(x)\, d\mu_\xi = \tag{2.11}$$

$$= \int f\Big(x_1, x_2, \frac{p - \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2}{\xi_3}\Big) \frac{dx_1\, dx_2}{|\xi_3|}. \tag{2.12}$$

Как и в двумерном случае, функция $\mathcal{R} f$ удовлетворяет условию:

$$\mathcal{R} f(\lambda\xi; \lambda p) = |\lambda|^{-1} \mathcal{R} f(\xi; p).$$

Таким образом, она зависит не только от плоскости $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p = 0$, но и от выбора параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3, p.

При $|\xi| = 1$ функция $\mathcal{R} f$ совпадает с определенной в евклидовом случае функцией $\mathcal{R} f(\omega, p)$.

Выражение для $\mathcal{R} f$ часто пишут в виде:

$$\mathcal{R} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3; p) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3)\, \delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

где определение $\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - p)$ аналогично приведенному в двумерном случае.

Теорема 2.2. *Формула обращения для аффинного преобразования Радона* (2.12) *имеет следующий вид*:

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\Gamma} (\mathcal{R} f)''_p(\xi; p)|_{p = \langle \xi, x\rangle}\, \omega(\xi), \tag{2.13}$$

где

$$\omega(\xi) = \xi_1\, d\xi_2 \wedge d\xi_3 + \xi_2\, d\xi_3 \wedge d\xi_1 + \xi_3\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

а Γ — *произвольная поверхность в* $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, *пересекающая в одной точке почти каждый луч, выходящий из точки* 0.

Подобно двумерному случаю, формула обращения (2.13) следует из двух простых фактов: 1) интеграл (2.13) не зависит от выбора Г и 2) в случае, когда Г — единичная сфера, (2.13) совпадает с формулой обращения (2.7) для евклидова пространства.

2.3. Преобразование Радона для пространств произвольной размерности. Определение преобразования Радона для $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ можно перенести на пространства любой размерности. Именно, преобразование Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$ задается формулой:

$$\mathcal{R}f(\xi, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle - p)\,dx, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n)' \setminus 0,\ p \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

где $\langle \xi, x\rangle = \sum \xi_i x_i$, $dx = dx_1 \dots dx_n$ и $\delta(p)$ — дельта-функция одного переменного. Определение $\delta(\langle \xi, x\rangle - p)$ аналогично приведенному выше для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Приведем без доказательства формулы обращения для преобразования Радона. Если $\varphi = \mathcal{R}f$, то

$$f(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\,(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{|\omega|=1} \frac{\partial^{n-1}\varphi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}}\Big|_{s=\langle \omega, x\rangle} d\sigma \tag{2.15}$$

при нечетном n, где $d\sigma$ — элемент объема сферы $|\omega| = 1$ в $\mathbb{R}^n$;

$$f(x) = \frac{(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n} \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n-1}\varphi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}}\Big|_{s=\langle \omega, x\rangle + p} p^{-1}\,dp\,d\sigma \tag{2.16}$$

при четном n, где интеграл по p понимается в смысле главного значения. Таким образом, подобно случаям $n = 2$ и $n = 3$, формула обращения локальна при нечетном n и нелокальна при четном n.

Формулы обращения (2.15) и (2.16) можно объединить, воспользовавшись обобщенной функцией $(p - i0)^{-1}$. По определению, она есть предел при $s \to +0$ обобщенной функции $u_s(p) = (p - is)^{-1}$. Известно, что функция $(p - i0)^{-1}$ представима как линейная комбинация обобщенных функций p^{-1} и $\delta(p)$:

$$(p - i0)^{-1} = p^{-1} + i\pi\delta(p). \tag{2.17}$$

Мы имеем при любом n следующую формулу обращения:

$$f(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n-1}\varphi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}} (s - \langle \omega, x\rangle - i0)^{-1}\,ds\,d\sigma. \tag{2.18}$$

В самом деле, из (2.17) следует, что при нечетном n равенство (2.18) совпадает с (2.15), а при четном — с (2.16).

Представим формулу обращения в другой, более удобной форме, перейдя от преобразования Радона $\mathcal{R}$ к "комплексному" преобразованию Радона $\widetilde{\mathcal{R}}$. Именно, определим оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ следующей формулой:

$$\widetilde{\mathcal{R}} f(\xi, p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(\langle \xi, x\rangle - p - i0)^{-1}\,dx. \tag{2.19}$$

Легко убедиться, что функции $\widetilde{\mathcal{R}} f$ и $\mathcal{R} f$ связаны соотношением:

$$\widetilde{\mathcal{R}} f(\xi, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi, s)\,(s - p - i0)^{-1}\,ds.$$

Отсюда и из (2.18) следует формула обращения для "комплексного" преобразования Радона $\widetilde{\mathcal{R}}$: если $\psi = \widetilde{\mathcal{R}} f$, то

$$f(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{|\omega|=1} \frac{\partial^{n-1}\psi(\omega, s)}{\partial s^{n-1}}\bigg|_{s=\langle \omega, x\rangle}\,d\sigma. \tag{2.20}$$

Отметим, что эта формула локальна при любом n.

§ 3. Волновое уравнение и принцип Гюйгенса

Здесь мы покажем, как при помощи преобразования Радона получаются классические формулы для решений волнового уравнения. Вывод основан на методе плоских волн.

3.1. Двумерный случай. Пусть мы имеем двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}.$$

Рассмотрим для него следующую задачу Коши:

$$u(0, x) = 0, \quad u'_t(0, x) = f(x), \tag{3.1}$$

где, для простоты, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Метод плоских волн опирается на то обстоятельство, что если $\varphi(s)$ — любая гладкая функция одного переменного, то функция $\Phi_\omega(t, x) = \varphi(t + \langle \omega, x\rangle)$, где $|\omega| = 1$, является при любом ω решением волнового уравнения (проверяется непосредственно). Такие решения называются плоскими волнами. Метод плоских волн состоит в представлении любого решения волнового уравнения в виде суперпозиции плоских волн.

Перейдем к построению решения задачи Коши (3.1). Рассмотрим следующую функцию:

$$u(t,x)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}\mathcal{R}f(\varphi,p-t+x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)p^{-1}\,d\varphi\,dp, \qquad (3.2)$$

где $\mathcal{R}f(\varphi,p)$ — преобразование Радона функции f. Поскольку функция u получена суперпозицией плоских волн, она является решением волнового уравнения. Убедимся, что u является решением задачи Коши (3.1). В самом деле, при $t=0$ подынтегральная функция в (3.2) меняет знак при замене $(\varphi,p)\mapsto(\varphi+\pi,-p)$; следовательно, $u((0,x)=0$. Далее, имеем:

$$u_t'(0,x)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}(\mathcal{R}f)_p'(\varphi,p+x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)p^{-1}\,d\varphi\,dp = f(x),$$

где последнее равенство следует из формулы (1.11) для преобразования Радона на плоскости.

Мы хотим вернуться в (3.2) от функции $\mathcal{R}f$ к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением (1.10) между средними функций f и $\mathcal{R}f$:

$$\int_0^{2\pi}\mathcal{R}f(\varphi,p+x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)\,d\varphi=$$

$$=2\int_{|p|}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(x_1+r\cos\varphi,x_2+r\sin\varphi)}{\sqrt{r^2-p^2}}r\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\int_{|y|^2>p^2}\frac{f(x+y)}{\sqrt{|y|^2-p^2}}\,dy \qquad (dy=dy_1\,dy_2),$$

где $|y|^2={y_1}^2+{y_2}^2$. Мы получим:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}K(t,y)f(x+y)\,dy,$$

где

$$K(t,y) = \int\limits_{t-|y|}^{t+|y|} \frac{dp}{p\sqrt{|y|^2-(p-t)^2}}$$

(при $t < |y|$ последний интеграл нужно понимать в смысле главного значения). Элементарное вычисление дает: $K(t,y) = 0$ при $t < |y|$, $K(t,y) = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-|y|^2}}$ при $t > |y|$. В результате получаем:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\,dy \tag{3.3}$$

(формула Пуассона).

Мы видим, что решение волнового уравнения в точке x в момент времени t зависит только от начальных данных в круге радиуса t с центром в x. Этот эффект называется эффектом конечной области зависимости для существования переднего фронта волны: сигнал движется со скоростью 1, и за время t он может дойти до x только из точек, находящихся от x на расстоянии не большем, чем 1.

3.2. Трехмерный случай. Теперь найдем решение задачи Коши (3.1) для трехмерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2}, \quad u(0,x) = 0, \quad u'_t(0,x) = f(x). \tag{3.4}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$u(t,x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{|\omega|=1} (\mathcal{R}f)'_p(\omega, t + \langle\omega, x\rangle)\,d\omega, \tag{3.5}$$

где $\mathcal{R}f(\omega,p)$ — преобразование Радона функции $f(x) = f(x_1,x_2,x_3)$. Эта функция, будучи суперпозицией плоских волн, удовлетворяет волновому уравнению. Убедимся, что она является решением задачи Коши (3.4). В самом деле, при $t=0$ подынтегральная функция в (3.5) является нечетной функцией на сфере $|\omega| = 1$; значит, $u(0,x) = 0$. Далее, имеем:

$$u'_t(0,x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{|\omega|=1} (\mathcal{R}f)''_p(\omega, \langle\omega, x\rangle)\,d\omega = f(x),$$

где последнее равенство следует из формулы обращения для преобразования Радона в трехмерном пространстве.

Вернемся в (3.5) от функции $\mathcal{R}f$ к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением (2.9) между средними функций f и $\mathcal{R}f$:

$$\int\limits_{|\omega|=1} f(x+t\omega)\,d\omega = -\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{|\omega|=1} (\mathcal{R}f)'_p(\omega, t+\langle\omega, x\rangle)\,d\omega\,.$$

Мы получим:

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\omega|=1} f(x+t\omega)\,d\omega \tag{3.6}$$

(формула Кирхгофа).

Мы видим, что решение трехмерного волнового уравнения в точке x в момент времени t зависит только от начальных данных в точках, находящихся на расстоянии t от x (принцип Гюйгенса). Таким образом, имеет место не только эффект конечной области зависимости, но и более сильный эффект — выражен задний фронт волны: к моменту времени t сигнал от точек, находящихся от x на расстоянии, меньшем чем t, уже прошел через точку x в предыдущие моменты времени и не сохранился в ней. Это различие между двумерным и трехмерным случаями в точности отвечает тому факту, что формула обращения для преобразования Радона в трехмерном случае локальна, а в двумерном нелокальна.

§ 4. Условия Кавальери и теоремы Пэли — Винера для преобразования Радона

4.1. Условия Кавальери для быстро убывающих функций. Рассмотрим преобразование Радона $\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p)$ (в аффинном варианте) на функциях $f \in S(\mathbb{R}^2)$, см. формулу (1.12). Нас интересует, какой запас функций $\mathcal{R}f$ при этом получается.

Напомним, что функции $\mathcal{R}f$ удовлетворяют условию однородности:

$$\mathcal{R}f(\lambda\xi, \lambda p) = |\lambda|^{-1}\,\mathcal{R}f(\xi, p). \tag{4.1}$$

Далее, они бесконечно дифференцируемы на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ и быстро убывают по p при $p \to \infty$ равномерно по ξ, $|\xi| = 1$, вместе со всеми производными. Возникает вопрос: имеются ли какие-нибудь другие условия на функции $\mathcal{R}f$ из образа $S(\mathbb{R}^2)$?

Заметим прежде всего, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi, p)\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx\,, \tag{4.2}$$

т.е. левая часть не зависит от ξ. Это соотношение тесно связано с классическим принципом Кавальери, позволяющим вычислять площадь плоской фигуры через длины ее пересечений с пучком параллельных прямых любого заданного направления. Именно, если f — характеристическая функция плоской фигуры, то $\mathcal{R} f(\xi, p)$ при $|\xi| = 1$ равно длине пересечения этой фигуры с прямой $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - p = 0$, и тем самым равенство (4.2) выражает площадь плоской фигуры через длины ее пересечений с пучком параллельных прямых. В частности, левая часть равенства не зависит от направления пучка. По этой причине мы будем называть условие независимости от ξ интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi, p)\, dp$, а также некоторые обобщения этого условия условиями Кавальери.

Рассмотрим моменты функции $\mathcal{R} f(\xi, p)$ по p:

$$I_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi, p)\, p^k\, dp, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Подставив сюда выражение $\mathcal{R} f$ через исходную функцию $f(x)$, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi, p)\, p^k\, dp = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) \langle \xi, x \rangle^k\, dx. \tag{4.4}$$

Из равенства (4.4) следуют

Условия Кавальери. *Интеграл $I_k(\xi)$ является однородным многочленом степени k от ξ_1, ξ_2 $(k = 0, 1, 2, \ldots)$* [1].

Дадим интерпретацию интегралов $I_k(\xi)$ на языке преобразования Фурье $\mathcal{F} f$ функции f. Как было показано в §1, функции $\mathcal{F} f(\xi)$ и $\mathcal{R} f(\xi, p)$ связаны соотношением:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(\xi, p)\, e^{i\lambda p}\, dp \qquad (\xi \neq 0).$$

Отсюда следует:

$$I_k(\xi) = 2\pi i^{-k} \left. \frac{\partial^k \mathcal{F} f(\lambda\xi)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0}. \tag{4.5}$$

---

[1] Эти условия (для аффинных пространств произвольной размерности) впервые сформулированы в статье: Гельфанд И.М. и Граев М.И., Интегралы по гиперплоскостям основных и обобщенных функций // Доклады АН СССР. — 1960. — № 6. — С. 1307–1310.

Пусть теперь функция $\mathcal{F} f$ быстро убывает и бесконечно дифференцируема в точке 0 по каждому направлению, т.е. функция $\mathcal{F} f(\lambda\xi)$ бесконечно дифференцируема по λ в точке $\lambda = 0$ при любом $\xi \neq 0$. Покажем, что условия Кавальери эквивалентны условию бесконечной дифференцируемости $\mathcal{F} f(\xi)$ в точке $\xi = 0$.

В самом деле, пусть $\mathcal{F} f(\xi)$ бесконечно дифференцируема в точке $\xi = 0$. Тогда правая часть в (4.5) равна однородной составляющей степени k в разложении $\mathcal{F} f$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\xi = 0$; значит, из (4.5) следуют условия Кавальери. Обратно, пусть функция $\mathcal{F} f$ бесконечно дифференцируема в точке 0 по каждому направлению и выполнены условия Кавальери. Тогда по формуле Тейлора для $\mathcal{F} f(\lambda\xi)$ как функции от λ имеем при любом натуральном n и при $|\xi| = 1$:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^k \mathcal{F} f(\lambda\xi)}{\partial\lambda^k}\Big|_{\lambda=0} + o(|\lambda|^n) =$$

$$= (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k \lambda^k}{k!} I_k(\xi) + o(|\lambda|^n).$$

Так как $I_k(\xi)$ — однородный многочлен степени k от ξ_1, ξ_2, это равенство можно записать в виде:

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} I_k(\xi) + o(|\xi|^n). \tag{4.6}$$

В результате мы получили для $\mathcal{F} f(\xi)$ формулу Тейлора порядка k в точке 0. Отсюда следует, что $\mathcal{F} f(\xi)$ бесконечно дифференцируема по ξ_1, ξ_2 в точке 0.

4.2. Теорема Пэли — Винера для пространства $S(\mathbb{R}^2)$. Утверждения, содержащие описания образов различных функциональных пространств при преобразовании Радона, часто называют теоремами Пэли — Винера для этого преобразования.

Теорема 4.1. *Функция $\varphi(\xi_1, \xi_2; p)$ на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ является преобразованием Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$, если и только если:*

1) *φ удовлетворяет условию однородности* (4.1);

2) *φ бесконечно дифференцируема;*

3) *любая производная функции φ убывает при $|\xi| = 1$ и $p \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|p|$;*

4) *φ удовлетворяет условиям Кавальери.*

Доказательство. Нам нужно доказать только достаточность условий. Пусть функция $\varphi(\xi, p)$ удовлетворяет условиям теоремы. Определим функцию $F(\xi)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ равенством:

$$F(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, p)\, e^{ip}\, dp.$$

Ввиду условия однородности 1), это равенство эквивалентно следующему:

$$F(\lambda\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, p)\, e^{i\lambda p}\, dp.$$

Из условий 2) и 3) следует, что функция F бесконечно дифференцируема во всех точках $\xi \neq 0$, а при $\xi = 0$ она бесконечно дифференцируема по всем направлениям; значит, в силу условий Кавальери, она бесконечно дифференцируема и в точке $\xi = 0$. Далее, из условий 2) и 3) следует, что функция F быстро убывает вместе со всеми производными. Таким образом, $F \in S(\mathbb{R}^2)$, а потому существует функция $f \in S(\mathbb{R}^2)$ такая, что $F = \mathcal{F} f$. Тогда $\varphi(\xi, p)$ совпадает с преобразованием Радона $\mathcal{R} f(\xi, p)$ функции f, поскольку их преобразования Фурье по p равны одной и той же функции $\mathcal{F} f(\lambda\xi)$.

4.3. Теорема Пэли — Винера для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций..

Теорема 4.2. *Функция $\varphi(\xi_1, \xi_2; p)$ на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ является преобразованием Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ в том и только том случае, когда*:

1) *φ удовлетворяет условию однородности* (4.1);
2) *φ бесконечно дифференцируема на $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}$ и финитна по p*;
3) *φ удовлетворяет условиям Кавальери.*

Доказательство. Если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, то очевидно, что преобразование Радона $\mathcal{R} f$ функции f удовлетворяет условиям 1) и 2). Условия Кавальери следуют из того, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \subset S(\mathbb{R}^2)$.

Обратно, пусть функция φ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда φ удовлетворяет и условиям теоремы 4.1, а потому φ является преобразованием Радона некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Остается доказать только финитность функции f. Приведем доказательство финитности f, принадлежащее Хелгасону [1].

[1] Хелгасон С. Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983.

Итак, по условию, φ — финитная функция, т.е. для некоторого $a > 0$

$$\mathcal{R} f(\theta, p) = \mathcal{R} f(\cos\theta, \sin\theta; p) = 0 \quad \text{при} \quad |p| > a. \tag{4.7}$$

Докажем, что

$$F(x, r) \equiv \int_0^{2\pi} \mathcal{R} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta; p)\, d\theta = 0 \quad \text{при } r > |x| + a. \tag{4.8}$$

В самом деле, пусть $\widehat{F}(x, p)$ — среднее функции φ на множестве прямых, отстоящих от точки x на расстояние $|p|$. Из (4.7) следует, что $\widehat{F}(x, p) = 0$ при $|p| > |x| + a$. Но тогда, в силу соотношения Айсгейрссона (п. 1.2), $F(x, r) = 0$ при $r > |x| + a$.

Докажем далее, что если функция f удовлетворяет условию (4.8), то этому же условию удовлетворяют функции $x_i f$, $i = 1, 2$.

В самом деле, из (4.8) следует, что

$$\int_{|y|>r} f(x + y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad r > |x| + a,$$

откуда

$$\int_{|y|>r} f'_{x_i}(x + y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad r > |x| + a, \quad i = 1, 2.$$

Согласно теореме Стокса имеем:

$$\int_{|y|>r} f'_{x_i}(x + y)\, dy = r \int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, \omega_i\, d\theta,$$

где $\omega = (\cos\theta, \sin\theta)$. Значит,

$$\int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, (x + r\omega)_i\, d\theta \equiv x_i \int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, d\theta + \\ + r \int_0^{2\pi} f(x + r\omega)\, \omega_i\, d\theta = 0 \quad \text{при} \quad r > |x| + a,$$

что и требовалось доказать.

В силу доказанного, среднее функции $P(x) f(x)$ по окружности радиуса $r > a$ с центром в точке 0 равно нулю для любого полинома $P(x)$. Следовательно, $f = 0$ на этой окружности, а значит, и во всей области $|x| > a$.

4.4. Обращение преобразования Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ при помощи моментов. Пусть f — финитная функция. Тогда ее преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ – целая функция, и, в силу (4.6), ряд Тэйлора функции $\mathcal{F}f$ задается формулой:

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}I_k(\xi), \tag{4.9}$$

где $I_k(\xi)$ — k-й момент функции $\mathcal{R}f(\xi,p)$ по p, являющийся многочленом k-й степени. Беря от $\mathcal{F}f$ обратное преобразование Фурье, получаем способ восстановить функцию f по моментам I_k.

Итак, для функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ получена формула обращения, использующая только моменты I_k. Эта формула существенно отличается от формулы обращения, полученной в § 1.

Так как моменты I_k являются однородными многочленами, то для восстановления f их достаточно знать на сколь угодно малой дуге окружности $|\xi| = 1$ или даже на бесконечной последовательности точек (общего положения).

Замечание. Заслуживает внимания вопрос, чем отличаются различные формулы обращения. В формуле обращения мы имеем оператор, определенный на пространстве (вообще говоря, более широком, чем образ преобразования Радона) и заданный некоторым (вообще говоря, обобщенным) ядром. Разность операторов для различных формул обращения равна нулю на образе преобразования Радона. Из теоремы Пэли — Винера для пространства $S(\mathbb{R}^2)$ следует, что всякий функционал, равный нулю на образе $S(\mathbb{R}^2)$, получается из условий Кавальери и в существенном формула обращения для $S(\mathbb{R}^2)$ единственна. Образ же $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ состоит из финитных функций, и запас аннулирующих функционалов здесь более богат. Поэтому в случае $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ удается строить формулы обращения, отличные от формулы обращения из § 1. Один вариант такой формулы, использующий моменты, получен в этом пункте, другой вариант см. в п. 5.1.

4.5. Восстановление неизвестных направлений по заданным значениям $\mathcal{R}f$. Здесь мы изложим еще один пример на применение условий Кавальери при обращении преобразования Радона. Если преобразование Радона $\mathcal{R}f(\varphi,p)$ финитной функции f известно для некоторого набора углов φ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, то мы можем приближенно восстановить функцию f.

В электронной микроскопии для рибосом возникает следующая ситуация: известны значения $\mathcal{R}f(\varphi,p)$ для некоторых углов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и всех p, т.е. задано n функций от p, но значения самих углов φ_i неизвестны. Поэтому для восстановления f надо прежде всего восстановить неизвестные углы, более точно, восстановить их с точностью до общего поворота.

А.Б. Гончаров [1)] показал, что, пользуясь финитностью и опираясь на условия Кавальери, эту задачу можно решить — в случае общего положения — при достаточно большом n.

Пусть f — финитная функция, $\mathcal{R}f$ — ее преобразование Радона, $I_k(\varphi)$ — моменты функции $\mathcal{R}f$ $(k = 1,2,\ldots)$. В силу условий Кавальери, I_k является однородным многочленом степени k от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, в частности,

$$\begin{aligned} I_1(\varphi) &= \lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \sin\varphi\,, \\ I_2(\varphi) &= \mu_1 \cos^2\varphi + \mu_2 \cos\varphi \sin\varphi + \mu_3 \sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Заметим, что выражения для I_1 и I_2 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} I_1(\varphi) &= a\cos(\varphi - \alpha)\,, \\ I_2(\varphi) &= b\cos 2(\varphi - \beta) + c. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Все входящие в (4.10) и (4.11) параметры зависят от f.

Предположим, что $I_1(\varphi) \not\equiv 0$ и $I_2(\varphi) \not\equiv 0$, и рассмотрим в плоскости (y_1, y_2) кривую Γ_f, заданную параметрически:

$$y_1 = I_1(\varphi), \quad y_2 = I_2(\varphi).$$

Лемма. Γ_f — *алгебраическая кривая степени* 4.

В самом деле, степень кривой Γ_f определяется как число ее точек в пересечении с прямой общего положения $Ay_1 + By_2 + C = 0$, т.е. число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} A(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) + B(\mu_1 t_1^2 + \mu_2 t_1 t_2 + \mu_3 t_2^2) + C = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 = 1. \end{cases}$$

Подчеркнем, что различным функциям f отвечают различные кривые.

Кривая 4 степени определяется 15 своими точками общего положения (число коэффициентов полинома $P(y_1, y_2)$ четвертой степени). Поэтому, если функции $\mathcal{R}f(\varphi, p)$ известны для 15 значений φ, то известны 15 точек на кривой Γ_f, и мы знаем эту кривую. Если же

[1)] Гончаров А.Б. Трехмерная реконструкция неизвестным образом расположенных в пространстве идентичных частиц по их проекциям: В сб. Математические проблемы томографии / Под ред. И.М. Гельфанда и С.Г. Гиндикина. // Вопросы кибернетики. — М., 1990. — С.99–132.

кривая Γ_f известна, то коэффициенты a, b, c в (4.11) определяются равенствами:

$$a = (y_1)_{\max}, \quad b = \frac{1}{2}((y_2)_{\max} - (y_2)_{\min}), \quad c = \frac{1}{2}((y_2)_{\max} + (y_2)_{\min}).$$

Так как сдвиг параметра φ не меняет кривой Γ_f, то можно считать, что $\varphi_1 = 0$. В результате мы знаем $\cos\alpha$, $\cos 2\beta$ и $\cos(\varphi_i - \alpha)$, $\cos 2(\varphi_i - \beta)$ при $i = 2, 3, \ldots, 15$. Следовательно, как нетрудно убедиться,

если α, β и φ_i находятся в общем положении, то углы $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{15}$ однозначно определяются.

Замечание. Число углов $n = 15$ является избыточным оттого, что получаются не все кривые Γ 4 степени, а лишь кривые Γ_f специального вида. На самом деле хватает 5 углов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ ($\varphi_1 = 0$) по следующей причине. Так как угол φ_1 равен 0, в выражениях (4.10) нам известны коэффициенты λ_1, μ_1. В результате получаем переопределенную систему из $2 \cdot 4 = 8$ уравнений с 7 неизвестными λ_2, μ_2, μ_3 и $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$. Можно показать, что в случае общего положения эта система имеет единственное решение.

Примечание. Результаты этого параграфа непосредственно переносятся на многомерное преобразование Радона.

§ 5. Формула Пуассона для преобразования Радона и дискретное преобразование Радона

5.1. Формула Пуассона для преобразования Радона на плоскости. Наряду с интегралом Фурье существует его дискретный аналог — ряд Фурье. Мы увидим в этом параграфе, что существует и дискретный аналог преобразования Радона, который так же связан с рядом Фурье, как преобразование Радона с преобразованием Фурье.

Напомним, что ряд Фурье можно получить из формулы Пуассона для интеграла Фурье. Именно, пусть f — гладкая финитная функция на $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ — ее преобразование Фурье. Тогда, согласно формуле Пуассона,

$$\sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{+\infty} f(x_1 + k_1, x_2 + k_2) = 2\pi \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi k_1, 2\pi k_2)\, e^{-2\pi i\,(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \tag{5.1}$$

(оба ряда абсолютно сходятся). Если функция f сосредоточена в квадрате $0 < x_1, x_2 < 1,$, то для точек (x_1, x_2) этого квадрата в левой части отличен от нуля только член с $(k_1, k_2) = (0, 0)$ и мы получаем представление функции f рядом Фурье:

$$f(x_1, x_2) = 2\pi \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi k_1, 2\pi k_2)\, e^{-2\pi i\,(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \tag{5.2}$$

Итак, функцию, сосредоточенную в квадрате, можно представить как интегралом так и рядом Фурье.

Приведем аналог формулы Пуассона для преобразования Радона. Введем подмножество A точек $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что либо $k_1 > 0$ и числа k_1, k_2 взаимно просты, либо $(k_1, k_2) = (0, 1)$.

Теорема 5.1. *Пусть f — гладкая финитная функция на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p)$ — ее преобразование Радона. Тогда*

$$\sum_{k_1, k_2=-\infty}^{+\infty} f(x_1 + k_1, x_2 + k_2) = I(\mathcal{R}f) +$$

$$+ \sum_{((k_1, k_2)\in A} \Bigl(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(k_1, k_2; k_1 x_1 + k_2 x_2 + m) - I(\mathcal{R}f) \Bigr), \tag{5.3}$$

где

$$I(\mathcal{R}f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p)\, dp. \tag{5.4}$$

Доказательство. Напомним, что преобразование Радона получается композицией двумерного и одномерного преобразований Фурье, а именно

$$\mathcal{R}f(\xi_1, \xi_2; p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(\lambda\xi)\, e^{-i\lambda p}\, d\lambda, \tag{5.5}$$

где $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции f. Поэтому (5.3) можно получить, комбинируя формулы Пуассона для двумерного и одномерного преобразования Фурье. Предварительно заметим, что любую ненулевую точку из $\mathbb{Z}^2$ можно представить в виде $m(k_1, k_2)$, где $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$, $(k_1, k_2) \in A$. Тем самым, формула Пуассона (5.1) может быть записана так:

$$\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty} f(x_1+k_1, x_2+k_2) = 2\pi\Big\{\mathcal{F}f(0) +$$
$$+ \sum_{((k_1,k_2)\in A}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi m k_1, 2\pi m k_2)\, e^{-2\pi i m (k_1x_1+k_2x_2)} - \mathcal{F}f(0)\Big)\Big\}. \tag{5.6}$$

Из (5.5) на основании формулы Пуассона для одномерного преобразования Фурье получаем:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi; p+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi m\xi)\, e^{-2\pi i m p}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi m k_1, 2\pi m k_2)\, e^{-2\pi i m (k_1x_1+k_2x_2)} &= \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(k_1,k_2; k_1x_1+k_2x_2+m). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Так как, кроме того,

$$\mathcal{F}f(0) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\xi,p)\,dp$$

для любого ξ, то из (5.6) и (5.7) следует равенство (5.3).

Следствие. *Если функция f сосредоточена в квадрате $0 < x_1, x_2 < 1$, то для любой точки (x_1, x_2) этого квадрата имеем:*

$$f(x_1,x_2) = I(\mathcal{R}f) + \sum_{(k_1,k_2)\in A}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2+m) - I(\mathcal{R}f)\Big), \tag{5.8}$$

где ряд справа сходится абсолютно.

Тем самым, мы получили для гладкой функции f, сосредоточенной в квадрате, еще одну формулу обращения. При этом в случае, когда $I(\mathcal{R} f) = 0$, функция f восстанавливается в точке x, если известны ее интегралы только по прямым с рациональными угловыми коэффициентами, проходящим через x, и их параллельным сдвигам, отвечающим целочисленным Δp. Заметим, что параллельные прямые $k_1 x_1 + k_2 x_2 = p$ и $k_1 x_1 + k_2 x_2 = p+1$ находятся (относительно обычной евклидовой метрики) на расстоянии $({k_1}^2+{k_2}^2)^{-1/2}$. Наличие интегралов по сдвинутым прямым отражает нелокальность формулы обращения.

Примечание. Формула (5.8) может быть использована для численного обращения преобразования Радона не только гладких функций.

5.2. Дискретное преобразование Радона; связь с рядами Фурье[1]**.** Пусть f — функция, сосредоточенная в квадрате $0 < x_1, x_2 < 1$, $\mathcal{R} f$ — ее преобразование Радона. Отправляясь от формулы (5.8), естественно, по аналогии с рядами Фурье , называть функцию F на $A \times \mathbb{R}$, заданную равенством

$$F(k_1 k_2; p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R} f(k_1, k_2; p+m) - I(\mathcal{R} f), \tag{5.9}$$

дискретным преобразованием Радона функции f. Эта функция периодична по p с периодом 1.

В силу (5.8) функция f следующим образом выражается через свое дискретное преобразование Радона:

$$f(x_1, x_2) = I(\mathcal{R} f) + \sum_{(k_1, k_2)\in A} F(k_1, k_2; k_1 x_1 + k_2 x_2), \quad 0 < x_1, x_2 < 1. \tag{5.10}$$

Функция F так же связана с рядом Фурье функции f, как преобразование Радона $\mathcal{R} f$ с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$ функции f. Именно, пусть

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} a(n_1, n_2)\, e^{2\pi i\,(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$$

[1] Гиндикин С.Г. Дискретное преобразование Радона // Сиб. мат. журнал. — 1966. — № 3. — С. 708–712. См. также вычислительные применения в статье: Н.Д.Введенская, С.Г.Гиндикин. Дискретное преобразование Радона и реконструкция изображения: В сб. Математические проблемы томографии / Под ред. И.М.Гельфанда и С.Г.Гиндикина. // Вопросы кибернетики. — М., 1990, — С. 57–99.

— разложение f в ряд Фурье на $0 < x_1, x_2 < 1$,

$$F(k_1, k_2; p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(k_1, k_2)\, e^{2\pi i m p}$$

— разложение F в ряд Фурье по p на отрезке $0 < p < 1$. Заметим, что $b_0(k_1, k_2) = 0$. Подставляя эти ряды в (5.10), получаем:

$$\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} a(n_1, n_2)\, e^{2\pi i (n_1 x_1 + n_2 x_2)} =$$

$$= I(\mathcal{R} f) + \sum_{m\neq 0} \sum_{(k_1, k_2)\in A} b_m(k_1, k_2)\, e^{2\pi i m (k_1 x_1 + k_2 x_2)}.$$

Отсюда следует:

$$a(mk_1, mk_2) = b_m(k_1, k_2) \quad \text{при} \quad m \neq 0, \quad (k_1, k_2) \in A, \tag{5.11}$$

$$a(0,0) = I(\mathcal{R} f). \tag{5.12}$$

Равенство (5.11) — дискретный аналог формулы (5.5).

5.3. Задача интегральной геометрии на торе. Двумерные ряды Фурье можно интерпретировать двояко — как представление на квадрате $0 < x_1, x_2 < 1$ функции, сосредоточенной в этом квадрате, и как представление на всем $\mathbb{R}^2$ периодической функции f, т.е. такой, что $f(x + n) = f(x)$ для любого $n \in \mathbb{Z}^2$. Во втором случае ряд Фурье можно интерпретировать как разложение функции, заданной на торе $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Сделаем аналогичный переход для дискретного преобразования Радона.

Интерпретируем квадрат $0 < x_1, x_2 < 1$ как развертку тора $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Тогда для любых $k = (k_1, k_2) \in A$ и $p \in \mathbb{R}$ объединение отрезков прямых

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 = p + m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

заключенных в этом квадрате, отвечает замкнутой геодезической $\gamma(k, p)$ на торе T. Обратно, любая замкнутая геодезическая на торе T представляется как объединение таких отрезков. Таким образом, дискретное преобразование Радона $F(k_1, k_2, p)$ для ограничения периодической функции f на квадрат $0 < x_1, x_2 < 1$ можно интерпретировать так:

$$F(k_1, k_2, p) = ({k_1}^2 + {k_2}^2)^{-1/2} \widehat{f}(k_1, k_2; p) - I(\widehat{f}),$$

где $\widehat{f}(k_1,k_2;p)$ — интеграл функции f на торе T по замкнутой геодезической $\gamma(k,p)$ (взятый по евклидовой длине на T), $I(\widehat{f})$ — интеграл функции $\widehat{f}$ по семейству параллельных замкнутых геодезических. Из (5.10) следует:

Теорема 5.2. *Любая гладкая функция f на торе $T=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ следующим образом восстанавливается через интегралы $\widehat{f}(k_1,k_2;p)$ по замкнутым геодезическим $\gamma(k,p)$:*

$$f(x)=I(\widehat{f})+\sum_{(k_1,k_2)\in A}\Big(({k_1}^2+{k_2}^2)^{-1/2}\widehat{f}(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2)-I(\widehat{f})\Big). \tag{5.13}$$

Замечания. 1°. Длина геодезической $\gamma(k,p)$ равна $({k_1}^2+{k_2}^2)^{-1/2}$. Поэтому если перенормировать меры на геодезических так, чтобы их длины равнялись 1 и обозначить через $\widehat{f}'(k_1,k_2;p)$ интеграл по геодезической $\gamma(k,p)$ относительно новой меры, то формула (5.13) примет более простой вид:

$$f(x)=I(\widehat{f})+\sum_{(k_1,k_2)\in A}\Big(\widehat{f}'(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2)-I(\widehat{f}')\Big). \tag{5.14}$$

2°. Еще более простой вид принимает формула (5.13) для функций f со средним значением 0 на торе:

$$f(x)=\sum_{(k_1,k_2)\in A}\widehat{f}'(k_1,k_2;k_1x_1+k_2x_2).$$

В этом случае формула обращения локальна: для восстановления функции f в точке тора x нужно знать ее интегралы только по замкнутым геодезическим, проходящим через точку x.

§ 6. Преобразование Минковского — Функа

Этот параграф посвящен аналогу преобразования Радона для плоскости, где плоскость $\mathbb{R}^2$ заменена единичной сферой $S^2\subset\mathbb{R}^3$, а прямые в $\mathbb{R}^2$ — большими кругами на S^2.

Пусть f — четная гладкая функция на единичной сфере $S\subset\mathbb{R}^3$. Назовем преобразованием Минковского — Функа интегральное преобразование, относящее функции f ее интегралы по всевозможным большим кругам на сфере S. Возникает задача: восстановить функцию f по ее преобразованию Минковского — Функа. Впервые эта задача еще до появления статьи Радона была решена независимо Минковским и Функом. Аналогичная задача может быть сформулирована и для функций на трехмерной единичной сфере $S^3\subset\mathbb{R}^4$.

Замечание. Мы рассматриваем только четные функции на сфере, поскольку для нечетной функции ее интеграл по любому большому кругу равен 0.

Запишем преобразование Минковского — Функа явной формулой. Каждый большой круг на сфере S получается как пересечение этой сферы с плоскостью, проходящей через точку 0 :

$$\langle \xi, x \rangle = 0, \quad |\xi| = 1. \tag{6.1}$$

Таким образом, многообразие больших кругов параметризуется точками ξ единичной сферы $S' \subset (\mathbb{R}^3)'$, причем диаметрально противоположным точкам ξ и $-\xi$ отвечает один и тот же большой круг. Чтобы записать интеграл по кругу (6.1), зададим этот круг параметрически:

$$x = \cos\varphi \cdot \alpha + \sin\varphi \cdot \beta, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{6.2}$$

где α, β — единичные взаимно ортогональные векторы такие, что $\langle \xi, \alpha \rangle = \langle \xi, \beta \rangle = 0$. Преобразование Минковского — Функа задается следующим равенством:

$$\mathcal{M}f(\xi) = \int\limits_0^{2\pi} f(\cos\varphi \cdot \alpha + \sin\varphi \cdot \beta)\, d\varphi, \quad |\xi| = 1. \tag{6.3}$$

Ясно, что от выбора векторов α, β интеграл не зависит. Имеем: $\mathcal{M}f(-\xi) = \mathcal{M}f(\xi)$.

Итак, преобразование Минковского — Функа ставит в соответствие четной функции на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$ четную функцию на сфере $S' \subset (\mathbb{R}^3)'$.

Чтобы иметь возможность отождествлять функции на S и S',, отождествим сферы S и S'. Для определенности поставим в соответствие каждой точке $x \in S$ точку $\xi \in S'$, которой отвечает экваториальный большой круг, соответствующий полюсу x.

Из определения следует, что преобразование Минковского — Функа перестановочно с вращениями сферы. Это означает, что для любого вращения $g : \omega \mapsto \omega g$ сферы S преобразование Минковского — Функа $\mathcal{M}f_g(\xi)$ функции $f_g(\xi) = f(\xi g)$ есть $\mathcal{M}f(\xi g)$. Это свойство будет здесь существенно использовано для восстановления функции на сфере по ее преобразованию Минковского — Функа.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ четных функций на сфере S с интегрируемым квадратом модуля (относительно инвариантной меры на S). Построим спектральное разложение оператора $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$.

Введем в $\mathcal{H}$ фильтрацию подпространств, инвариантных относительно вращений. Именно, пусть $\mathcal{H}_{2n} \subset \mathcal{H}$ — пространство сферических полиномов степени $2n$, т.е. подпространство функций на S, являющихся ограничением на $S \subset \mathbb{R}^3$ однородных полиномов степени $2n$. Мы действительно имеем фильтрацию

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{H}_{2n} \subset \ldots \tag{6.4}$$

пространства $\mathcal{H}$, так как ограничение на S однородного полинома $P(x)$ степени $2n$ совпадает с ограничением на S полинома $({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)\, P(x)$ степени $2n+2$. Известно, кроме того, что замыкание пространства $\bigcup \mathcal{H}_{2n}$ совпадает с $\mathcal{H}$. Очевидно, что все пространства $\mathcal{H}_{2n}$ конечномерны и инвариантны относительно вращений, и оператор $\mathcal{M}$ определен на каждом $\mathcal{H}_{2n}$. Заметим, что при ограничении на S однородных полиномов степени $2n$ не возникает ненулевого ядра. Отсюда легко выводится, что

$$\dim \mathcal{H}_{2n} = (n+1)(2n+1). \tag{6.5}$$

Построим градуировку инвариантных подпространств в $\mathcal{H}$ относительно фильтрации (6.4):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{2n}\,, \tag{6.6}$$

где $H_0 = \mathcal{H}_0$ — подпространство констант, а H_{2n} при $n > 0$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}_{2n}$ к $\mathcal{H}_{2n-2}$, т.е.

$$\mathcal{H}_{2n} = \mathcal{H}_{2n-2} \oplus H_{2n}\,.$$

Из (6.5) следует, что $\dim H_{2n} = 4n+1$.

Пространство H_{2n} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ допускает следующее внутреннее описание. Оно состоит из функций на сфере S, являющихся ограничением на S однородных гармонических полиномов степени $2n$ (т.е. полиномов P, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 P}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial {x_3}^2} = 0$).

Основной факт состоит в том, что *все H_{2n} являются собственными подпространствами оператора $\mathcal{M}$ Минковского — Функа.* Это утверждение следует непосредственно из того, что оператор $\mathcal{M}$ перестановочен с вращениями сферы S, а подпространства H_{2n} неприводимы (т.е. не содержат собственных инвариантных подпространств) и попарно не эквивалентны.

Для описания $\mathcal{M}$ остается сосчитать собственное значение λ_n оператора $\mathcal{M}$ на каждом подпространстве H_{2n}. Для этого рассмотрим функцию $f \in H_{2n}$, являющуюся ограничением на S полинома $(x_2 + i\,x_3)^{2n}$. Так как, очевидно, $(x_2 + i\,x_3)^{2n}$ — гармонический полином, то $f \in H_{2n}$; следовательно,

$$\mathcal{M} f = \lambda_n f.$$

Запишем выражение для f в сферических координатах θ, φ :

$$\omega_1 = \cos\theta,\ \omega_2 = \sin\theta\cos\varphi,\ \omega_3 = \sin\theta\sin\varphi \quad (0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi).$$

Имеем:

$$f(\theta, \varphi) = e^{2in\varphi}\sin^{2n}\theta\,.$$

В частности, $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$, а потому $\mathcal{M}f(\frac{\pi}{2}, 0) = \lambda_n$. С другой стороны, $\mathcal{M}f(\frac{\pi}{2}, 0)$ есть интеграл функции f по большому кругу, на котором $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\mathcal{M}f(\frac{\pi}{2}, 0) = 2(-1)^n\int\limits_0^\pi \sin^{2n}\theta\,d\theta = 2\sqrt{\pi}(-1)^n\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}.$$

Следовательно,

$$\lambda_n = 2\sqrt{\pi}(-1)^n\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}. \tag{6.7}$$

Из описания $\mathcal{M}$ следует, что для восстановления функции f на S по ее образу $\varphi = \mathcal{M}f$ достаточно разложить φ по собственным подпространствам оператора $\mathcal{M}$: $\varphi = \sum_{n=0}^\infty \varphi_n$, где $\varphi_n \in H_{2n}$. Тогда $f = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n^{-1}\varphi_n$.

В § 8 будет получена другая формула обращения для преобразования Минковского — Функа, основанная на существовании простой связи между этим преобразованием и преобразованием Радона для проективной плоскости.

§ 7. Преобразование Радона дифференциальных форм

Преобразование Радона может быть определено не только для функций, но и для других объектов. В этом параграфе мы рассмотрим преобразование Радона дифференциальных форм на плоскости и в трехмерном пространстве. Основной задачей по-прежнему будет описание образа и восстановление исходной формы по ее преобразованию Радона.

7.1. Преобразование Радона 1-форм на плоскости. Рассмотрим произвольную дифференциальную 1-форму на $\mathbb{R}^2$

$$\omega = f_1(x_1, x_2)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2)\,dx_2$$

с коэффициентами из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Эту форму можно проинтегрировать по любой ориентированной прямой на плоскости $\mathbb{R}^2$. В результате получится функция на многообразии H всех ориентированных прямых, которую мы назовем преобразованием Радона исходной 1-формы ω и обозначим через $\mathcal{R}\omega$. Итак, по определению,

$$\mathcal{R}\omega(l) = \int\limits_l \omega, \qquad l \in H. \tag{7.1}$$

Напишем явное выражение для функции $\mathcal{R}\omega$ в координатах на H. Как и в § 1, будем задавать прямые на плоскости параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= -t\sin\varphi + p\cos\varphi, \\ x_2 &= t\cos\varphi + p\sin\varphi. \end{aligned} \tag{7.2}$$

За положительное направление прямой (7.2) примем то, в котором t возрастает. Тем самым параметры (φ, p) задают не только прямую, но и ее ориентацию, а потому их можно принять в качестве координат на многообразии H всех ориентированных прямых. Заметим, что та же прямая с противоположной ориентацией имеет координаты $(\varphi+\pi,\ -p)$.

В координатах (φ, p) выражение для $\mathcal{R}\omega$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\omega(\varphi,p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(-\sin\varphi\, f_1(-t\sin\varphi + p\cos\varphi, t\cos\varphi + p\sin\varphi) + \\ + \cos\varphi\, f_2(-t\sin\varphi + p\cos\varphi, t\cos\varphi + p\sin\varphi)\big)\, dt. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Мы хотим восстановить дифференциальную форму ω по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega$. Однозначное решение этой задачи получить невозможно ввиду следующего простого утверждения:

Лемма. *Если дифференциальная* 1-*форма* ω *замкнута, т.е.* $d\omega = 0$, *то* $\mathcal{R}\omega = 0$.

В самом деле, любая замкнутая форма $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$, где $f_1, f_2 \in S(\mathbb{R}^2)$, точна, т.е. представима в виде $\omega = du$, где $u \in S(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, интеграл от замкнутой формы ω по любой прямой равен нулю.

Решим другую геометрическую задачу: зная интегралы 1-формы $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$ по всем прямым в $\mathbb{R}^2$, т.е. ее преобразование Радона, найти ее внешний дифференциал $d\omega$, т.е. 2-форму

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = F(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2,,$$

или, короче, восстановить функцию F по $\mathcal{R}\omega$.

Предложение 7.1. *Для восстановления F нужно применить формулу обращения для преобразования Радона на плоскости к функции $\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{R}\omega(\varphi,p)$.*

Предложение следует из леммы:

Лемма. *Преобразование Радона $\mathcal{R}\omega$ формы $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$ связано с преобразованием Радона $\mathcal{R}F$ функции $F = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ соотношением*

$$\mathcal{R}F(\varphi,p) = \frac{\partial}{\partial p}\mathcal{R}\omega(\varphi,p). \tag{7.4}$$

Доказательство леммы. Ясно, что при фиксированном $\varphi = \varphi_0$ интеграл функции $\mathcal{R}F$ по p от p_1 до p_2 совпадает с интегралом 2-формы $d\omega$ по полосе $\pi \subset \mathbb{R}^2$ между прямыми $l_1 = (\varphi_0, p_1)$ и $l_2 = (\varphi_0, p_2)$; значит, по формуле Стокса

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathcal{R}F(\varphi_0,p)\,dp = \int_{\pi} d\omega = \int_{l_2}\omega - \int_{l_1}\omega = \mathcal{R}\omega(\varphi_0,p_2) - \mathcal{R}\omega(\varphi_0,p_1).$$

Отсюда следует (7.4).

Следствие. *Любая дифференциальная 1-форма ω с коэффициентами из пространства $S(\mathbb{R}^2)$ содержится в ядре преобразования Радона в том и только том случае, когда она замкнута.*

7.2. Преобразование Радона 2-форм на плоскости. Обычно в анализе интегрируют дифференциальные k-формы по k-мерным подмногообразиям. Это отвечает содержанию п. 7.1, где интегрировались дифференциальные 1-формы по прямым на $\mathbb{R}^2$. Однако если фиксировано некоторое семейство подмногообразий размерности k, то по ним можно интегрировать m-формы, где $m \geqslant k$. Если $m > k$, то результатом будет не числовая функция, а дифференциальная $(m-k)$-форма на многообразии подмногообразий. Здесь принципиально, что при $m > k$ нельзя интегрировать m-форму по индивидуальному k-мерному подмногообразию.

В этом пункте рассматривается интегрирование 2-формы ω по прямым на $\mathbb{R}^2$; результатом интегрирования является 1-форма $\mathcal{R}\omega$ на многообразии прямых. Неформальная идея вычисления $\mathcal{R}\omega$ такова. Чтобы сосчитать $\mathcal{R}\omega(l,\tau)$, где l — прямая, а τ — касательный вектор к многообразию прямых, нужно инфинитезимально сдвинуть l в направлении τ и проинтегрировать ω по соответствующей 2-мерной области. Та же идея работает и в общей ситуации.

Перейдем к соответствующим выкладкам. Определим преобразование Радона дифференциальной 2-формы

$$\omega = f(x_1,x_2)\,dx_1 \wedge dx_2, \quad f \in S(\mathbb{R}^2).$$

С этой целью введем трехмерное многообразие A флагов, элементы которого — пары: ориентированная прямая на плоскости и точка на этой прямой.

Поскольку точки на плоскости задаются координатами (x_1,x_2), а ориентированные прямые — координатами (φ,p), то на A можно ввести две системы координат. Одна система — координаты (x_1,x_2,φ), где (x_1,x_2) задают точку на плоскости, а φ — направление проходящей через эту точку прямой; другая система — (φ,p,t), где (φ,p) задают ориентированную прямую на плоскости, а t — точку на этой прямой. Координаты (x_1,x_2,φ) выражаются через координаты (φ,p,t) соотношениями (7.2). Обратные соотношения имеют вид:

$$t = x_2\cos\varphi - x_1\sin\varphi, \quad p = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi.$$

Будем трактовать 2-форму $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2$ как дифференциальную форму на многообразии A, заданную в координатах (x_1,x_2,φ). Чтобы определить преобразование Радона формы ω, представим ее сначала в координатах (φ,p,t), воспользовавшись выражениями (7.2) для x_1, x_2 и вытекающими из них выражениями для dx_1, dx_2:

$$dx_1 = -\sin\varphi\,dt - t\cos\varphi\,d\varphi - p\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,dp,$$
$$dx_2 = \cos\varphi\,dt - t\sin\varphi\,d\varphi + p\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,dp.$$

Мы получим:

$$\omega = f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dp \wedge dt -$$
$$- t\,f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\,d\varphi \wedge dt + \ldots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие dt.

Обозначим через ω_0 дифференциальную форму, полученную из ω отбрасыванием всех слагаемых, не содержащих dt. При любых фиксированных φ, p, $d\varphi$ и dp форма ω_0 является дифференциальной 1-формой на ориентированной прямой с координатами (φ,p). Интегрируя ее по этой прямой, мы получаем дифференциальную 1-форму на многообразии ориентированных прямых, которую назовем преобразованием Радона исходной 2-формы ω и обозначим через $\mathcal{R}\omega$. Итак,

Определение. Преобразование Радона $\mathcal{R}\omega$ дифференциальной 2-формы $\omega = f(x_1,x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$ на плоскости есть дифференциальная 1-форма на многообразии H ориентированных прямых на плоскости

$$\mathcal{R}\omega = a(\varphi,p)\,dp + b(\varphi,p)\,d\varphi, \tag{7.5}$$

где

$$
\begin{aligned}
a(\varphi,p) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dt,\\
b(\varphi,p) &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,f(-t\sin\varphi + p\cos\varphi,\ t\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dt.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Установим свойства дифференциальной 1-формы $\mathcal{R}\omega$. Из явных выражений для функций a и b следует, что обе они — бесконечно дифференцируемые, быстро убывающие вместе со всеми своими производными функции на многообразии H ориентированных прямых, т.е. они принадлежат пространству Шварца $S(H)$. Далее, функция $a(\varphi,p)$ является преобразованием Радона функции f, $a = \mathcal{R}f$ и, значит, она удовлетворяет дополнительно условиям Кавальери (см. § 4). Наконец, легко непосредственно убедиться, что

$$
\frac{\partial a}{\partial \varphi} = \frac{\partial b}{\partial p},
$$

а потому дифференциальная форма $\mathcal{R}\omega$ замкнута.

Предложение 7.2. *Дифференциальная 1-форма $\Omega = a\,dp + b\,d\varphi$ с быстроубывающими коэффициентами $a,b \in S(H)$, заданная на многообразии H ориентированных прямых в $\mathbb{R}^2$, содержится в образе преобразования Радона 2-форм в том и только том случае, когда она замкнута и функция a удовлетворяет условиям Кавальери.*

Доказательство. В одну сторону утверждение уже доказано. Обратно, пусть $\Omega = a\,dp + b\,d\varphi$ — любая форма с перечисленными свойствами на многообразии $H = S^1 \times \mathbb{R}^1$. Тогда $a = \mathcal{R}f$ для некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Полагая $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2$, имеем $\Omega - \mathcal{R}\omega = c(\varphi,p)\,d\varphi$. Так как эта 1-форма замкнута, функция c не зависит от p, а из быстрого убывания следует, что $c = 0$. Значит, $\Omega = \mathcal{R}\omega$.

Замечание. Замкнутость формы $\mathcal{R}\omega$ следует также из общего факта о перестановочности оператора $\mathcal{R}$ с оператором d внешнего дифференцирования, если учесть, что сама форма ω замкнута как форма максимальной степени.

Чтобы восстановить дифференциальную форму $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2$ по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega = a\,dp + b\,d\varphi$, или, что равносильно, чтобы восстановить функцию f, нужно к функции $a(\varphi,p)$ применить формулу обращения для преобразования Радона на плоскости (см. § 1).

Мы видим, что преобразование Радона 2-форм, в отличие от 1-форм, имеет нулевое ядро. Отметим также, что задача о восстановлении дифференциальной 2-формы ω по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega$ является переопределенной: для этой цели нужно знать только один коэффициент формы $\mathcal{R}\omega$.

7.3. Преобразование Радона 2-форм в трехмерном пространстве. Рассмотрим произвольную дифференциальную 2-форму в $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2, \tag{7.7}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ с коэффициентами из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^3)$. Интегрируя ω по всевозможным ориентируемым плоскостям в $\mathbb{R}^3$, мы получим функцию на многообразии плоскостей. Эту функцию назовем преобразованием Радона формы ω и обозначим через $\mathcal{R}\omega$.

Приведем выражение для $\mathcal{R}\omega$ в координатах на многообразии плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Условимся задавать плоскости уравнениями вида

$$x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta. \tag{7.8}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ этих уравнений примем в качестве локальных координат на многообразии плоскостей. Примем далее (x_1, x_2) в качестве координат на каждой плоскости (7.8), задав тем самым и ориентацию этой плоскости. Тогда ограничение формы ω на плоскость (7.8) получается подстановкой в (7.7) выражений $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta$ и $dx_3 = \alpha_1\,dx_1 + \alpha_2\,dx_2$. В результате получаем:

$$\mathcal{R}\omega\,(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[(f_3 - \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2)(x_1, x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta)\big]\,dx_1\,dx_2.$$

Как и в аналогичной задаче для 1-форм на плоскости (см. п. 1), форму ω можно восстановить по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega$ только с точностью до слагаемого, являющегося замкнутой дифференциальной 2-формой. Поэтому поставим другую задачу: восстановить по функции $\mathcal{R}\omega$ внешний дифференциал формы ω:

$$d\omega = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

или, что эквивалентно, восстановить функцию $F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$.

Предложение 7.3. *Для того чтобы восстановить функцию F по функции $\mathcal{R}\omega$, нужно применить к $\frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{R}\omega(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ формулу обращения для преобразования Радона функций в трехмерном пространстве.*

Ядро преобразования Радона 2-форм в $\mathbb{R}^3$ с быстро убывающими коэффициентами состоит из замкнутых форм ω и только из них.

Предложение следует из леммы:

Лемма. *Преобразование Радона 2-формы $\omega = f_1\,dx_2\wedge dx_3 + f_2\,dx_3\wedge dx_1 + f_3\,dx_1\wedge dx_2$ связано с преобразованием Радона функции $F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ следующим соотношением:*

$$\mathcal{R}F(\alpha_1,\alpha_2,\beta) = \frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{R}\omega(\alpha_1,\alpha_2,\beta). \tag{7.9}$$

Доказательство формулы (7.9) в основном совпадает с доказательством формулы (7.4); при этом полоса между двумя параллельными прямыми в $\mathbb{R}^2$ заменяется областью в $\mathbb{R}^3$, заключенной между двумя параллельными плоскостями.

Замечание. Результаты пп. 7.1 и 7.3 легко обобщаются на дифференциальные $n-1$-формы в $\mathbb{R}^n$.

7.4. Преобразование Радона 3-форм в трехмерном пространстве. Преобразование Радона дифференциальной 3-формы в $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3, \quad f\in S(\mathbb{R}^3)$$

определяется аналогично преобразованию Радона дифференциальной 2-формы в $\mathbb{R}^2$, см. п. 7.2. Именно, введем 5-мерное многообразие флагов A, элементы которого — пары: плоскость в $\mathbb{R}^3$ и точка на этой плоскости. Поскольку точки в $\mathbb{R}^3$ задаются координатами (x_1,x_2,x_3), а плоскости — локальными координатами $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$, то на A можно задать две системы координат. Первая система — координаты $(x_1,x_2,x_3;\alpha_1,\alpha_2)$, где (x_1,x_2,x_3) задают точку в $\mathbb{R}^3$, а (α_1,α_2) — плоскость, проходящую через эту точку. Вторая система — координаты $(\alpha_1,\alpha_2,\beta;x_1,x_2)$, где $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ задают плоскость в $\mathbb{R}^3$, а (x_1,x_2) — точку на этой плоскости. Эти две системы координат связаны между собой соотношением (7.8).

Будем трактовать $\omega = f\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ как дифференциальную форму на A, заданную в координатах $(x_1,x_2,x_3;\alpha_1,\alpha_2)$. Чтобы определить ее преобразование Радона, запишем сначала форму ω в координатах $(\alpha_1,\alpha_2,\beta;x_1,x_2)$. Для этого в выражении для ω нужно заменить x_3 на $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\beta$ и dx_3 — на $\alpha_1\,dx_1+\alpha_2\,dx_2+x_1\,d\alpha_1+x_2\,d\alpha_2+d\beta$. Мы получим:

$$\omega = f(x_1,x_2,\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\beta)(d\beta+x_1\,d\alpha_1+x_2\,d\alpha_2)\wedge dx_1\wedge dx_2.$$

Эта 3-форма при фиксированных $\alpha_1, \alpha_2, \beta, d\beta$ и переменных интегрирования x_1, x_2 может рассматриваться как дифференциальная 2-форма, заданная в плоскости с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \beta$. Интегрируя 2-форму по этой плоскости, мы получаем 1-форму в произвольной точке $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ многообразия плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Мы назовем полученную 1-форму преобразованием Радона исходной дифференциальной 3-формы ω и обозначим ее через $\mathcal{R}\omega$. Итак,

Определение. Преобразованием Радона дифференциальной 3-формы $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ $\mathbb{R}^3$ называется следующая дифференциальная 1-форма $\mathcal{R}\omega$ на многообразии плоскостей в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{R}\omega = a_1(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,d\alpha_1 + a_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,d\alpha_2 + b(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,d\beta, \tag{7.10}$$

где

$$a_i(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_1, x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta)\,dx_1\,dx_2, \quad i = 1, 2,$$

$$b(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta)\,dx_1\,dx_2. \tag{7.11}$$

Из определения 1-формы $\mathcal{R}\omega$ непосредственно следует:

1) Коэффициенты формы $\mathcal{R}\omega$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial a_i}{\partial \beta}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, форма $\mathcal{R}\omega$ замкнута.

2) Коэффициенты a_1, a_2, b формы $\mathcal{R}\omega$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, быстро убывающими вместе со всеми производными при $|\beta| \to \infty$.

3) Функция b является преобразованием Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$, т.е. $b = \mathcal{R}f$.

Нетрудно убедиться, что и обратно, если дифференциальная 1-форма $\Omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b\,d\beta$ на многообразии плоскостей в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то она является преобразованием Радона некоторой дифференциальной 3-формы $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $f \in S(\mathbb{R}^3)$ (ср. аналогичное утверждение в п. 2 для случая $\mathbb{R}^2$).

Из 3) следует также, что для восстановления формы ω по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}\omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b\,d\beta$ нужно применить к коэффициенту b формы $\mathcal{R}\omega$ формулу обращения для преобразования Радона функций в $\mathbb{R}^3$.

§ 8. Преобразование Радона для проективной плоскости и проективного пространства

Мы начинали с евклидовского определения преобразования Радона, но позднее установили, что это преобразование аффинно инвариантно. В этом параграфе мы покажем, что преобразование Радона является на самом деле проективно инвариантным объектом. Этим, кстати, оно существенно отличается от преобразования Фурье, для которого проективной версии не существует.

Мы рассматриваем преобразование Радона для вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ и вещественного проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Определения преобразований Радона для $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$ аналогичны, но, как и в случае аффинных пространств, формулы обращения для них существенно отличаются: в случае $\mathbb{P}^3$ формула локальна, а в случае $\mathbb{P}^2$ — нелокальна. Поэтому начнем со случая $\mathbb{P}^3$ как более простого.

8.1. Пространства $\mathbb{P}^3$ и $(\mathbb{P}^3)'$. Как обычно, будем задавать точки в $\mathbb{P}^3$ однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, т.е. векторами $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$, определенными с точностью до множителя. Другими словами, $\mathbb{P}^3$ задается как база естественного расслоения

$$\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3, \quad \lambda x \sim x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

Поскольку прообразы точек из $\mathbb{P}^3$ — одномерные подпространства в $\mathbb{R}^4$, то $\mathbb{P}^3$ можно интерпретировать как многообразие одномерных подпространств в $\mathbb{R}^4$.

Любая плоскость в $\mathbb{P}^3$ задается в однородных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 уравнением:

$$\langle \xi, x \rangle \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

где коэффициенты ξ_i определены с точностью до общего множителя. Таким образом, многообразие плоскостей в $\mathbb{P}^3$ само является трехмерным проективным пространством с однородными координатами $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Оно называется пространством, дуальным к $\mathbb{P}^3$, и обозначается через $(\mathbb{P}^3)'$.

8.2. Преобразование Радона для $\mathbb{P}^3$. Обозначим через $\mathcal{F}(m)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f(\lambda x) = |\lambda|^m f(x) \quad \text{для любого} \quad \lambda \neq 0. \tag{8.1}$$

Первый вопрос, возникающий при переходе от аффинного к проективному случаю, — на каком функциональном пространстве должно строиться преобразование Радона. Таким функциональным пространством является $\mathcal{F}(-3)$.

Причина, по которой берется $\mathcal{F}(-3)$ вместо пространства функций на самом $\mathbb{P}^3$, связана с тем, что на $\mathbb{P}^3$ не существует проективно инвариантной формы объема, т.е. дифференциальной 3-формы, инвариантной относительно действия на $\mathbb{P}^3$ группы $SL(4,\mathbb{R})$ проективных преобразований. Между тем, на одномерном расслоении $\mathbb{R}^4 \setminus 0$ над $\mathbb{P}^3$ такая 3-форма существует. Это дифференциальная форма Лере:

$$\omega(x) = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (\text{цикл. перест. индексов } 1,2,3,4), \tag{8.2}$$

которую удобно записывать в виде определителя с коммутирующими и антикоммутирующими элементами:

$$\omega(x) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & dx_1 & dx_1 & dx_1 \\ x_2 & dx_2 & dx_2 & dx_2 \\ x_3 & dx_3 & dx_3 & dx_3 \\ x_4 & dx_4 & dx_4 & dx_4 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем писать сокращенно:

$$\omega(x) = [x, dx, dx, dx].$$

Пусть $\xi \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$ и

$$h_\xi : \quad \langle \xi, x\rangle = 0$$

— подпространство в $\mathbb{R}^4$, отвечающее ξ. Обозначим через $\sigma_\xi(x)$ внутреннее произведение формы Лере $\omega(x)$ и формы $d(\langle \xi, x\rangle)$ на $\mathbb{R}^4$

$$\sigma_\xi(x) = d(\langle \xi, x\rangle) \rfloor \omega(x).$$

По определению, $\sigma_\xi(x)$ есть дифференциальная 2-форма на $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющая соотношению:

$$d(\langle \xi, x\rangle) \wedge \sigma_\xi(x) = \omega(x). \tag{8.3}$$

Известно, что на всем пространстве $\mathbb{R}^4$ такая форма не единственна, однако ее ограничение на подпространство h_ξ определено однозначно. Можно принять, например,

$$\sigma_\xi(x) = \frac{[x, u, dx, dx]}{\langle \xi, u\rangle},$$

где $u \in \mathbb{R}^4$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle \xi, u\rangle \neq 0$.

Пусть $f \in \mathcal{F}(-3)$. Тогда дифференциальная 2-форма на h_ξ

$$f(x)\,\sigma_\xi(x)$$

имеет степень однородности 0 и ортогональна слоям расслоения $h_\xi \to Ph_\xi$, где Ph_ξ — проективизация h_ξ. Следовательно, она опускается с h_ξ на Ph_ξ, т.е. на плоскость в $\mathbb{P}^3$.

Определение. Назовем преобразованием Радона функции $f \in \mathcal{F}(-3)$ функцию $\mathcal{R}f$ на $(\mathbb{R}^4)' \setminus 0$, заданную равенством:

$$\mathcal{R}f(\xi) = \int\limits_{\langle \xi, x\rangle = 0} f(x)\,\sigma_\xi(x). \tag{8.4}$$

Из определения следует, что $\varphi = \mathcal{R}f$ — бесконечно дифференцируемая функция на $(\mathbb{R}^4)' \setminus 0$, удовлетворяющая условию однородности: $\varphi(\lambda\xi) = |\lambda|^{-1}\varphi(\xi)$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$. Таким образом, преобразование Радона задает отображение:

$$\mathcal{R} : \mathcal{F}(-3) \to \mathcal{F}(-1).$$

Выражение для $\mathcal{R}f$ удобно представлять в следующем виде:

$$\mathcal{R}f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{P}^3} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle)\,\omega(x), \tag{8.5}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$. Интеграл следует понимать так. Сначала подинтегральную форму надо представить в произвольной системе переменных, включающей $t = \langle \xi, x\rangle$ в качестве одного из переменных, и затем применить $\delta(t)$ к переменному t (т.е. в полученной форме отбросить dt и положить $t = 0$). Замечательно, что получаемая в результате дифференциальная форма на плоскости $\langle \xi, x\rangle = 0$ не зависит от выбора исходных переменных.

8.3. Связь с аффинным преобразованием Радона для $\mathbb{R}^3$ и преобразованием Минковского — Функа для трехмерной сферы. Преобразование Радона для $\mathbb{R}^3$ и преобразование Минковского — Функа для трехмерной сферы получаются как специализация проективного преобразования Радона. Именно, для этого надо заменить однородные функции $f \in \mathcal{F}(-3)$ их ограничениями на подходящие сечения расслоения $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3$.

Чтобы получить аффинное преобразование Радона, возьмем в качестве такого сечения гиперплоскость $x_4 = 1$ и положим

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1).$$

Поскольку $\omega(x)\Big|_{x_4=1} = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, то формула (8.5) принимает вид:

$$\mathcal{R}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_0(x_1,x_2,x_3)\,\delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

т.е. $\mathcal{R}f$ есть аффинное преобразование Радона функции f_0 на $\mathbb{R}^3$.

Чтобы получить преобразование Минковского — Функа, нужно заменить функции f и $\varphi = \mathcal{R}f$ их ограничениями соответственно на сферу $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^4$ и сферу $|\xi| = 1$ в $(\mathbb{R}^4)'$. Тогда преобразование (8.5) совпадет с преобразованием Минковского — Функа $\mathcal{M}$ для функций на сфере $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{M}f(\xi) = \mathcal{R}f(\xi)$ при $|\xi| = 1$.

8.4. Формула обращения для преобразования Радона в $\mathbb{P}^3$. Наша задача — восстановить функцию $f \in \mathcal{F}(-3)$ по ее преобразованию Радона $\mathcal{R}f$. Приведем сразу ответ.

$$f(x) = -(2\pi)^{-2}\int\limits_{\Gamma} \mathcal{R}f(\xi)\,\delta''(\langle \xi, x\rangle)\,\omega(\xi), \tag{8.6}$$

где $\delta''(t)$ — вторая производная дельта-функции на $\mathbb{R}$; интеграл берется по произвольному сечению Γ расслоения $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3$.

Формально, стоящая под знаком интеграла дифференциальная 3-форма

$$\Omega_x = \mathcal{R}f(\xi)\,\delta''(\langle \xi, x\rangle)\,\omega(\xi)$$

имеет степень однородности 0 и ортогональна к слоям расслоения $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3$. Поэтому интеграл не зависит от выбора сечения Γ.

Мы должны придать смысл интегралу (8.6). С этой целью положим

$$\xi = \eta + p\zeta,$$

где $\eta \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$ удовлетворяет условию $\langle \eta, x\rangle = 0$, $p \in \mathbb{R}$, а $\zeta \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle \zeta, x\rangle \neq 0$.

Перейдем в выражении для Ω_x от переменных $\xi \in \mathbb{R}^4$ к переменным $\eta \in \mathbb{R}^4$ и $p \in \mathbb{R}$ и отбросим затем члены, не содержащие dp. Так как в новых переменных

$$\omega(\xi) = [\eta + p\zeta, d\eta + \zeta\,dp, d\eta + \zeta\,dp, d\eta + \zeta\,dp],$$
$$\delta''(\langle \xi, x\rangle) = |\langle \zeta, x\rangle|^{-3}\delta''(p),$$

то после отбрасывания этих членов мы получим:

$$\Omega'_x = |\langle \zeta, x\rangle|^{-3}\,\mathcal{R} f(\eta + p\zeta)\,\delta''(p)\,[\eta,\zeta,d\eta,d\eta]\wedge dp.$$

Проинтегрировав форму Ω'_x по p, получаем дифференциальную 2-форму на подпространстве $h_\xi : \langle \eta, x\rangle = 0$ в $(\mathbb{R}^4)'$:

$$|\langle \zeta, x\rangle|^{-3}(L^2\varphi)(\eta)\,[\eta,\zeta,d\eta,d\eta],$$

где

$$L = \zeta\,\frac{\partial}{\partial \eta} = \sum \zeta_i\,\frac{\partial}{\partial \eta_i}.$$

Эта форма имеет степень однородности 0 и ортогональна к слоям расслоения $h_\xi \to P(h_\xi)$, где $P(h_\xi)$ — проективизация h_ξ. Таким образом, ее можно рассматривать как форму на $P(h_\xi)$.

Итак, мы свели формулу обращения (8.6) к следующей:

Теорема 8.1. *Если $\varphi = \mathcal{R} f$, где $f \in \mathcal{F}(-3)$, то имеем:*

$$f(x) = -(2\pi)^{-2}|\langle \zeta, x\rangle|^{-3}\int\limits_{\langle \eta, x\rangle = 0}\Bigg(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 4}\zeta_i\zeta_j\,\frac{\partial^2\varphi(\eta)}{\partial\eta_i\,\partial\eta_j}\Bigg)[\eta,\zeta,d\eta,d\eta], \quad (8.7)$$

где $\zeta \in \mathbb{R}^4$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle \zeta, x\rangle \neq 0$.

Замечание. В отличие от (8.5), определенное в (8.7) ограничение дифференциальной формы $\Omega_x = \mathcal{R} f(\xi)\,\delta''(\langle \xi, x\rangle)\,\omega(\xi)$ на подпространство $\langle \xi, x\rangle = 0$ не единственно, поскольку оно зависит от выбора вектора ζ. Однако все получающиеся так формы различаются между собой на точную форму.

Доказательство формулы обращения (8.7). Обозначим через $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2,3,4$, подпространство функций $f \in \mathcal{F}(-3)$, равных нулю вместе со всеми производными на подпространстве $x_i = 0$. Поскольку сумма подпространств $\mathcal{F}_i$ есть все пространство $\mathcal{F}(-3)$, то равенство (8.7) достаточно доказать для функций, принадлежащих этим подпространствам. Пусть для определенности $f \in \mathcal{F}_4$. Тогда функция на $\mathbb{R}^3$

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1)$$

принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^3)$, а из п. 8.3 следует, что $\varphi = \mathcal{R} f$ является аффинным преобразованием Радона функции f_0.

Значит, по формуле обращения для аффинного преобразования Радона имеем:

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = -(2\pi)^{-2} \int\limits_{\gamma} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_4^2} \Big|_{\eta_4 = -\eta_1 x_1 - \eta_2 x_2 - \eta_3 x_3} \Big) \omega_0(\eta),$$

где $\omega_0(\eta) = \eta_1\, d\eta_2 \wedge d\eta_3 - \eta_2\, d\eta_1 \wedge d\eta_3 + \eta_3\, d\eta_1 \wedge d\eta_2$. Отсюда следует, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_4|^{-3} f_0\Big(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\Big) = -(2\pi)^{-2} |x_4|^{-3} \int\limits_{\langle \eta, x\rangle = 0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_4} \omega_0(\eta).$$

Полученное равенство совпадает с (8.7) для случая $\zeta = (0, 0, 0, 1)$. Таким образом, для случая $\zeta = (0, 0, 0, 1)$ формула обращения доказана. Случай произвольного вектора ζ, для которого $\langle \zeta, x\rangle \neq 0$, сводится к этому случаю преобразованием координат в $\mathbb{R}^4$ и $(\mathbb{R}^4)'$.

Замечание. Можно было бы не предполагать, что $\zeta = \text{const}$. Тогда получается формула обращения более общая, чем (8.7), в которой интегрирование ведется по двумерному циклу в многообразии пар η, ζ.

8.5. О формулах обращения для аффинного преобразования Радона в $\mathbb{R}^3$ и преобразования Минковского — Функа для S^3. Мы уже убедились в п. 8.4, что из проективной формулы обращения (8.7) при $\zeta = (0, 0, 0, 1)$ получается формула обращения для аффинного преобразования Радона из § 2. Если в качестве ζ взять произвольный фиксированный вектор в $\mathbb{R}^4$, для которого

$$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 + \zeta_4 = c > 0,$$

то на основании (8.7) мы получаем новую формулу обращения для аффинного преобразования Радона $\mathcal{R}$, отличную от формулы обращения из § 2. Именно, пусть $\pi_x \subset (\mathbb{R}^4)'$ — подпространство, ортогональное к $(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4$, $P(\pi_x)$ — его проективизация и γ_x — любое сечение расслоения $\pi_x \to P(\pi_x)$. Тогда если $f \in S(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi = \mathcal{R} f$ — аффинное преобразование Радона функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$, то

$$f(x) = -(2\pi)^{-2} c^{-3} \int\limits_{\gamma_x} \sum_{i,j=1}^{4} \zeta_i \zeta_j \frac{\partial^2 \varphi(\eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} [\eta, \zeta, d\eta, d\eta].$$

Примечание. Еще более общий класс формул обращения для аффинного преобразования Радона можно получить, задавая в точках $\eta \in \pi_x \setminus 0$ гладкое векторное поле $\eta \mapsto \zeta \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$, трансверсальное к $\pi_x \setminus 0$, т.е. $\langle x, \zeta(\eta)\rangle > 0$ для любого $\eta \in \pi_x \setminus 0$. Каждому такому полю отвечает формула обращения для аффинного преобразования Радона.

Перейдем теперь к преобразованию Минковского — Функа для трехмерной сферы. Если интерпретировать элементы из $\mathcal{F}(-3)$ как четные функции на сфере $|x|=1$ в $\mathbb{R}^4$, то проективное преобразование Радона $\mathcal{R}f$ и преобразование Минковского — Функа $\mathcal{M}f$ функции $f \in \mathcal{F}(-3)$ связаны соотношением:

$$\mathcal{R}f(\xi) = |\xi|^{-1}\mathcal{M}f\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big).$$

Следовательно, формула обращения для преобразования Минковского — Функа M получается из формулы обращения (8.7) для преобразования Радона $\mathcal{R}$ заменой $\mathcal{R}f(\xi)$ на $|\xi|^{-1}\mathcal{M}f(\frac{\xi}{|\xi|})$.

8.6. Описание образа преобразования Радона для $\mathbb{P}^3$.

Теорема 8.2. *Преобразование Радона задает изоморфизм пространств*:

$$\mathcal{R} : \mathcal{F}(-3) \to \mathcal{F}(-1).$$

Доказательство. Введем оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{F}(-1)$ по формуле:

$$(\widetilde{\mathcal{R}}\varphi)(x) = -(2\pi)^{-2} \int\limits_{(\mathbb{P}^3)'} \varphi(\xi)\delta''(\langle\xi, x\rangle)\omega(\xi).$$

Из этого определения следует, что $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi \in \mathcal{F}(-3)$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$.

В силу доказанного в п. 8.4 оператор $\mathcal{R}$ инъективен и композиция $\widetilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ есть тождественный оператор на $\mathcal{F}(-3)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ имеет нулевое ядро.

Итак, пусть $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$ и $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi = 0$. Заметим, что все производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$ функции φ принадлежат $\mathcal{F}(-3)$, а потому для них определено преобразование Радона.

Так как $\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\delta(\langle\xi, x\rangle) = x_i x_j \delta''(\langle\xi, x\rangle)$, то интегрированием по частям получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{P}^3} \frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\delta(\langle\xi, x\rangle)\omega(\xi) = x_i x_j \int\limits_{\mathbb{P}^3} \varphi(\xi)\delta''(\langle\xi, x\rangle)\omega(\xi) = 0.$$

Отсюда, ввиду инъективности преобразования Радона, следует, что $\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j} = 0$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, т.е. φ — полином. Поскольку, с другой стороны, φ имеет степень однородности -1, это возможно лишь при $\varphi = 0$.

8.7. Преобразование Радона для проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Описание преобразования Радона для $\mathbb{P}^2$ аналогично рассмотренному уже случаю проективного пространства $\mathbb{P}^3$, а потому мы изложим его более кратко. Единственное существенное различие между случаем $\mathbb{P}^3$ и случаем $\mathbb{P}^2$ в том, что для $\mathbb{P}^3$ формула обращения локальна, а для $\mathbb{P}^2$ она нелокальна.

Обозначим по аналогии с проективным пространством $\mathbb{P}^3$ через $\mathcal{F}(m)$ пространство C^∞ функций на $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности (8.1).

Преобразование Радона для $\mathbb{P}^2$ задается в функциональном пространстве $\mathcal{F}(-2)$.

Пусть $\omega(x)$ — дифференциальная форма Лере на $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 - x_2\,dx_1 \wedge dx_3 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2,$$

или, короче, $\omega(x) = [x, dx, dx]$. Зададим на каждом подпространстве

$$h_\xi\,:\; \langle \xi, x\rangle \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

в $\mathbb{R}^3$ дифференциальную 1-форму $\sigma_\xi(x)$, определенную равенством:

$$\sigma_\xi(x) = d(\langle \xi, x\rangle) \rfloor \omega(x),$$

т.е.

$$d(\langle \xi, x\rangle) \wedge \sigma_\xi(x) = \omega(x).$$

Если $f \in \mathcal{F}(-2)$, то дифференциальная форма $f(x)\sigma_\xi(x)$ имеет степень однородности 0 и ортогональна слоям расслоения $h_\xi \to Ph_\xi$, где Ph_ξ — проективизация h_ξ. Следовательно, она опускается на Ph_ξ, т.е. на прямую в $\mathbb{P}^2$.

Определение. Назовем преобразованием Радона функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ функцию $\mathcal{R}f$ на $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, заданную равенством:

$$\mathcal{R}f(\xi) = \int\limits_{\langle \xi, x\rangle = 0} f(x)\,\sigma_\xi(x). \tag{8.8}$$

Из определения следует, что $\varphi = \mathcal{R}f$ принадлежит $\mathcal{F}(-1)$; таким образом, преобразование Радона задает отображение:

$$\mathcal{R}\,:\; \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{F}(-1).$$

Подобно случаю проективного пространства $\mathbb{P}^3$, выражение для $\mathcal{R} f$ удобно представлять в виде:

$$\mathcal{R} f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{P}^2} f(x)\delta(\langle \xi, x\rangle)\omega(x), \tag{8.9}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$.

Перейдем к построению формулы обращения для $\mathcal{R}$.

Сначала, как и в случае пространства $\mathbb{P}^3$, приведем формальный ответ:

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\Gamma} \mathcal{R} f(\xi)\, \langle \xi, x\rangle^{-2} \omega(\xi), \tag{8.10}$$

где Γ — произвольное сечение расслоения $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{P}^2$.

Чтобы придать смысл этому интегралу, повторим рассуждения, приведенные в п. 8.4 для случая $\mathbb{P}^3$. Именно, положим $\xi = \eta + p\zeta$, где $\eta \in (\mathbb{R}^3)' \setminus 0$ удовлетворяет условию $\langle \eta, x\rangle = 0$, $p \in \mathbb{R}$, а $\zeta \in (\mathbb{R}^3)' \setminus 0$ — произвольный фиксированный вектор такой, что $\langle \zeta, x\rangle \neq 0$.

Перейдем в выражении для дифференциальной формы

$$\Omega_x = \mathcal{R} f(\xi)\langle \xi, x\rangle^{-2} \omega(\xi)$$

от переменных $\xi \in \mathbb{R}^3$ к переменным $\eta \in \mathbb{R}^3$ и $p \in \mathbb{R}$ и отбросим затем члены, не содержащие dp. Мы получим:

$$\Omega_x' = \langle \zeta, x\rangle^{-2} \mathcal{R} f(\eta + p\zeta)\, p^{-2} [\eta, \zeta, d\eta] \wedge dp.$$

Интеграл от этой формы будем понимать так. Сначала берется интеграл по p в соответствии с определением обобщенной функции p^{-2}:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p)\, p^{-2}\, dp = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F'(p)\, p^{-1}\, dp,$$

где интеграл справа нужно понимать в смысле главного значения. В результате получается дифференциальная 1-форма на прямой, которая затем интегрируется по этой прямой.

Итак, в результате формула обращения (8.10) сведена к следующей:

Теорема 8.3. *Если $\varphi = \mathcal{R} f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$, то*

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \langle \zeta, x\rangle^{-2} \int\limits_{\langle \eta, x\rangle = 0} \psi(\eta, \zeta)\, [\eta, \zeta, d\eta], \tag{8.11}$$

где

$$\psi(\eta,\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{3} \zeta_i \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\Big|_{\xi=\eta+p\zeta}\Big) p^{-1}\, dp, \tag{8.12}$$

$\zeta \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ *произвольный фиксированный вектор, удовлетворяющий условию* $\langle\zeta, x\rangle \neq 0$; *интеграл* (8.12) *нужно понимать в смысле главного значения.*

Подобно случаю проективного пространства (см. п. 8.4, стр. 59), доказательство формулы обращения (8.11), (8.12) сводится к формуле обращения для аффинного преобразования Радона на плоскости, полученной в § 1.

Теорема 8.4. *Преобразование Радона* $\mathcal{R}$ *для проективной плоскости* $\mathbb{P}^2$ *задает изоморфизм пространств*:

$$\mathcal{R} : \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{F}(-1).$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{R}} : \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F}(-2)$$

— оператор, заданный равенством (8.10). В силу доказанного, композиция $\widetilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ является единичным оператором на $\mathcal{F}(-2)$. Поэтому для доказательства теоремы нужно только убедиться, что оператор $\widetilde{\mathcal{R}}$ инъективен.

Воспользуемся тем, что $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi\Big|_{x_3=1}$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\mathcal{R}}\varphi(x_1,x_2,1) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\Gamma} \psi(\xi)\, \delta'(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3)\, \omega(\xi), \tag{8.13}$$

где

$$\psi(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_1,\xi_2,p)\, (p-\xi_3)^{-1}\, dp. \tag{8.14}$$

В самом деле, подставив (8.14) в (8.13) и проинтегрировав по ξ_3, мы получим исходное выражение для $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi\Big|_{x_3=1}$.

Равенство (8.14) задает преобразование Гильберта функции $\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ по ξ_3. Известно, что это преобразование инъективно. Далее, если $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$, то ψ — нечетная однородная C^∞-функция на $(\mathbb{R}^3)' \setminus 0$, той же степени однородности -1, что и функция φ. Поэтому все ее производные $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$ принадлежат $\mathcal{F}(-2)$.

Предположим, что $\widetilde{\mathcal{R}}\varphi = 0$. Тогда интегрированием по частям получаем:

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\delta(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3)\,\omega(\xi) =$$

$$= -\xi_i \int\limits_\Gamma \psi(\xi)\,\delta'(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3)\,\omega(\xi) = 0,$$

$i=1,2,3$, т.е. преобразование Радона функции $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$ равно нулю. Отсюда, ввиду инъективности преобразования Радона, следует, что $\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} = 0$, $i = 1,2,3$, и, значит, $\psi = \mathrm{const}$. Поскольку, с другой стороны, функция ψ имеет степень однородности -1, то $\psi = 0$. Отсюда, ввиду инъективности преобразования (8.14), следует, что $\varphi = 0$.

Подобно трехмерному случаю, из формул обращения (8.11), (8.12) для проективного преобразования Радона получаются как следствие новые формулы обращения для преобразования Радона, связанного с аффинной плоскостью, и для преобразования Минковского — Функа, связанного с двумерной сферой.

Чтобы получить формулу обращения для преобразования Минковского — Функа, достаточно интерпретировать элементы из $\mathcal{F}(-2)$ и $\mathcal{F}(-1)$ как функции на двумерной сфере S^2. Тогда, если $\varphi = \mathcal{M}f$ — преобразование Минковского — Функа функции f на S^2, то формула обращения для f получается из (8.11), (8.12) заменой $\varphi(\xi)$ на $|\xi|^{-1}\varphi(\frac{\xi}{|\xi|})$.

§ 9. Преобразование Радона в комплексном аффинном пространстве

Определения и результаты этой главы можно перенести с вещественного на комплексный случай. В этом параграфе мы кратко излагаем определение преобразования Радона для комплексного аффинного пространства, его связь с преобразованием Фурье и формулу обращения для преобразования Радона.

По существу единственное различие между преобразованиями Радона в вещественном и комплексном пространствах в том, что в комплексном случае формула обращения для преобразования Радона всегда локальна и имеет одну и ту же структуру для пространств любой размерности. Поэтому мы излагаем результаты сразу для пространства произвольной размерности $n>1$. Приводятся только формулировки теорем.

9.1. Определение преобразования Радона. Будем задавать гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$ уравнениями

$$\langle \xi, x\rangle - p = 0,$$

где $\langle \xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$.

Преобразование Радона функции f на $\mathbb{C}^n$ задается следующим равенством:

$$\mathcal{R} f(\xi, p) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int\limits_{\langle \xi, x\rangle = p} f(x)\,\sigma(x) \wedge \overline{\sigma(x)}, \tag{9.1}$$

где σ — голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма на гиперплоскости $\langle \xi, x\rangle = p$, определяемая из соотношения

$$dx = d\langle \xi, x\rangle \wedge \sigma \qquad (dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n).$$

В координатах $x_1, \ldots, x_n$ форма σ задается так:

$$\sigma = (-1)^{k-1} \xi_k^{-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Выражение для $\mathcal{R} f$ удобно также записывать в виде:

$$\mathcal{R} f(\xi, p) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle - p)\, dx\, d\overline{x}, \tag{9.2}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{C}^n$.

Функция $\mathcal{R} f$ удовлетворяет условию однородности:

$$\mathcal{R} f(\lambda\xi, \lambda p) = |\lambda|^{-2}\, \mathcal{R} f(\xi, p), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0. \tag{9.3}$$

9.2. Связь с преобразованием Фурье. Преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ функции f на $\mathbb{C}^n$ определяется так:

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n} \left(\frac{i}{2}\right)^{n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(x)\, e^{i \operatorname{Re} \langle \xi, x\rangle}\, dx\, d\overline{x}.$$

Оно связано с преобразованием Радона следующим соотношением:

$$\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n}\, \frac{i}{2} \int \mathcal{R} f(\xi, p)\, e^{i \operatorname{Re} p}\, dp\, d\overline{p}. \tag{9.4}$$

Используя свойство однородности (9.3) функции $\mathcal{R}f$, соотношение между $\mathcal{R}f$ и $\mathcal{F}f$ можно записать в виде:

$$\mathcal{F}f(\lambda\xi) = (2\pi)^{-n}\,\frac{i}{2}\int \mathcal{R}f(\xi,p)\,e^{i\,\mathrm{Re}\,\lambda p}\,dp\,d\overline{p}. \tag{9.5}$$

Отсюда по формуле обращения для одномерного преобразования Фурье получаем:

$$\mathcal{R}f(\xi,p) = (2\pi)^{n-2}\,\frac{i}{2}\int \mathcal{F}f(\lambda\xi)e^{-i\,\mathrm{Re}\,\lambda p}\,d\lambda\,d\overline{\lambda}.$$

9.3. Формула обращения для преобразования Радона. Известно, что оператор $\mathcal{F}^{-1}$, обратный к $\mathcal{F}$, имеет вид:

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{C}^n} \varphi(\xi)\,e^{-i\,\mathrm{Re}\,\langle\xi,x\rangle}\,d\xi\,d\overline{\xi}. \tag{9.6}$$

На основании равенств (9.6) и (9.4) получаем следующую формулу обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}$:

$$f(x) = (-1)^{n-1}\,\pi^{-2n+2}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^{2n-2}}{\partial p^{n-1}\,\partial\overline{p}^{n-1}}\,\mathcal{R}f(\xi,\,\langle\xi,x\rangle\,)\,\omega(\xi)\wedge\overline{\omega(\xi)}, \tag{9.7}$$

где $\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\xi_k\,d\xi_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\xi_k}\wedge\ldots\wedge d\xi_n$, интеграл берется по произвольной поверхности $\Gamma\subset\mathbb{C}^n\setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую комплексную прямую, проходящую через точку 0.

Замечание. Гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$ можно интерпретировать как плоскости размерности $2(n-1)$ в вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Эти плоскости образуют $2n$-мерное подмногообразие K в многообразии H всех $2(n-1)$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^{2n}$ ($\dim H = 2(2n-1)$). Таким образом, формула обращения (9.7) дает решение следующей задачи в вещественном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$: восстановить функцию f на $\mathbb{R}^{2n}$, если известны ее интегралы по $2(n-1)$-мерным плоскостям, входящим в $2n$-мерное семейство K.

9.4. Случай $n = 2$. При $n=2$ формула обращения для преобразования Радона имеет вид:

$$f(x_1,x_2) = -\pi^{-2}\,\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}(\mathcal{R}f)''_{p,\overline{p}}(\xi_1,\xi_2\,;\xi_1x_1+\xi_2x_2)\times$$

$$\times(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\wedge(\overline{\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1}). \tag{9.8}$$

Запишем эту формулу в другой системе координат на многообразии прямых. Пусть прямые в $\mathbb{C}^2$ заданы уравнениями

$$x_2 = \alpha\, x_1 + \beta \tag{9.9}$$

и коэффициенты α, β этих уравнений взяты в качестве локальных координат на многообразии прямых.

Зададим интеграл функции f на $\mathbb{C}^2$ по прямой (9.9) равенством

$$\widehat{\mathcal{R}}f(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int f(t, \alpha\, t + \beta)\, dt\, d\bar{t}\,. \tag{9.10}$$

Очевидно, что функции $\widehat{\mathcal{R}}f(\alpha, \beta)$ и $\mathcal{R}\, f(\xi_1, \xi_2; p)$ связаны соотношением:

$$\mathcal{R}\, f(\xi_1, \xi_2; p) = |\xi|^{-2}\widehat{\mathcal{R}}f(-\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{p}{\xi_2}).$$

Если подставить в (9.8) это выражение для $\mathcal{R}\, f$ и принять в качестве Г прямую $\xi_2 = 1$, то мы получим формулу обращения в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) = -\pi^{-2}\, \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} (\widehat{\mathcal{R}}f)''_{\beta,\bar{\beta}}(\alpha, x_2 - \alpha\, x_1)\, d\alpha\, d\overline{\alpha}. \tag{9.11}$$

ГЛАВА II

Лучевое преобразование

В этой главе изучается лучевое преобразование или преобразование Йона $\mathcal{I}$ функций на $\mathbb{R}^3$ и его аналоги для функций на вещественном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ и комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$.

Лучевое преобразование относит каждой финитной или быстро убывающей функции f на $\mathbb{R}^3$ ее интегралы по всевозможным прямым в $\mathbb{R}^3$. В результате получается функция $\varphi = \mathcal{I}f$ на многообразии прямых. Впервые преобразование $\mathcal{I}$ исследовал Ф. Йон (см. сноску на с. 10), установивший его тесную связь с решениями ультрагиперболического дифференциального уравнения.

Здесь, как и для преобразования Радона $\mathcal{R}$, ставятся две основные задачи: описать образ $\mathcal{I}$ и восстановить функцию f по ее образу $\mathcal{I}f$. Однако их решение существенно иное. Главное отличие $\mathcal{I}$ от $\mathcal{R}$ (а также и от преобразований, рассматриваемых в последующих главах) в том, что лучевое преобразование переводит функции от трех переменных в функции от четырех переменных (поскольку многообразие прямых в $\mathbb{R}^3$ имеет размерность 4). Отсюда, во-первых, следует, что функции из образа лучевого преобразования удовлетворяют дополнительному дифференциальному соотношению (соотношение Йона). Во-вторых, задача о восстановлении функции f на $\mathbb{R}^3$ по ее лучевому преобразованию $\mathcal{I}f$ является переопределенной: для восстановления f достаточно, вообще говоря, задавать $\mathcal{I}f$ не на всем четырехмерном многообразии прямых H, а лишь на некотором трехмерном подмногообразии $K \subset H$. Разумеется, существование формулы обращения и ее явный вид могут существенно зависеть от структуры подмногообразия K.

Изложим кратко содержание этой главы. В § 1 дано определение лучевого преобразования функций на $\mathbb{R}^3$. Показано, что одна из основных специальных функций анализа — гипергеометрическая функция Гаусса естественно возникает как лучевое преобразование некоторой функции на $\mathbb{R}^3$. Основная задача этого параграфа — описание образа пространства Шварца $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании; ее решению посвящены п.п. 3 — 6. Далее рассматривается задача о восстановлении функции на $\mathbb{R}^3$ через ее интегралы по прямым, пересекающим фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Существует простое необходимое и достаточное условие на Λ (условие Кириллова), при котором эта задача имеет однозначное решение: нужно, чтобы кривая Λ пересекала почти каждую плоскость в $\mathbb{R}^3$. Для случая, когда условие Кириллова выполнено, в § 1 выводится явная формула обращения.

Следуя плану главы I, мы рассматриваем затем в § 2 лучевое преобразование дифференциальных форм на $\mathbb{R}^3$. Это преобразование определено не только для 1-форм, но также и для форм степени 2 и 3 (ср. случай преобразования Радона). В каждом из этих случаев дано описание образа лучевого преобразования и получена формула, восстанавливающая исходную дифференциальную форму по ее лучевому преобразованию.

В § 3 основные определения и результаты § 1 переносятся на случай проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Переход от аффинного пространства к проективному имеет два важных преимущества. Во-первых, основные определения и результаты в проективном случае имеют более простую и инвариантную по сравнению с аффинным случаем форму. Во-вторых, поскольку само проективное пространство $\mathbb{P}^3$ и многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ компактны, то с этими многообразиями связаны более естественные по сравнению с аффинным случаем пространства функций. В § 3 описание образа лучевого преобразования дано в красивой проективно инвариантной форме. Приведено также простое теоретико-групповое истолкование лучевого преобразования.

Два последних параграфа главы II посвящены аналогу лучевого преобразования для комплексного пространства $\mathbb{C}^3$. Преимущество комплексного варианта в том, что в комплексном случае существуют локальные формулы обращения: для восстановления функции f в точке $x \in \mathbb{C}^3$ по ее лучевому преобразованию $\varphi = \mathcal{I}f$ достаточно знать функцию φ лишь на множестве прямых, бесконечно близких к x.

Фундаментальную роль здесь играет оператор κ, введенный И.М. Гельфандом, М.И. Граевым и З.Я. Шапиро для решения более общей задачи[1], который относит каждой функции φ на многообразии прямых H дифференциальную (1,1)-форму $\kappa\varphi$ на H. В терминах оператора κ в § 4 дается описание образа пространства $S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании и строится явная локальная формула обращения для

[1] Гельфанд И.М., Граев М.И., Шапиро З.Я. Интегральная геометрия на k-мерных плоскостях // Функциональный анализ и его приложения. — 1967. — № 1. — С. 15–31 .

этого преобразования. Оказывается, если $\varphi = \mathcal{I}f$, то для любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ дифференциальная форма $\kappa\varphi$ замкнута на подмногообразии $H^x \subset H$ всех прямых, проходящих через x, и функцию f можно восстановить по следующей формуле обращения:

$$\int\limits_{\gamma^x} \kappa\varphi = c(\gamma^x)\, f(x),$$

где $\gamma^x \subset H^x$ — произвольный цикл вещественной размерности 2, а множитель $c(\gamma^x)$ зависит только от класса гомологий цикла γ^x.

Отметим, что аналог оператора κ был введен в § 1 и для вещественного случая, но там он может быть применен лишь для описания образа лучевого преобразования.

В § 5 сначала рассматриваются подмногообразия K прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих произвольную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$. Для них строится явная локальная формула обращения, восстанавливающая функцию на $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым из K. Этот пример естественно приводит к постановке следующей задачи: описать все “хорошие” трехмерные подмногообразия K (допустимые комплексы) в многообразии H всех прямых, для которых существует явная локальная формула обращения, восстанавливающая функцию на $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым из K. Изучается геометрическая структура допустимых комплексов; показано, что любой допустимый комплекс есть либо многообразие прямых, пересекающих комплексную кривую, либо многообразие прямых, касательных к некоторой комплексной поверхности.

§ 1. Лучевое преобразование в вещественном аффинном пространстве

1.1. Лучевое преобразование в $\mathbb{R}^3$. Будем задавать прямые в $\mathbb{R}^3$ параметрическими уравнениями

$$x = \alpha t + \beta, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — точка прямой, а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha \neq 0$ — ее направляющий вектор.

Определение. Определим интеграл функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$ по произвольной прямой $x = \alpha t + \beta$ равенством

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \beta)\, dt; \tag{1.1}$$

назовем определенную так функцию $\varphi(\alpha,\beta)$ лучевым преобразованием функции f и обозначим через $\mathcal{I}f$.

В силу этого определения φ является функцией на многообразии E всех пар $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^3\setminus 0)\times\mathbb{R}^3$. Очевидно, что она не зависит от выбора точки β на прямой, т.е.

$$\varphi(\alpha,\beta+\alpha t_0)=\varphi(\alpha,\beta)\quad \text{для любого}\quad t_0\in\mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Тем самым, при любом фиксированном α она является функцией на фактор-пространстве $\mathbb{R}^3/\{\alpha\}$, где $\{\alpha\}$ — подпространство, натянутое на вектор α.

Очевидно также, что функция φ удовлетворяет условию однородности:

$$\varphi(\lambda\alpha,\beta)=|\lambda|^{-1}\varphi(\alpha,\beta),\quad \lambda\neq 0. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что функция φ зависит только от самой прямой и от меры на прямой, определяемой вектором α, т.е. является функцией в одномерном расслоении над многообразием прямых. Если при этом в $\mathbb{R}^3$ введена евклидова метрика, то в определении (1.1) можно предполагать, что $|\alpha|=1$; тогда φ является функцией на самом многообразии прямых.

Замечание. Условия (1.2) и (1.3) эквивалентны следующей системе соотношений:

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}=0,\quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=-\varphi;\quad \varphi(-\alpha,\beta):=\varphi(\alpha,\beta). \tag{1.4}$$

Иногда мы будем задавать прямые в $\mathbb{R}^3$ уравнениями

$$x_1=\alpha_1x_3+\beta_1,\quad x_2=\alpha_2x_3+\beta_2,$$

а лучевое преобразование — формулой

$$\psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha_1x_3+\beta_1,\alpha_2x_3+\beta_2,x_3)\,dx_3. \tag{1.5}$$

Очевидно, что функция ψ и функция φ, определенная формулой (1.1), связаны простыми соотношениями:

$$\psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\varphi(\alpha_1,\alpha_2,1,\beta_1,\beta_2,0);$$

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=|\alpha_3|^{-1}\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3},\frac{\alpha_2}{\alpha_3},\beta_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\beta_3,\beta_2-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\beta_3\right).$$

1.2. Лучевое преобразование и гипергеометрическая функция Гаусса. Интегралы (1.1) и (1.5) задают лучевое преобразование не только быстро убывающих функций $f \in S(\mathbb{R}^3)$, но и любых функций f на $\mathbb{R}^3$, для которых они сходятся или им можно придать тот или иной смысл. В частности, определено лучевое преобразование ψ_λ следующей функции на $\mathbb{R}^3$:

$$f_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (x_1)_+{}^{\lambda_1 - 1}(x_2)_+{}^{\lambda_2 - 1}(x_3)_+{}^{\lambda_3 - 1},$$

где $t_+^\lambda = t^\lambda$ при $t > 0$ и $t_+^\lambda = 0$ при $t < 0$; λ_i — произвольные комплексные числа. Установим связь между этим лучевым преобразованием и гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b, c; x)$.

По определению, функция ψ_λ задается интегралом:

$$\psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int_0^\infty (\alpha_1 x_3 + \beta_1)_+{}^{\lambda_1 - 1}(\alpha_2 x_3 + \beta_2)_+{}^{\lambda_2 - 1} x_3^{\lambda_3 - 1}\, dx_3.$$

Интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\operatorname{Re}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) < 2$, и в этой области является аналитической функцией от $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Поэтому его можно определить при любых значениях λ_i как аналитическое продолжение по λ_i этой функции.

Заметим, что интервал, на котором подынтегральная функция отлична от 0, зависит от знаков α_i и β_i, $i = 1, 2$. Рассмотрим для определенности область в многообразии прямых H, в которой $\alpha_i < 0 < \beta_i$, $i = 1, 2$. В этой области заменой переменной $x_3 = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} t$ интеграл приводится к виду:

$$\psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) =$$
$$= \beta_1^{\lambda_1 - 1} \beta_2^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1} |\alpha_2|^{-\lambda_3} \int_0^1 (1 - xt)_+{}^{\lambda_1 - 1}(1 - t)^{\lambda_2 - 1} t^{\lambda_3 - 1}\, dt,$$

где $x = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}$.

Сравним полученное выражение с известным представлением гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b, c; x)$ при $|x| < 1$ в виде эйлеровского интеграла:

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1}(1 - t)^{c-b-1}(1 - xt)^{-a}\, dt;$$

интеграл сходится при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, а при других значениях b и c его нужно понимать в смысле аналитического продолжения по b и c.

Мы заключаем, что при $\alpha_i < 0 < \beta_i$, $i = 1, 2$, и $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} < 1$ функция ψ_λ выражается через функцию Гаусса:

$$\psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \\ = \frac{\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_2 + \lambda_3)}\, \beta_1^{\lambda_1 - 1}\, \beta_2^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}\, |\alpha_2|^{-\lambda_3}\, F(-\lambda_1 + 1, \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3; \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}).$$

Отсюда следует, что

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c - b)}\, \psi_\lambda(-x - 1, 1, 1) \quad \text{при } 0 < x < 1,$$

где $\lambda = (1 - a, c - b, b)$.

Аналогичные выражения функции ψ_λ через функцию Гаусса получаются при других комбинациях знаков α_i и β_i, $i = 1, 2$.

1.3. Теорема об образе оператора $\mathcal{I}$. Этот и последующие три пункта посвящены описанию образа пространства $S(\mathbb{R}^3)$ функций Шварца при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$.

Ясно, прежде всего, что функции из образа пространства $S(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяют условиям гладкости и быстрого убывания. Далее, поскольку лучевое преобразование действует из пространства функций от 3 переменных в пространство функций от 4 переменных, то естественно ожидать, что функции из образа должны удовлетворять и дополнительным условиям.

Убедимся, что любая функция φ из образа лучевого преобразования удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i\, \partial \beta_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_j\, \partial \beta_i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

В самом деле, если $\varphi = \mathcal{I} f$, то из (1.1) следует:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_i\, \partial \beta_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f''_{x_i, x_j}(\alpha t + \beta)\, dt.$$

Таким образом, функция $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i\, \partial \beta_j}$ симметрична относительно перестановки индексов i и j.

Будет доказано, что соотношения (1.5) не только необходимы, но и достаточны для принадлежности функции φ образу пространства $S(\mathbb{R}^3)$. Перейдем к подробным определениям и формулировкам.

Обозначим через H многообразие прямых в $\mathbb{R}^3$ и через $G \simeq P^2$ многообразие одномерных подпространств в $\mathbb{R}^3$, т.е. подмногообразие прямых, проходящих через точку 0. Многообразие H снабжено структурой канонического векторного расслоения над G. Именно, проекция $\pi : H \to G$ ставит в соответствие каждой прямой $h \in H$ параллельное ей подпространство $a \in G$. Таким образом, слой расслоения π над a есть фактор-пространство $H_a = \mathbb{R}^3/a$.

Для H, как и для всякого векторного расслоения с компактной базой, определено понятие быстро убывающей функции: функция на H называется быстро убывающей, если она быстро убывает в каждом слое расслоения $H \to G$.

Определение. Обозначим через $S(H)$ пространство функций $\varphi(\alpha,\beta)$ на E, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3) и таких, что функция $\varphi(\alpha,\beta)$, $|\alpha| = 1$, рассматриваемая как функция на H, является бесконечно дифференцируемой функцией, быстро убывающей вместе со всеми производными.

Из определения оператора $\mathcal{I}$ непосредственно следует, что образ пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании принадлежит $S(H)$:

$$\mathcal{I} : S(\mathbb{R}^3) \to S(H).$$

Теорема 1.1. *Функция $\varphi \in S(H)$ принадлежит образу пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$, т.е. представима в виде $\varphi = \mathcal{I}f$, где $f \in S(\mathbb{R}^3)$, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе* (1.6).

Доказательство будет проведено в пп. 4 — 6.

Приведем другую эквивалентную формулировку теоремы об образе. Введем оператор κ, относящий каждой гладкой функции $\varphi(\alpha,\beta)$ на E следующую дифференциальную 1-форму на E:

$$\kappa\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2}d\alpha_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_3}d\alpha_3. \tag{1.7}$$

Лемма. *Если $\varphi \in S(H)$, то $\kappa\varphi$ опускается с E на многообразие $\widetilde{H}$ ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$.*

В самом деле, из (1.2), (1.3) следует, что форма $\kappa\varphi$ инвариантна относительно преобразований $\beta \mapsto \beta + \alpha t_0$ и $\alpha \mapsto \lambda\alpha, \quad \lambda > 0$.

Заметим, что при изменении ориентации прямой ($\alpha \mapsto -\alpha$) форма $\kappa\varphi$ меняет знак.

Обозначим для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$ через H^x подмногообразие прямых, проходящих через x, и через $\kappa_x\varphi$ ограничение формы $\kappa_x\varphi$ на подмногообразие H^x.

Предложение 1.1. *Условие* (1.5) *эквивалентно условию замкнутости дифференциальной формы* $\kappa_x\varphi$ *на подмногообразии* H^x *при любом* $x \in \mathbb{R}^3$, *т.е. условию, что* $d\kappa_x\varphi = 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\kappa_x\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\beta_i}\Big|_{\beta=x} d\alpha_i.$$

Значит, внешний дифференциал формы $\kappa_x\varphi$ задается формулой:

$$d\kappa_x\varphi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j}\Big|_{\beta=x} d\alpha_i \wedge d\alpha_j =$$

$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} - \frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i}\right)\Big|_{\beta=x} d\alpha_i \wedge d\alpha_j.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение.

В силу Предложения 1.1 теорема 1.1 допускает следующую эквивалентную формулировку:

Теорема 1.2. *Функция* $\varphi \in S(H)$ *тогда и только тогда принадлежит образу пространства* $S(\mathbb{R}^3)$ *при лучевом преобразовании* $\mathcal{I}$, *когда для любой точки* $x \in \mathbb{R}^3$ *дифференциальная форма* $\kappa_x\varphi$ *на подмногообразии* $H^x \subset H$ *замкнута.*

Замечание. Если лучевое преобразование задано в локальных координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на H формулой (1.5), то уравнения (1.6) эквивалентны одному уравнению на функцию ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\,\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}, \tag{1.8}$$

а оператор κ задается в локальных координатах следующей формулой:

$$\kappa\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}d\alpha_2. \tag{1.9}$$

1.4. Пространство $S(H')$. Этот и два следующих пункта посвящены доказательству основной теоремы об образе пространства $S(\mathbb{R}^3)$. При желании читатель может их пропустить и перейти к чтению п. 1.7. Для описания образа пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании сначала перейдем при помощи преобразования Фурье от функций

$\varphi \in S(H)$ к функциям на расслоении $H' \to G$, двойственном к расслоению $H \to G$.

Заметим,что слой расслоения $H' \to G$ над $a \in G$, т.е. пространство H'_a, двойственное к $\mathbb{R}^3/a$, канонически вложен в $(\mathbb{R}^3)'$ как подпространство векторов, ортогональных к a. Таким образом, элементами H' являются пары (a,ξ), где $a \in G$ и ξ — вектор в $(\mathbb{R}^3)'$, ортогональный к a.

Определение. Обозначим через $S(H')$ пространство функций Шварца на H', где $H' \to G$ — расслоение, двойственное к расслоению $H \to G$.

Введем преобразование Фурье $\mathcal{F}_0$ функций $\varphi(\alpha,\beta) \in S(H)$ по слоям расслоения $H \to G$:

$$(\mathcal{F}_0\varphi)(\alpha,\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3/\{\alpha\}} \varphi(\alpha,\beta)\, e^{i\,\langle \beta,\xi\rangle}\, d_\alpha\beta, \qquad \xi \in (\mathbb{R}^3/\{\alpha\})',$$

где $\{\alpha\}$ — одномерное подпространство, натянутое на вектор α, а элемент объема $d_\alpha\beta$ на $\mathbb{R}^3/\{\alpha\}$ выбран согласованно с элементом объема $dx = dx_1\, dx_2\, dx_3$ на $\mathbb{R}^3$ и вектором α, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3/\{\alpha\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \beta)\, dt\, d_\alpha\beta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\, dx$$

для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$.

Из определения $\mathcal{F}_0$ и из условия (1.3) следует, что $\mathcal{F}_0\varphi(\lambda\alpha,\xi) = \mathcal{F}_0\varphi(\alpha,\xi)$ для любого $\lambda \neq 0$ и, значит, $\mathcal{F}_0\varphi$ есть функция на H'.

Напомним, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ функций на $\mathbb{R}^3$

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{i\,\langle \xi, x\rangle}\, dx$$

задает изоморфизм пространств:

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^3) \to S((\mathbb{R}^3)').$$

Аналогично из свойств обычного преобразования Фурье легко следует

Предложение 1.2. *Если $\varphi \in S(H)$, то $\mathcal{F}_0\varphi \in S(H')$, и отображение $\varphi \mapsto \mathcal{F}_0\varphi$ задает изоморфизм пространств*

$$\mathcal{F}_0 : S(H) \to S(H').$$

Сформулируем в виде отдельных предложений два важных свойства пространства $S(H')$. Первое из этих свойств является очевидным, второе требует доказательства, которое мы здесь опускаем.

Предложение 1.3. *Если $F \in S(\mathbb{R}^3)$, то функция φ на H', заданная равенством*

$$\varphi(a,\xi) = F(\xi) \quad \textit{для любого} (a,\xi) \in H',$$

принадлежит $S(H')$. Тем самым, определено естественное вложение

$$S((\mathbb{R}^3)') \hookrightarrow S(H').$$

Предложение 1.4. *Пусть функция $\varphi \in S(H')$ такова, что*

$$\varphi(a,\xi) = F(\xi) \quad \textit{для любого} \quad \xi \neq 0,$$

т.е. для любого $\xi \neq 0$ функция $\varphi(a,\xi)$ не зависит от подпространства a, ортогонального вектору ξ. Тогда $\varphi(a,0)$ не зависит от подпространства a, и если положить $F(0) = \varphi(a,0)$, то определенная так на всем пространстве $(\mathbb{R}^3)'$ функция F принадлежит $S((\mathbb{R}^3)')$.

1.5. Описание образа $S(\mathbb{R}^3)$ в пространстве $S(H')$. Найдем образ $S(\mathbb{R}^3)$ в пространстве $S(H')$ при сквозном отображении

$$\mathcal{F}_0\mathcal{I} : S(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathcal{I}} S(H) \xrightarrow{\mathcal{F}_0} S(H').$$

Предложение 1.5. *Для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$ имеем:*

$$\mathcal{F}_0\mathcal{I}f = (2\pi)^{1/2}\mathcal{F}f, \tag{1.10}$$

где $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$, т.е. $\mathcal{F}f$ — элемент подпространства $S((\mathbb{R}^3)') \subset S(H')$.

Доказательство. Пусть $(a,\xi) \in H'$ и $\alpha \neq 0$ — произвольный вектор в подпространстве $a \in G$. Тогда имеем:

$$(\mathcal{F}_0\mathcal{I}f)(\alpha,\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3/a} \mathcal{I}f(\alpha,\beta)\, e^{i\langle\beta,\xi\rangle}\, d_\alpha\beta =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3/\{\alpha\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \beta)\, e^{i\langle\beta,\xi\rangle}\, dt\, d_\alpha\beta =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx = (2\pi)^{1/2}(\mathcal{F}f)(\xi).$$

Следствие. *Образ $S(\mathbb{R}^3)$ при отображении $\mathcal{F}_0\mathcal{I}$ есть подпространство $S((\mathbb{R}^3)') \subset S(H')$.*

В самом деле, из Предложения 1.5 следует, что образ $S(\mathbb{R}^3)$ при отображении $\mathcal{F}_0\mathcal{I}$ содержится в $S((\mathbb{R}^3)')$. Обратно, если $\widetilde{f} \in S((\mathbb{R}^3)')$, то $\widetilde{f} = \mathcal{F}f$, где $f \in S(\mathbb{R}^3)$. Но тогда $\mathcal{F}_0\mathcal{I}f = (2\pi)^{1/2}\mathcal{F}f = (2\pi)^{1/2}\widetilde{f}$.

Примечание. Из равенства (1.10) следует формула обращения для лучевого преобразования. Именно, для восстановления f нужно к функции $\mathcal{F}_0\mathcal{I}f$ применить обратное преобразование Фурье на $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$f = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_0)\mathcal{I}f.$$

1.6. Доказательство теоремы 1.1 об образе лучевого преобразования. Пусть $\varphi \in S(H)$ и $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}_0\varphi$. Для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 1.6. *Если функция φ удовлетворяет уравнениям* (1.6), *то $\tilde{\varphi}(a,\xi) = F(\xi)$ для любого вектора $\xi \neq 0$, т.е. при $\xi \neq 0$ функция $\tilde{\varphi}(a,\xi)$ не зависит от подпространства a, ортогонального ξ.*

В самом деле, в этом случае, в силу Предложения 1.4, функция $\tilde{\varphi} = \mathcal{I}_0\varphi$ принадлежит подпространству $S((\mathbb{R}^3)') \subset S(H')$. Но тогда, в силу Предложения 1.5 (Следствие), $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}_0\mathcal{I}f$ для некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$. Значит, $\varphi = \mathcal{I}f$.

Доказательство Предложения 1.6. Пусть a — любое одномерное подпространство и $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ — любой ненулевой вектор в a. Обозначим через V_i, $i = 1,2,3$, совокупность подпространств a, для которых $\alpha_i \neq 0$. Поскольку V_i образуют покрытие G, то утверждение достаточно доказать для каждой области V_i в отдельности. Рассмотрим для определенности область V_3.

Зададим каждое подпространство $a \in V_3$ вектором $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,1)$ и примем координаты α_1,α_2 этого вектора в качестве координат на V_3. Очевидно далее, что на каждой прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной a, существует точка $\beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, у которой $\beta_3 = 0$. Примем координаты β_1,β_2 этой точки в качестве координат в $\mathbb{R}^3/a$. В этой системе координат мера на $\mathbb{R}^3/a$ имеет вид $d_\alpha\beta = d\beta_1\,d\beta_2$, а потому

$$\tilde{\varphi}(a,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\, e^{i(\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2)}\, d\beta_1\, d\beta_2,$$

где обозначено:

$$\psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) = \varphi(\alpha_1,\alpha_2,1,\beta_1,\beta_2,0),$$

причем α_1, α_2 и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ связаны соотношением:

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \xi_3 = 0. \tag{1.11}$$

В силу соотношения (1.11), можно принять ξ_1, ξ_2 в качестве координат на $H'_a = (\mathbb{R}^3/a)'$. При этом, если $\xi \neq 0$, то $(\xi_1, \xi_2) \neq 0$.

В силу условия теоремы, функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\partial\beta_1}.$$

Отсюда следует, что ее преобразование Фурье по β_1, β_2 удовлетворяет уравнению

$$\xi_2\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\alpha_1} = \xi_1\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\alpha_2}.$$

При $(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2) = F(\xi_1, \xi_2, -(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)),$$

т.е. в силу соотношения (1.11)

$$\tilde{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Таким образом, при фиксированном $\xi \neq 0$ функция $\tilde{\varphi}(a, \xi)$ не зависит от a.

1.7. Формулы обращения. Рассмотрим задачу о восстановлении функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$ через ее лучевое преобразование $\varphi = \mathcal{I}f$. Как уже отмечалось в начале главы II, эта задача переопределена. Например, чтобы восстановить f в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^x$, достаточно провести через x произвольную плоскость и воспользоваться формулой обращения для преобразования Радона, связанного с этой плоскостью.

Естественно поставить другую задачу — восстановить функцию f через ее лучевое преобразование, заданное на некотором трехмерном подмногообразии K в многообразии H всех прямых. Разумеется, существование формулы обращения и ее явный вид могут существенно зависеть от структуры подмногообразия K.

Простейший пример: K — многообразие всех прямых, пересекающих фиксированную прямую l в $\mathbb{R}^3$. В этом случае, чтобы восстановить f в произвольной точке x, нужно рассмотреть плоскость π, натянутую на x и l (если $x \in l$, то произвольную плоскость, содержащую l). Так как по условию интегралы по всем прямым в этой плоскости нам заданы, то $f(x)$ можно восстановить по формуле обращения для преобразования Радона на плоскости, полученной в § 1 главы 1.

В этом пункте мы рассмотрим более общий пример. Пусть K — многообразие всех прямых в $\mathbb{R}^3$, пересекающих фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Требуется восстановить функцию $f \in S(\mathbb{R}^3)$ по функции $\mathcal{I}f\,|_K$, т.е. по функции

$$\varphi(\alpha,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \lambda)\,dt, \quad (\alpha,\lambda) \in (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times \Lambda. \tag{1.12}$$

А.А. Кириллов [1)] доказал, что функция f тогда и только тогда однозначно восстанавливается по функции φ, когда кривая Λ пересекает почти каждую плоскость в $\mathbb{R}^3$. Построим явную формулу обращения, восстанавливающую f по функции φ в случае, когда условие Кириллова выполнено.

Перейдем от φ к новой функции ψ, определенной следующим равенством:

$$\psi(\xi,\lambda) = \int_{|\omega|=1} \varphi(\omega,\lambda)\,\langle \xi,\omega\rangle^{-2}\,d\sigma, \quad \xi \in (\mathbb{R}^3)' \setminus 0. \tag{1.13}$$

Интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения как значение при $s = -2$ аналитической функции, заданной при $\operatorname{Re} s > 0$ сходящимся интегралом:

$$\int_{|\omega|=1} \varphi(\omega,\lambda)\,\langle \xi,\omega\rangle^{s}\,d\sigma.$$

Замечание. Функция ψ совпадает с преобразованием Фурье по α функции φ, рассматриваемой как обобщенная однородная функция от α.

Задача тем самым свелась к восстановлению f по функции ψ.

Обозначим через $\lambda(\xi,p)$ произвольную точку пересечения плоскости $\langle \xi, x\rangle - p = 0$ с кривой Λ. По предположению, для почти каждой пары (ξ,p) хотя бы одна такая точка существует.

Предложение 1.7. *Функция $\psi(\xi, \lambda(\xi,p))$ не зависит от выбора точки $\lambda(\xi,p)$, т. е. $\psi(\xi, \lambda(\xi,p)) = \Psi(\xi,p)$, и справедлива следующая формула обращения:*

$$f(x) = c \int_{|\xi|=1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi,p)\,(\langle \xi, x\rangle - p)^{-2}\,dp\,d\sigma, \tag{1.14}$$

[1)] Кириллов А.А. Об одной задаче И.М.Гельфанда // Докл. АН СССР. — 1961. — № 2. — С. 276–277.

где интеграл, подобно (1.13), *надо понимать в смысле регуляризованного значения.*

Приведем набросок доказательства Предложения 1.7. Выразим ψ непосредственно через исходную функцию f, подставив (1.9) в формулу (1.13). Мы получим:

$$\psi(\xi,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,(\langle \xi, x-\lambda\rangle)^{-2}\,dx.$$

Следовательно,

$$\psi(\xi,\lambda(\xi,p)) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,(\langle \xi, x\rangle - p)^{-2}\,dx. \tag{1.15}$$

Из (1.15) следует прежде всего, что $\psi(\xi,\lambda(\xi,p))$ не зависит от выбора точки $\lambda(\xi,p)$ пересечения кривой Λ с плоскостью $\langle \xi, x\rangle - p = 0$. Далее, функция $\psi(\xi,\lambda(\xi,p)) = \Psi(\xi,p)$ получается из исходной функции f преобразованием, аналогичным преобразованию Радона в $\mathbb{R}^3$, где ядро $\delta(\langle \xi, x\rangle - p)$ заменено другой обобщенной функцией $(\langle \xi, x\rangle - p)^{-2}$. Для этого преобразования, подобно преобразованию Радона, справедлива формула обращения, выражающаяся равенством (1.14).

1.8. Аналоги оператора κ. В п. 1.3 был введен линейный оператор κ из пространства $S(H)$ в пространство $\Omega^1(H)$ дифференциальных 1-форм на многообразии прямых H, обладающий следующим важным свойством:

Условие А. Если $\varphi = \mathcal{I}f$, то дифференциальная форма $\kappa\varphi$ замкнута на подмногообразиях H^x прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку $x \in \mathbb{R}^3$.

Поставим задачу: описать все линейные операторы κ, обладающие этим свойством. В формулировке Предложения 1.8 мы уточним постановку задачи, сузив класс рассматриваемых операторов.

Будем предполагать, что прямые в $\mathbb{R}^3$ заданы уравнениями

$$x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

а лучевое преобразование $\psi = \mathcal{I}f$ задано в локальных координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на H формулой (1.5). Согласно п. 1.3 функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1\,\partial \beta_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2\,\partial \beta_1},$$

а оператор κ задается следующей формулой:

$$\kappa\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}d\alpha_2. \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что, кроме $\kappa=\kappa_1$, условию A удовлетворяют также следующие три оператора:

$$\begin{aligned}
\kappa_2\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}d\beta_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}d\beta_2,\\
\kappa_3\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}d\alpha_2,\\
\kappa_4\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}d\beta_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}d\beta_2.
\end{aligned}$$

В самом деле, так как $d\beta_i\,\big|_{H^x} = -x_3\,d\alpha_i$, $i=1,2$, на H^x, то на H^x формы $\kappa_2\psi$ и $\kappa_4\psi$ пропорциональны соответственно $\kappa_1\psi$ и $\kappa_3\psi$. Далее, имеем: $\kappa_2\psi + \kappa_3\psi = d\psi$. Следовательно, на H^x все формы $\kappa_i\psi$ с точностью до множителя когомологичны форме $\kappa_1\psi$.

Рассмотрим операторы κ вида

$$\kappa\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}\omega_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}\omega_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}\omega_3 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}\omega_4, \tag{1.17}$$

где ω_i — произвольные 1-формы на H.

Предложение 1.8. *Любой оператор κ вида* (1.17), *удовлетворяющий условию A, является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов κ_i, $i=1,2,3,4$.*

Доказательство. Для удобства будем писать α_3,α_4 вместо β_1,β_2. Тогда выражение (1.17) примет вид:

$$\kappa\psi = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}\omega_i, \quad \text{где} \quad \omega_i = \sum_{j=1}^{4}a_{ij}(\alpha)\,d\alpha_j, \quad i=1,2,3,4.$$

Из равенства $d\kappa\psi\,\big|_{H^x}=0$ следует, что на подмногообразиях H^x дифференциальные формы ω_i удовлетворяют соотношениям:

$$\omega_i \wedge d\alpha_i = 0, \quad i=1,2,3,4, \tag{1.18}$$

$$\omega_1\wedge d\alpha_2 + \omega_2\wedge d\alpha_1 = 0, \quad \omega_3\wedge d\alpha_4 + \omega_4\wedge d\alpha_3 = 0, \tag{1.19}$$

$$d\omega_i = 0, \quad i=1,2,3,4. \tag{1.20}$$

Из (1.18) следует, что

$$\omega_1 = a_{11}\,d\alpha_1 + a_{13}\,d\alpha_3, \quad \omega_2 = a_{22}\,d\alpha_2 + a_{24}\,d\alpha_4,$$
$$\omega_3 = a_{31}\,d\alpha_1 + a_{33}\,d\alpha_3, \quad \omega_4 = a_{42}\,d\alpha_2 + a_{44}\,d\alpha_4.$$

Подставив полученные выражения для ω_i в (1.19), получим:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{24}, \quad a_{31} = a_{42}, \quad a_{33} = a_{44}.$$

Отсюда следует, что

$$\kappa = a_{11}\,\kappa_4 + a_{33}\,\kappa_2 + a_{31}\,\kappa_1 + a_{13}\,\kappa_3.$$

Наконец, подставив это выражение в (1.20), заключаем, что все входящие в него коэффициенты a_{ij} суть постоянные.

§ 2. Лучевое преобразование дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$

2.1. Определение лучевого преобразования дифференциальных форм. Здесь будут рассмотрены интегральные преобразования, относящие дифференциальным формам на $\mathbb{R}^3$ их интегралы по прямым в $\mathbb{R}^3$. Эти преобразования определены не только для дифференциальных форм степени 1, но также и для дифференциальных форм степеней 2 и 3. При этом получаются дифференциальные формы на многообразии прямых степени на единицу меньшей. Аналогичные преобразования дифференциальных форм на $\mathbb{R}^3$, связанные с плоскостями в $\mathbb{R}^3$, рассматривались в § 7 главы I.

Хотя определение этих преобразований можно дать в инвариантной форме, нам удобнее связать его здесь с выбором конкретной локальной системы координат на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$.

Будем задавать прямые в $\mathbb{R}^3$ уравнениями

$$x_i = \alpha_i\,x_3 + \beta_i, \quad i = 1,2, \tag{2.1}$$

и примем коэффициенты α_i, β_i этих уравнений в качестве локальных координат на многообразии прямых.

Введем 4-мерное многообразие флагов A, элементы которого — пары (h, x), где h — произвольная прямая в $\mathbb{R}^3$, а x — произвольная точка в $\mathbb{R}^3$, принадлежащая прямой h. Зададим на A две системы координат. Первая система — $(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2)$, где (x_1, x_2, x_3) — координаты точки в $\mathbb{R}^3$, а (α_1, α_2) задают направление прямой, проходящей через эту точку. Вторая система — $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3)$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$

локальные координаты прямой, а x_3 — координата точки на этой прямой. Эти две системы координат связаны соотношением (2.1).

Определим лучевое преобразование дифференциальной формы ω на $\mathbb{R}^3$ степени $r \geqslant 1$. Будем трактовать ω как дифференциальную форму на A, заданную в системе координат $(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2)$. Перейдем в выражении для ω ко второй системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3)$ и отбросим слагаемые, не содержащие dx_3. Полученное выражение является при фиксированных $\alpha_i, \beta_i, d\alpha_i, d\beta_i$ дифференциальной 1-формой на прямой с координатами α_i, β_i, $i = 1, 2$. Интегрируя ее по этой прямой, мы получим дифференциальную $(r-1)$-форму на многообразии прямых. Назовем эту форму лучевым преобразованием исходной дифференциальной формы ω и обозначим через $\mathcal{I}\omega$.

Приведенное определение удобно для вычислений, но оно привязано к конкретной системе координат в $\mathbb{R}^3$ и в многообразии прямых H. Существует инвариантное определение лучевого преобразования дифференциальных форм в терминах операций поднятия и опускания. Именно, для любого гладкого расслоения $\pi : A \to B$ определены две операции над дифференциальными формами — операция $\pi^\star$ поднятия и операция $\pi_\star$ опускания. Первая из них переводит дифференциальные формы на B в дифференциальные формы той же степени на A; вторая (интегрирование по слоям расслоения) переводит дифференциальные формы степени r на A в формы степени $r - l$ на B, где l – размерность слоя расслоения $A \to B$ (предполагается, что $r \geqslant l$).

Если задана пара расслоений $A \to B$ и $A \to C$, то с нею можно связать интегральное преобразование

$$\mathcal{I} : \Omega(B) \to \Omega(C)$$

из пространства дифференциальных форм на B в пространство дифференциальных форм на C. Оно определяется как композиция $\mathcal{I} = \pi_\star \pi^\star$ операции $\pi^\star$ поднятия формы с B на A и операции $\pi_\star$ опускания формы с A на C. Оказывается, что определенный так оператор $\mathcal{I}$ перестановочен с оператором внешнего дифференцирования d:

$$d\mathcal{I} = \mathcal{I}d.$$

Лучевое преобразование $\mathcal{I} : \Omega(\mathbb{R}^3) \to \Omega(H)$ есть пример такой операции, связанный с расслоениями $A \to \mathbb{R}^3$ и $A \to H$, где A — пространство флагов. Свойство $d\mathcal{I} = \mathcal{I}\,d$ этой операции можно проверить непосредственным вычислением.

2.2. Лучевое преобразование 3-форм на $\mathbb{R}^3$. Пусть задана дифференциальная 3-форма

$$\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad f \in S(\mathbb{R}^3).$$

Чтобы построить ее лучевое преобразование, надо сначала представить ω в координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3)$ на A:

$$\omega = f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)(x_3\, d\alpha_1 + d\beta_1) \wedge (x_3\, d\alpha_2 + d\beta_2) \wedge dx_3.$$

В соответствии с определением из п. 2.1, лучевое преобразование формы ω задается следующим равенством:

$$\mathcal{I}\omega = \varphi_2(\alpha,\beta)\, d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \varphi_1(\alpha,\beta)\,(d\alpha_1 \wedge d\beta_2 - d\alpha_2 \wedge d\beta_1) + \\ + \varphi_0(\alpha,\beta)\, d\beta_1 \wedge d\beta_2, \quad (2.2)$$

где

$$\varphi_i(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,(x_3)^i\, dx_3, \quad i = 0,1,2. \quad (2.3)$$

Исследуем свойства полученной формы. Прежде всего, поскольку $f \in S(\mathbb{R}^3)$, коэффициенты φ_i этой формы удовлетворяют естественным условиям быстрого убывания вместе со всеми производными.

Предложение 2.1. *Дифференциальная форма $\mathcal{I}\omega$ замкнута.*

В самом деле, из выражений (2.3) для коэффициентов φ_i формы $\mathcal{I}\omega$ следует:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_i}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha_i}, \quad i = 1,2. \quad (2.4)$$

Эти соотношения эквивалентны условию замкнутости формы $\mathcal{I}\omega$.

Замечание. Замкнутость $\mathcal{I}\omega$ вытекает также из замкнутости ω как формы максимальной степени на $\mathbb{R}^3$ и перестановочности $\mathcal{I}$ с оператором внешнего дифференцирования.

Предложение 2.2. *Ограничение дифференциальной формы $\mathcal{I}\omega$ на подмногообразие прямых, лежащих в произвольной фиксированной плоскости, равно нулю.*

Доказательство. Подмногообразие P прямых, лежащих в произвольной фиксированной плоскости, задается в локальных координатах (α,β) следующей системой уравнений:

$$\lambda_1(\alpha_1 - \alpha_1^0) + \lambda_2(\alpha_2 - \alpha_2^0) = 0, \quad \lambda_1(\beta_1 - \beta_1^0) + \lambda_2(\beta_2 - \beta_2^0) = 0.$$

Здесь (α^0, β^0) — координаты произвольной фиксированной прямой на этой плоскости, а λ_1, λ_2 — постоянные. Значит, на этом подмногообразии P мы имеем: $d\alpha_2 = \lambda\, d\alpha_1$, $d\beta_2 = \lambda\, d\beta_1$, где $\lambda = -\lambda_1/\lambda_2$, а потому из (2.2) следует, что $\mathcal{I}\omega\,|_P = 0$.

Теорема 2.1. *Дифференциальная 2-форма Ω с быстро убывающими коэффициентами на многообразии прямых H является лучевым преобразованием некоторой 3-формы $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $f \in S(\mathbb{R}^3)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям Предложений 2.1 и 2.2.*

Доказательство. Необходимость условий уже установлена. Докажем их достаточность. Пусть дифференциальная 2-форма Ω удовлетворяет условиям Предложений 2.1 и 2.2. Докажем сначала, что она имеет вид (2.2), т.е. не содержит членов с $d\alpha_i \wedge d\beta_i$, $i = 1, 2$, а коэффициенты при $d\alpha_1 \wedge d\beta_2$ и $d\alpha_2 \wedge d\beta_1$ различаются только знаком.

В самом деле, пусть

$$\Omega = a_1\,d\alpha_1 \wedge d\beta_1 + a_2\,d\alpha_2 \wedge d\beta_2 + b_1\,d\alpha_1 \wedge d\beta_2 + b_2\,d\alpha_2 \wedge d\beta_1 + \ldots,$$

где многоточием обозначены остальные члены. Тогда, если h^0 — произвольная прямая и P — многообразие прямых в произвольной плоскости, проходящей через h^0, то (см. доказательство Предложения 2.2) имеем:

$$\Omega\,|_P = (a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda(b_1 + b_2))\,d\alpha_1 \wedge d\beta_1.$$

Так как, согласно условию, $\Omega\,|_P = 0$, то, ввиду произвольности λ, отсюда следует: $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = -b_2$.

Итак, доказано, что форма Ω имеет вид:

$$\Omega = \psi_2(\alpha,\beta)\,d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \psi_1(\alpha,\beta)\,(d\alpha_1 \wedge d\beta_2 - d\alpha_2 \wedge d\beta_1) + \\ + \psi_0(\alpha,\beta)\,d\beta_1 \wedge d\beta_2.$$

Из замкнутости Ω следует, что функции ψ_i связаны соотношениями

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_i}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Поэтому функция ψ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\alpha_1\beta_2} = \frac{\partial^2\psi_0}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}.$$

Значит, по теореме об образе лучевого преобразования (см. § 1), она является лучевым преобразованием некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$:

$$\psi_0(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,dx_3.$$

Убедимся, что $\Omega = \mathcal{I}\omega$, где $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. В самом деле, из формул (2.3), которыми задаются коэффициенты φ_i формы $\mathcal{I}\omega$, следует прежде всего, что $\psi_0 = \varphi_0$. Далее, отсюда и из (2.4), (2.5) следует, что $\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_i}$, $i = 1,2$. Следовательно, ввиду быстрого убывания ψ_1 и φ_1, $\psi_1 = \varphi_1$. Аналогично убеждаемся, что $\psi_2 = \varphi_2$ и, значит, $\Omega = \mathcal{I}\omega$.

Заметим, что форма $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ восстанавливается только по одному коэффициенту φ_0 формы $\mathcal{I}\omega$, поскольку функция φ_0 является лучевым преобразованием функции f.

2.3. Лучевое преобразование 2-форм на $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим теперь произвольную дифференциальную 2-форму

$$\omega = f_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2$$

с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. В координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3$ на пространстве флагов она имеет следующий вид:

$$\omega = f_1\,(x_3\,d\alpha_2 + d\beta_2) \wedge dx_3 + f_2\,dx_3 \wedge (x_3\,d\alpha_1 + d\beta_1) + \\ + f_3\,(\alpha_1\,dx_3 + x_3\,d\alpha_1 + d\beta_1) \wedge (\alpha_2\,dx_3 + x_3\,d\alpha_2 + d\beta_2).$$

В соответствии с определением из п. 2.1, лучевое преобразование 2-формы ω есть 1-форма

$$\mathcal{I}\omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b_1\,d\beta_1 + b_2\,d\beta_2 \tag{2.6}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_2\psi_3 - \psi_2, \quad & a_2 &= -\alpha_1\psi_3 + \psi_1, \\ b_1 &= \alpha_2\varphi_3 - \varphi_2, \quad & b_2 &= -\alpha_1\varphi_3 + \varphi_1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\varphi_i(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_i(\alpha_1 x_3 + \beta_1\,, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,dx_3, \quad i = 1,2,3, \tag{2.8}$$

$$\psi_i(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_3 f_i(\alpha_1 x_3 + \beta_1\,, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,dx_3, \quad i = 1,2,3. \tag{2.9}$$

Рассмотрим сначала задачу о восстановлении формы ω по ее лучевому преобразованию $\mathcal{I}\omega$. Эта задача сводится к соответствующей задаче для функций на основании следующего утверждения:

Предложение 2.3. *Функции φ_i следующим образом выражаются через коэффициенты формы $\mathcal{I}\omega$:*

$$\varphi_3 = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2}, \quad \varphi_1 = \alpha_1 \varphi_3 + b_2, \quad \varphi_2 = \alpha_2 \varphi_3 - b_1. \tag{2.10}$$

Равенства (2.10) следуют непосредственно из (2.7) — (2.9).

Поскольку функции φ_i являются лучевыми преобразованиями коэффициентов f_i формы ω, то для восстановления этих коэффициентов достаточно применить к φ_i формулу обращения для лучевого преобразования функций.

Перейдем теперь к описанию образа лучевого преобразования $\mathcal{I}$. Для этого установим сначала соотношения между коэффициентами дифференциальной формы $\mathcal{I}\omega$.

Предложение 2.4. *Коэффициенты a_i, b_i дифференциальной формы $\mathcal{I}\omega$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\frac{\partial a_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \beta_2} = \frac{\partial b_2}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2} - \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} = -\left(\frac{\partial a_2}{\partial \beta_1} - \frac{\partial b_2}{\partial \alpha_1}\right) \tag{2.11}$$

и

$$\Delta\left(\frac{\partial a_1}{\partial \beta_2} - \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2}\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1}. \tag{2.12}$$

В самом деле, (2.11) следует непосредственно из (2.7), (2.8), (2.9). Соотношение (2.12) следует из доказанного выше равенства $\varphi_3 = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2}$, поскольку $\Delta \varphi_3 = 0$.

Предложение 2.5. *Соотношения (2.11) эквивалентны условию, что ограничение $\mathcal{I}\omega\,|_P$ дифференциальной формы $\mathcal{I}\omega$ на подмногообразие прямых, принадлежащих произвольной плоскости P, является замкнутой формой на P, т.е. $d\mathcal{I}\omega\,|_P = 0$.*

Доказательство. Имеем:

$$d\mathcal{I}\omega = \left(\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_1}\right) d\alpha_1 \wedge d\beta_1 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2}\right) d\alpha_1 \wedge d\beta_2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_2}{\partial \beta_1}\right) d\alpha_2 \wedge d\beta_1 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_2}{\partial \beta_2}\right) d\alpha_2 \wedge d\beta_2 + \dots .$$

Поэтому соотношения (2.11) эквивалентны условию, что форма $d\mathcal{I}\omega$ не содержит членов с $d\alpha_i \wedge d\beta_i$, $i = 1, 2$, а коэффициенты при $d\alpha_1 \wedge d\beta_2$ и $d\alpha_2 \wedge d\beta_1$ различаются только знаком. В свою очередь, согласно п. 2.2, это условие эквивалентно условию, сформулированному в Предложении.

Теорема 2.2. *Пусть Ω — дифференциальная 1-форма на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$ с бесконечно дифференцируемыми быстро убывающими коэффициентами*

$$\Omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b_1\,d\beta_1 + b_2\,d\beta_2.$$

Для того чтобы форма Ω была лучевым преобразованием некоторой дифференциальной 2-формы ω на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$, необходимо и достаточно, чтобы ее ограничения $\Omega\,|_P$ на подмногообразия P прямых, лежащих в одной и той же плоскости, были замкнутыми формами, и чтобы ее коэффициенты удовлетворяли дополнительному условию (2.12).

Доказательство. Необходимость условий теоремы уже доказана. Докажем их достаточность. Итак, пусть дифференциальная форма Ω удовлетворяет условиям теоремы. Тогда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям (2.11) и (2.12).

Определим функции φ_i, $i = 1,2,3$, равенствами (2.10). Из (2.12) следует, что $\Delta\varphi_3 = 0$. Убедимся, что также $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 = 0$. В самом деле, имеем: $\Delta\varphi_2 = \alpha_2\,\Delta\varphi_3 - \frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_1} - \Delta b_1 = -\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial a_1}{\partial\beta_2}\right) - -\frac{\partial^2 b_1}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial\alpha_2\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\beta_1} - \frac{\partial b_1}{\partial\alpha_1}\right) = 0$. Аналогично устанавливается, что $\Delta\varphi_1 = 0$.

Отсюда следует (см. § 1), что функции φ_i являются лучевыми преобразованиями функций $f_i \in S(\mathbb{R}^3)$, т.е. задаются равенствами (2.8). Введем дифференциальную форму

$$\omega = f_1(x)\,dx_2\wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3\wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1\wedge dx_2$$

и докажем, что $\Omega = \mathcal{I}\omega$.

В самом деле,

$$\mathcal{I}\omega = \tilde a_1\,d\alpha_1 + \tilde a_2\,d\alpha_2 + \tilde b_1\,d\beta_1 + \tilde b_2\,d\beta_2,$$

где

$$\tilde a_1 = \alpha_2\,\psi_3 - \psi_2,\quad \tilde a_2 = -\alpha_1\,\psi_3 + \psi_1,$$
$$\tilde b_1 = \alpha_2\,\varphi_3 - \varphi_2,\quad \tilde b_2 = -\alpha_1\,\varphi_3 + \varphi_1,$$

а φ_i и ψ_i выражаются через коэффициенты формы ω равенствами (2.8),(2.9).

В силу Предложения 2.3

$$\varphi_3 = \frac{\partial\tilde b_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\tilde a_1}{\partial\beta_2},\quad \varphi_1 = \alpha_1\varphi_3 + \tilde b_2,\quad \varphi_2 = \alpha_2\varphi_3 - \tilde b_1. \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.8) и (2.13), заключаем, что $\tilde{b}_i = b_i$, $i = 1,2$. Отсюда, сравнивая соотношения (2.11) для a_i, b_i с аналогичными соотношениями для $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$, получаем: $\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j}$, $i, j = 1,2$. Значит, ввиду быстрого убывания функций $a_i, \tilde{a}_i$, имеем: $\tilde{a}_i = a_i$, $i = 1,2$, а потому $\Omega = \mathcal{I}\omega$.

2.4. Лучевое преобразование 1-форм на $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим дифференциальную 1-форму на $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = f_1(x)\, dx_1 + f_2(x)\, dx_2 + f_3(x)\, dx_3, \quad f_i \in S(\mathbb{R}^3).$$

По определению, ее лучевое преобразование $\varphi = \mathcal{I}\omega$ является функцией на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\, \alpha_1 + \\ + f_2(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\, \alpha_2 + \\ + f_3(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)]\, dx_3.$$

Найдем ядро и образ преобразования $\mathcal{I}$.

Предложение 2.6. *Ядро* $\mathrm{Ker}\mathcal{I}$ *лучевого преобразования совпадает с подпространством всех точных дифференциальных* 1*-форм на* $\mathbb{R}^3$ *с коэффициентами из* $S(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Очевидно, любая точная 1-форма ω на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $\mathrm{Ker}\mathcal{I}$. Обратно, пусть $\omega \in \mathrm{Ker}\mathcal{I}$, т.е. $\mathcal{I}\omega = 0$. Тогда $\mathcal{I}\, d\omega = d\mathcal{I}\omega = 0$. Так как на дифференциальных 2-формах лучевое преобразование $\mathcal{I}$ имеет нулевое ядро, то из $\mathcal{I}\, d\omega = 0$ следует, что $d\omega = 0$, т.е. форма ω замкнута. Из замкнутости формы ω следует ее точность.

Предложение 2.7. *Функция* φ *из пространства Шварца на многообразии прямых* H *принадлежит образу* $\mathrm{Im}\mathcal{I}$ *лучевого преобразования тогда и только тогда, когда ее дифференциал* $d\varphi$ *принадлежит образу лучевого преобразования дифференциальных* 2*-форм на* H.

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathrm{Im}\mathcal{I}$, т.е. $\varphi = \mathcal{I}\omega_1$, где ω_1 — 1-форма с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. Тогда $d\varphi = d\mathcal{I}\omega_1 = \mathcal{I}d\omega_1$, т.е. $d\varphi \in \mathrm{Im}\mathcal{I}$. Обратно, пусть $d\varphi \in \mathrm{Im}\mathcal{I}$, т.е. $d\varphi = \mathcal{I}\omega_2$, где ω_2 — 2-форма на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. Тогда имеем: $\mathcal{I}d\omega_2 = d\mathcal{I}\omega_2 = 0$ и так как на 3-формах в $\mathbb{R}^3$ лучевое преобразование имеет нулевое ядро, то $d\omega_2 = 0$, т.е. форма ω_2 замкнута. Поскольку любая замкнутая 2-форма на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$ точна, то $\omega_2 = d\omega_1$, где ω_1 — 1-форма на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. Итак, $d\varphi = \mathcal{I}d\omega_1 = d\mathcal{I}\omega_1$, откуда $d(\varphi - \mathcal{I}\omega_1) = 0$. Следовательно, $\varphi = \mathcal{I}\omega_1$.

Теорема 2.3. *Функция φ из пространства Шварца на H является лучевым преобразованием 1-формы на $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению*

$$\Delta^2\varphi = 0, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\beta_1}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Из Предложения 2.7 и из описания образа лучевого преобразования дифференциальных 2-форм (п. 2.3) следует, что $\varphi \in \operatorname{Im}\mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $a_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}$ и $b_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}$, $i = 1, 2$, дифференциальной формы $d\varphi$ удовлетворяют соотношениям (2.11) и (2.12). Очевидно, что в случае дифференциальной формы $d\varphi$ соотношения (2.11) выполняются тождественно, а (2.12) совпадает с (2.14).

§ 3. Лучевое преобразование в трехмерном вещественном проективном пространстве

В этом параграфе основные определения и результаты § 1 будут перенесены на случай проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Переход от аффинного пространства к проективному имеет два важных преимущества. Во-первых, основные определения и результаты в проективном случае имеют более простую и инвариантную по сравнению с аффинным случаем форму. Во-вторых, поскольку само проективное пространство $\mathbb{P}^3$ и многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ компактны, то с этими многообразиями связаны более естественные по сравнению с аффинным случаем пространства функций.

Мы дадим также групповое истолкование лучевого преобразования.

3.1. Многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$. Будем задавать точки в $\mathbb{P}^3$ однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, т.е. векторами $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$, определенными с точностью до множителя. Иначе говоря, точки пространства $\mathbb{P}^3$ интерпретируются как одномерные подпространства в $\mathbb{R}^4$. Множеству точек на прямой соответствует множество одномерных подпространств в $\mathbb{R}^4$, принадлежащих двумерному подпространству. Таким образом, прямые в $\mathbb{P}^3$ интерпретируются как двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$ и, значит, многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ отождествляется с грассманианом $G_{2,4}$ двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$.

Введем систему координат на грассманиане $G_{2,4}$. Пусть $h \in G_{2,4}$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ — произвольный базис в подпространстве h.

Определение. Плюккеровыми координатами двумерного подпространства h в $\mathbb{R}^4$ называются координаты бивектора $x \wedge y$, т.е. следующий набор чисел:

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j.$$

При замене базиса в h, т.е. при замене векторов x, y их линейными комбинациями, все плюккеровы координаты умножаются на одно и то же число. Таким образом, плюккеровы координаты подпространства h определены однозначно, с точностью до множителя. Обратно, если плюккеровы координаты двух подпространств пропорциональны, то эти подпространства совпадают. Таким образом, каждое двумерное подпространство в $\mathbb{R}^4$ однозначно определяется своими плюккеровыми координатами, а потому их можно принять в качестве однородных координат на грассманиане $G_{2,4}$.

Поскольку $p_{ij} = -p_{ji}$, то, как правило, можно ограничиваться 6 координатами p_{ij}, $i < j$.

Между плюккеровыми координатами p_{ij} существует квадратичное соотношение:

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{3.1}$$

Его можно получить, например, раскладывая по элементам первых двух строк следующий определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем, что обратно, если числа p_{ij}, $i \neq j$ не равны одновременно нулю и связаны соотношением (3.1), то они являются плюккеровыми координатами некоторого подпространства $h \in G_{2,4}$. В самом деле, пусть для определенности $p_{12} \neq 0$; тогда можно предполагать, что $p_{12} = 1$. Рассмотрим подпространство, натянутое на векторы $x = (1, 0, -p_{23}, -p_{24})$ и $y = (0, 1, p_{13}, p_{14})$. Используя соотношение (3.1), легко убедиться, что плюккеровы координаты этого подпространства равны p_{ij}.

Существует вложение

$$G_{2,4} \hookrightarrow \mathbb{P}^5,$$

относящее каждому двумерному подпространству с плюккеровыми координатами p_{ij} точку проективного пространства $\mathbb{P}^5$ с однородными координатами p_{ij}, $i < j$. Образом $G_{2,4}$ при этом вложении является квадратичная поверхность (3.1) в $\mathbb{P}^5$.

3.2. Лучевое преобразование в $\mathbb{P}^3$. Первый вопрос, возникающий при переходе от аффинного пространства к проективному, — на каком функциональном пространстве должно строиться лучевое преобразование $\mathcal{I}$. Как и в случае преобразования Радона, пространство функций на самом $\mathbb{P}^3$ для этой цели неудобно. Естественным объектом, на котором будет определено лучевое преобразование, является пространство $\mathcal{F}(-2)$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, т.е. на одномерном расслоении над $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющих следующему условию однородности:

$$f(\lambda x) = \lambda^{-2} f(x) \quad \text{для любого} \quad \lambda \neq 0. \tag{3.2}$$

Определим лучевое преобразование произвольной функции $f \in \mathcal{F}(-2)$. Пусть $h \in G_{2,4}$. Фиксируем в h произвольный базис u, v и обозначим через s и t координаты точек на h в этом базисе:

$$x = s\,u + t\,v.$$

Поставим в соответствие функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ следующую дифференциальную 1-форму на h:

$$f(su + tv)\,(s\,dt - t\,ds).$$

В силу условия однородности (3.2) эта форма однородна степени однородности 0 и ее интеграл по контуру S в h, охватывающему точку O, не зависит от выбора этого контура.

Определение. Назовем лучевым преобразованием функции $f \in \mathcal{F}$ следующую функцию от пары линейно независимых векторов $u, v \in \mathbb{R}^4$:

$$(\mathcal{I}f)\,(u, v) = 1/2 \int_S f(su + tv)\,(s\,dt - t\,ds); \tag{3.3}$$

интеграл берется по произвольному контуру S в подпространстве h, натянутом на u и v, охватывающему точку O.

Как было уже сказано, от выбора контура S интеграл не зависит.

Определенная так функция $\varphi = \mathcal{I}f$ зависит не только от подпространства $h \in G_{2,4}$, но и от выбора базиса в h. Из (3.3) следует, что при переходе от одного базиса u, v к любому другому базису $u' = \alpha\,u + \beta\,v, \quad v' = \gamma\,u + \delta\,v$ функция φ преобразуется по следующему закону:

$$\varphi(\alpha\,u + \beta\,v, \gamma\,u + \delta\,v) = |\alpha\delta - \beta\gamma|^{-1}\,\varphi(u, v).$$

В частности, если элементы площади в базисах u, v и u', v' совпадают, т.е. $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$, то $\varphi(\alpha\, u + \beta\, v, \gamma\, u + \delta\, v) = \varphi(u, v)$.

Таким образом, лучевое преобразование $\varphi(u,v)$ зависит только от плюккеровых координат $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$, т.е. является функцией на квадратичном конусе $K \subset \mathbb{R}^6$, заданном уравнением (3.1). Очевидно, что $K \setminus 0$ является одномерным расслоением над грассманианом $G_{2,4}$.

В дальнейшем мы часто будем писать $\varphi(p)$ вместо $\varphi(u,v)$, подразумевая под p точку конуса K, т.е. точку в $\mathbb{R}^6$ с координатами p_{ij}, $i < j$, удовлетворяющими уравнению (3.1).

Определение. Обозначим через $\mathcal{H}(-1)$ пространство C^∞-функций φ на $K \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$\varphi(\lambda p) = |\lambda|^{-1} \varphi(p). \tag{3.4}$$

Из определения лучевого преобразования $\mathcal{I}$ следует, что если $\varphi \in \mathcal{F}(-2)$, то $\mathcal{I}\varphi \in \mathcal{H}(-1)$. Таким образом, лучевое преобразование есть отображение

$$\mathcal{I} : \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{H}(-1).$$

Примечание. Если заменить условие однородности (3.2) более слабым, потребовав, чтобы оно выполнялось только при $\lambda > 0$, то мы получим, что $\mathcal{I}f = 0$ для любой нечетной функции f. Поэтому лучевое преобразование естественно рассматривать только на четных функциях f.

3.3. Связь с лучевым преобразованием в аффинном пространстве. В этом пункте мы будем для удобства обозначать лучевые преобразования в аффинном и проективном пространствах соответственно через $\mathcal{I}_a$ и $\mathcal{I}_p$. Напомним, что лучевое преобразование $\mathcal{I}_a$ функции F на $\mathbb{R}^3$ задается в локальных координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$ следующим равенством:

$$(\mathcal{I}_a F)(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\, dx_3. \tag{3.5}$$

Вложим $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^4$ как гиперплоскость $x_4 = 1$ и отнесем каждой функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ ее ограничение F на эту гиперплоскость, т.е. положим

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1).$$

В силу условия однородности (3.2) функция f однозначно восстанавливается по функции F и обратно, любая C^∞-функция F на $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая подходящим условиям убывания на бесконечности, является ограничением на $\mathbb{R}^3$ некоторой функции $f \in \mathcal{F}(-2)$.

Из (3.5) следует, что

$$(\mathcal{I}_a F)(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta_1 + \alpha_1 t, \beta_2 + \alpha_2 t, t, 1)\, dt = (\mathcal{I}_p f)(u, v),$$

где $u = (\beta_1, \beta_2, 0, 1)$, $v = (\alpha_1, \alpha_2, 1, 0)$. (В определении (3.3) функции $\mathcal{I}_p f$ в качестве S взята пара прямых $s = \pm 1$.) Отсюда, перейдя от векторов u, v к плюккеровым координатам, получаем.

Предложение 3.1. *Между лучевым преобразованием $\mathcal{I}_p f$ функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ и аффинным лучевым преобразованием $\mathcal{I}_a F$, где F — ограничение f на гиперплоскость $x_4 = 1$, имеет место следующее соотношение*:

$$(\mathcal{I}_a F)(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\mathcal{I}_p f)(p), \tag{3.6}$$

где $p_{12} = \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1$, $p_{13} = \beta_1$, $p_{14} = -\alpha_1$, $p_{23} = \beta_2$, $p_{24} = -\alpha_2$, $p_{34} = -1$.

В свою очередь, из (3.6) и условия однородности (3.2) следует:

$$(\mathcal{I}_p f)(p) = |p_{34}|^{-1} (\mathcal{I}_a F)(p_{14}/p_{34}, p_{24}/p_{34}, -p_{13}/p_{34}, -p_{23}/p_{34}).$$

3.4. Описание образа лучевого преобразования. Как и в аффинном случае, функции $\varphi(u, v)$ из образа лучевого преобразования $\mathcal{I}$ удовлетворяют дополнительным соотношениям. Именно, из определения (3.3) лучевого преобразования непосредственно следует:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial v_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (i \neq j), \tag{3.7}$$

где u_i, v_i — координаты векторов u и v.

Представим эти соотношения на функции $\varphi = \mathcal{I} f$ в инвариантной форме, рассматривая φ как функции от плюккеровых координат p_{ij}, т.е. как однородные функции на конусе $K : p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0$ в $\mathbb{R}^6$.

Пусть $H(-1)$ — пространство C^∞-функций на $\mathbb{R}^6 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности (3.4). Введем на $H(-1)$ следующий дифференциальный оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial p_{12} \partial p_{34}} - \frac{\partial^2}{\partial p_{13} \partial p_{24}} + \frac{\partial^2}{\partial p_{14} \partial p_{23}}. \tag{3.8}$$

Предложение 3.2. *Оператор Δ опускается с $H(-1)$ на $\mathcal{H}(-1)$ при операции ограничения $H(-1) \to \mathcal{H}(-1)$. Другими словами, если $\varphi|_K = 0$, то $\Delta\varphi|_K = 0$.*

Доказательство. Положим:

$$r = p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}$$

и перейдем в окрестности произвольной точки $p^0 \in K$ к новым координатам на $\mathbb{R}^6$, заменив одну из координат p_{ij} $(i < j)$, например, p_{34}, на r (эта замена допустима, если $p_{12} \neq 0$). Нужно убедиться, что в новых координатах $\Delta\varphi|_K \equiv \Delta\varphi|_{r=0}$ не содержит производных по r.

Обозначим через ψ функцию φ в новых координатах, т.е.

$$\varphi(p) = \psi(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, r).$$

Непосредственным вычислением получаем:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p_{14}\partial p_{23}} + {\sum}' p_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{ij}\partial r} + 3\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}, \tag{3.9}$$

где штрих означает, что сумма берется по всем i, j $(i < j)$, кроме $(i, j) = (3, 4)$. Далее, из условия однородности для φ следует, что ${\sum}' p_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial p_{ij}} + 2r\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\psi$, откуда

$${\sum}' p_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{ij}\partial r} = -3\frac{\partial\psi}{\partial r} - 2r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}.$$

Подставив это выражение в (3.9), получаем:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p_{14}\partial p_{23}} - r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует утверждение.

Следствие. *Оператор Δ определен на функциональном пространстве $\mathcal{H}(-1)$.*

Предложение 3.3. *Каждое из уравнений (3.7) для функций $\varphi \in \mathcal{H}(-1)$ эквивалентно уравнению*

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{12}\partial p_{34}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{14}\partial p_{23}} = 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Докажем, например, что соотношение $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial v_2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial v_1}$ эквивалентно соотношению (3.11).

Примем в качестве локальных координат на конусе K плюккеровы координаты p_{ij}, $i<j$, $(i,j)\neq(1,2)$. В этих координатах, согласно (3.10), имеем:

$$\Delta\varphi=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{13}\partial p_{24}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{14}\partial p_{23}}.$$

Поскольку $p_{ij}=u_iv_j-u_jv_i$, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial v_2}=-\sum_{i,j=3,4}v_iu_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{1i}\partial p_{2j}},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial v_1}=-\sum_{i,j=3,4}v_iu_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{2i}\partial p_{1j}}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial v_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial v_1}=(v_3u_4-v_4u_3)\,\Delta\varphi,$$

что и доказывает наше утверждение.

Теорема 3.1. *Функция $\varphi\in\mathcal{H}(-1)$ тогда и только тогда представима в виде $\varphi=\mathcal{I}f$, где $f\in\mathcal{F}(-2)$, когда она удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=0$.*

Необходимость условия теоремы уже доказана. Доказательство достаточности условия будет проведено в п. 3.6.

3.5. Другой способ определения лучевого преобразования. Будем задавать двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$ не парами u,v линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^4$, а системами независимых уравнений:

$$\langle\xi,x\rangle=0,\quad\langle\eta,x\rangle=0,\tag{3.12}$$

т.е. парами ξ,η линейно независимых векторов дуального пространства $(\mathbb{R}^4)'$.

Обозначим через $h_{\xi\eta}$ подпространство в $\mathbb{R}^4$, заданное уравнениями (3.12), и через $Ph_{\xi\eta}$ его проективизацию. Зададим на $h_{\xi\eta}$ дифференциальную 1-форму $\sigma_{\xi\eta}(x)$, определенную равенством:

$$\langle\xi,dx\rangle\wedge\langle\eta,dx\rangle\wedge\sigma_{\xi\eta}(x)=\omega(x),\tag{3.13}$$

где $\omega(x)=x_1\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\ldots$ (циклические перестановки).

Если $f\in\mathcal{F}(-2)$, то дифференциальная 1-форма на $h_{\xi\eta}$

$$f(x)\,\sigma_{\xi\eta}(x),$$

имеет степень однородности 0 и ортогональна слоям расслоения $h_{\xi,\eta}\setminus 0\to Ph_{\xi,\eta}$.

Определение. Назовем лучевым преобразованием функции $f \in \mathcal{F}$ следующую функцию от пары линейно независимых векторов $\xi, \eta \in (\mathbb{R}^4)'$:

$$(\mathcal{I}'f)(\xi, \eta) = \int\limits_{\gamma_{\xi\eta}} f(x)\,\sigma_{\xi\eta}(x), \tag{3.14}$$

где $\gamma_{\xi\eta}$ — любое сечение расслоения $h_{\xi,\eta} \setminus 0 \to Ph_{\xi,\eta}$; от выбора $\gamma_{\xi\eta}$ интеграл не зависит.

Используя символику дельта-функций, можно представить интеграл (3.14) в следующем виде:

$$(\mathcal{I}'f)(\xi, \eta) = \int\limits_{\Gamma} f(x)\,\delta(\langle\xi, x\rangle)\,\delta(\langle\eta, x\rangle)\,\omega(x), \tag{3.15}$$

где Γ — произвольное сечение расслоения $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3$.

Подобно $\varphi = \mathcal{I}f$, функция $\psi = \mathcal{I}'f$ удовлетворяет следующим условиям.

1^0. Она зависит только от бивектора $q = \xi \wedge \eta$, т.е. от миноров $q^{ij} = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i$.

2^0. Как функция от q, она является C^∞-функцией на конусе $q^{12}q^{34} - q^{13}q^{24} + q^{14}q^{23} = 0$ в $(\mathbb{R}^6)'$, удовлетворяющей условию однородности:

$$\psi(\lambda q) = |\lambda|^{-1}\,\psi(q). \tag{3.16}$$

3^0. Выполняются соотношения:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^j\,\partial\eta^i}, \quad i,j = 1,2,3,4 \quad (i \neq j), \tag{3.17}$$

где ξ^i, η^i — координаты векторов ξ и η.

Как и в случае функций $\varphi = \mathcal{I}f$, можно показать, что каждое из соотношений (3.17) эквивалентно соотношению:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial q^{12}\partial q^{34}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^{13}\partial q^{24}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^{14}\partial q^{23}} = 0. \tag{3.18}$$

Установим связь между операторами $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$. Назовем бивекторы $p = \{p_{ij}\}$ в $\mathbb{R}^4$ и $q = \{q^{ij}\}$ в $(\mathbb{R}^4)'$ двойственными и будем писать $p \sim q$, если

$$p_{ij} = \operatorname{sign}(i,j,k,l)\,q^{kl}$$

для любой перестановки (i, j, k, l) индексов $(1,2,3,4)$.

Нетрудно убедиться, что двойственным бивекторам p и q отвечает одно и то же подпространство $h \subset \mathbb{R}^4$ и что связанные с этими бивекторами дифференциальные 1-формы на h совпадают. Отсюда следует

Предложение 3.4. *Если $q \sim p$, то $\mathcal{I}f(p) = \mathcal{I}'f(q)$.*

Обозначим через $\mathcal{H}'(-1)$ пространство C^∞-функций на $K' \setminus 0$, где K' — конус $q^{12}q^{34} - q^{13}q^{24} + q^{14}q^{23} = 0$ в $(\mathbb{R}^6)'$, удовлетворяющих условию однородности (3.16). В силу Предложения 3.4 теорема 3.1 может быть перефразирована в терминах функций из $H'(-1)$.

Теорема 3.2. *Функция $\psi \in \mathcal{H}'(-1)$ тогда и только тогда представима в виде $\psi = \mathcal{I}'f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$, когда она удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = 0$.*

3.6. Доказательство теоремы об образе лучевого преобразования.. Необходимость условий теорем 3.1 и 3.2 была уже установлена. Докажем достаточность условий теоремы 3.2.

Итак, пусть $\psi(\xi, \eta)$ — C^∞-функция от бивектора $\xi \wedge \eta$, удовлетворяющая условиям однородности (3.16) и уравнениям (3.17). Докажем, что тогда $\psi = \mathcal{I}'f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$.

Введем многообразие A пар (x, η), где $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$, $\eta \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$ и $\langle \eta, x \rangle = 0$. Пусть $(x, \eta) \in A$. Обозначим через $L_\eta \subset \mathbb{R}^4$ подпространство, ортогональное к η. Заметим, что $x \in L_\eta$. Положим для любого $\xi \in (\mathbb{R}^4)' \setminus \{\eta\}$, где $\{\eta\}$ — подпространство, натянутое на η

$$\psi_\eta(\xi) = \psi(\xi, \eta).$$

Поскольку ψ зависит только от $\xi \wedge \eta$, то $\psi_\eta(\xi + \lambda\eta) = \psi_\eta(\xi)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. ψ_η является функцией на $((\mathbb{R}^4)'/\{\eta\}) \setminus 0$. Очевидно, что эта функция бесконечно дифференцируема на $((\mathbb{R}^4)'/\{\eta\}) \setminus 0$ и удовлетворяет условию однородности: $\psi_\eta(\lambda\xi) = |\lambda|^{-1}\psi_\eta(\xi)$. Значит, по теореме об образе преобразования Радона для проективной плоскости, ψ_η является преобразованием Радона C^∞- функции $f_\eta(x)$, определенной на подпространстве $L_\eta \subset \mathbb{R}^4$, двойственном к $(\mathbb{R}^4)'/\{\eta\}$, и удовлетворяющей условию однородности: $f_\eta(\lambda x) = \lambda^{-2} f_\eta(x)$.

Тем самым, на многообразии A определена функция

$$F(x, \eta) = f_\eta(x).$$

Лемма. *Для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$ функция F не зависит от η.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для какой-либо одной точки x, например для $x = x_0 = (1, 0, 0, 0)$. В этом случае условие ортогональности η и x имеет вид $\eta^1 = 0$, т.е. $\eta = (0, \eta^2, \eta^3, \eta^4)$. Нам нужно доказать, что $\frac{\partial F(x_0,\eta)}{\partial \eta_i} = 0$, $i = 2, 3, 4$. Докажем, например, что $\frac{\partial F(x_0,\eta)}{\partial \eta_2} = 0$.

Напишем, используя формулу обращения для преобразования Радона на проективной плоскости, явное выражение $F(x, \eta)$ через $f_\eta(x)$.

Пусть L — координатное подпространство $\xi^4 = 0$ в $(\mathbb{R}^4)'$. Если $\eta^4 \neq 0$, то L трансверсально к вектору η, и можно считать, что ψ_η — функция на подпространстве L.

Так как $\langle \xi, x_0 \rangle = \xi^1$, то по формуле обращения для преобразования Радона имеем:

$$F(x_0, \eta) = c \int \psi_\eta(\xi) \Big|_{\xi^3=1} (\xi^1)^{-2} \, d\xi^1 \wedge d\xi^2 =$$
$$= c \int \frac{\partial \psi(\eta, \xi)}{\partial \xi^1} \Big|_{\xi^3=1} (\xi^1)^{-1} \, d\xi^1 \wedge d\xi^2.$$

Продифференцировав полученное равенство по η^2 и применив соотношение $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^1 \partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^1}$, получаем:

$$\frac{\partial F(x_0, \eta)}{\partial \eta^2} = c \int \frac{\partial^2 \psi(\eta, \xi)}{\partial \xi^2 \partial \eta^1} \Big|_{\xi^3=1} (\xi^1)^{-1} \, d\xi^1 \wedge d\xi^2 = 0.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Определим на основании доказанной леммы функцию $f(x)$ на $\mathbb{R}^4$ по формуле:

$$f(x) = f_\eta(x),$$

где η — произвольный вектор в $(\mathbb{R}^4)'$, ортогональный к x. Она бесконечно дифференцируема на $L_\eta \setminus 0$, где L_η — любое 3-мерное подпространство в $\mathbb{R}^4$, значит, она C^∞-дифференцируема на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$. Далее, выполняется условие однородности: $f(\lambda x) = \lambda^{-2} f(x)$. Следовательно, $f \in \mathcal{F}(-2)$. При этом ясно, что $\mathcal{I}' f = \psi$, так как это равенство справедливо для ограничения ψ на множество подпространств, принадлежащих произвольному трехмерному пространству.

3.7. Лучевое преобразование как сплетающий оператор. Лучевое преобразование имеет простое теоретико-групповое истолкование. Рассмотрим группу $G = GL(4, \mathbb{R})$ невырожденных матриц 4-го порядка. Каждому элементу $g \in G$ отвечает линейное преобразование $x \mapsto xg$ в пространстве $\mathbb{R}^4$, которое переводит точку $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в точку x' с координатами $x'_j = \sum_{i=1}^4 x_i g_{ij}$.

Поставим в соответствие элементам $g \in G$ линейные операторы $T_g^{(1)}$, $T_g^{(2)}$ соответственно в пространствах $\mathcal{F}(-2)$ и $\mathcal{H}(-1)$:

$$(T_g^{(1)} f)(x) = f(xg), \quad (T_g^{(2)} \varphi)(u, v) = \varphi(ug, vg).$$

Очевидно, что

$$T_{g_1}^{(i)} T_{g_2}^{(i)} = T_{g_1 g_2}^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

для любых $g_1, g_2 \in G$, т.е. операторы $T_g^{(1)}$, $T_g^{(2)}$ образуют представление группы G в соответствующих функциональных пространствах.

Из определения оператора $\mathcal{I}$ непосредственно следует

Предложение 3.5. *Оператор лучевого преобразования $\mathcal{I}$ удовлетворяет соотношению*:

$$T_g^{(2)} \mathcal{I} = \mathcal{I} T_g^{(1)} \quad \text{для любого} \quad g \in G. \tag{3.19}$$

В терминах теории представлений групп соотношение (3.19) означает, что оператор $\mathcal{I}\colon \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{H}(-1)$ является сплетающим оператором для представлений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ группы G.

Можно доказать, что с точностью до множителя существует единственный сплетающий оператор $\mathcal{F}(-2) \to \mathcal{H}(-1)$. Таким образом, условием, что $\mathcal{I}$ есть сплетающий оператор, лучевое преобразование определяется однозначно, с точностью до множителя.

Установим теперь теоретико-групповой смысл дополнительных соотношений (3.7) на функции $\varphi = \mathcal{I} f$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и $\{e_{ij}\}$ — стандартный базис в $\mathfrak{g}$ (т.е. e_{ij} — матрица, у которой (ij)-ый элемент равен 1, а остальные равны нулю).

Представления $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ группы G индуцируют представления ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в соответствующих пространствах. Обозначим через $E_{ij}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(2)}$ операторы этих представлений, отвечающие $e_{ij} \in \mathfrak{g}$. Из формул для операторов $T_g^{(1)}$ и $T_g^{(2)}$ непосредственно получаем выражения для $E_{ij}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(2)}$:

$$E_{ij}^{(1)} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{3.20}$$

$$E_{ij}^{(2)} \varphi = u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial v_j}. \tag{3.21}$$

Из (3.20) непосредственно следует

Предложение 3.6. *Любая функция $f \in \mathcal{F}(-2)$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$(E_{ij}^{(1)} E_{kl}^{(1)} - \delta_{jk} E_{il}^{(1)}) f = (E_{il}^{(1)} E_{kj}^{(1)} - \delta_{lk} E_{ij}^{(1)}) f, \tag{3.22}$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$, *где δ_{ij} — символ Кронекера.*

Поскольку $\mathcal{I}$ есть сплетающий оператор, отсюда следует.

Следствие. *Функции $\varphi = \mathcal{I} f$ удовлетворяют соотношениям*

$$(E_{ij}^{(2)} E_{kl}^{(2)} - \delta_{jk} E_{il}^{(2)}) \varphi = (E_{il}^{(2)} E_{kj}^{(2)} - \delta_{lk} E_{ij}^{(2)}) \varphi, \tag{3.23}$$

где операторы $E_{ij}^{(2)}$ задаются равенствами (3.21).

Полученные из теоретико-групповых соображений соотношения (3.23) эквивалентны соотношениям (3.7). В самом деле, если подставить в (3.23) явные выражения для операторов $E_{ij}^{(2)}$, то (3.23) принимает вид:

$$u_i v_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_l} + v_i u_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_j \partial u_l} = u_i v_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_l \partial v_j} + v_i u_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_l \partial u_j},$$

т.е.

$$(u_i v_k - u_k v_i) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_l} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_l \partial v_j} \right) = 0.$$

§ 4. Лучевое преобразование в комплексном аффинном пространстве

Определение лучевого преобразования для комплексного аффинного пространства и описание его образа аналогичны приведенным в § 1 для вещественного случая. Мы изложим это кратко в пп. 4.1 и 4.2. Главное же, что отличает комплексное лучевое преобразование от вещественного, — существование для него локальных формул обращения. Построению этих формул будут посвящены пп. 4.3 и 4.4.

4.1. Лучевое преобразование в $\mathbb{C}^3$. Подобно случаю вещественного аффинного пространства, комплексные прямые в $\mathbb{C}^3$ будем задавать уравнениями

$$x = \alpha t + \beta, \quad \alpha \in \mathbb{C}^3 \setminus 0, \quad \beta \in \mathbb{C}^3,$$

а интеграл функции f на $\mathbb{C}^3$ по прямой $x = \alpha t + \beta$ — уравнением

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} f(\alpha t + \beta)\, dt \wedge d\bar{t}. \tag{4.1}$$

Определенная так функция $\varphi(\alpha,\beta)$ на многообразии E пар (α,β) называется лучевым преобразованием функции f и обозначается через $\mathcal{I}f$. В дальнейшем всюду предполагается, что функции f принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{C}^3)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих вместе со всеми производными функций на $\mathbb{C}^3$.

Подобно вещественному случаю, функции $\varphi = \mathcal{I}f$ удовлетворяют соотношениям:

$$\varphi(\alpha, \beta + \alpha t_0) = \varphi(\alpha, \beta) \quad \text{для любого } t_0 \in \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

т.е. φ не зависит от выбора точки β на прямой;

$$\varphi(\lambda\alpha, \beta) = |\lambda|^{-2} \varphi(\alpha, \beta) \quad \text{для любого } \lambda \neq 0. \tag{4.3}$$

Таким образом φ зависит только от самой прямой и от выбора направляющего вектора α.

Если в $\mathbb{C}^3$ введена евклидова метрика, то в определении (4.1) лучевого преобразования можно предполагать, что $|\alpha| = 1$. Тогда условие (4.3) сводится к более простому: $\varphi(\lambda\alpha,\beta) = \varphi(\alpha,\beta)$ при $|\lambda| = 1$. В этом случае φ можно рассматривать как функцию на самом многообразии H комплексных прямых.

Обозначим по аналогии с вещественным случаем через $S(H)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3) и таких, что при $|\alpha| = 1$ эти функции, рассматриваемые как функции на H, быстро убывают вместе со всеми производными. Легко убедиться, что образы функций $f \in S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$ принадлежат пространству $S(H)$.

Иногда удобно задавать прямые на $\mathbb{C}^3$ уравнениями

$$x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

а лучевое преобразование $\psi = \mathcal{I}f$ в локальных координатах $\alpha_1\alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на H — формулой

$$\psi(\alpha_1\alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\, dx_3 \wedge d\bar{x}_3. \tag{4.4}$$

4.2. Дифференциальная форма $\kappa\varphi$ и теорема об образе лучевого преобразования. Комплексным аналогом дифференциальной формы $\kappa\varphi$, введенной в § 1, является следующая дифференциальная (1,1)-форма на многообразии E пар (α, β):

$$\kappa\varphi = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_i \, \partial \bar{\beta}_j} \, d\alpha_i \wedge d\bar{\alpha}_j. \tag{4.5}$$

Здесь φ — произвольная функция на E. Если φ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3), то дифференциальная форма $\kappa\varphi$ опускается с многообразия E на многообразие прямых H. Соответственно в локальных координатах $\alpha_1\alpha_2, \beta_1, \beta_2$ форма $\kappa\psi$ имеет вид:

$$\kappa\psi = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta_i \, \partial \bar{\beta}_j} \, d\alpha_i \wedge d\bar{\alpha}_j. \tag{4.6}$$

Подобно вещественному случаю, с помощью формы $\kappa\varphi$ можно описать образ пространства $S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании. Именно, обозначим через H^x подмногообразие прямых в $\mathbb{C}^3$, проходящих через произвольную точку $x \in \mathbb{C}^3$, и через $\kappa_x\varphi$ ограничение формы $\kappa\varphi$ на H^x.

Теорема 4.1. *Функция $\varphi \in S(H)$ принадлежит образу пространства Шварца $S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ дифференциальная форма $\kappa_x\varphi$ на подмногообразии H^x замкнута.*

Отметим, что условие замкнутости дифференциальной формы $\kappa_x\varphi$ для любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ эквивалентно следующим условиям на функцию φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i \, \partial \beta_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_j \, \partial \beta_i}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\alpha}_i \, \partial \bar{\beta}_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\alpha}_j \, \partial \bar{\beta}_i}.$$

Доказательство теоремы 4.1 такое же, как и в вещественном случае.

4.3. Формула обращения. В комплексном случае, в отличие от вещественного случая, оператор κ может быть применен не только для описания образа лучевого преобразования $\mathcal{I}$, но и для получения формулы обращения, восстанавливающей функцию $f \in S(\mathbb{C}^3)$ по ее лучевому преобразованию $\varphi = \mathcal{I}f$.

Теорема 4.2. *Если $\varphi = \mathcal{I}f$, $f \in S(\mathbb{C}^3)$, и $\kappa_x\varphi$ — ограничение дифференциальной (1,1)-формы $\kappa\varphi$ на подмногообразие $H^x \subset H$ прямых,* *проходящих через произвольную точку $x \in \mathbb{C}^3$, то для любого цикла $\gamma \subset H^x$ вещественной размерности 2 имеем:*

$$\int_{\gamma} \kappa_x \varphi = c(\gamma)\, f(x), \tag{4.7}$$

где $c(\gamma)$ зависит только от класса гомологий цикла γ. При этом если цикл γ не гомологичен нулю, то $c(\gamma) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку дифференциальная форма $\kappa_x \varphi$ замкнута, то интеграл (4.7) зависит при фиксированном f только от класса гомологий цикла γ. Известно, что группа двумерных гомологий многообразия H^x есть группа с одним образующим $\tilde{\gamma}$, и представителем класса гомологий $\tilde{\gamma}$ является эйлеровский цикл — многообразие прямых, проходящих через точку x и лежащих в какой-либо фиксированной плоскости. Поэтому достаточно вычислить интеграл (4.7) по какому-либо эйлеровскому циклу. Покажем, что если γ — эйлеровский цикл, то формула обращения (4.7) совпадает с формулой обращения для преобразования Радона в $\mathbb{C}^2$, полученной в главе 1.

Будем задавать лучевое преобразование в локальных координатах формулой (4.4).

Рассмотрим эйлеровский цикл γ прямых, проходящих через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и лежащих в плоскости $h\colon x_1 = x_1^0$. Путь f_0 — ограничение функции f на плоскость h и ψ_0 — ограничение функции $\psi = \mathcal{I} f$ на подмногообразие прямых, лежащих в плоскости h, т.е.

$$f_0(x_2, x_3) = f(x_1^0, x_2, x_3),$$

$$\psi_0(\alpha, \beta) = \psi(0, \alpha; x_1^0, \beta) = \int_{\mathbb{C}} f_0(\alpha x_3 + \beta, x_3)\, dx_3 \wedge d\bar{x}_3.$$

Мы имеем:

$$\int_{\gamma} \kappa_x \psi = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial^2 \psi_0(\alpha, \beta)}{\partial \beta\, \partial \bar{\beta}} \Big|_{\beta = x_2^0 - \alpha x_3^0} d\alpha \wedge d\bar{\alpha}.$$

С другой стороны, функция ψ_0 является преобразованием Радона функции f_0 на плоскости h'. Следовательно, по формуле обращения для преобразования Радона на комплексной плоскости (см. формулу (9.11) из § 9 главы I) получаем:

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial^2 \psi_0(\alpha, \beta)}{\partial \beta\, \partial \bar{\beta}} \Big|_{\beta = x_2^0 - \alpha x_3^0} d\alpha \wedge d\bar{\alpha} = 2\pi^2 i\, f_0(x_2^0, x_3^0).$$

Таким образом, доказано, что для эйлеровского цикла $\gamma \subset H^{x^0}$ мы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} \kappa_{x^0}\varphi = 2\pi^2 i f(x^0).$$

Очевидно, что формула обращения (4.7) локальна: для восстановления по этой формуле функции f в произвольной точке $x\in\mathbb{C}^3$ достаточно знать интегралы функции f только по прямым, бесконечно близким к x.

Подчеркнем, что аналога этой формулы обращения для лучевого преобразования в вещественном пространстве не существует: там мы имеем $\int_\gamma \kappa_x\varphi = 0$ для любого одномерного цикла $\gamma \subset H^x$.

4.4. Аналоги оператора κ. В этом пункте будет построено семейство линейных операторов κ из пространства $S(H)$ в пространство $\Omega^{(1,1)}(H)$ дифференциальных (1,1)-форм на H, удовлетворяющих, подобно введенному выше оператору κ, следующему условию:

Условие А. Если $\varphi = \mathcal{I}f, \quad f \in S(\mathbb{C}^3)$, то дифференциальная форма $\kappa\varphi$ замкнута на подмногообразиях прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку $x \in \mathbb{C}^3$.

Каждый из этих операторов может быть использован, подобно исходному оператору κ для построения формулы обращения.

Для описания таких операторов κ будем предполагать, что лучевое преобразование задано в локальных координатах формулой (4.4). В локальных координатах условия принадлежности функции ψ образу лучевого преобразования имеют вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\,\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar\alpha_1\,\partial\bar\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar\alpha_2\,\partial\bar\beta_1}. \tag{4.8}$$

Введем четверку линейных отображений $\Omega^{(p,q)} \to \Omega^{(p+1,q)}$, где $\Omega^{(p,q)}$ — пространство дифференциальных (p,q)-форм на H:

$$\kappa^1 = \frac{\partial}{\partial\beta_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\,d\alpha_2,$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial}{\partial\beta_1}\,d\beta_1 + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\,d\beta_2,$$

$$\kappa^3 = \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,d\alpha_2,$$

$$\kappa^4 = \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,d\beta_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,d\beta_2.$$

Далее, обозначим через $\bar{\kappa}^i$, $i = 1,2,3,4$, линейное отображение $\Omega^{(p,q)} \to \Omega^{(p,q+1)}$, получающееся из κ^i заменой $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial}{\partial \beta_j}, d\alpha_j, d\beta_j$ соответственно на $\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}_j}, d\bar{\alpha}_j, d\bar{\beta}_j$. Положим:

$$\kappa^{ij} = \kappa^i \bar{\kappa}^j, \quad i,j = 1,2,3,4.$$

В силу этого определения, если ψ — функция на H, то $\kappa^{ij}\psi$ есть дифференциальная (1,1)-форма на H. В частности, $\kappa^{11}\psi$ совпадает с определенной выше формой $\kappa\psi$. Обозначим через $\kappa_x^{ij}\psi$ ограничение формы $\kappa^{ij}\psi$ на подмногообразие $H^x \subset H$ прямых, проходящих через точку $x \in \mathbb{C}^3$.

Предложение 4.1. *Для любой функции $\psi = \mathcal{I}f$ и любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ дифференциальные формы $\kappa_x^{ij}\psi$ связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned}
\kappa_x^{11}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{21}\psi = -\bar{x}_3^{-1}\,\kappa_x^{12}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{22}\psi,\\
\kappa_x^{13}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{23}\psi = -\bar{x}_3^{-1}\,\kappa_x^{14}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{24}\psi,\\
\kappa_x^{31}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{41}\psi = -\bar{x}_3^{-1}\,\kappa_x^{32}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{42}\psi,\\
\kappa_x^{33}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{43}\psi = -\bar{x}_3^{-1}\,\kappa_x^{34}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{44}\psi,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\kappa_x^{2i}\psi + \kappa_x^{3i}\psi = d(\bar{\kappa}^i\psi), \quad \kappa_x^{i2}\psi + \kappa_x^{i3}\psi = -d(\bar{\kappa}^i\psi), \quad i = 1,2,3,4. \tag{4.10}$$

Доказательство. Соотношения (4.9) следуют непосредственно из того факта, что $d\beta_i = -x_3\,d\alpha_i, \quad d\bar{\beta}_i = -\bar{x}_3\,d\bar{\alpha}_i, \quad i = 1,2$ на H^x.

Равенства (4.10) следуют из уравнений (4.8).

Следствие. 1. *Все дифференциальные формы $\kappa_x^{ij}\varphi$, с точностью до множителей, попарно когомологичны.*

Следствие. 2. *Если $\psi = \mathcal{I}f$, то все дифференциальные формы $\kappa^{ij}\varphi$ удовлетворяют условию A.*

В силу Предложения 4.1 для формулы обращения можно использовать не только исходный оператор $\kappa = \kappa^{11}$, но и любой другой из операторов κ^{ij} (а также любую линейную комбинацию этих операторов). Например, для случая операторов κ^{44} и κ^{33} формулы обращения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\int\limits_\gamma \kappa_x^{44}\psi &= c(\gamma)\,|x_3|^4 f(x),\\
\int\limits_\gamma \kappa_x^{33}\psi &= c(\gamma)\,|x_3|^2 f(x).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

§ 5. Задачи интегральной геометрии для комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$

Уже отмечалось, что задача о восстановлении функции f на $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{C}^3$ по ее лучевому преобразованию $\varphi = \mathcal{I}f$ является переопределенной; для восстановления f достаточно знать функцию φ не на всем многообразии прямых H, а лишь на некотором его трехмерном подмногообразии K. Условимся называть трехмерные алгебраические подмногообразия прямых $K \subset H$ комплексами прямых.

Приведем пример комплексов, для которых задача о восстановлении функции f решается элементарно. Это комплексы прямых, обладающие следующим свойством: для почти каждой точки $x \in \mathbb{C}^3$ существует содержащая ее плоскость h_x такая, что почти все прямые на этой плоскости принадлежат комплексу. Этим свойством обладают, в частности, комплекс прямых, пересекающих фиксированную прямую, и комплекс прямых, параллельных фиксированной плоскости (последний можно трактовать как комплекс прямых, пересекающих бесконечно удаленную прямую). Ясно, что задача о восстановлении функции в точке x через ее интегралы по прямым такого комплекса сводится к формуле обращения для преобразования Радона на плоскости h_x.

В этом параграфе задача о восстановлении функции f будет решаться для различных комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$. Существенная особенность получаемых формул обращения — их локальность, т.е. функция в точке $x \in \mathbb{C}^3$ восстанавливается через ее интегралы только по прямым комплекса, бесконечно близким к x.

Начнем с комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих фиксированную алгебраическую кривую. Будет показано, что формула обращения для этого комплекса есть простое следствие из формулы обращения для лучевого преобразования, полученной в § 4. Затем будет рассмотрен более широкий класс комплексов прямых (допустимые комплексы), для которых существует явная локальная формула обращения.

5.1. Задача интегральной геометрии для комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих кривую. Рассмотрим комплекс K прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$. Поставим задачу: восстановить функцию $f \in S(\mathbb{C}^3)$ через ее интегралы по прямым комплекса, т.е. по функции

$$\Phi(\alpha, \lambda) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} f(\alpha t + \lambda)\, dt\, d\bar{t}, \quad (\alpha, \lambda) \in (\mathbb{C}^3 \setminus 0) \times \Lambda. \tag{5.1}$$

Аналогичная задача для вещественного пространства $\mathbb{R}^3$ уже решалась в § 1, и там была получена явная, заведомо нелокальная формула обращения. То же построение можно было бы повторить и в комплексном случае. Однако в комплексном случае имеется и другой, существенно более простой путь. Именно, мы увидим, что формула обращения для этого комплекса представляет собой простое следствие из формулы обращения (4.2) для лучевого преобразования, полученной в § 4.

Обозначим через ∂_Λ и $\bar\partial_\Lambda$ соответственно (1,0) и (0,1) составляющие оператора d внешнего дифференцирования на многообразии Λ.

Пусть $\Phi(\alpha,\lambda)$ — интегральное преобразование функции $f \in S(\mathbb{C}^3)$, заданное формулой (5.1). Поставим в соответствие каждой точке $x^0 \in \mathbb{C}^3$ следующую дифференциальную (1,1)-форму на Λ :

$$\partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda \, \Phi(\alpha,\lambda) \,|_{\alpha=x^0-\lambda} \,.$$

Теорема 5.1. *Для почти каждой точки $x^0 \in \mathbb{C}^3$ имеет место следующая формула обращения интегрального преобразования* (5.1):

$$f(x^0) = (2\,k\,\pi^2\,i)^{-1}\int\limits_\Lambda \partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda \, \Phi(\alpha,\lambda) \,|_{\alpha=x^0-\lambda}, \tag{5.2}$$

где k — степень алгебраической кривой Λ.

Доказательство. Воспользуемся формулой обращения (4.2) для лучевого преобразования $\varphi = \mathcal{I}f$ из § 4, где в качестве γ^{x^0} взято подмногообразие прямых, проходящих через точку x^0 и пересекающих кривую Λ, т.е. многообразие прямых

$$x = (x^0 - \lambda)\,t + \lambda, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Из определения оператора κ следует, что

$$\kappa\varphi \,\Big|_{\gamma^{x^0}} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi(\alpha,\beta)}{\partial\beta_i\,\partial\bar\beta_j} \,\Big|_{\substack{\alpha=x^0-\lambda\\ \beta=\lambda}} \; d\lambda_i \wedge d\bar\lambda_j. \tag{5.3}$$

Поскольку ограничение $\varphi(\alpha,\beta)\,\big|_{\beta=\lambda}$ равно $\Phi(\alpha,\lambda)$, то правая часть в (5.3) равна $\partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda \, \Phi(\alpha,\lambda) \,|_{\alpha=x^0-\lambda}$. Следовательно, по формуле обращения (4.2) для лучевого преобразования имеем:

$$\int\limits_\Lambda \partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda \, \Phi(\alpha,\lambda) \,\big|_{\alpha=x^0-\lambda} = \; c(\gamma^{x^0})\, f(x^0).$$

Найдем коэффициент $c(\gamma^{x^0})$. Если порядок алгебраической кривой Λ равен k, то цикл γ^{x^0} гомологичен $k\,\gamma$, где γ — эйлеровский цикл. Так как, согласно § 4, $c(\gamma) = 2\,\pi^2\,i$, то имеем: $c(\gamma^{x^0}) = 2\,k\,\pi^2\,i$.

Замечание. Если кривая Λ задана параметрически $\lambda = u(s)$, то положим

$$\Psi(\alpha, s) = \Phi(\alpha, u(s)).$$

Тогда формулу обращения можно представить в следующем виде:

$$f(x) = (2k\pi^2 i)^{-1} \int\limits_{\mathbb{C}} \Psi''_{s,\bar{s}}(x - u(s), s)\, ds \wedge d\bar{s}.$$

5.2. Определение допустимых комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим произвольный комплекс K прямых в $\mathbb{C}^3$. Задача по-прежнему состоит в том, чтобы восстановить функцию $f \in S(\mathbb{C}^3)$ через ее интегралы по прямым комплекса. Спрашивается, при каких условиях на K эту задачу можно решить, подобно комплексу прямых, пересекающих кривую, исходя из формулы обращения для лучевого преобразования, полученной в § 4.

Пусть $H^x \subset H$ — подмногообразие прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку $x \in \mathbb{C}^3$ и $\gamma^x = K \cap H^x$. Для почти каждой точки x многообразие γ^x является циклом вещественной размерности 2. Поэтому для лучевого преобразования $\mathcal{I}$ имеет место следующая формула обращения: если $\varphi = \mathcal{I}f$, то

$$\int\limits_{\gamma^x} \kappa\varphi = c\, f(x), \tag{5.4}$$

где κ — оператор, введенный в § 4.

По условию задачи нам задано только ограничение $\Phi = \varphi|_K$ функции φ на многообразие прямых комплекса K. Таким образом, формула (5.4) дает решение задачи интегральной геометрии для комплекса K тогда и только тогда, когда дифференциальная форма $\kappa\varphi\,\big|_{\gamma^x}$ может быть выражена только через функцию Φ и ее производные. Алгебраические 3-мерные подмногообразия прямых, для которых это условие выполняется, будем называть допустимыми комплексами прямых. Можно доказать, что это определение не зависит от конкретного выбора формы $\kappa\varphi$. Пример допустимого комплекса — рассмотренный в п. 5.1 комплекс прямых, пересекающих алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^3$.

Если комплекс K допустим, то, подставив в (5.4) явное выражение $\kappa\psi\,\big|_{\gamma^x}$ через функцию Φ, мы получим формулу обращения для интегрального преобразования, связанного с этим комплексом.

Следующие три пункта мы посвятим изучению аналитической и геометрической структуры допустимых комплексов. В частности будет доказано, что любой допустимый комплекс есть либо многообразие прямых, пересекающих алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^3$, либо комплекс прямых, касательных к некоторой алгебраической поверхности в $\mathbb{C}^3$.

5.3. Необходимые и достаточные условия допустимости комплекса K. Будем задавать лучевое преобразование $\mathcal{I}$ в локальных координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на многообразии прямых H, см. п. 4.1.

Если $\psi = \mathcal{I}f$ — лучевое преобразование функции $f \in S(\mathbb{C}^3)$, то, согласно § 4, имеет место следующая форма обращения:

$$\int_{\gamma^x} \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_i \bar{\alpha}_j} d\alpha_i \wedge d\bar{\alpha}_j = c\,|x_3|^2 f(x), \tag{5.5}$$

где $\gamma^x \subset H^x$ — произвольный цикл вещественной размерности 2.

Пусть K — произвольный комплекс. Примем $\gamma^x = H^x \cap K$ и обозначим для любого $h \in \gamma^x$ через $T_h H$, $T_h K$, $T_h \gamma^x$ касательные пространства в точке h соответственно к многообразию прямых H, комплексу $K \subset H$ и циклу γ^x.

Определение. Введем эндоморфизм $A_h : T_h H \to T_h H$, положив

$$A_h(d\alpha_1, d\alpha_2, d\beta_1, d\beta_2) = (d\alpha_1, d\alpha_2, 0, 0).$$

Лемма. *Комплекс K допустим тогда и только тогда, когда для почти каждой точки $x \in \mathbb{C}^3$ и почти каждой прямой $h \in \gamma^x$ имеем:*

$$A_h(T_h \gamma^x) \subset T_h K.$$

В самом деле, в (5.5) интегрируется производная функции ψ, взятая для каждого $h \in \gamma^x$ в комплексном направлении $A_h(T_h\gamma^x)$. Следовательно, подынтегральная форма в (5.5) выражается через $\Phi = \psi\,|_K$ тогда и только тогда, когда это направление лежит в подпространстве $T_h K$.

Пусть комплекс K, задан в локальных координатах (α, β) уравнением

$$F(\alpha, \beta) = 0.$$

Предложение 5.1. *Комплекс K допустим тогда и только тогда, когда в любой его точке $h = (\alpha, \beta)$ выполняется соотношение:*

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial F}{\partial \beta_2} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\frac{\partial F}{\partial \beta_1} = 0. \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $\xi = (d\alpha_1, d\alpha_2, d\beta_1, d\beta_2)$ — вектор из $T_h H$. Тогда условие, что $\xi \in T_h K$, имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial F}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial F}{\partial \beta_2} d\beta_2 = 0,$$

а условие, что $\xi \in T_h H^x$, имеет вид:

$$x_3\, d\alpha_1 + d\beta_1 = 0, \quad x_3\, d\alpha_2 + d\beta_2 = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\xi \in T_h\gamma^x = T_h(H^x \cap K)$ имеет вид

$$\xi = (a_1, a_2, -x_3 a_1, -x_3 a_2),$$

где $a_1 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} - x_3 \frac{\partial F}{\partial \beta_2}$, $\quad a_2 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} - x_3 \frac{\partial F}{\partial \beta_1}\right)$. Значит, $A_h(\xi) = (a_1, a_2, 0, 0)$. В силу леммы необходимое и достаточное условие допустимости комплекса имеет вид $a_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0$, что эквивалентно соотношению (5.6).

Приведем другое доказательство Предложения 5.1, основанное на непосредственных вычислениях. Предположим сначала, что комплекс K задан уравнением, разрешенным относительно β_2:

$$\beta_2 = u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1).$$

Введем на многообразии прямых H вместо координат $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ новые координаты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и $s = \beta_2 - u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ и обозначим через $\chi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, s)$ функцию ψ в этих новых координатах, т.е.

$$\chi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)) = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2).$$

Отметим, что в новых координатах комплекс K задается уравнением $s = 0$.

Представим форму $\kappa\psi$ в новой системе координат. Имеем: $\dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_i} - \dfrac{\partial \chi}{\partial s}\dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_i}$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\sum \dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \sum \dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i - \dfrac{\partial \chi}{\partial s} \sum \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$. Для допустимости комплекса K необходимо и достаточно, чтобы ограничение этой формы на γ^x не содержало члена с $\partial\chi/\partial s$, т.е. чтобы было

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \Big|_{\gamma^x} = 0. \tag{5.7}$$

С другой стороны, на γ^x мы имеем: $x_3\, d\alpha_1 + d\beta_1 = 0$, $\quad x_3\, d\alpha_2 + d\beta_2 = 0$, откуда

$$\left(-x_3 \frac{\partial u}{\partial \beta_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right) d\alpha_1 + \left(x_3 + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right) d\alpha_2 = 0. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) следует, что функция $u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\frac{\partial u}{\partial \beta_1} = 0. \qquad (5.9)$$

Если теперь комплекс K задан уравнением $F(\alpha, \beta) = 0$, то имеем: $\partial u/\partial \alpha_i = -F'_{\alpha_i}/F'_{\beta_2}$, $i = 1, 2$, $\partial u/\partial \beta_1 = -F'_{\beta_1}/F'_{\beta_2}$. Подставив эти выражения в (5.9), получаем (5.6).

5.4. Геометрическая структура допустимых комплексов. Полученное в п. 5.4 условие допустимости комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$ имеет красивую геометрическую интерпретацию. Предварительно изложим некоторые геометрические понятия и факты, связанные с многообразием прямых H.

Свяжем с каждой прямой $h \in H$ трехмерное многообразие H_h всех прямых, пересекающих h. Совокупность одномерных подпространств в $T_h H$, касательных к H_h, порождает трехмерный конус $\Gamma_h \subset T_h H$.

Нетрудно убедиться, что в локальных координатах (α, β) многообразие H_h, где $h = (\alpha^0, \beta^0)$, задается уравнением:

$$(\alpha_1 - \alpha_1^0)(\beta_2 - \beta_2^0) - (\alpha_2 - \alpha_2^0)(\beta_1 - \beta_1^0) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение конуса Γ_h имеет вид:

$$d\alpha_1\, d\beta_2 - d\alpha_2\, d\beta_1 = 0.$$

Прямолинейные образующие конуса Γ_h можно интерпретировать как изотропные направления относительно голоморфной метрики

$$ds^2 = d\alpha_1\, d\beta_2 - d\alpha_2\, d\beta_1.$$

По этой причине естественно называть $\Gamma_h \subset T_h H$ изотропным конусом в точке h.

Сформулируем несколько простых фактов об изотропном конусе Γ_h.

Заметим, прежде всего, что плоскости, касательные к конусу Γ_h, задаются уравнениями

$$a_1\, d\alpha_1 + a_2\, d\alpha_2 + b_1\, d\beta_1 + b_2\, d\beta_2 = 0,$$

коэффициенты которых связаны соотношением $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Далее, из уравнения конуса Γ_h ясно, что на нем имеется два одномерных семейства Π_1, Π_2 двумерных плоскостей:

$$\Pi_1 : d\beta_1 = \lambda\, d\alpha_1, \quad d\beta_2 = \lambda\, d\alpha_2;$$

$$\Pi_2 : d\alpha_2 = \lambda\, d\alpha_1, \quad d\beta_2 = \beta\, d\alpha_1.$$

При этом через каждую точку конуса, отличную от вершины, проходит в точности одна плоскость каждого семейства. Назовем эти плоскости соответственно α-плоскостями и β-плоскостями.

Эти семейства плоскостей в $T_h H$ имеют простой геометрический смысл: α-плоскости касаются подмногообразий прямых, пересекающих h в одной точке, а β-плоскости касаются подмногообразий прямых, лежащих в одной плоскости пространства $\mathbb{R}^3$, проходящей через h.

Любые две плоскости одного семейства имеют нулевое пересечение, а любые две плоскости из разных семейств пересекаются по прямой. Обратно, каждая прямолинейная образующая изотопного конуса Γ_h принадлежит одной из плоскостей каждого из этих семейств.

Если трехмерное подпространство в $T_h H$ касается изотропного конуса Γ_h, то его пересечение с Γ_h является объединением одной α-плоскости и одной β-плоскости. Обратно, если трехмерное подпространство в $T_h H$ содержит какую-нибудь плоскость изотропного конуса Γ_h, то оно касается этого конуса.

Предложение 5.2. *Допустимые комплексы прямых в* $\mathbb{C}^3$ *суть те и только те комплексы* K, *которые в каждой своей гладкой точке* $h \in K$ *касаются соответствующего изотропного конуса* Γ_h.

В самом деле, условие допустимости, сформулированное в Предложении 5.1, эквивалентно условию, что касательное подпространство $T_h K$ к комплексу K в точке $h \in K$ касается изотропного конуса Γ_h.

Пусть, как и раньше, γ^x — многообразие прямых комплекса K, проходящих через точку x, т.е. $\gamma^x = H^x \cap K$.

Предложение 5.3. *Комплекс прямых* K *допустим тогда и только тогда, когда для любой гладкой точки* $h \in K$ *все подпространства* $T_h\gamma^x \subset T_h K \cap \Gamma_h$, $\quad x \in h$ *принадлежат одной* β*-плоскости.*

В самом деле, если комплекс допустим, то для любой его гладкой точки $h \in K$ подпространство $T_h K$ касается конуса Γ_h, а потому $T_h K \cap \Gamma_h$ является объединением α-плоскости и β-плоскости. Но тогда все подпространства $T_h\gamma^x$, где x пробегает прямую h, принадлежат одной β-плоскости.

Обратно, пусть комплекс K таков, что для любой его гладкой точки $h \in K$ все подпространства $T_h\gamma^x$, где x пробегает прямую h, порождают двумерную плоскость. Тогда $T_h K \cap \Gamma_h$ содержит эту двумерную плоскость, а потому $T_h K$ касается изотропного конуса Γ_h. Следовательно, в силу Предложения 5.2, комплекс K допустим.

Предложение 5.3 допускает другую эквивалентную формулировку. Обозначим для любого комплекса прямых K через $\Gamma^x \subset \mathbb{C}^3$ конус, образованный прямыми комплекса, проходящими через точку $x \in \mathbb{C}^3$. Далее, если $h \in K$ — гладкая точка комплекса K, то обозначим для любой точки x прямой h через $\pi_{h,x}$ плоскость в $\mathbb{C}^3$, касательную к Γ^x вдоль образующей h.

Предложение 5.4. *Комплекс прямых K допустим тогда и только тогда, когда для любой его гладкой точки $h \in K$ плоскости $\pi_{h,x}$, где x пробегает прямую h, совпадают.*

5.5. Описание допустимых комплексов. Из Предложения 5.4 следует, что кроме комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих фиксированную кривую, допустимыми являются также комплексы прямых, касательных к фиксированной (алгебраической) поверхности в $\mathbb{C}^3$. В самом деле, пусть K — комплекс прямых, касательных к поверхности P. Обозначим для любой гладкой точки $h \in K$ через π_h плоскость в $\mathbb{C}^3$, касательную к поверхности P в точке касания h с P. Очевидно, что если x — произвольная точка прямой h и Γ^x — конус, образованный прямыми комплекса K, проходящими через x, то плоскость $\pi_{h,x}$, касательная к Γ^x вдоль его образующей h, совпадает с π_h. Таким образом, комплекс K удовлетворяет условиям Предложения 5.4 и, значит, он допустим.

Теорема 5.2. *Допустимые комплексы прямых в $\mathbb{C}^3$ это те и только те комплексные трехмерные подмногообразия в многообразии прямых H, которые состоят либо из прямых, касающихся некоторой комплексной поверхности в $\mathbb{C}^3$, либо из прямых, пересекающих некоторую комплексную кривую в $\mathbb{C}^3$, возможно, бесконечно удаленную.*

Для доказательства теоремы введем понятие критической точки на прямой произвольного комплекса прямых K. Рассмотрим произвольную гладкую точку h комплекса K (т.е. прямую в $\mathbb{C}^3$). Назовем точку $x \in h$ критической, если отвечающая ей α-плоскость изотропного конуса Γ^x принадлежит $T_h K$. Аналогично назовем двумерную плоскость $\pi \supset h$ в $\mathbb{C}^3$ критической, если отвечающая ей β-плоскость принадлежит $T_h K$.

Предложение 5.5. *Если K — допустимый комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$, то для каждой его гладкой точки $h \in K$ существуют единственные критическая точка $x \in h$, возможно, бесконечно удаленная, и критическая плоскость $\pi \supset h$.*

В самом деле, если комплекс K допустим, то $T_h K \cap \Gamma_h$, где Γ_h — изотропный конус, является объединением одной α-плоскости и одной β-плоскости. Этим плоскостям отвечают соответственно критическая точка $x \in h$ и критическая плоскость $\pi \supset h$.

Следствие. *Существует стандартное вложение многообразия K' гладких точек комплекса K в многообразие полных флагов на $\mathbb{C}P^3$.*

Именно, каждому $h \in K'$ сопоставляется тройка — флаг (x, h, π), где x критическая точка, а π — критическая плоскость для h.

Пусть K — допустимый комплекс прямых, заданный уравнением $F(\alpha, \beta) = 0$. Найдем координаты критической точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ прямой $(\alpha, \beta) \in K$ в предположении, что эта точка не является бесконечно удаленной.

Уравнения α-плоскости в Γ_h, отвечающей x, таковы:

$$x_3\, d\alpha_i + d\beta_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Условия, что эта плоскость принадлежит гиперплоскости $F'_{\alpha_1} d\alpha_1 + F'_{\alpha_2} d\alpha_2 + F'_{\beta_1} d\beta_1 + F'_{\beta_2} d\beta_2 = 0$, касательной к K, имеют следующий вид:

$$F'_{\alpha_1} - x_3 F'_{\beta_1} = F'_{\alpha_2} - x_3 F'_{\beta_2} = 0.$$

Отсюда заключаем:

Предложение 5.6. *Координаты критической точки допустимого комплекса K на прямой $(\alpha, \beta) \in K$ задаются равенствами:*

$$x_3 = \frac{F'_{\alpha_1}}{F'_{\beta_1}} = \frac{F'_{\alpha_2}}{F'_{\beta_2}}, \quad x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2.$$

Предложение 5.7. *Многообразие критических точек на прямых допустимого комплекса K имеет размерность не выше чем 2.*

Доказательство. Пусть $K'' \subset K$ — подмножество гладких точек $h \in K$, критические точки x которых конечны. Для доказательства утверждения достаточно убедиться, что отображение $K'' \to \mathbb{C}^3$, относящее каждой прямой $(\alpha, \beta) \in K''$ ее критическую точку $x = (x_1, x_2, x_3)$, всюду вырождено.

Из уравнений прямых следует, что

$$dx_i - \alpha_i\, dx_3 = x_3\, d\alpha_i + d\beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, поскольку $x_3 = \frac{F'_{\alpha_1}}{F'_{\beta_1}} = \frac{F'_{\alpha_2}}{F'_{\beta_2}}$ и $F'_{\alpha_1} d\alpha_1 + F'_{\alpha_2} d\alpha_2 + F'_{\beta_1} d\beta_1 + F'_{\beta_2} d\beta_2 = 0$, получаем, что дифференциалы координат критических точек связаны соотношением:

$$F'_{\beta_1}(dx_1 - \alpha_1\, dx_3) + F'_{\beta_2}(dx_2 - \alpha_2\, dx_3) = 0. \tag{5.10}$$

Утверждение доказано.

Из Предложения 5.6 следует, что многообразие критических точек в случае допустимого комплекса K является либо комплексной кривой Λ, либо комплексной поверхностью S в $\mathbb{C}^3$. В первом случае комплекс K состоит из прямых, пересекающих кривую Λ. Во втором случае из (5.10) следует, что прямые (α, β) комплекса K касаются поверхности в своих критических точках. Тем самым, теорема доказана.

Примечание. Существует простая связь между задачей о восстановлении функции $f \in S(\mathbb{C}^3)$ через ее интегралы по прямым допустимого комплекса K прямых в $\mathbb{C}^3$ и следующей задачей для функций $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ на $\mathbb{C}^4$. Найти решение ψ системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\alpha}_1 \partial \bar{\beta}_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\alpha}_2 \partial \bar{\beta}_1}, \tag{5.11}$$

удовлетворяющее краевому условию $\psi \mid_K = \Phi$. Здесь K — комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^4$, заданное уравнением $F(\alpha, \beta) = 0$. Предполагается, что F удовлетворяет условиям (5.6), т.е. что K — характеристическое подмногообразие системы (5.6).

Из уравнений (5.11) следует, что ψ является лучевым преобразованием некоторой функции f на $\mathbb{C}^3$, т. е. $\psi = \mathcal{I} f$. Поэтому решение краевой задачи сводится к применению формулы обращения для допустимых комплексов. Именно, на основании этой формулы мы находим сначала функцию f по функции $\Phi = \psi \mid_K$. Тогда искомая функция ψ получается лучевым преобразованием функции f, т.е. $\psi = \mathcal{I} f$.

Обратно, задача интегральной геометрии о восстановлении функции f по функции $\Phi = \psi \mid_K$ сводится к решению краевой задачи. Именно, если решена краевая задача для системы уравнений (5.11), т.е. по функции $\Phi = \psi \mid_K$ восстановлена функция ψ, то искомая функция f определяется по формуле обращения для лучевого преобразования.

ГЛАВА III

Интегральная геометрия и гармонический анализ на плоскости и в пространстве Лобачевского

Особенность преобразований интегральной геометрии по сравнению с другими интегральными преобразованиями в том, что они часто допускают непосредственное обобщение с плоского случая на искривленный. Мы проиллюстрируем это здесь, рассматривая аналоги преобразования Радона для плоскости и пространства Лобачевского. Мы увидим, что они строятся по той же схеме, что и преобразование Радона для аффинного пространства, и даже структуры формул очень похожи. Впрочем, ненулевая кривизна пространства Лобачевского приводит к более богатой геометрии. Именно, на плоскости Лобачевского имеются два разных аналога прямых: собственно прямые, т. е. геодезические, и орициклы (окружности бесконечно большого радиуса). С ними связаны два разных варианта преобразования Радона.

Для плоскости (пространства) Лобачевского существует и аналог преобразования Фурье, основанный на унитарных представлениях группы движений. Ввиду некоммутативности этой группы, теория интеграла Фурье для плоскости (пространства) Лобачевского много сложнее, чем у его евклидова аналога. Вероятно, самый простой способ строить неевклидову теорию интеграла Фурье (теорию представлений) — через преобразование Радона, для орициклов (орисфер). Дело в том, что, как и в аффинном случае, в случае пространства Лобачевского аналог преобразования Радона для орициклов (орисфер) и аналог преобразования Фурье связаны при помощи одномерного (аффинного) преобразования Фурье. Ввиду этого орициклическое (орисферическое) преобразование Радона очень важно для построения гармонического анализа на плоскости и пространстве Лобачевского. Оно допускает обобщения на другие важные классы однородных многообразий. На примере плоскости и пространства Лобачевского мы моделируем весьма общие конструкции гармонического анализа на однородных многообразиях. При чтении этой главы очень полезно учитывать для сравнения соответствующие конструкции из § 1 и 2 главы I.

§ 1. Элементы планиметрии Лобачевского[1)]

1.1. Модели плоскости Лобачевского. Плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ является однородным пространством группы $SL(2,\mathbb{R})$ со стационарной подгруппой $SO(2)$ (подгруппа ортогональных матриц). В модели Пуанкаре она реализуется как верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, где движения, отвечающие матрицам $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, задаются так:

$$z \mapsto z \circ g = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}.$$

Очевидно, что стационарной подгруппой точки $z = i$ является подгруппа $SO(2)$[2)].

Риманова метрика на $\mathcal{L}^2$ имеет вид:

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2). \tag{1.1}$$

Инвариантное расстояние d между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется равенством

$$4\operatorname{sh}^2\frac{d}{2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{y_1 y_2}. \tag{1.2}$$

Элемент площади в метрике (1.1) имеет вид:

$$dv = y^{-2}\,dx\,dy. \tag{1.3}$$

Другой вариант задания плоскости Лобачевского — многообразие вещественных симметрических матриц

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ где } a > 0,\ \det u = 1, \tag{1.4}$$

1) Основные факты по геометрии Лобачевского приводятся здесь без доказательства.

2) Заметим, что центр группы $SL(2,\mathbb{R})$, состоящий из двух элементов $\pm e$, действует неэффективно (сохраняет все точки). Поэтому удобно рассматривать в качестве группы движений фактор-группу $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm e\}$.

с движениями:

$$u \mapsto g'ug, \ g \in SL(2,\mathbb{R}),$$

где g' — транспонированная матрица. Заметим, что многообразие матриц вида (1.4) можно представить как одну полу двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$:

$$ac - b^2 = 1, \ a, c > 0. \tag{1.5}$$

Соответствие между точками z верхней полуплоскости и матрицами $u = u(z)$ осуществляется следующим образом. Точке $z = i$ соответствует единичная матрица e, поскольку точка i и матрица e имеют одну и ту же стационарную подгруппу. Отсюда следует, что для любого $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ точке $i \circ g = \frac{\alpha i + \gamma}{\beta i + \delta}$ соответствует матрица $u = g'g$. В частности, $i \circ g = x + iy$ при $g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ xy^{1/2} & y^{-1/2} \end{pmatrix}$, и мы получаем, что точке $z = x + iy$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} y^{-1}(x^2 + y^2) & y^{-1}x \\ y^{-1}x & y^{-1} \end{pmatrix}$; другими словами, матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ соответствует точка $z = \frac{b}{c} + \frac{i}{c}$. Геометрически переход от полы двуполостного гиперболоида к полуплоскости осуществляется так. Сначала мы проектируем гиперболоид (1.5) на плоскость (b, c) параллельно оси a; в проекции получаем полуплоскость $c > 0$. Затем в плоскости (b, c) осуществляем проективное преобразование $(b, c) \mapsto (\frac{b}{c}, \frac{1}{c})$, переводящее полуплоскость $c > 0$ в себя.

В уравнении (1.5) удобно перейти к новым координатам $x_1 = \frac{a+c}{2}$, $x_2 = \frac{a-c}{2}$, $x_3 = b$. Тогда мы получим реализацию плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ в виде верхней полы двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$:

$$[x, x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad x_1 > 0. \tag{1.6}$$

В этой реализации движения задаются как линейные преобразования в $\mathbb{R}^3$, сохраняющие верхнюю полу гиперболоида, т.е. как элементы группы $SO_0(1,2) \cong SL(2,\mathbb{R})/\{\pm e\}$.

Риманова метрика в этой модели имеет вид:

$$ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{1.7}$$

Инвариантное расстояние d между точками x и y определяется равенством

$$\operatorname{ch} d = [x, y]. \tag{1.8}$$

Элемент площади в координатах x_2, x_3 на $\mathcal{L}^2$ имеет вид:

$$dv = \frac{dx_2\,dx_3}{x_1}. \tag{1.9}$$

1.2. Орициклы. На плоскости Лобачевского можно определить окружности бесконечно большого радиуса (орициклы) — пределы неевклидовых окружностей, когда их центр и радиус согласованно стремятся к бесконечности. В модели Пуанкаре орициклы представляются либо как (евклидовы) окружности, касающиеся вещественной оси (абсолюта), либо как прямые, параллельные вещественной оси. Последние естественно интерпретировать как окружности бесконечно большого радиуса, касающиеся вещественной оси в точке $x = \infty$. Из этого описания следует, что каждый орицикл задается уравнением:

$$|\xi_2 z - \xi_1|^2 = y,\ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, многообразие орициклов параметризуется точками $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$, причем точкам (ξ_1, ξ_2) и $(-\xi_1, -\xi_2)$ отвечает один и тот же орицикл. Орицикл, заданный уравнением (1.10), обозначается через $h(\xi) = h(\xi_1, \xi_2)$.

Замечание. Если плоскость $\mathcal{L}^2$ реализована как верхняя пола двуполостного гиперболоида (1.6), то орициклами являются плоские параболические сечения этого гиперболоида, а именно, сечения плоскостями вида $[\xi, x] \equiv \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 = 1$, где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi] = 0,\ \xi_1 > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^3$.

Очевидно, что на многообразии H орициклов действует, и притом транзитивно, группа движений $SL(2, \mathbb{R})$; движение, отвечающее матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, переводит орицикл $h(\xi_1, \xi_2)$ в орицикл $h(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \beta\xi_1 + \delta\xi_2)$.

На языке движений орициклы описываются следующим образом. Это орбиты унипотентной подгруппы Z матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$[1)] и все их сдвиги. На каждом орицикле действует группа, сопряженная группе Z, и относительно этого действия орицикл является евклидовой прямой. Таким образом, многообразие H орициклов является однородным пространством группы $SL(2, \mathbb{R})$ со стационарной подгруппой $\pm Z$. В результате, перейдя от плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ к многообразию орициклов H, мы получили новое однородное пространство с той же

[1)] В интерпретации Пуанкаре это прямые, параллельные вещественной оси.

группой движений, но с другой стационарной подгруппой. Такого рода конструкции играют важную роль в геометрии.

Каждый орицикл имеет единственную общую точку с абсолютом, которая называется его центром. В интерпретации Пуанкаре это точка касания с вещественной прямой. Орициклы с общим центром называются параллельными. Заметим, что орицикл $h(\xi_1,\xi_2)$ касается вещественной оси в точке $x = \frac{\xi_1}{\xi_2}$; отсюда следует, что любой пучок параллельных орициклов есть $\{h(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2) \mid 0 < \lambda < \infty\}$, где (ξ_1,ξ_2) фиксировано.

Все точки орицикла $h(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2)$ находятся на одинаковом расстоянии $2|\ln\lambda|$ от параллельного ему орицикла $h(\xi_1,\xi_2)$. Мы будем называть выражение $\rho(z;\xi) = -2\ln\lambda$ ориентированным расстоянием точки $z \in h(\lambda\xi)$ от орицикла $h(\xi)$. Оно имеет вид:

$$\rho(z;\xi) = \ln(y^{-1}|\xi_2 z - \xi_1|^2) \quad (z = x + iy,\ \xi = (\xi_1,\xi_2)) \tag{1.11}$$

(поскольку $\lambda = (y^{-1}|\xi_2 z - \xi_1|^2)^{-1/2}$).

Каждый орицикл $h(\xi)$ разбивает плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ на две части $\mathcal{L}_+(\xi)$ и $\mathcal{L}_-(\xi)$, из которых $\mathcal{L}_+(\xi)$ примыкает к абсолюту, а граница $\mathcal{L}_-(\xi)$ имеет с абсолютом лишь одну общую точку — центр орицикла $h(\xi)$. Области $\mathcal{L}_+(\xi)$ и $\mathcal{L}_-(\xi)$ состоят из точек $z \in \mathcal{L}^2$, для которых соответственно $\rho(z;\xi) > 0$ и $\rho(z;\xi) < 0$.

Примечание. Однородные пространства $\mathcal{L}^2 = SO(2) \setminus SL(2,\mathbb{R})$ и $H = \pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$ находятся в отношении двойственности. По построению, точкам $\xi \in H$ отвечают кривые $h(\xi)$ в $\mathcal{L}^2$ (орициклы). В то же время точкам $z \in \mathcal{L}^2$ можно сопоставить кривые $l(z) \in H$, отвечающие множеству орициклов, проходящих через z. Каждая из этих кривых является траекторией подгруппы $SO(2)$ или подгруппы, с ней сопряженной. Она разбивает многообразие H на две части: область $H_+(z)$, где $\rho(z,\xi) > 0$ и область $H_-(z)$, где $\rho(z;\xi) < 0$. В реализации $H = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ кривые $l(z)$ — это всевозможные эллипсы на $\mathbb{R}^2$ с центром в точке 0, ограничивающие площадь, равную 1; $H_+(z)$ и $H_-(z)$ — соответственно внешняя и внутренняя части эллипса $l(z)$. Заметим, что многообразие всех орбит подгруппы $SO(2)$ и подгрупп, сопряженных с ней, неоднородно; в рассматриваемой реализации оно состоит из всех эллипсов на $\mathbb{R}^2$ с центром в точке 0.

1.3. Геодезические. Рассмотрим теперь “прямые” (геодезические) на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$. В модели Пуанкаре это полуокружности на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с центрами на вещественной прямой и полупрямые, ортогональные вещественной прямой. Отсюда следует, что каждая “прямая” задается уравнением:

$$(x-a)(x-b) + y^2 = 0, \quad a,b \in \mathbb{R} \cup (\infty),\ a \neq b. \tag{1.12}$$

В частности, при $a = \infty$ (или $b = \infty$) получаем семейство (евклидовых) полупрямых, ортогональных вещественной прямой. Из (1.12) следует, что многообразие "прямых" параметризуется парами (a,b), $a \neq b$, где a, b — точки проективной прямой $\mathbb{P}^1$, причем парам (a,b) и (b,a) отвечает одна и та же "прямая".

На языке движений каждая "прямая" является орбитой подгруппы D диагональных матриц или подгруппы, с ней сопряженной, и все "прямые" получаются одна из другой движениями. Тем самым, многообразие "прямых" является однородным пространством $D\setminus SL(2,\mathbb{R})$. В результате мы получаем еще одно однородное пространство с той же группой движений $SL(2,\mathbb{R})$, но с другой стационарной подгруппой. Отметим, что многообразие всех орбит подгрупп D и сопряженных с ней подгрупп неоднородно. В модели Пуанкаре оно совпадает с многообразием всех полупрямых на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и дуг окружностей, имеющих ровно две общие точки с вещественной прямой.

Если плоскость Лобачевского реализована как верхняя пола гиперболоида (1.6), то в этой реализации геодезическими являются линии пересечения (одна пола гиперболы) с плоскостями в $\mathbb{R}^3$, проходящими через точку O, т.е. с плоскостями

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0. \tag{1.13}$$

Обозначим через $\gamma(\xi)$ геодезическую, заданную уравнением (1.13). Очевидно, что плоскость (1.13) тогда и только тогда пересекает гиперболоид $[x,x] = 1$, когда $[\xi,\xi] < 0$. Так как, кроме того, $\gamma(\lambda\xi) = \gamma(\xi)$ для любого $\lambda \neq 0$, то можно принять

$$[\xi,\xi] = -1.$$

Таким образом, многообразие геодезических на плоскости Лобачевского параметризуется точками ξ двуполостного гиперболоида $[\xi,\xi] = -1$ в $\mathbb{R}^3$, причем точкам ξ и $-\xi$ соответствует одна и та же геодезическая.

§ 2. Орициклическое преобразование

2.1. Определение оператора $\mathcal{R}^h$. В этом параграфе мы исследуем аналог преобразования Радона на плоскости Лобачевского, связанный с орициклами.

Определение. Назовем орициклическим преобразованием интегральное преобразование $\mathcal{R}^h$ в $\mathcal{L}^2$, относящее каждой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^2$ ее интегралы по орициклам:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{h(\xi)} f(z)\, ds, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \tag{2.1}$$

где $h(\xi)$ — орицикл, заданный уравнением (1.10), $ds = \frac{|dz|}{y}$ — элемент длины на плоскости Лобачевского.

Выражение для $\mathcal{R}^h$ может быть записано также в следующей форме:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^2} f(z)\,\delta(\rho(z;\xi))\frac{dx\,dy}{y^2}, \tag{2.2}$$

где $\rho(z;\xi)$ — расстояние от точки z до орицикла $h(\xi)$, см. формулу (1.11), а $\delta(\cdot)$ — дельта функция на $\mathbb{R}$.

Из определения следует, что оператор $\mathcal{R}^h$ перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$. Таким образом, мы имеем пару однородных пространств одной и той же группы $SL(2,\mathbb{R})$ — плоскость Лобачевского и многообразие орициклов и оператор перехода от функций на одном пространстве к функциям на другом пространстве, перестановочный с движениями. Заметим, что интегрирование ведется по орбитам стационарной подгруппы второго пространства и по их сдвигам.

2.2. Формула обращения. Найдем формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^h$, следуя той же схеме, что и в случае евклидовой плоскости (см. § 1 главы I).

Сначала берем радиально симметричную функцию f, зависящую только от неевклидова расстояния точки z от точки i:

$$f(z) = F(y^{-1/2}|z-i|).$$

Из перестановочности $\mathcal{R}^h$ с движениями плоскости $\mathcal{L}^2$ следует, что $\mathcal{R}^h f(\xi)$ зависит только от расстояния точки i до орицикла $h(\xi)$, т. е.

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \widehat{F}(r), \quad \text{где } r = \rho(i;\xi) = \ln(\xi_1^2+\xi_2^2).$$

Значит, $\widehat{F}(r)$ равно интегралу функции f по орициклу $h(e^{r/2},0)$: $y = e^r$, т. е.

$$\widehat{F}(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(e^{-r/2}\sqrt{x^2+(e^r-1)^2})e^{-r}\,dx = 2\int\limits_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^{+\infty} \frac{F(s)s\,ds}{e^{r/2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}}} \tag{2.3}$$

(ср. формулу (1.2) из § 1 главы I). Таким образом, преобразование от $F(s)$ к $e^{r/2}\widehat{F}(r)$ сводится к преобразованию Абеля, и из (2.3) следует:

$$F(s) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{2\operatorname{sh}\frac{r}{2}>0} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'\,dr}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}-s^2}}. \tag{2.4}$$

В частности,

$$f(i) = F(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'\,dr}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}. \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу (2.3) $e^{r/2}\widehat{F}(r)$ — гладкая четная функция. Отсюда следует, что интеграл (2.5) сходится (поскольку $(e^{r/2}\widehat{F}(r))'_{r=0} = 0$) и выражение для $f(i)$ можно также представить в виде:

$$f(i) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'\,dr}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь f — произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{L}^2$; возьмем ее усреднение $\overline{f}(z) = F(y^{-1/2}|z-i|)$ по неевклидовым окружностям с центром в точке i:

$$F(y^{-1/2}|z-i|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}\right)d\theta;$$

выражение для F можно записать также в следующей форме:

$$F(s) = \frac{2}{\pi}\int_{\mathcal{L}^2} f(z)\,\delta(y^{-1}|z-i|^2 - s^2)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Заметим, что $f(i) = F(0)$. Пусть $\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^h\overline{f}(\xi)$, $r = \ln(\xi_1^2 + \xi_2^2)$. Из перестановочности $\mathcal{R}^h$ с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ следует, что

$$\widehat{F}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\cos\theta, e^{-r/2}\sin\theta)\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{-r}\int_{\rho(i;\xi)=r} \mathcal{R}^h f(\xi)(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1) =$$
$$= \frac{1}{\pi}e^{-r}\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(i;\xi) - r)\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{2.7}$$

где $\rho(i;\xi)$ — расстояние от точки $z = i$ до орицикла $h(\xi)$. На основании (2.5) и (2.6) имеем:

$$f(i) = \overline{f}(i) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr \tag{2.8}$$

(ср. с формулой (1.4) из § 1 главы I). Подставив сюда выражение (2.7) для $\widehat{F}(r)$, получим после элементарных упрощений:

$$f(i) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{H_\pm(i)} \frac{e^{-1/2}\rho(i;\xi)}{\operatorname{sh}\frac{\rho(i;\xi)}{2}} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1\right) \mathcal{R}^h f(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{2.9}$$

где $H_\pm(i)$ — области в H^2, где соответственно $\rho(i;\xi) > 0$ и $\rho(i;\xi) < 0$.

Чтобы получить выражение для f в произвольной точке z нужно применить к полученным равенствам групповой сдвиг, переводящий точку i в точку z. В результате получаем:

Теорема 2.1. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое орициклическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(z,r))'r}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\, dr = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(z,r))'r}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\, dr, \tag{2.10}$$

где

$$\widehat{F}(z,r) = \frac{1}{2\pi} e^{-r} \int\limits_{\rho(z,\xi)=r} \mathcal{R}^h f(\xi)(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-r} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(z;\xi) - r)\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{2.11}$$

(*ср. формулы* (1.5) *и* (1.6) *из главы* I):

Из (2.9) *следует также*

$$f(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{H_\pm(z)} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho(z;\xi)}}{\operatorname{sh}\frac{\rho(r;\xi)}{2}} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1\right) \mathcal{R}^h f(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{2.12}$$

$H_\pm(z)$ *— области в H, где соответственно $\rho(x;\xi) > 0$ и $\rho(z;\xi) < 0$.*

Заметим, что $\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}$ — оператор дифференцирования вдоль пучка параллельных орициклов.

2.3. Соотношения Асгейрссона. Для обращения преобразования $\mathcal{R}^h$ мы использовали формулу (2.4) только при $s = 0$. При $s \neq 0$ эта формула содержит дополнительную информацию о связи усреднений функции f и ее орициклического преобразования $\mathcal{R}^h f$.

Теорема 2.2. *Имеют место следующие соотношения Асгейрссона для плоскости Лобачевского:*

$$F(z;s) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{2\operatorname{sh} r/2>s} \frac{\left(e^{r/2}\widehat{F}(z,r)\right)'_r}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}-s^2}}\,dr, \tag{2.13}$$

где $F(r;s)$ — среднее функции f по неевклидовым окружностям с центром в точке z

$$F(z,s) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}^2} f(z')\,\delta(y^{-1}y'^{-1}|z'-z|^2-s^2)\,\frac{dx'\,dy'}{y'^2} \tag{2.14}$$

и $\widehat{F}(z,r)$ — среднее функции $\mathcal{R}^h f$ по множеству орициклов, равноотстоящих от точки z, см. формулу (2.11). *Имеем также*

$$\widehat{F}(z,r) = 2\int\limits_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^{\infty} \frac{F(z,s)\,s\,ds}{e^{r/2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}}}. \tag{2.15}$$

Формулы (2.13), (2.15) получаются из (2.4), (2.3) групповым сдвигом; ср. их с соотношениями Асгейрссона (1.8), (1.10) из § 1 главы I.

2.4. Соотношение симметрии. Из (2.15) следует, что $e^{r/2}\widehat{F}(z,r)$ — четная функция от r, т. е.

$$e^{r/2}\widehat{F}(z,r) = e^{-r/2}\widehat{F}(z,-r)$$

для любых z и r. Подставив сюда выражение (2.11) для $\widehat{F}(z,r)$, получаем следующее соотношение симметрии для функции $\mathcal{R}^h f$:

$$e^{-r/2}\int \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(z;\xi)-r)\,d\xi_1\,d\xi_2 = e^{r/2}\int \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(z;\xi)+r)\,d\xi_1\,d\xi_2. \tag{2.16}$$

2.5. Формула обращения для орициклического преобразования в другой модели плоскости Лобачевского. Пусть плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ реализована в виде верхней полы двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$

$$[x,x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad x_1 > 0.$$

В этой модели орициклами являются сечения гиперболоида плоскостями

$$[\xi,x] \equiv \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 = 1,$$

где ξ — точка верхней полы конуса

$$K: \quad [\xi,\xi] = 0, \quad \xi_1 > 0.$$

Орициклическое преобразование задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^2} f(x)\,\delta([\xi,x]-1)\,dx, \qquad \xi \in K, \tag{2.17}$$

где $dx = x_1^{-1}\,dx_2\,dx_3$ — инвариантная мера на $\mathcal{L}^2$.

Теорема 2.3. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое орициклическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_K \mathcal{R}^h f(\xi)\,([\xi,x]-1)^{-2}\,d\xi, \qquad \text{где} \qquad d\xi = \xi_1^{-1}\,d\xi_2\,d\xi_3. \tag{2.18}$$

Интеграл следует понимать в регуляризованном смысле, а именно как значение при $\mu = -2$ аналитической функции от μ, заданной при $\operatorname{Re}\mu > 0$ сходящимся интегралом: $(2\pi)^{-2}\int_K \mathcal{R}^h f(\xi)\,|[\xi,x]-1|^{\mu}\,d\xi$.

Отметим сходство формул (2.17) и (2.18) с соответствующими формулами для преобразования Радона из главы I. Подобно случаю преобразования Радона, формулу обращения (2.18) достаточно доказать для функций на $\mathcal{L}^2$, зависящих только от расстояния до точки $x^0 = (1,0,0)$. Легко убедиться в том, что для таких функций f формула обращения (2.18) совпадает с уже доказанной ранее.

§ 3. Аналог преобразования Фурье на плоскости Лобачевского и его связь с орициклическим преобразованием

3.1. Преобразование Фурье на $\mathbb{R}^2$.. На наивном уровне классический интеграл Фурье на $\mathbb{R}^2$ есть разложение функции из $L^2(\mathbb{R}^2)$ по собственным функциям операторов параллельного сдвига, т. е. по экспонентам $e^{i(\xi_1 x+\xi_2 y)}$. Однако он тесно связан и с более широкой группой — группой всех движений евклидовой плоскости. Укажем эту связь.

Рассмотрим оператор Лапласа Δ на евклидовой плоскости, т. е. дифференциальный оператор 2-го порядка, перестановочный с движениями: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Известно, что он имеет на $L^2(\mathbb{R}^2)$ непрерывный лебеговский спектр, совпадающий с полупрямой $(-\infty, 0)$. Требуется построить достаточный запас обобщенных собственных функций этого оператора, по которым разлагается любая функция $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Мы будем вести рассуждения на наивном уровне, не уточняя, что нужно понимать под обобщенными собственными функциями в случае непрерывного спектра и под разложением функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ по этим обобщенным функциям.

Фиксируем в группе движений евклидовой плоскости какую-нибудь однопараметрическую подгруппу трансляций, например, подгруппу сдвигов параллельно оси y. В каждом собственном подпространстве оператора Δ, отвечающем собственному значению $-\lambda^2$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0)$ имеется пара обобщенных функций, инвариантных относительно этой подгруппы — $e^{\pm i\lambda x}$. Берем одну из них, например, $e^{i\lambda x}$ и применяем к ней всевозможные сдвиги. Очевидно, что при любой трансляции функция $e^{i\lambda x}$ умножается на число, а при повороте на угол θ вокруг точки 0 она переходит в $e^{i\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)}$. Таким образом, для каждого собственного значения $-\lambda^2$ оператора Δ мы получаем набор собственных функций $e^{i\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)}$, в частности, и функцию $e^{-i\lambda x}$. Между этими функциями нет линейных соотношений, и по ним можно разложить любую собственную функцию f_λ, оператора Δ с собственным значением $-\lambda^2$:

$$f_\lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u_\lambda(\theta)e^{i\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,d\theta \quad (\lambda > 0). \tag{3.1}$$

Введем в пространство собственных функций оператора Δ, отвечающих собственному значению $-\lambda^2$, норму

$$||f_\lambda||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_\lambda(\theta)|^2\,d\theta \tag{3.2}$$

и рассмотрим соответствующее гильбертово пространство H_λ. В H_λ определено унитарное представление T_λ группы движений евклидовой плоскости: в функциях u_λ каждой трансляции $(x,y) \mapsto (x+x_0, y+y_0)$ отвечает оператор умножения на функцию $e^{i\lambda(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)}$, а повороту на угол α вокруг точки 0 — оператор поворота $u_\lambda(\cdot) \mapsto u_\lambda(\cdot+\alpha)$. Нетрудно показать, что представления T_λ неприводимы.

Представление группы движений в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ разлагается по представлениям T_λ; опишем это разложение. Любая функция $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ разлагается в интеграл

$$f = \int_0^\infty \lambda f_\lambda\,d\lambda, \tag{3.3}$$

где f_λ задается равенством (3.1), в котором $u_\lambda(\theta) = \widetilde{f}(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)$, $\widetilde{f}$ — преобразование Фурье функции f. При этом имеет место формула Планшереля:

$$\|f\|^2 = \int\limits_0^\infty \lambda\|f_\lambda\|^2\, d\lambda, \tag{3.4}$$

где $\|f_\lambda\|$ задается равенством (3.2).

3.2. Преобразование Фурье на плоскости Лобачевского. Проведем теперь аналогичные рассуждения на том же нестрогом уровне для случая плоскости Лобачевского. Рассмотрим оператор Лапласа—Бельтрами Δ на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$, т. е. дифференциальный оператор 2-го порядка, перестановочный с движениями в $\mathcal{L}^2$; он имеет следующий вид:

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Пусть $L^2(\mathcal{L}^2)$ — пространство функций на $\mathcal{L}^2$ с интегрируемым квадратом модуля (относительно инвариантной меры $dv = \frac{dx\,dy}{y^2}$).

Оператор Δ имеет на $L^2(\mathcal{L}^2)$ непрерывный лебеговский спектр, совпадающий с интервалом $(-\infty, -1/4)$. Пусть Z — унипотентная подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Под интегралом Фурье на плоскости Лобачевского будем понимать разложение функций $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$ по некоторым специальным обобщенным функциям оператора Δ, а именно, по обобщенным собственным функциям, инвариантным относительно подгруппы Z, и их сдвигам. Эти функции и являются аналогами экспонент $e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}$.

В каждом собственном подпространстве оператора Δ, отвечающем собственному значению $-\frac{1+s^2}{4}$ $(s \in \mathbb{R})$, имеются две функции, инвариантные относительно подгруппы Z — $y^{\frac{1\pm is}{2}}$. Берем одну из них $y^{\frac{1+is}{2}}$; при всевозможных сдвигах она переходит в функции вида

$$\Phi_s(z;\xi) = (y|\xi_2 z - \xi_1|^{-2})^{\frac{1+is}{2}} = \exp\left(-\frac{1+is}{2}\rho(z;\xi)\right), \tag{3.5}$$

где $\rho(z;\xi)$ — расстояние от точки $z = x + iy$ до орицикла $h(\xi)$. Будем называть функции $y^{\frac{1\pm is}{2}}$ зональными орициклическими функциями, а их сдвиги (3.5) — просто орициклическими функциями Мы видим, что если ξ и ξ' пропорциональны, то соответствующие функции Φ_s

различаются только множителем. Других соотношений между функциями Φ_s при $s > 0$ нет, и если взять функции $\Phi_s(z;\xi)$ где $s > 0$, а ξ пробегает по одному представителю на каждой прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через точку 0, то они образуют полный набор функций, по которым разлагается любая функция из $L^2(\mathcal{L}^2)$.

Определим преобразование Фурье функций на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ по аналогии с классическим преобразованием Фурье.

Определение. Преобразованием Фурье любой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^2$ называется скалярное произведение f и обобщенной орициклической функции (3.5),

$$\mathcal{F} f(\xi, s) = \int\limits_{\mathcal{L}^2} f(z)\Phi_s(z;\xi)\frac{dx\,dy}{y^2}. \tag{3.6}$$

Поскольку функции Φ_s однородны по ξ, то функция $\mathcal{F} f$ также однородна по ξ:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi; s) = |\lambda|^{-is-1}\mathcal{F} f(\xi; s). \tag{3.7}$$

3.3. Связь с орициклическим преобразованием и формула обращения. Полнота семейства орициклических функций Φ_s означает, что должна существовать формула обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$. Построим ее.

Сначала установим связь между преобразованием Фурье $\mathcal{F} f$ и орициклическим преобразованием $\mathcal{R}^h f$. Как и в евклидовом случае, переход от функции f к функции $\mathcal{F} f$ можно разбить на два этапа: сначала мы интегрируем функцию f по орициклам $\rho(z; e^{-\lambda/2}\xi) \equiv \rho(z;\xi) - \lambda = 0$, а затем полученную функцию, умноженную на $e^{-\frac{is+1}{2}\lambda}$, интегрируем по λ.

При первом интегрировании получаем

$$\int\limits_{h(e^{-\lambda/2}\xi)} f(z)\,ds = \mathcal{R}^h f(e^{-\lambda/2}\xi).$$

Итак, имеем:

Теорема 3.1. *Преобразование Фурье на $\mathcal{L}^2$ и орициклическое преобразование связаны соотношением*

$$\mathcal{F} f(\xi; s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}^h f(e^{-\lambda/2}\xi)\, e^{-\frac{is+1}{2}\lambda}\, d\lambda. \tag{3.8}$$

Отсюда по формуле обращения для одномерного преобразования Фурье следует:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds. \tag{3.9}$$

Формулу обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ можно получить из уже известной нам формулы обращения (2.12) для орициклического преобразования $\mathcal{R}^h$. Заметим, что в евклидовом случае мы из формулы обращения для преобразования Фурье получили формулу обращения для преобразования Радона; здесь же мы идем в обратном направлении. Подставив в (2.12) выражение (3.9) $\mathcal{R}^h f$ через $\mathcal{F} f$, получаем

$$f(z) = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho(z;\xi)}}{\operatorname{sh} \frac{\rho(z;\xi)}{2}} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1\right) \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{3.10}$$

Остается упростить полученное выражение. Прежде всего заметим, что из условия однородности (3.7) для $\mathcal{F} f$ следует

$$\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1\right) \mathcal{F} f(\xi; s) = -is\, \mathcal{F} f(\xi; s).$$

Перейдем далее в (3.10) к "полярным" координатам $\xi = e^r \xi'$, где $-\infty < r < +\infty$, а ξ' принадлежит контуру $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus 0$, пересекающему по одному разу каждый луч, выходящий из точки 0. Мы получим

$$f(z) = \frac{i}{8\pi^3} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\, \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho(z;\xi)}}{\operatorname{sh}\left(r + \frac{\rho(z;\xi)}{2}\right)}\, e^{-irs}\, \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds\, dr (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_2).$$

Интегрируя по r (интеграл по r нужно понимать в смысле главного значения), получаем:

Теорема 3.2. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ по следующей формуле обращения:*[1]

$$f(z)=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}\Big(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\exp\Big(-\frac{1-is}{2}\rho(z;\xi)\Big)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\Big)\,ds=$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}\Big(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\Phi_{-s}(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\Big)\,ds. \quad (3.11)$$

Мы не будем останавливаться на строгом обосновании перемены порядка интегрирования, которое было использовано при выводе формулы (3.11).

3.4. Соотношение симметрии. Покажем, что f может быть выражена только через $\mathcal{F}f(\xi;s)$ при $s>0$. Этот факт связан с тем, что сдвиги функций $y^{\frac{1\pm is}{2}}$, принадлежащих одному и тому же собственному подпространству оператора Δ, выражаются друг через друга. Именно,

$$y^{\frac{1-is}{2}}=c(s)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(y|z-\xi_1|^{-2}\right)^{\frac{1+is}{2}}d\xi_1,$$

где $c(s)=\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1+is}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{is}{2}\right)$.

Отсюда легко следует соотношение симметрии для $\mathcal{F}f$: *интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\Phi_{-s}(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)$$

является четной функцией от s. Значит, в силу соотношения симметрии, формулу обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{0}^{\infty} s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}\Big(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\Phi_{-s}(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\Big)\,ds. \quad (3.12)$$

Примечание. Соотношение симметрии для $\mathcal{F}f$ можно получить и из соотношения симметрии (2.16) для орициклического преобразования

[1] Поскольку гл. зн. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-irs}\,dr}{\mathrm{sh}(z+\frac{\rho}{2})}=e^{\frac{i}{2}s\rho}$ гл. зн. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-irs}}{\mathrm{sh}\,r}\,dr=ie^{\frac{i}{2}s\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin rs}{\mathrm{sh}\,r}\,dr=-\pi i\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}e^{-\frac{i}{2}s\rho}$.

$\mathcal{R}^h f$. Именно, подставив в (2.16) выражение $\mathcal{R}^h f$ через $\mathcal{F} f$ и перейдя к “полярным” координатам $\xi = e^t \xi'$, $\xi' \in \Gamma$, получим, что интеграл

$$e^{-r/2} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1-is)t} \mathcal{F} f(\xi; s) \delta(2t + \rho(z;\xi) - r)\, ds\, dt (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1). \tag{3.13}$$

является четной функцией от r. Проинтегрировав по t, получаем, что интеграл

$$\int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isr} \mathcal{F} f(\xi; s) e^{-\frac{1-is}{2}\rho(z;\xi)} ds (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)$$

является четной функцией от r. Очевидно, что это условие эквивалентно условию симметрии для $\mathcal{F} f$.

3.5. Формула Планшереля. Из определения преобразования Фурье $\mathcal{F} f$ и из формулы обращения (3.12) получаем:

Теорема 3.3. *Для любой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^2$ справедлива следующая формула Планшереля*:

$$\int_{\mathcal{L}^2} |f(z)|^2 \frac{dx\, dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} |\mathcal{F} f(\xi; s)|^2 (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)\, ds. \tag{3.14}$$

В самом деле, подставив в интеграл $\int f(z) \overline{f(z)} \frac{dx\, dy}{y^2}$ вместо функции $\overline{f(z)}$ ее выражение через $\mathcal{F} f$, получаем:

$$\int_{\mathcal{L}^2} |f(z)|^2 \frac{dx\, dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{L}^2} \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} f(z) \overline{\mathcal{F} f(\xi; s)} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1+is}{2}\rho(z;\xi)\right] (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)\, ds \frac{dx\, dy}{y^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} |\mathcal{F} f(\xi; s)|^2 (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)\, ds.$$

На основании формулы Планшереля, преобразование Фурье по классической схеме переносится с гладких финитных функций на все функции $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$.

§ 4. Связь с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{R})$

Продемонстрируем на примере плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ связь интегральной геометрии с теорией представлений групп Ли.

Мы имеем гильбертово пространство $L^2(\mathcal{L}^2)$, в котором действует унитарное представление T группы $SL(2,\mathbb{R})$:

$$T_g f(z) = f(z \circ g), \quad g \in SL(2,\mathbb{R}),$$

где $z \mapsto z \circ g$ — движение плоскости Лобачевского, отвечающее g. Задача теории представлений (гармонический анализ для плоскости Лобачевского) состоит в том, чтобы разложить $L^2(\mathcal{L}^2)$ на неприводимые инвариантные подпространства. Эта задача аналогична задаче о разложении функций из $L^2(\mathbb{R}^2)$ в интеграл Фурье, а неприводимые инвариантные подпространства можно трактовать как аналоги экспонент. Покажем, что решение этой задачи дается формулами (3.12) и (3.14) из § 3.

Вначале нужно описать сами неприводимые инвариантные подпространства, на которые разлагается $L^2(\mathcal{L}^2)$. Рассмотрим собственное подпространство оператора Лапласа — Бельтрами Δ, отвечающее произвольному собственному значению $-\frac{1+s^2}{4}$. Как уже говорилось, оно порождено обобщенными функциями $\Phi_s(z;\xi) = (y|\xi_2 z - \xi_2|^{-2})^{\frac{1+is}{2}}$, где ξ пробегает по одному представителю на каждой прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через точку 0. Тем самым, элементы этого собственного подпространства можно представить в виде:

$$f_s(z) = \int\limits_{\Gamma} u_s(\xi)\Phi_s(z;\xi)(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1); \tag{4.1}$$

где функция u_s удовлетворяет условию однородности:

$$u_s(\lambda\xi) = |\lambda|^{is-1} u_s(\xi); \tag{4.2}$$

интеграл берется по любому контуру $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus 0$, пересекающему по одному разу каждый луч, выходящий из точки 0. (От выбора Γ интеграл не зависит, так как дифференциальная форма, которую мы интегрируем, инвариантна относительно преобразований подобия $\xi \mapsto \lambda\xi$, ср. формулу (1.14) из главы I). Введем в пространстве функций f_s норму

$$||f_s||^2 = \int\limits_{\Gamma} |u_s(\xi)|^2(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1) \tag{4.3}$$

и определим гильбертово пространство H_s как L^2 по этой норме. Заметим, что, в силу сказанного в п. 3.4, пространства H_s и H_{-s} совпадают.

Сдвиги на $\mathcal{L}^2$ индуцируют в H_s унитарное представление T_s группы $SL(2,\mathbb{R})$. В функциях $u_s(\xi)$ оно имеет вид:

$$(T_s(g)u_s)(\xi_1,\xi_2) = u_s(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \beta\xi_1 + \delta\xi_2), \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Известно,[1] что это представление неприводимо.

Введем операторы проектирования $P_s : L^2(\mathcal{L}^2) \to H_s$

$$P_s f = f_s,$$

где f_s задается равенством (4.1), в котором $u_s(\xi) = \mathcal{F} f(\xi, s)$. Очевидно, что эти операторы P_s перестановочны с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ в пространствах $L^2(\mathcal{L}^2)$ и H_s. Итак, задача о разложении $L^2(\mathcal{L}^2)$ на неприводимые подпространства состоит в том, чтобы разложить функции $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$ по их проекциям f_s.

Решение этой задачи дается формулами (3.12) и (3.14), поскольку эти формулы можно представить в следующем виде:

$$f = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} s \operatorname{th}\frac{\pi s}{2} f_s\, ds, \quad f_s = P_s f; \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}^2} |f(z)|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{\infty} s \operatorname{th}\frac{\pi s}{2} ||f_s||^2\, ds, \tag{4.5}$$

где $||f_s||$ задается равенством (4.3).

Напомним, что вывод основной формулы (3.12) опирался на формулу обращения для оператора $\mathcal{R}^h$ орициклического преобразования. Разъясним роль этого оператора с теоретико-групповой точки зрения.

Оператор $\mathcal{R}^h$ переводит функции $f(z)$ на однородном пространстве $\mathcal{L}^2 = SO(2) \setminus SL(2,\mathbb{R})$ в функции $\mathcal{R}^h f(\xi)$ на однородном пространстве $H = \pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$, и он перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ на этих пространствах. При этом неприводимые компоненты переходят в неприводимые компоненты, но a priori может существовать ненулевое

[1] См., например: Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып. 5.

ядро. В действительности, поскольку для $\mathcal{R}^h$ существует формула обращения, ядро отображения равно нулю, и задача о разложении представления группы $SL(2,\mathbb{R})$ в пространстве $L^2(\mathcal{L}^2)$ сводится к задаче о разложении представления в пространстве функций на $H = \pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$. Решение последней задачи очень просто по следующей причине. На однородном пространстве H действует коммутативная группа преобразований подобия $\xi \mapsto \lambda\xi$, перестановочных с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$. Рассмотрим соответствующую коммутативную группу операторов A_λ:

$$(A_\lambda f)(\xi) = f(\lambda\xi).$$

Общие собственные подпространства операторов A_λ состоят из однородных функций. Так как операторы A_λ коммутируют с операторами представления группы $SL(2,\mathbb{R})$, их собственные подпространства инвариантны относительно этой группы. Известно, что индуцированные в этих подпространствах представления группы $SL(2,\mathbb{R})$ неприводимы. Разложение пространства функций на H на неприводимые составляющие тем самым сводится к разложению на собственные подпространства операторов A_λ и, так как группа операторов A_λ коммутативна и изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}$, это разложение сводится к обычному одномерному преобразованию Фурье. Композиция орициклического преобразования $\mathcal{R}^h$ и этого одномерного преобразования Фурье есть преобразование Фурье $\mathcal{F}$ на плоскости Лобачевского.

Итак, роль орициклического преобразования в том, что оно сводит задачу о разложении функций на однородном пространстве $\mathcal{L}^2 = SO(2) \setminus SL(2,\mathbb{R})$ к задаче о разложении функций на другом однородном пространстве $\pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$, где она решается элементарно. Аналогичные преобразования, сводящие задачу о разложении представлений групп, связанных с однородными пространствами, к задаче интегральной геометрии, можно определить, кроме $\mathcal{L}^2$, и для других однородных пространств. Этот прием, получивший название метода орисфер, впервые был описан в статье И.М. Гельфанда и М.И. Граева[1)].

Конструкция, с помощью которой в этом параграфе были построены неприводимые представления группы $SL(2,\mathbb{R})$, входит в общую схему реализации неприводимых представлений в функциях на однородных пространствах, восходящую к Фробениусу. Конечномерное неприводимое унитарное представление T группы G реализуется в функциях на однородном пространстве $U \setminus G$ тогда и только тогда, когда в пространстве этого представления имеется вектор, инвариантный относительно подгруппы U; размерность пространства таких

[1)] Гельфанд И.М., Граев М.И. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, I: Труды моск. матем. об-ва. — М., 1959. — № 8. — С. 321–390.

векторов равна кратности вхождения T в пространство $L^2(U \setminus G)$. Теорема двойственности Фробениуса явно задает оператор вложения T в $L^2(U \setminus G)$. В бесконечномерном случае требуются некоторые аналитические уточнения.

Рассматривавшиеся нами функции $y^{\frac{1+is}{2}}$ как раз являются инвариантными относительно подгруппы Z, и конструкция по ним неприводимых представлений группы $G = SL(2,\mathbb{R})$ следует схеме Фробениуса. Поскольку в каждом неприводимом пространстве имеется два (обобщенных) вектора, инвариантных относительно Z, оно дважды вкладывается в $L^2(\pm Z \setminus G)$. Однако в разложение $L^2(\mathcal{L}^2)$ каждое неприводимое представление входит с кратностью 1; этот факт связан с соотношением симметрии для $\mathcal{F}f$.

§ 5. Интегральное преобразование, связанное с прямыми (геодезическими) на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$

5.1. Определение и формула обращения в модели Пуанкаре. Рассмотрим еще один аналог преобразования Радона для плоскости Лобачевского — интегральное преобразование, связанное с “прямыми” (геодезическими) на $\mathcal{L}^2$.

Согласно § 1 каждая “прямая” на $\mathcal{L}^2$ задается в модели Пуанкаре уравнением на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$:

$$(x-a)(x-b) + y^2 = 0, \tag{5.1}$$

где $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup (\infty)$; обозначим ее через $G(a,b)$. Из уравнения (5.1) легко следует, что при движении $z \mapsto \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}$ прямая $G(a,b)$ переходит в прямую $G\left(\frac{\alpha a+\gamma}{\beta a+\delta}, \frac{\alpha b+\gamma}{\beta b+\delta}\right)$.

Определение. Обозначим через $\mathcal{R}^g$ интегральное преобразование, относящее каждой гладкой финитной функции f на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ ее интегралы по прямым в $\mathcal{L}^2$ (т.е. геодезическим относительно метрики в $\mathcal{L}^2$):

$$\mathcal{R}^g f(a,b) = \int\limits_{G(a,b)} f(z)\, ds, \quad ds = \frac{|dz|}{y}. \tag{5.2}$$

Очевидно, что это преобразование перестановочно с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$.

Найдем формулу обращения, восстанавливающую функцию f по функции $\mathcal{R}^g f$. При ее выводе будем следовать той же схеме, что в случае преобразования Радона на евклидовой плоскости и орициклического преобразования на $\mathcal{L}^2$.

Сначала рассмотрим функцию $f \in D(\mathcal{L}^2)$, постоянную на неевклидовых окружностях с центром в точке i, т.е. на орбитах подгруппы $SO(2)$ матриц $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$f(z) = F\left(\frac{|z-i|^2}{2y}\right).$$

Из перестановочности $\mathcal{R}^g$ с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ следует, что функция $\mathcal{R}^g f(a,b)$ также инвариантна относительно преобразований из $SO(2)$. Нетрудно убедиться, что инвариантом пары точек $a, b \in \mathbb{P}^1$ относительно $SO(2)$ является $\frac{1+ab}{a-b}$. Таким образом, $\mathcal{R}^g f(a,b) = \widehat{F}\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)$. Из (5.2) следует, что

$$\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^g f(\infty, r) = \int_0^\infty F\left(\frac{r^2+(y-1)^2}{2y}\right)\frac{dy}{y} =$$

$$= \int_{(r^2+1)^{1/2}}^{\infty} F(s-1)\frac{ds}{\sqrt{s^2-(r^2+1)}} = \int_{(r^2+1)^{1/2}}^{\infty} (s^{-1}F(s-1))\frac{s\,ds}{\sqrt{s^2-(r^2+1)}}.$$

Таким образом, $\widehat{F}(r)$ — четная функция от r, и по формуле обращения для преобразования Абеля получаем:

$$s^{-1}F(s-1) = -\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{s^2-1}}^{\infty} \frac{\widehat{F}'(r)\,dr}{\sqrt{r^2+1-s^2}}; \quad s \geqslant 1.$$

В частности, при $s = 1$ имеем:

$$f(i) = F(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\widehat{F}'(r)\,dr}{r} \tag{5.3}$$

(интеграл сходится, поскольку $\widehat{F}'(r) = o(r)$ при $r \to 0$).

Пусть теперь f — произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{L}^2$, $\overline{f}$ — ее среднее по неевклидовым окружностям с центром в точке i,

$$\overline{f}(z) = F\left(\frac{|z-i|^2}{2y}\right).$$

Из перестановочности $\mathcal{R}^g$ с движениями $\mathcal{L}^2$ следует, что

$$\mathcal{R}^g\overline{f}(a,b) = \widehat{F}\left(\frac{1+ab}{a-b}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{R}^g f\left(\frac{a\cos\theta+\sin\theta}{-a\sin\theta+\cos\theta}, \frac{b\cos\theta+\sin\theta}{-b\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta,$$

откуда

$$\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^g\overline{f}(\infty,r) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{R}^g f\left(-\operatorname{ctg}\theta, \frac{r\cos\theta+\sin\theta}{-r\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}^g f\left(t, \frac{rt-1}{r+t}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{5.4}$$

Согласно (5.3) имеем:

$$f(i) = \overline{f}(i) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\widehat{F}'(r)}{r}\,dr, \tag{5.5}$$

где $\widehat{F}(r)$ задается равенством (5.4).

Чтобы получить выражение для f в произвольной точке z, достаточно применить групповой сдвиг g, переводящий точку i в точку z, например,

$$g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ xy^{-1/2} & y^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

При этом сдвиге $f(i)$ перейдет в $f(z)$, а $\mathcal{R}^g f(a,b)$ в $\mathcal{R}^g f(x+ay, x+by)$. В результате получаем:

Теорема 5.1. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое преобразование $\mathcal{R}^g f$, связанное с прямыми на $\mathcal{L}^2$, по следующей формуле обращения:*

$$f(z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\widehat{F}_s'(z;r)}{r}\,dr,$$

где

$$\widehat{F}(z;r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}^g f\left(x+ty, x+\frac{rt-1}{r+t}y\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

5.2. Связь с преобразованием Радона на проективной плоскости. Предположим теперь, что плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ реализована как верхняя пола двуполостного гиперболоида $[x,x] = 1$, где $[x,x] = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. В этой реализации геодезические на $\mathcal{L}^2$ являются линиями $\gamma(\xi)$ пересечения гиперболоида с плоскостями

$$\langle \xi, x \rangle \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0, \quad [\xi,\xi] = -1,$$

а интегральное преобразование $\mathcal{R}^g$ задается формулой:

$$\mathcal{R}^g f(\xi) = \int\limits_{\gamma(\xi)} f(x)\, ds, \quad [\xi,\xi] = -1, \tag{5.6}$$

где ds — элемент длины на $\mathcal{L}^2$. Нетрудно убедиться, что выражение для $\mathcal{R} f$ можно также представить в виде

$$\mathcal{R}^g f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}\in} f(x)\, \delta(\langle \xi, x \rangle)\, \frac{dx_2\, dx_3}{x_1}, \tag{5.7}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$.

В этой модели формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^g$ можно получить, подобно преобразованию Минковского — Функа, связанному с единичной двумерной сферой, как следствие из формулы обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}$ на проективной плоскости, см. § 8 главы 1. Именно, поставим в соответствие функции $f \in \mathcal{L}^2$ C^∞ функцию F на $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, удовлетворяющую условию однородности $F(\lambda x) = \lambda^{-2} F(x)$ и такую, что $F \big|_{[x,x]=1} = f$, $F = 0$ при $[x,x] < 0$.

Из определения оператора $\mathcal{R}$ следует, что $\mathcal{R} F(\xi) = \mathcal{R}^g f(\xi)$ при $[\xi,\xi] = -1$ и $\mathcal{R} F(\xi) = 0$ при $[\xi,\xi] > 0$. Поэтому из формулы обращения главы I для интегрального преобразования $\mathcal{R}$ (см. (8.10) на с. 63) непосредственно следует

Теорема 5.2. *Функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое преобразование $\mathcal{R}^g f$, связанное с геодезическими по следующей формуле обращения:*

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{[\xi,\xi]=-1} \mathcal{R}^g f(\xi)\, \langle \xi, x \rangle^{-2} \omega(\xi). \tag{5.8}$$

О смысле, который придается этому интегралу, см. § 8 главы I.

§ 6. Орисферическое преобразование в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$

Определения и результаты § 1–5 для плоскости Лобачевского переносятся и на пространства Лобачевского больших размерностей, однако формулы обращения для пространств нечетных размерностей выглядит иначе. Поэтому мы дадим здесь независимое изложение для трехмерного пространства Лобачевского $\mathcal{L}^3$. Основной упор будет сделан на явные формулы.

6.1. Модели пространства Лобачевского. Сначала изложим кратко элементы геометрии в $\mathcal{L}^3$. Пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3$ является однородным пространством группы $SL(2,\mathbb{C})$ со стационарной подгруппой $SU(2)$ (подгруппа унитарных матриц). Удобной для нас моделью пространства $\mathcal{L}^3$ является кватернионная модель: точками $\mathcal{L}^3$ являются кватернионы с тремя компонентами:

$$w = x + iy + zj, \quad z > 0,$$

где $x, y, z \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$; движение в $\mathcal{L}^3$, отвечающее матрице $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, задается так:

$$w \mapsto w' = (w\beta + \delta)^{-1}(w\alpha + \gamma).$$

Очевидно, что стационарной подгруппой точки $w = j$ является $SU(2)$.

Риманова метрика на $\mathcal{L}^3$ имеет вид:

$$ds^2 = z^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{6.1}$$

Расстояние d между точками $w_1 = x_1 + y_1 i + z_1 j$ и $w_2 = x_2 + y_2 i + z_2 j$ определяется равенством

$$4\,\mathrm{sh}^2 \frac{d}{2} = \rho^2(w_1, w_2), \tag{6.2}$$

где

$$\rho^2(w_1, w_2) = \frac{|w_1 - w_2|^2}{z_1 z_2}, \tag{6.3}$$

$|\ |$ — норма кватерниона. Элемент объема в метрике (6.1) имеет вид:

$$dv = z^{-3}\, dx\, dy\, dz. \tag{6.4}$$

Другой вариант задания пространства Лобачевского — многообразие эрмитовых симметрических матриц

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \quad a, c > 0, \ \det u = 1 \tag{6.5}$$

с движениями

$$u \mapsto g^* u g, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}),$$

где g^* — эрмитово сопряженная матрица.

Заметим, что многообразие матриц (6.5) можно интерпретировать как одну полу двухполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^4$:

$$ac - b_1^2 - b_2^2 = 1, \quad a, c > 0 \ (b_1 + ib_2 = b). \tag{6.6}$$

Соответствие между кватернионами w и матрицами $u = u(w)$ задается так:

$$x + yi + zj \mapsto \begin{pmatrix} z^{-1}(x^2 + y^2 + z^2) & z^{-1}(x + iy) \\ z^{-1}(x - iy) & z^{-1} \end{pmatrix};$$

другими словами, матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$ соответствует кватернион $w = \frac{b}{c} + \frac{1}{c} j$ (ср. случай плоскости Лобачевского). В частности, точке $w = j$ отвечает единичная матрица.

Удобно в уравнении гиперболоида (6.6) перейти к новым координатам: $x_1 = \frac{a+c}{2}$, $x_2 = \frac{a-c}{2}$, $x_3 = b_1$, $x_4 = b_2$. Тогда мы получим реализацию пространства Лобачевского в виде верхней полы двуполостного гиперболоида:

$$[x, x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1, \quad x_1 > 0. \tag{6.7}$$

В этой реализации движения задаются как линейные преобразования в $\mathbb{R}^4$, сохраняющие верхнюю полу гиперболоида, т.е. как элементы группы $SO_0(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm e\}$.

Риманова метрика в этой модели имеет вид:

$$ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2;$$

инвариантное расстояние d между точками x и y определяется равенством

$$\operatorname{ch} d = [x, y];$$

элемент объема в координатах x_2, x_3 на $\mathcal{L}^2$ имеет вид:

$$dv = \frac{dx_2\, dx_3\, dx_4}{x_1}.$$

6.2. Орисферы. В пространстве Лобачевского можно определить сферы бесконечно большого радиуса (орисферы) — пределы неевклидовых сфер, когда их центр и радиус согласованно стремятся к бесконечности. Они представляются либо как (евклидовы) сферы на полупространстве $z > 0$ в $\mathbb{R}^3$, касающиеся плоскости $z = 0$ (абсолюта), либо как плоскости в этом полупространстве, параллельные плоскости $z = 0$. Последние естественно интерпретировать как сферы бесконечно большого радиуса, касающиеся плоскости $z = 0$ в бесконечно удаленной точке. В кватернионной модели каждая орисфера задается уравнением:

$$|w\xi_2 - \xi_1|^2 = z, \; w = x + ui + zj, \tag{6.8}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$. Таким образом, многообразие орисфер параметризуется точками $\xi \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$, причем точкам ξ и $\lambda\xi$, $|\lambda| = 1$ отвечает одна и та же орисфера (ср. уравнения орициклов на плоскости Лобачевского). Орисферу, заданную уравнением (6.8), обозначим через $h(\xi)$.

Замечание. Если пространство $\mathcal{L}^3$ реализовано как верхняя пола двуполостного гиперболоида (6.7), то орисферами являются плоские параболические сечения этого гиперболоида, а именно, сечения плоскостями вида $[\xi, x] = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 1$, где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi] = 0$, $\xi_1 > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$.

На многообразии орисфер действует, и притом транзитивно, группа движений $SL(2, \mathbb{C})$; движение, отвечающее матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, переводит орисферу $f(\xi_1, \xi_2)$ в орисферу $h(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \beta\xi_1 + \delta\xi_2)$.

На языке движений орисферы описываются так: они либо являются орбитами подгруппы Z матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{C}$ (это — плоскости, параллельные плоскости $z = 0$), либо получаются сдвигами этих орбит. Таким образом, многообразие орисфер является однородным пространством группы $SL(2, \mathbb{C})$ со стационарной подгруппой $\pm Z$.

Каждая орисфера имеет единственную точку касания с абсолютом, которая называется ее центром. В нашей интерпретации это точки касания с плоскостью $z = 0$. Орисферы с общим центром называются параллельными. Заметим, что орисфера $h(\xi)$ касается плоскости $z = 0$ в точке $\frac{\xi_1}{\xi_2}$; отсюда следует, что любой пучок параллельных орисфер есть $\{h(\lambda\xi) \mid 0 < \lambda < \infty\}$, где ξ фиксировано.

Расстояние (ориентированное) $\rho(w, \xi)$ от точки $w \in \mathcal{L}^3$ до орисферы $h(\xi)$ определяется так же, как расстояние от точки до орицикла на плоскости Лобачевского, и задается аналогичной формулой:

$$\rho(w; \xi) = \ln(z^{-1}|w\xi_2 - \xi_1|^2), \; w = x + yi + zj. \tag{6.9}$$

6.3. Орисферическое преобразование.

Определение. Назовем орисферическим преобразованием в $\mathcal{L}^3$ интегральное преобразование $\mathcal{R}^h$, относящее гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^3$ ее интегралы по орисферам:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{h(\xi)} f(w)\,d\sigma, \tag{6.10}$$

где $h(\xi)$ — орисфера, заданная уравнением (6.4), а $d\sigma$ — (неевклидов), элемент площади на $h(\xi)$.

Выражение для $\mathcal{R}^h$ может быть записано также в следующей форме:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^3} f(w)\,\delta(\rho(w;\xi))\frac{dx\,dy\,dz}{z^3}, \tag{6.11}$$

где $\rho(w;\xi)$ — расстояние то точки $w = x + yi + zj$ до орисферы $h(\xi)$, см. формулу (6.9).

Из определения следует, что оператор $\mathcal{R}^h$ перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{C})$.

6.4. Формула обращения. Перейдем к построению формулы обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^h$, повторив те же рассуждения, что и в случае плоскости Лобачевского. Пусть сначала f — радиальная функция, зависящая только от расстояния точки w до точки j

$$f(w) = F(z^{-1/2}|w-j|).$$

Тогда $\mathcal{R}^h f(\xi)$ зависит только от расстояния точки j до орисферы $h(\xi)$, т. е.

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \widehat{F}(r), \text{ где } r = \ln(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2).$$

Значит, $\widehat{F}(r)$ равно интегралу функции f по орисфере $h(e^{r/2},0)$: $z = e^r$, т. е.

$$\widehat{F}(r) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+(e^r-1)^2}}{e^{r/2}}\right)\frac{dx\,dy}{e^{2r}} =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^\infty F\left(\frac{\sqrt{t^2+(e^r-1)^2}}{e^{r/2}}\right)\frac{t\,dt}{e^{2r}} = 2\pi\int\limits_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^\infty F(s)\frac{s\,ds}{e^r}. \tag{6.12}$$

Отсюда следует, что, во-первых, $e^r \widehat{F}(r)$ — четная функция от r,

$$e^r \widehat{F}(r) = e^{-r} \widehat{F}(-r)$$

и, во-вторых,

$$(e^r \widehat{F}(r))' = -2\pi(\operatorname{ch} r F(2 \operatorname{sh} \frac{r}{2}) + \operatorname{sh} r \operatorname{ch} \frac{r}{2} F'(2 \operatorname{sh} \frac{r}{2})). \qquad (6.13)$$

Из (6.13) при $r = 0$ следует:

$$f(j) = F(0) = -\frac{1}{2\pi}(e^r \widehat{F}(r))'|_{r=0} \qquad (6.14)$$

(ср. с формулой (2.5) этой главы и формулой (2.4) из § 2 главы I). Пусть теперь f — произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{L}^3$ и

$$\overline{f}(w) = F(z^{-1/2}|w - j|)$$

— ее среднее по неевклидовым сферам с центром в точке j. Так как эти сферы — орбиты подгруппы унитарных матриц

$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, то

$$\overline{f}(w) = F(z^{-1/2}|w - j|) = \int f((w\beta + \overline{\alpha})^{-1}(w\alpha - \overline{\beta}))\, d\mu(\alpha, \beta),$$

где $d\mu(\alpha, \beta)$ — инвариантная мера на группе унитарных матриц, т. е. на трехмерной единичной сфере $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, нормированная условием $\int d\mu(\alpha, \beta) = 1$. Нетрудно проверить, что выражение для F можно представить в следующей удобной форме:

$$F(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathcal{L}^3} z^{1/2}|w - j|^{-1} f(w)\, \delta(z^{-1}|w - j|^2 - s^2) \frac{dx\, dy\, dz}{z^3}. \qquad (6.15)$$

Пусть $\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^h \overline{f}(\xi)$, где $r = \rho(j; \xi) = \ln(|\xi_i|^2 + |\xi_2|^2)$. Из перестановочности $\mathcal{R}^h$ с действием группы $SL(2, \mathbb{C})$ следует, что

$$\widehat{F}(r) = \int\limits_{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1} \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\alpha, e^{r/2}\beta)\, d\mu(\alpha, \beta) =$$

$$= \pi^2 \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\xi_1, e^{r/2}\xi_2)\, \delta(\rho(j; \xi))\, d\xi_1\, d\overline{\xi_1}\, d\xi_2\, d\overline{\xi_2}. \qquad (6.16)$$

где $\rho(j;\xi)$ — расстояние от j до орисферы $h(\xi)$. В силу (6.14) имеем:

$$f(j) = \overline{f}(j) = -\frac{1}{2\pi}(e^r \widehat{F}(r))''|_{r=0}.$$

Подставив сюда выражение (6.16) для $\widehat{F}(r)$, получим:

$$f(j) = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1} L^2 \mathcal{R}^h f(\xi)\, d\mu(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{C}^2} L^2 \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(j;\xi))\, dv, \quad (6.17)$$

где

$$L = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \overline{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_1}} + \overline{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_2}} + 2, \ dv = \left(\frac{i}{2}\right)^2 d\xi_1\, d\overline{\xi_1}\, d\xi_2\, d\overline{\xi_2}. \quad (6.18)$$

Итак, получено выражение $f(j)$ через орисферическое преобразование $\mathcal{R}^h f$. Отсюда, применив сдвиг, переводящий j в произвольную фиксированную точку w, получаем:

Теорема 6.1. *Функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое орисферическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения*:

$$f(w) = -\frac{1}{2\pi}(e^r \widehat{F}(w,r))''|_{r=0}, \quad (6.19)$$

где

$$\widehat{F}(w,r) = \pi^{-2} \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\xi_1, e^{r/2}\xi_2)\, \delta(\rho(w,\xi))\, dv; \quad (6.20)$$

отсюда

$$f(w) = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{C}^2} L^2 \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(w;\xi))\, dv, \quad (6.21)$$

где оператор L задается равенством (6.18).

Замечание. Так как $\mathcal{R}^h f(e^{i\theta}\xi_1, e^{i\theta}\xi_2) = \mathcal{R}^h f(\xi_1,\xi_2)$, то $L_\xi \mathcal{R}^h f = \overline{L}_\xi \mathcal{R}^h f$, где $L_\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1$, $\overline{L}_\xi = \overline{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_1}} + \overline{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_2}} + 1$. Поэтому $L^2 \mathcal{R}^h f = 4L_\xi^2 \mathcal{R}^h f = 4\overline{L}_\xi^2 \mathcal{R}^h f = 4L_\xi \overline{L}_\xi \mathcal{R}^h f$.

Отметим, что в отличие от случая плоскости Лобачевского, эта формула обращения локальна: для восстановления функции в точке w, нужно знать интегралы функции f только по орисферам, бесконечно близким к w.

6.5. Соотношение симметрии. Попутно, применив к равенству (6.12) групповой сдвиг, мы получаем следующий результат.

Теорема 6.2. *Имеет место следующее соотношение Асгейрссона для пространства Лобачевского*:

$$e^r \widehat{F}(w;r) = 2\pi \int\limits_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^{\infty} F(w;s)s\,ds. \tag{6.22}$$

Здесь $F(w,s)$ *— среднее функции* f *по сферам с центром в точке* w.

$$F(w,s) = \pi^{-1}\int\limits_{\mathcal{L}^3} z^{\frac{1}{2}} z'^{\frac{1}{2}} |w-w'|^{-1} f(w')\,\delta(z^{-1}z'^{-1}|w-w'|^2 - s^2)\frac{dx'dy'dz'}{z^3} =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathcal{L}^3} \left|\operatorname{sh}\frac{d(w,w')}{2}\right|^{-1} \delta\left(4\operatorname{sh}^2\frac{d(w,w')}{2} - s^2\right) f(w')\frac{dx'dy'dz'}{z'^3}, \tag{6.23}$$

где $d(w,w')$ *— неевклидово расстояние между* w *и* w', *а* $\widehat{F}(w,r)$ *— среднее функции* $\mathcal{R}^h f$ *по орисферам, равноотстоящим от точки* w, *формула* (6.20).

Следствие. $e^r \widehat{F}(w,r)$ *— четная функция от* r,

$$e^r \widehat{F}(w,r) = e^{-r}\widehat{F}(w,-r).$$

Подставив сюда выражение (6.20) для $\widehat{F}$, получаем, что $\mathcal{R}^h f$ удовлетворяет следующему соотношению симметрии:

$$e^r \int \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\xi_1, e^{r/2}\xi_2)\,\delta(\rho(w;\xi))\,dv =$$

$$= e^{-r}\int \mathcal{R}^h f(e^{-r/2}\xi_1, e^{-r/2}\xi_2)\,\delta(\rho(w;\xi))\,dv. \tag{6.24}$$

6.6. Формула обращения для орисферического преобразования в другой модели пространства Лобачевского. Реализуем пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3$ в виде верхней полы двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^4$

$$[x,x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1, \quad x_1 > 0.$$

В этой модели орисферами являются сечения гиперболоида гиперплоскостями

$$[\xi,x] \equiv \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 - \xi_4 x_4 = 1,$$

где ξ — точка верхней полы конуса

$$K: \quad [\xi,\xi]=0, \quad \xi_1>0.$$

Орисферическое преобразование задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^h f(\xi)=\int\limits_{\mathcal{L}^3} f(x)\,\delta([\xi,x]-1)\,dx, \qquad \xi\in K, \tag{6.25}$$

где $dx=x_1^{-1}\,dx_2\,dx_3\,dx_4$ — инвариантная мера на $\mathcal{L}^3$.

Теорема 6.3. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое орисферическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(x)=-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_K \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta''([\xi,x]-1)\,d\xi, \quad d\xi=\xi_1^{-1}\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4, \tag{6.26}$$

где $\delta''(\cdot)$ — вторая производная дельта-функции на $\mathbb{R}$.

Формулы (6.25) и (6.26) аналогичны соответствующим формулам для преобразования Радона из главы I, и, подобно случаю преобразования Радона, формулу обращения (6.26) достаточно доказать для функций на $\mathcal{L}^3$, зависящих только от расстояния до точки $x^0=(1,0,0,0)$. Легко убедиться в том, что для таких функций f формула обращения (6.26) совпадает с уже доказанной ранее.

6.7. Интегральное преобразование, связанное с вполне геодезическими поверхностями в $\mathcal{L}^3$. Здесь мы рассмотрим еще одно интегральное преобразование на $\mathcal{L}^3$; оно относит функциям на $\mathcal{L}^3$ их интегралы по вполне геодезическим поверхностям в $\mathcal{L}^3$. Обозначим его через $\mathcal{R}$.

Реализуем пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3$ как верхнюю полу гиперболоида (6.7) в $\mathbb{R}^4$. В этой модели вполне геодезические являются сечениями этого гиперболоида плоскостями

$$\langle\xi,x\rangle \equiv \xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0,$$

где ξ пробегает однополостный гиперболоид $[\xi,\xi]=-1$. Интегральное преобразование $\mathcal{R}^g$ задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^g f(\xi)=\int\limits_{\mathcal{L}^\in} f(x)\,\delta(\langle\xi,x\rangle)\,\frac{dx_2\,dx_3\,dx_4}{x_1}, \tag{6.27}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$; ср. определение для плоскости Лобачевского в § 5.

Подобно случаю плоскости Лобачевского, формула обращения для этого интегрального преобразования может быть получена как следствие из формулы обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}$ на проективном пространстве, см. § 8 главы I. Именно, поставим в соответствие функции $f \in \mathcal{L}^3\ \ C^\infty$ функцию F на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, удовлетворяющую условию однородности $F(\lambda x) = |\lambda|^{-3} F(x)$ и такую, что $F\,\big|_{[x,x]=1} = f$, $F = 0$ при $[x, x] < 0$.

Из определения оператора $\mathcal{R}$ следует, что $\mathcal{R}F(\xi) = \mathcal{R}^g f(\xi)$ при $[\xi,\xi] = -1$ и $\mathcal{R}F(\xi) = 0$ при $[\xi,\xi] > 0$. Поэтому из формулы обращения (8.6) главы I для интегрального преобразования $\mathcal{R}$ (см. с. 58) непосредственно следует:

Теорема 6.4. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое преобразование $\mathcal{R}^g f$, связанное с вполне геодезическими поверхностями, по следующей формуле обращения*:

$$f(x) = -(2\pi)^{-2} \int\limits_{[\xi,\xi]=-1} \mathcal{R}^g f(\xi)\,\delta''(\langle \xi, x\rangle)\,\omega(\xi), \tag{6.28}$$

где $\delta''(\cdot)$ — вторая производная дельта-функции на $\mathbb{R}$.

О смысле, который придается этому интегралу, см. § 8 главы I.

Подчеркнем, что в отличие от случая плоскости Лобачевского, формула обращения (6.28) локальна.

Добавление. Орисферическое преобразование для пространства Лобачевского произвольной размерности. Пространство Лобачевского $\mathcal{L}^n$ произвольной размерности n — это верхняя пола гиперболоида в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$[x, x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = 1, \quad x_1 > 0, \tag{6.29}$$

в котором движения задаются линейными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющими эту гиперповерхность. Орисферами называются сечения гиперболоида гиперплоскостями

$$[\xi, x] \equiv \xi_1 x_1 - \ldots - \xi_{n+1} x_{n+1} = 1, \tag{6.30}$$

где ξ — точка верхней полы конуса K: $\quad [\xi,\xi] = 0, \quad \xi_1 > 0$. Орисферическое преобразование задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^n} f(x)\,\delta([\xi, x] - 1)\,dx, \qquad \xi \in K, \tag{6.31}$$

где $dx = x_1^{-1}\, dx_2 \cdots dx_{n+1}$ — инвариантная мера на $\mathcal{L}^n$.

Структура формулы обращения зависит от четности n. Приведем ее без доказательства. Если $n = 2m+1$, то

$$f(x) = \frac{(-1)^m}{2\,(2\pi)^{2m}} \int\limits_K \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta^{(2m)}([\xi, x] - 1)\, d\xi, \tag{6.32}$$

где $d\xi = \xi_1^{-1}\, d\xi_2 \cdots d\xi_{n+1}$ — инвариантная мера на конусе K. Если $n = 2m$, то

$$f(x) = \frac{(-1)^m (2m-1)!}{(2\pi)^{2m}} \int\limits_K \mathcal{R}^h f(\xi)\, ([\xi, x] - 1)^{-2m}\, d\xi. \tag{6.33}$$

Таким образом, как и в случае преобразования Радона, формула обращения локальна при нечетном n и нелокальна при четном n.

§ 7. Аналог преобразования Фурье в пространстве Лобачевского и его связь с орисферическим преобразованием

7.1. Определение преобразования Фурье. Определим интеграл Фурье для пространства Лобачевского $\mathcal{L}^3$, подобно тому, как это было уже сделано для плоскости Лобачевского. Рассмотрим оператор Лапласа — Бельтрами Δ на $\mathcal{L}^3$; он имеет следующий вид:

$$\Delta = z^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Известно, что оператор Δ имеет на $L^2(\mathcal{L}^3)$ непрерывный лебеговский спектр, совпадающий с интервалом $(-\infty, -1)$. Пусть Z — унипотентная подгруппа комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Под интегралом Фурье на $\mathcal{L}^3$ будем понимать расположение функций $f \in L^2(\mathcal{L}^3)$ по некоторым специальным функциям оператора Δ, а именно, по собственным функциям, инвариантным относительно подгруппы Z, и их сдвигам. В каждом собственном подпространстве оператора Δ, отвечающем собственному значению $-\frac{4+s^2}{4}$ $(s \in \mathbb{R})$, имеются две функции, инвариантные относительно подгруппы Z, а именно, $z^{\frac{2 \pm is}{2}}$. Берем одну из них $z^{\frac{2+is}{2}}$; при всевозможных сдвигах она переходит в функции вида

$$\Phi_s(w; \xi) = (z|w\xi_2 - \xi_1|^{-2})^{\frac{2+is}{2}} = \exp\left(-\frac{2+is}{2} \rho(w; \xi) \right), \quad \xi \in \mathbb{C}^2, \tag{7.1}$$

где $\rho(w;\xi)$ — расстояние от точки $w = x + yi + zj$ до орисферы $h(\xi)$. Будем называть функции $z^{\frac{2\pm is}{2}}$ зональными орисферическими функциями, а их сдвиги (7.1) — просто орисферическими функциями. Если ξ, ξ' пропорциональны, то соответствующие функции Φ_s различаются только множителями и при $s > 0$ других соотношений между функциями Φ_s не существует. Эти функции, когда $s > 0$, а ξ пробегает по одному представителю на каждой комплексной прямой в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, проходящей через точку 0, образуют полный набор функций, по которым разлагается любая функция из $L^2(\mathcal{L}^3)$.

Определение. Преобразование Фурье гладкой финитной функции f на пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$ определяется равенством

$$\mathcal{F} f(\xi; s) = \int_{\mathcal{L}^3} f(w)\Phi_{-s}(w;\xi)\frac{dx\,dy\,dz}{z^3} \tag{7.2}$$

(ср. определение $\mathcal{F} f$ для $\mathcal{L}^2$ — формула (3.6)).

Из однородности Φ_s по ξ следует, что $\mathcal{F} f$ — также однородная функция от ξ:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi; s) = |\lambda|^{is-2}\mathcal{F} f(\xi; s). \tag{7.3}$$

7.2. Формула обращения. Полнота семейства орисферических функций Φ_s означает, что должна существовать формула обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$. Построим ее, повторив рассуждения для случая плоскости Лобачевского.

Прежде всего, как и в случае плоскости Лобачевского, между преобразованием Фурье $\mathcal{F} f$ и орисферическим преобразованием $\mathcal{R}^h f$ имеется следующая простая связь:

$$\mathcal{F} f(\xi; s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}^h f(e^{-\lambda/2}\xi)e^{\frac{is-2}{2}\lambda}\,d\lambda. \tag{7.4}$$

Отсюда по формуле обращения для одномерного преобразования Фурье следует:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\xi; s)\,ds. \tag{7.5}$$

Формула обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ получается из формулы обращения (6.21) для орисферического преобразования $\mathcal{R}^h$, если в последнюю подставить выражение (7.5) $\mathcal{R}^h f$ через $\mathcal{F} f$. Имеем:

$$f(w) = -\frac{1}{16\pi^4}\int\limits_{\mathbb{C}^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L^2 \mathcal{F} f(\xi; s)\,\delta(\rho(w;\xi))\,ds\,dv, \tag{7.6}$$

где

$$L = \xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \overline{\xi_1}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi_1}} + \overline{\xi_2}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi_2}} + 2.$$

Упростим это выражение. Заметим, прежде всего, что из условия однородности (7.3) для $\mathcal{F} f$ следует

$$L^2 \mathcal{F} f(\xi; s) = -s^2 \mathcal{F} f(\xi; s).$$

Далее, перейдем в (7.6) от ξ к новым координатам $\xi = \lambda\xi'$, где $\lambda \in \mathbb{C}\setminus 0$, а ξ' пробегает поверхность $\Gamma \subset \mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающую по одному разу почти каждую комплексную прямую, проходящую через точку 0. Мы получим:

$$f(w) = \frac{1}{16\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^2 \Big(\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\mathbb{C}} |\lambda|^{is}\,\mathcal{F} f(\xi; s)\,\delta(2\ln|\lambda| + \\ + \rho(w;\xi))\,d\lambda\,d\overline{\lambda}(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1})\Big)\,ds.$$

Интегрируя по λ, получаем окончательно:

Теорема 7.1. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(w) = \frac{1}{16\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Gamma} s^2\,\mathcal{F} f(\xi; s)\exp\left(-\frac{2+is}{2}\rho(w;\xi)\right)\times \\ \times(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1})\,ds = \tag{7.7}$$

$$= \frac{1}{16\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Gamma} s^2\,\mathcal{F} f(\xi; s)\Phi_s(w;\xi)(\xi_1\,d\xi_2 - \xi - 2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1})\,ds.$$

7.3. Соотношение симметрии и формула Планшереля. Подобно случаю плоскости Лобачевского, сдвиги зональных орисферических функций $z^{\frac{2+is}{2}}$ и $z^{\frac{2-is}{2}}$ выражаются друг через друга:

$$z^{\frac{2-is}{2}} = c(s)\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} (z|w-\xi_1|^{-2})^{\frac{2+is}{2}}\,d\xi_1\,d\overline{\xi_1},$$

где $c(s) = \frac{is}{2\pi}$. Отсюда вытекает следующее соотношение симметрии для $\mathcal{F} f$:

$$\int\limits_{\Gamma} \mathcal{F} f(\xi; s)\Phi_s(w;\xi)(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)(\overline{\xi_1}\, d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\, d\overline{\xi_1}).$$

Интеграл является четной функцией от s. В силу этого соотношения функция f на $\mathcal{L}^3$ может быть выражена только через $\mathcal{F} f(\xi; s)$ при $s > 0$:

$$f(w) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{\Gamma} s^2\, \mathcal{F} f(\xi; s)\Phi_s(w;\xi)(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)(\overline{\xi_1}\, d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\, d\overline{\xi_1})\, ds. \tag{7.8}$$

Примечание. Как и в случае плоскости Лобачевского, соотношение симметрии для $\mathcal{F} f$ можно получить из соотношения симметрии (6.24) для $\mathcal{R}^h f$.

Из определения преобразования Фурье $\mathcal{F} f$ и из формулы обращения (7.5) получаем:

Теорема 7.2. *Для любой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^3$ справедлива следующая формула Планшереля:*

$$\int\limits_{\mathcal{L}^3} |f(w)|^2 \frac{dx dy dz}{z^3} = \tag{7.9}$$

$$= \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_0^\infty s^2 \left(\int\limits_{\Gamma} |\mathcal{F} f(\xi; s)|^2 (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)(\overline{\xi_1}\, d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\, d\overline{\xi_1})\right) ds$$

(ср. формулу Планшереля (3.14) для $\mathcal{L}^2$). На основании формулы Планшереля преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ по классической схеме переносится на все функции $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$.

§ 8. Связь с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{C})$

Установим по аналогии со случаем плоскости Лобачевского, связь полученного в § 7 результата с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{C})$.

Мы имеем гильбертово пространство $L^2(\mathcal{L}^3)$, в котором действует унитарное представление T группы $SL(2,\mathbb{C})$:

$$T_g f(w) = f(w \circ g), \quad g \in SL(2,\mathbb{C}),$$

где $w \mapsto w \circ g$ — движение плоскости Лобачевского, отвечающее g. Задача теории представлений (гармонический анализ для пространства

Лобачевского) состоит в том, чтобы разложить $L^2(\mathcal{L}^2)$ на неприводимые инвариантные подпространства.

Вначале надо описать сами неприводимые инвариантные подпространства, на которые разлагается $L^2(\mathcal{L}^2)$. Рассмотрим собственное подпространство оператора Лапласа — Бельтрами Δ на $\mathcal{L}^3$, отвечающее собственному значению $-\frac{4+s^2}{4}$. Оно порождается обобщенными функциями $\Phi_s(w;\xi)$, см. (4.1), и его элементы можно представить в виде:

$$f_s(w) = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} u_s(\xi)\Phi_s(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1}), \tag{8.1}$$

где u_s удовлетворяет условию однородности

$$u_s(\lambda\xi) = |\lambda|^{is-2}u_s(\xi), \quad \lambda \in \mathbb{C}\setminus 0, \tag{8.2}$$

интеграл берется по произвольной поверхности $\Gamma \subset \mathbb{C}^2\setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую комплексную прямую, проходящую через точку 0. Введем в пространстве функций f_s норму

$$||f_s||^2 = \int\limits_{\Gamma} |u_s(\xi)|^2(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1}) \tag{8.3}$$

и рассмотрим пространство L^2 по этой норме, которое обозначим через H_s. Сдвиги на $\mathcal{L}^3$ индуцируют в H_s унитарное представление T_s группы $SL(2,\mathbb{C})$. В функциях $u_s(\xi)$ это представление имеет вид:

$$(T_s(g)u_s)(\xi_1,\xi_2) = u_s(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \beta\xi_1 + \delta\xi_2), \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Известно, что это представление неприводимо. Мы строим оператор $P_s : L^2(\mathcal{L}^3) \to H_s$

$$P_s f = f_s,$$

где f_s задается равенством (8.1), в котором $u_s(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$. Этот оператор перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{C})$ в пространствах $L^2(\mathcal{L}^3)$ и H_s. В результате на основании (7.8), (7.2) получаем разложение функций $f \in L^2(\mathcal{L}^3)$ по неприводимым подпространствам:

$$f = \frac{1}{8\pi^3}\int\limits_0^\infty s^2 f_s\,ds, \quad f_s = P_s f \tag{8.4}$$

и формулу Планшереля

$$\int_{\mathcal{L}^3} |f(w)|^2 \frac{dx\,dy\,dz}{z^3} = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{+\infty} s^2 \|f_s\|^2\,ds, \tag{8.5}$$

где $\|f_s\|$ задается равенством (8.3).

§ 9. Волновое уравнение для плоскости и пространства Лобачевского и принцип Гюйгенса

9.1. Двумерный случай. Напомним, что оператор Лапласа—Бельтрами на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ имеет вид $\Delta^2 = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ и его спектр в $L^2(\mathcal{L}^2)$ есть интервал $(-\infty, -\frac{1}{4})$. Рассмотрим следующее волновое уравнение на $\mathcal{L}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{4}u. \tag{9.1}$$

Член $\frac{1}{4}u$ добавлен для того, чтобы спектр стоящего справа оператора совпадал с полупрямой $(-\infty, 0)$.

Покажем, как с помощью орициклического преобразования можно решить следующую задачу Коши для уравнения (9.1):

$$u(0, z) = 0,\ u'_t(0, z) = f(z); \tag{9.2}$$

для простоты будем предполагать, что $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^2)$. Приведенный ниже вывод параллелен решению задачи Коши для волнового уравнения на евклидовой плоскости (см. § 3 главы I). Он основан на методе орициклических волн, опирающемся на следующий замечательный факт:

Предложение 9.1. *Если $\varphi(s)$ — любая гладкая функция одного переменного, то для любого $\xi \in \mathbb{R}^2$ функция*

$$\Phi_\xi(t, z) = e^{\pm t/2}\varphi(\rho(z; e^{\pm t/2}\xi)) = e^{\pm t/2}\varphi(\rho(z;\xi) \pm t), \tag{9.3}$$

где $\rho(z;\xi) = \ln(y^{-1}|\xi_2 z - \xi_1|^2)$ — расстояние от z до орицикла $h(\xi)$, является решением волнового уравнения (9.1).

Доказательство — непосредственная проверка.

Функции (9.3) назовем орициклическими волнами. Метод орициклических волн состоит в представлении любого решения уравнения (9.1) в виде суперпозиции орициклических волн.

Перейдем к построению решения задачи Коши (9.2). Пусть $\mathcal{R}^h f$ — орициклическое преобразование функции f, $\widehat{F}(z;r)$ — среднее функции $\mathcal{R}^h f$ по орициклам, равноотстоящим от точки $z \in \mathcal{L}^2$, см. формулу (2.11). Рассмотрим следующую функцию

$$u(t,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{r+t}{2}}\widehat{F}(z,r+t)}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr. \tag{9.4}$$

Из (2.11) следует, что

$$e^{\frac{r+t}{2}}\widehat{F}(z,r+t) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{r+t}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(z;\xi)-r-t)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

значит, $u(t,z)$ как суперпозиция орициклических волн является решением уравнения (9.1). Убедимся, что u — искомое решение задачи Коши (9.2). В силу соотношения симметрии (2.16) $e^{r/2}\widehat{F}(z,r)$ — четная функция от r; следовательно,

$$u(0,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{r/2}\widehat{F}(z;r)}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr = 0.$$

Далее, на основании формулы обращения (2.10) для орициклического преобразования имеем:

$$u_t'(0,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(e^{r/2}\widehat{F}(z,r))_r'}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr = f(z).$$

Мы хотим вернуться в (9.4) к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением Асгейрссона (2.15) для плоскости Лобачевского. На основании (2.15) получаем при $t > 0$:

$$u(t,z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{2\left|\operatorname{sh}\frac{r+t}{2}\right|}^{\infty}\frac{F(z,s)s\,ds\,dr}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r+t}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{2\left|\operatorname{sh}\frac{r}{2}\right|<s}\frac{F(z,s)s\,dr\,ds}{\operatorname{sh}\frac{r-t}{2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}}}, \tag{9.5}$$

где $F(z,s)$ — среднее функции f по неевклидовым окружностям в $\mathcal{L}^2$ с центром в точке z, см. (2.14); интеграл по z нужно понимать в смысле главного значения.

Выполним в (9.5) интегрирование по r, воспользовавшись следующим равенством[1]:

$$J \equiv \int_{-b}^{b} \frac{dx}{\operatorname{sh}(x-a)\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 x}} = \begin{cases} 0 & \text{если } a < b, \\ \frac{-\pi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 b}} & \text{если } a > b. \end{cases}$$

Здесь $a, b > 0$.

В результате получаем:

$$u(t,z) = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\operatorname{sh}\frac{t}{2}} \frac{F(z,s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{t}{2} - s^2/4}}. \tag{9.6}$$

Подставив сюда выражение (2.14) функции $F(z,s)$ через функцию f, получаем окончательно:

Теорема 9.1. *Решение задачи Коши* (9.2) *для волнового уравнения* (9.1) *имеет вид*:

$$u(t,z) = \frac{1}{4\pi} \int_{d(z,z')<t} \frac{f(z')}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{d(z,z')}{2}}} \frac{dx'dy'}{y'^2}, \tag{9.7}$$

---

[1] **Вычисление интеграла** J. Очевидно, что J — нечетная функция от a. Следовательно,

$$J = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \frac{(\operatorname{sh}^{-1}(x-a) - \operatorname{sh}^{-1}(x+a))\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 x}} = \int_{-b}^{b} \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} x\,dx}{(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 a)\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 x}}.$$

Отсюда элементарными преобразованиями получаем:

$$J = \int_{-\operatorname{sh} b}^{\operatorname{sh} b} \frac{\operatorname{sh} a\,dt}{(t^2 - \operatorname{sh}^2 a)\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - t^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sh} a\,dt}{(t^2 \operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 a)\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \operatorname{sh} a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 b \sin^2 t - \operatorname{sh}^2 a} = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\operatorname{sh} b \sin t + \operatorname{sh} a}.$$

Последний интеграл вычисляется непосредственно: гл.зн. $J = 0$, если $a < b$; $J = -\frac{\pi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 b}}$, если $a > b$ (см.: Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962, формула 3.613.1.

где $d(z,z')$ — неевклидово расстояние между точками z и z' (см. формулу (1.2)).

Полученная формула аналогична формуле Пуассона для волнового уравнения на евклидовой плоскости, см. § 3 главы I. Как и там, решение уравнения в точке z в момент времени t зависит только от начальных данных в неевклидовом круге радиуса t с центром в точке z (эффект существования переднего фронта волны).

9.2. Трехмерный случай. Перейдем теперь к пространству Лобачевского $\mathcal{L}^3$. Напомним, что оператор Лапласса — Бельтрами на $\mathcal{L}^3$ имеет вид: $\Delta = z^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - z\frac{\partial}{\partial z}$ и его спектр на $L^2(\mathcal{L}^3)$ есть $(-\infty,-1)$. Рассмотрим на $\mathcal{L}^3$ следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - z\frac{\partial u}{\partial z} + u. \tag{9.8}$$

Как и в случае $\mathcal{L}^2$, член u добавлен для того, чтобы спектр стоящего справа оператора совпадал с полупрямой $(-\infty,0)$. Решим методом орисферических волн следующую задачу Коши для уравнения (9.8):

$$u(0,w) = 0,\ u'_t(0,w) = f(w) \quad (w = x + ui + zj). \tag{9.9}$$

Этот метод опирается на следующий факт:

Предложение 9.2. *Если $\varphi(s)$ — любая гладкая функция одного переменного, то для любого $\xi \in \mathbb{C}^2$ функция*

$$\Phi_\xi(t,w) = e^{\pm t}\varphi(\rho(w;\xi) \pm t), \tag{9.10}$$

где $\rho(w;\xi) = \ln(z^{-1}|w\xi_2 - \xi_1|^2)$ — расстояние от точки w до орисферы $h(\xi)$ является решением волнового уравнения (9.8).

Доказательство — непосредственная проверка.

Решения (9.10) назовем орисферическими волнами.

Перейдем к решению задачи Коши (9.9). Пусть $\mathcal{R}^h f$ — орисферическое преобразование функции f, $\widehat{F}(w;r)$ — среднее функции $\mathcal{R}^h f$ по орисферам, равноотстоящим от точки $w \in \mathcal{L}^3$, см. формулу (6.20). Рассмотрим следующую функцию:

$$u(t,w) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(e^t\widehat{F}(w,t)). \tag{9.11}$$

Из (6.20) следует, что

$$e^t \widehat{F}(w,t) = \pi^{-2} e^{-t} \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(w;\xi))\, dv.$$

Значит, $u(t,w)$ как суперпозиция орисферических волн является решением волнового уравнения (9.8). Убедимся, что u — искомое решение задачи Коши (9.9). В силу соотношения симметрии (6.23) $e^t \widehat{F}(w,t)$ — четная функция от t; следовательно,

$$u(0,w) = \frac{d}{dt}(e^t \widehat{F}(w,t))|_{t=0} = 0.$$

Далее, на основании формулы обращения (6.19) для орисферического преобразования имеем:

$$u_t'(0,w) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d^2}{dt^2}(e^t \widehat{F}(w,t))|_{t=0} = f(w).$$

Мы хотим вернуться в (9.11) к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением Асгейрссона (6.22) для пространства Лобачевского. На основании (6.22) получаем при $t > 0$:

$$u(t,w) = \operatorname{sh} t\, F(w, 2\operatorname{sh}\frac{t}{2}),$$

где $F(w,s)$ — среднее функции f, по сферам в $\mathcal{L}^3$ с центром в точке w, см. (6.23). В результате, на основании (6.23) получаем окончательно:

Теорема 9.2. *Решение задачи Коши* (9.9) *для волнового уравнения* (9.8) *имеет вид*:

$$u(t,w) =$$
$$= \frac{1}{8\pi}\operatorname{sh} t \int\limits_{\mathcal{L}^3} \operatorname{sh}^{-1}\frac{d(w,w')}{2}\delta\left(4\operatorname{sh}^2\frac{d(w,w')}{2} - 4\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}\right) f(w')\frac{dx'dy'dz'}{z'^3} =$$
$$= \frac{1}{16\pi}\operatorname{th}^{-1}\frac{t}{2}\int\limits_{\mathcal{L}^3} f(w')\delta\left(\operatorname{sh}\frac{d(w,w')}{2} - \operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\frac{dx'dy'dz'}{z'^3}.$$

Полученная формула аналогична формуле Кирхгофа из § 3 главы I для волнового уравнения в евклидовом пространстве. Как и там, решение волнового уравнения в точке w в момент t зависит только от начальных данных в точках w', находящихся от точки w на неевклидовом расстоянии t (принцип Гюйгенса).

ГЛАВА IV

Интегральная геометрия и гармонический анализ на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$

В главе III были построены интегральная геометрия и гармонический анализ в пространстве Лобачевского, на котором действует группа $G = SL(2, \mathbb{C})$, т. е. группа комплексных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В этой главе аналогичные построения будут проведены на самой группе G. Полученная здесь теория естественно включает в себя и построенную в главе III теорию для пространства Лобачевского. Мы будет рассматривать группу G как однородное пространство группы $G \times G$, и в этом плане ее можно воспринимать просто как гиперболоид $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ в $\mathbb{C}^4$, на котором действует подгруппа линейных преобразований $\mathbb{C}^4$, сохраняющих этот гиперболоид.

§ 1. Геометрия на группе G

1.1. Группа G как однородное пространство.. Мы рассматриваем G как однородное пространство группы $G \times G$, действующей на G левыми и правыми сдвигами:

$$g \mapsto g_1^{-1} g g_2, \quad (g_1, g_2) \in G \times G.$$

Поскольку стационарной подгруппой единичного элемента $e \in G$ является подгруппа $\operatorname{diag}(G \times G) \cong G$, то это однородное пространство изоморфно $G \times G/G$, где $G \subset G \times G$ реализовано как подгруппа элементов (g, g).

Примечание. Однородное пространство G является симметрическим, поскольку его стационарная подгруппа $\operatorname{diag}(G \times G)$ выделяется как подгруппа элементов, инвариантных относительно инволюции

$\theta : (g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1)$. Пространство G не является римановым, но оно является псевдоримановым, т. е. метрика на нем невырождена, но не является положительно определенной. Этот факт важен, поскольку для симметрических пространств интегральную геометрию и гармонический анализ можно строить в более полном объеме, чем для произвольных однородных пространств.

Отметим, что $G \times G$ действует на G неэффективно, причем ядро неэффективности, т. е. подгруппа, оставляющая на месте все элементы из G, состоит из двух элементов (E, E) и $-(E, E)$. Поэтому на G эффективно действует фактор-группа $G \times G/\{\pm(E, E)\}$.

Как уже говорилось, мы будем рассматривать G, отвлекаясь от групповой структуры, как гиперболоид в пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

На G эффективно и транзитивно действует группа линейных преобразований в $\mathbb{C}^3$, сохраняющих квадратичную форму $\alpha\delta - \beta\gamma$, т. е. группа $SO(4, \mathbb{C}^4)$. Рассмотренные выше преобразования, отвечающие элементам из $G \times G$, сохраняют, очевидно, форму $\alpha\delta - \beta\gamma$, и мы получаем вложение $G \times G/\{\pm(E, E)\}$ в $SO(4, \mathbb{C})$. Из соображений размерности (размерности этих групп совпадают) следует, что на самом деле мы имеем изоморфизм:

$$SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})/\{\pm(E, E)\} \cong SO(4, \mathbb{C}).$$

При указанном действии $SO(4, \mathbb{C})$ на G стационарная подгруппа совпадает с $SO(3, \mathbb{C})$ и возникает еще один классический изоморфизм:

$$SO(3, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm E\}.$$

1.2. Плоские сечения гиперболоида G. Мы хотим связать действие группы $G \times G$ на гиперболоиде G с его геометрией, а именно, мы исследуем сечения G гиперплоскостями в $\mathbb{C}^4$ как орбиты тех или иных подгрупп группы $G \times G$.

Гиперплоскости в $\mathbb{C}^4$ удобно задавать уравнениями вида

$$\langle g_0, g \rangle = c, \quad g_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0), \tag{1.1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — поляризация квадратической формы $\alpha\delta - \beta\gamma$.

В подобной записи

$$\frac{1}{2}(\delta_0\alpha - \gamma_0\beta - \beta_0\gamma + \alpha_0\delta) = c.$$

Таким образом, каждая гиперплоскость задается парой $g_0 \in \mathbb{C}^4 \setminus 0$ и $c \in \mathbb{C}$, определенной с точностью до общего множителя. На множестве гиперплоскостей естественно действует группа $G \times G$: элемент

$(g_1, g_2) \in G \times G$ переводит гиперплоскость $\langle g_0, g \rangle = c$ в гиперплоскость $\langle g_1^{-1} g_0 g_2, g \rangle = c$.

Опишем сначала орбиты группы $G \times G$ в множестве гиперплоскостей. В общем положении, когда $\langle g_0, g_0 \rangle \neq 0$, можно нормировать g_0 условием $\langle g_0, g_0 \rangle = 1$. Очевидно, что при любом фиксированном c гиперплоскости (1.1), где $\langle g_0, g_0 \rangle = 1$, образуют орбиту группы $G \times G$, изоморфную исходному однородному пространству G. Оставшееся подмножество гиперплоскостей (случай, когда $\langle g_0, g_0 \rangle = 0$) распадается на две орбиты группы $G \times G$ — семейство гиперплоскостей

$$\langle g_0, g \rangle = 0, \quad \langle g_0, g_0 \rangle = 0, \tag{1.2}$$

касательных к асимптотическому конусу K: $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, и семейство гиперплоскостей

$$\langle g_0, g \rangle = 1, \quad \langle g_0, g_0 \rangle = 0, \tag{1.3}$$

им параллельных. Очевидно, что вторая орбита изоморфна как однородное пространство группы $G \times G$ асимптотическому конусу K с выколотой вершиной; ее стационарная подгруппа состоит из пар $(\delta z_1, \delta^{-1} z_2)$, где z_1, z_2 — матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и δ — диагональная матрица. Первая же орбита изоморфна множеству прямолинейных образующих асимптотического конуса K и имеет в качестве стационарной подгруппу всех пар $(\delta_1 z_1, \delta_2 z_2)$.

Итак, множество плоских сечений гиперболоида G распадается на следующие орбиты группы $G \times G$: однопараметрическое семейство орбит, изоморфных однородному пространству G, орбиту, изоморфную асимптотическому конусу K с выколотой вершиной, и орбиту, изоморфную множеству прямолинейных образующих конуса K.

Исследуем теперь структуру плоских сечений гиперболоида G. Из соображений инвариантности достаточно рассмотреть по одному представителю на каждой орбите группы $G \times G$ в множестве плоских сечений. В качестве представителей на орбитах общего положения возьмем сечения G гиперплоскостям вида:

$$\alpha + \delta = c. \tag{1.4}$$

Если $c \neq \pm 2$, то гиперплоскость (1.4) пересекает G по двумерному гиперболоиду. В особом случае, когда $c = \pm 2$, гиперплоскость (1.4) касается G и ее пересечение с G есть конус с вершиной в точке касания.

Сечения G гиперплоскостями (1.4) имеют простой групповой смысл. Именно, так как $\alpha + \delta = \operatorname{Tr} g$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, то сечение G гиперплоскостью $\alpha + \delta = c$ есть класс сопряженных элементов; в случае $c \neq \pm 2$

это класс сопряженных элементов общего положения, а при $c = \pm 2$ — класс сопряженных элементов жорданова типа (вершина конуса предполагается отброшенной).

В качестве представителей на двух особых орбитах группы $G \times G$ можно взять сечения G гиперплоскостями $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ соответственно. Очевидно, что первое из этих сечений есть цилиндр, а второе — параболоид. Итак, есть четыре типа сечений G гиперплоскостями в $\mathbb{C}^4$ — гиперболоиды, конусы, параболоиды и цилиндры. Разумеется, сечения параболического и цилиндрического типов получаются предельным переходом из сечений гиперболического и конического типов.

На каждом плоском сечении гиперболоида G можно ввести структуру однородного пространства. Рассмотрим сначала сечения плоскостями $\alpha + \delta = c$. В каждом из них транзитивно действует подгруппа $\operatorname{diag}(G \times G) \cong G$ (в случае конического сечения его вершина предполагается отброшенной); таким образом, все эти сечения, а значит, и все их сдвиги, являются однородными пространствами группы G. Легко убедиться, что для сечений гиперболического типа стационарной подгруппой является группа D диагональных матриц, а для сечений конического типа — группа $\pm Z$, где Z — подгруппа унипотентных матриц $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим сечения G гиперплоскостями $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$. На первом из них транзитивно и свободно действует подгруппа $Z \times Z$; таким образом, это сечение наделено структурой однородного пространства $Z \times Z/\{E\}$. Группа $Z \times Z$ действует, но уже не транзитивно, и на втором сечении. Нетрудно убедиться, что транзитивно действует на этом сечении подгруппа $U \supset Z \times Z$ всех пар $(\delta z_1, \delta^{-1} z_2)$, где $\delta \in D$, $z_1, z_2 \in Z$, а стационарной подгруппой является подгруппа $\operatorname{diag}(\pm Z, \pm Z)$ пар $(\pm z, \pm z)$, $z \in Z$, изоморфная $\pm Z$.

Итак, сечения G гиперболического, конического, параболического и цилиндрического типа наделены соответственно структурами однородных пространств G/D, $G/\pm Z$, $Z \times Z/\{E\}$ и $U/\operatorname{diag}(\pm Z, \pm Z)$.

1.3. Многообразие орисфер. Рассмотрим множество прямолинейных образующих гиперболоида G. Эти прямые будут играть в нашей теории ту же роль, что и орисферы в пространстве Лобачевского, и по аналогии с пространством Лобачевского мы будем называть их орисферами. Отметим, что орисферы являются прямолинейными образующими всех плоских сечений гиперболоида G.

На множестве орисфер H естественно действует группа $G \times G$, причем это действие транзитивно (для доказательства достаточно рассмотреть множество орисфер, проходящих через произвольную фиксированную точку $g \in G$, и убедиться, что на этом множестве транзитивно действует стационарная подгруппа этой точки).

Орисферы на G имеют простую групповую интерпретацию. Именно, одной из орисфер является подгруппа $Z \subset G$ матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку все орисферы получаются ее сдвигами, то множество орисфер H совпадает с множеством двусторонних классов смежности $g_1^{-1} Z g_2$. Отсюда следует, что

$$H \cong (G \times G)/V,$$

где V — подгруппа, сохраняющая орисферу Z. Легко убедиться, что элементами V являются всевозможные пары $(\delta z_1, \delta z_2)$, где $z_1, z_2 \in Z$, $\delta \in D$. Так как очевидно, $\dim V = 3$, то $\dim H = 3$, т. е. пространство орисфер имеет ту же размерность, что и G.

Введем на H систему координат. Для этого сначала рассмотрим множество H_0 прямолинейных образующих асимптотического конуса K: $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. На K есть два однопараметрических семейства двумерных плоскостей — семейство плоскостей

$$\begin{aligned} \xi_1\alpha + \xi_2\gamma &= 0, \\ \xi_1\beta + \xi_2\delta &= 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

и семейство плоскостей

$$\begin{aligned} \eta_1\delta - \eta_2\gamma &= 0, \\ -\eta_1\beta + \eta_2\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В матричной записи, семейство плоскостей $\xi g = 0$ и семейство плоскостей $g\eta^\perp = 0$, где $\eta^\perp = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}$.

Любая прямолинейная образующая конуса K получается как пересечение пары плоскостей (1.5), (1.6) и задается тем самым парой векторов $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$, определенных каждый с точностью до множителя; обозначим ее через $l(\xi, \eta)$.

Многообразие орисфер H образует естественное расслоение над H_0, где слой над $l(\xi, \eta)$ — множество всех орисфер, параллельных $l(\xi, \eta)$. Покажем, что любая орисфера, параллельная $l(\xi, \eta)$, задается в $\mathbb{C}^4$ системой уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_1'\alpha + \xi_2'\gamma &= \eta_1', \\ \xi_1'\beta + \xi_2'\delta &= \eta_2', \\ \eta_1'\delta - \eta_2'\gamma &= \xi_1', \\ -\eta_1'\beta + \eta_2'\alpha &= \xi_2', \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\xi', \eta' \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ — векторы, пропорциональные ξ, η соответственно.

В самом деле, рассмотрим первые два и последние два уравнения системы (1.7). На G их можно представить в виде $\xi' g = \eta'$, $\eta' g^{-1} = \xi'$; значит, на G эти две системы уравнений эквивалентны. Отсюда следует, что система (1.7) задает прямую в $\mathbb{C}^4$ и эта прямая принадлежит G. Очевидно далее, что эта прямая параллельна $l(\xi, \eta)$.

Замечание. Орисферы, параллельные прямой $l(\xi, \eta)$, являются прямолинейными образующими цилиндра, который получается в сечении G гиперплоскостью, касающейся асимптотического конуса K вдоль прямой $l(\xi, \eta)$. Уравнение этой гиперплоскости:

$$\eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta) = 0, \tag{1.8}$$

или, в матричной записи, $\xi g \eta^{\perp} = 0$.

Итак, любая орисфера на G может быть задана системой уравнений $\xi g = \eta$, т. е.

$$\xi_1\alpha + \xi_2\gamma = \eta_1,$$
$$\xi_1\beta + \xi_2\delta = \eta_2,$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$, или эквивалентной ей системой $\eta g^{-1} = \xi$, т. е.

$$\eta_1\delta - \eta_2\gamma = \xi_1,$$
$$-\eta_1\beta + \eta_2\alpha = \xi_2.$$

Обозначим эту орисферу через $h(\xi, \eta)$ и примем ξ, η в качестве параметров на многообразии орисфер H. Так как, очевидно, $h(\lambda\xi, \lambda\eta) = h(\xi, \eta)$ для любого $\lambda \neq 0$, то естественно называть ξ, η однородными координатами на H.

В однородных координатах ξ, η действие элементов $(g_1, g_2) \in G \times G$ на H задается так:

$$h(\xi, \eta) \mapsto h(\xi g_1, \eta g_2).$$

Отметим, что орисфера Z имеет однородные координаты $\xi_0 = \eta_0 = (0, 1)$; следовательно, любая орисфера $g_1^{-1} Z g_2$ имеет однородные координаты $\xi = \xi_0 g_1$, $\eta = \xi_0 g_2$.

Исключительно важно для дальнейшего, что на многообразии орисфер H, кроме действия группы $G \times G$, определено действие группы $\mathbb{C}^{\times}$; каждому $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ отвечает преобразование

$$h(\xi, \eta) \mapsto h(\xi, \lambda\eta),$$

которое переводит каждую орисферу в орисферу, ей параллельную. Назовем эти преобразования преобразованиями левого сдвига на H. Очевидно, что они перестановочны с действием группы $G \times G$.

Опишем теперь в однородных координатах ξ,η семейства прямолинейных образующих (орисфер) на плоских сечениях Γ гиперболоида G.

В силу сказанного выше, любое цилиндрическое сечение Γ является пересечением G с гиперплоскостями вида (1.8) и орисферы на Γ суть $h(\xi,\lambda\eta)$, где λ пробегает $\mathbb{C}^\times$.

Рассмотрим теперь плоские сечения Γ других типов. Для каждого из них уравнение секущей гиперплоскости можно привести к виду

$$2\langle g_0,g\rangle = 1+\langle g_0,g_0\rangle. \tag{1.9}$$

Следовательно, так как $\langle g,g\rangle = 1$ на G, само сечение Γ задается на G уравнением

$$\langle g-g_0,g-g_0\rangle = 0,$$

т. е.

$$(\alpha-\alpha_0)(\delta-\delta_0)-(\beta-\beta_0)(\gamma-\gamma_0)=0. \tag{1.10}$$

Это сечение является конусом, параболоидом или гиперболоидом, если соответственно $\det g_0 = 1$, $\det g_0 = 0$, или $\det g_0 \neq 0,1$.

Из (1.10) непосредственно получаем уравнения прямолинейных образующих (орисфер) на Γ: орисферы одного семейства задаются уравнениями:

$$\xi_1(\alpha-\alpha_0)+\xi_2(\gamma-\gamma_0)=0,$$
$$\xi_1(\beta-\beta_0)+\xi_2(\delta-\delta_0)=0,$$

т. е. $\xi g = \xi g_0$; орисферы другого семейства — уравнениями

$$\eta_1(\delta-\delta_0)-\eta_2(\gamma-\gamma_0)=0,$$
$$-\eta_1(\beta-\beta_0)+\eta_2(\alpha-\alpha_0)=0,$$

т. е. $\eta g^{-1} = \eta\widehat{g_0}$, где $\widehat{g_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$. Итак, доказано

Предложение 1.1. *Семейства орисфер, лежащих на сечении гиперболоида G гиперплоскостью (1.10), суть семейство орисфер $h(\xi,\xi g_0)$ и семейство орисфер $h(\eta\widehat{g_0},\eta)$, где $\widehat{g_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$, а ξ,η пробегают $\mathbb{C}^2\setminus 0$.*

Следствие. 1 *При любых фиксированных $g_0\in G$ и $\lambda\neq 0$ семейства орисфер, лежащих на сечении G гиперплоскостью*

$$2\lambda\langle g_0,g\rangle = 1+\lambda^2,$$

суть орисферы $h(\xi,\lambda\xi g_0)$ и $h(\xi,\lambda^{-1}\xi g_0)$, где ξ пробегает $\mathbb{C}^2\setminus 0$.

Следствие. 2 *Семейство орисфер, проходящих через произвольную фиксированную точку $g_0\in G$ суть орисферы $h(\xi,\xi g_0)$, где ξ пробегает $\mathbb{C}^2\setminus 0$.*

1.4. Вложение многообразия орисфер H в проективное пространство. Сопоставив каждой орисфере $h(\xi,\eta)$ точку проективного пространства $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)$, мы получаем вложение

$$H \hookrightarrow \mathbb{CP}^3.$$

Образ H при этом вложении есть все пространство $\mathbb{CP}^3$, из которого удалена пара непересекающихся прямых — прямая $\xi = 0$ и прямая $\eta = 0$. Таким образом, $\mathbb{CP}^3$ является естественной компактификацией многообразия орисфер H.

Бесконечно удаленные точки на H имеют следующий простой смысл. Множество бесконечно удаленных точек на G есть двумерный гиперболоид, обладающий двумя семействами прямолинейных образующих. Этим прямолинейным образующим отвечают соответственно точки прямых $\xi = 0$ и $\eta = 0$ в $\mathbb{CP}^3$, т. е. бесконечно удаленные точки на H.

Замечание. Укажем, как изменится эта конструкция, если от группы $G = SL(2,\mathbb{C})$ перейти к ее фактор-группе по центру $PSL(2,\mathbb{C}) = G/\{\pm E\}$, т. е. считать отождествленными диаметрально противоположные точки гиперболоида $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Многообразие $\widetilde{G} = G/\{\pm E\}$ можно вложить в проективное пространство $\mathbb{CP}^3$, поставив в соответствие каждой матрице $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ точку из $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Образом $\widetilde{G}$ при этом вложении является все проективное пространство $\mathbb{CP}^3$, за исключением квадрики Г: $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, точки которой можно трактовать как бесконечно удаленные точки на $\widetilde{G}$. Легко убедиться, что орисферы на $\widetilde{G}$ переходят при этом вложении во всевозможные прямые в $\mathbb{CP}^3$, касающиеся квадрики Г. Уравнения этих прямых можно представить в следующей форме:

$$\frac{\xi_1\alpha + \xi_2\gamma}{\eta_1} = \frac{\xi_1\beta + \xi_2\delta}{\eta_2} = \frac{\eta_1\delta - \eta_2\gamma}{\xi_1} = \frac{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}{\xi_2}, \tag{1.11}$$

где $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ (ранг этой системы равен 2).

Компактификация этого многообразия прямых получается присоединением всех прямолинейных образующих квадрики Г; последние задаются уравнениями (1.11), где либо $\xi = 0$, либо $\eta = 0$ (два семейства образующих). Полученное в результате многообразие изоморфно проективному пространству $\mathbb{CP}^3$: каждой прямой (1.11) сопоставляется точка в $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)$.

1.5. Комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$, ассоциированный с многообразием орисфер. Удобно перейти от многообразия прямых (орисфер) на гиперболоиде G к многообразию прямых в $\mathbb{C}^3$. Для этого спроектируем гиперболоид $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ на координатное подпространство $\mathbb{C}^3$ с координатами (α,β,δ). Образом гиперболоида будет все пространство $\mathbb{C}^3$, за исключением точек $(\alpha,0,\delta)$, где $\alpha\delta \neq 1$.

При проектировании гиперболоида G на $\mathbb{C}^3$ его прямолинейные образующие, не параллельные гиперплоскости $\beta = 0$, переходят в прямые, пересекающие гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$ и не лежащие в плоскости $\beta = 0$. Таким образом, мы ассоциировали с многообразием орисфер на гиперболоиде G трехмерное многообразие K прямых в $\mathbb{C}^3$. В дифференциальной геометрии трехмерные многообразия прямых в $\mathbb{C}^3$ обычно называют комплексами прямых.

Замечание. Над точкой $(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{C}^3$ при $\beta \neq 0$ лежит в точности одна точка гиперболоида, а при $\beta=0$, $\alpha\delta=1$ — целая прямая. Таким образом, гиперболоид получается вклеиванием с помощью σ-процесса прямых вместо точек гиперболы $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$. Прямые нашего комплекса это те прямые, которые поднимаются на гиперболоид в результате этого σ-процесса.

1.6. Многообразие параболоидов. Рассмотрим теперь параболоиды в G, т.е. двумерные поверхности, высекаемые в G изотропными гиперплоскостями в $\mathbb{C}^4$, не проходящими через 0:

$$\langle g_0, g\rangle = p, \quad g \in G,$$

где g_0 — ненулевая точка асимптотического конуса

$$\langle g_0, g_0\rangle \equiv \det(g_0) = 0,$$

а $p \neq 0$ — любое ненулевое число.

Введем в пространстве H^p всех параболоидов координаты, аналогичные однородным координатам в пространстве орисфер H. Положим $\zeta^\perp = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ -\zeta_1 \end{pmatrix}$ для любого 2-вектора $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)$, так что $\xi\zeta^\perp = -\zeta\xi^\perp = \xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1$ — антисимметричная билинейная форма на $\mathbb{C}^2$. Очевидно, эта форма инвариантна относительно группы G, т. е.

$$(\xi g)(\eta g)^\perp = \xi\eta^\perp \quad \text{для любого } g \in G.$$

Поставим в соответствие каждой паре векторов $\xi,\zeta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ и числу $p \neq 0$ изотропную гиперплоскость в 4-мерном пространстве матриц g, заданную уравнением

$$\xi g\zeta^\perp = p, \quad p \neq 0, \tag{1.12}$$

или, в подробной записи, уравнением

$$(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma)\zeta_2 - (\xi_1\beta + \xi_2\delta)\zeta_1 = p, \tag{1.13}$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$. Легко убедиться, что к виду (1.12) приводятся уравнения изотропных гиперплоскостей, не проходящих через 0, и только они.

Обозначим параболоид в G, заданный уравнением (1.12), через $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$. Очевидно,

$$\widetilde{h}(\lambda\xi,\ \mu\zeta,\ \lambda\mu p)=\widetilde{h}(\xi,\zeta,p), \quad \text{для любых чисел} \quad \lambda,\mu\neq 0. \tag{1.14}$$

Замечание. В уравнении (1.13) можно было бы предполагать $p=1$ и писать $\widetilde{h}(\xi,\zeta)$ вместо $\widetilde{h}(\xi,\zeta,1)$. Тогда $\widetilde{h}(\lambda\xi,\lambda^{-1}\zeta)=\widetilde{h}(\xi,\zeta)$ для любого $\lambda\neq 0$. Однако нам удобнее этого не делать.

В координатах ξ,ζ,p действие элементов $(g_1,g_2)\in G\times G$ на H^p задается так:

$$\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)\mapsto\widetilde{h}(\xi g_1,\zeta g_2,p).$$

Например, параболоид ZsZ, где $s=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, имеет координаты $\xi_0=\zeta_0=(0,1)$, $p_0=1$. Следовательно, параболоид $g_1^{-1}Z\,s\,Z\,g_2$ имеет координаты $(\xi_0 g_1,\zeta_0 g_2,1)$.

Исключительно важно, что в пространстве параболоидов H^p, как и в пространстве орисфер H, определено действие группы $\mathbb{C}^\times$, перестановочное с действием группы $G\times G$: каждому $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ отвечает преобразование

$$\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)\mapsto\widetilde{h}(\xi,\zeta,\lambda p),$$

которое переводит каждое плоское параболическое сечение в сечение ему параллельное.

На каждом параболоиде $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$ имеются два однопараметрических семейства орисфер — орисферы, параллельные соответственно плоскостям $\xi g=0$ и $g\zeta^\perp=0$, лежащим на асимптотическом конусе в $\mathbb{C}^4$.

Опишем эти семейства плоскостей в однородных координатах на многообразии орисфер H. Первое семейство состоит из орисфер $h(\xi,\eta)$, где η удовлетворяет соотношению $\eta\zeta^\perp=p$. Второе состоит из орисфер $h(\eta,\zeta)$, где η удовлетворяет соотношению $\xi\eta^\perp=p$.

В самом деле, орисфера $h(\xi,\eta)$ есть множество матриц $g\in G$, удовлетворяющих соотношению $\xi g=\eta$, и условие, что она принадлежит параболоиду $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, эквивалентно равенству $\eta\zeta^\perp=p$. Орисфера $h(\eta,\zeta)$ есть множество матриц $g\in G$, удовлетворяющих соотношению $\eta g=\zeta$, или, что эквивалентно, соотношению $\eta^\perp=g\zeta^\perp$. Поэтому условие, что она принадлежит параболоиду $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, эквивалентно равенству $\xi\eta^\perp=p$.

Отметим, что через каждую точку параболоида проходит в точности одна орисфера каждого из этих семейств.

Обратно, через каждую орисферу $h(\xi, \eta)$ проходят два однопараметрических семейства параболоидов — семейство параболоидов $\widetilde{h}(\xi, \zeta, 1)$, где $\eta\zeta^{\perp} = 1$, и семейство параболоидов $\widetilde{h}(\zeta, \eta, 1)$, где $\zeta\xi^{\perp} = 1$.

Обсудим теперь аналогию между параболоидами и орисферами. Подобно орисферам, каждый параболоид является орбитой подгруппы $Z \times Z$ группы $G \times G$ или подгруппы ей сопряженной. Обратно, любая орбита в G подгруппы $Z \times Z$ или подгруппы ей сопряженной есть либо орисфера, либо параболоид. В самом деле, пусть $L \subset G$ — произвольная орбита подгруппы $Z \times Z$, т. е. множество матриц вида $z_1 g^0 z_2$, где $g^0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ — произвольный фиксированный элемент группы G, а z_1 и z_2 пробегают подгруппу Z. Очевидно, если $\gamma_0 = 0$, то L является орисферой. Если же $\gamma_0 \neq 0$, то L есть сечение G гиперплоскостью $\gamma = \gamma_0$, т. е. параболоид.

Итак, многообразие орбит подгруппы $Z \times Z$ в $G \times G$ и подгрупп ей сопряженных является объединением двух однородных пространств группы $G \times G$ — пространства орисфер H и пространства параболоидов H^p.

Сравним между собой многообразие орисфер H и многообразие параболоидов H^p. Оба они наделены структурами расслоений

$$H \to H^c, \quad H^p \to H^c$$

со слоем $\mathbb{C}^{\times}$ над многообразием H^c цилиндрических сечений. Именно, отображение $H \to H^c$ относит каждой орисфере проходящую через нее цилиндрическую поверхность; каждый слой расслоения состоит из параллельных между собой орисфер. Отображение $H^p \to H^c$ относит каждому параболическому сечению параллельное ему цилиндрическое сечение; каждый слой расслоения состоит из параллельных между собой параболических сечений. В координатной форме: каждой орисфере $h(\xi, \eta)$ и каждому параболоиду $\widetilde{h}(\xi, \eta, p)$ ставится в соответствие цилиндр, заданный уравнением $\xi g \eta^{\perp} = 0$.

Группа $G \times G$ переставляет слои каждого из этих расслоений, а группа $\mathbb{C}^{\times}$ действует в слоях.

Отметим, что H и H^p, рассматриваемые как однородные пространства группы $G \times G$, неизоморфны. Действительно, их стационарными подгруппами в $G \times G$ являются соответственно группа V пар $(\delta z_1, \delta z_2)$ и группа U пар $(\delta^{-1} z_1, \delta z_2)$, где $\delta \in D$ и $z_1, z_2 \in Z$. Эти подгруппы не сопряжены в $G \times G$ и даже не изоморфны.

Замечание. Пространство H^c цилиндрических сечений естественно изоморфно произведению $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ двух комплексных проективных прямых, а расслоения H и H^p над H^c со слоем $\mathbb{C}\setminus 0$ совпадают, соответственно, с известными из алгебраической геометрии линейными расслоениями $\mathcal{O}(-1,+1)$ и $\mathcal{O}(-1,-1)$.

§ 2. Интегральная геометрия на группе $G = SL(2,\mathbb{C})$

2.1. Интегральные преобразования, связанные с пространством H орисфер и комплексом прямых K. Свяжем с многообразием орисфер H интегральное преобразование, относящее финитным C^∞-функциям на G их интегралы по орисферам.

Каждая орисфера $h(\xi,\eta)$ есть двусторонний класс смежности $g_1^{-1}Zg_2$, где Z — подгруппа матриц $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $g_1, g_2 \in G$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условию

$$\xi_0 g_1 = \xi, \quad \xi_0 g_2 = \eta, \text{ где } \xi_0 = (0,1). \tag{2.1}$$

Определение. Определим интеграл по орисфере $h(\xi,\eta)$ следующим равенством:

$$\mathcal{R}f(\xi,\eta) = \frac{i}{2}\int f(g_1^{-1}zg_2)\,dt\,d\bar{t}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $g_1, g_2 \in G$ — любые матрицы, удовлетворяющие соотношению (2.1). Назовем $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$ *орисферическим преобразованием* функции f.

Формулу (2.2) можно переписать так:

$$\mathcal{R}f(\xi,\eta) = \int_G f(g)\,\delta(\xi g - \eta)\,d\mu(g), \tag{2.3}$$

где $\delta(\ .\ )$ — дельта-функция на $\mathbb{C}^2$, а $d\mu(g)$ — инвариантная мера на группе G; эта мера имеет в координатах α, β, δ на G следующий вид:

$$d\mu(g) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 |\beta|^{-2}\,d\alpha\,d\bar{\alpha}\,d\beta\,d\bar{\beta}\,d\delta\,d\bar{\delta}.$$

Равенство интегралов (2.2) и (2.3) устанавливается простой проверкой.

Из определения следует, что функция $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$ удовлетворяет условию однородности:

$$\mathcal{R}f(\lambda\xi,\lambda\eta) = |\lambda|^{-4}\mathcal{R}f(\xi,\eta) \text{ для любого } \lambda \neq 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$ зависит не только от орисферы $h(\xi,\eta)$, но и от однородных координат ξ, η, которыми эта орисфера задается; мы можем трактовать $\mathcal{R} f$ как сечение одномерного векторного расслоения над многообразием орисфер H.

Из (2.2) следует также, что оператор $\mathcal{R}$ перестановочен с действием группы $G \times G$, т. е. если $f_1(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$, то $\mathcal{R} f_1(\xi, \eta) = \mathcal{R} f(\xi g_1, \eta g_2)$.

Можно, введя на H аффинные координаты, определить орисферическое преобразование не как сечение векторного расслоения над H, а как функцию на H с числовыми значениями. Удобно ввести на H следующие аффинные координаты:

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2},\ x_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2},\ \lambda = \frac{\eta_2}{\xi_2}. \tag{2.5}$$

В этих координатах любая орисфера $h(\xi, \eta)$, где $\xi_2 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$, задается уравнениями

$$\alpha = x_2 \beta + \lambda^{-1},\ \delta = -x_1 \beta + \lambda.$$

Замечание. Условие $\xi_2 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$ эквивалентно тому, что орисфера $h(\xi, \eta)$ не параллельна гиперплоскости $\beta = 0$ в $\mathbb{C}^4$.

Приняв α, β, δ в качестве локальных координат на G, можно определить для любой функции $f(g) = f(\alpha, \beta, \delta)$ ее орисферическое преобразование следующим равенством:

$$\mathcal{R}_0 f(x_1, x_2, \lambda) = \frac{i}{2} \int f(x_2 \beta + \lambda^{-1}, \beta, -x_1 \beta + \lambda)\, d\beta\, d\overline{\beta}. \tag{2.6}$$

Геометрически переход от $\mathcal{R}$ к $\mathcal{R}_0$ означает, что вместо интегрального преобразования, связанного с многообразием орисфер H, мы рассматриваем интегральное преобразование, связанное с ассоциированным с H комплексом прямых в $\mathbb{C}^3$, т. е. преобразование, относящее функциям на $\mathbb{C}^3$ их интегралы по прямым в $\mathbb{C}^3$, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$.

Установим соотношение между функциями $\mathcal{R} f$ и $\mathcal{R}_0 f$. В равенстве (2.2) можно принять $g_1 = \begin{pmatrix} \xi_2^{-1} & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} \eta_2^{-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$; тогда из равенства $g = g_1^{-1} z g_2$, где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, следует:

$$\alpha = \eta_1 \xi_2 t + \frac{\xi_2}{\eta_2},\ \beta = \xi_2 \eta_2 t,\ \delta = -\xi_1 \eta_2 t + \frac{\eta_2}{\xi_2}.$$

В результате выражение (2.2) для $\mathcal{R} f$ приводится к следующему виду:

$$\mathcal{R} f(\xi, \eta) = |\xi_2 \eta_2|^{-2} \frac{i}{2} \int f(x_2 \beta + \lambda^{-1}, \beta, -x_1 \beta + \lambda)\, d\beta\, d\overline{\beta}, \tag{2.7}$$

где x_1, x_2, λ связаны с ξ, η соотношением (2.5). Сравнивая это выражение с выражением (2.6) для $\mathcal{R}_0 f$, получаем искомые соотношения между $\mathcal{R} f$ и $\mathcal{R}_0 f$:

$$\mathcal{R} f(\xi,\eta) = |\xi_2\eta_2|^{-2}\mathcal{R}_0 f\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{\eta_2}{\xi_2}\right), \tag{2.8}$$

$$\mathcal{R}_0 f(x_1, x_2, \lambda) = |\lambda|^2 \mathcal{R} f(x_1, 1, \lambda x_2, \lambda). \tag{2.9}$$

2.2. Соотношения симметрии для орисферического преобразования. Функции $\varphi = \mathcal{R} f$ удовлетворяют дополнительным соотношениям симметрии, структура которых такова. Пусть Γ — произвольное сечение гиперболоида G гиперплоскостью в $\mathbb{C}^4$. Так как Γ — квадратичная поверхность, то в общем положении на Γ имеется два семейства прямолинейных образующих (орисфер). Соотношение симметрии состоит в том, что интегралы функции $\varphi = \mathcal{R} f$ по этим семействам орисфер (взятые по подходящей мере) совпадают, поскольку оба они равны интегралу исходной функции f по поверхности Γ. Запишем эти соотношения в явной форме.

Фиксируем произвольные $g_0 \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ и рассмотрим два семейства орисфер $h(\xi, \lambda\xi g_0)$ и $h(\lambda\eta g_0^{-1}, \eta)$. В п. 1.3 было показано, что эти орисферы являются прямолинейными образующими поверхности $\Gamma \subset G$, которая получается в сечении G гиперплоскостью

$$2\lambda\langle g_0, g\rangle = 1 + \lambda^2.$$

Эта поверхность есть гиперболоид при $\lambda \neq \pm 1$ и конус при $\lambda = \pm 1$.

Предложение 2.1. *Для любых $g_0 \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ функция $\varphi = \mathcal{R} f$ удовлетворяет следующему соотношению симметрии:*

$$\int\limits_{\gamma_\xi} \varphi(\xi, \lambda\xi g_0)\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} = \int\limits_{\gamma_\eta} \varphi(\lambda\eta g_0^{-1}, \eta)\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}. \tag{2.10}$$

Здесь $\omega(\xi) = \xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1$, а γ_ξ, γ_η — произвольные поверхности в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающие по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0; ввиду условия однородности (2.4) для φ от выбора γ_ξ, γ_η интегралы не зависят.

Для доказательства достаточно подставить в каждый из интегралов (2.10) выражение (2.3) функции $\mathcal{R} f$ через функцию f. Элементарными преобразованиями оба этих интеграла приводятся к одному и тому же интегралу

$$\int\limits_G f(g)\,\delta(-2\lambda\langle g_0, g\rangle + 1 + \lambda^2)\, d\mu(g) = \int\limits_G f(g)\,\delta(\langle g - \lambda g_0, g - \lambda g_0\rangle)\, d\mu(g).$$

Отметим, что соотношение (2.10) существенно только при $\lambda \neq \pm 1$, т. е. когда сечение Γ не является конусом.

Примечание. Соотношение симметрии (2.10) можно также представить в следующей форме:

$$\int\limits_{\gamma_\xi} \varphi(\xi, \xi g_0)\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} = \int\limits_{\gamma_\eta} \varphi(\eta\widehat{g_0}, \eta)\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)},$$

где $g_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ — любая невырожденная матрица и $\widehat{g_0} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$. В таком виде оно остается справедливым и для вырожденных матриц $g_0 \neq 0$. Заметим, что для любой вырожденной матрицы g_0 орисферы $h(\xi, \xi g_0)$ и $h(\eta\widetilde{g_0}, \eta)$ являются прямолинейными образующими параболоида, который получается в сечении G гиперплоскостью $2\langle g_0, g\rangle = 1$.

2.3. Формула обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}_0$, связанного с комплексом прямых в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим интегральное преобразование $\mathcal{R}_0$, заданное равенством (2.6); оно относит каждой финитной функции $f(\alpha, \beta, \delta)$ на $\mathbb{C}^3$ ее интегралы по прямым в $\mathbb{C}^3$, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$. Мы хотим восстановить f по функции $\varphi = \mathcal{R}_0 f$. Напомним, что в главе II решалась более общая задача: восстановить функцию на $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым, пересекающим произвольную фиксированную алгебраическую кривую в $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$. Поэтому можно было бы воспользоваться результатами главы II. Мы приведем здесь, однако, другое, независимое от главы II, решение этой задачи. Изложим решение задачи при дополнительном предположении, что $f = 0$, когда β достаточно мало. При этом предположении все последующие преобразования будут корректными. В дальнейшем мы освободимся от этого несущественного допущения.

Сначала перейдем от функции $\varphi(x_1, x_2, \lambda)$ к ее преобразованию Фурье по x_1, x_2:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \lambda) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \varphi(x_1, x_2, \lambda)e^{i\operatorname{Re}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}\,dx_1\,d\overline{x_1}\,dx_2\,d\overline{x_2}.$$

Найдем выражение $\widetilde{\varphi}$ через исходную функцию f. Имеем:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times \tag{2.11}$$

$$\times \int f(x_2 t + \lambda^{-1}, t, -x_1 t + \lambda) e^{i\mathrm{Re}\,(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}\, dt\, d\overline{t}\, dx_1\, d\overline{x_1}\, dx_2\, d\overline{x_2} =$$

$$= (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f(\alpha,\beta,\delta) e^{i\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}\xi_1 + \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}\xi_2\right)} |\beta|^{-4}\, d\alpha\, d\overline{\alpha}\, d\beta\, d\overline{\beta}\, d\delta\, d\overline{\delta}.$$

Перейдем теперь от координат α, β, δ на $\mathbb{C}^3$ к новым координатам

$$p_1 = -\frac{\delta}{\beta},\ p_2 = \frac{\alpha}{\beta},\ p_3 = \frac{1}{\beta}$$

и положим

$$f(\alpha,\beta,\delta) = |p_3|^4 f_1(p_1,p_2,p_3).$$

Тогда равенство (2.3) примет следующий вид:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times$$

$$\times \int f_1(p_1,p_2,p_3) e^{i\mathrm{Re}\,(p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3(\lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2))}\, dp_1\, d\overline{p_1}\, dp_2\, d\overline{p_2}\, dp_3\, d\overline{p_3}.$$

В результате получено простое соотношение между $\widetilde{\varphi}$ и преобразованием Фурье F функции f_1,

$$F(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (2\pi)^{-3}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times$$

$$\times \int f(p_1,p_2,p_3) e^{i\mathrm{Re}\,(p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3)}\, dp_1\, d\overline{p_1}\, dp_2\, d\overline{p_2}\, dp_3\, d\overline{p_3},$$

именно,

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = 2\pi F(\xi_1,\xi_2,\lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2). \tag{2.12}$$

Искомая формула обращения легко следует из (2.12). Для этого нужно воспользоваться формулой обращения для преобразования Фурье функции f_1:

$$|\beta|^4 f(\alpha,\beta,\delta) = f_1(p_1,p_2,p_3) =$$

$$= (2\pi)^{-3}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int F(\xi_1,\xi_2,\xi_3) e^{-i\mathrm{Re}\,(\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3)}\, d\xi_1\, d\overline{\xi_1}\, d\xi_2\, d\overline{\xi_2}\, d\xi_3\, d\overline{\xi_3}.$$

Сделав здесь замену переменной $\xi_3 = \lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2$, получаем в силу (2.12):

$$f(\alpha,\beta,\delta) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-4}\left(\frac{i}{2}\right)^3 |\beta|^{-4} \times$$

$$\times \int \widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda)|\xi_1 + \overline{\lambda}^{-2}\xi_2|^2 e^{-i\operatorname{Re}(-\xi_1\frac{\delta}{\beta}+\xi_2\frac{\alpha}{\beta}+(\lambda\xi_1-\lambda^{-1}\xi_2)\frac{1}{\beta})} d\xi_1 d\overline{\xi_1} d\xi_2 d\overline{\xi_2} d\lambda d\overline{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-2}\frac{i}{2}|\beta|^{-4}\int L\overline{L}\varphi\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}, \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}, \lambda\right) d\lambda\, d\overline{\lambda}, \quad (2.13)$$

где $L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\overline{L} = \frac{\partial}{\partial \overline{x_1}} + \overline{\lambda}^{-2}\frac{\partial}{\partial \overline{x_2}}$.

Осталось упростить полученное выражение. Так как $\beta^{-1}L + \frac{\partial}{\partial\lambda}$ и $\overline{\beta}^{-1}\overline{L} + \frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}$ суть полные производные функции $\varphi\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}, \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}, \lambda\right)$ по λ и $\overline{\lambda}$, то в равенстве (2.13) можно заменить $\beta^{-1}L$ и $\overline{\beta}^{-1}\overline{L}$ соответственно на $-\frac{\partial}{\partial\lambda}$ и $-\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}$. В результате получим:

$$f(\alpha,\beta,\delta) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}|\beta|^{-2}\int \varphi''_{\lambda,\overline{\lambda}}\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta}, \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta}, \lambda\right) d\lambda\, d\overline{\lambda}.$$

Искомая формула обращения получается отсюда заменой переменной $x = \frac{\lambda-\delta}{\beta}$. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $f(\alpha,\beta,\gamma)$ — финитная C^∞ функция на $\mathbb{C}^3$, равная нулю при достаточно малых значениях β, и $\varphi = \mathcal{R}_0 f$ — ее интегральное преобразование, заданное равенством* (2.6). *Тогда имеет место следующая формула обращения*:

$$f(\alpha,\beta,\delta) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int \varphi''_{\lambda,\overline{\lambda}}\left(x, \frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}, \beta x+\delta\right) dx\, d\overline{x}. \quad (2.14)$$

Заметим, что в этой формуле дифференцирование по λ есть дифференцирование по множеству параллельных прямых, пересекающих гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$, а интеграл берется по множеству прямых, пересекающих эту гиперболу и проходящих через точку (α,β,δ).

Подобно случаю пространства Лобачевского, полученная формула обращения локальна: для восстановления функции f в точке (α,β,δ) нужно знать ее интегралы только по прямым, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$ и сколь угодно близким к этой точке.

2.4. Формула обращения для орисферического преобразования. Пусть $f(g)$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — финитная C^∞ функция на группе G. Требуется выразить f через ее орисферическое преобразование $\mathcal{R}f(\xi,\eta)$, определенное равенством (2.3). Предположим на время, что $f = 0$ при достаточно малых значениях β. Тогда f, рассматриваемая как функция от α, β, δ, продолжается до финитной C^∞ функции на всем $\mathbb{C}^3$, равной нулю при достаточно малых значениях β. Следовательно, она выражается через функцию $\varphi = \mathcal{R}_0 f$ по формуле обращения (2.14). Чтобы получить отсюда нужный результат, достаточно воспользоваться соотношением (2.9), выражающим $\mathcal{R}_0 f$ через $\mathcal{R} f$. Мы получаем:

$$f(g) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int L\overline{L}\mathcal{R} f(x, 1, \alpha x + \gamma, \beta x + \delta)\, dx\, d\overline{x}, \tag{2.15}$$

где $L = (\alpha x + \gamma)\frac{\partial}{\partial \eta_1} + (\beta x + \delta)\frac{\partial}{\partial \eta_2} + 1$. Используя условие однородности (2.4) для $\mathcal{R} f$, можно придать полученной формуле обращения более симметричный вид:

$$f(g) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma} L_\eta\overline{L_\eta}\mathcal{R} f(\xi, \eta)\ |_{\eta=\xi g}\ \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}, \tag{2.16}$$

где $L_\eta = \eta_1\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial \eta_2} + 1$, $\omega(\xi) = \xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1$, а интеграл берется по произвольной поверхности $\gamma \subset \mathbb{C}\setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0.

Так как орисферическое преобразование $\mathcal{R}$ инвариантно относительно действия группы $G \times G$, первоначальное предположение о f является несущественным: из того, что формула обращения (2.16) верна для функций, равных нулю при достаточно малых значениях β, следует, что она верна и для любой финитной C^∞ функции на G. Таким образом, доказана

Теорема 2.2. *Пусть* f *— произвольная финитная* C^∞ *функция на* G. *Тогда, если* $\mathcal{R} f$ *— орисферическое преобразование функции* f, *определенное равенством* (2.3), *то имеет место формула обращения* (2.16), *выражающая* f *через* $\mathcal{R} f$.

В этой формуле интеграл берется по множеству орисфер $h(\xi, \xi g)$, т. е. по множеству орисфер, проходящих через точку $g \in G$. Входящий в нее оператор $L_\eta = \eta_1\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial \eta_2} + 1$ можно представить в следующем виде:

$$L_\eta\varphi(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda\varphi(\xi, \lambda\eta))\,\Big|_{\lambda=1}.$$

Напомним, что преобразование $h(\xi, \eta) \mapsto h(\xi_0, \lambda\eta)$ есть введенное в п. 1.3 преобразование левого сдвига, переводящее каждую орисферу в орисферу, ей параллельную. Таким образом, L_η есть оператор инфинитезимального левого сдвига.

Замечание. Из условия однородности (2.4) для $\mathcal{R} f$ следует, что $(L_\xi + L_\eta)\mathcal{R} f = (\overline{L_\xi} + \overline{L_\eta})\mathcal{R} f = 0$, где $L_\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1$. Поэтому в формуле обращения (2.16) операторы L_η и $\overline{L_\eta}$ можно заменить соответственно на $L = \frac{1}{2}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2}\right)$ и $\overline{L}$.

2.5. Формула обращения для орисферического преобразования в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$. Из формулы обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}$ на G можно как следствие получить формулу обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}^h$ в пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$ (определение $\mathcal{R}^h$ см. в главе III). Именно, так как $\mathcal{L}^3 = K \setminus G$, где $K = SU(2)$, то любую функцию f на $\mathcal{L}^3$ можно поднять на G, т.е. рассматривать ее как функцию $\widetilde{f}$ на G, удовлетворяющую условию

$$\widetilde{f}(kg) = \widetilde{f}(g) \text{ для любого } k \in K.$$

Ввиду компактности K образ $\widetilde{f}$ финитной функции f на $\mathcal{L}^3$ является финитной функцией на G; таким образом, пространство финитных функций на $\mathcal{L}^3$ вкладывается в пространство финитных функций на G. Далее, нетрудно убедиться, что при отображении $G \to K \setminus G = \mathcal{L}^3$ орисферы на G переходят в орисферы на $\mathcal{L}^3$ и интегралы $\mathcal{R}\widetilde{f}$ функции $\widetilde{f}$ по орисферам на G равны (при подходящем согласовании мер на орисферах) интегралам $\mathcal{R}^h f$ функции f по образам этих орисфер. В результате, чтобы получить формулу обращения для $\mathcal{R}^h$, нужно только найти явное выражение $\mathcal{R}\widetilde{f}$ через $\mathcal{R}^h f$ и подставить это выражение в формулу обращения (2.16) для $\mathcal{R}$.

Сформулируем несколько утверждений, которые легко следуют из определения орисфер и орисферических преобразований на G и $\mathcal{L}^3$.

1. При отображении $G \to K \setminus G = \mathcal{L}^3$ любая орисфера $h(\xi, \eta)$ на G переходит в орисферу $h(\eta)$ на $\mathcal{L}^3$.

2. $\mathcal{R}\widetilde{f}(\xi, \eta)$ как функция от ξ зависит только от $|\xi| = (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}$.

3. Функции $\mathcal{R}\widetilde{f}$ и $\mathcal{R} f$ связаны соотношением

$$\mathcal{R}\widetilde{f}(-1, 0; \eta_1, \eta_2) = \mathcal{R}^h f(\eta_1, \eta_2)$$

Из 2), 3) и из условия однородности для $\mathcal{R} f$ получаем искомое выражение $\mathcal{R}\widetilde{f}$ через $\mathcal{R}^h f$:

$$\mathcal{R}\widetilde{f}(\xi, \eta) = |\xi|^{-4}\mathcal{R}^h\left(\frac{\eta}{|\xi|}\right). \tag{2.17}$$

Подставив это выражение в формулу обращения (2.16) для орисферического преобразования $\mathcal{R}$ на G при $g = e$, мы получим после элементарных упрощений следующую формулу обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R}^h$ на $\mathcal{L}^3$:

$$f(w_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\gamma_\eta} L_\eta \overline{L_\eta} \mathcal{R}^h f(\eta) \omega(\eta) \overline{\omega(\eta)}, \tag{2.18}$$

где $w_0 \in \mathcal{L}^3$ — точка, отвечающая единичному классу смежности в $K \setminus G$. Выражение для f в произвольной точке $w \in \mathcal{L}^3$ получается из (2.18) групповым сдвигом. Полученная формула обращения совпадает с формулой обращения (6.17) из главы III.

2.6. Интегральное преобразование, связанное с параболоидами на G. Напомним (см. п. 1.6), что каждый параболоид на G получается как сечение G гиперплоскостью в $\mathbb{R}^4$ следующего вида:

$$(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma)\zeta_2 - (\xi_1\beta + \xi_2\delta)\zeta_1 = p, \quad p \neq 0$$

или, в матричной записи,

$$\xi g \zeta^\perp = p, \quad p \neq 0, \tag{2.19}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ — ненулевые векторы в $\mathbb{C}^2$ и $\zeta^\perp = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ -\zeta_1 \end{pmatrix}$. Таким образом, любой параболоид на G задается парой векторов $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ и числом $p \neq 0$ и определяется как множество матриц $g \in G$, удовлетворяющих условию (2.19). Мы обозначили этот параболоид через $\widetilde{h}(\xi, \zeta, p)$. Очевидно, что $\widetilde{h}(\lambda_1\xi, \lambda_2\zeta, \lambda_1\lambda_2 p) = \widetilde{h}(\xi, \zeta, p)$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Определение. Определим интеграл финитной C^∞ функции f на G по параболоиду $\widetilde{h}(\xi, \zeta, p)$ равенством

$$\mathcal{R}^p f(\xi, \zeta, p) = \int\limits_G f(g)\, \delta(\xi g \zeta^\perp - p)\, d\mu(g), \tag{2.20}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта функция на $\mathbb{C}$.

Очевидно, что функция $\mathcal{R}^p f$ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$\mathcal{R}^p f(\lambda_1\xi, \lambda_2\zeta, \lambda_1\lambda_2 p) = |\lambda_1\lambda_2|^{-2} \mathcal{R}^p f(\xi, \zeta, p). \tag{2.21}$$

Таким образом, $\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)$ зависит не только от самого параболоида $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, но и от параметров ξ, ζ, p, которыми этот параболоид задается.

Существует простая связь между интегральным преобразованием $\mathcal{R}^p$ и орисферическим преобразованием $\mathcal{R}$. Именно, переход от функции $f(g)$ к $\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)$ можно осуществить в два этапа. Сначала мы интегрируем f по орисферам $h(\xi,\eta)$, где ξ фиксировано; в результате получаем $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$. Затем мы интегрируем $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$ по множеству орисфер, на которые расслаивается параболоид $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$, т. е. множеству орисфер $h(\xi,\eta)$, где ξ фиксировано, а η удовлетворяет соотношению $\eta\zeta^\perp = p$. Запишем результат в виде явной формулы.

Теорема 2.3. *Преобразование $\mathcal{R}^p f$ следующим образом выражается через орисферическое преобразование $\mathcal{R} f$:*

$$\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R} f(\xi,\eta)\,\delta(\eta\zeta^\perp - p)\,d\eta\,d\overline{\eta}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) следует, что при любом фиксированном ξ $\mathcal{R}^p f$ является двумерным преобразованием Радона функции $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$ рассматриваемой как функция от η. Таким образом, оператор $\mathcal{R}^p$ является композицией оператора $\mathcal{R}$ орисферического преобразования и двумерного преобразования Радона на $\mathbb{C}^2$.

Поясним связь $\mathcal{R}^p$ с преобразованием Радона. Мы рассматриваем семейство H_ξ орисфер $h(\xi,\eta)$ с фиксированным ξ, оно состоит из всех орисфер, параллельных фиксированному двумерному пространству (1.5) на поверхности асимптотического конуса K. Отображение $h(\xi,\eta) \mapsto \eta$ задает изоморфизм $H_\xi \to \mathbb{C}^2 \setminus 0$. На любом параболоиде $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$ одно из семейств прямолинейных образующих принадлежит H_ξ и при изоморфизме $H_\xi \to \mathbb{C}^2 \setminus 0$ оно переходит в прямую на $\mathbb{C}^2$. Таким образом, в силу этого изоморфизма интегрирование функции $\mathcal{R} f(\xi,\eta)$ по множеству прямолинейных образующих параболоида $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$ можно интерпретировать как интегрирование функции на $\mathbb{C}^2$ по прямой в $\mathbb{C}^2$.

Из (2.22) на основании формулы обращения для двумерного преобразования Радона в $\mathbb{C}^2$ (см. § 9 главы I) получаем следующее выражение $\mathcal{R} f$ через $\mathcal{R}^p f$:

$$\mathcal{R} f(\xi,\eta) = -\pi^{-2}\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \frac{\partial^2}{\partial p\,\partial\overline{p}}\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\,\Big|_{p=\eta\zeta^\perp} \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} =$$

$$= -\pi^2\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\,\delta^{(1,1)}(\eta\zeta^\perp - p)\,dp\,d\overline{p}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}, \tag{2.23}$$

где $\delta^{(1,1)}(s) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial \overline{s}}\delta(s)$.

Замечание. В формуле (2.22) функция $\mathcal{R} f$ усредняется по одному из семейств орисфер на параболоиде $\widetilde{h}(\xi,\zeta,p)$. Усредняя ее по другому семейству орисфер, получаем соотношение, аналогичное (2.22):

$$\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R} f(\eta,\zeta)\,\delta(\xi\eta^{\perp} - p)\,d\eta\,d\overline{\eta}. \tag{2.24}$$

Отсюда по формуле обращения для преобразования Радона в $\mathbb{C}^2$ следует:

$$\mathcal{R} f(\xi,\eta) = -\pi^{-2}\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} \mathcal{R}^p f(\zeta,\eta,p)\Big|_{p=\xi\zeta^{\perp}} \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}.$$

Найдем теперь формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^p$. Так как $\mathcal{R}^p$ есть композиция орисферического преобразования $\mathcal{R}$ и двумерного преобразования Радона, то формула обращения для $\mathcal{R}^p$ получается как композиция формул обращения для этих двух преобразований. Подставив (2.23) в формулу обращения (2.16) для $\mathcal{R}$, получаем:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^5}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \times$$
$$\times \iiint\limits_{\gamma_\xi \gamma_\xi \mathbb{C}} \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} L_\eta \overline{L_\eta} \delta(\eta\zeta^{\perp} - p)\Big|_{\eta=\xi g} dp\,d\overline{p}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}.$$

Отсюда после элементарных упрощений получаем:

Теорема 2.4. *Функция f на G выражается через интегральное преобразование $\mathcal{R}^p f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \iint\limits_{\gamma_\zeta \gamma_\xi} \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} \left(|p|^2 \frac{\partial^2}{\partial p \partial \overline{p}} \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p)\right)\Bigg|_{p = \xi g \zeta^{\perp}} \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}. \tag{2.25}$$

Примечание. Интегральное преобразование $\mathcal{R}^p$ функций на G индуцирует интегральное преобразование функций на пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$, Именно, при проектировании G на пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3 = SU(2)\setminus G$ каждый параболоид $\widetilde{h}(\xi,\zeta,1)$ (являющийся многообразием вещественной размерности 4) отображается на область $\mathcal{L}_\zeta \subset \mathcal{L}^3$, внешнюю к орисфере пространства Лобачевского, заданной уравнением $\frac{|w\zeta_2-\zeta_1|^2}{z} = 1$. Интегральное преобразование $\mathcal{R}^p$ на G переходит в интегральное преобразование функций на $\mathcal{L}^3$, заданное следующим равенством:

$$\widetilde{\mathcal{R}}^h f(\zeta_1,\zeta_2) = \int\limits_{\mathcal{L}_\zeta} \left(\frac{|w\zeta_2-\zeta_1|^2}{z}\right)^{-1} f(w)\frac{dx\,dy\,dz}{z^3},$$

где $w = x + yi + zj$ (см. главу III). Формула обращения для $\widetilde{\mathcal{R}}^h$ легко следует из формулы обращения для $\mathcal{R}^p$.

Добавление. Замечание об орисферическом преобразовании на группе $SL(2,\mathbb{R})$. Определенные в этом параграфе интегральные преобразования $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_0$ без изменений переносятся на вещественный случай. Однако здесь, в отличие от комплексного случая, отображения $f \mapsto \mathcal{R} f$ и $f \mapsto \mathcal{R}_0 f$ имеют ненулевое ядро, а потому функция f не может быть восстановлена по своему образу. В этом достаточно убедиться для случая преобразования $\mathcal{R}_0$.

В вещественном случае оператор $\mathcal{R}_0$ относит функциям $f(\alpha,\beta,\delta)$ на $\mathbb{R}^3$ их интегралы по прямым в $\mathbb{R}^3$, пересекающим гиперболу $\beta = 0$, $\alpha\delta = 1$:

$$\mathcal{R}_0 f(x_1, x_2\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_2 t + \lambda^{-1}, t, -x_1 t + \lambda)\,dt.$$

Повторим для вещественного случая те рассуждения, которыми в п. 2.3 была получена формула обращения. Перейдем на $\mathbb{R}^3$ к новым координатам $p_1 = -\frac{\delta}{\beta}$, $p_2 = \frac{\alpha}{\beta}$, $p_3 = \frac{1}{\beta}$ и положим $f(\alpha,\beta,\delta) = |p_3|^2 f_1(p_1,p_2,p_3)$. Обозначим через $F(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ преобразование Фурье функции f_1 и через $\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda)$ преобразование Фурье функции $\varphi(x_1,x_2,\lambda) = \mathcal{R}_0 f(x_1,x_2,\lambda)$ по переменным x_1, x_2. Тогда, так же как и в комплексном случае, устанавливается следующее соотношение:

$$\widetilde{\varphi}(\xi_1,\xi_2,\lambda) = (2\pi)^{1/2} F(\xi_1,\xi_2,\lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2). \tag{2.26}$$

Спрашивается, можно ли восстановить функцию F по функции $\widetilde{\varphi}$. Ясно, что это невозможно: из условия $\xi_3 = \lambda\xi_1 - \lambda^{-1}\xi_2$, где λ вещественно, следует, что $\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 > 0$, и, значит, равенством (2.26) функция F определена только в области $\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 > 0$.

Заметим, что если f — финитная функция, равная нулю при малых значениях β, то она может быть восстановлена по функции $\mathcal{R}_0 f$. В самом деле, в этом случае определенная выше функция $f_1(p_1,p_2,p_3)$ также финитна, и, значит, ее преобразование Фурье F есть целая аналитическая функция. Поэтому функция F, будучи определена в области $\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 > 0$ на $\mathbb{R}^3$, определена тем самым и на всем $\mathbb{R}^3$.

§ 3. Гармонический анализ на группе $G = SL(2,\mathbb{C})$

В этом параграфе по той же схеме, что и в случае пространства Лобачевского (см. главу III), строится аналог преобразования Фурье на группе G. В основе конструкции лежат собственные функции операторов Лапласа на G, постоянные на орбитах подгруппы $Z\times Z\subset G\times G$, где Z – подгруппа матриц $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеется (см. § 1) два типа таких орбит — одномерные орбиты (орисферы) и двумерные (параболоиды). Соответственно можно рассматривать собственные функции операторов Лапласа, постоянные на орбитах первого или второго типа. В результате возникают две версии преобразования Фурье на G.

В этом параграфе мы подробно изложим первую версию преобразования Фурье, связанную с орисферами. Основной результат — разложение функции на G в аналог интеграла Фурье будет получен как следствие формулы обращения для орисферического преобразования из § 2. Второй вариант преобразования Фурье на G будет рассмотрен в более краткой форме в следующем параграфе.

3.1. Операторы Лапласа — Бельтрами на группе G. Начнем с того, что предъявим два дифференциальных оператора 2-го порядка Δ и $\overline{\Delta}$ на G, перестановочных между собой и с действием группы $G\times G$.

В пространстве всех матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, т.е. в $\mathbb{C}^4$, мы имеем такие операторы, а именно:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\delta} - \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\gamma},\ \overline{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial\overline{\alpha}\partial\overline{\delta}} - \frac{\partial^2}{\partial\overline{\beta}\partial\overline{\gamma}}. \tag{3.1}$$

Чтобы определить их на гиперболоиде G: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, мы вводим на $\mathbb{C}$ обобщенные сферические координаты $x = \rho y$, где $\rho\in\mathbb{C}$, $y\in G$, и рассматриваем наши операторы только на функциях, которые не зависят от ρ. Определенные так операторы Δ, $\overline{\Delta}$ назовем операторами Лапласа — Бельтрами на G. Приведем, опустив вычисления, выражения для операторов Δ, $\overline{\Delta}$ в координатах s, t, λ на G, которые определяются из разложения Гаусса

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения следует, что $\lambda = \alpha$, $s = \frac{\gamma}{\alpha}$, $t = \frac{\beta}{\alpha}$. Имеем:

$$\Delta = -\frac{1}{4}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + 1\right)^2 - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial s\partial t} + \frac{1}{4} \tag{3.2}$$

и аналогично для $\overline{\Delta}$.

3.2. Орисферические функции на G. Следуя схеме, изложенной в главе III для пространства Лобачевского, мы должны, прежде всего, ввести для $G \times G$ аналог подгруппы $Z \subset G$ матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В качестве такой подгруппы естественно рассматривать группу $Z \times Z$.

Найдем на G собственные функции операторов Δ, $\overline{\Delta}$, инвариантные относительно подгруппы $Z \times Z \subset G \times G$. Для этого заметим, что орбиты группы $Z \times Z$ в G это двумерные подмножества матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с фиксированным $\gamma \neq 0$ (параболоиды) и одномерные подмножества матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ с фиксированным α (орисферы). Отсюда следует, что обобщенные функции Φ на G, инвариантные относительно подгруппы $Z \times Z$, имеют вид:

$$\Phi(g) = u(\gamma) + \delta(\gamma)v(\alpha), \; g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где u, v — произвольные функции, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Нам нужно выяснить, какие из функций $u(\gamma)$ и $\delta(\gamma)v(\alpha)$ являются собственными функциями операторов Лапласа — Бельтрами. Проделав несложные вычисления, получаем

Предложение 3.1. *Следующие обобщенные функции на G являются собственными функциями операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$, инвариантными относительно подгруппы $Z \times Z \subset G \times G$:*

$$\Phi_\chi(g) = \delta(\gamma)\,\chi(\alpha), \tag{3.3}$$

$$\Psi_\chi(g) = \chi^{-1}(\gamma)\,|\gamma|^{-2}, \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{C}$, а χ — произвольный мультипликативный характер на $\mathbb{C}$, т. е. функция вида

$$\chi(t) = t^{n_1}\overline{t}^{n_2} = |t|^{2n_2}t^{n_1-n_2}, \; n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

При этом функции Φ_χ, $\Phi_{\chi^{-1}}$, Ψ_χ, $\Psi_{\chi^{-1}}$ принадлежат одному и тому же собственному подпространству операторов Δ, $\overline{\Delta}$, отвечающему собственным значениям $-\frac{1}{4}(n_1^2 - 1)$ и $-\frac{1}{4}(n_2^2 - 1)$.

Итак, мы имеем два типа функций — функции Φ_χ, сосредоточенные на двумерном подмногообразии в G, и функции Ψ_χ. Соответственно, существует две версии гармонического анализа на G: в одной мы исходим из функций Φ_χ, а в другой — из функций Ψ_χ. Здесь будет подробно изложена первая версия. Вторая версия будет рассмотрена в следующем параграфе.

Определение. Назовем обобщенные функции $\Phi_\chi(g)$, где χ — произвольный характер (3.5), зональными орисферическими функциями на G, а их сдвиги $\Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1})$, $g_1, g_2 \in G$ — просто орисферическими функциями на G.

Позже мы увидим, что орисферические функции $\Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1})$, где χ пробегает унитарные характеры $(\chi(t)\overline{\chi(t)} \equiv 1)$, образуют полное семейство в $L^2(G)$, т. е. по ним можно разложить любую функцию из $L^2(G)$.

В силу (3.3) зональные орисферические функции сосредоточены на цилиндрической поверхности $\gamma = 0$ в G, образованной орисферами вида δZ, $\delta \in D$, и постоянны на каждой из этих орисфер. Отсюда следует, что любая орисферическая функция $g \mapsto \Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1})$ сосредоточена на одной из цилиндрических поверхностей в G и постоянна на прямолинейных образующих этой поверхности.

Определение. Определим орисферические функции $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ на многообразии троек $g \in G$ и $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ следующим равенством:

$$\Phi_\chi(g,\xi,\eta) = \Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1}), \tag{3.6}$$

где $g_1, g_2 \in G$ — любые матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\xi = \xi_0 g_1,\ \eta = \xi_0 g_2, \text{ где } \xi_0 = (0,1). \tag{3.7}$$

От выбора таких матриц g_1, g_2 правая часть не зависит.

В частности, $\Phi_\chi(g,\xi_0,\xi_0) = \Phi_\chi(g)$.

Обобщенная функция $(g,\xi,\eta) \mapsto \Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ при любых фиксированных ξ, η сосредоточена на единственной цилиндрической поверхности в G, проходящей через орисферу $h(\xi,\eta)$, и постоянна на всех орисферах $h(\xi,\lambda\eta)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, образующих эту поверхность. При фиксированном $g \in G$ и $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 1$ она сводится к функции на многообразии орисфер H, как показывает следующая формула (3.9).

Предложение 3.2. *Орисферические функции $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ удовлетворяют соотношениям:*

$$\Phi_\chi(g_1 g g_2^{-1}, \xi, \eta) = \Phi_\chi(g; \xi g_1, \eta g_2) \tag{3.8}$$

для любых $g_1, g_2 \in G$;

$$\Phi_\chi(g; \lambda_1\xi, \lambda_2\eta) = \chi(\lambda_1^{-1}\lambda_2)\,|\lambda_1\lambda_2|^{-2}\,\Phi_\chi(g,\xi,\eta) \tag{3.9}$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Напишем явное выражение для орисферических функций.

Предложение 3.3. *Орисферические функции выражаются формулой*

$$\Phi_\chi(g,\xi,\eta) = \delta\big(\eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta)\big)\,\chi\left(\frac{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}{\xi_2}\right), \tag{3.10}$$

где $\delta(\cdot)$ *— дельта-функция на* $\mathbb{C}$.

В самом деле, в (3.6) и (3.7) можно положить $g_1 = \begin{pmatrix} \xi_2^{-1} & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} \eta_2^{-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$. Тогда имеем: $g_1 g g_2^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$, где $\alpha' = \xi_2^{-1}(-\eta_1\beta + \eta_2\alpha)$, $\gamma' = \eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta)$. Отсюда на основании (3.6) и (3.3) получаем

$$\Phi_\chi(g,\xi,\eta) = \delta(\gamma')\,\chi(\alpha'),$$

т.е. равенство (3.10).

Замечание. На цилиндрической поверхности $\gamma' = \eta_2(\xi_1\alpha + \xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta + \xi_2\delta) = 0$ имеем:

$$\frac{\xi_1\alpha + \xi_2\gamma}{\eta_1} = \frac{\xi_1\beta + \xi_2\delta}{\eta_2} = \frac{\xi_1}{\eta_1\delta - \eta_2\gamma} = \frac{\xi_2}{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}.$$

Поэтому в (3.10) можно заменить под знаком характера χ^{-1} отношение $\frac{\xi_2}{-\eta_1\beta + \eta_2\alpha}$ любым из этих отношений.

Предложение 3.4. *Обобщенная функция* $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ *выражается интегралом*

$$\Phi_\chi(g,\xi,\eta) = \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} \delta(\xi g - \lambda\eta)\,\chi^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,d\overline{\lambda}, \tag{3.11}$$

где $\delta(\cdot)$ *— дельта-функция на* $\mathbb{C}^2$.

В самом деле, достаточно доказать это равенство для зональной орисферической функции, т.е. при $\xi = \eta = (0,1)$. Но при этих значениях ξ и η правая часть равна

$$\frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} \delta(\gamma, \delta - \lambda)\,\chi^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,d\overline{\lambda} = \delta(\gamma)\,\chi^{-1}(\delta) = \delta(\gamma)\,\chi(\alpha) = \Phi_\chi(g,\xi,\eta).$$

3.3. Преобразование Фурье на G.

Определение. Определим преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ финитной C^∞ функции f на G следующим равенством:

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta,\chi) = \langle \Phi_\chi(\cdot,\xi,\eta), f\rangle = \int\limits_G \Phi_\chi(g,\xi,\eta)\, f(g)\, d\mu(g), \tag{3.12}$$

где $\Phi_\chi(g,\xi,\eta)$ — орисферические функции на G.

Используя явное выражение (3.10), (3.11) для орисферических функций, мы можем представить $\mathcal{F}f$ в следующей форме:

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta,\chi) = \\ = \int\limits_G \delta(\eta_2(\xi_1\alpha+\xi_2\gamma) - \eta_1(\xi_1\beta+\xi_2\delta))\,\chi\left(\frac{-\eta_1\beta+\eta_2\alpha}{\xi_2}\right) f(g)\, d\mu(g), \tag{3.13}$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, или

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta,\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_G\int\limits_{\mathbb{C}} \delta(\xi g - \lambda\eta)\,\chi^{-1}(\lambda)\, f(g)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}\, d\mu(g). \tag{3.14}$$

Подчеркнем, что интеграл (3.12) фактически двумерный: он берется по цилиндрической поверхности в G, на которой сосредоточена функция $\Phi_\chi(\,\cdot\,;\xi,\eta)$.

Из определения следует:

1. Функция $\mathcal{F}f$ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$\mathcal{F}f(\lambda_1\xi,\lambda_2\eta,\chi) = \chi^{-1}(\lambda_1)\,|\lambda_1|^{-2}\chi(\lambda_2)\,|\lambda_2|^{-2}\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi). \tag{3.15}$$

2. Оператор $\mathcal{F}$ перестановочен с действием группы $G\times G$ на G и на пространстве пар (ξ,η); именно,

$$\text{если } f_1(g) = f(g_1^{-1}gg_2), \text{ то } \mathcal{F}f_1(\xi,\eta;\chi) = \mathcal{F}f(\xi g_1,\eta g_2;\chi). \tag{3.16}$$

Установим еще одно важное свойство оператора $\mathcal{F}$. Фиксируем произвольный унитарный характер χ (т. е. $\chi\overline{\chi}\equiv 1$) и рассмотрим пространство функций $\varphi(\xi,\eta;\chi)$, удовлетворяющих условию однородности (3.15). Введем в этом пространстве структуру C^*-алгебры, положив:

$$\varphi^*(\xi,\eta;\chi) = \overline{\varphi(\eta,\xi;\chi)},$$

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi,\eta;\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\xi,\zeta;\chi)\,\varphi(\zeta,\eta;\chi)\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)},$$

где $\omega(\zeta) = \zeta_1\, d\zeta_2 - \zeta_2\, d\zeta_1$, а интеграл берется по произвольной поверхности γ_ζ в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0.

Предложение 3.5. *Отображение* $f \mapsto \mathcal{F} f(\cdot;\chi)$ *является гоморфизмом* C^**-алгебр, т.е.* $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2$, $(\mathcal{F} f)^* = \mathcal{F} f^*$, *где* $(f_1 * f_2)(g) = \int f_1(\widetilde{g})\, f_2(\widetilde{g}^{-1} g)\, d\mu(\widetilde{g})$ *и* $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$.

Доказательство. Равенство $(\mathcal{F} f)^* = \mathcal{F} f^*$ следует непосредственно из определения преобразования Фурье. Докажем первое равенство. В силу (3.16) имеем:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_1 * f_2)(\xi,\eta;\chi) &= \int\limits_G f_1(\widetilde{g})\, \mathcal{F} f_2(\xi\widetilde{g},\eta;\chi)\, d\mu(\widetilde{g}) = \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_G \int\limits_{\mathbb{C}^2} f_1(\widetilde{g})\, \mathcal{F} f_2(\zeta,\eta;\chi)\, \delta(\xi\widetilde{g} - \zeta)\, d\zeta\, d\overline{\zeta}\, d\mu(\widetilde{g}) = \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_G \int\limits_{\gamma_\zeta} \int\limits_{\mathbb{C}} f_1(\widetilde{g})\, \mathcal{F} f_2(\zeta,\eta;\chi)\, \delta(\xi\widetilde{g} - \lambda\zeta)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\, d\mu(\widetilde{g}),
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

где $d\zeta = d\zeta_1\, d\zeta_2$; последнее равенство получается переходом к “полярным” координатам по ζ: $\zeta = \lambda\zeta'$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta' \in \gamma_\zeta$. Так как

$$
\frac{i}{2} \int\limits_G \int\limits_{\mathbb{C}} f_1(g)\delta(\xi g - \lambda\zeta)\, \chi^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\overline{\lambda} d\mu(g) = \mathcal{F} f_1(\xi,\zeta;\chi),
$$

то из (3.17) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}(f_1 * f_2)(\xi,\eta;\chi) = \\
&\qquad = \frac{i}{2} \int\limits_{\gamma_\zeta} \mathcal{F} f_1(\xi,\zeta;\chi)\, \mathcal{F} f_2(\zeta,\eta;\chi)\, \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} = (\mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2)(\xi,\eta;\chi).
\end{aligned}
$$

Следствие.

$$
\mathcal{F}(f * f^*)(\xi,\eta;\chi) = \frac{i}{2} \int\limits_{\gamma_\zeta} \mathcal{F} f(\xi,\zeta;\chi)\, \overline{\mathcal{F} f(\eta,\zeta,\chi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}. \tag{3.18}
$$

3.4. Связь преобразования Фурье на G с орисферическим преобразованием.

Теорема 3.1. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ функции f связано с ее орисферическим преобразованием $\mathcal{R}f$ соотношением*

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{R}f(\xi,\lambda\eta)\,\chi^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,d\overline{\lambda}. \tag{3.19}$$

В самом деле, используя явное выражение (2.3)) для $\mathcal{R}f$ (см. с. 173), мы можем представить равенство (3.14) в виде (3.19).

Итак, чтобы перейти от функции f на G к ее преобразованию Фурье $\mathcal{F}f$, мы интегрируем сначала f по орисферам на G, т. е. переходим от f к ее орисферическому преобразованию $\mathcal{R}f$, а затем интегрируем функцию $\mathcal{R}f(\xi,\lambda\eta)\,\chi^{-1}(\lambda)$ по λ.

Замечание. Воспользовавшись условием однородности $\mathcal{R}f(\lambda\xi,\lambda\eta) = |\lambda|^{-4}\mathcal{R}f(\xi,\eta)$, где $\lambda \neq 0$ — любое число, равенство (3.19) можно преобразовать к виду:

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{R}f(\lambda\xi,\eta)\,\chi(\lambda)\,d\lambda\,d\overline{\lambda}. \tag{3.20}$$

Мы видим, что $\mathcal{F}f$ получается из $\mathcal{R}f$ при помощи комплексного преобразования Меллина. Так как $\chi(\lambda) = e^{i(\rho s + m\varphi)}$, где $s = \ln|\lambda|$, $\varphi = \arg\lambda$, это преобразование сводится к композиции преобразований Фурье на вещественной прямой и на окружности, а потому, применяя классические формулы обращения для преобразования Фурье на $\mathbb{R}$ и на окружности S, мы можем, обратно, выразить $\mathcal{R}f$ через $\mathcal{F}f$. Именно, из (3.19) вытекает

Следствие. *Орисферическое преобразование $\mathcal{R}f$ функции f выражается через преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ равенством*

$$\mathcal{R}f(\xi,\eta) = (2\pi)^{-2}\int\limits_{X} \mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,d\chi, \tag{3.21}$$

где интеграл берется по множеству X унитарных характеров $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\overline{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$, $\rho\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}$; интегрирование по X нужно понимать как интегрирование по ρ и суммирование по m.

3.5. Соотношение симметрии для преобразования Фурье. В § 2 было установлено соотношение симметрии для орисферического преобразования $\mathcal{R} f$, см. формулу (2.10). Подставив в это соотношение выражение (3.21) $\mathcal{R} f$ через $\mathcal{F} f$, мы получим следующее соотношение для функции $\mathcal{F} f$:

$$\int\limits_X \int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi, \lambda\xi g; \chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,d\chi = \int\limits_X \int\limits_{\gamma_\eta} \mathcal{F} f(\lambda\eta g^{-1}, \eta; \chi)\,\omega(\eta)\,\overline{\omega(\eta)}\,d\chi$$

для любых $g \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Приведем это равенство к более простому виду. Заменив в правой части η на ξg, χ на χ^{-1} и воспользовавшись условием однородности (3.15) для $\mathcal{F} f$, мы получим:

$$\int\limits_X Z(g, \chi)\,\chi(\lambda)\,|\lambda|^{-2}\,d\chi = \int\limits_X = Z(g, \chi^{-1})\,\chi(\lambda)\,|\lambda|^{-2}\,d\chi,$$

где

$$Z(g, \chi) = \int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi, \xi g; \chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}. \tag{3.22}$$

Так как это равенство справедливо для любого $\lambda \neq 0$, то из него следует.

Предложение 3.6. *Функция $Z(g, \chi)$, заданная равенством* (3.22), *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$Z(g, \chi) = Z(g, \chi^{-1}) \tag{3.23}$$

для любых $g \in G$ и $\chi \in X$.

3.6. Формула обращения для преобразования Фурье. Полнота семейства орисферических функций $\Phi_\chi(g; \xi, \eta)$, где χ пробегает унитарные характеры, означает, что должна существовать формула обращения для преобразования Фурье. Такая формула действительно существует, и она получается непосредственно из формулы обращения для орисферического преобразования $\mathcal{R} f$, см. формулу (2.16). Именно, подставив в эту формулу выражение $\mathcal{R} f$ через $\mathcal{F} f$, получаем:

$$f(g) = (2\pi)^{-5} \frac{i}{2} \int\limits_X \int\limits_{\gamma_\xi} L_\eta \overline{L_\eta}\, \mathcal{F} f(\xi, \eta; \chi)|_{\eta = \xi g} \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,d\chi =$$
$$= -2^{-7}\pi^{-5} \frac{i}{2} \int\limits_X \int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,\mathcal{F} f(\xi, \xi g; \chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,d\chi, \tag{3.24}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ для $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$; последнее равенство следует из условия однородности (3.15) для $\mathcal{F}f$, так как в силу этого условия $L_\eta \overline{L_\eta}\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi) = -\frac{1}{4}(\rho^2+m^2)\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)$.

В силу соотношения симметрии (3.23) для $\mathcal{F}f$ интеграл по X можно заменить удвоенным интегралом по произвольному фиксированному подмножеству $X_0 \subset X$, содержащему из почти каждой пары характеров χ и χ^{-1} в точности по одному представителю. В результате получаем

Теорема 3.2. *Любая финитная C^∞ функция f на G выражается через свое преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(g) = -2^{-6}\pi^{-5}\frac{i}{2}\int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,\mathcal{F}f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\,d\chi, \tag{3.25}$$

где $c(\chi)=\rho^2+m^2$ при $\chi(t)=t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$, $X_0 \subset X$ — любое фиксированное подмножество, содержащее из почти каждой пары характеров χ и χ^{-1} в точности по одному представителю.

Напомним, что как и всюду в § 2 и 3, γ_ξ — поверхность в $\mathbb{C}\setminus 0$, пересекающая по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0; в силу условий однородности для $\mathcal{F}f$ от ее выбора интеграл не зависит.

Формуле обращения (3.25) можно придать вид, аналогичный формуле (3.12), выражающей $\mathcal{F}f$ через f. Именно,

$$\begin{aligned} f(g) = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 &\times \\ \times \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} & c(\chi)\Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi = \\ = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 & \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi}\delta(\eta_2(\xi_1\alpha+\xi_2\gamma)-\eta_1(\xi_1\beta+\xi_2\delta)) \times \\ & \times \chi\left(\frac{\xi_1\alpha+\xi_2\gamma}{\eta_1}\right)\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,\omega(\xi)\,\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Для этого достаточно убедиться, что

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} \Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)\,\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}. \quad (3.27)$$

Имеем:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\xi g;\chi)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int\limits_{\gamma_\xi}\int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\,\delta(\xi g-\eta)\,d\eta\,d\overline{\eta}\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int\limits_{\gamma_\xi}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)\,\delta(\xi g-\lambda\eta)\,\chi(\lambda)\,d\lambda\,d\overline{\lambda}\,\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)};$$

последнее равенство получается переходом к “полярным” координатам $\eta=\lambda\eta'$, где $\lambda\in\mathbb{C}$, $\eta'\in\gamma_\eta$. Интегрируя по λ, получаем в силу (3.11) равенство (3.27).

3.7. Аналог формулы Планшереля. Как следствие из формулы обращения для преобразования Фурье получаем

Теорема 3.3. *Для любой финитной C^∞ функции f на G имеет место равенство*:

$$\int\limits_G |f(g)|^2\,d\mu(g) =$$

$$= -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,|\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi \quad (3.28)$$

(*обозначения те же, что в п.* 3.6).

Для доказательства подставим в интеграл $\int\limits_G f(g)\overline{f(g)}\,d\mu(g)$ вместо множителя $\overline{f(g)}$ его выражение через $\mathcal{F} f$ согласно формуле обращения

(3.26). Так как $\overline{\Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)} = \Phi_\chi(g;\xi,\eta)$, мы получим:

$$\int\limits_G |f(g)|^2\,d\mu(g) = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$

$$\times \int\limits_G\int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,f(g)\Phi_\chi(g;\xi,\eta)\overline{\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi\,d\mu(g) =$$

$$= -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\overline{\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi.$$

Обозначим через H_{X_0} гильбертово пространство функций $\varphi(\xi,\eta;\chi)$, где $\xi,\eta\in\mathbb{C}^2\setminus 0$, $\chi\in X_0$, удовлетворяющих тем же условиям однородности (3.15), что и $\mathcal{F}f$, с нормой

$$\|\varphi\|^2 = -2^{-6}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,|\varphi(\xi,\eta;\chi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi.$$

В силу формулы Планшереля оператор $\mathcal{F}$, определенный первоначально только на финитных C^∞ функциях, продолжается на все пространство $L^2(G)$ и задает изометрическое отображение

$$\mathcal{F}\colon\ L^2(G)\to H_{X_0}$$

Можно доказать, что это отображение на самом деле является изоморфизмом пространств.

Замечание. Можно определить $H_{X_0} = H$ и не фиксируя $X_0\subset X$, как пространство функций на всем множестве X унитарных характеров с нормой

$$\|\varphi\|^2 = -2^{-7}\pi^{-5}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{X}\int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} c(\chi)\,|\varphi(\xi,\eta;\chi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}\,d\chi,$$

удовлетворяющих дополнительно условию симметрии (3.23).

3.8. Связь преобразования Фурье на G с представлениями группы $G\times G$. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(G)$. В нем естественно определено унитарное представление группы $G\times G$ операторами сдвига:

$$(T(g_1,g_2)f)(g) = f(g_1^{-1}gg_2).$$

Задача гармонического анализа на G состоит в том, чтобы разложить это представление на неприводимые. Сначала построим неприводимые представления группы $G \times G$. Возьмем собственное подпространство операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$, порожденное орисферическими функциями $\Phi_{\chi^{-1}}(\,\cdot\,;\xi,\eta)$, где $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$. Элементы этого пространства можно представить в виде:

$$f_\chi(g) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} u_\chi(\xi,\eta)\Phi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\eta)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}, \tag{3.29}$$

где $u_\chi(\xi,\eta)$ удовлетворяет условию однородности:

$$u_\chi(\lambda_1\xi,\lambda_2\eta) = \chi^{-1}(\lambda_1)\,|\lambda_1|^{-2}\chi(\lambda_2)\,|\lambda_2|^{-2}u_\chi(\xi,\eta)$$

для любых $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Интегрирование ведется по произвольным поверхностям γ_η, γ_ξ в $\mathbb{C} \setminus 0$, пересекающим по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0; от их выбора интеграл не зависит.

Введем в пространстве функций f_χ норму

$$\|f_\chi\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} |u_\chi(\xi,\eta)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)} \tag{3.30}$$

и рассмотрим пространство L^2 по этой норме, которое обозначим через $\mathcal{H}_\chi$. Сдвиги на G индуцируют в $\mathcal{H}_\chi$ унитарное представление T_χ группы $G \times G$, имеющее в функциях $u_\chi(\xi,\eta)$ следующий вид:

$$(T_\chi(g_1,g_2)u_\chi)(\xi,\eta) = u_\chi(\xi g_1,\eta g_2).$$

Очевидно, что T_χ является тензорным произведением унитарных представлений отдельных сомножителей в $G \times G$. Именно, имеем:

$$\mathcal{H}_\chi = H_{\chi^{-1}} \otimes H_\chi,$$
$$T_\chi(g_1,g_2) = \tau_{\chi^{-1}}(g_1) \otimes \tau_\chi(g_2),$$

где H_χ — гильбертово пространство функций $\varphi(\xi)$ на $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности

$$\varphi(\lambda\xi)\,\chi(\lambda)\,|\lambda|^{-2}\varphi(\xi), \quad \lambda \neq 0,$$

с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} |\varphi(\xi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)};$$

$\tau_{\chi^{-1}}$, τ_χ — операторы представлений группы G в пространствах $H_{\chi^{-1}}$, H_χ соответственно:

$$(\tau_\chi(g)\varphi)(\xi) = \varphi(\xi g). \tag{3.31}$$

Из теории представлений группы $G = SL(2,\mathbb{C})$ известно[1], что представления τ_χ неприводимы и два представления τ_{χ_1}, τ_{χ_2}, $\chi_1 \neq \chi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi_2 = \chi_1^{-1}$. Отсюда следует, что представления T_χ группы $G \times G$ неприводимы и представления T_{χ_1}, T_{χ_2}, $\chi_1 \neq \chi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi_2 = \chi_1^{-1}$.

Мы хотим разложить функции $f \in L^2(G)$ по функциям $f_\chi \in \mathcal{H}_\chi$. Для этого строим оператор $P_\chi : L^2(G) \to \mathcal{H}_\chi$

$$P_\chi f = f_\chi,$$

где f_χ задается равенством (3.29), в котором

$$u_\chi(\xi,\eta) = \mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi)$$

Очевидно, что этот оператор перестановочен с действием $G \times G$ в пространствах $L^2(G)$ и $\mathcal{H}_X$. Нетрудно далее убедиться, что $P_\chi \neq 0$ для любого χ. Из формулы обращения (3.26) и формулы Планшереля (3.28) для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ непосредственно следует

Теорема 3.4. *Функции $f \in L^2(G)$ разлагаются по функциям $f_\chi = P_\chi f$, а именно, имеют место следующие равенства:*

$$f = -2^{-6}\pi^{-5} \int\limits_{X_0} c(\chi)\, f_\chi \, d\chi, \tag{3.32}$$

$$\int\limits_G |f(g)|^2 \, d\mu(g) = -2^{-6}\pi^{-5} \int\limits_{X_0} c(\chi) \|f_\chi\|^2 \, d\chi, \tag{3.33}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ для $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}} \bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$; интегрирование ведется по произвольному фиксированному подмножеству характеров $X_0 \subset X$, которое содержит из почти каждой пары характеров χ, χ^{-1} точно по одному представителю.

Следствие. *Представление T группы $G \times G$ в пространстве $L^2(G)$ имеет однократный спектр, т. е. оно разлагается на попарно неэквивалентные неприводимые представления.*

[1] См., например: Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып. 5.

Отметим, что однократность спектра представления T (т. е. то, что в (3.32), (3.33) интегрирование ведется только по X_0, а не по всему множеству характеров X) является следствием соотношения симметрии для преобразования Фурье $\mathcal{F}$.

Замечание. Однократность спектра — обычный факт, наблюдаемый при разложении представлений, связанных с симметрическими пространствами (см. главу III, где рассмотрены представления, связанные с плоскостью и пространством Лобачевского).

3.9. Связь с представлениями группы G. Обсудим полученные результаты с точки зрения теории представлений группы G. Рассмотрим унитарное представление группы G в пространстве $L^2(G)$ операторами правого сдвига:

$$(\tau(g_0)\varphi)(g) = \varphi(gg_0)$$

(так называемое регулярное представление). Его проекция $\widetilde{\tau}_\chi$ на пространство $\mathcal{H}_\chi = H_{\chi^{-1}} \otimes H_\chi$ есть тензорное произведение

$$\widetilde{\tau}_\chi = I \otimes \tau_\chi,$$

где I — единичное представление в $H_{\chi^{-1}}$, а τ_χ — неприводимое унитарное представление в H_χ, заданное равенством (3.31). Отсюда следует, что $\widetilde{\tau}_\chi$ кратно неприводимому унитарному представлению τ_χ группы G. Таким образом, равенства (3.32) и (3.33) задают разложение регулярного представления группы G на попарно дизъюнктные представления, кратные неприводимым представлениям.

В терминах представлений группы G преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ имеет следующий простой смысл. Рассмотрим для каждого $\chi \in X$ неприводимое представление τ_χ группы G в пространстве H_χ. Отнесем каждой финитной C^∞ функции f на G следующий оператор в пространстве H_χ:

$$\widehat{\tau}_\chi(f) = \int_G f(g)\tau_\chi(g)\, d\mu(g). \tag{3.34}$$

Этот оператор действует на функции $\varphi \in H_\chi$ так:

$$(\widehat{\tau}_\chi(f)\varphi)(\xi) = \int_G f(g)\,\varphi(\xi g)\, d\mu(g). \tag{3.35}$$

Предложение 3.7. *Ядром оператора $\widehat{\tau}_\chi(f)$ является (в однородных координатах ξ, η) функция $\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi^{-1})$, т. е.*

$$(\widehat{\tau}_\chi(f)\varphi)(\xi) = \frac{i}{2}\int_{\gamma_\eta} \mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi^{-1})\,\varphi(\eta)\,\omega(\eta,\overline{\omega(\eta)}). \tag{3.36}$$

В самом деле, разобьем интегрирование по G в (3.35) на два этапа: сначала по орисферам $\xi g = \eta$ — это дает орисферическое преобразование $\mathcal{R} f(\xi,\eta)\,\varphi(\eta)$, а затем по η. Мы получим:

$$(\widehat{\tau_\chi}(f)\varphi)(\xi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R} f(\xi,\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta\,d\overline{\eta}, \quad d\eta = d\eta_1 d\eta_2.$$

Перейдем здесь к "полярным" координатам $\eta = \lambda\eta'$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta' \in \gamma_\eta$. Так как $\varphi(\lambda\eta) = \chi(\lambda)|\lambda|^{-2}\varphi(\eta)$, $d\eta = \lambda\,d\lambda\omega(\eta)$, то после интегрирования по λ получаем (3.36).

Следствие. *Оператор $\widehat{\tau_\chi}(f)$ имеет след, равный*

$$\operatorname{Tr}\widehat{\tau_\chi}(f) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\xi;\chi^{-1})\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}. \tag{3.37}$$

Опираясь на полученный результат, мы можем сосчитать след унитарного оператора $\tau_\chi(g)$. Разумеется, этот оператор не имеет следа в обычном смысле. Однако естественно определить $\operatorname{Tr}\tau_\chi(g)$ как обобщенную функцию в пространстве основных функций на G:

$$\langle \operatorname{Tr}\tau_\chi(\cdot), f\rangle = \operatorname{Tr}\widehat{\tau_\chi}(f).$$

Предложение 3.8.

$$\operatorname{Tr}\tau_\chi(g) = \frac{\chi(\lambda_g^{(1)}) + \chi(\lambda_g^{(2)})}{|\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)}|}, \tag{3.38}$$

где $\lambda_g^{(1)}$, $\lambda_g^{(2)}$ — собственные значения матрицы g.

Доказательство. Согласно определению $\mathcal{F} f$, имеем:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\xi,\chi^{-1})\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)} =$$

$$= \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi}\int\limits_{G} \delta(\xi_2(\xi_1\alpha+\xi_2\gamma)-\xi_1(\xi_1\beta+\xi_2\delta))\,\chi\left(\frac{\xi_1\beta+\xi_2\delta}{\xi_2}\right) f(g)\,d\mu(g)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}.$$

Отсюда следует, если принять в качестве γ_ξ прямую $\xi_1 = t$, $\xi_2 = 1$:

$$\operatorname{Tr}\tau_\chi(g) = \frac{i}{2}\int \delta(t\alpha + \gamma - t(t\beta + \delta))\,\chi(t\beta + \delta)\,dt\,d\overline{t} =$$

$$= \frac{i}{2}\int \delta\left((s - \lambda_g^{(1)})(s - \lambda_g^{(2)})\right)\chi(s)\,ds\,d\overline{s}. \tag{3.39}$$

(последнее равенство получается заменой переменной $t\beta + \delta = s$). Формула (3.38) следует непосредственно из (3.39).

Опираясь на то, что $\mathcal{F} f(\xi,\eta;\chi^{-1})$ есть ядро оператора $\widehat{T}_\chi(f)$, мы можем придать другой вид формуле Планшереля. Именно, рассмотрим оператор $\widehat{T}_\chi(f)\widehat{T}_\chi^{\,*}(f) = \widehat{T}_\chi(f * f^*)$, где $\widehat{T}_\chi^*(f)$ — оператор, сопряженный $\widehat{T}_\chi(f)$. Его ядро есть, см. (3.18),

$$\varphi(\xi,\eta;\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\xi} \mathcal{F} f(\xi,\zeta;\chi)\,\mathcal{F} f(\eta,\zeta,\chi)\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Tr}(\widehat{T}_\chi(f)\widehat{T}_\chi^*(f)) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\eta}\int\limits_{\gamma_\xi} |\mathcal{F} f(\xi,\zeta;\chi)|^2 \omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}.$$

В результате формула Планшереля (3.28) может быть представлена в виде

$$\int |f(g)|^2\,d\mu(g) = 2^{-6}\pi^{-5}\int\limits_{X_0} c(\chi)\operatorname{Tr}(\widehat{T}_\chi(f)\widehat{T}_\chi^*(f))\,d\chi. \tag{3.40}$$

Примечание. Разложение (3.25) имеет смысл не только для основных, но и для обобщенных функций на G. Заметим, что дельта-функцию $\delta(g)$ на G естественно рассматривать как характер регулярного представления. Поэтому формулу обращения (3.25) для $\delta(g)$ можно представить в виде:

$$\delta(g) = 2^{-6}\pi^{-5}\int\limits_{X_0} c(\chi)\operatorname{Tr} T_\chi(g)\,d\chi. \tag{3.41}$$

§ 4. Другая версия преобразования Фурье на $G = SL(2,\mathbb{C})$

В § 3 построены проекции функций на G на собственные подпространства операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$. Проектирование осуществлялось там, исходя из зональных орисферических функций $\Phi_\chi(g) = \delta(\gamma)\,\chi(\alpha)$. Но можно осуществить проектирование иначе, исходя из зональных функций Ψ_χ,

$$\Psi_\chi(g) = \chi^{-1}(\gamma)\,|\gamma|^{-2}, \text{ где } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

(см. п. 3.2). При этом возникает другая версия преобразования Фурье на G, краткому изложению которой посвящен данный параграф.

4.1. Функции $\Psi_\chi(g;\xi,\zeta)$.. Определим аналоги функций $\Phi_\chi(g;\xi,\eta)$ из § 3 равенством:

$$\Psi_\chi(g_1 g g_2^{-1}) = \Psi_\chi(g;\xi,\zeta), \tag{4.2}$$

где $\xi,\zeta \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ определяются из соотношений

$$\xi = \xi_0 g_1,\ \zeta = \zeta_0 g_2,\ \text{где } \xi_0 = \zeta_0 = (0,1); \tag{4.3}$$

легко убедиться, что левая часть в (4.2) не зависит от выбора матриц $g_1, g_2 \in G$, удовлетворяющих условиям (4.3). В частности,

$$\Psi_\chi(g) = \Psi_\chi(g;\xi_0,\zeta_0).$$

Из (4.1), (4.2) получаем явное выражение для этих функций:

$$\Psi_\chi(g;\xi,\zeta) = \chi^{-1}(\xi g \zeta^\perp)\,|\xi g \zeta^\perp|^{-2}. \tag{4.4}$$

Отметим два свойства функций Ψ_χ (они непосредственно следуют из определения):

$$\Psi_\chi(g_1 g g_2^{-1};\xi,\zeta) = \Psi_\chi(g;\xi g_1,\zeta g_2) \tag{4.5}$$

для любых $g_1, g_2 \in G$;

$$\Psi_\chi(g;\lambda_1\xi,\lambda_2\zeta) = \chi^{-1}(\lambda_1\lambda_2)\,|\lambda_1\lambda_2|^{-2}\Psi_\chi(g;\xi,\zeta) \tag{4.6}$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Теорема 4.1. *Функции Ψ_χ связаны с орисферическими функциями Φ_χ из § 3 соотношениями:*

$$\Psi_\chi(g;\xi,\zeta) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\eta} \Phi_\chi(g;\xi,\eta)\,\chi^{-1}(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}; \tag{4.7}$$

$$\Phi_\chi(g;\xi,\eta) = (2\pi)^{-4}c(\chi)\,\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \Psi_\chi(g;\xi,\zeta)\,\chi(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}, \tag{4.8}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ при $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$. Интегрирование ведется по произвольным поверхностям γ_η и γ_ζ в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающим по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку 0.

Оба интеграла нужно понимать как интегралы от обобщенных функций. Мы не будем приводить их строгого определения и ограничимся формальным доказательством соотношений (4.7) и (4.8)

Заметим прежде всего, что эти равенства достаточно доказать для каких-либо фиксированных g и $\xi = \xi_0$. Приняв $g = e$, $\xi_0 = (1, 0)$, имеем:

$$\Phi_\chi(e, \xi_0, \eta) = \delta(\eta_2)\,\chi(\eta_1);$$
$$\Psi_\chi(e, \xi_0, \zeta) = \chi^{-1}(\zeta_2)\,|\zeta_2|^{-2}.$$

Если в (4.7), где $g = e$ и $\xi = \xi_0$, в качестве γ_η взять прямую $\eta_1 = 1$, то интеграл принимает вид:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} \delta(\eta_2)\,\chi^{-1}(\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)\,|\zeta_2 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\,d\eta_2\,d\overline{\eta}_2.$$

Очевидно, этот интеграл равен $\chi^{-1}(\zeta_2)\,|\zeta_2|^{-2}$, т.е. равен $\Psi_\chi(e, \xi_0, \zeta)$.

Аналогично, если в (4.8) , где $g = e$ и $\xi = \xi_0$, в качестве γ_ζ взять прямую $\zeta_2 = 1$, то интеграл принимает вид:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} \chi(\eta_1 - \eta_2\zeta_1)\,|\eta_1 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\,d\zeta_1\,d\overline{\zeta}_1 = \\ = \chi(\eta_1)\,\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} \chi(1 - \eta_2\zeta_1)\,|1 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\,d\zeta_1\,d\overline{\zeta}_1. \quad (4.9)$$

Очевидно, что обобщенная функция

$$\varphi(\eta_2) = \frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{C}} \chi(1 - \eta_2\zeta_1)\,|1 - \eta_2\zeta_1|^{-2}\,d\zeta_1\,d\overline{\zeta}_1$$

удовлетворяет условию однородности: $\varphi(\lambda\eta_2) = |\lambda|^{-2}\varphi(\eta_2)$. Отсюда следует, что $\varphi(\eta_2) = c\,\delta(\eta_2)$.

Вычисление множителя c мы оставляем читателю как полезное упражнение в интегрировании обобщенных функций.

4.2. Преобразование Фурье на G.

Определение. Определим преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}}f$ финитной C^∞ функции f на G равенством:

$$\widehat{\mathcal{F}}f(\xi, \zeta; \chi) = \langle \Psi_\chi(\cdot, \xi, \zeta), f\rangle = \int\limits_G f(g)\,\chi^{-1}(\xi g \zeta^\perp)\,|\xi g \zeta^\perp|^{-2}\,d\mu(g). \quad (4.10)$$

Существует простое соотношение между преобразованием Фурье $\widehat{\mathcal{F}}f$ и интегральным преобразованием $\mathcal{R}^p f$ из § 2, связанным с параболоидами на G. Именно, сравнивая определение $\widehat{\mathcal{F}}f$ с определением $\mathcal{R}^p f$ (формула (2.20)), мы получаем:

Теорема 4.2. *Операторы $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{R}^p$ связаны соотношением:*

$$\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi) = \frac{i}{2}\int \mathcal{R}^p f(\xi,\zeta;p)\,\chi^{-1}(p)|p|^{-2}\,dp\,d\overline{p}. \tag{4.11}$$

Таким образом, $\widehat{\mathcal{F}}f$ получается из $\mathcal{R}^p f$ преобразованием Меллина по p; ср. соотношение между $\mathcal{F}f$ и $\mathcal{R}f$ из п. 3.4. Отсюда, применяя формулу обращения для преобразования Меллина, получаем

Следствие. *Функция $\mathcal{R}^p f$ выражается через $\widehat{\mathcal{F}}f$ равенством:*

$$\mathcal{R}^p f(\xi,\zeta,p) = (2\pi)^{-2}\int\limits_X \widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta,\chi)\,\chi(p)\,d\chi, \tag{4.12}$$

где интеграл берется по множеству X унитарных характеров.

4.3. Связь между двумя вариантами преобразования Фурье. Из соотношений между орисферическими функциями Ψ_χ и Φ_χ, установленными в п. 4.1, следует, что теми же соотношениями связаны функции $\widehat{\mathcal{F}}f$ и $\mathcal{F}f$, где $\mathcal{F}$ — оператор Фурье, введенный в § 3.

Теорема 4.3. *Операторы Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$ связаны соотношениями:*

$$\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\eta} \mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi)\,\chi^{-1}(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\eta)\overline{\omega(\eta)}; \tag{4.13}$$

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta;\chi) = (2\pi)^{-4}c(\chi)\frac{i}{2}\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi)\,\chi(\eta\zeta^\perp)\,|\eta\zeta^\perp|^{-2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}, \tag{4.14}$$

где $c(\chi) = \rho^2 + m^2$ при $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\overline{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$.

Замечание. Эти соотношения можно установить и непосредственно, используя уже полученные соотношения между интегральными преобразованиями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^p$, $\mathcal{R}^p$ и $\widehat{\mathcal{F}}$.

4.4. Соотношение симметрии. Из (4.13) и соотношения симметрии для $\mathcal{F}f$ получаем:

Теорема 4.4. *Функции $\mathcal{F}f$ удовлетворяют соотношению симметрии:*

$$\widehat{Z}(g;\chi) = \widehat{Z}(g,\chi^{-1}) \text{ для любых } g \in G,\ \chi \in X, \tag{4.15}$$

где

$$\widehat{Z}(g,\chi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} \widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi)\,\chi(\xi g\zeta^\perp)\,|\xi g\zeta^\perp|^{-2}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}.$$

4.5. Формула обращения и формула Планшереля для преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$.

Теорема 4.5. *Любая финитная C^∞ функция f на G выражается через свое преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}}f$ по формуле обращения:*

$$f(g) = -2^{-8}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times \\ \times \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi)\,\Psi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\zeta)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi, \tag{4.16}$$

где X_0 — любое подмножество множества X унитарных характеров $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, содержащее ровно по одному представителю из почти каждой пары характеров χ, χ^{-1}.

В самом деле, из формулы обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^p$, связанного с параболоидами на G, см. (2.25), и из установленного здесь соотношения между $\mathcal{R}^p f$ и $\widehat{\mathcal{F}}f$ непосредственно следует:

$$f(g) = -2^{-9}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times \\ \times \int\limits_{X}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi)\chi(\xi g\zeta^\perp)\,|\xi g\zeta^\perp|^{-2}\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi = \\ = -2^{-9}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times \\ \times \int\limits_{X}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta;\chi)\,\Psi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\zeta)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi. \tag{4.17}$$

В силу соотношения симметрии (4.15) для $\widehat{\mathcal{F}}f$ интеграл по X в формуле (4.17) можно заменить удвоенным интегралом по подмножеству $X_0 \subset X$.

Отметим аналогию между формулой обращения (4.16) и исходной формулой (4.10), выражающей $\widehat{\mathcal{F}}f$ через f.

Так же, как и в случае преобразования Фурье $\mathcal{F}$, из формулы обращения (4.16) получаем

Следствие. *Для функций на G выполняется формула Планшереля:*

$$\int\limits_G |f(g)|^2\, d\mu(g) = -2^{-8}\pi^{-7}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{X_0}\int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} c^2(\chi)\,|\widehat{\mathcal{F}}f(\xi,\zeta,\chi)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\,d\chi. \quad (4.18)$$

Согласно следствию преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$, первоначально определенное только для финитных C^∞ функций на G, продолжается на все функции из $L^2(G)$.

4.6. Связь с теорией представлений. Все рассуждения из § 3 о связи преобразования Фурье $\mathcal{F}$ с теорией представлений могут быть повторены без существенных изменений и в применении к преобразованию Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$. Именно, чтобы разложить представление T группы $G \times G$ в пространстве $L^2(G)$ на неприводимые представления, мы рассматриваем собственное пространство операторов Лапласа — Бельтрами Δ, $\overline{\Delta}$, порожденное орисферическими функциями $\Psi_{\chi^{-1}}(\,\cdot\,;\xi,\zeta)$, где $\chi(t) = t^{\frac{i\rho+m}{2}}\bar{t}^{\frac{i\rho-m}{2}}$. Его элементы можно представить в виде

$$\widehat{f}_\chi(g) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} \widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)\,\Psi_{\chi^{-1}}(g;\xi,\zeta)\,\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}, \quad (4.19)$$

где $\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)$ удовлетворяет условию однородности:

$$\widehat{u}_\chi(\lambda_1\xi,\lambda_2\zeta) = \chi^{-1}(\lambda_1\lambda_2)|\lambda_1\lambda_2|^{-2}\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)$$

для любых $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}\setminus 0$. Введем в пространстве функций $\widehat{f}_\chi$ норму

$$\|\widehat{f}_\chi\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{\gamma_\zeta}\int\limits_{\gamma_\xi} |\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)|^2\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}\,\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}$$

и рассмотрим пространство L^2 по этой норме, которое обозначим через $\widehat{H}_\chi$. Сдвиги на G индицируют в $\widehat{H}_\chi$ неприводимое унитарное представление T_χ группы $G \times G$, имеющее в функциях $\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta)$ вид:

$$(T_\chi(g_1,g_2)\widehat{u}_\chi)(\xi,\zeta) = \widehat{u}_\chi(\xi g_1,\zeta g_2).$$

Мы строим далее операторы $\widehat{P}_\chi : L^2(G) \to \widehat{H}_\chi$,

$$\widehat{P}_\chi f = \widehat{f}_\chi,$$

где $\widehat{f}_\chi$ задается равенством (4.19), в котором

$$\widehat{u}_\chi(\xi,\zeta) = \widehat{\mathcal{F}} f(\xi,\zeta;\chi).$$

Искомое разложение представления T задается равенствами:

$$f = -2^{-8}\pi^{-7} \int\limits_{X_0} c^2(\chi)\widehat{f}_\chi \, d\chi, \quad \widehat{f}_\chi = \widehat{P}_\chi f, \tag{4.20}$$

$$\int\limits_G |f(g)|^2 \, d\mu(g) = 2^{-8}\pi^{-7} \int\limits_{X_0} c^2(\chi) \, ||\widehat{f}_\chi||^2 \, d\chi. \tag{4.21}$$

Они следуют непосредственно из формулы (4.16) и формулы Планшереля (4.18) для преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$.

Так как разложение представления T группы $G \times G$ на неприводимые представления единственно ввиду однократности спектра, то полученное разложение совпадает с разложением, полученным в п. 3.8. Именно, мы имеем:

$$\widehat{f}_\chi = c^{-1}(\chi) \, f_\chi, \quad ||\widehat{f}_\chi|| = c^{-1/2}(\chi)||f_\chi||.$$

Отметим, что равенство $\widehat{f}_\chi = c^{-1}(\chi) \, f_\chi$ эквивалентно полученным выше соотношениям между $\mathcal{F} f$ и $\widehat{\mathcal{F}} f$.

Предметный указатель

Асгейрссона соотношения: см. соотношения Асгейрссона

Волновое уравнение
для плоскости 29
для пространства 31
для плоскости Лобачевского 157
для пространства Лобачевского 160

Группа Лоренца $SL(2,\mathbb{C})$ 11

Допустимые комплексы
прямых в $\mathbb{C}^3$ 111
геометрическая структура 115
описание 116
условие допустимости 112
Дифференциальных форм преобразование
лучевое 84
Радона в $\mathbb{R}^2$ 47, 49
Радона в $\mathbb{R}^3$ 52, 53

Зональные орисферические функции
на $\mathcal{L}^3$ 153
на $SL(2,\mathbb{C})$ 187
Зональные орициклические функции 131

Кавальери условия: см. условия Кавальери

Лучевое преобразование: см. преобразование лучевое

Обращения формула: см. формула обращения
Оператор κ
в вещественном пространстве 75
аналоги κ 83
в комплексном пространстве 105
аналоги κ 108
Оператор Лапласа — Бельтрами
для плоскости Лобачевского 131
для пространства Лобачевского 152
для пространства $SL(2,\mathbb{C})$ 185
Орисферические функции
на $\mathcal{L}^3$ 153
на $SL(2,\mathbb{C})$ 187
Орициклические функции 131
Орисферы
в пространстве Лобачевского 145
на группе $SL(2,\mathbb{C})$ 165
Орициклы 122

Параболоиды на группе $SL(2,\mathbb{C})$ 165
Планшереля формула: см. преобразование Фурье, формула Планшереля
Преобразование
Йона: см. преобразование лучевое
орисферическое
в $\mathcal{L}^3$ 146
в $\mathcal{L}^n$ при произвольном n 151
в $SL(2,\mathbb{C})$ 173
орициклическое в $\mathcal{L}^2$ 124
связанное
с вполне геодезическими поверхностями на $\mathcal{L}^3$ 151
с параболоидами на $SL(2,\mathbb{C})$ 181
с прямыми на $\mathcal{L}^2$ 139
Преобразование лучевое
в пространстве $\mathbb{R}^3$ 72
описание образа 75
связь с гипергеометрической функцией Гаусса 74
в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ 104
описание образа 105
в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ 94
описание образа 98
связь с лучевым преобразованием в $\mathbb{R}^3$ 96
групповая интерпретация 102

Преобразование Минковского — Функа
для двумерной сферы 44
для трехмерной сферы 58
Преобразование Радона
дискретное 42
дифференциальных форм
на плоскости 47
в пространстве 52
комплексное 29
в комплексном аффинном пространстве 65
на плоскости
аффинной 19
евклидовой 14
связь с преобразованием Фурье 21
проективное
на плоскости 62
в трехмерном пространстве 57
связь с аффинным преобразованием Радона 57
в пространстве
аффинном трехмерном 27
евклидовом трехмерном 23
произвольной размерности 28
связь с преобразованием Фурье 25
Преобразование Фурье
на плоскости Лобачевского 132
связь с орициклическим преобразованием 132
в пространстве Лобачевского 153
связь с орисферическим преобразованием 153
на $SL(2,\mathbb{C})$, первая версия 189
связь с орисферическим преобразованием 191
на $SL(2,\mathbb{C})$, вторая версия 202
связь со вторым орисферическим преобразованием 203
формула Планшереля
на плоскости Лобачевского 135
в пространстве Лобачевского 155
на $SL(2,\mathbb{C})$ (первая версия) 194
на $SL(2,\mathbb{C})$ (вторая версия) 205
Прямые на плоскости Лобачевского 123
Пуассона формула: см. формула Пуассона

Радона преобразование: см. преобразование Радона

Соотношения Асгейрссона
для плоскости $\mathbb{R}^2$ 17
для плоскости Лобачевского 128
для пространства $\mathbb{R}^3$ 25
для пространства Лобачевского 149

Теорема Пэли — Винера для преобразования Радона 34

Условия Кавальери 33

Формула обращения
для комплекса прямых
пересекающих кривую в $\mathbb{C}^3$ 110
— в $\mathbb{R}^3$ 81
любого допустимого комплекса в $\mathbb{C}^3$ 111
для лучевого преобразования
в $\mathbb{C}^3$ 105
для орисферического преобразования
в $\mathcal{L}^3$ 148, 151, 181
в $\mathcal{L}^n$ 152
в $SL(2,\mathbb{C})$ 179
для орициклического преобразования
на $\mathcal{L}^2$ 127, 129
для преобразования Радона
— на плоскости
аффинной 20
евклидовой 17
— в пространстве
трехмерном аффинном 27
трехмерном евклидовом 25
произвольной размерности 28
— в $\mathbb{C}^2$ 68
— в $\mathbb{C}^n$ 67
для преобразования, связанного
с вполне геодезическими поверхностями в $\mathcal{L}^3$ 151
с параболоидами на $SL(2,\mathbb{C})$ 183
с прямыми на $\mathcal{L}^2$ 141
с параболоидами на $SL(2,\mathbb{C})$ 183
для преобразования Фурье
в $\mathcal{L}^2$ 134
в $\mathcal{L}^3$ 154
на $SL(2,\mathbb{C})$
— связанного с орисферами 193
— связанного с параболоидами 204
Формула Пуассона 40
$\mathcal{F}$ — см. преобразование Фурье
$\mathcal{I}$ — см. преобразование лучевое
$\mathcal{L}^2$ — см. плоскость Лобачевского
$\mathcal{L}^3$ — см. пространство Лобачевского
$\mathcal{R}$ — см. преобразование Радона
$\mathcal{R}^g$ — см. преобразования, связанные с прямыми в $\mathcal{L}^2$ и вполне геодезическими поверхностями в $\mathcal{L}^3$
$\mathcal{R}^h$ — см. преобразование, связанное с орисферами
$\mathcal{R}^p$ — см. преобразование, связанное с параболоидами на $SL(2,\mathbb{C})$