КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

П. Л. Чебышев

ИЗБРАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ

ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1946 ЛЕНИНГРАД

А 04325. Редактор *Д. А. Райков*. Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*. Подписано к печати 19/IV 1946 г. 12,5 печ. л. 9,8 авт. л. 10,2 уч.-изд. л. 36 000 тип. зн. в печ. л. Тираж 10000 экз. Цена книги 6 р. Переплёт 2 р. Заказ № 9.

Отпечатано в типографии Б-Л-1 с матриц, изготовленных в 16-й типографии «Полиграфкнига» ОГИЗ'а. Москва.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

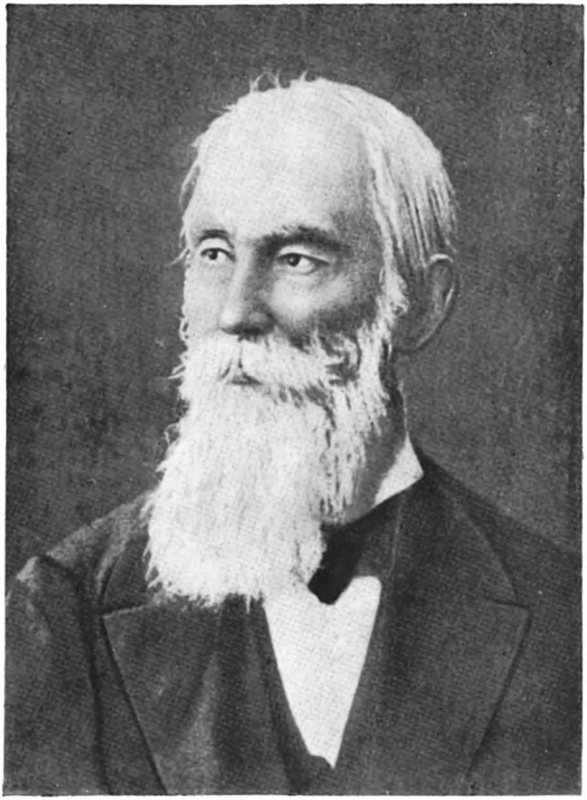
В декабре 1944 г. исполнилось пятьдесят лет со дня смерти одного из величайших математиков XIX века—Пафнутия Львовича Чебышева. Всякому, изучавшему математику и её приложения, приходилось встречаться с именем великого учёного, оставившего глубокий след в анализе, теории чисел, теории вероятностей, картографии и теории механизмов. Однако изучение подлинных сочинений П. Л. Чебышева, изданных нашей Академией Наук в 1899—1907 гг. в двух больших томах, представляет известные трудности для широких читательских кругов, интересующихся математикой.

Желая способствовать популяризации важнейших трудов нашего великого соотечественника, издательство посвящает им очередной томик серии «Классиков естествознания». В него отобраны те из статей П. Л. Чебышева, которые наиболее коротким путём и в то же время достаточно полно и многосторонне рисуют важнейшие идеи и результаты знаменитого математика. Книгу открывает биографический очерк, принадлежащий перу другого нашего замечательного учёного—ученика П. Л. Чебышева—покойного академика А. М. Ляпунова, впервые напечатанный в «Сообщениях Харьковского математического общества» в 1895 г.

Чтобы облегчить пользование книгой, к ней приложены две статьи редактора издания—Н. И. Ахиезера. Первая из них содержит краткий обзор математического творчества П. Л. Чебышева, вторая может рассматриваться как комментарий к мемуару «Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближённым представлением функций», помещённому в настоящем издании лишь в виде краткого извлечения, сделанного самим Чебышевым для Bulletin phys.-math. de l'Académie de St.-Pétersbourg.

А. М. ЛЯПУНОВ

ЖИЗНЬ И ТРУДЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА



ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ
1821—1894

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ

Очерк А. М. ЛЯПУНОВА *)

26 ноября **) 1894 г. скончался академик П. Л. Чебышев, в лице которого наука утратила одного из величайших геометров истекающего столетия.

Своими исследованиями П. Л. Чебышев разъяснил многие трудные вопросы анализа, установил связь между различными весьма разнородными теориями и проложил путь к решению многих важных задач, неразрешимых обычными методами.

В записке академиков А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, посвящённой памяти покойного учёного, находим, между прочим, следующую прекрасную характеристику его трудов:

«Труды Чебышева носят отпечаток гениальности. Он изобрёл новые методы для решения многих трудных вопросов, которые были поставлены давно и оставались нерешёнными. Вместе с тем он поставил ряд новых важных вопросов, над разработкой которых трудился до конца своих дней.

«Ввиду оригинальности исследований П. Л. Чебышева, ему редко приходилось упоминать о чужих исследованиях. Зато другие учёные всё чаще и чаще упоминают о нашем славном сочлене и черпают свои идеи из той богатой сокровищницы мыслей, которую представляют труды П. Л. Чебышева» ***).

---

*) Сообщения Харьковского математического общества, 2-я серия, т. IV, № 5 и 6, 1895, стр. 263—273. (*Ред.*)

**) Все даты в статье А. М. Ляпунова приведены по старому стилю. (*Ред.*)

***) Известия Академии Наук, том II, № 1, 1895. (Заседание Физико-математического отделения 30 ноября 1894 г.)

Вскоре, по защите магистерской диссертации, П. Л. Чебышев переселяется в Петербург, будучи приглашён в 1847 г. в Петербургский университет на кафедру математики; и вслед за этим начинают появляться важнейшие его исследования, и имя его быстро становится известным всему математическому миру.

В 1848 г. он представляет С.-Петербургской Академии весьма важный мемуар о числе простых чисел, не превосходящих данного предела, который четыре года спустя появляется в журнале Лиувилля. В 1849 г. он издаёт свою *Теорию сравнений*, которую защищает в С.-Петербургском университете в качестве докторской диссертации. Это прекрасное сочинение, служившее потом руководством для длинного ряда поколений учащейся молодёжи, и до настоящего времени остаётся лучшим по излагаемому в нём отделу теории чисел. В 1850 г. П. Л. Чебышев представляет Академии свой знаменитый *Mémoire sur les nombres premiers*. В этом мемуаре он разрешает ряд важных и весьма трудных вопросов теории чисел. Он даёт здесь способ находить высший и низший пределы для суммы логарифмов простых чисел, лежащих между данными пределами, и действительно указывает подобные пределы, которыми пользуется, между прочим, для получения некоторых выводов относительно числа простых чисел, лежащих между данными пределами. Здесь же решает он вопросы о сходимости и приближённом вычислении рядов, члены которых определяются, как значения данных функций, соответствующие значениям независимого переменного, взятым из ряда простых чисел.

Уже и раньше обративший на себя внимание, П. Л. Чебышев своими исследованиями по теории чисел создаёт себе славу первоклассного геометра, которая окончательно за ним упрочивается после опубликования ряда важных мемуаров об алгебраической и логарифмической интегрируемости дифференциалов, содержащих иррациональные функции.

Первый из мемуаров, относящихся к этого рода вопросам, появился в журнале Лиувилля в 1853 г. и посвящён вопросу об определении логарифмической части интеграла

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$$

Оценить надлежащим образом значение великого учёного немыслимо без подробного анализа всех его трудов, и я не беру на себя этой задачи, которая невозможна без глубокого их изучения и в настоящее время ещё не могла бы быть выполнена сколько-нибудь удовлетворительно. Гениальные идеи, рассеянные в трудах П. Л. Чебышева, без сомнения, не только не исчерпаны во всех своих выводах, но могут принести надлежащие плоды лишь в будущем, и тогда только явится возможность получить правильное представление о великом значении учёного, которого лишилась недавно наука.

В настоящем очерке я имею лишь в виду изложить известные мне факты из жизни и учёной деятельности П. Л. Чебышева *) и указать важнейшие из его исследований и передать некоторые мои личные воспоминания о нём, как о профессоре.

П. Л. Чебышев, принадлежавший к старинной дворянской семье, родился 14 мая 1821 г. в сельце Окатове, Боровского уезда, Калужской губернии, в имении своей матери. До поступления в университет он учился дома, затем в Московском университете, где в 1841 г. получил степень кандидата математических наук. Продолжая дальнейшие научные занятия под руководством проф. Брашмана, П. Л. Чебышев вскоре же обратил на себя внимание талантливыми оригинальными исследованиями.

В печати имя П. Л. Чебышева в первый раз, если не ошибаюсь, появляется в 1843 г. в журнале Лиувилля, где им публикована небольшая заметка, касающаяся кратных интегралов. Два года спустя П. Л. Чебышев издаёт сочинение *Опыт элементарного анализа теории вероятностей*, которое в 1846 г. защищает в Московском университете в качестве диссертации на степень магистра. Таким образом, в этот ранний период внимание П. Л. Чебышева привлекает теория вероятностей, которая, не переставая интересовать его и впоследствии, обязана ему весьма важными приобретениями.

---

*) Сведения об этих фактах взяты мною отчасти из указаний самого П. Л. Чебышева, предназначавшихся для 2-го издания лексикона Погендорфа, отчасти из сочинения проф. Григорьева — *Импер. С.-Петербургский Университет в течение первых пятидесяти лет его существования* С.-Петербург. 1870. (*А. Л.*)

[где $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$ суть какие-либо целые рациональные функции и m — какое угодно целое положительное число] в том случае, когда интеграл этот выражается в конечном виде. Но особенно важные работы той же категории относятся к интегрированию дифференциалов эллиптических и появляются несколько позднее сначала в изданиях Академии, затем в журнале Лиувилля. В этих работах П. Л. Чебышевым сделаны весьма существенные дополнения к работам Абеля. Им здесь показано, что интегрирование всякого эллиптического дифференциала в том случае, когда оно возможно в конечном виде, приводится к интегрированию дифференциалов вида

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

для которых возможность такого интегрирования (при надлежащем выборе постоянного A) ещё Абелем была поставлена в зависимость от периодичности непрерывной дроби, в которую разлагается радикал

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}.$$

Но этим П. Л. Чебышёв не ограничился. Замечая, что в случае отрицательного ответа на вопрос метода, основанная на одном только признаке периодичности названной сейчас дроби, не может привести ни к какому выводу, и желая пополнить этот пробел в работах Абеля, он дал новую методу, которая в случае, когда α, β, γ, δ суть вещественные рациональные числа, позволяет всегда решить вопрос в том или другом смысле при помощи конечного числа алгебраических действий. Метода эта изложена в мемуаре 1860 г., опубликованном в третьем томе Bulletin de l'Académie de St.-Pétersbourg и перепечатанном впоследствии в журнале Лиувилля (1864).

Из дифференциалов неэллиптических П. Л. Чебышев подробнее рассматривает содержащие кубический корень. Вопросу об интегрировании таких дифференциалов посвящены некоторые из позднейших его мемуаров.

Одновременно с только что указанными начинают появляться мемуары П. Л. Чебышева из другой области, в которых ставятся и решаются совершенно особого рода задачи, находящиеся в связи с вопросом о приближённом представлении функций. Здесь Чебышев является вполне оригинальным, ибо на этом пути почти не имел предшественников.

Первый из этой серии мемуаров был напечатан в 1853 г. в Mémoires des savants étrangers (tome VII) под заглавием *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.* Мне известна только первая часть этого мемуара, и я не знаю, было ли когда-нибудь публиковано его окончание. Эта первая часть только вступительная и содержит решение одного аналитического вопроса, весьма важного для теории, которую П. Л. Чебышев предполагал развить далее. Вопрос этот касается приближённого представления данной функции между двумя данными пределами под видом полинома данной степени при условии, чтобы наибольшая в этих пределах погрешность была возможно меньшею. Весьма замечательны результаты, к которым приходит здесь П. Л. Чебышев; но ещё более замечательна метода, которою результаты эти достигаются. Метода эта, за исключением разве одного лежащего в её основе предложения, всецело принадлежит П. Л. Чебышеву, ибо до него для решения подобных вопросов не существовало сколько-нибудь общих способов, и кроме некоторых простейших частных случаев, разобранных Понселе, он не мог найти в работах своих предшественников примеров решения такого рода вопросов.

Решением только-что указанной аналитической задачи П. Л. Чебышев не ограничился. Вопросы о приближённом представлении данной функции в том или ином виде при условии, чтобы наибольшая погрешность между данными пределами независимого переменного была возможно меньшей, могут иметь, очевидно, весьма разнообразные и важные приложения. Притом вопросы эти, требующие особенных приёмов решения, представляются с аналитической стороны в высшей степени интересными. Всё это заставило П. Л. Чебышева предпринять в том же направлении более общие изыскания, и вот в 1857 г. в изданиях Академии появляется его замечательный мемуар *Sur les questions de minima qui se rattachent a la représentation approximative des fonctions*, в котором излагаются общие соображения для решения вопросов рассматриваемого рода. Таким-то образом положил П. Л. Чебышев основания своей теории функций «наименее уклоняющихся от нуля».

К этой же категории мемуаров принадлежит и появившийся в 1855 г. мемуар *О непрерывных дробях*, в котором указываются важные свойства этих дробей в приложении к вопросу о разложении функций в ряды и даётся общая формула для интерполирования по способу наименьших квадратов. Сюда же относятся и мемуары об интерполировании, из которых первые два были публикованы в 1859 г. и содержат: один—особые формулы для интерполирования в случае весьма большого числа данных, доставляемых наблюдениями, другой—подробное изложение методы интерполирования, вытекающей из соображений, указанных в мемуаре *О непрерывных дробях*.

Все эти мемуары послужили точками отправления для многочисленных дальнейших исследований П. Л. Чебышева, в которых изобретённые им методы получили более полное развитие и нашли разнообразные приложения как к вопросам о приближённом представлении функций, так и к находящимся с ними в связи некоторым вопросам кинематики механизмов, особенно привлекавшим внимание знаменитого учёного.

Я не буду перечислять здесь длинного ряда последующих мемуаров П. Л. Чебышева. Но не могу не указать на некоторые из них, особенно важные по трактуемым в них вопросам или по их методам.

В 1867 г. в Записках Академии опубликован мемуар *О наибольших и наименьших величинах сумм, составленных из значения целой функции и её производных*, где излагаются основания для решения того же рода вопросов о суммах, какие по отношению к интегралам решаются вариационным исчислением.

В том же году в Математическом Сборнике, а затем и в журнале Лиувилля появляется мемуар *О средних величинах*, который содержит строгое элементарное доказательство одного важного предложения теории вероятностей, заключающего в себе, как частный случай, так называемый закон весьма больших чисел. Небольшой этот мемуар замечателен в особенности по той идее, которая лежит в основании доказательства и которая привела потом П. Л. Чебышева к постановке важного аналитического вопроса.

В 1874 г. в журнале Лиувилля публикуется мемуар *Sur les valeurs limites des intégrales*, в котором ставится совершенно особого рода вопрос о maxima и minima, весьма замечательный во многих отношениях. Вопрос этот, на который П. Л. Чебышев мог быть наведён одним исследованием Bienaymé, но к которому естественно приводили и многие из его собственных исследований, состоит в следующем:

Найти предельные величины, которых может достигать интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

взятый в данных пределах $a<b$, когда даны величины интегралов

$$\int_A^B f(x)\,dx, \quad \int_A^B xf(x)\,dx, \quad \int_A^B x^2 f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_A^B x^m f(x)\,dx,$$

взятых в данных же, но более широких пределах

$$A<a, \quad B>b,$$

и функция $f(x)$ между $x=A$ и $x=B$ не делается отрицательною.

В названном сейчас мемуаре П. Л. Чебышев указывает одно важное предложение, обнаруживающее связь этого вопроса с вопросом о разложении в непрерывную дробь интеграла

$$\int_A^B \frac{f(x)\,dx}{z-x},$$

и формулирует окончательный вывод для одного интересного частного случая.

Этому вопросу относительно интегралов и подобным же вопросам относительно сумм посвящены и многие из последующих мемуаров П. Л. Чебышева, из которых один содержит приложение полученных им выводов к доказательству одной важной теоремы теории вероятностей. Того же рода вопросу посвящён и последний мемуар П. Л. Чебышева *О суммах, зависящих от положительных значений какой-либо функции*, представленный Академии наук 16 февраля прошлого года и напечатанный только недавно, уже после смерти автора.

Важность работ П. Л. Чебышева по теории чисел и интегральному исчислению определяется как важностью трактуемых в них трудных вопросов, так и методами, изобретёнными для их решения. В этих работах П. Л. Чебышев был продолжателем великих своих предшественников Эйлера, Лежандра, Абеля, которыми вопросы эти были поставлены. Но в работах, относящихся к приближённому представлению функций и к различного рода оригинальным вопросам о maxima и minima, П. Л. Чебышев является изобретателем методов для решения им самим выдвинутых весьма важных и трудных вопросов. В этих работах он открывает ряд совершенно новых задач и указывает новые пути и новое направление в науке, и если вообще глубокие идеи его далеко ещё не исчерпаны, то это в особенности относится к тем, которые содержатся в его трудах последней категории.

Вопросы, которым посвящены указанные выше важнейшие исследования П. Л. Чебышева, не были единственными, которые привлекали внимание великого учёного. Он интересовался весьма многими вопросами чистой и прикладной математики. Так, он занимался вопросами о построении географических карт, особого рода вопросами о деформации поверхностей, многими вопросами практической механики. Теоретическая механика также привлекала его внимание, и мне, например, известно, что он занимался некоторыми вопросами гидростатики. При одном из последних моих свиданий с ним, в 1884 году, он говорил, что, между прочим, занимался вопросом о кольцеобразной форме равновесия жидкой вращающейся массы, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. При этом, сколько мне помнится, он высказывал намерение опубликовать относящиеся к этому вопросу изыскания. Но, вероятно, другие работы не позволили ему выполнить этого намерения, и остаётся надеяться, что что-нибудь, относящееся к этим интересным изысканиям, найдётся в оставленных им бумагах.

Учёные заслуги П. Л. Чебышева давно уже признаны и высоко оценены различными учёными учреждениями и обществами, как русскими, так и иностранными. Не говоря уже о многочисленных учёных обществах, считавших

П. Л. Чебышева своим членом, упомяну лишь об Академиях Наук С.-Петербургской и Парижской. Избранный С.-Петербургской академией в 1853 г. адъюнктом по кафедре прикладной математики, он с 1859 г. состоит в ней ординарным академиком. В 1860 г. он избирается членом-корреспондентом Парижской Академией, а в 1874 г. вступает в неё в качестве membre associé étranger. Последнее обстоятельство ясно показывает, как высоко оценены были заслуги П. Л. Чебышева этим учёным учреждением, ибо избрания в число membres associés étrangers удостоиваются лишь весьма немногие из признанных самыми выдающимися иностранных учёных.

Я говорил до сих пор о П. Л. Чебышеве только как о математике. Но имя его пользуется весьма почётной известностью ещё в другой области—в области изобретений по части механизмов. С юных лет проявлял он особенную склонность к такого рода изобретениям, и изобретения эти не переставали занимать его и в течение всей жизни. Преимущественно они относились к шарнирно-рычажным механизмам, доставляющим преобразование кругового движения в прямолинейное, и изобретённые им механизмы этого рода уже нашли разнообразные применения на практике. Параллелограммы П. Л. Чебышева не дают точного прямолинейного движения; но вследствие незначительности уклонений от последнего практически вполне могут заменять «точные» механизмы того же рода, перед которыми имеют преимущество большей простоты устройства.

Теорию своих механизмов П. Л. Чебышев изложил в ряде мемуаров, особенно интересных по той связи, которая раскрывается в них между его изобретениями этого рода и аналитическими исследованиями, касающимися приближённого представления функций.

П. Л. Чебышеву принадлежит и много других изобретений, из которых в особенности должно упомянуть о счётной машине, изобретённой около 1878 г., которая может считаться наиболее совершенной из существующих машин этого рода. Модель этой машины хранится во Франции в Conservatoire des arts et métiers.

О своих изобретениях П. Л. Чебышев много раз делал доклады как в России, на съездах, так и заграницей, в Париже и в Лондоне, и многие из его изобретений описаны им самим.

Гениальный учёный и изобретатель, П. Л. Чебышев был в то же время образцовым профессором.

Его профессорская деятельность началась, как я уже упомянул выше, с 1847 г. и затем продолжалась непрерывно до 1882 г., когда П. Л. Чебышев оставил университет и исключительно предался своим учёным изысканиям, не прекращавшимся до последних дней его жизни.

В различные периоды своей профессорской деятельности П. Л. Чебышев читал различные курсы. В то время, когда я был студентом, в конце 70-х годов, он читал теорию чисел, теорию определённых интегралов и исчисление конечных разностей студентам III курса и теорию вероятностей студентам IV курса.

Курсы его не были обширными, и при изложении их он заботился не столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов. Отличаясь живым и увлекательным изложением, лекции его сопровождались множеством интересных замечаний относительно значения и важности тех или других вопросов или научных методов. Замечания эти высказывались иногда мимоходом по поводу какого-нибудь конкретного случая, но всегда глубоко западали в умах его слушателей. Вследствие этого лекции его имели высокое развивающее значение, и слушатели его после каждой лекции выносили нечто существенно новое в смысле большей широты взглядов и новизны точек зрения.

П. Л. Чебышев почти не пропускал лекций. По крайней мере за два года, в течение которых я был его слушателем, я не помню, чтобы хотя один раз его лекция не состоялась. В аудитории он появлялся всегда точно в назначенное время и тотчас же, не теряя ни секунды, приступал к продолжению выводов, начатых в предшествовавшую лекцию Вычисления он производил чрезвычайно быстро, вследствие чего, несмотря на то, что был прекрасным калькулятором, часто делал ошибки в выкладках, и за ходом вычислений нужно было следить очень внимательно, чтобы во-время предупредить его о сделанной ошибке, о чём он всегда просил своих слушателей. Когда, наконец, получался желаемый вывод, П. Л. Чебышев садился, но не на кафедру, а на кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вот тут-то и начинались те разнообразные замечания, которые придавали особенный интерес его лекциям и которых с нетерпением ждала вся аудитория. Весьма часто по поводу только что решённого вопроса П. Л. Чебышев высказывал свои мнения о тех или других работах, относящихся к тому же вопросу. Иногда он вспоминал при этом некоторые эпизоды из своих заграничных поездок и рассказывал о беседах по поводу того же вопроса с кем-либо из иностранных учёных. После более или менее продолжительной беседы этого рода, служившей для него отдыхом, П. Л. Чебышев, быстрый как в речи, так и во всех своих действиях, быстро вставал, брался за мел и приступал к дальнейшим выводам. К характеристике внешней стороны его лекций должно прибавить, что он никогда не оставался в аудитории по окончании времени, назначенного для лекции, и бросал мел в тот же момент, как раздавался звонок, на каком бы месте при этом ни пришлось оборвать начатые вычисления.

Продолжительная профессорская деятельность П. Л. Чебышева, в течение 35 лет принадлежавшая С.-Петербургскому университету, не могла не отразиться самым благотворным образом на всём составе математического факультета, кафедры которого замещались наиболее талантливыми из его учеников. Отсюда понятно то высокое положение, которого давно уже достиг этот факультет в С.-Петербургском университете.

Но как бы ни было велико влияние П. Л. Чебышева на университет, главная заслуга его, как профессора, заключается в создании той школы математиков, которая известна под его именем и характеризуется особым направлением исследований.

Ученики П. Л. Чебышева продолжали и продолжают разработку изобретённых им методов и при решении поставленных им задач выдвигают новые задачи того же рода. Таким образом, мало-помалу создаются новые отделы в науке, с которыми навсегда будет связано имя П. Л. Чебышева. Вместе с тем работами его последователей всё более и более распространяются те взгляды, которым великий учёный оставался верен во всех своих исследованиях.

В то время, как почитатели весьма отвлечённых идей Римана всё более и более углубляются в функционально-теоретические исследования и в псевдо-геометрические изыскания в пространствах четырёх и бо́льшего числа измерений *), и в этих изысканиях заходят иногда так далеко, что теряется всякая возможность видеть их значение по отношению к каким-либо приложениям не только в настоящем, но и в будущем,—П. Л Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путём более или менее общей теории—таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и учёных, усвоивших его взгляды.

Насколько подобное направление может быть плодотворно в чисто научном отношении, это наглядно показывает вся учёная деятельность П. Л. Чебышева, который пришёл к постановке и решению совершенно новых и важных вопросов анализа, исходя из задач прикладного характера, иногда притом чисто практических.

Таков, впрочем, путь многих важных открытий в области математики.

Я закончу эту заметку пожеланием, чтобы возможно скорее приступлено было к изданию полного собрания сочинений П. Л. Чебышева**), изучение которых в настоящее

*) Эти изыскания в последнее время нередко ставились в связь с глубокими геометрическими исследованиями Н. И. Лобачевского, с которыми, однако, они ничего не имеют общего. Великий геометр, подобно П. Л. Чебышеву, оставался всегда на реальной почве, и в этих изысканиях трансцендентального характера едва ли мог увидеть развитие своих идей. (*А. Л.*) [Эти взгляды А М. Ляпунова, весьма характерные для старой Петербургской школы, основанной П. Л. Чебышевым и его учениками, с её стремлениями к конкретности и к получению алгорифма, в своё время препятствовали петербургским математикам правильно оценить работы Римана и некоторых других западноевропейских учёных. (*Ред.*)]

**) Это пожелание А. М. Ляпунова было вскоре осуществлено Академией Наук, издавшей сочинения Чебышева в двух томах на русском и французском языках. В настоящее время Академия Наук выпускает, по решению СНК СССР, второе издание в пяти томах. (*Ред.*)

время весьма затрудняется тем, что они рассеяны по различным периодическим изданиям, иногда довольно редким. Между тем знакомство с трудами П. Л. Чебышева может быть необходимо в различных случаях, а изучение его трудов может указать путь для многих новых открытий, ибо идеи великого учёного могут оказаться в высокой степени важными для решения многих трудных вопросов, стоящих теперь на очереди.

СПИСОК СОЧИНЕНИЙ акад. П. Л. ЧЕБЫШЕВА*)

1. 1843.—*Note sur une classe d'intégrales définies multiples*. Journal de M. Liouville, t. VIII, 1843
2. 1844.—*Note sur la convergence de la série de Taylor*. Crelle's Journal, B. 28, 1844.
3. 1844.—*Опыт элементарного анализа теории вероятностей*. Отдельное издание. Москва, 1845.
   1844.—*Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités* (извлечение). Crelle's Journal, B. 33, 1846.
4. 1848.—*Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*. Mém. des savants étrangers, t. VI, 1851; Journal de M. Liouville, t. XVII, 1852. Приложение III к Теории сравнений.
5. 1849.—*Теория сравнений* Отдельное издание, С.-Петербург, 1849; 2-е издание. С.-Петербург, 1879.
6. 1850 —*Mémoire sur les nombres premiers*. Mém. des savants étrangers, t. VII, 1854; Journal de M. Liouville, t. XVII, 1852.
7. 1851.—*Sur les formes quadratiques*. Journal de M. Liouville, t XVI, 1851.
8. 1851.—*Note sur différentes séries*. Journal de M. Liouville, t. XVI, 1851.
9. 1853.—*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (*première partie*). Mém. des savants étrangers, t. VII, 1854.
10. 1853.—*Sur l'intégration des différentielles irrationnelles*. Journal de M. Liouville, t. XVIII, 1853.
11. 1854.—*Sur l'intégration des différentielles, qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré*. Mém. de L'Acad. de St.-Pétersb., VI série, t. VI, 1857; Journal de M. Liouville, II série, t. II, 1857.

---

*) Список этот составлен на основании академического, помещенного в Известиях Академии Наук за 1895 г. (том II, № 3), от которого он отличается (не считая некоторых незначительных изменений и дополнений) прибавлением нескольких извлечений, сделанных П. Л. Чебышевым из некоторых мемуаров, и включением №№ 41, 46 и 56. (*А. М. Ляпунов.*)

12. 1855. — *О непрерывных дробях.* Учёные записки Спб. Академии, том III, 1855; Journal de M. Liouville, II série, t. III, 1858. — *Sur une formule d'Analyse* (предварительное сообщение, 1854 г.). Bulletin phys.-math. de L'Acad. de St.-Pétersb., t. XIII, № 14; Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 2 et 3.
13. 1856. — *Sur la construction des cartes géographiques.* Bulletin phys.-math. de L'Acad. de St.-Pétersb., t. XIV, N 17, 1856; Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 5, 1857.
14. 1856. — *Черчение географических карт.* Сочинение, написанное для акта С.-Петербургского Университета 8-го февраля 1856 г.
15. 1857. — *Sur la série de Lagrange.* Bulletin phys.-math. de L'Acad. de St.-Pétersb., t. XV, NN 19 et 20, 1857; Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 5; Journal de M. Liouville, II série, t. II, 1857 (без последнего параграфа).
16. 1857 — *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.* Mém. de L'Acad. de St.-Pétersb., VI série, t. VII, 1859;
 — *Sur les questions de minima etc. (извлечение).* Bulletin phys.-math. de L'Acad. de St.-Pétersb., t. XVI, N 10; Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 6.
17. 1858. — *Sur une nouvelle série.* Bulletin phys.-math. de L'Acad. de St.-Pétersb., t. XVII, N 17; Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 6, 1859.
18. 1858. — *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations.* Mém. de L'Acad. de St.-Pétersb., VII série, t. I, 1859.
 — *Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations (извлечение).* Bulletin phys.-math. de L'Acad. de St.-Pétersb., t. XVI, N 23; Mélanges math. et astr., t. II, livrais 6.
19. 1859. — *Sur le développement des fonctions à une seule variable.* Bulletin de l'Acad. de St.-Pétersb., t. I; Mélanges math. et astr., t. III, livrais. 2.
20. 1859. — *Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés.* Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VII série, t. I, 1859.
21. 1860. — *Sur l'intégration de la différentielle*

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx.$$

Bulletin de l'Acad. de St.-Pétersb., t. III, 1861; Mélanges math. et astr., t. III, livrais. 3; Journal de M. Liouville, II série, t. IX, 1864.
 — *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles (извлечение).* Comptes rendus, t. LI, 1860; Journal de M. Liouville, II série, t. IX, 1864.
22. 1861. — *Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt.* Bulletin de l'Acad. de St.-Pétersb., t. IV; Mélanges math. et astr., t. III, livrais. 4.
23. 1864. — *Об интерполировании.* Прилож к IV т. Запис. Акад., № 5, 1864.
24. 1865. — *Об интегрировании дифференциалов, содержащих кубический корень.* Прилож. к VII т. Запис. Акад., № 5, 1865.

25. 1865.—*Sur les fractions continues algébriques (lettre adressée à M. Brachman)*. Journal de M. Liouville, II série, t. X, 1865. —*Разложение функций в ряды при помощи непрерывных дробей (письмо к Брашману)*. Математический Сборник, т. I, 1866.
26. 1866.—*О разложении функций в ряды при помощи непрерывных дробей.* Прилож. к IX т. Запис. Акад., № 1, 1866.
27. 1866.—*Об одном арифметическом вопросе*. Прилож. к X т. Запис. Акад., № 4, 1866.
28. 1866.—*О средних величинах.* Математический Сборник, т. II, 1867. *Correspondance math., redigée par M. Catalan.* Journal de M. Liouville, II série, t. XII, 1867.
29. 1867.—*О наибольших и наименьших величинах сумм, составленных из значения целой функции и её производных*. Прилож. к XII т. Запис. Акад., № 3, 1867; Journal de M. Liouville, II série, t. XIII, 1868.
30. 1867.—*Об интегрировании простейших дифференциалов, содержащих кубический корень.* Математический сборник, т. II, 1867.
31. 1868.—*Об одном механизме*. Записки Акад. Наук, т. XIV, 1868.
32. 1869.—*О функциях, подобных функциям Лежандра*. Записки Акад. Наук, т. XVI, 1870.
33. 1869.—*Об определении функций по значениям, которые они имеют при некоторых величинах переменной*. Математический Сборник, т. IV, 1870.
34. 1870.—*О параллелограммах*. Труды 2-го съезда русских естествоиспытателей
35. 1871.—*О центробежном уравнителе*. Отчёт Моск. Техн. Училища за 1871 г.
36. 1872.—*О зубчатых колёсах*. Отчёт Моск. Техн. Училища за 1872 г.
37. 1873.—*Sur les quadratures*. Journal de M. Liouville, II série, t. XIX, 1874; Les Mondes, par M. Moigno, t. XXX.
38. 1873.—*Sur les valeurs limites des intégrales*. Journal de M. Liouville, II série, t. XIX, 1874.
39. 1873.—*Sur la généralisation d'une formule de M. Catalan.* Corresp. math., red. p. M. Catalan, t. II.
40. 1873.—*О функциях, наименее уклоняющихся от нуля*. Прилож. к XXII т. Запис. Акад., № 1, 1873. Journal de M. Liouville, II série, t, XIX, 1874.
41. 1873.—*Régulateur centrifuge*. Les Mondes, par M. Moigno, t. XXXI.
42. 1875.—*Об интерполировании величин равноотстоящих*. Прилож. к XXV т. Запис. Акад., № 5, 1875.
43. 1875.—*Sur la limite du degré de la fonction entiere, qui satisfait à certaines conditions*. Bulletin de la Société math. de la France, t. III.
44. 1877;—*О приближённых выражениях, линейных относительно двух полиномов*. Прилож. к XXX т. Запис. Акад., № 4, 1877; Bulletin des sciences math et astr., t. I.

45. 1878.—*Sur les parallélogrammes les plus simples symétriques autour d'un axe*. Association française pour l'avancement des sciences. — Congrès de Paris.
46. 1878.—*Sur la coupe des vêteménts*. Association française pour l'avancement des sciences.—Congrès de Paris.
47. 1878.—*Sur une transformation des séries numériques*- Nouvelle corresp. math., redigée p. M. Catalan, t. IV.
48. 1878.—*Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point*. Bulletin de la Société math. de la France, t. VI, 1878.
49. 1878.—*О простейших сочленениях*. Математический Сборник, т. IX, 1878.
50. 1878.—*О параллелограммах, состоящих из трёх элементов и симметрических около одной оси*. Прилож. к XXXIV т. Запис. Акад., № 3, 1879.
51. 1879.—*О параллелограммах, состоящих из трёх каких-либо элементов*. Прилож. к XXXVI т. Запис. Акад., № 3, 1880.
52. 1880.—*О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной*. Прилож. к XL т. Запис. Акад., № 3, 1881.
53. 1882.—*О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвёртой степени*. Приложение к XL т. Запис. Акад., № 1, 1882.
54. 1882.—*Une machine arithmétique à mouvement continu*. Revue scientifique, 2-e semèstre, N 13.
55. 1882.—*Об отношении двух интегралов, распространённых на одни и те же величины переменной*. Прилож. к XLIV т. Запис. Акад., № 2, 1883.
56. 1883.—*О приближённых выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах*. Сообщения и протоколы заседаний Математического Общества при Харьковском университете, 1882, II. — Харьков, 1883.
57. 1883.—*Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов при разложении подъинтегральной функции на множители*. Прилож. к XLVII т. Запис. Акад., № 4, 1883.
58. 1884.—*Sur les fractions algébriques, qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable comprise entre les limites données*. Bulletin de la Société math. de la France, t. XII.
59. 1884.—*Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes, à l'aide de systemes articulés*. Bulletin de la Société math. de la France, t. XII.
60. 1885.—*О представлении предельных величин интегралов посредством интегральных вычетов*. Прилож. к LI т. Запис. Акад., № 4, 1885; Acta mathematica, t. IX, 1886.
61. 1886.—*Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs (lettre, adressée à M-me Sophie Kowalevsky)*. Acta mathematica, t. IX, 1886.
62. 1886.—*Об интегральных вычетах, доставляющих приближённые величины интегралов*. Прилож. к LV т. Запис. Акад., № 2, 1887; Acta mathematica, t. XII, 1889.
63. 1887.—*О двух теоремах относительно вероятностей*. Прилож. к LV т. Запис. Акад., № 6, 1887; Acta mathematica, t XIV, 1891.

64. 1888.—*О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси.* Прилож. к LX т. Запис. Акад., № 1, 1889.
65. 1889.—*О приближённых выражениях квадратного корня переменной через простые дроби.* Прилож. к LXI т. Запис Акад., № 1, 1889; Annales de l'Éc. Norm. sup., III série, т. XV, 1898; Acta mathematica, t. XVIII, 1894.
66. 1890.—*О суммах, составленных из значений простейших одночленов, умноженных на функцию, которая остаётся положительной.* Прилож. к LXIV т. Запис. Акад., № 7, 1891.
67. 1892.—*О разложении в непрерывную дробь рядов, расположенных по нисходящим степеням переменной.* Прилож. к LXXI т Запис. Акад., № 3.
68. 1892.—*О полиномах, наилучше представляющих значения простейших дробных функций при величинах переменной, заключающихся между двумя данными пределами.* Прилож. к LXXII т. Запис Акад., № 7, 1893.
69. 1894.—*О суммах, зависящих от положительных значений какой-либо функции.* Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VIII série, t. I, 1895.

П. Л. Чебышев

ИЗБРАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Во втором томе *Теории чисел* Лежандр предлагает формулу для приближённого определения числа простых чисел, меньших данного числа. Свою формулу Лежандр поверяет таблицею простых чисел от 10 000 до 1 000 000 и потом прилагает её к решению некоторых вопросов *Теории чисел*. Несмотря на видимое согласие формулы Лежандра с таблицею простых чисел, мы не можем не изъявить сомнения насчёт строгости её, и вследствие того не можем признать верными выводы, на ней основанные. К такому заключению приводит нас одна теорема относительно свойств функции, определяющей число простых чисел, меньших данного числа, теорема, из которой могут быть выведены многие любопытные предложения.

Мы займёмся теперь изложением этой теоремы, а потом покажем некоторые из её приложений.

Теорема, которая будет предметом наших исследований, заключается в следующем:

Теорема I. *Если* $\varphi(x)$ *означает число простых чисел, меньших* x, n — *какое-либо целое число*, ρ — *количество* > 0, *то в сумме*

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

мы будем иметь такую функцию, которая с приближением ρ *к* 0 *приближается к конечному пределу.*

Доказательство. Мы докажем сначала, что такое свойство принадлежит функциям, получаемым через дифференцирование несколько раз выражений

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right),$$

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}$$

по ρ, предполагая здесь и везде впоследствии суммирование по m распространённым на все числа от $m = 2$ до $m = \infty$, суммирование же по μ распространённым на одни простые числа от $\mu = 2$ до $\mu = \infty$.

Начнём с первого. Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^x - 1} x^\rho \, dx = \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \cdot \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-1+\rho} \, dx = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx,$$

а потому

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \, dx}{\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx}.$$

Из этого равенства видно, что производная n-го порядка от $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ по ρ будет выражаться дробью, у которой знаменателем будет $\left[\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx\right]^{n+1}$, а числителем — целая функция интегралов

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \, dx, \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log x \, dx,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log^2 x \, dx, \; \ldots,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log^n x \, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx,\ \int_0^\infty e^{-x}x^\rho \log x\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\rho \log^2 x\,dx,\ \ldots,\ \int_0^\infty e^{-x}x^\rho \log^n x\,dx.$$

Но такая дробь, будет ли $n=0$ или >0, приближается к конечному пределу с приближением ρ к 0, ибо предел интеграла $\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx$ при $\rho=0$ есть 1; интегралы же

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^\rho\,dx.$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^\rho \log x\,dx,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^\rho \log^2 x\,dx,\ \ldots,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^\rho \log^n x\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{\rho-x}x^\rho \log x\,dx,\ \int_0^\infty e^{-x}x^\rho \log^2 x\,dx,\ \ldots,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\rho \log^n x\,dx$$

при $\rho=0$, очевидно, сохраняют конечную величину.

Итак, с приближением ρ к 0 все производные от $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}$, так же как и сама $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}$, будут иметь пределами величины конечные.

Обращаемся теперь к функции

$$\log \rho - \sum \log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right).$$

Известно, что

$$\left[\left(1-\frac{1}{2^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{1+\rho}}\right)\ldots\right]^{-1}=$$

$$=1+\frac{1}{2^{1+\rho}}+\frac{1}{3^{1+\rho}}+\frac{1}{4^{1+\rho}}+\ldots;$$

откуда выходит

$$-\log\left(1-\frac{1}{2^{1+\rho}}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5^{1+\rho}}\right)-\ldots=$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{2^{1+\rho}}+\frac{1}{3^{1+\rho}}+\frac{1}{4^{1+\rho}}+\ldots\right),$$

что по нашему знакоположению напишется так:

$$-\sum\log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)=\log\left(1+\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\right);$$

следовательно,

$$\log\rho-\sum\log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)=\log\left(1+\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\right)\rho;$$

а потому

$$\log\rho-\sum\log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)=$$

$$=\log\left[1+\rho+\left(\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}\right)\rho\right]$$

Из этого равенства видно, что производные

$$\log\rho-\sum\log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)$$

по ρ выразятся конечным числом дробей, у которых знаменателями будут целые положительные степени

$$1+\rho+\left(\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}\right)\rho,$$

а числители будут целые функции количества ρ, выражения $\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}$ и производных его по ρ. Но такие дроби с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам; ибо выражение $1+\rho+\left(\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}\right)\rho$, составляющее знаменателей этих дробей, с приближением

ρ к 0 приближается к 1 (потому что $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, как доказали, при этом остаётся конечною величиною); функция же $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ и производные её, входящие в состав числителей этих дробей, по доказанному нами, с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам.

Нам остаётся теперь доказать это же относительно производных

$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}.$$

Для этого мы замечаем, что первая производная этой функции есть $\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}}$.

По виду же этой функции нетрудно заметить, что её высшие производные выразятся конечным числом членов вида

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log^p \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}} \cdot \frac{1}{\mu^s \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)^r},$$

где p, r, s не < 0. Но каждый из таких членов для $\rho = 0$ и $\rho > 0$ имеет конечную величину; ибо для $\rho = 0$ и $\rho > 0$ функция, стоящая под знаком $\sum$, относительно $\frac{1}{\mu}$ будет бесконечно малое порядка не ниже второго.

Убедившись, таким образом, что производные от выражений

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right),$$
$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}$$

с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам, мы заключаем то же и о выражении

$$\frac{d^n \left[\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right]}{d\rho^n} +$$
$$+ \frac{d^n \left[\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)\right]}{d\rho^n} + \frac{d^{n-1}\left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)}{d\rho^{n-1}},$$

которое по выполнении дифференцирования и сокращения приводится к следующему:

$$\pm\left(\sum\frac{\log^n\mu}{\mu^{1+\rho}}-\sum\frac{\log^{n-1}m}{m^{1+\rho}}\right),$$

в чём и заключается предложенная нами теорема; ибо, как нетрудно заметить, по нашему знакоположению выражение

$$\sum\frac{\log^n\mu}{\mu^{1+\rho}}-\sum\frac{\log^{n-1}m}{m^{1+\rho}}$$

тождественно выражению

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}.$$

В самом деле, последнее выражение есть разность двух:

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}[\varphi(x+1)-\varphi(x)]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},\quad \sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log^{n-1}x}{x^{1+\rho}},$$

из которых первое приводится к $\sum\frac{\log^n\mu}{\mu^{1+\rho}}$ (сумме значений $\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$, соответствующих простым числам); ибо $\varphi(x+1)$ и $\varphi(x)$, означая число простых чисел, меньших $x+1$ и x, в разности $\varphi(x+1)-\varphi(x)$ дают 1, когда x число простое, и 0, если x число составное; второе же переменою x на m обращается в $\sum\frac{\log^{n-1}m}{m^{1+\rho}}$.

Так убеждаемся в справедливости предложенной нами теоремы.

Из доказанной нами теоремы можно вывести многие любопытные свойства функции, определяющей число простых чисел, меньших данного предела. Для этого мы замечаем, что разность $\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}$, при x большом, есть бесконечно малое относительно $\frac{1}{x}$ порядка первого; а потому выражение

$$\left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right) \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при x большом будет относительно $\frac{1}{x}$ порядка $2+\rho$ и, следовательно, при ρ не < 0 сумма

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right) \cdot \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет иметь значение конечное. Складывая же эту сумму с выражением

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

о котором сейчас доказали теорему I, на основании её заключаем, что значение

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

с приближением ρ к 0 приближается к конечному пределу. А отсюда нетрудно вывести следующую теорему:

Теорема II. *От $x=2$ до $x=\infty$ функция $\varphi(x)$, означающая число простых чисел, меньших x, удовлетворяет бесконечное число раз и неравенству $\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$ и неравенству $\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$, как бы α, оставаясь количеством положительным, ни было мало, а n ни было велико.*

Доказательство. Мы ограничимся здесь доказательством второго неравенства; первое докажется подобным образом. Для доказательства, что неравенству

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x} \tag{1}$$

удовлетворяет бесконечное множество чисел, допустим противное и посмотрим, к чему приведёт нас это допущение. Допустив, что неравенству (1) удовлетворяет конечное число чисел, положим, что a есть целое число, превосходящее и количество e^n и наибольшее число, удовлетворяющее неравенству (1). В этом предположении для $x > a$ будет

$$\varphi(x) \geqslant \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \log x > n,$$

и, следовательно,

$$(2) \qquad \varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \geqslant \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \frac{n}{\log x} < 1.$$

Но в этом случае, как сейчас увидим, в противность доказанному нами, значение выражения

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет приближаться к $+\infty$ с приближением ρ к 0. В самом деле, это выражение мы можем рассматривать как предел

$$\sum_{x=2}^{x=s} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при $s = \infty$. Предполагая же $s > a$, это выражение мы можем рассматривать как сумму

$$(3) \qquad C + \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

называя через C сумму

$$\sum_{x=2}^{x=a} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

которая, очевидно, сохраняет конечное значение при $\rho = 0$ и $\rho > 0$.

Далее, по формуле

$$\sum_{a+1}^{s} u_x(v_{x+1}-v_x)=u_s v_{s+1}-u_a v_{a+1}-\sum_{a+1}^{s} v_x(u_x-u_{x-1}),$$

полагая

$$v_x=\varphi(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x},\quad u_x=\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

выражение (3) преобразуем в такое:

$$C-\left[\varphi(a+1)-\int_2^{a+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n a}{a^{1+\rho}}+$$
$$+\left[\varphi(s+1)-\int_2^{s+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n s}{s^{1+\rho}}-$$
$$-\sum_{x=a+1}^{x=s}\left[\varphi(x)-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right]\left[\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}-\frac{\log^n(x-1)}{(x-1)^{1+\rho}}\right],$$

а это, называя через θ количество >0 и <1 *), можем написать так:

$$C-\left[\varphi(a+1)-\int_2^{a+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n a}{a^{1+\rho}}+$$
$$+\left[\varphi(s+1)-\int_2^{s+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n s}{s^{1+\rho}}+$$
$$+\sum_{x=a+1}^{x=s}\left[\varphi(x)-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right]\left[1+\rho-\frac{n}{\log(x-\theta)}\right]\frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

Полагая же два первых члена этого выражения равными F и замечая по (2), что третий член >0, мы убеждаемся, что всё это выражение более

$$F+\sum_{x=a+1}^{x=s}\left[\varphi(x)-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right]\left[1+\rho-\frac{n}{\log(x-\theta)}\right]\frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

---

*) Меняющееся вместе с x.

Из тех же неравенств (2) видно, что здесь под знаком суммы, в пределах суммирования, функция сохраняет знак $+$. Притом в пределах суммирования будет: во-первых,

$$1+\rho-\frac{n}{\log(x-\theta)} \text{ более } 1-\frac{n}{\log a},$$

ибо $\rho>0$, x не $<a+1$, $\theta<1$; во-вторых,

$$\varphi(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x} \text{ более } \frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)},$$

ибо $\varphi(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ не меньше $\frac{\alpha x}{\log^n x}$ по первому из неравенств (2), а по второму производная $\frac{\alpha x}{\log^n x}$, которая есть $\frac{\alpha}{\log^n x}\left(1-\frac{n}{\log x}\right)$, более 0, вследствие чего

$$\frac{\alpha x}{\log^n x}>\frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)}.$$

А потому предыдущее выражение более

$$F+\sum_{x=a+1}^{x=s}\frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)}\left(1-\frac{n}{\log a}\right)\frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

Но это по сокращении приводится к следующему:

$$F+\alpha\left(1-\frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=s}\frac{1}{(x-\theta)^{1+\rho}},$$

что, очевидно, более

$$F+\alpha\left(1-\frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=s}\frac{1}{x^{1+\rho}}.$$

А это для $s=\infty$ будет

$$F+\alpha\left(1-\frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=\infty}\frac{1}{x^{1+\rho}}$$

и с помощью определённых интегралов напишется так:

$$F+\alpha\left(1-\frac{n}{\log a}\right)\frac{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x-1}x^\rho\,dx}{\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx}.$$

Но это выражение, очевидно, с уменьшением ρ приближается к $+\infty$, ибо $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x-1}dx=+\infty$, $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=1$, а α по положению и $1-\frac{n}{\log a}$ вследствие (2) суть количества положительные.

Убедившись, таким образом, что в сделанном нами предположении не только сумма

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int\limits_2^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

но и количество, меньшее её, с приближением ρ к 0 приближается к $+\infty$, мы заключаем о несправедливости этого предположения, что и следовало доказать.

На основании предыдущей теоремы легко доказать следующую:

Теорема III. *Выражение* $\frac{x}{\varphi(x)}-\log x$ *при* $x=\infty$ *не может иметь пределом количество, отличное от* -1.

Доказательство. Пусть будет L предел значения $\frac{x}{\varphi(x)}-\log x$ при $x=\infty$. В этом предположении мы всегда найдём число N столь большое, что при $x>N$ значение $\frac{x}{\varphi(x)}-\log x$ не будет выходить из пределов $L-\varepsilon$ и $L+\varepsilon$, как бы ε ни было мало. Следовательно, для таких величин x, при $\varepsilon>0$, будет

$$\frac{x}{\varphi(x)}-\log x>L-\varepsilon,\quad \frac{x}{\varphi(x)}-\log x<L+\varepsilon. \tag{4}$$

Но по предыдущей теореме неравенства

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

удовлетворяются при бесконечном множестве величин x и, следовательно, при некоторых числах $x > N$, для которых имеют место неравенства (4). Но эти неравенства в соединении с последними дают

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x > L - \varepsilon,$$

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x < L + \varepsilon,$$

откуда выходит

$$L + 1 < \frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}} + \varepsilon,$$

$$L + 1 > \frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \varepsilon.$$

Из этих неравенств видно, что численная величина $L + 1$ не превосходит численной величины одного из выражений

$$\frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}} \pm \varepsilon.$$

Но количество ε может быть сделано, как заметили, по произволу мало предположением N чрезвычайно большим; то же случается при увеличивании x с выражениями

$$\frac{x-(\log x-1)\left(\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{ax}{\log^n x}\right)}{\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{ax}{\log^n x}},$$

ибо в пределе этих выражений для $x=\infty$ по известным приёмам дифференциального исчисления мы открываем 0.

Убедясь, таким образом, что выражение

$$\frac{x-(\log x-1)\left(\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{ax}{\log^n x}\right)}{\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{ax}{\log^n x}} \pm \varepsilon,$$

определяющее высший предел численной величины $L+1$, может быть сделано по произволу малым, мы по способу пределов заключаем, что $L+1=0$, а потому $L=-1$, что и следовало доказать.

Доказанное нами относительно предела значений $\frac{x}{\varphi(x)}-\log x$ при $x=\infty$ противоречит формуле, предложенной Лежандром для приближённого определения числа простых чисел, меньших данного.

По его мнению, при x большом значение $\varphi(x)$ может быть определено с достаточной точностью уравнением

$$\varphi(x)=\frac{x}{\log x-1{,}08366}.$$

Но отсюда для предела $\frac{x}{\varphi(x)}-\log x$ при $x=\infty$ находим $-1{,}08366$ вместо -1.

На основании теоремы II можно показать высший предел точности, с которою функция $\varphi(x)$, определяющая число простых чисел, меньших x, может быть представлена какою-либо данною функцией $f(x)$. При этом разность $f(x)-\varphi(x)$ мы будем сравнивать с выражениями

$$\frac{x}{\log x},\ \frac{x}{\log^2 x},\ \frac{x}{\log^3 x},\ \ldots$$

и для сокращения будем называть A количеством порядка $\frac{x}{\log^n x}$, если отношение A к $\frac{x}{\log^m x}$ при $x=\infty$ будет ∞ для $m>n$ и 0 для $m<n$. Условившись в этом, мы докажем следующую теорему:

Теорема IV. *Если выражение*

$$\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)$$

при $x=\infty$ имеет пределом количество конечное или бесконечность, то $f(x)$ не может представить $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно.

Доказательство. Пусть будет L предел, к которому значение

$$\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)$$

приближается с приближением x к ∞. Количество L, не будучи 0 по положению, может быть или количеством положительным, или отрицательным. Мы его предположим количеством положительным; но суждения наши без затруднения приложатся и к случаю $L<0$.

Если значение

$$\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)$$

с приближением x к ∞ имеет пределом L, большее 0, то мы найдём число N столь большое, что для $x>N$ значение $\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)$ останется постоянно более некоторого положительного количества l.

Следовательно, предполагая $x > N$, мы будем иметь

$$\frac{\log^n x}{x}\left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right) > l. \tag{5}$$

Но по теореме II, как бы $\alpha = \frac{l}{2}$ ни было мало, для бесконечного множества чисел будет иметь место такое неравенство:

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}, \tag{6}$$

которое даёт

$$f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} < f(x) - \varphi(x) + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

что по умножении на $\frac{\log^n x}{x}$ и по положении $\alpha = \frac{l}{2}$ будет

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] < \frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)] + \frac{l}{2},$$

а отсюда, вследствие неравенства (5), выходит

$$\frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)] > \frac{l}{2}.$$

Но это неравенство, существуя вместе с неравенствами (5) и (6) для бесконечного множества чисел, по причине $\frac{l}{2} > 0$ обнаруживает, что предел

$$\frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)]$$

при $x = \infty$ не есть нуль. Если же этот предел отличен от 0, то разность $f(x) - \varphi(x)$, по сделанному нами определению, есть количество порядка $\frac{x}{\log^n x}$ или низшего, и, следовательно, $f(x)$ разнится с $\varphi(x)$ или количеством порядка $\frac{x}{\log^n x}$, или порядка низшего, что и следовало доказать.

На основании этой теоремы мы узнаём, что формула Лежандра $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$, для которой

$$\frac{\log^2 x}{x}\left(\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)$$

при $x = \infty$ имеет пределом величину 0,08366, не может выражать $\varphi(x)$, число простых чисел, меньших x, верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно.

Также нетрудно показать на основании этой теоремы величины постоянных A и B, при которых функция

$$\frac{x}{A \log x + B}$$

могла бы выражать $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно.

По предыдущей теореме такие величины A и B должны удовлетворять уравнению

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\log^2 x}{x}\left(\frac{x}{A \log x + B} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)\right] = 0.$$

Но разложением $\frac{x}{A \log x + B}$ в ряд находим:

$$\frac{x}{A \log x + B} = \frac{1}{A} \cdot \frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2} \cdot \frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3} \cdot \frac{x}{\log^3 x} - \ldots$$

Интегрируя же $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ по частям, имеем:

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} + C.$$

Вследствие чего предыдущее уравнение изменяется в следующее:

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{\log^2 x}{x}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{A} \cdot \frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2} \cdot \frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3} \cdot \frac{x}{\log^3 x} - \ldots \\ \ldots - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - 2\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C\end{array}\right)\right\} = 0.$$

что приводится к такому уравнению:

$$\lim_{x=\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{A}-1\right)\log x-\left(\frac{B}{A^2}+1\right)+\frac{B^2}{A^3}\frac{1}{\log x}-\ldots\\ \ldots-2\frac{\log^2 x}{x}\int\limits_2^x\frac{dx}{\log^3 x}-C\frac{\log^2 x}{x}\end{array}\right\}=0.$$

Замечая же, что здесь все члены, начиная с третьего, приближаются к 0 с увеличением x, мы убеждаемся, что это уравнение может быть удовлетворено только предположением

$$\frac{1}{A}-1=0,\quad \frac{B}{A^2}+1=0,$$

откуда $A=1$, $B=-1$.

Итак, из функций вида $\frac{x}{A\log x+B}$ одна функция

$$\frac{x}{\log x-1}$$

могла бы выразить $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно.

Что же касается до выбора функции, наиближе выражающей $\varphi(x)$, число простых чисел, меньших данного числа, то относительно её можно доказать такую теорему:

Теорема V. *Если функция $\varphi(x)$, определяющая число простых чисел, меньших x, может быть выражена верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно алгебраически в x, $\log x$, e^x, то такое выражение её есть*

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1\cdot x}{\log^2 x}+\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x}+\ldots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}.$$

Доказательство. Пусть будет $f(x)$ та функция, которая, заключая алгебраически x, $\log x$, e^x, выражает $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно; выражение

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x)-\frac{x}{\log x}-\frac{1\cdot x}{\log^2 x}-\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x}-\ldots-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}\right]$$

с увеличением x должно приближаться к какому-либо пределу, конечному или бесконечно великому, ибо, в противном случае, первая производная этого выражения с увеличением x до ∞ меняла бы свой знак бесконечное число раз; а это, как легко заметить, не может случиться с функцией алгебраическою от x, $\log x$, e^x *).

Итак, для $\varphi(x)$ необходимо будет

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\frac{x}{\log x}-\frac{1\cdot x}{\log^2 x}-\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x}-\ldots\right.\right.$$

$$(7)\qquad \left.\left.\ldots-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}\right)\right\}=L.$$

Но, с другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\log^n x}{x}\left(\frac{x}{\log x}+\frac{1\cdot x}{\log^2 x}+\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right)\right]=0,$$

а это уравнение, сложенное с предыдущим, даёт

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right)\right]=L.$$

Но по положению $f(x)$ выражает $\varphi(x)$ верно до количества порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно, а по предыдущей

*) Что алгебраическая функция от x, $\log x$, e^x перестаёт менять свой знак при x, превосходящем некоторый предел, в этом нетрудно убедиться. Для функции целой это ясно; знак такой функции при довольно большом x будет зависеть от одного члена вида $kx^{m'}\cdot\log^{m''}x\cdot e^{m'''x}$, который не меняет знака при $x>1$. Для всякой же другой алгебраической функции x, $\log x$, e^x, которая пусть будет y, это докажется таким образом. Функция y вообще будет корнем уравнения $u_0y^m+u_1y^{m-1}+\ldots+u_{m-1}y+u_m=0$, и если v будет функция, получаемая через исключение y из предыдущего уравнения и первой производной его по y, то функции u_0, u_m, v, как целые, перестанут менять свой знак и обращаться в 0 при x, превосходящем некоторый предел, а при этом и y будет сохранять свой знак, ибо при величинах x, не обращающих v в нуль, не может иметь уравнение равных корней, а при неравенстве корней знак одного из них может перемениться только с переменою знака u_0 или u_m. Это свойство может быть также доказано и для многих других функций, и на все эти функции будет распространяться теорема V и заключения, из неё вытекающие.

теореме это не может иметь места, если предел значения

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x)-\int_2^x \frac{dx}{\log x}\right]$$

при $x=\infty$ не есть 0. Следовательно, $L=0$, а уравнение (7) даёт

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{\log^n x}{x}\left[f(x)-\frac{x}{\log x}-\frac{1\cdot x}{\log^2 x}-\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x}-\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}\right]\right\}=0,$$

а это показывает, что функция

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1\cdot x}{\log^2 x}+\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x}+\ldots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}$$

не разнится с $f(x)$ количествами порядка $\frac{x}{\log^n x}$ и низшими, и, следовательно, что она, подобно $f(x)$, может выражать $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно, что и требовалось доказать.

На основании доказанной нами теоремы мы заключаем, что если $\varphi(x)$, функция, определяющая число простых чисел, меньших x, может быть выражена алгебраически в x, $\log x$, e^x верно до количеств порядков $\frac{x}{\log x}$, $\frac{x}{\log^2 x}$, $\frac{x}{\log^3 x}$, ... включительно, то такие выражения её суть

$$\frac{x}{\log x},\quad \frac{x}{\log x}+\frac{1\cdot x}{\log^2 x},\quad \frac{x}{\log x}+\frac{1\cdot x}{\log^2 x}+\frac{1\cdot 2\cdot x}{\log^3 x},\ \ldots,$$

а так как эти функции суть не что иное, как значения интеграла $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log x}$, $\frac{x}{\log^2 x}$, $\frac{x}{\log^3 x}$, ..., то во всех этих предположениях интеграл $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ будет выражать $\varphi(x)$ верно до количеств такого порядка, до какого она способна выразиться алгебраически в x, $\log x$, e^x. Что интеграл $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$ при x большом выражает довольно близко число простых чисел, меньших x, в этом мы легко убеждаемся помощью таблиц простых чисел. Но эти таблицы, доселе составленные, слишком малы, чтобы видеть из них превосходство формулы $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$ пред формулою Лежандра $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ или подобными ей. В пределах этих таблиц функции $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$, $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ мало разнятся; но разность их

$$\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \int\limits_2^x \frac{dx}{\log x},$$

имея minimum при $x = e^{\frac{(1{,}08366)^2}{0{,}08366}} = 1\,247\,689$, после него постоянно возрастает до ∞ и при $x > 10\,000\,000$ получает уже довольно большую величину. При этих-то величинах x можно будет обнаружить преимущество формулы $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$ перед $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$. Но для этого потребна таблица простых чисел гораздо обширнее тех, которые мы до сих пор имеем.

Принявши для приближённого определения $\varphi(x)$ интеграл $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$, мы должны будем изменить все формулы Лежандра, выведенные им в предположении $\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$, и формулы наши будут не сложнее его. Вследствие же доказанных нами теорем они должны быть ближе к истине.

Для примера мы найдём здесь приближённые формулы для определения значений

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{X},$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right)$$

при X большом.

Для определения первого мы замечаем, что по нашему знакоположению будет

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=X}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x},$$

ибо $\varphi(x)$, означая число простых чисел, меньших x, в разности $\varphi(x+1)-\varphi(x)$ даёт 0, когда x число составное, и 1, когда оно простое.

Предполагая X числом большим, назовём λ какое-нибудь число менее X, но ещё довольно значительное, дабы в пределах $x=\lambda$ и $x=X$ мы могли с достаточною точностью заменить $\varphi(x)$ интегралом $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$. В этом предположении предыдущее уравнение пишется так:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{X}=$$

$$=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\sum_{x=\lambda}^{x=X}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}.$$

Заменяя же здесь во второй сумме $\varphi(x)$ интегралом $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, найдём:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\sum_{x=\lambda}^{x=X}\frac{\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}}{x}.$$

Но верно до количества порядка $\frac{1}{x}$ интеграл $\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}$ может быть заменён выражением $\frac{1}{\log x}$, и с такою же точкостью сумма $\sum\limits_{x=\lambda}^{x=X}\frac{1}{x\log x}$ может быть заменена интегралом $\int\limits_{\lambda}^{X}\frac{dx}{x\log x}$.

Но такою переменою предыдущее уравнение приводится к следующему:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\int\limits_{\lambda}^{X}\frac{dx}{x\log x},$$

что по выполнении интегрирования даёт:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=$$

$$=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}-\log\log\lambda+\log\log X,$$

или

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=C+\log\log X, \tag{8}$$

полагая C равным количеству $\sum\limits_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}-\log\log\lambda$, не зависящему от X.

Вот уравнение, которое по определении постоянного C может нам служить для приближённого вычисления суммы

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X},$$

когда X велико.

Наше выражение этой суммы проще выражения её у Лежандра, которое такого вида:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\log(\log X-0{,}08366)+C.$$

Теперь переходим к определению произведения

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right).$$

Полагая это произведение равным P и взяв логарифмы от обеих частей уравнения

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right)=P,$$

находим:

$$\log P=\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ldots \\ \ldots+\log\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

что иначе напишется так:

$$\log P=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}\right)+\frac{1}{2}+\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+ \\ +\frac{1}{3}+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}+\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ldots \\ \ldots+\frac{1}{X}+\log\left(1-\frac{1}{X}\right).$$

А здесь верно до количеств порядка $\frac{1}{X}$ можем заменить конечный ряд

$$\frac{1}{2}+\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}+ \\ +\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{X}+\log\left(1-\frac{1}{X}\right)$$

рядом бесконечным

$$\frac{1}{2}+\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+ \\ +\frac{1}{5}+\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ldots;$$

ибо разность этих рядов меньше численного значения

$$\frac{1}{X+1}+\log\left(1-\frac{1}{X+1}\right)+\frac{1}{X+2}+\log\left(1-\frac{1}{X+2}\right)+\ldots,$$

а это меньше интеграла $\int\limits_X^\infty\left[-\frac{1}{x}-\log\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]dx$, который равен $1+(X-1)\log\left(1-\frac{1}{X}\right)$ и которого величина при X большом есть бесконечно малое относительно $\frac{1}{X}$ первого порядка.

Итак, до количества порядка $\frac{1}{X}$ в предыдущем выражении $\log P$ мы можем заменить конечную сумму

$$\frac{1}{2}+\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\frac{1}{5}+\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{X}+\log\left(1-\frac{1}{X}\right)$$

бесконечным рядом

$$\frac{1}{2}+\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}+\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ldots,$$

и называя для сокращения величину последнего через C', мы предыдущее выражение $\log P$ представим так:

$$\log P=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}\right)+C'.$$

Внеся сюда значение

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}$$

из (8), найдём:

$$\log P=-C-\log\log X+C',$$

откуда выходит

$$P=\frac{e^{C'-C}}{\log X};$$

полагая же для сокращения $e^{C'-C}=C_0$ и заменяя P его величиною

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

имеем

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right)=\frac{C_0}{\log X}.$$

Вместо этой формулы Лежандр нашёл такую:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right)=\frac{C_0}{\log X-0{,}08366}.$$

О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. Все вопросы, зависящие от закона распределения простых чисел в ряде

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \text{etc.},$$

представляют вообще большие трудности. Те заключения, которые можно сделать с очень большой вероятностью на основании таблиц простых чисел, чаще всего остаются без строгого доказательства. Например, таблицы простых чисел приводят к мысли, что, начиная от $a > 3$, существует всегда простое число, большее чем a и меньшее $2a-2$ (что составляет известный постулат Бертрана *)), но до настоящего времени не было доказательства этого предложения для значений a, которые превышают пределы наших таблиц. Трудность ещё увеличивается, когда задаются более тесными пределами или когда желают назначить такой предел для a, чтобы для значений a, превышающих этот предел, ряд

$$a+1,\ a+2,\ \ldots,\ 2a-2$$

содержал по крайней мере два, три, четыре и т. д. простых чисел.

Существует ещё другой род очень трудных вопросов, которые также зависят от закона распределения простых чисел в ряде

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \text{etc.}$$

и разрешение которых крайне необходимо. Таковы именно

*) Journal de l'école polytechnique, cahier XXX.

все вопросы о числовых величинах рядов, члены которых суть функции простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \text{etc.}$$

Эйлер доказал, что ряд

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{11^a}+\frac{1}{13^a}+\ldots$$

делается расходящимся для тех же значений a, при которых делается расходящимся ряд

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}+\ldots,$$

а именно для $a\leqslant 1$. Но для некоторых форм общего члена u_n сходимость ряда

$$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+\ldots$$

не представляет необходимого условия для того, чтобы ряд

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+u_{13}+\ldots$$

имел конечное значение. Таков, например, случай

$$u_n=\frac{1}{n\log n}.$$

Действительно, значение ряда

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\ldots,$$

как мы докажем дальше, не превышает 1,73, между тем как ряд

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{6\log 6}+\ldots$$

расходящийся. Какой же критерий сходимости рядов, которые составлены из членов с простыми индексами 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.? А в случае сходимости, как установить степень приближения, с которою вычисляются их величины по первым членам? Решение этих вопросов по отношению к рядам вида

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+u_{13}+\ldots$$

весьма интересно, ибо эти ряды встречаются в некоторых изысканиях о числах.

Этот мемуар содержит решение поименованных вопросов. Я достиг такового, изучая функцию, которая обозначает сумму логарифмов простых чисел, не превышающих данного предела. На основании уравнения, которому удовлетворяет эта функция, можно указать два предела, между которыми лежит значение этой суммы. Между различными заключениями, которые мы отсюда выводим, нам удаётся указать пределы, между которыми находится всегда по крайней мере одно простое число, что нас приводит очень просто к доказательству упомянутого постулата Бертрана. Что касается вычисления рядов формы

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+\ldots,$$

то мы находим критерий для суждения, сходятся они или расходятся, и в первом случае мы даём метод для вычисления, с известною степенью приближения, разности между величинами этих рядов и суммами их первых членов. Мы даём также формулу для вычисления по приближению числа простых чисел, не превышающих данного предела, и указываем предел погрешности этой формулы, что до сих пор ещё не было сделано. В мемуаре, который я имел честь представить С.-Петербургской Академии Наук в 1848 г. *), я доказал, что если в выражении числа простых чисел, не превосходящих x, отбросить все члены, которые исчезают по сравнению с

$$\frac{x}{\log x},\quad \frac{x}{\log^2 x},\quad \frac{x}{\log^3 x},\quad \text{etc.}$$

при $x=\infty$, то это выражение приводится к $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$; но для конечных значений x величина отброшенных членов остаётся неизвестной. Что же касается до формулы Лежандра, то её степень приближения известна только в пределах таблиц простых чисел, которыми пользуются для её проверки.

---

*) См. стр. 29. (*Ред.*)

§ 2. Условимся обозначать вообще через $\theta(z)$ сумму логарифмов (гиперболических) всех простых чисел, которые **не** превышают z. Эта функция делается равною нулю в том случае, когда z меньше наименьшего из простых чисел, именно 2. Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет следующему уравнению*):

$$\left.\begin{array}{l}
\theta(x)+\theta(x)^{\frac{1}{2}}+\theta(x)^{\frac{1}{3}}+\theta(x)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{2}\right)+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+ \\
\qquad\qquad +\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{3}\right)+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+ \\
\qquad\qquad +\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{4}\right)+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+ \\
\qquad\qquad +\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}=\log 1\cdot 2\cdot 3\ldots[x],$$

где мы употребляем $[x]$ для обозначения наибольшего целого числа, содержащегося в величине x. Ряды, которые содержит это уравнение, продолжены до членов, обращающихся в нуль.

Чтобы проверить это уравнение, мы замечаем, что обе части его составлены из членов вида $K\log a$, где a—число простое и K—некоторое целое число. В пер-

---

*) Для краткости мы пишем $\theta\left(\frac{x}{n}\right)^m$ вместо $\theta\left[\left(\frac{x}{n}\right)^m\right]$.

вой части K будет равно числу тех членов в рядах

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{lllll} x, & \frac{x}{2}, & \frac{x}{3}, & \frac{x}{4} & \text{etc.},\\ x^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{etc.},\\ x^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} & \text{etc.},\\ x^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} & \text{etc.},\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

которые не меньше чем a, ибо вообще $\theta(z)$ содержит $\log a$ **только** в случае $z \geqslant a$. Что же касается коэффициента при $\log a$ во второй части, то он равен показателю наивысшей степени a, делящей $1\cdot2\cdot3\ldots[x]$. Но оказывается, что этот показатель равен также числу тех членов в рядах (1), которые не меньше a, ибо число членов ряда

$$x,\quad \frac{x}{2},\quad \frac{x}{3},\quad \frac{x}{4},\quad \text{etc.},$$

которые не меньше a, равно числу тех членов ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ [x],$$

которые делятся на a.

То же соотношение существует между числом членов этого ряда, делящихся на a^2, a^3, a^4 и т. д., и числом тех членов рядов

$$\begin{array}{l} (x)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{etc.},\\ (x)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{etc.},\\ (x)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \text{etc},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

которые не меньше a.

Следовательно, обе части нашего уравнения состоят из одинаковых членов, что и доказывает его тождественность.

Уравнение, которое мы доказали, может быть представлено в следующей форме:

$$(2)\quad \psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots=T(x),$$

где для сокращения положено

$$(3)\quad \begin{cases} \theta(z)+\theta(z)^{\frac{1}{2}}+\theta(z)^{\frac{1}{3}}+\theta(z)^{\frac{1}{4}}+\ldots=\psi(z), \\ \log 1\cdot 2\cdot 3\ldots[x]=T(x). \end{cases}$$

Переходя к приложению этих формул, заметим, что в силу сказанного относительно значения $\theta(z)$, когда z меньше 2, функция $\psi(z)$ обращается в нуль, когда $z<2$, и, следовательно, уравнение (2) будет справедливо даже в пределах $x=0$, $x=2$, если будем считать значение $T(x)$ равным нулю, когда x меньше 2.

§ 3. На основании этого уравнения нетрудно найти несколько неравенств, которым удовлетворяет функция $\psi(z)$. В этом мемуаре мы будем пользоваться следующими двумя:

$$\psi(x)>T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right),$$

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)<T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right).$$

Для доказательства этих неравенств мы ищем при помощи (2) величину

$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right),$$

что приводит нас к такому уравнению:

$$
(4)\left\{\begin{array}{l}
\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots \\
+\psi\left(\frac{x}{30}\right)+\psi\left(\frac{x}{2\cdot 30}\right)+\psi\left(\frac{x}{3\cdot 30}\right)+\psi\left(\frac{x}{4\cdot 30}\right)+\ldots \\
-\psi\left(\frac{x}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2\cdot 2}\right)-\psi\left(\frac{x}{3\cdot 2}\right)-\psi\left(\frac{x}{4\cdot 2}\right)-\ldots \\
-\psi\left(\frac{x}{3}\right)-\psi\left(\frac{x}{2\cdot 3}\right)-\psi\left(\frac{x}{3\cdot 3}\right)-\psi\left(\frac{x}{4\cdot 3}\right)-\ldots \\
-\psi\left(\frac{x}{5}\right)-\psi\left(\frac{x}{2\cdot 5}\right)-\psi\left(\frac{x}{3\cdot 5}\right)-\psi\left(\frac{x}{4\cdot 5}\right)-\ldots
\end{array}\right\}=
$$

$$
=T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right),
$$

первая часть которого приводится к виду

$$
A_1\psi(x)+A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right)+A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right)+A_4\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots
$$

$$
\ldots+A_n\psi\left(\frac{x}{n}\right)+\ldots,
$$

где A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n и т. д.—числовые коэффициенты. Но, рассматривая значения этих коэффициентов, нетрудно убедиться, что вообще

$A_n=1$, если $n=30m+1$, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
$A_n=0$, если $n=30m+2$, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 21, 22, 25, 26, 27, 28,
$A_n=-1$, если $n=30m+6$, 10, 12, 15, 18, 20, 24,
$A_n=-1$, если $n=30m+30$.

Действительно, в первом случае n не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, а потому член $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ находится только в первой строке уравнения (4). Во втором случае n делится на одно из чисел 2, 3, 5; **следовательно**, кроме члена $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ в первой строке, в одной из трёх последних строк будет член $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ и, после приведения, коэффициент при $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ будет 0. В третьем случае n делится на два из чисел 2, 3, 5. Следовательно, три последние строки уравнения (4) содержат два члена, равных $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, и так как первая строка содержит $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ со знаком $+$, то в результате получаем $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$. К такому же заключению придём и в последнем случае, когда n делится на 30; ибо тогда член $\pm\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ встречается во всех пяти строках: два раза со знаком $+$ и три раза со знаком $-$.

Следовательно, для

$$n = 30m + 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30$$

находим

$$A_n = 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,$$

вследствие чего уравнение (4) приводится к такому:

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \ldots = T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right),$$

где все члены первой части имеют коэффициентами 1, взятую попеременно со знаками $+$ и $-$. Сверх того, так как по свойству функции $\psi(x)$ ряд

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \ldots$$

убывающий, то его величина будет заключена между пределами $\psi(x)$ и $\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Следовательно, на основании предыдущего уравнения, необходимо будет:

$$\psi(x) \geqslant T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right),$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leqslant T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right).$$

§ 4. Рассмотрим теперь функцию $T(x)$, которая входит в эти формулы. На основании (3), обозначая через a наибольшее целое число, содержащееся в величине x, которую мы предполагаем не меньше 1, имеем:

$$T(x) = \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a,$$

или, что то же,

$$T(x) = \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a\,(a+1) - \log(a+1).$$

Но известно, что

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a < \log \sqrt{2\pi} + a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a},$$

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a\,(a+1) > \log \sqrt{2\pi} + (a+1) \log(a+1) - (a+1) + \frac{1}{2} \log(a+1);$$

поэтому

$$T(x) < \log \sqrt{2\pi} + a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a},$$

$$T(x) > \log \sqrt{2\pi} + (a+1) \log(a+1) - (a+1) - \frac{1}{2} \log(a+1)$$

и, следовательно,

$$T(x) < \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12},$$

$$T(x) > \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x - \frac{1}{2} \log x;$$

ибо

$$a \leqslant x < a+1, \quad a \geqslant 1,$$

откуда, очевидно, вытекают условия

$$x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \geqslant a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a},$$

$$x \log x - x - \frac{1}{2} \log x \leqslant (a+1) \log(a+1) - (a+1) - \frac{1}{2} \log(a+1).$$

Неравенства, которые мы доказали относительно $T(x)$, дают нам:

$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)<2\log\sqrt{2\pi}+\frac{2}{12}+\frac{31}{30}x\log x-$$
$$-x\log 30^{\frac{1}{30}}-\frac{31}{30}x+\log x-\frac{1}{2}\log 30,$$
$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)>2\log\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}x\log x-$$
$$-x\log 30^{\frac{1}{30}}-\frac{31}{30}x-\log x+\frac{1}{2}\log 30,$$
$$T\left(\frac{x}{2}\right)+T\left(\frac{x}{3}\right)+T\left(\frac{x}{5}\right)<3\log\sqrt{2\pi}+\frac{3}{12}+$$
$$+\frac{31}{30}x\log x-x\log 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}-\frac{31}{30}x+\frac{3}{2}\log x-\frac{1}{2}\log 30,$$
$$T\left(\frac{x}{2}\right)+T\left(\frac{x}{3}\right)+T\left(\frac{x}{5}\right)>3\log\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}x\log x-$$
$$-x\log 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}-\frac{31}{30}x-\frac{3}{2}\log x+\frac{1}{2}\log 30.$$

Сочетая эти неравенства при помощи вычитания, а именно — первое с последним и второе с третьим, мы найдём:

$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)<$$
$$<x\log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}+\frac{5}{2}\log x-\frac{1}{2}\log 1800\pi+\frac{2}{12},$$
$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)>$$
$$>x\log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}-\frac{5}{2}\log x+\frac{1}{2}\log\frac{450}{\pi}-\frac{3}{12},$$

что мы напишем в виде:

$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)<$$
$$<Ax+\frac{5}{2}\log x-\frac{1}{2}\log 1800\pi+\frac{2}{12},$$
$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)>$$
$$>Ax-\frac{5}{2}\log x+\frac{1}{2}\log\frac{450}{\pi}-\frac{3}{12},$$

полагая для краткости

$$(5)\qquad A=\log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}=0{,}92129202\ldots$$

Анализ, который мы применяли для доказательства этих неравенств, предполагает $x \geqslant 30$, потому что при определении $T(x)$ мы предполагали $x \geqslant 1$, а потом мы заменяли x через

$$\frac{x}{2},\quad \frac{x}{3},\quad \frac{x}{5},\quad \frac{x}{30}.$$

Но нетрудно убедиться, что мы будем иметь формулы, применимые для всех значений x, бо́льших чем 1, если заменим предшествующие неравенства следующими, более простыми:

$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)<$$
$$<Ax+\frac{5}{2}\log x,$$
$$T(x)+T\left(\frac{x}{30}\right)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)>$$
$$>Ax-\frac{5}{2}\log x-1;$$

ибо проверяя эти неравенства для значений x, лежащих в пределах 1 и 30, очень легко удостовериться, что они не представят никаких исключений.

§ 5. Сочетая эти неравенства с теми, которые были выведены выше по отношению $\psi(x)$ (§ 3), мы придём к таким двум формулам:

$$\psi(x)>Ax-\frac{5}{2}\log x-1,\qquad \psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)<Ax+\frac{5}{2}\log x,$$

из которых первая даёт низший предел для $\psi(x)$.

Вторая же формула послужит нам для нахождения другого предела для $\psi(x)$. Чтобы этого достигнуть, мы замечаем, что функция

$$f(x)=\frac{6}{5}Ax+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{4}\log x$$

удовлетворяет уравнению

$$f(x)-f\left(\frac{x}{6}\right)=Ax+\frac{5}{2}\log x.$$

Но вычитая это уравнение из неравенства

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)<Ax+\frac{5}{2}\log x,$$

получаем

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)-f(x)+f\left(\frac{x}{6}\right)<0,$$

или, что всё равно,

$$\psi(x)-f(x)<\psi\left(\frac{x}{6}\right)-f\left(\frac{x}{6}\right).$$

Переменяя последовательно в этой формуле x на $\frac{x}{6}$, $\frac{x}{6^2}, \ldots, \frac{x}{6^m}$, мы найдём

$$\psi(x)-f(x)<\psi\left(\frac{x}{6}\right)-f\left(\frac{x}{6}\right)<\psi\left(\frac{x}{6^2}\right)-f\left(\frac{x}{6^2}\right)<\ldots$$
$$\ldots<\psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right)-f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right).$$

Если предположим теперь, что m — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $\frac{x}{6^m}\geqslant 1$, то количество $\frac{x}{6^{m+1}}$ будет лежать между 1 и $\frac{1}{6}$; исследуя же значения, которые получает $\psi(z)-f(z)$ в пределах $z=1$, $z=\frac{1}{6}$, находим, что $\psi(z)=0$ и $-f(z)$ остаётся меньше 1. Следовательно, $\psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right)-f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right)<1$ и в силу предыдущих неравенств

$$\psi(x)-f(x)<1.$$

Наконец, подставляя вместо $f(x)$ её значение, мы будем иметь:

$$\psi(x)<\frac{6}{5}Ax+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{4}\log x+1.$$

На основании найденных нами формул нетрудно указать два предела, между которыми лежит величина θ, т. е. сумма логарифмов всех простых чисел, не превосходящих x.

Действительно, по формулам (3) находим:

$$\psi(x)-\psi(x)^{\frac{1}{2}}=\theta(x)+\theta(x)^{\frac{1}{3}}+\theta(x)^{\frac{1}{5}}+\ldots,$$

$$\psi(x)-2\psi(x)^{\frac{1}{2}}=\theta(x)-\left[\theta(x)^{\frac{1}{2}}-\theta(x)^{\frac{1}{3}}\right]-$$
$$-\left[\theta(x)^{\frac{1}{4}}-\theta(x)^{\frac{1}{5}}\right]-\ldots,$$

откуда следует, что

(6) $$\theta(x)\leqslant\psi(x)-\psi(x)^{\frac{1}{2}},\quad \theta(x)\geqslant\psi(x)-2\psi(x)^{\frac{1}{2}},$$

ибо члены

$$\theta(x)^{\frac{1}{3}},\ \theta(x)^{\frac{1}{5}},\ \ldots,\ \theta(x)^{\frac{1}{2}}-\theta(x)^{\frac{1}{3}},\ \theta(x)^{\frac{1}{4}}-\theta(x)^{\frac{1}{5}},\ \ldots,$$

очевидно, положительны или равны нулю.

Но мы нашли

$$\psi(x)<\frac{6}{5}Ax+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{4}\log x+1,$$

$$\psi(x)>Ax-\frac{5}{2}\log x-1,$$

что даёт

$$\psi(x)^{\frac{1}{2}}<\frac{6}{5}Ax^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{16\log 6}\log^2 x+\frac{5}{8}\log x+1,$$

$$\psi(x)^{\frac{1}{2}}>Ax^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{4}\log x-1,$$

и, следовательно,

$$\psi(x)-\psi(x)^{\frac{1}{2}}<\frac{6}{5}Ax-Ax^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{2}\log x+2,$$

$$\psi(x)-2\psi(x)^{\frac{1}{2}}>Ax-\frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{8\log 6}\log^2 x-\frac{15}{4}\log x-3.$$

А потому, на основании (6),

(7) $$\begin{cases}\theta(x)<\frac{6}{5}Ax-Ax^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{2}\log x+2,\\[2ex] \theta(x)>Ax-\frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{8\log 6}\log^2 x-\frac{15}{4}\log x-3.\end{cases}$$

Итак, мы пришли к заключению, что сумма логарифмов всех простых чисел, не превышающих x, содержится в пределах

$$\frac{6}{5}Ax - Ax^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2,$$

$$Ax - \frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3.$$

§ 6. Посмотрим теперь, что можно извлечь из этих формул относительно числа простых чисел, лежащих между данными пределами. Пусть L и l будут два упомянутых предела и предположим, что число простых чисел, бóльших чем l и не превышающих L, равно m; сумма логарифмов этих чисел будет заключена между пределами $m\log l$ и $m\log L$. Следовательно, согласно нашим обозначениям, имеем

$$\theta(L) - \theta(l) > m\log l,$$
$$\theta(L) - \theta(l) < m\log L,$$

и потому

$$m < \frac{\theta(L) - \theta(l)}{\log l}, \quad m > \frac{\theta(L) - \theta(l)}{\log L}.$$

Но на основании (7) мы находим, что значение $\theta(L) - \theta(l)$ меньше

$$A\left(\frac{6}{5}L - l\right) - A\left(L^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}(2\log^2 L + \log^2 l) + \frac{5}{4}(2\log L + 3\log l) + 5,$$

и больше

$$A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - A\left(\frac{12}{5}L^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 L + 2\log^2 l) - \frac{5}{4}(3\log L + 2\log l) - 5;$$

следовательно,

$$m < \frac{A\left(\frac{6}{5}L - l\right) - A\left(L^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}(2\log^2 L + \log^2 l)}{\log l} + \frac{\frac{5}{4}(2\log L + 3\log l) + 5}{\log l},$$

$$m > \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-A\left(\frac{12}{5}L^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{5}{8\log 6}(\log^2 L+2\log^2 l)}{\log L} - \frac{\frac{5}{4}(3\log L+2\log l)+5}{\log L}.$$

Таким образом, мы нашли два предела, между которыми лежит число m, обозначающее число простых чисел, бо́льших l и не превосходящих L.

Последняя из этих формул показывает нам, что в пределах l и L находится более, чем k простых чисел, если k, L и l удовлетворяют условию

$$k < \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-A\left(\frac{12}{5}L^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{5}{8\log 6}(\log^2 L+2\log^2 l)}{\log L} - \frac{\frac{5}{4}(3\log L+2\log l)+5}{\log L};$$

и так как $l<L$, то этому условию удовлетворим положив

$$k = \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-\frac{12}{5}AL^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{8\log 6}(\log^2 L+2\log^2 L)}{\log L} - \frac{\frac{5}{4}(3\log L+2\log L)+5}{\log L},$$

и, следовательно, взяв

$$l=\frac{5}{6}L-2L^{\frac{1}{2}}-\frac{25\log^2 L}{16A\log 6}-\frac{5}{6A}\left(\frac{25}{4}+k\right)\log L-\frac{25}{6A}.$$

Итак, если возьмём для l это значение, то в пределах l и L найдётся наверно более, чем k простых чисел. К этому следует присоединить ещё условие, что l и L не меньше 1, как мы предполагали выше относительно x.

В частном случае $k=0$ мы заключаем, что в пределах l и L существует по крайней мере одно простое число, если возьмём

$$l=\frac{5}{6}L-2L^{\frac{1}{2}}-\frac{25\log^2 L}{16A\log 6}-\frac{125\log L}{24A}-\frac{25}{6A}.$$

Это приводит нас очень просто к строгому доказательству упомянутого постулата Бертрана. Нетрудно убедиться, что между пределами a и $2a-2$, в случае $a > 160$, заключаются следующие два предела:

$$l=\frac{5}{6}L-2L^{\frac{1}{2}}-\frac{25\log^2 L}{16A\log 6}-\frac{125\log L}{24A}-\frac{25}{6A},\quad L,$$

где L—прилично выбранное число. Действительно, для того чтобы оба эти предела лежали между

$$a \text{ и } 2a-2,$$

нужно только удовлетворить таким условиям:

$$2a-2 > L,$$
$$a < \frac{5}{6}L-2L^{\frac{1}{2}}-\frac{25\log^2 L}{16A\log 6}-\frac{125\log L}{24A}-\frac{25}{6A}.$$

Но очевидно, что первое из них удовлетворяется при $L=2a-3$. Что же касается до второго, то для $L=2a-3$ оно приводится к следующему

$$a < \frac{5}{6}(2a-3)-2\sqrt{2a-3}-\frac{25\log^2(2a-3)}{16A\log 6}-\frac{125\log(2a-3)}{24A}-\frac{25}{6A},$$

которое справедливо для всех значений a, превышающих наибольший корень уравнения

$$x=\frac{5}{6}(2x-3)-2\sqrt{2x-3}-\frac{25\log^2(2x-3)}{16A\log 6}-\frac{125\log(2x-3)}{24A}-\frac{25}{6A},$$

а этот корень, как мы нашли, лежит между 159 и 160.

Следовательно, если только a превышает 160, можно включить между a и $2a-2$ два новых предела

$$l=\frac{5}{6}L-2L^{\frac{1}{2}}-\frac{25\log^2 L}{16A\log 6}-\frac{125\log L}{24A}-\frac{25}{6A},\quad L;$$

и так как между этими последними содержится по крайней мере одно простое число, то можем с уверенностью отыскать такое простое число, которое превосходит a и остаётся меньшим $2a-2$, что и доказывает постулат

Бертрана для всех значений a, превышающих 160. Для значений же a, не превышающих 160, постулат проверяется непосредственно при помощи таблиц простых чисел.

§ 7. При помощи функции $\theta(x)$, которая у нас обозначает сумму логарифмов всех простых чисел, не превышающих x, можно легко выразить сумму

$$F(\alpha)+F(\beta)+F(\gamma)+\ldots+F(\rho)=U,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho$ — простые числа, лежащие в данных пределах. Действительно, если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho$ заключаются в пределах l и L, то эта сумма может быть представлена таким образом:

$$\frac{\theta(l)-\theta(l-1)}{\log l}F(l)+\frac{\theta(l+1)-\theta(l)}{\log(l+1)}F(l+1)+$$
$$+\frac{\theta(l+2)-\theta(l+1)}{\log(l+2)}F(l+2)+\ldots+\frac{\theta(L)-\theta(L-1)}{\log L}F(L);$$

ибо вообще функция $\frac{\theta(x)-\theta(x-1)}{\log x}$ для целого x приводится к 0, если x число сложное, и к 1, если x число простое. Следовательно,

$$U=\frac{\theta(l)-\theta(l-1)}{\log l}F(l)+\frac{\theta(l+1)-\theta(l)}{\log(l+1)}F(l+1)+$$
$$+\frac{\theta(l+2)-\theta(l+1)}{\log(l+2)}F(l+2)+\ldots+\frac{\theta(L)-\theta(L-1)}{\log L}F(L),$$

или, что то же,

$$U=-\theta(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\left[\frac{F(l)}{\log l}-\frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\theta(l)+$$
$$+\left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)}-\frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\theta(l+1)+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{F(L)}{\log L}-\frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\theta(L)+\frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\theta(L).$$

Но если предположим, что функция $\frac{F(x)}{\log x}$ остаётся постоянно положительною и убывающей, в пределах $x=l-1$ и $x=L+1$, то знак при $\theta(l-1)$ в выражении U будет $-$, а знак при каждой из функций

$$\theta(l),\ \theta(l+1),\ \ldots,\ \theta(L)$$

будет $+$. Следовательно, полагая для сокращения

$$(8)\quad \begin{cases} \theta_{\mathrm{I}}(x)=\frac{6}{5}Ax-Ax^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{2}\log x+2, \\ \theta_{\mathrm{II}}(x)=Ax-\frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{8\log 6}\log^2 x-\frac{15}{4}\log x-3, \end{cases}$$

мы, на основании (7), будем иметь величину, меньшую U, если в выражении для U заменим

$$\theta(l-1) \text{ через } \theta_{\mathrm{I}}(l-1)$$

и

$$\theta(l),\ \theta(l+1),\ \ldots,\ \theta(L) \text{ через } \theta_{\mathrm{II}}(l),\ \theta_{\mathrm{II}}(l+1),\ \ldots,\ \theta_{\mathrm{II}}(L).$$

Напротив, заменяя $\theta(l-1)$ через $\theta_{\mathrm{II}}(l-1)$, а $\theta(l)$, $\theta(l+1), \ldots, \theta(L)$ через $\theta_{\mathrm{I}}(l)$, $\theta_{\mathrm{I}}(l+1), \ldots, \theta_{\mathrm{I}}(L)$, мы найдём величину бо́льшую, чем U. Поэтому

$$\begin{aligned} U > -\theta_{\mathrm{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\left[\frac{F(l)}{\log l}-\frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\theta_{\mathrm{II}}(l)&+\\ +\left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)}-\frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\theta_{\mathrm{II}}(l+1)&+\\ +\ldots+\left[\frac{F(L)}{\log L}-\frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\theta_{\mathrm{II}}(L)&+\\ +\frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\theta_{\mathrm{II}}(L)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U < -\theta_{\mathrm{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\left[\frac{F(l)}{\log l}-\frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\theta_{\mathrm{I}}(l)&+\\ +\left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)}-\frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\theta_{\mathrm{I}}(l+1)&+\\ +\ldots+\left[\frac{F(L)}{\log L}-\frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\theta_{\mathrm{I}}(L)&+\\ +\frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\theta_{\mathrm{I}}(L)&, \end{aligned}$$

и так как вторые части тождественны с суммами

$$\theta_{\mathrm{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}-\theta_{\mathrm{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\sum_{x=l}^{x=L}F(x)\frac{\theta_{\mathrm{II}}(x)-\theta_{\mathrm{II}}(x-1)}{\log x},$$

$$\theta_{\mathrm{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}-\theta_{\mathrm{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\sum_{x=l}^{x=L}F(x)\frac{\theta_{\mathrm{I}}(x)-\theta_{\mathrm{I}}(x-1)}{\log x},$$

то мы заключим, что

$$(9)\quad \begin{cases} U > \theta_{\text{II}}(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_{\text{I}}(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{x=l}^{x=L} F(x)\dfrac{\theta_{\text{II}}(x)-\theta_{\text{II}}(x-1)}{\log x}, \\ U < \theta_{\text{I}}(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_{\text{II}}(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{x=l}^{x=L} F(x)\dfrac{\theta_{\text{I}}(x)-\theta_{\text{I}}(x-1)}{\log x}. \end{cases}$$

На основании только что найденных нами формул нетрудно доказать такую теорему:

Теорема. *Если функция $F(x)$ остаётся положительной по переходе x за некоторый предел, то сходимость ряда*

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \ldots$$

будет необходимым и достаточным условием для того, чтобы ряд

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + F(13) + \ldots$$

был также сходящимся.

Доказательство. Пусть l будет предел для x, за которым $F(x)$ сохраняет знак $+$; пусть, далее, $\dfrac{F(x)}{\log x}$ представляет функцию убывающую, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho$ — простые числа, заключённые между пределами l и L. Полагая

$$S = F(2) + F(3) + F(5) + \ldots$$
$$\ldots + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho) =$$
$$= S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho),$$

мы заключим, на основании (9), что

$$S > S_0 + \theta_{\text{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_{\text{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l} +$$
$$+ \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_{\text{II}}(x)-\theta_{\text{II}}(x-1)}{\log x},$$

$$S < S_0 + \theta_{\mathrm{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_{\mathrm{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \\ + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_{\mathrm{I}}(x)-\theta_{\mathrm{I}}(x-1)}{\log x}.$$

Эти неравенства показывают, что в том случае, когда выражения

$$\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_{\mathrm{II}}(x)-\theta_{\mathrm{II}}(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_{\mathrm{I}}(x)-\theta_{\mathrm{I}}(x-1)}{\log x}$$

для $L=\infty$ остаются конечными, ряд

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

будет сходящимся; напротив, если при $L=\infty$ эти выражения бесконечно велики, то ряд

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

расходящийся.

Подстановка вместо $\theta_{\mathrm{I}}(x)$, $\theta_{\mathrm{II}}(x)$ их значений (8) обращает предыдущие выражения в такие:

$$\sum_{x=l}^{x=L}\Big[A-\frac{12}{5}A(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})-\frac{5}{8\log 6}(\log^2 x-\log^2(x-1))- \\ -\frac{15}{4}(\log x-\log(x-1))\Big]\frac{F(x)}{\log x},$$

$$\sum_{x=l}^{x=L}\Big[\frac{6}{5}A-A(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})+\frac{5}{4\log 6}(\log^2 x-\log^2(x-1))+ \\ +\frac{5}{2}(\log x-\log(x-1))\Big]\frac{F(x)}{\log x},$$

и так как функции

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}, \quad \log^2 x-\log^2(x-1), \quad \log x-\log(x-1)$$

для очень больших значений x становятся бесконечно малыми, то мы заключаем, что в случае, когда

$$\sum_{x=l}^{x=L'}\frac{F(x)}{\log x}$$

имеет конечную величину, выражения

$$\sum_{x=l}^{x=L} F(x) \frac{\theta_{\rm I}(x)-\theta_{\rm I}(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^{x=L} F(x) \frac{\theta_{\rm II}(x)-\theta_{\rm II}(x-1)}{\log x}$$

при $L=\infty$ будут также конечные; напротив, они будут бесконечно велики для $L=\infty$, если

$$\sum_{x=l}^{x=L} \frac{F(x)}{\log x}$$

с возрастанием L будет стремиться к бесконечности.

Но первый случай имеет всегда место, если ряд

$$\frac{F(2)}{\log 2}+\frac{F(3)}{\log 3}+\frac{F(4)}{\log 4}+\frac{F(5)}{\log 5}+\frac{F(6)}{\log 6}+\ldots$$

сходящийся; второй же случай предполагает расходимость этого ряда, что и доказывает вышеизложенную теорему.

Так например, мы заключаем, что ряды

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\frac{1}{11\log 11}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2\log^2(\log 2)}+\frac{1}{3\log^2(\log 3)}+\frac{1}{5\log^2(\log 5)}+\frac{1}{7\log^2(\log 7)}+$$
$$+\frac{1}{11\log^2(\log 11)}+\ldots$$

сходящиеся, между тем как ряды

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2\log(\log 2)}+\frac{1}{3\log(\log 3)}+\frac{1}{5\log(\log 5)}+\frac{1}{7\log(\log 7)}+$$
$$+\frac{1}{11\log(\log 11)}+\ldots$$

расходящиеся.

§ 8. Когда ряд

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

сходящийся, то мы найдём его сумму с каким угодно приближением, вычисляя сумму его первых членов. Обозначая через S_0 сумму всех членов, предшествующих $F(\alpha)$, где α — наименьшее простое число, содержащееся в ряду

$$l,\ l+1,\ l+2,\ \text{etc.},$$

а l—такое целое число, что для всех превосходящих его значений x функция $\frac{F(x)}{\log x}$ положительна и убывает, мы представим ряд

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+F(11)+\ldots=S$$

в таком виде:

$$S=S_0+F(\alpha)+F(\beta)+F(\gamma)+\ldots=S_0+U.$$

Поищем теперь пределы, между которыми лежит U, полагая в формулах (9) $L=\infty$. Мы найдём, таким образом,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} U &> \theta_{\mathrm{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}-\theta_{\mathrm{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\\ &\quad+\sum_{x=l}^{x=\infty}\frac{\theta_{\mathrm{II}}(x)-\theta_{\mathrm{II}}(x-1)}{\log x}F(x),\\ U &< \theta_{\mathrm{I}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}-\theta_{\mathrm{II}}(l-1)\frac{F(l)}{\log l}+\\ &\quad+\sum_{x=l}^{x=\infty}\frac{\theta_{\mathrm{I}}(x)-\theta_{\mathrm{I}}(x-1)}{\log x}F(x). \end{aligned}\right.$$

Полусумма этих выражений даст приближённое значение для U, полуразность же их будет пределом погрешности этого значения. Последний предел будет тем меньше, чем значительнее число l, а следовательно, и число членов суммы S_0.

Чтобы дать пример подобного вычисления, найдём приближённую величину ряда

$$S=\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\frac{1}{11\log 11}+\ldots$$

Полагая

$$l=100,$$

$$S_0=\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\frac{1}{11\log 11}+\ldots+\frac{1}{97\log 97},$$

$$S=S_0+U,$$

где U определено рядом:

$$U = \frac{1}{101 \log 101} + \frac{1}{103 \log 103} + \frac{1}{107 \log 107} + \ldots,$$

найдём, по таблицам простых чисел,

$$S_0 = 1{,}42,$$

а неравенства (10) для $F(x) = \frac{1}{x \log x}$, $l = 100$ дадут

$$U > \frac{\theta_{\text{II}}(99)}{100 \log^2 100} - \frac{\theta_{\text{I}}(99)}{100 \log^2 100} + \sum_{x=100}^{x=\infty} \frac{\theta_{\text{II}}(x) - \theta_{\text{II}}(x-1)}{x \log^2 x} > 0{,}14,$$

$$U < \frac{\theta_{\text{I}}(99)}{100 \log^2 100} - \frac{\theta_{\text{II}}(99)}{100 \log^2 100} + \sum_{x=100}^{x=\infty} \frac{\theta_{\text{I}}(x) - \theta_{\text{I}}(x-1)}{x \log^2 x} < 0{,}28.$$

Из этих неравенств мы заключаем, что величина U отличается от $\frac{0{,}28 + 0{,}14}{2} = 0{,}21$ на количество, меньшее чем $\frac{0{,}28 - 0{,}14}{2} = 0{,}07$.

Следовательно,

$$1{,}42 + 0{,}21 = 1{,}63$$

будет величина ряда

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \frac{1}{11 \log 11} + \ldots$$

с точностью до 0,1.

§ 9. Число простых чисел, заключающихся в данных пределах, выводится, как частный случай, из величины ряда

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho),$$

которым мы занимались в предыдущих параграфах. Действительно, если положим

$$F(x) = 1,$$

то сумма

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho)$$

будет содержать столько единиц, сколько находится членов в ряду простых чисел

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho.$$

Следовательно, формулы (9), в случае $F(x)=1$, определят пределы, между которыми лежит число простых чисел, заключающихся между l и L. Эти пределы теснее тех, которые мы нашли в § 6 при посредстве неравенств, которым удовлетворяет функция $\theta(x)$. В частном случае $l=2$ мы находим, что

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\theta_{II}(1)}{\log 2}-\dfrac{\theta_{I}(1)}{\log 2}+\displaystyle\sum_{x=2}^{x=L}\dfrac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{\log x}, \\ \dfrac{\theta_{I}(1)}{\log 2}-\dfrac{\theta_{II}(1)}{\log 2}+\displaystyle\sum_{x=2}^{x=L}\dfrac{\theta_{I}(x)-\theta_{I}(x-1)}{\log x} \end{cases}$$

будут пределами для числа простых чисел, лежащих между 2 и L, или, что то же, — для числа простых чисел, не превосходящих L. Вычисляя полусумму этих пределов (11), мы найдём приближённое значение для числа простых чисел, не превосходящих L. Погрешность же этого значения не может превосходить полуразности выражений (11). При помощи очень простых вычислений можно убедиться, что отношение полуразности выражений (11) к их полусумме при $L=\infty$ равно $\frac{1}{11}$. Поэтому при очень больших значениях L это отношение будет ниже $\frac{1}{10}$, а, следовательно, если вычислить по нашим формулам число простых чисел, не превосходящих очень большого данного предела, то погрешность будет меньше $\frac{1}{10}$ искомого числа.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

§ I. Если дифференциал $\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, составленный из рациональной дроби $\frac{f_0(x)}{F_0(x)}$ и корня целой функции $\theta(x)$, интегрируется при помощи алгебраических и логарифмических знаков, то, как мы знаем на основании остроумных изысканий Абеля и Лиувилля, интеграл $\int \frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ имеет следующий вид:

$$U + A^0 \log V^0 + A' \log V' + A'' \log V'' + \ldots,$$

где $U, V^0, V', V'', \ldots$ — рациональные функции от x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$; $A^0, A', A'', \ldots$ — постоянные величины.

Определение алгебраического члена U не представляет затруднений. Известно, что он имеет вид $\frac{P}{Q}[\theta(x)]^{\frac{m-1}{m}}$, где P и Q — целые функции, находимые при помощи следующих действий *):

1°. Знаменатель Q алгебраической части находится как общий наибольший делитель функций $F_0(x)\,\theta(x)$ и $\frac{d\,[F_0(x)\,\theta(x)]}{dx}$.

2°. Если степени функций

$$\frac{Qf_0(x)}{F_0(x)\,\theta(x)}, \quad \frac{Q}{x\,[\theta(x)]^{\frac{m-1}{m}}}$$

*) Мы предполагаем, что дифференциал $\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ приведён так, что $\theta(x)$ не содержит множителей степени выше $m-1$.

ниже -1, то алгебраический член равен 0. В противном случае, обозначая через n наименьшее целое число, превышающее степени этих функций, можно найти числитель по формуле:

$$P = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n,$$

где $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ — постоянные коэффициенты, значения которых определяются из условий, что полином

$$f_0(x) - \frac{F_0(x)\,\theta(x)}{Q}\,[B_1 + 2B_2 x + \ldots + nB_n x^{n-1}] -$$
$$-\left[\frac{m-1}{m}\,\frac{F_0(x)\,\theta'(x)}{Q} - \frac{F_0(x)\,\theta(x)\,\frac{dQ}{dx}}{Q^2}\right] \times$$
$$\times\,[B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n]$$

делится на $\frac{Q}{D}$ и притом степень частного не выше степени $\frac{F_0(x)\sqrt[m]{\theta(x)}\,D}{xQ}$, где D—общий наибольший делитель функций $\theta(x)$ и $\theta'(x)$.

Если нельзя удовлетворить этим условиям, то заключаем, что интегрирование дифференциала $\frac{f_0(x)}{F_0(x)}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ при помощи алгебраических и логарифмических знаков невозможно. В противном случае мы находим алгебраический член и, вычитая его дифференциал из $\frac{f_0(x)}{F_0(x)}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, получаем выражение, которое должно интегрироваться при помощи одних логарифмических членов. Этим-то интегрированием мы теперь и займёмся.

В этом мемуаре мы даём решение следующих вопросов:

1°. Определить число логарифмических членов в выражении данного интеграла.

Решение этого вопроса даёт, как частный случай, доказательство теоремы, высказанной Абелем следующим образом:

«. . . существует следующая замечательная теорема:

„Если интеграл вида $\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, *в котором* ρ *и* R *— целые функции от* x, *выражается через логарифмы, то его всегда можно представить следующим образом:*

$$\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

где A *— постоянная, а* p *и* q *— целые функции от* x"». (Oeuvres compl., tome I, page 65, éd. 1839).

2°. Найти аналитические условия, определяющие каждый член в отдельности.

Решение этих вопросов покажет, между прочим, что известные случаи интегрируемости биномиальных дифференциалов вида

$$x^s (a + bx^{s'})^{s''}\, dx$$

единственные, в которых интегрирование этих дифференциалов при рациональных s, s', s'' выполнимо посредством алгебраических и логарифмических знаков.

§ II. Мы видели, что логарифмические члены в значении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ имеют вид:

$$A \log V,$$

где V — рациональная функция от x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$.

Следовательно, полагая для краткости

$$\sqrt[m]{\theta(x)} = \Delta$$

и обозначая через

$$\varphi_0(\Delta),\ \varphi_1(\Delta),\ \varphi_2(\Delta),\ \varphi_3(\Delta), \ldots$$

рациональные функции x и Δ, мы будем иметь следующее уравнение:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A^0 \log \varphi_0(\Delta) + A' \log \varphi_1(\Delta) + A'' \log \varphi_2(\Delta) + \ldots,$$

если значение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ не содержит более алгебраических членов.

Заменяя в этом уравнении Δ последовательно через $\alpha\Delta$, $\alpha^2\Delta, \ldots, \alpha^{m-1}\Delta$ и умножая его соответственно на 1,

$\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$, где α — первообразный корень уравнения

$$x^m - 1 = 0,$$

мы получаем ряд уравнений, сумма которых даёт:

$$m \int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A^0 \log [\varphi_0(\Delta) \varphi_0^{\alpha}(\alpha\Delta) \varphi_0^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi_0^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)] + \\ + A' \log [\varphi_1(\Delta) \varphi_1^{\alpha}(\alpha\Delta) \varphi_1^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi_1^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)] + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и, следовательно,

$$(1) \quad \int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

где $W_0, W_1, W_2, \ldots$ — функции вида

$$\varphi(\Delta) \varphi^{\alpha}(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

а $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — постоянные.

Именно в этом виде мы будем исследовать значение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$.

Мы начнём с доказательства того, что, когда выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ приведено к наименьшему числу членов, коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \ldots$ не могут удовлетворять уравнению

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0,$$

в котором $N_0, N_1, N_2, \ldots$ — комплексные числа *), зависящие от α.

Действительно, если это уравнение имеет место, мы находим из него:

$$A_0 = -\frac{N_1}{N_0} A_1 - \frac{N_2}{N_0} A_2 - \ldots;$$

и, подставляя это значение A_0 в выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, преобразовываем его в такое:

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}} + A_2 \log W_2 W_0^{-\frac{N_2}{N_0}} + \ldots,$$

*) Здесь термин «комплексное число» соответствует современному термину «алгебраическое число». (*Ред.*)

которое содержит менее членов, чем уравнение (1); и каждый из этих членов, как мы сейчас покажем, может быть приведён к виду:

$$A \log [\psi(\Delta)\, \psi^{\alpha}(\alpha\Delta)\, \psi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \psi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)],$$

где $\psi(\Delta)$ — рациональная функция от x и Δ.

Чтобы привести к этому виду член

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}},$$

мы представим $\frac{N_1}{N_0}$ так:

$$\frac{n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots}{n},$$

где $n, n^0, n', n'', \ldots$ — целые рациональные числа, что всегда возможно. Тогда член

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}}$$

можно представить так:

$$\frac{A_1}{n} \log [W_1^n W_0^{-n^0} W_0^{-n'\alpha} W_0^{-n''\alpha^2} \ldots],$$

где выражение под знаком log разлагается на множители и делители вида

$$W^{\alpha^l} = \varphi^{\alpha^l}(\Delta)\, \varphi^{\alpha^{l+1}}(\alpha\Delta)\, \varphi^{\alpha^{l+2}}(\alpha^2\Delta) \ldots,$$

которые приводятся к

$$\varphi(\Delta)\, \varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\, \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots,$$

когда заменим $\varphi(\Delta)$ через $\varphi(\alpha^l\Delta)$.

Тот же вид сохраняется и по перемножении и делении этих величин.

Следовательно, при помощи уравнения

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0$$

можно уменьшить число членов в выражении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, не изменяя их главной формы, и поэтому это уравнение не может иметь места, если выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ приведено к наименьшему числу членов, что мы всегда будем предполагать в наших изысканиях.

§ III. Пусть будет x' значение x, обращающее W_0 в 0 или в ∞. Нетрудно убедиться, что существует степень $x-x'$, отношение которой к W_0 конечно при $x=x'$, и что показатель этой степени, вообще говоря, комплексное число, зависящее от α. Действительно, функция W_0, как мы видели, равна произведению

$$\varphi_0(\Delta)\,\varphi_0^{\alpha}(\alpha\Delta)\,\varphi_0^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots,$$

в котором φ_0 функция алгебраическая. Но если разложить множители

$$\varphi_0(\Delta),\ \varphi_0(\alpha\Delta),\ \varphi_0(\alpha^2\Delta)\ldots$$

по возрастающим степеням $x-x'$ и обозначить через $n^0, n', n'', \ldots$ показатели $x-x'$ в первых членах этих разложений, то эти показатели будут рациональны, а сумма

$$n^0+n'\alpha+n''\alpha^2+\ldots$$

будет показателем $x-x'$ в первом члене разложения W_0. Отсюда следует, что если N'_0 равно комплексному числу

$$n^0+n'\alpha+n''\alpha^2+\ldots,$$

то отношение $\dfrac{W_0}{(x-x')^{N'_0}}$ остаётся конечным при $x=x'$.

Пусть $N'_1, N'_2, \ldots$ будут комплексные числа, играющие ту же роль по отношению $W_1, W_2, \ldots$ Взяв равенство

$$\int \frac{A_0N'_0+A_1N'_1+A_2N'_2+\ldots}{x-x'}\,dx=$$
$$=A_0\log(x-x')^{N'_0}+A_1\log(x-x')^{N'_1}+$$
$$+A_2\log(x-x')^{N'_2}+\ldots,$$

и вычтя его почленно из

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{\Delta}=A_0\log W_0+A_1\log W_1+A_2\log W_2+\ldots,$$

мы находим:

$$\int\left[\frac{f(x)}{F(x)\Delta}-\frac{A_0N'_0+A_1N'_1+A_2N'_2+\ldots}{x-x'}\right]dx=$$
$$=A_0\log\frac{W_0}{(x-x')^{N'_0}}+A_1\log\frac{W_1}{(x-x')^{N'_1}}+$$
$$+A_2\log\frac{W_2}{(x-x')^{N'_2}}+\ldots$$

Так как вторая часть этого уравнения остаётся конечнею при $x=x'$, мы заключаем, что это значение x не обращает в бесконечность интеграл

$$\int\left[\frac{f(x)}{F(x)\Delta}-\frac{A_0N'_0+A_1N'_1+A_2N'_2+\ldots}{x-x'}\right]dx,$$

а это предполагает, что предел

$$(x-x')\left[\frac{f(x)}{F(x)\Delta}-\frac{A_0N'_0+A_1N'_1+A_2N'_2+\ldots}{x-x'}\right]$$

при $x=x'$ равен нулю и, следовательно,

$$N'_0A_0+N'_1A_1+N'_2A_2+\ldots=\lim_{x=x'}\frac{(x-x')f(x)}{F(x)\Delta}.$$

Это уравнение нам показывает, что члены в выражении интеграла $\int\frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{\Delta}$ делаются бесконечно большими только для значения x, равного одному из корней уравнения

$$F(x)=0;$$

ибо, по § II, сумма

$$N'_0A_0+N'_1A_1+N'_2A_2+\ldots$$

отлична от нуля, тогда как $\lim\limits_{x=x'}\frac{(x-x')f(x)}{F(x)\Delta}$ не равен нулю только в том случае, если $F(x)$ содержит множителем $x-x'$, так как множитель Δ содержит $x-x'$ только в степени ниже 1 (§ I, примечание).

Это уравнение показывает также, что предел $\frac{(x-x')f(x)}{F(x)\Delta}$ при $x=x'$ не может быть бесконечным.

Положим теперь, что x', x'', x''', ..., $x^{(l)}$ обозначают все корни уравнения

$$F(x)=0,$$

а K', K'', K''', ..., $K^{(l)}$ — значения

$$\lim_{x=z}\frac{(x-z)f(x)}{F(x)\Delta}$$

при $z=x'$, x'', x''', ..., $x^{(l)}$.

6*

Только что найденное нами уравнение и те, которые мы найдём таким же образом, исследуя случаи $x=x''$, x''', ..., $x^{(l)}$, можно написать так:

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{i=t} N'_i A_i = K',\ \sum_{i=0}^{i=t} N''_i A_i = K'',\ \ldots,\ \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(l)} A_i = K^{(l)},$$

где $t+1$ — число членов в выражении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$; N'_0, N''_0, ..., $N_0^{(l)}$, N'_1, N''_1, ..., $N_1^{(l)}$, и т. д.—комплексные числа, выбранные так, что отношения

$$\frac{W_0}{(x-x')^{N'_0}(x-x'')^{N''_0}(x-x^{(l)})^{N_0^{(l)}}},$$

$$\frac{W_1}{(x-x')^{N'_1}(x-x'')^{N''_1}\ldots(x-x^{(l)})^{N_1^{(l)}}},\ldots$$

остаются конечными для $x=x'$, x'', x''', ..., $x^{(l)}$ и, следовательно, для всех конечных значений x, ибо, как мы заметили, корни уравнения

$$F(x)=0$$

единственные конечные значения x, обращающие функции

$$W_0, W_1, W_2, \ldots$$

в 0 или в ∞.

Заменяя в уравнении

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots$$

x на $\frac{1}{z}$ и рассматривая случай $z=0$, мы таким же образом найдём уравнение

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{i=t} \mu_i A_i = K^0,$$

в котором K^0—предел $\frac{x f(x)}{F(x)\Delta}$ при $x=\infty$, а μ_0, μ_1, μ_2, ... — степени функций W_0, W_1, W_2, ...

Это уравнение нам показывает, между прочим, что функция $\frac{f(x)}{F(x)\Delta}$ не может быть степени высшей -1, ибо тогда число

$$K^0 = \lim_{x=\infty} \frac{x f(x)}{F(x)\Delta}$$

было бы бесконечным, чего не может быть, как видно из найденного нами уравнения.

§ IV. Положим теперь, что, обозначая через M^0, M', M'', ... комплексные числа, зависящие от α, мы стараемся удовлетворить уравнению

$$M^0K^0 + M'K' + M''K'' + \ldots = 0$$

и что существует только λ уравнений этого вида, не тождественных между собой относительно K^0, K', K'', ..., $K^{(l)}$.

При помощи этих уравнений, очевидно, можно выразить λ величин из ряда

$$K^0,\ K',\ K'', \ldots,\ K^{(l)}$$

линейными функциями от остальных, и эти функции будут иметь коэффициентами комплексные числа, зависящие от α.

Положим, что мы нашли

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0 K^{(\lambda+i)},\quad K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)}, \ldots, \\ &\qquad\qquad K^{(\lambda-1)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} K^{\lambda(+i)}. \end{aligned}\right.$$

Так как величины K^0, K', K'', ..., $K^{(l)}$ могут удовлетворять не более как λ различным уравнениям вида

$$(5)\qquad M^0K^0 + M'K' + M''K'' + \ldots = 0,$$

то количества

$$K^{(\lambda)},\ K^{(\lambda+1)}, \ldots,\ K^{(l)},$$

взятые отдельно от

$$K^0,\ K',\ K'', \ldots,\ K^{(\lambda-1)},$$

не могут удовлетворить подобному уравнению, иначе это последнее уравнение и λ уравнений (4), очевидно, не тождественные между собой, составили бы $\lambda+1$ уравнение вида (5), что противно предположению.

Из этого нетрудно убедиться, что число членов в выражении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ не может быть менее $l-\lambda+1$, ибо, в противном случае, число коэффициентов

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \ \ldots$$

было бы меньше $l-\lambda+1$, а тогда последние $l-\lambda+1$ уравнения в ряду (2) дали бы, по исключении этих коэффициентов, по крайней мере одно уравнение между $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)}$, ..., $K^{(l)}$, которое было бы вида (5), что невозможно.

Тот же результат имел бы место, если бы одно из $l-\lambda+1$ последних уравнений (2) было бы тождественно с другими относительно величин A_0, A_1, A_2, ... Следовательно, при помощи этих уравнений можно найти $l-\lambda+1$ количеств из ряда

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \ \ldots$$

в функциях других и количеств $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)}$,..., $K^{(l)}$; эти функции будут линейными, а коэффициенты их будут комплексные числа, зависящие от α.

Положим, что таким образом найдены величины

$$A_0, \ A_1, \ldots, \ A_{l-\lambda+1}$$

и что их значения подставлены в уравнение

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots$$

После этой подстановки выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ будет содержать различные члены с коэффициентами $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)}, \ldots, K^{(l)}$; $A_{l-\lambda+1}$, $A_{l-\lambda+2}, \ldots, A_l$.

Но если мы соберём в один член всё, что содержит один и тот же коэффициент, то получим только l членов, которых общий вид будет

$$K^{(i)} \log Z \quad \text{или} \quad A_i \log Z,$$

где

$$Z = W_0^{\frac{P_0}{Q_0}} W_1^{\frac{P_1}{Q_1}} W_2^{\frac{P_2}{Q_2}} \ldots,$$

а $P_0, P_1, P_2, \ldots, Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ — комплексные числа, зависящие от α. Но из доказанного в § II достоверно, что, как бы ни был сложен вид этих членов, их всегда можно привести к такому виду

$$\frac{K^{(i)}}{n}\log W \text{ или } \frac{A_i}{n}\log W,$$

где n — целое вещественное число, а W — функция вида

$$\psi(\Delta)\psi^{\alpha}(\alpha\Delta)\psi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\psi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta).$$

Следовательно, после подстановки, о которой мы только что говорили, главный вид членов не изменится, но $l-\lambda+1$ из коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_{l-\lambda}$ окажутся замещёнными через

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}, \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}, \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}, \ldots, \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}},$$

где $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{l-\lambda}$ — целые вещественные числа.

В последующем мы будем предполагать это преобразование сделанным, и, следовательно, в уравнении

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{\Delta} = A_0\log W_0 + A_1\log W_1 + A_2\log W_2 + \ldots$$

мы примем

$$(6)\ A_0 = \frac{K^{(\lambda)}}{n_0},\ A_1 = \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1},\ A_2 = \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}, \ldots,\ A_{l-\lambda} = \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}},$$

где $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{l-\lambda}$ — целые вещественные числа.

До сих пор мы ничего не говорили о виде функций $\varphi_0(\Delta)$, $\varphi_1(\Delta), \ldots$, входящих в состав $W_0, W_1, \ldots$ и рациональных относительно x и Δ; в последующем мы будем считать их приведёнными к простейшему виду, т. е. к

$$\frac{X_0 + X_1\Delta + X_2\Delta^2 + \ldots + X_{m-1}\Delta^{m-1}}{Y},$$

где $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, Y$ — целые функции от x. Кроме того, так как знаменатель Y пропадает в выражении

$$W = \varphi(\Delta)\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

вследствие равенства

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-1} = 0,$$

мы можем считать $Y = 1$.

§ V. Уравнения (2), (3), (4) и (6), по исключении из них

$$K^0,\ K',\ K'',\ldots,\ K^{(l)},$$

дают

$$\sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0 n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} \mu_i A_i,$$

$$\sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} N_i' A_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda-1)} A_i$$

$$n_0 A_0 = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda)} A_i,$$

$$n_1 A_1 = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda+1)} A_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n_{l-\lambda} A_{l-\lambda} = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(l)} A_i.$$

В этих равенствах комплексные числа $M_i^{i'}$ определены уравнениями (4), которые дают K^0, K', K'', ..., $K^{(\lambda-1)}$ в функциях $K^{(\lambda)}$, $K^{(\lambda+1)}$, ..., $K^{(l)}$; комплексные числа $N_i^{i'}$ неизвестны и обладают, как мы видели, свойством, что отношение

$$\frac{W_i}{(x-x')^{N_i'}(x-x'')^{N_i''}\cdots}$$

остаётся конечным для всех конечных значений x; число, обозначенное через μ_i, определяет степень функции W_i. Количества же n_0, n_1, ..., $n_{l-\lambda}$ суть вещественные целые числа, также нам не известные.

Так как коэффициенты

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots$$

не могут удовлетворять уравнениям вида

$$N_0A_0+N_1A_1+N_2A_2+\ldots=0,$$

где N_0, N_1, $N_2,\ldots$ — комплексные числа, зависящие от α, то найденные нами уравнения должны быть тождественными относительно A_0, A_1, $A_2,\ldots$, что влечёт за собой существование следующих равенств:

$$\mu_i=M_i^0n_i, N_i'=M_i'n_i, N_i''=M_i''n_i,\ldots, N_i^{(\lambda-1)}=M_i^{(\lambda-1)}n_i,$$
$$N_i^{(\lambda)}=0, N_i^{(\lambda+1)}=0,\ldots, N_i^{(\lambda+i-1)}=0, N_i^{(\lambda+i)}=n_i,$$
$$N_i^{(\lambda+i+1)}=0,\ldots, N_i^{(l)}=0$$

для $i=0, 1, 2,\ldots, l-\lambda$, и

$$\mu_i=0, N_i'=0, \quad N_i''=0, N_i'''=0,\ldots$$

для $i>l-\lambda$.

Из этих равенств, имея в виду соотношения, существующие между функциями W_i и числами μ_i, N_i', N_i'', ..., заключаем:

1°. Все функции $W_{l-\lambda+1}$, $W_{l-\lambda+2}$, $W_{l-\lambda+3},\ldots$ степени 0, и ни одно из значений x не обращает их ни в 0, ни в ∞.

2°. При $i=0, 1, 2,\ldots, l-\lambda$ степень W_i равна $M_i^0n_i$; функция же, отношение которой к W_i остаётся конечным для всех конечных значений x, представляется в виде:

$$[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}(x-x''')^{M_i'''}\ldots$$
$$\ldots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)})]^{n_i},$$

где остаётся неизвестным только целое и вещественное число n_i.

Таковы свойства функций

$$W_0, W_1, W_2, W_3,\ldots,$$

входящих в уравнение

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{\Delta}=A_0\log W_0+A_1\log W_1+A_2\log W_2+\ldots,$$

если оно преобразовано по способу, указанному в § IV. Прибавим, что уравнения (6) дают равенства

$$A_i=\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

где

$$i=0, 1, 2,\ldots, l-\lambda.$$

§ VI. Из найденного нами о функциях

$$W_{l-\lambda+1},\ W_{l-\lambda+2},\ W_{l-\lambda+3},\ldots$$

нетрудно убедиться, что они приводятся к постоянным количествам.

Действительно, если функция W не делается ни 0, ни ∞ при $x=a$, то показатель при $x-a$ в первом члене разложения W по степеням $x-a$ равен нулю. Но для

$$W=\varphi(\Delta)\,\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\,\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)$$

этот показатель (§ II) равен сумме

$$n^0+n'\alpha+n''\alpha^2+\ldots+n^{(m-1)}\alpha^{m-1},$$

в которой $n^0, n', n'',\ldots, n^{(m-1)}$—рациональные вещественные числа, обозначающие степени первых членов в

$$\varphi(\Delta),\ \varphi(\alpha\Delta),\ \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots,\ \varphi(\alpha^{m-1}\Delta),$$

а α—первообразный корень уравнения

$$x^m-1=0.$$

Эта сумма приводится к нулю только в случае, если

$$n^0=n'=n''=\ldots=n^{(m-1)},$$

т. е. только в том случае, если разложения

$$\varphi(\Delta),\ \varphi(\alpha\Delta),\ \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots,\ \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

содержат в первых членах одну и ту же степень $x-a$; но тогда мы найдём, что при $x=a$ остаётся конечным отношение $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$, где p и q—числа целые.

Следовательно, если функция W остаётся конечною для всех конечных значений x, тем же свойством обладает и дробь $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$.

Таким же образом мы придём к заключению, что степень функции $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$ равна нулю, и что, следовательно, она остаётся конечною при $x=\infty$.

Из этого мы находим, что произведение

$$\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\Delta)}\cdot\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha\Delta)}\cdot\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^2\Delta)}\cdots\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^{m-1}\Delta)}$$

остаётся конечным для всех значений x.

Но это произведение приводится к $\frac{\varphi^m(\alpha^p\Delta)}{S}$, где S — целая функция x, не зависящая от α; ибо

$$S=\varphi(\Delta)\,\varphi(\alpha\Delta)\,\varphi(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

— симметрическая функция корней уравнения

$$\Delta^m = \text{целой функции},$$

а $\varphi(\Delta)$, как мы видели, — целая функция x и Δ. Что же касается $\varphi^m(\alpha^p\Delta)$, то эта функция того же вида, как и $\varphi(\Delta)$. (См. § IV.)

Следовательно, полагая

$$\frac{\varphi^m(\alpha^p\Delta)}{S}=\psi(\alpha^p\Delta), \tag{7}$$

мы найдём, что функция $\psi(\alpha^p\Delta)$ определяется уравнением

$$\psi(\alpha^p\Delta)=\frac{X_0}{S}+\frac{X_1}{S}\Delta+\frac{X_2}{S}\Delta^2+\ldots+\frac{X_{m-1}}{S}\Delta^{m-1},$$

где $S, X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ — целые функции от x, и что она остаётся конечною для всех значений x. Последнее же, как мы сейчас покажем, может иметь место только в том случае, если все члены в выражении $\psi(\alpha^p\Delta)$ постоянны.

Действительно, из выражения $\psi(\alpha^p\Delta)$ мы находим для всех $i < m$:

$$\psi(\alpha^p\Delta)+\alpha^{-i}\psi(\alpha^{p+1}\Delta)+\alpha^{-2i}\psi(\alpha^{p+2}\Delta)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha^{-(m-1)i}\varphi(\alpha^{p+m-1}\Delta)=m\frac{X_i}{S}\Delta^i,$$

и, следовательно,

$$[\psi(\alpha^p\Delta)+\alpha^{-i}\psi(\alpha^{p+1}\Delta)+\alpha^{-2i}\psi(\alpha^{p+2}\Delta)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha^{-(m-1)i}\psi(\alpha^{p+m-1}\Delta)]^m=m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m L^{mi}.$$

Первая часть этого равенства остаётся конечною для всех значений x, так как она составлена из функции ψ. Вторая же часть $m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$, если не предположим её постоянною, будет бесконечна или для некоторых конечных значений x, или для $x=\infty$, смотря по тому, приводится ли рациональная функция $m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$ к дроби или к целой функции.

Из этого ясно, что ни одного члена в функции $\psi(\alpha^p\Delta)$ нельзя считать переменным; но тогда из (7) следует, что

$$\varphi(\alpha^p\Delta)=C_p\sqrt[m]{S},$$

где C_p — величина постоянная, а S — функция, не зависящая от α^p. Если мы теперь, пользуясь последним уравнением, возьмём значения функций

$$\varphi(\Delta),\quad \varphi(\alpha\Delta),\quad \varphi(\alpha^2\Delta),\ \ldots,\ \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

и внесём их в формулу

$$W=\varphi(\Delta)\,\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\,\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ \ldots\ \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

то получим

$$W=C_0C_1^{\alpha}C_2^{\alpha^2}\ \ldots\ C_{m-1}^{\alpha^{m-1}}S^{\frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}}{m}}$$

Но сумма

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}$$

равна нулю; следовательно, W имеет постоянное значение.

§ VII. Доказав, что в выражении интеграла $\int\frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{\Delta}$ все функции

$$W_{l-\lambda+1},\quad W_{l-\lambda+2},\ \ldots$$

могут быть только постоянными, мы выводим отсюда, что единственные переменные члены суть

$$A_0\log W_0,\quad A_1\log W_1,\ \ldots,\ A_{l-\lambda}\log W_{l-\lambda},$$

а так как, по (6), коэффициенты их имеют вид

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

где n_i — число целое, то заключаем, что число их не может превзойти числа отличных от нуля членов ряда

$$K^0, \quad K', \quad K'', \ldots, K^{(l)}.$$

Замечая, что l есть число корней уравнения

$$F(x) = 0$$

и что

$$K^0 = \lim_{x=\infty} \frac{x f(x)}{F(x)\Delta}$$

приводится к нулю, если степень $\frac{f(x)}{F(x)\Delta}$ ниже -1, мы приходим к следующим теоремам:

Теорема I. *Пусть будет* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *рациональная дробь, а* $\theta(x)$ — *полином, множители которого степени ниже* m. *Если выражение интеграла* $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ *содержит только логарифмические члены, то интеграл*

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$$

равен сумме членов следующего вида:

$$A \log\left[\varphi(\sqrt[m]{\theta(x)})\, \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{\theta(x)})\, \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{\theta(x)}) \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta(x)})\right],$$

где $\varphi(\sqrt[m]{\theta(x)})$ — *целая функция* x *и* $\sqrt[m]{\theta(x)}$, *а* α — *первообразный корень уравнения*

$$x^m - 1 = 0.$$

Число таких членов, достаточное для доставления выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, *не превзойдёт степени* $F(x)$, *если степень функции* $\frac{f(x)}{F(x)\sqrt[m]{\theta(x)}}$ *ниже* -1; *в противном случае число таких членов превзойдёт степень* $F(x)$ *только на единицу.*

В случае $F(x) = 1$ предыдущая теорема приводится к следующей:

Теорема II. *Если $f(x)$ и $\theta(x)$ — целые функции и $\theta(x)$ содержит множители степеней не выше m и если интеграл $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ выражается только логарифмическими членами, то он может быть приведён к виду*

$$A \log\left[\varphi\left(\sqrt[m]{\theta(x)}\right)\varphi^{\alpha}\left(\alpha\sqrt[m]{\theta(x)}\right)\varphi^{\alpha^2}\left(\alpha^2\sqrt[m]{\theta(x)}\right)\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{\theta(x)}\right)\right],$$

где $\varphi\left(\sqrt[m]{\theta(x)}\right)$ — целая функция от x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$, а α — первообразный корень уравнения

$$x^m - 1 = 0.$$

В случае $m = 2$ мы получаем упомянутую в § I теорему Абеля.

Теорема III. *Интеграл $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}\,dx$ не приводится к функциям алгебраической и логарифмической, если $\theta(x)$ не имеет кратных множителей степени выше $m-1$ и если степень функции $f(x)$ ниже степени $\frac{\sqrt[m]{\theta(x)}}{x}$.*

Действительно, если предположим, что $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}\,dx$ приводится к функциям алгебраической и логарифмической, то, по § I, приходим к заключению, что его выражение не содержит алгебраического члена. То же самое имеет место и относительно логарифмических членов, ибо дифференциал $\frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}\,dx$ имеет знаменателем только $\sqrt[m]{\theta(x)}$, и степень $\frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ ниже -1, а в этом случае, по теореме I, число логарифмических членов, достаточное для доставления выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}\,dx$, равно 0. Поэтому, если предположим, что интеграл $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}\,dx$ приводится к функциям алгебраической и логарифмической, то будем вынуждены заключить, что его значение постоянно.

При $m = 2$ это сводится к теореме, данной Лиувиллем.

§ VIII. Посредством доказанных нами теорем можно вполне решить вопрос об интегрировании при помощи одних алгебраических и логарифмических знаков, биномиальных дифференциалов

$$x^s(a+bx^{s'})^{s''}\,dx,$$

где s, s', s'' — рациональные числа.

Интеграл этих дифференциалов легко приводится к виду

$$\int x^{p-1}(1+x^q)^{\frac{m'}{m}}\,dx,$$

где p, q, m, m'—целые числа и $q>0$, а значение этого интеграла находится по известным методам, если одно из двух количеств $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}+\frac{m'}{m}$ число целое. В противном случае интеграл приводится к виду

$$U_0+\int\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}\,dx,$$

где U_0 — алгебраическая функция, p' — наименьшее положительное число, сравнимое с p по модулю q, а m'' — наименьшее число, сравнимое с $-m'$ по модулю m, что предполагает

$$p'<q,\qquad m''<m.$$

Чтобы найти алгебраический член в выражении интеграла $\int\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}\,dx$, следует, согласно § I, искать общий наибольший делитель функций $(1+x^q)^{m''}$ и $\frac{d(1+x^q)^{m''}}{dx}$. Так как этот делитель равен $(1+x^q)^{m''-1}$, то заключаем, что алгебраический член имеет знаменателем функцию $(1+x^q)^{m''-1}$.

Но, рассматривая функции

$$\frac{x^{p'-1}(1+x^q)^{m''-1}}{(1+x^q)^{m''}},\qquad \frac{(1+x^q)^{m''-1}}{x(1+x^q)^{m''\cdot\frac{m-1}{m}}},$$

в которых, как мы видели, $p'<q$, $m''<m$, $p'>0$, находим, что их степени ниже -1; что, в силу § I, свидетельствует, что в выражении $\int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx$ нет алгебраического члена. Поэтому остаётся искать его выражение только через логарифмические члены.

Но из сказанного в § III следует, что подобное выражение его возможно только в том случае, когда степень $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ не выше -1, а вследствие последней из доказанных нами теорем эта степень не должна быть ниже -1; следовательно, интегрирование $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ при помощи алгебраических и логарифмических знаков невозможно, если степень функции $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ не равна в точности -1, что и влечёт за собою такое соотношение между показателями p', q, $\frac{m''}{m}$:

$$\frac{p'}{q}-\frac{m''}{m}=0.$$

Переходя к числам p и m', из которых первое сравнимо с p' по модулю q, а второе с $-m''$ по модулю m, мы находим, что последнее соотношение требует, чтобы $\frac{p}{q}+\frac{m'}{m}$ было целым числом. Следовательно, кроме этого случая и случая, когда p делится на q, интеграл

$$\int x^{p-1}(1+x^q)^{\frac{m'}{m}}\, dx$$

представляет особенную трансцендентную функцию, что и требовалось доказать, чтобы быть уверенным, что обыкновенные методы интегрирования биномиальных дифференциалов с рациональными показателями обнимают все случаи, когда это интегрирование выполнимо при помощи алгебраических и логарифмических знаков.

§ IX. Из найденного в §§ IV, V и VI заключаем, что вообще число логарифмических членов, достаточное для выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, равно $l-\lambda+1$, где l

обозначает степень функции $F(x)$, а λ — число уравнений (4). Кроме того, мы видели, что интеграл $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ может быть приведён таким образом, чтобы в уравнении

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots$$

все члены имели вид

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} \log W_i,$$

где n_i — целое вещественное число;

$$W_i = \varphi_i(\Delta)\, \varphi_i^{\alpha}(\alpha\Delta)\, \varphi_i^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi_i^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)$$

представляет функцию, степень которой равна $M_i^0 n_i$ и которая для всех конечных значений x остаётся в конечном отношении с функцией

$$[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}(x-x''')^{M_i'''} \ldots$$
$$\ldots (x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)})]^{n_i};$$

числа же $M_i^0, M_i', M_i'', M_i''', \ldots, M_i^{(\lambda-1)}$ известны из уравнений (4).

Нетрудно убедиться, что по этим данным вполне определяется каждый член в выражении интеграла

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta},$$

т. е. если найдены числа

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \ \ldots, \ n_{l-\lambda}$$

и функции

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \ \ldots, \ W_{l-\lambda},$$

выполняющие вышеприведённые условия, то сумма

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0} \log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1} \log W_1 + \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2} \log W_2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}} \log W_{l-\lambda}$$

будет выражением интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, если последний может быть выражен при помощи логарифмических членов.

Действительно, если эта сумма не представляет значения интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, то пусть

$$B_0 \log W^0, \quad B_1 \log W', \quad B_2 \log W'', \ldots, B_s \log W^{(s)}$$

будут члены, которые надо к ней прибавить, чтобы сделать её равною $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$.

Получим

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = \frac{K^{(\lambda)}}{n_0} \log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1} \log W_1 + \\ + \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2} \log W_2 + \ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}} \log W_{l-\lambda} + \\ + B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \ldots + B_s \log W^{(s)}.$$

Для этого выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ уравнения (2) и (3) дают:

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} \mu_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} \nu_i B_i,$$

$$K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N'_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P'_i B_i,$$

$$K'' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N''_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P''_i B_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K^{(l)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N_i^{(l)} \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P_i^{(l)} B_i,$$

где ν_i, P'_i, P''_i, P'''_i, ..., $P_i^{(l)}$ — комплексные числа, зависящие от α, имеющие то же значение для функции $W^{(i)}$, какое имеют числа μ_i, N'_i, N''_i, N'''_i, ..., $N_i^{(l)}$ для функции W_i.

Но найденные значения μ_i, N'_i, N''_i, N'''_i, ..., $N_i^{(l)}$ (§ V) удовлетворяют, как нетрудно убедиться, следующим равенствам:

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} \mu_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

$$K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N'_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

$$K'' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N''_i \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K^{(l)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} N_i^{(l)} \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}.$$

Следовательно, предыдущие уравнения дают равенства

$$\sum_{i=0}^{i=s} \nu_i B_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=s} P'_i B_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=s} P''_i B_i = 0, \; \ldots$$

$$\ldots, \; \sum_{i=0}^{i=s} P_i^{(l)} B_i = 0,$$

которые должны быть тождественны относительно B_0, B_1, B_2, ..., B_s, если сумма

$$B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \; \ldots \; + B_s \log W^{(s)}$$

приведена к наименьшему числу членов (§ II). Следовательно,

$$\nu_i = 0, \quad P'_i = 0, \quad P''_i = 0, \; \ldots, \quad P_i^{(l)} = 0,$$

что, на основании § VI, приводит нас к заключению, что каждый из членов

$$B_0 \log W_0, \quad B_1 \log W_1, \quad B_2 \log W_2, \; \ldots, \; B_s \log W_s$$

величина постоянная.

ЧЕРЧЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

М. Г.!

Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание; в настоящее время они получили ещё более интереса по влиянию своему на искусства и промышленность. Сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием её: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трёх последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий её, то она ещё более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике.

Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех её требований, разумеется, недостаёт науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: *как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?*

Решение задач этого рода составляет предмет так называемой *теории наибольших и наименьших величин*. Эти задачи, чисто практического характера, имеют особенную важность и для теории: все законы, определяющие движение материи весомой и невесомой, представляют решение задач этого рода. Нельзя не заметить особенно благотворного влияния их на развитие наук математических.

До изобретения анализа бесконечно-малых известны были только частные примеры решения таких задач, но в этих решениях уже было начало новой, важнейшей отрасли математических наук, известной под именем *дифференциального исчисления*. Чтобы показать влияние вопросов *о наибольших и наименьших величинах* на открытие этой науки, я приведу здесь то место знаменитого сочинения Ньютона Philosophiae naturalis principia mathematica, где он говорит о начале этого открытия, которого приложения и результаты теперь неисчислимы:

«Лет десять тому назад (в 1677 году), когда я вёл переписку с весьма учёным геометром Лейбницем, я писал к нему, что имею способ для определения *наибольших и наименьших величин*, для проведения касательных и для решения других подобных вопросов, и что способ мой с таким же удобством может быть употреблён для уравнений, заключающих в себе радикалы, как и для рациональных. Я скрыл тогда свой способ под переставленными буквами, которых значение было следующее: «Дано уравнение, заключающее в себе сколько угодно количеств текущих, найти течение, и наоборот». На это знаменитый Лейбниц отвечал, что с своей стороны он нашёл подобный способ и сообщил мне его в том же письме. Этот способ отличался от моего только названием и знакоположением». (Прим. на VII предложение 2-ой книги, изд. 1713 г.)

Но открытием дифференциального исчисления и решением задач, подобных тем, которые привели к открытию его, предмет этот не был исчерпан вполне, и это обнаружилось в изысканиях самого Ньютона: вопрос, им решённый, об определении формы, при которой тело, двигаясь в жидкости, наименее встречает препятствия,—представил задачу *наибольших и наименьших величин*, существенно отличную от подобных задач, разрешимых по способу дифференциального исчисления. Общий способ решения задач этого рода, особенно важных для теоретической механики, привёл к открытию ещё нового исчисления, известного под именем *вариационного*.

Несмотря на такое развитие математики в отношении теории *наибольших и наименьших величин*, нетрудно заметить, что практика идёт далее и требует решения задач о *наибольших и наименьших величинах* ещё нового рода, существенно отличного от тех двух, которые решаются в дифференциальном и вариационном исчислениях.

Как пример вопросов такого рода и решения их, мы можем представить изыскания наши о *параллелограмме Уатта*, напечатанные в Mémoires des Savantes étrangers нашей Академии за 1854 год. Из результатов, до которых мы дошли, рассматривая методу, необходимую для определения наилучшего устройства механизмов этого рода, видно, что и в этом случае вопросы практики ведут ко многим теоретическим результатам, интересным для науки; что методы, на которые впервые вызывает нас практика, являются средством для решения новых теоретических вопросов, интересных даже независимо от практического значения их *).

---

*) Так, мы находим здесь, между прочим, решение такого вопроса:

«Целая функция $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+H$ не может не меняться при перемене x; какая же низшая степень её изменяемости?» И потом, «при каких значениях $A, B, C, \ldots, H$ она достигает этого предела?»

Решение этой задачи ведёт ко многим результатам, интересным для Высшей Алгебры. Например:

1) Если $f(x)=x^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+H$, в пределах h и $h\pm 4\sqrt[n]{\pm\frac{1}{2}f(h)}$ найдётся по крайней мере один корень одного из уравнений $f(x)=0$, $f'(x)=0$. Знак радикала определяется знаком дроби $-\frac{f(h)}{f'(h)}$. Это имеет важное приложение в отделении корней по способу Фурье.

2) В уравнении $x^{2n+1}+Bx^{2n-1}+Cx^{2n-3}+\ldots+Hx\pm K=0$ всегда есть корень между

$$-2\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2}K}, \qquad +2\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2}K},$$

откуда выходит такое свойство уравнений:

В уравнении $x^{2n+1}+Bx^{2n-1}+Cx^{2n-3}+\ldots+Hx\pm K=0$, заключающем x в нечётных степенях, если K содержится между -2 и $+2$, в тех же пределах найдется по крайней мере один корень.

Другой пример вопросов этого рода, и особенно замечательный, представляет *черчение географических карт*. При современном состоянии теории географических карт можно показать бесконечное множество различных способов черчения их таким образом, что весьма малые элементы земли сохранят в изображении своём настоящую форму. Но так как при этом, по свойству сфероидальной поверхности земли, масштаб изображения различных элементов её, по необходимости, различен, то равные элементы её, взятые в разных местах, при изображении своём на карте представляются в разных размерах. Чем значительнее эти перемены масштаба, тем неправильнее географическая карта. А так как величина этих изменений масштаба, на пространстве той же части поверхности, бывает более или менее, смотря по способу проэкции карты, то, естественно, рождается такой вопрос:

При какой же проэкции эти изменения масштаба будут наименьшими?

В записке, читанной мной в заседании Академии Наук 18 января, я показал, что вопрос этот, переведённый на язык анализа, приводится к особенной задаче *наибольших и наименьших величин*, существенно отличной от тех, которые решаются в дифференциальном и вариационном исчислениях. Задача эта подобна тем, которые были предметом вышеупомянутого мемуара *о параллелограмме Ватта*, но относится к высшему разряду таких задач: там отыскивалось несколько постоянных величин, здесь требуется найти две неизвестные функции, что соответствует определению бесконечного множества постоянных. Это полагает такую же разницу между этими задачами, какая существует в задачах дифференциального исчисления и вариационного. В теоретическом отношении этот предмет тем более интересен, что он приводится к исследованию уравнения в частных производных, особенно замечательного и, между прочим, выражающего равновесие теплоты в пластинках бесконечно-тонких. Так вопрос о наивыгоднейшей проэкции карт связан с этим замечательным свойством теплоты: при равновесии теплоты в круглой бесконечно-тонкой пластинке температура центра есть *среднее* температуры всех точек на окружности; то же для шара: температура центра—*среднее* температуры на поверхности.

Окончательное решение о наивыгоднейшей проэкции карт очень просто: наивыгоднейшая проэкция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой нормальной величине масштаба*). Что же касается до определения проэкции, представляющей такое свойство, оно приводится к решению обыкновенной задачи *интегрирования уравнений в частных производных*, где даётся значение интеграла на границах, внутри которых он должен оставаться конечным и непрерывным.

Так, для изображения всякой страны на карте найдётся одна наивыгоднейшая проэкция. Эта проэкция определится положением страны относительно экватора и формою её границ; при этом параллели и меридианы будут представлять различные кривые линии, но вообще близкие к кругам или прямым, если проэктируется незначительная часть земной поверхности. Линии эти по точкам чертятся безо всякого затруднения.

Особенно замечательны те случаи, в которых параллели и меридианы обращаются совершенно в круги или прямые линии; этим значительно облегчается черчение карт незначительных размеров. Лагранж в мемуарах своих: Sur la construction des cartes géographiques (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1779) определил все проэкции, где это имеет место. На основании же свойства наивыгоднейшей проэкции вообще нетрудно показать, при изображении каких именно земель такие проэкции будут наивыгоднейшими: границы этих земель определятся точками, в которых масштаб, при этом роде проэкций, сохраняет одну и ту же величину. Границы земель, таким образом определяемые, представляют вообще довольно сложные кривые линии. Но по мере уменьшения пространства, изображаемого на карте, они упрощаются и быстро подходят к эллипсисам, так что они незначительно разнятся от этих линий при изображении земель даже пространных, как напр. Европейской части России. Эллипсисы эти имеют известные, определённые положения:

---

*) Это утверждение П. Л. Чебышева впервые доказал Д. А. Граве в своей диссертации «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (1896). (*Ред.*)

центр их находится в центре проэкции; одна из осей идёт по направлению меридиана. Отношение осей этих эллипсисов определяется положением их центра относительно экватора и особенно величиною, названною Лагранжем *указателем* проэкции.

Обратно, для изображения всякой части земной поверхности, не слишком большой и ограниченной подобным эллипсисом, можно найти способ проэкции, в которой параллели и меридианы будут круги или прямые линии и которая даст изображение, близкое к совершеннейшему. Но для этого, по сказанному выше, центр проэкции и *указатель* её должны быть выбраны надлежащим образом, согласно с положением земли и видом границ *). Поэтому частные способы проэкций, с сохранением подобия в бесконечно-малых элементах, каковы: стереографические проэкции—полярная и горизонтальная, проэкции Гаусса и Меркатора, которые все выводятся из общего способа частным предположением относительно места центра проэкции или величины указателя, могут дать изображение на карте, близкое к совершеннейшему, только в известных, частных случаях.

Так, если вышеупомянутый эллипсис обращается в круг, указатель выходит равным единице, и наивыгоднейшая проэкция приводится вообще к стереографической горизонтальной проэкции, которая обращается в полярную, когда центр круга совпадает с полюсом земли. По мере уменьшения оси эллипсиса, направленной по меридиану, наивыгоднейшая проэкция приближается к проэкции Гаусса. С приближением центра к экватору, эта проэкция переходит в Меркаторскую.

Из этого ясно, что, имея в виду получить наилучшее изображение на карте различных земель, нельзя ограничиваться одним или несколькими частными способами, а

*) Указатель проэкции определяется такою формулою:

$$\sqrt{1+\frac{n^2-1}{n^2+1}\cos^2 l},$$

где l—широта центра, n—отношение оси, направленной по меридиану, к другой оси.

(См. записку мою: *Sur la construction des cartes géographiques*, читанную в Академии 18-го января нынешнего года [т. е. 1856 г. *Ред.*)]).

необходимо употреблять общий способ, выбирая всякий раз приличным образом и центр проэкции, и величину указателя.

По сказанному выше, это легко выполняется при изображении на карте такой части земной поверхности, которой границы представляют эллипсис, с осью, направленною по меридиану. Но на практике столь простых случаев никогда не представляется; границы различных земель всегда имеют вид чрезвычайно неправильных кривых линий. Несмотря на это, для наилучшего изображения не слишком пространной земли, можно определить и положение центра проэкции, и величину указателя, сличая форму границ с эллипсисом или другими коническими сечениями. Для этого достаточно иметь только приблизительное изображение той земли, для проэкции которой отыскиваются наивыгоднейшие положения центра и величина указателя, а поэтому здесь может быть употреблена карта, начерченная по какому бы ни было способу.

Собственно говоря, здесь можно сделать три различные предположения, которые дают начало трём различным решениям; но, сличая их между собою, нетрудно будет найти наивыгоднейшее. *Во-первых:* проектируемую землю можно рассматривать как часть пространства, ограниченного эллипсисом, с осью по направлению меридиана; для земель, в которых наибольшее распространение по меридианам и параллелям находится почти против центра, это соответствует всегда наивыгоднейшему решению. Этот случай наиболее встречается на практике. *Во-вторых:* проэктируемую землю можно рассматривать как часть пространства между двумя эллипсисами, гиперболами или параболами, одинаково расположенными. Это может дать наивыгоднейшее решение только при изображении земель, которые изогнуты в виде серпа или представляют узкую полосу, наклонную к меридианам и параллелям. Наконец, *в-третьих:* она может быть сравнена с пространством, заключающимся между ветвями двух обратных гипербол: это соответствует таким землям, которых границы значительно вогнуты против центра *).

---

*) Для пространства, которое в стереографической горизонтальной проэкции, при радиусе $=1$, ограничено эллипсисом

Останавливаясь на первом предположении, к которому относится бо́льшая часть случаев, встречающихся на практике, заметим, что из множества эллипсисов, которые могут быть описаны около проэктируемой земли, наивыгоднейшая проэкция определится наименьшим из них, если для сравнения различных эллипсисов между собою примем длину среднего диаметра их, равно наклонённого к обеим осям.

По виду границ проэктируемой земли нетрудно узнать те точки, на которые этот эллипсис будет опираться, и по этим точкам найти его оси и центр. Центр этого эллипсиса будет наивыгоднейшим местом центра проэкции, а положение этого центра и отношение осей эллипсиса определит наивыгоднейшего указателя. Всё это относится собственно к изображению на карте земель весьма малых; но для земель пространных, по общему способу последовательного приближения, легко найти поправки и в положении центра проэкции, и в величине указателя. Так определится наивыгоднейший способ черчения карты данной земли, в которой параллели и меридианы остаются кругами.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, предел изменений масштаба (разность наибольшего и наименьшего масштаба, делённая на средний масштаб) выражается так: $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$; для пространства между двумя эллипсисами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ этот предел равен $\frac{2(\lambda^2-1)\,a^2b^2}{a^2+b^2}$; между двумя гиперболами $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda^2$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ он равен

$$\frac{2(\lambda^2-1)\,a^2b^2}{\pm(a^2-b^2)};$$

между двумя параболами $x^2=2py+a$, $x^2=2py+a'$ он равен $2(a-a')$; наконец, в пространстве между ветвями двух обратных гипербол $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-\lambda^2$ предел изменений масштаба равняется $\frac{2(\lambda^2+1)\,a^2b^2}{\pm(a^2-b^2)}$. Это выводится из последних уравнений вышеупомянутой записки, и это верно до $\mathrm{tang}^3\frac{u}{2}$, где u— угловое расстояние точек проэктируемой земли от той точки, которая принята за центр стереографической проэкции.

Из этого видно, что черчение географических карт принадлежит к числу тех практических вопросов, которые для различных стран решаются различно, что способ черчения, выгодный для Франции, Германии или Англии, может быть невыгодным для России. Притом, по обширности своей, Россия представляет особенные трудности в изображении своём на карте, а потому выбор проэкции, наиболее соответствующий её пространству, виду границ и положению относительно экватора, имеет особенную важность. Не говоря уже о картах, обнимающих собой все части России, карты различных частей её представляют весьма чувствительные изменения в масштабе. Так, изображая на карте всё, что принадлежит ей по эту сторону Уральских гор, по способу Гаусса допускаются изменения в масштабе более $\frac{1}{20}$, а это, при измерении поверхностей, даёт разность *одной* квадратной мили на *десять*, погрешность весьма значительная. Погрешность карты становится менее при стереографической горизонтальной проэкции с центром, прилично выбранным, но и здесь разности в масштабе достигают до $\frac{1}{34}$, что при измерении поверхности составляет разность *одной* квадратной мили на *семнадцать*. Эти погрешности не так малы, чтобы можно было их оставить без внимания; средство же для уменьшения их заключается в определении проэкции, более соответствующей форме и положению проэктируемой земли.

Рассматривая на карте эту часть России, мы замечаем, что, в общем очертании границ своих, она далеко не подходит к эллипсисам, которых ось идёт по меридиану, а в этом случае, как видели, нельзя достигнуть наилучшего изображения на карте, оставляя меридианы и параллели кругами или прямыми линиями. Такое упрощение в построении её карты влечёт значительное уменьшение в степени правильности изображения. Чтобы достигнуть наиболее верного изображения, необходимо определить, по вышесказанному, способ проэкции через интегрирование особенного уравнения. Так как это интегрирование должно быть выполнено под условием, зависящим от вида границ, а эти границы представляют весьма сложные кривые, то, разумеется, точное интегрирование невозможно. Но практика и не требует этого. Для неё достаточно в изменениях масштаба ограничиться *десятитысячными* долями, а в этом случае всё сводится на определение нескольких коэффициентов, которые, с точностью, достаточною для практики, легко могут быть вычислены по виду границ, как бы изогнуты они ни были. Что касается до параллелей и меридианов, по точкам они начертятся без затруднения.

Переходя к простейшим способам черчения карт, где параллели и меридианы представляют круги или прямые линии, мы замечаем, что владения России по эту сторону Уральских гор, вместе с Кавказом и Грузиею, более распространяются от Севера к Югу, чем от Востока к Западу, а потому этого пространства нельзя сравнивать с кругом, и тем менее с эллипсисом, в котором ось по направлению от Севера к Югу очень мала в сравнении с осью, направленною от Востока к Западу. Следовательно, по вышесказанному, ни проэкция Гаусса, ни проэкция стереографическая не соответствуют здесь проэктируемой земле. Прилагая к настоящему случаю показанный нами способ определения центра и указателя проэкции, мы замечаем, что центр наименьшего эллипсиса, который, имея ось по направлению меридиана, обнимает собою все владения России до Уральских гор включительно, вместе с Кавказом и Грузиею, приходится между Ярославлем и Угличем, на долготе 57° и широте 57°36′; отношение же осей его равно $\frac{17}{10}$. Принимая в основание этот эллипсис, мы находим, что наивыгоднейшей проэкции соответствует указатель 1,0788 *). Эта величина от 1, указателя стереографической проэкции, разнится менее, чем на одну *десятую*. Но и эта разница имеет значительное влияние на степень точности изображения. Мы видели, что стереографическая проэкция, при самом выгодном положении своего центра, на пространстве рассматриваемой нами части России, представляет изменения в масштабе до $\frac{1}{34}$. Принимая же найденную величину 1,0788 за указателя проэкции

*) По формуле 2-го примечания, при $l = 57°36'$, $n = 1,7$, указатель выходит 1,0675. Вычисляя же поправки, находим, что к этой величине должно придать 0,0113; для широты же центра проэкции выходит $57°36' + 6'30'' = 57°42'30''$. Долгота его остаётся равною 57°.

и центр её между Ярославлем и Угличем (на долготе 57°, широте 57°42′ 30″), мы получили карту этой части России, где изменения масштаба не превосходят $\frac{1}{50}$, и это высшая степень точности, до которой можно достигнуть, оставляя параллели и меридианы кругами или прямыми линиями.

Подобно этому, М. Г., большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, совершенно новым для науки, и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.

ВОПРОСЫ О НАИМЕНЬШИХ ВЕЛИЧИНАХ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИБЛИЖЁННЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ФУНКЦИЙ

В мемуаре, озаглавленном «Теория механизмов, известных под именем параллелограммов», мы занимались приближённым представлением функций под видом многочлена и пришли к решению такой задачи:

Определить изменения, которые надо внести в приближённое выражение функции $f(x)$, данное её разложением по степеням $x-a$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x=a-h$ и $x=a+h$, где h величина незначительная.

В настоящем мемуаре мы даём общую теорему относительно решения задач этого рода, которые могут быть высказаны так:

Для функции данного вида с произвольными параметрами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ требуется подходящим выбором значений $p_1, p_2, \ldots, p_n$ сделать наименьшим предел её отклонений от нуля между $x=-h$ и $x=+h$.

По упомянутой теореме легко убедиться, что в разысканиях приближённых значений функций, под видом многочлена

$$p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

или под видом дроби

$$\frac{p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n}{A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m}$$

с данным знаменателем, количества $p_1, p_2, \ldots, p_n$ определяются условием, что в промежутке, где требуется привести к наименьшей величине наибольшую из ошибок, эта ошибка достигает своей предельной величины по меньшей мере $n+1$ раз.

Такова была исходная точка в приведённом выше мемуаре, где, как только что было сказано, мы рассматривали представление функций в виде многочлена. Но та же теорема показывает, что это условие изменяется в случае, когда ищется представление функций под видом дроби, оба члена которой произвольны, и что тогда условие, о котором идет речь, надо заменить следующим.

Если дробь

$$\frac{p_1x^{n-l-1}+p_2x^{n-l-2}+\ldots+p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l+p_{n-l+2}x^{l-1}+\ldots+p_nx+1}$$

от $x=-h$ до $x=+h$ отклоняется от данной функции Y менее, чем все другие дроби того же вида, то число вещественных и различных значений x, для которых разность

$$Y-\frac{p_1x^{n-l-1}+p_2x^{n-l-2}+\ldots+p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l+p_{n-l+2}x^{l-1}+\ldots+p_nx+1}$$

между $x=-h$ и $x=+h$ достигает своих крайних значений $+L$ и $-L$, может быть ниже $n+1$ на d единиц, только если будем иметь

$$p_1=0,\ p_2=0,\ \ldots,\ p_d=0,$$
$$p_{n-l+1}=0,\ p_{n-l+2}=0,\ \ldots;\ p_{n-l+d}=0.$$

Высказывая это, мы отвлекаемся от того случая, когда функция Y и её производные для значений x, заключённых между $x=-h$ и $x=+h$, перестают быть конечными и непрерывными, и предполагаем, что дробь

$$\frac{p_1x^{n-l-1}+p_2x^{n-l-2}+\ldots+p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l+p_{n-l+2}x^{l-1}+\ldots+p_nx+1}$$

приведена к простейшему виду.

Переходя к приложениям, мы отыскиваем решение таких задач.

1) Какая из всех целых функций вида

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$$

отклоняется возможно менее от нуля между пределами $x=-h$ и $x=+h$.

2) Какая из дробей вида

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + p''x^{n-2} + \ldots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2}x + A_{n-l-1}},$$

имеющих один и тот же знаменатель, отклоняется наименее от нуля, между $x = -h$ и $x = +h$.

3) Какая из дробей вида

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \ldots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}$$

между $x = -h$ и $x = +h$ отклоняется возможно менее от данного многочлена $x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \ldots$?

Несмотря на всю сложность уравнений, которые определяют неизвестные коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n, p', p'', \ldots$ $\ldots, p^{(n+1)}$, мы достигаем окончательного решения наших задач, сводя их к вопросам неопределённого анализа.

Тот же приём может быть выгодно употреблён во многих других случаях и, между прочим, в общих исследованиях о приближённом представлении функций в рациональном виде, где этот способ доставляет решение такой задачи:

Для данного приближённого выражения $f(x)$, выведенного обыкновенными способами, в виде многочлена или в виде дроби, найти изменения, которым надо подвергнуть коэффициенты, когда требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x = a - h$ и $x = a + h$, причём h величина довольно малая.

Это мы предполагаем сделать в другом мемуаре, где обнаружится, насколько решение частных задач, которое мы даём теперь, важно для общих исследований о приближённом представлении функций в рациональном виде. На этот раз мы ограничиваемся указанием той пользы, которую можно извлечь из нашего способа для изучения свойств функций целых и дробных.

Таким образом нам удаётся установить следующие теоремы совершенно нового вида.

Теорема. *Численная величина функции*

$$x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \ldots$$

между $x = -h$ и $x = +h$ не может оставаться ниже $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

Теорема. *В пределах $x = -h$ и $x = +h$, где дробь*

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2}x + 1}$$

не обращается в $\frac{0}{0}$, *её числовая величина не может оставаться ниже*

$$2\left(\frac{h}{2}\right)^n\left(\frac{2\rho}{2\rho + h}\right)^\mu,$$

где μ *означает число мнимых корней уравнения*

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1}x + 1 = 0$$

и ρ — *низший предел их модулей.*

Теорема. *Функция*

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + \frac{H}{x-a}$$

от $x = -h$ *до* $x = -h$ *не может оставаться численно ниже*

$$[A \pm \sqrt{A^2 + h^2}]\left(\frac{h}{2}\right)^{n-1},$$

где корень взят со знаком, противоположным знаку числа A.

Теорема. *Функция*

$$x^n + Bx^{n-2} + \ldots + \frac{H}{x-\alpha} + \frac{I}{x-\beta}$$

от $x = -h$ *до* $x = +h$ *не может оставаться численно ниже*

$$\left[B + \frac{n}{4}h^2 \pm \sqrt{\left(B + \frac{n}{4}h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}}\right]\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2},$$

где радикал взят со знаком, противоположным знаку количества $B + \frac{n}{4}h^2$.

При помощи этих теорем можно доказать много очень простых предложений о решении уравнений. Вот некоторые из них.

Если уравнение

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Ix + K = 0$$

содержит только нечётные степени x, то между

$$-2\sqrt[2l+1]{\tfrac{1}{2}K},\quad +2\sqrt[2l+1]{\tfrac{1}{2}K}$$

лежит по меньшей мере один из его корней.

Если уравнение

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+K=0$$

имеет только вещественные корни, какова бы ни была величина t, всегда окажется по меньшей мере один из его корней между

$$x=t \quad \text{и} \quad x=t+4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}},$$

если радикал взят со знаком, противным знаку $\frac{f(t)}{f'(t)}$.

Если числовая величина интеграла

$$\int\limits_{H_0}^{H}(x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+K)\,dx$$

меньше $\frac{4}{n+1}\left(\frac{H-H_0}{4}\right)^{n+1}$, *то между* $x=H$ *и* $x=H_0$ *лежит по меньшей мере один корень уравнения*

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+K=0.$$

По меньшей мере один корень уравнения

$$x^{2\lambda+1}+Ax^{2\lambda}+Bx^{2\lambda-1}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots+Hx^2+Ix+K=0$$

лежит между пределами

$$x=-2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda+1-\mu}},$$

$$x=+2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda+1-\mu}},$$

где μ — число мнимых корней уравнения

$$Ax^{2\lambda}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots+Hx^2+K=0$$

и ρ — нижний предел их модулей.

Если уравнение

$$x^{2\lambda+1}+Ax^{2\lambda-1}+\ldots\pm K_0x^{2\lambda_0}+\ldots+Ix\pm K=0$$

содержит только один член $K_0x^{2\lambda_0}$ *с чётной степенью* x *и его показатель* $2\lambda_0$ *не превосходит* λ, *то по меньшей мере один корень этого уравнения заключается между пределами*

$$x=-2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}-2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\frac{1}{2}K_0},$$

$$x=+2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}+2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\frac{1}{2}K_0}.$$

Кроме этих теорем и некоторых других того же рода, мы показываем, какую пользу можно извлечь из нашил исследований для интерполирования.

О КВАДРАТУРАХ

1. В весьма важном сочинении по математическому анализу, которое недавно издано г. Эрмитом, знаменитый геометр даёт новую формулу приближённого вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

В этой формуле все значения функции $\varphi(x)$ входят с одним и тем же коэффициентом, чем формула Эрмита существенно отличается от формулы Гаусса и что делает весьма удобным её численные приложения. Важность приближённых формул этого рода побуждает меня предложить некоторые соображения, касающиеся разыскания таких формул.

Допустим, что при данной функции $F(x)$ мы желаем выразить возможно точно интегралы вида

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\, dx$$

формулою

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)],$$

где $\varphi(x)$ — какая-нибудь функция, а значения $k, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ не зависят от вида этой функции. Так как эта формула содержит только $n+1$ величин $k, x_1, x_2, \ldots, x_n$, которыми мы можем располагать, то её нельзя отождествить с величиною интеграла

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\, dx$$

далее членов, содержащих n первых производных функции $\varphi(x)$. Мы будем поэтому иметь

$$(1)\quad \int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx - k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)] = \\ = k_1\varphi^{(n+1)}(0)+k_2\varphi^{(n+2)}(0)+\ldots,$$

где $k_1, k_2, \ldots$ обозначают коэффициенты при $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0), \ldots$ в выражении разности

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx - k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)],$$

которое получим, разлагая по формуле Маклорена функцию $\varphi(x)$ под знаком интеграла и значения её $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ вне этого знака.

2. Чтобы на основании формулы (1), предполагая её возможной, найти значение коэффициента k и значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменной x, мы замечаем, что в частном случае, когда

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

где z — какое угодно количество, формула эта приводится к равенству

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx - k\left(\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_n}\right) = \\ = 1\cdot2\cdot3\ldots(n+1)\,k_1 z^{-n-2} + 1\cdot2\cdot3\ldots(n+2)\,k_2 z^{-n-3}+\ldots,$$

где $k, k_1, k_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть величины, не зависящие от z. С другой стороны, обозначая через $f(z)$ произведение

$$(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

имеем:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_n},$$

вследствие чего предыдущая формула приводится к такой:

$$(2)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx =$$

$$= k\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)\,k_1}{z^{n+2}} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+2)\,k_2}{z^{n+3}} + \ldots$$

Умножая эту формулу на z и замечая, что значения выражений

$$z\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{1-\frac{x}{z}}\,dx,$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-\frac{x_1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{x_2}{z}} + \ldots + \frac{1}{1-\frac{x_n}{z}},$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)\,k_1}{z^{n+1}},\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+2)\,k_2}{z^{n+2}},\ldots$$

для $z=\infty$ соответственно равны

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx,\ n,\ 0,\ 0,\ldots,$$

приходим к такому равенству:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = nk,$$

что нам даёт для определения коэффициента k следующую формулу:

$$k = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx.$$

3. Чтобы определить функцию

$$f(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

мы замечаем, что формула (2), после интегрирования по z, даёт

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx=$$

$$=k\log\frac{f(z)}{C}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots nk_1}{z^{n+1}}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)k_2}{z^{n+2}}-\ldots,$$

где C — постоянная, и отсюда

$$f(z)e^{-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots nk_1}{kz^{n+1}}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)k_2}{kz^{n+2}}-\ldots}=$$

$$=Ce^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$$

Так как искомая функция

$$f(z)=(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)$$

n-ой степени, а выражение

$$e^{-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots nk_1}{kz^{n+1}}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)k_2}{kz^{n+2}}-\ldots}$$

разнится от 1 только степенями z, которые ниже z^{-n}, то ясно, что целая часть функции, стоящей в первой части найденной формулы, равна функции $f(z)$. Мы будем поэтому иметь

$$f(z)=\mathbf{E}Ce^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$$

или

$$f(z)=C\mathbf{E}e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}, \tag{3}$$

изображая через $\mathbf{E}$ целую часть функции, помещённой под этим знаком. В этой формуле величина постоянной k даётся, как мы видели, равенством

$$k=\frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx. \tag{4}$$

Что касается постоянной C, то значение её легко найти, замечая, что в искомой функции коэффициент при z^n равен 1; но мы не будем останавливаться на разыскании значения этой постоянной, так как её всегда можно отбросить, не изменяя уравнения

$$f(z)=C\,\mathbf{E}\,e^{\frac{1}{k}\int\limits_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx}=0,$$

корни которого представляют значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в интересующей нас формуле

$$\int\limits_{-1}^{+1}F(x)\varphi(x)\,dx=k\,[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)].$$

4. Переходя к приложениям, мы положим сначала

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

что представляет случай, рассмотренный г. Эрмитом, и в котором интеграл

$$\int\limits_{-1}^{+1}F(x)\varphi(x)\,dx$$

приводится к

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Для этого вида $F(x)$ находим:

$$\int\limits_{-1}^{+1}F(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi,$$

$$\int\limits_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\log(z-x)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\pi\log\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2},$$

поэтому, на основании (4),

$$k=\frac{\pi}{n},$$

и, на основании (3), уравнение $f(z)=0$, определяющее значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, приводится к

$$\mathbf{E}\,e^{n\log\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}}=0 \text{ или } \mathbf{E}\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)=0,$$

что представляет результат, тождественный с полученным Эрмитом, ибо целая часть функции

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n$$

равна

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z).$$

5. Чтобы показать другое приложение данных нами формул, мы положим теперь

$$F(x)=1,$$

что представляет случай, когда интеграл

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx$$

приводится к

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx;$$

это — интеграл, для которого Гаусс дал свою формулу квадратур.

Так как

$$\int_{-1}^{+1} dx=2,\quad \int_{-1}^{+1}\log(z-x)\,dx=\log\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}}-2,$$

то на основании n° 3 заключаем, что приближённая величина интеграла $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx$ будет доставляться формулой

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)],$$

если сделаем $k=\frac{2}{n}$, а за $x_1, x_2, \ldots, x_n$ примем корни уравнения

$$Ee^{\frac{n}{2}\left[\log\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}}-2\right]}=0 \text{ или } E\frac{(z+1)^{\frac{n(z+1)}{2}}}{(z-1)^{\frac{n(z-1)}{2}}}=0,$$

которое, при посредстве разложения в ряды, можем представить под следующим видом:

$$(5)\qquad Ez^n e^{-\frac{n}{2\cdot 3z^2}-\frac{n}{4\cdot 5z^4}-\frac{n}{6\cdot 7z^6}-\cdots}=0.$$

6. Давая n простейшие значения, каковы

$$n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$$

находим, что для этих значений n уравнение (5) обращается соответственно в

$$z^2-\frac{1}{3}=0,$$

$$z^3-\frac{1}{2}z=0,$$

$$z^4-\frac{2}{3}z^2+\frac{1}{45}=0,$$

$$z^5-\frac{5}{6}z^3+\frac{7}{72}z=0,$$

$$z^6-z^4+\frac{1}{5}z^2-\frac{1}{105}=0,$$

$$z^7-\frac{7}{6}z^5+\frac{119}{360}z^3-\frac{149}{6480}z=0,$$

а разрешая эти уравнения, получаем следующие системы значений $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$:

$n=2$.

$x_1=-0{,}577350,$
$x_2=+0{,}577350;$

$n=3$.

$x_1=-0{,}707107,$
$x_2=0,$
$x_3=+0{,}707107;$

$n=4$.

$x_1=-0{,}794654,$
$x_2=-0{,}187592,$
$x_3=+0{,}187592,$
$x_4=+0{,}794654;$

$n=5$.

$x_1=-0{,}832497,$
$x_2=-0{,}374541,$
$x_3=0,$
$x_4=+0{,}374541,$
$x_5=+0{,}832497;$

$n=6$.

$x_1=-0{,}866247,$
$x_2=-0{,}422519,$
$x_3=-0{,}266635,$
$x_4=+0{,}266635,$
$x_5=+0{,}422519,$
$x_6=+0{,}866247;$

$n=7$.

$x_1=-0{,}883862,$
$x_2=-0{,}529657,$
$x_3=-0{,}323912,$
$x_4=\quad 0,$
$x_5=+0{,}323912,$
$x_6=+0{,}529657,$
$x_7=+0{,}883862.$

При этих значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формула

$$\frac{2}{n}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)]$$

даёт приближённое выражение интеграла

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx,$$

которое в известных случаях удобнее для приложений, чем формула Гаусса, ибо в эту последнюю формулу значения $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ входят с различными коэффициентами. Так как наше выражение интеграла $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx$ точно лишь до членов, содержащих $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0), \ldots$, то в нём вообще придётся брать больше членов, чем в формуле Гаусса. Тем не менее, в случае, когда значения $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$, по которым определяется интеграл $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx$, содержат неизвестные погрешности, значительно превышающие ту, которая происходит от отбрасываемых членов, найденной нами приближённой формуле следует отдать предпочтение перед формулой Гаусса, даже в отношении степени точности, так как в нашей приближённой формуле сумма квадратов коэффициентов, по причине их равенства, имеет наименьшую возможную для неё величину.

7. Возвращаясь к случаю, разобранному Эрмитом, мы замечаем, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

при $x=\cos\theta$ приводится к

$$\int_{0}^{\pi}\varphi(\cos\theta)\,d\theta;$$

поэтому данная им формула может иметь весьма полезные приложения к разысканию приближённых величин первого члена разложения $\varphi(\cos\theta)$ в ряд

$$A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \ldots$$

Чтобы найти подобное же выражение для коэффициента A_1, мы должны были бы в формулах n° 3 положить

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Но при таком выборе функции $F(x)$ интеграл $\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\,dx$, входящий в формулы n° 3, приводится к нулю, чем ясно обнаруживается, что формулы эти в рассматриваемом случае неприложимы. Покажем, что́ может, тем не менее, дать для этого случая изложенная выше метода.

В интеграле

$$\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

после замены функции $\varphi(x)$ её разложением в ряд

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}x + \frac{\varphi''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots,$$

член, содержащий $\varphi(0)$, исчезает всякий раз, когда интеграл $\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\,dx$ равен нулю; но это обстоятельство, очевидно, может представиться в выражении

$$k\,[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)]$$

не иначе, как если половина членов его взята со знаком —. Вследствие этого, в предположении

$$\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 0,$$

мы будем искать приближённое выражение интеграла

$$\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$$

при помощи формулы

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\\ -\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})],$$

содержащей m членов со знаком $+$ и m членов со знаком $-$.

8. Так как в формуле

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\\ -\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})]$$

встречается $2m+1$ величин: $k, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$, которыми можно располагать, и так как, по составу её, член с $\varphi(0)$ в ней исчезает, то формулу эту можно отождествить с интегралом $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx$ в членах, содержащих $2m+1$ первых производных функции $\varphi(x)$, что даёт уравнение

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx=\\ =k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\ldots+\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\\ -\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})]+k_1\varphi^{2m+2}(0)+k_2\varphi^{2m+3}(0)+\ldots$$

На основании этого уравнения, следуя той же методе, как и в n°n° 2, 3, мы найдём значения количеств $k, x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$. В самом деле, если положим

$$\varphi(x)=\frac{1}{z-x},$$

предыдущее уравнение приведётся к такому:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}\,dx=\\ =k\left(\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_m}-\frac{1}{z-x_{m+1}}-\right.\\ \left.-\frac{1}{z-x_{m+2}}-\ldots-\frac{1}{z-x_{2m}}\right)+\\ +\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+2)k_1}{z^{2m+3}}+\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+3)k_2}{z^{2m+4}}+\ldots$$

Полагая затем

$$f_0(z)=(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_m),$$
$$f_1(z)=(z-x_{m+1})(z-x_{m+2})\ldots(z-x_{2m})$$

и замечая, что при этих выражениях $f_0(z)$, $f_1(z)$ имеем

$$\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}=\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_m},$$
$$\frac{f_1'(z)}{f_2(z)}=\frac{1}{z-x_{m+1}}+\frac{1}{z-x_{m+2}}+\ldots+\frac{1}{z-x_{2m}},$$

можем представить наше уравнение под видом

$$\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}\,dx=k\left[\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}-\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right]+\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+2)\,k_1}{z^{2m+3}}+$$
$$+\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+3)\,k_2}{z^{2m+4}}+\ldots,$$

откуда, интегрированием по z, найдём

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx=k\log\frac{f_0(z)}{f_1(z)}-\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+1)\,k_1}{z^{2m+2}}-$$
$$-\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+2)\,k_2}{z^{2m+3}}-\ldots$$

Постоянная, вводимая интегрированием, будет нулём, так как здесь все члены уничтожаются при $z=\infty$.

Из этого уравнения, полагая для сокращения

$$\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+1)\,k_1}{k}=L_1,\quad \frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2m+2)\,k_2}{k}=L_2,\ \ldots,$$

выводим

$$\frac{f_0(z)}{f_1(z)}\,e^{-L_1z^{-2m-2}-L_2z^{-2m-3}-\ldots}=e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx}$$

Так как функции $f_0(z)$, $f_1(z)$ одной и той же степени, то дробь $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ будет нулевой степени; притом выражение

$$e^{-L_1z^{-2m-2}-L_2z^{-2m-3}-\ldots}$$

разнится от 1 только степенями z, низшими, чем z^{-2m-1}.

Поэтому найденное нами уравнение показывает, что дробь $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ разнится от выражения

$$e^{\frac{1}{k}\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$$

только членами, которые содержат степени z, низшие, чем z^{-2m-1}, и, следовательно, низшие, чем степень дроби $\frac{1}{z[f_1(z)]^2}$, ибо функция $f_1(z)$, как мы видели, только m-ой степени. Но дробь $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$, как известно, в том только случае может давать приближённую величину какой-либо функции с точностью до порядка $\frac{1}{z[f_1(z)]^2}$, когда она представляет одну из подходящих дробей, получаемых при разложении этой функции в непрерывную дробь, и когда полное частное соответствующей подходящей дроби не содержит члена с $\frac{1}{z}$. Исходя из этого, нетрудно найти и постоянную k, и функции $f_0(z)$, $f_1(z)$, которыми определяются значения $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$. С этой целью разлагаем выражение

$$e^{\frac{1}{k}\int\limits_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$$

в непрерывную дробь, останавливаясь на частном, соответствующем подходящей дроби, для которой числитель и знаменатель m-ой степени. Приравнивая нулю коэффициент при $\frac{1}{z}$ в полном выражении этого частного, мы получим уравнение, которым определится величина постоянной k, а подставляя найденную таким путём величину k в числитель и знаменатель нашей подходящей дроби, мы получим искомые функции $f_0(z)$, $f_1(z)$.

9. Чтобы показать применение изложенного на примере, допустим, что дело идёт о разыскании приближённого выражения интеграла

$$\int\limits_{-1}^{+1} x\,\varphi(x)\,dx.$$

Для этого в формулах предыдущего n° следует положить

$$F(x) = x.$$

При таком выборе функции $F(x)$ получаем:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x\log(z-x)\,dx =$$

$$= \frac{z^2-1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - z,$$

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx} = e^{\frac{z^2-1}{2k}\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{z}{k}}.$$

Разлагая это последнее выражение в непрерывную дробь, находим, что полное частное, соответствующее подходящей дроби, для которой числитель и знаменатель первой степени, равно

$$3kz + 1 - \left(\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k}\right)\frac{1}{z} + \ldots,$$

и что эта подходящая дробь равна

$$\frac{3kz-1}{3kz+1},$$

откуда заключаем, что в приближённом выражении интеграла

$$\int_{-1}^{+1} x\,\varphi(x)\,dx$$

формулою

$$k[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]$$

для k должно взять корень уравнения

$$\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k} = 0,$$

а для x_1, x_2, соответственно, корни уравнений

$$3kz - 1 = 0, \quad 3kz + 1 = 0.$$

Таким образом, мы находим два значения k:

$$k=+\sqrt{\frac{5}{27}},\quad k=-\sqrt{\frac{5}{27}},$$

и две системы значений x_1, x_2:

$$x_1=+\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{3}{5}},$$
$$x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_2=+\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Но из этих двояких значений k, x_1, x_2, очевидно, выводится только одно значение для искомого выражения, именно:

$$\sqrt{\frac{5}{27}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)-\varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

Чтобы найти приближённое выражение интеграла

$$\int_{-1}^{+1} x\,\varphi(x)\,dx$$

с четырьмя членами, мы должны взять частное той же непрерывной дроби, соответствующее подходящей дроби, для которой числитель и знаменатель второй степени. Так как полная величина этого частного выражается рядом

$$105k^2z-\frac{5832k^4-945k^2+35}{243k^2-45}\frac{1}{z}+\ldots$$

и частное это соответствует подходящей дроби

$$\frac{270k^2z^2-90kz+10-54k^2}{270k^2z^2+90kz+10-54k^2},$$

то значения постоянной k и x_1, x_2, x_3, x_4 найдутся из уравнений

$$5832k^4-945k^2+35=0,$$
$$270k^2z^2-90kz+10-54k^2=0,$$
$$270k^2z^2-90kz+10-54k^2=0.$$

Решая их, мы приходим к двум следующим приближённым выражениям рассматриваемого интеграла:

$$0{,}23937\,[\varphi(0{,}89224)+\varphi(0{,}50030)-\\ -\varphi(-0{,}50030)-\varphi(-0{,}89224)]$$

и

$$0{,}32363\,[\varphi(0{,}84905)+\varphi(0{,}18093)-\\ -\varphi(-0{,}18093)-\varphi(-0{,}84905)].$$

10. Переходя к разысканию приближённых выражений интеграла

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta \text{ или } \int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\varphi(x)\,dx,$$

мы положим в наших формулах

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для этого вида функции $F(x)$ получаем:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\log(z-x)\,dx=\\ =-\pi\left(z-\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx}=e^{-\frac{\pi}{k}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}.$$

Разлагая последнее выражение в непрерывную дробь, находим подходящие дроби:

$$\frac{4kz-\pi}{4kz+\pi},\qquad \frac{48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2}{48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2},\ \ldots,$$

которые соответствуют полным частным

$$4kz+\pi-\frac{12k^2-\pi^2}{12k}\frac{1}{z}+\ldots,\ 12kz-\frac{720k^4-60\pi^2k^2+\pi^4}{20\,(12k^2-\pi^2)\,k}\frac{1}{z}+\ldots,$$

откуда, на основании n° 8, выводим: 1°, для определения k, x_1, x_2 в приближённом выражении интеграла

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$$

формулою

$$k[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)]$$

такие уравнения:

$$12k^2-\pi^2=0,\quad 4kz-\pi=0,\quad 4kz+\pi=0;$$

и 2°, для определения подобного же выражения с четырьмя членами — такие уравнения:

$$720k^4-60\pi^2k^2+\pi^4=0,$$
$$48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2=0,$$
$$48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2=0.$$

Приближённые выражения интеграла

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta,$$

получаемые на основании этих уравнений, приводятся к следующим:

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{12}}\{\varphi(\cos\theta_0)-\varphi[\cos(\pi+\theta_0)]\},$$

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta=$$
$$=0{,}151765\pi\{\varphi(\cos\theta_1)+\varphi(\cos\theta_2)-$$
$$-\varphi[\cos(\pi+\theta_1)]-\varphi[\cos(\pi+\theta_2)]\},$$

где

$$\theta_0=30^\circ,\quad \theta_1=12^\circ,\quad \theta_2=48^\circ\ ^{*}).$$

---

*) Кроме указанного здесь, возможно ещё другое выражение с четырьмя членами, в котором

$$k=0{,}245562\pi,\ \theta_1=24^\circ,\ \theta=84^\circ.$$

А. Л.

[Это примечание принадлежит А. М. Ляпунову, который перевёл рассматриваемый мемуар на русский язык для собрания сочинений П. Л. Чебышева. (*Ред.*)]

Мы получили бы более точные выражения интеграла

$$\int_0^\pi \cos\theta\, \varphi(\cos\theta)\, d\theta,$$

взяв большее число членов в формуле

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)- \\ -\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})].$$

Мы не будем останавливаться на исследовании этих формул; заметим только, что, заменяя во всех этих формулах члены вида $\varphi(\cos\theta_\lambda)$ выражениями

$$\frac{1}{l}\left[\varphi\left(\cos\frac{\theta_\lambda}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{2\pi+\theta_\lambda}{l}\right)+\ldots+\varphi\left(\cos\frac{(2l-1)\pi+\theta_\lambda}{l}\right)\right],$$

где l — число целое, мы получим приближённые выражения интеграла

$$\int_0^\pi \cos l\theta\, \varphi(\cos\theta)\, d\theta.$$

Таким образом, исходя из предыдущих формул, доставляющих приближённые выражения с двумя и четырьмя членами для интеграла

$$\int_0^\pi \cos l\theta\, \varphi(\cos\theta)\, d\theta,$$

мы могли бы перейти к приближённым выражениям с $2l$ и $4l$ членами для интеграла

$$\int_0^\pi \cos l\theta\, \varphi(\cos\theta)\, d\theta,$$

— к выражениям, которые можно представить так:

$$\frac{\pi}{\sqrt{12l}}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^\mu\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_0}{l}\right),$$

$$\frac{0,151765\pi}{l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^\mu\left[\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_1}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_2}{l}\right)\right],$$

где суммирования распространяются на числа

$$\mu=0, 1, 2, \ldots, 2l-1.$$

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИНАХ ИНТЕГРАЛОВ

В мемуаре, весьма интересном во многих отношениях, который был прочитан Бьенэме в Академии наук в 1833 году и который был напечатан в Comptes rendus и воспроизведён в журнале Лиувилля (2-я серия, т. XII, 1867) под заглавием *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés*, знаменитый учёный предлагает метод, заслуживающий особенного внимания.

Этот метод состоит в определении предельной величины интеграла

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

по величинам интегралов

$$\int_0^A f(x)\,dx, \quad \int_0^A xf(x)\,dx, \quad \int_0^A x^2 f(x)\,dx, \ldots,$$

где $A > a$, а $f(x)$—неизвестная функция, подчинённая одному только условию сохранять знак $+$ между пределами интегрирования. Простое и строгое доказательство закона Бернулли, находящееся в моей заметке под заглавием *О средних величинах* *), представляет один из результатов, легко получаемых из метода Бьенэме, при помощи которого он сам пришёл к доказательству одного предложения о вероятностях, из которого закон Бернулли вытекает непосредственно.

Пытаясь получить для предельных величин интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

*) Математический Сборник, том II, 1867, стр. 1—9.

всё, что могут доставить величины интегралов

$$\int_A^B f(x)\,dx,\quad \int_A^B xf(x)\,dx,\quad \int_A^B x^2 f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_A^B x^m f(x)\,dx,$$

где

$$A < a, \ B > b$$

и где $f(x)$ остаётся положительною, я пришёл к заключению, что эти изыскания приводят к нового рода теоремам, касающимся разложения выражения

$$\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

в непрерывную дробь — разложения, играющего столь важную роль в теории рядов. Вот, например, одна из этих теорем:

Если $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *есть одна из подходящих дробей для интеграла*

$$\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx,$$

получаемая при разложении его в непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2+\ldots}}},$$

и если

$$z_1, z_2, \ldots, z_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n, \ldots, z_m$$

суть корни уравнения

$$\psi(z) = 0,$$

расположенные в порядке возрастания, то всякий раз, когда между пределами $x = A$, $x = B$ *функция* $f(x)$ *остаётся положительной, величина интеграла*

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$$

превышает сумму

$$\frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})}+\frac{\varphi(z_{l+2})}{\psi'(z_{l+2})}+\ldots+\frac{\varphi(z_{n-2})}{\psi'(z_{n-2})}+\frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})}$$

и остаётся менее следующей:

$$\frac{\varphi(z_l)}{\psi'(z_l)}+\frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})}+\ldots+\frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})}+\frac{\varphi(z_n)}{\psi'(z_n)}.$$

Как на один из примеров задач, решаемых этим методом, я укажу следующую:

Даны: длина, вес, место центра тяжести и момент инерции материальной прямой линии с неизвестной плотностью, изменяющеюся при переходе от одной точки к другой. Требуется найти наиболее тесные пределы для веса некоторого отрезка этой прямой.

Предполагая, что речь идёт о весе отрезка, отсчитываемого от одного из концов линии, расстояние которого от центра тяжести равно d, и изображая через l, p длину и вес всей линии, через k её момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к линии, через x, z длину и вес рассматриваемого отрезка, мы приходим к такому решению задачи:

Пока x менее

$$d-\frac{k}{(l-d)p},$$

вес z остаётся между

$$0 \text{ и } \frac{kp}{(d-x)^2p+k};$$

в случае, когда x превышает

$$d+\frac{k}{dp},$$

этот вес остаётся между пределами

$$p \text{ и } \frac{(d-x)^2p^2}{(d-x)^2p+k};$$

наконец, если x лежит между

$$d-\frac{k}{(l-d)p} \text{ и } d+\frac{k}{dp},$$

величина этого веса лежит между пределами

$$\frac{(x-d)(l-d)p+k}{lx} \text{ и } \frac{(l+d-x)(l-d)p-k}{l(l-x)}.$$

О ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕРЕЗ ПРОСТЫЕ ДРОБИ

§ 1. При вычислении квадратур нередко приходится заменять функции, представляющие затруднения для интегрирования, их приближёнными выражениями. Если такое затруднение происходит от радикала второй степени, с большою пользою может быть употреблено приближённое выражение радикала

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

функциею вида

$$A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x},$$

которое получается при помощи первой теоремы, доказанной нами в Мемуаре, под заглавием: *Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций* *). Когда имеется в виду по возможности уменьшить предел относительной погрешности при всех значениях x, от $x=1$ до $x=h>1$, наилучшее представление радикала

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

функциею

$$A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}$$

---

*) Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg. Sixième série. Sc. math. et phys., tome VII, 1859, p. 199—291.

будет то, при котором отношения

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}},$$

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

наименее удаляются от 1 между $x=1$, $x=h$.

Такое представление радикала

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

мы можем найти при помощи вышеупомянутой теоремы, прикладывая её к определению величин

$$A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,$$

с которыми логарифм отношения

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}$$

или

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

наименее уклоняется от 0, когда x меняется от $x=1$ до $x=h$.

Полагая, что в промежутке $x=1$, $x=h$ предельные величины этих отношений суть

$$l,\quad \frac{1}{l}>l,$$

мы на основании вышеупомянутой теоремы убеждаемся в возможности приблизить эти пределы к 1 надлежащим изменением $2n+1$ количеств

$$A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,$$

заключающихся в функции

$$y = \frac{A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right],$$

если она от $x = 1$ до $x = h$ достигает менее $2n + 2$ раз предельных величин $l, \frac{1}{l}$.

Откуда следует, что наибольшее приближение к 1 пределов

$$l, \frac{1}{l}$$

может иметь место только при таких величинах

$$A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,$$

с которыми функция

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right] \tag{1}$$

в промежутке

$$x = 1, \quad x = h$$

достигает по крайней мере $2n + 2$ раза величин $l, \frac{1}{l}$, не переходя за них.

Мы теперь покажем, как на основании этого могут быть найдены и количество l и функция y, доставляющие решение нашей задачи.

§ 2. Так как функция y, приводясь к l или $\frac{1}{l}$ при какой-либо величине x, не делающей

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

и отличной от

$$x = 1, \quad x = h,$$

между $x = 1$, $x = h$ будет переходить за пределы $l, \frac{1}{l}$, то по вышезамеченному, начиная с $x = 1$ до $x = h$, должно быть по крайней мере $2n+2$ различных величин x, удовлетворяющих уравнению

$$(l^2-y^2)(1-l^2y^2)=0$$

вместе с уравнением

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1-x)(h-x)=0,$$

где по (1) первые части представят рациональные дроби с одинаковым знаменателем

$$(C_1+x)^4(C_2+x)^4\ldots(C_n+x)^4$$

и с числителями степени $4n+2$. По составу же этих уравнений видно, что общие корни их, отличные от $x=1$, $x=h$, должны быть кратными; вследствие чего эти уравнения не могут иметь места одновременно при $2n+2$ различных величинах x, не имея $4n+2$ общих корня, равных или неравных, а это предполагает тождество их, так как по вышепоказанному они приводятся к уравнениям степени $4n+2$.

Уравнения же эти могут быть тождественны только при равенстве

$$(l^2-y^2)(1-l^2y^2)=C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1-x)(h-x),$$

где C — постоянная величина; откуда выходит такое дифференциальное уравнение:

$$\sqrt{C}\,\frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}. \tag{2}$$

Между различными функциями y, удовлетворяющими этому уравнению при каких-либо величинах постоянных l, C, нетрудно отличить ту, которая даёт решение нашей задачи.

Для этого мы замечаем, что по (1) равенство

$$\frac{dy}{dx}=0$$

приводится к уравнению степени $2n$, а потому от $x=0$ до $x=+\infty$ производная $\frac{dy}{dx}$ не может более $2n$ раз обращаться в нуль.

Так как по вышесказанному она не менее $2n$ раз приводится к нулю в промежутке $x=1$, $x=h$, то она в промежутках

$$x=0, \quad x<1,$$
$$x>h, \quad x=+\infty$$

должна ни разу не обращаться в нуль; в промежутке же

$$x=1, \quad x=h$$

должна $2n$ раз делаться равною нулю.

Вследствие этого между определёнными интегралами

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \quad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}},$$

$$\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}, \quad \int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}$$

получается из уравнения (2) такое соотношение:

$$(3) \quad \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}}{\displaystyle\int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}} = (2n+1)\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\displaystyle\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}.$$

§ 3. На основании этого равенства легко вычисляется величина l по отношению интегралов

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \quad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}.$$

Из различных формул, служащих для этого, мы в настоящем случае будем пользоваться такою:

$$l^4 = 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{1+q^{4n+2}+q^{12n+6}+\ldots}{1+q^{2n+1}+q^{6n+3}+\ldots}\right)^8 =$$

$$(4) \qquad = 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{2(2n+1)i(2i+1)}}{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{(2n+1)i(2i+1)}}\right)^8$$

где

$$q = e^{-\pi \frac{\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int\limits_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}}.$$

По этой формуле видно, как быстро приближаются к единице количества l, $\frac{1}{l}$ при возрастании числа n, и вследствие того быстро уменьшается относительная погрешность формулы

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

доставляющей приближённую величину радикала

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

в промежутке от $x = 1$ до $x = h$.

Изображая через θ величину, заключающуюся между 0 и 1, мы находим для представления всех величин, заключающихся между l, $\frac{1}{l}$, формулу $l^{\theta-1}$; вследствие чего по вышепоказанному относительно функции

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]$$

получается такое уравнение для определения величины радикала $\sqrt{\frac{1}{x}}$:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = l^{1-2\theta}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]. \tag{5}$$

§ 4. Количества

$$A, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

входящие в эту формулу, легко выводятся из выражения интеграла уравнения (2), который получается при равенстве (3).

Представляя этот интеграл под видом

$$\sqrt{x}\left[A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}\right],$$

мы находим, что здесь количества

$$A, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$$

при помощи эллиптической функции с модулем

$$k=\sqrt{1-\frac{1}{h}} \tag{6}$$

и

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

определяются такими формулами:

$$A=\frac{1}{l\sqrt{h}\left[1+2dn\frac{2K}{2n+1}+2dn\frac{4K}{2n+1}+\ldots+2dn\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$B_m=\frac{2\sqrt{h}\,dn\frac{2mK}{2n+1}}{l sn^2\frac{2mK}{2n+1}\left[1+2dn\frac{2K}{2n+1}+\ldots+2dn\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$C_m=\frac{cn^2\frac{2mK}{2n+1}}{sn^2\frac{2mK}{2n+1}}h.$$

Замечая, что функция

$$dn\frac{2mK}{2n+1}$$

приводится к 1 при $m=0$ и не меняется при перемене m на $-m$, мы можем сумму

$$1+2dn\frac{2K}{2n+1}+2dn\frac{4K}{2n+1}+\ldots+2dn\frac{2nK}{2n+1}$$

представить под видом

$$\sum dn\frac{2mK}{2n+1},$$

где знак суммы предполагается распространённым на величины

$$m = -n, \ -(n-1), \ldots, \ -1, 0, 1, \ldots, n-1, n.$$

Вследствие этого мы будем иметь

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\sum dn\frac{2mK}{2n+1}}, \quad B_m = \frac{2\sqrt{h}\,dn\frac{2mK}{2n+1}}{l sn^2\frac{2mK}{2n+1}\sum dn\frac{2mK}{2n+1}}$$

и

$$\frac{B_m}{C_m+x} = \frac{2\sqrt{h}\,dn\frac{2mK}{2n+1}}{l sn^2\frac{2mK}{2n+1}\sum dn\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{cn^2\frac{2mK}{2n+1}}{sn^2\frac{2mK}{2n+1}}h+x} =$$

$$= \frac{2dn\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum dn\frac{2mK}{2n+1}} \frac{\sqrt{h}}{x sn^2\frac{2mK}{2n+1} + h cn^2\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Так как выражение

$$\frac{dn\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum dn\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{h}}{x sn^2\frac{2mK}{2n+1} + h cn^2\frac{2mK}{2n+1}}$$

при $m=0$ приводится к

$$\frac{1}{l\sqrt{h}\sum dn\frac{2mK}{2n+1}}$$

— величине, равной A, а при перемене знака m не меняется, то это выражение, просуммированное относительно m, при значениях

$$m = -n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n,$$

даст выражение суммы

$$A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n+x}.$$

Вследствие этого из равенства (5) получается такая формула для определения величины радикала

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

при x, не выходящем за пределы $x=1$, $x=h$:

$$(7)\qquad \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{h}\, dn \dfrac{2mK}{2n+1}}{xsn^2 \dfrac{2mK}{2n+1} + hcn^2 \dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{\theta} \sum dn \dfrac{2mK}{2n+1}}.$$

§ 5. Из полученного нами равенства нетрудно вывести формулу, доставляющую предельные величины интеграла

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\, du$$

при помощи интегралов, заключающих функцию V вне знака радикала. Для этого необходимо, чтобы функции U, V оставались положительными при всех величинах переменной u, на которые распространяется интегрирование.

Изображая через

$$M,\ M_0 < M$$

пределы, за которые при этом функция V не выходит, мы замечаем, что выражение

$$\frac{V}{M_0}$$

будет оставаться между пределами

$$1,\quad \frac{M}{M_0},$$

и следовательно, между пределами

$$1,\ h,$$

если

$$h = \frac{M}{M_0}.$$

Откуда видно, что при значениях u, на которые распространяется интеграл

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du,$$

равенство (7) будет приложимо к

$$x = \frac{V}{M_0},$$

если примем

$$h = \frac{M}{M_0}.$$

Внося же эти величины x и h в равенство (7), мы получаем

$$\sqrt{\frac{M_0}{V}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{M_0 M}\, dn\, \frac{2mK}{2n+1}}{V sn^2 \frac{2mK}{2n+1} + M cn^2 \frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta} \sum dn\, \frac{2mK}{2n+1}},$$

что по сокращении на $\sqrt{M_0}$ нам даёт

$$\sqrt{\frac{1}{V}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{M}\, dn\, \frac{2mK}{2n+1}}{V sn^2 \frac{2mK}{2n+1} + M cn^2 \frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta} \sum dn\, \frac{2mK}{2n+1}}.$$

Так как по положению при значениях u, на которые распространяется интеграл

$$\int \frac{U du}{\sqrt{V}},$$

функция U остаётся положительной, из этого равенства, где θ остаётся неизвестным количеством, заключающимся между 0 и 1, получаем

$$(8) \qquad \int \frac{U du}{\sqrt{V}} = \frac{\sum \displaystyle\int \dfrac{\sqrt{M}\, dn\, \frac{2mK}{2n+1}\, U du}{V sn^2 \frac{2mK}{2n+1} + M cn^2 \frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta} \sum dn\, \frac{2mK}{2n+1}}.$$

Эта формула получена нами в предположении

$$h=\frac{M}{M_0},$$

вследствие чего по (6) будем иметь

$$(9)\qquad M_0=M\,(1-k^2).$$

Это даёт нам соотношение между величинами M, M_0, за которые не должна выходить функция V в пределах интегрирования, и модулем k, служащим для составления формулы (8) и уравнения (4).

Изображая для сокращения

$$sn\,\frac{2mK}{2n+1}$$

через s_m, находим

$$cn\,\frac{2mK}{2n+1}=\sqrt{1-s_m^2},\qquad dn\,\frac{2mK}{2n+1}=\sqrt{1-k^2s_m^2},$$

$$\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}=1+2\sqrt{1-k^2s_1^2}+2\sqrt{1-k^2s_2^2}+\ldots$$
$$\ldots+2\sqrt{1-k^2s_n^2},$$

вследствие чего, полагая

$$(10)\,S=1+2\sqrt{1-k^2s_1^2}+2\sqrt{1-k^2s_2^2}+\ldots+2\sqrt{1-k^2s_n^2}$$

и

$$(11)\qquad F\,(s)=\frac{\sqrt{M}\,\sqrt{1-k^2s^2}}{S}\int\frac{Udu}{\sqrt{s^2+M\,(1-s^2)}},$$

мы по равенству (8) будем иметь

$$(12)\int\frac{Udu}{\sqrt{V}}=\frac{1}{l^{2\theta}}\,[F\,(0)+2F\,(s_1)+2F\,(s_2)+\ldots+2F\,(s_n)].$$

Так как величина θ заключается между 0 и 1, это равенство при $\theta=0$, $\theta=1$ даёт такие две предельные величины интеграла $\int\frac{U}{\sqrt{V}}\,du$:

$$\int\frac{U}{\sqrt{V}}\,du\geqslant F\,(0)+2F\,(s_1)+2F\,(s_2)+\ldots+2F\,(s_n),$$

$$\int\frac{U}{\sqrt{V}}\,du\leqslant\frac{1}{l^2}\,[F\,(0)+2F\,(s_1)+2F\,(s_2)+\ldots+2F\,(s_n)],$$

где l есть количество, определяемое уравнением (4), по составу которого видно, что l при возрастании числа n быстро приближается к 1.

§ 6. Переходя к приложениям выведенных нами формул, мы начнём с случая, когда

$$U=1,\ V=1-\lambda^2\sin^2 u,$$

где $\lambda<1$. Принимая 0 за низший предел в интеграле

$$\int\frac{U\,du}{\sqrt{V}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}},$$

мы находим, что наибольшая величина функции

$$V=1-\lambda^2\sin^2 u$$

в пределах интегрирования есть 1, а потому, согласно нашему знакоположению, можно взять

$$M=1.$$

При этой величине M уравнение (9) даёт

$$M_0=1-k^2,$$

где M_0 есть низший предел величины

$$V=1-\lambda^2\sin^2 u,$$

при котором приложима формула (12). Так как функция V при величинах переменной u, на которые распространяется интеграл

$$\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}},$$

не должна переходить за предел M_0, при всех этих величинах u должно быть

$$1-\lambda^2\sin^2 u\geqslant 1-k^2,$$

и следовательно,

$$\sin u\leqslant\frac{k}{\lambda}.$$

Если

$$\lambda \leqslant k,$$

это условие, очевидно, будет выполняться при всяком действительном значении u; а потому в случае

$$\lambda \leqslant k$$

к интегралу

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}$$

можно будет приложить формулу (12), как бы велико ни было u.

В случае же

$$\lambda > k$$

это условие будет удовлетворяться только при значениях u, не превосходящих

$$\arcsin \frac{k}{\lambda};$$

а потому в этом случае наши формулы будут приложимы к интегралу

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}$$

только при выполнении условия

$$u \leqslant \arcsin \frac{k}{\lambda}.$$

Внеся в формулу (11)

$$U=1, \quad V=1-\lambda^2 \sin^2 u, \quad M=1$$

и принимая 0 за низший предел интегрирования, мы находим, что в рассматриваемом нами случае

$$F(s)=\frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S} \int_0^u \frac{du}{(1-\lambda^2 \sin^2 u) s^2+1-s^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S\sqrt{1-\lambda^2 s^2}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-\lambda^2 s^2} \operatorname{tang} u\right).$$

При помощи этой функции и величин

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ S,$$

которые (§ 5) определяются эллиптической функцией с модулем k, мы по (12) получаем уравнение, которое даёт предельные величины интеграла

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}},$$

быстро приближающиеся друг к другу при увеличении числа n.

§ 7. Останавливаясь на частном предположении

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

мы находим

$$q=e^{-\pi},$$

и вследствие того уравнение (4), определяющее количество l при различных числах n, приводится к такому:

$$l^4=1-16e^{-(2n+1)\pi}\left(\frac{1+e^{-(4n+2)\pi}+e^{-(12n+6)\pi}+\ldots}{1+e^{-(2n+1)\pi}+e^{-(6n+3)\pi}+\ldots}\right)^8.$$

Из этого уравнения, при

$$n=1,\ 2,\ \ldots,$$

получаем

$$l^2=0{,}9993546;$$
$$l^2=0{,}9999988;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

откуда видно, как быстро приближаются друг к другу, при возрастании числа n, предельные величины интеграла

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}},$$

доставляемые формулою (12).

Полагая в этой формуле $n=1$, получаем

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}}[F(0)+2F(s_1)]\ .$$

Так как при

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad n=1$$

уравнение, определяющее S, приводится к равенству

$$S=1+2\sqrt{1-\frac{1}{2}s_1^2},$$

и

$$sn\frac{2K}{3}=s_1=0{,}9002272\,,$$

находим

$$S=2{,}5424598,$$

вследствие чего по (11) при $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ выходит

$$F(s)=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}s^2}\ \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-\lambda^2 s^2}\ \operatorname{tang} u\right)}{2{,}5424598\sqrt{1-\lambda^2 s^2}}\ .$$

Делая здесь

$$s=0,\quad s=s_1=0{,}9002272,$$

получаем

$$F(0)=0{,}3933199\,u,$$

$$F(s_1)=\frac{0{,}3033401\ \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-0{,}8104089\,\lambda^2}\ \operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1-0{,}8104089\,\lambda^2}}\,,$$

что по внесении в равенство (12) даёт такую формулу для определения интеграла $\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$:

$$\frac{1}{l^{2\theta}}\left[0{,}3933199\,u+\frac{0{,}6066801\ \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1-0{,}8104089\,\lambda^2}\ \operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1-0{,}8104089\,\lambda^2}}\right].$$

Полагая $n=2$, мы находим, что в рассматриваемом нами случае равенство (12) приводится к следующему:

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}=\frac{1}{l^{2\theta}}\left[Au+\frac{B_1}{R_1}\operatorname{arc\,tang}(R_1\operatorname{tang} u)+\right.$$

$$\left.+\frac{B_2}{R_2}\operatorname{arc\,tang}(R_2\operatorname{tang} u)\right],$$

где

$$A=0{,}2360679;\ B_1=0{,}4188063;\ B_2=0{,}3451258;$$
$$R_1=\sqrt{1-0{,}4262988\,\lambda^2};\quad R_2=\sqrt{1-0{,}9313131\lambda^2}.$$

Формулы подобного вида относительно интеграла

$$\int_0^u \frac{1+p\sin^2 u}{1+q\sin^2 u}\,\frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

получаются из равенства (12), когда полагаем

$$U=\frac{1+p\sin^2 u}{1+q\sin^2 u},\qquad V=1-\lambda^2\sin^2 u\,.$$

§ 8. Принимая в равенстве (12) за U и V различные функции, мы получаем формулы, доставляющие предельные величины интегралов вида $\int\frac{U\,du}{\sqrt{V}}$, которых вычисление нередко представляет большие трудности.

Так, полагая

$$V=1-\lambda^2\sin^2 u,\qquad U=\Phi(\operatorname{tang} u),$$

где $\Phi(\operatorname{tang} u)$ есть функция, сохраняющая знак $+$ в пределах интегрирования, находим

$$\int_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}\,du=$$

$$=\frac{1}{l^{2\theta}}\left[F(0)+2F(s_1)+2F(s_2)+\ldots+2F(s_n)\right],$$

где

$$F(s)=\frac{\sqrt{1-k^2s^2}}{s}\int_0^u\frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{1-\lambda^2s^2\sin^2 u}\,.$$

Эти формулы, по замеченному в § 6, будут иметь место при всяком u, если

$$\lambda \leqslant k.$$

Предполагая, что это условие выполняется, и принимая $\frac{\pi}{2}$ за верхний предел интегрирования, мы из этих формул выводим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} =$$

$$= \frac{1}{l^{\lambda\theta}} \left[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n) \right],$$

$$F(s) = \frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\, du}{1-\lambda^2 s^2 \sin^2 u}.$$

Полагая в последнем интеграле

$$\operatorname{tang} u = z,$$

находим, что он преобразовывается в интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(z)\, dz}{1+(1-\lambda^2 s^2) z^2},$$

вследствие чего равенство (11), определяющее функцию $F(s)$ в рассматриваемом нами случае, приводится к такому:

$$F(s) = \frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(z)\, dz}{1+(1-\lambda^2 s^2) z^2}.$$

Откуда видно, что формула, получаемая для определения интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

будет заключать в себе только интегралы вида

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2 s^2)\,z^2},$$

интегралы, которых выражение известно при некоторых частных значениях функции $\Phi(z)$.

Так, в случае

$$\Phi(z)=z^{p-1}, \quad 0<p<1,$$

находим

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2 s^2)\,z^2}=\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{1+(1-\lambda^2 s^2)\,z^2}=\frac{\pi}{2\sin\frac{p\pi}{2}(1-\lambda^2 s^2)^{\frac{p}{2}}};$$

а потому при определении интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^4 u}}$$

по равенству (12) будем иметь

$$F(s)=\frac{\pi\sqrt{1-k^2 s^2}}{2\sin\frac{p\pi}{2}(1-\lambda^2 s^3)^{\frac{p}{2}} S};$$

вследствие чего оно даёт

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{1+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}}+\ldots+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_n^2}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{l^{\theta}\, S\sin\frac{p\pi}{2}},$$

откуда, внеся величину S по (10), получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin \frac{p\pi}{2}} \cdot \frac{1+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}}+\ldots+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_n^2}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{1+2\sqrt{1-k^2 s_1^2}+\ldots+2\sqrt{1-k^2 s_n^2}}.$$

В частном случае, когда за модуль k принимается $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $n=1$, это равенство, по внесении в него величины

$$s_1 = sn\frac{2K}{3} = 0{,}9002272\,,$$

даёт для определения интеграла

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

при $\lambda \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$, такую формулу:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta}\sin\frac{p\pi}{2}}\left[0{,}3933199+\frac{0{,}6066801}{(1-0{,}8104089\,\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

где $l^2 = 0{,}9993546$.

Полагая $n=2$, при той же величине модуля k, получаем для определения интеграла

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

в случае $\lambda \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$, такую формулу:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta}\sin\frac{p\pi}{2}}\left[0{,}2360679+\frac{0{,}4188063}{(1-0{,}4262988\,\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}+\frac{0{,}3451258}{(1-0{,}9313131\,\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

где $l^2 = 0{,}9999988$.

О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. В записке, под заглавием: *О средних величинах* *), мы показали, как получаются неравенства, из которых легко выводится теорема относительно вероятностей, заключающая в себе как частные случаи и *теорему Бернулли* и *закон больших чисел.*

Теорема эта была нами так формулирована:

Если математические ожидания величин

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$
$$u_1^2, u_2^2, u_3^2, \ldots$$

не превосходят какого-либо конечного предела, вероятность, что средняя арифметическая n таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа n до ∞ приводится к единице.

Это мы вывели, отыскивая предельные величины одного интеграла по данным величинам других интегралов, заключающих под своими знаками вместе с некоторыми известными функциями одну неизвестную функцию, сохраняющую положительный знак. Развивая употреблённую при этом методу, мы в последнем из наших сообщений Академии Наук **) показали, что она в приложении к одному частному случаю доставляет такую теорему относительно интегралов:

*) Математический Сборник, том II, 1867, стр. 1—9.

**) «Об интегральных вычетах, доставляющих приближённые величины интегралов» (Приложение к LV тому Записок Академии Наук, № 2, 1887).

Если функция $f(x)$, оставаясь положительною, даёт

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{q^2},\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,dx=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x)\,dx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-3)}{q^{2m-2}},\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,dx=0,$$

то величина интеграла

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$$

заключается в пределах

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx-\frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx+\frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

Мы теперь покажем, как, при помощи этой теоремы относительно интегралов, получается теорема относительно вероятностей, которая в приложении к определению благонадёжнейших величин неизвестных на основании большого числа уравнений, заключающих случайные, более или менее значительные погрешности, приводит к *способу наименьших квадратов*. Теорема эта может быть так формулирована:

Если математические ожидания величин

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела, вероятность, что сумма n величин

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n,$$

делённая на квадратный корень из удвоенной суммы *математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t', с возрастанием числа n до ∞ имеет пределом величину интеграла*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{t'} e^{-x^2}\,dx.$$

§ 2. Чтобы доказать*) эту теорему в самом общем её виде, мы примем $-\infty$ и $+\infty$ за пределы, в которых заключаются все возможные значения величин

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

Изображая через

$$\varphi_1(x)\,dx,\quad \varphi_2(x)\,dx,\quad \varphi_3(x)\,dx, \ldots$$

вероятности, что величины

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$$

имеют значения, заключающиеся в бесконечно узком промежутке

$$x,\ x+dx,$$

мы замечаем: 1) что функции

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x), \ldots$$

не будут иметь значений отрицательных; 2) что интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(u_1)\,du_1,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(u_2)\,du_2,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_3(u_3)\,du_3, \ldots,$$

представляющие вероятности, что

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

имеют какие-либо значения в пределах $-\infty$, $+\infty$, бу-

*) Доказательство П. Л. Чебышева имеет пробелы, которые устранил А. А. Марков (см его «Исчисление вероятностей», ГИЗ, 1924 г.). (*Ред.*)

дут равны единице; 3) что интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \varphi_1(u_1)\,du_1, \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \varphi_2(u_2)\,du_2, \int_{-\infty}^{+\infty} u_3 \varphi_3(u_3)\,du_3, \ldots,$$

как представляющие математические ожидания величин

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

по сделанному предположению, должны привестиоь к нулю; 4) что все вообще величины $a_i^{(\mu)}$, определяемые равенством

$$a_i^{(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i^{\mu} \varphi_i(u_i)\,du_i,$$

как представляющие математические ожидания величин

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

возведённых в какие-либо степени, будут, по положению, заключаться в некоторых конечных пределах.

С другой стороны, изображая через

$$f(x)\,dx$$

вероятность, что величина дроби

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

заключается в бесконечно узком промежутке

$$x, \ x + dx,$$

мы замечаем, что эта вероятность получится из равенства

$$f(x)\,dx = \int \ldots \int \varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2) \ldots \varphi_n(u_n)\,du_1\,du_2 \ldots du_n,$$

когда интегрирование относительно $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будет распространено на все величины их, при которых дробь

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

не выходит за пределы бесконечно близкие между собою $x, \ x + dx$.

Перемножая же это равенство почленно с равенством

$$e^{sx}=e^{\frac{s(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{\sqrt{n}}},$$

где s есть произвольное постоянное, и интегрируя от $x=-\infty$ до $x=+\infty$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx=$$

$$=\int\ldots\int e^{\frac{s(u_1+u_2+\ldots+u_n)}{\sqrt{n}}}\varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2)\ldots\varphi_n(u_n)\,du_1\,du_2\ldots du_n.$$

Так как в последнем интеграле переменные

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

будут принимать все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то он приведётся к такому произведению простых интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}}\varphi_1(u_1)\,du_1\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}}\varphi_2(u_2)\,du_2\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}}\varphi_n(u_n)\,du_n;$$

вследствие чего предыдущее равенство нам даст

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}}\varphi_1(u_1)\,du_1\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}}\varphi_2(u_2)\,du_2\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}}\varphi_n(u_n)\,du_n.$$

Разлагая обе части этого равенства по степеням s и сравнивая в них коэффициенты при одинаковых степенях s, мы найдём величины интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx,\ \ldots,$$

представляющие математические ожидания величины

$$x=\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}},$$

возведённой в различные степени, и которые на основании вышеприведённой теоремы послужат нам для определения предельных величин интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{v} f(x)\,dx,$$

представляющего вероятность, что

$$x=\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}$$

не превосходит какой-либо величины v.

§ 3. Ограничиваясь определением $2m$ интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx,\ \ldots,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,dx,$$

мы замечаем, что первая часть уравнения (1), разложенная по степеням s до члена с s^{2m-1}, даёт такой ряд:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx+\frac{s}{1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx+\frac{s^2}{1\cdot 2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx+\ldots$$

$$\ldots+\frac{s^{2m-1}}{1\cdot 2\ldots(2m-1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,dx.$$

Чтобы найти соответствующие члены во второй части этого уравнения, мы её представляем под таким видом:

$$e^{\log\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}}\varphi_1(u_1)\,du_1+\log\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}}\varphi_2(u_2)\,du_2+\ldots+\log\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}}\varphi_n(u_n)\,du_n}$$

откуда получится разложение этой части, точное до s^{2m-1} включительно, когда логарифмы, здесь заключающиеся, заменятся их разложениями в ряды, продолженные до членов с s^{2m-1}.

Для определения такого разложения логарифма

$$\log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i)\, du_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, мы замечаем, что с точностью до s^{2m-1} интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i)\, du_i$$

равен сумме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(u_i)\, du_i + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i \varphi(u_i)\, du_i}{1 \cdot \sqrt{n}} s +$$

$$+ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^2 \varphi_i(u_i)\, du_i}{1 \cdot 2n} s^2 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^3 \varphi_i(u_i)\, du_i}{1 \cdot 2 \cdot 3n\sqrt{n}} s^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^{2m-1} \varphi_i(u_i)\, du_i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2m-1)\, n^{m-1}\sqrt{n}} s^{2m-1},$$

а эта сумма по сказанному в предыдущем параграфе относительно интегралов, в ней заключающихся, приводится к следующему:

$$1 + \frac{a_i^{(2)}}{2n} s^2 + \frac{a_i^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3n\sqrt{n}} s^3 + \ldots + \frac{a_i^{(2m-1)}}{1 \cdot 2 \ldots (2m-1) n^{m-1}\sqrt{n}} s^{2m-1}.$$

Разлагая же логарифм этого выражения по степеням s, мы находим ряд, который, будучи остановлен на члене с s^{2m-1}, может быть так представлен:

$$\frac{a_i^{(2)}}{2n} s^2 + \frac{V_i^{(3)}}{n\sqrt{n}} s^3 + \ldots + \frac{V_i^{(2m-1)}}{n^{m-1}\sqrt{n}} s^{2m-1},$$

где

$$V_i^{(3)}, \ \ldots, \ V_i^{(2m-1)}$$

— целые функции количеств

$$a_i^{(2)}, \ a_i^{(3)}, \ \ldots, \ a_i^{(2m-1)},$$

не содержащие числа n.

Полагая в этой формуле

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

мы получаем разложение логарифмов

$$\log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\, du_1, \ \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2)\, du_2, \ \ldots$$

$$\ldots, \ \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n)\, du_n.$$

откуда через сложение получается равенство

$$\log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\, du_1 + \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2)\, du_2 + \ldots +$$

$$+ \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n)\, du_n = \frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s + \ldots + \frac{M^{(2m-1)}}{n^{m-2}\sqrt{n}} s^{2m-1},$$

где

$$\frac{1}{q^2} = \frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)}}{n},$$

$$M^{(3)} = \frac{V_1^{(3)} + V_2^{(3)} + \ldots + V_n^{(3)}}{n};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M^{(2m-1)} = \frac{V_1^{(2m-1)} + V_2^{(2m-1)} + \ldots + V_n^{(2m-1)}}{n}.$$

Вследствие этого равенство (1), с точностью до s^{2m-1}, представится так:

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\, dx = e^{\frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s^3 + \ldots + \frac{M^{(2m-1)}}{n^{m-2}\sqrt{n}} s^{2m-1}}.$$

Из этого равенства, по вышесказанному, мы найдём величины интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, \ldots, \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1} f(x)\,dx,$$

ограничиваясь при разложении в ряды его частей членами со степенями s не выше $2m-1$.

§ 4. По сказанному в предыдущем параграфе, равенство (2) определяет величину интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx, \ldots, \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}f(x)\,dx,$$

каково бы ни было число n. Переходя к определению этих интегралов при $n=\infty$, мы замечаем, что, по положению, числовая величина математических ожиданий всех степеней $u_1, u_2, u_3, \ldots$ не будет превосходить некоторого конечного предела, и, следовательно, то же будет иметь место относительно величин

$$\begin{gathered} V_1^{(3)}, V_2^{(3)}, \ldots, V_n^{(3)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_1^{(2m-1)}, V_2^{(2m-1)}, \ldots, V_n^{(2m-1)}, \end{gathered}$$

которые по § 3 суть целые функции этих ожиданий, не заключающие числа n, и относительно величин

$$M^{(3)}, \ldots, M^{(2m-1)},$$

которые суть средние арифметические величин

$$\begin{gathered} V_1^{(3)}, V_2^{(3)}, \ldots V_n^{(3)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_1^{(2m-1)}, V_2^{(2m-1)}, \ldots, V_n^{(2m-1)}. \end{gathered}$$

В том же случае, когда числовая величина количеств

$$M^{(3)}, \ldots, M^{(2m-1)}$$

при всяком n остаётся ниже некоторого конечного предела, уравнение (2) при $n=\infty$ приводится к следующему:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}}.$$

По этому уравнению значение интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,dx$$

при n бесконечно большом найдётся чрез сравнение членов с

$$s^0,\ s,\ s^2,\ s^3,\ s^4,\ \ldots,\ s^{2m-2},\ s^{2m-1}$$

в разложении по степеням s интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx$$

и функции

$$e^{\frac{s^2}{2q^2}}.$$

Таким образом, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{q^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,dx = 0,$$

. . . .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x)\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-3)}{q^{2m-2}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,dx = 0.$$

Замечая, что функция $f(x)$ не может иметь отрицательных значений, мы из этих равенств на основании теоремы относительно интегралов, приведённой в § 1, заключаем, что при $n=\infty$ и m каком-нибудь величина интеграла

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$$

будет заключаться между такими двумя величинами:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

Это же может иметь место только в случае равенства

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,\partial x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx,$$

так как при увеличении числа m до ∞ выражение

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{(m-3)^3\sqrt{m-1}}$$

имеет пределом 0. Убедясь таким образом, что при $n=\infty$ должно иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx,$$

мы из него, полагая последовательно

$$v=\frac{\sqrt{2}}{q}t, \qquad v=\frac{\sqrt{2}}{q}t',$$

выводим:

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2}dx, \quad \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t'} e^{-x^2}dx,$$

откуда чрез вычитание получается

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{q}t}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t}^{t'} e^{-x^2}\,dx.$$

Так как по сказанному в § 2 относительно функции $f(x)$ интеграл

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{q}t}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)\,dx$$

представляет вероятность, что величина дроби

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}$$

заключается между пределами $\frac{\sqrt{2}}{q}t$, $\frac{\sqrt{2}}{q}t'$, и следовательно, что дробь

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}}$$

заключается между t, t', равенство этого интеграла при $n=\infty$ с интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t}^{t'} e^{-x^2}dx$$

и даёт вышеприведённую теорему относительно дроби

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{2\left(a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+\ldots+a_n^{(2)}\right)}},$$

к которой приводится дробь

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}}$$

при внесении в неё величины $\frac{1}{q^2}$ по § 3.

Выведенное нами выражение вероятности, что величина дроби

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+\ldots+a_n^{(2)})}}$$

заключается между t и t', будет иметь место только при $n=\infty$.

При n конечном эта вероятность будет более или менее разниться от своей предельной величины

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}dx,$$

смотря по величине числа n и количеств

$$q,\ M^{(3)},\ldots,\ M^{(2m-1)},$$

зависящих, как видели, от математических ожиданий величин u_1, $u_2, \ldots, u_n$, возведённых в различные степени.

Не останавливаясь на определении высшего предела этой разности при n большом, заметим, что по формулам, данным нами в записке под заглавием: *О разложении функций одной переменной* *), при n каком-нибудь получается такое выражение для вероятности:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'}\left[1-K_3\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3\psi_3(x)+K_4\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^4\psi_4(x)+\ldots\right]e^{-x^2}dx,$$

где K_3, $K_4, \ldots$ суть коффициенты при s^3, $s^4, \ldots$ в разложении функции

$$e^{\frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3+\frac{M^{(4)}}{n}s^4+\ldots}$$

по степеням s, а $\psi_3(x)$, $\psi_4(x), \ldots$ — полиномы, получаемые по формуле

$$\psi_l(x)=e^{x^2}\frac{d^l e^{-x^2}}{dx^l}.$$

*) Bulletin physico-math. de l'Académie de St.-Pétersbourg, tome I, p. 193—200, 1859.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. КРАТКИЙ ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТРУДОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

Н. И. Ахиезер

I. Первую славу Чебышеву доставили его работы по теории простых чисел.

Мемуар *Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины* впервые появился в 1849 г., как приложение к знаменитой *Теории сравнений* — докторской диссертации П. Л. Чебышева. Затем этот мемуар был напечатан на французском языке в Записках Академии Наук в 1851 г. и в журнале Лиувилля (Journal de mathématiques pures et appliquées) в 1852 г.

Второй мемуар — *О простых числах* — был напечатан на французском языке в упомянутых выше журналах за 1854, соответственно 1852 годы, а на русском языке появился лишь в 1899 г. в I томе сочинений П. Л. Чебышева.

Оба мемуара посвящены одному из труднейших вопросов математики — вопросу о распределении простых чисел в натуральном ряде, получившему точную формулировку лишь в 1808 г. во втором издании «Теории чисел» Лежандра, где знаменитый геометр дал замечательную эмпирическую формулу для приближённого вычисления при больших значениях x функции $\pi(x)$, представляющей число простых чисел, не превосходящих x. Формула Лежандра имеет вид:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - B},$$

где B — константа, которая по Лежандру равна 1,08366.

Чебышеву наука обязана первыми теоретическими результатами относительно связи функции*) $\pi(x)$ с функцией $\frac{x}{\ln x}$.

Перечислим важнейшие из теорем Чебышева.

1. Если функция

$$B(x) = \ln x - \frac{x}{\pi(x)}$$

имеет предел при $x \to \infty$, то этот предел равен 1.

2. Пусть $f(x)$ есть функция, для которой отношение

$$\frac{x}{\ln^n x} : \left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\ln x} \right]$$

имеет конечный предел при $x \to \infty$. Тогда разность

$$\pi(x) - f(x)$$

при $x \to \infty$ не является величиной $o\left(\frac{x}{\ln^n x}\right)$.

3. Если положить

$$M = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}, \quad m = \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}},$$

$$M \leqslant \frac{6}{5} \ln \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 1{,}105\ldots, \quad m \geqslant \ln \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{,}921\ldots.$$

В связи со своей теоремой 1 Чебышев справедливо отмечает неточность эмпирической формулы Лежандра, так как более подходящей константой является $B = 1$.

Теорема 1 в соединении с теоремой 3 представляют величайшее достижение. Однако из этих теорем не выте-

---

*) Чебышев вместо функции

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

рассматривает функцию

$$\varphi(x) = \sum_{p < x} 1.$$

кает ещё асимптотический закон распределения простых чисел, который гласит:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}=1$$

и был доказан лишь в 1896 г. независимо друг от друга Адамаром и Валле-Пуссеном на базе теории аналитических функций.

Валле-Пуссен исследовал также вопрос о точности приближения. Эти исследования продолжены рядом авторов (Ландау, Литтльвуд и др.) и связаны с глубокими фактами теории функций.

Вот одна из оценок Валле-Пуссена:

$$\pi(x)-\frac{x}{\ln x-B}=(1-B)\frac{x}{\ln^2 x}+(2-B^2)\frac{x}{\ln^3 x}+O\left(\frac{x}{\ln^4 x}\right),$$

где B — любая константа. Отсюда вытекает, что предел, о котором идёт речь в теореме 1 Чебышева, существует, и виден порядок погрешности приближённой формулы Лежандра до и после уточнения Чебышева.

Обратимся теперь к теореме 2 Чебышева. Эта теорема показывает, что введённая Чебышевым функция

$$\int_2^x \frac{dx}{\ln x}$$

или, что в существенном то же самое, функция

$$\operatorname{li} x=\lim_{\eta\to+0}\left\{\int_0^{1-\eta}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\eta}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right\},$$

от которой она отличается на константу $\operatorname{li} 2=1{,}04\ldots$, предпочтительнее при аппроксимации функции $\pi(x)$, чем любая рациональная функция от x и $\ln x$.

В связи с этим приведём относящуюся сюда оценку Литтльвуда

$$\pi(x)=\operatorname{li} x+O\left(\frac{x}{e^{a\sqrt{\ln x\cdot\ln\ln x}}}\right),$$

где a — некоторая положительная абсолютная константа.

Теоремы 1 и 2 находятся в первом мемуаре Чебышева, теорема 3 — во втором. Оценки, найденные Чебышевым во втором мемуаре, позволили ему доказать ряд интересных предложений и в первую очередь так называемый постулат Бертрана, который гласит: если $a>3$, то между a и $2a-2$ лежит по крайней мере одно простое число.

Подробности относительно найденных после Чебышева результатов, а также библиографию читатель найдёт в прекрасной монографии А. Е. Ингам «Распределение простых чисел» (ОНТИ, 1936).

II. Следующей группой работ Чебышева являются исследования об интегрировании иррациональных функций, в которых он является продолжателем Абеля и Лиувилля.

В мемуаре 1826 г. Абель высказал без доказательства следующую теорему. Если интеграл вида

$$\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}},$$

где ρ и R — полиномы от x, выражается через логарифмы, то его можно представить в виде

$$\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}} = A \ln \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

где A — постоянная, а p и q — полиномы от x.

Чебышев доказал и обобщил эту теорему в мемуаре *Об интегрировании иррациональных дифференциалов*, который мы включили в настоящий сборник. Впервые этот мемуар был напечатан на французском языке в журнале Лиувилля за 1853 г., а на русском языке в собрании сочинений.

В рассматриваемом мемуаре содержится также известная теорема Чебышева о том, что интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

где m, n, p — числа рациональные, выражается в элементарных функциях только в одном из следующих случаев:

1) p — целое число,

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число,

3) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число.

В дальнейших мемуарах Чебышев специально исследует интеграл вида

$$\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

где α, β, γ, δ — рациональные числа, а полином под знаком радикала не имеет кратных корней.

Написанный интеграл может выражаться через элементарные функции, то-есть может быть псевдоэллиптическим. На основании исследований Абеля это имеет место (при надлежащем выборе постоянной A) в том и только в том случае, если непрерывная дробь, получаемая при разложении корня

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

обладает периодичностью. Однако непосредственно применять этот критерий невозможно, так как наперёд неизвестно, сколько членов может содержать период.

Чебышева такое положение удовлетворить не могло. Для него, а вместе с ним и для всей созданной им петербургской математической школы, математическая проблема считалась решённой только после нахождения алгорифма, позволяющего построить решение, либо, как в рассматриваемом случае, позволяющего получить ответ на вопрос после некоторого наперёд ограниченного (на основании данных задачи) числа операций. И Чебышев нашёл такой алгорифм в 1860 г. Эти исследования Чебышева продолжил Е. И. Золотарёв, который отказался от ограничения, что α, β, γ, δ — рациональные числа, и дал (при помощи своей теории идеалов) решение вопроса для случая любых вещественных коэффициентов.

Читатель найдёт хорошее изложение результатов Абеля, Чебышева и Золотарёва в диссертации И. Пташицкого «Об интегрировании в конечном виде эллиптических дифференциалов» (СПБ, 1888) *).

---

*) Рекомендуем также читателю изложение (впрочем, не исчерпывающее) результатов Абеля и Чебышева в первом издании первого тома «Курса математического анализа» В. Немыцкого, М. Слудской, А. Черкасова, гл. XVII, «Неинтегрируемость в элементарных функциях».

III. «Практика везде ищет самого лучшего, самого выгодного». Эта мысль Чебышева руководила им во всех его работах в течение 40 с лишним лет. Эта мысль привела Чебышева к особой, до него не выдвигавшейся, постановке вопроса о приближении функций. В общем виде эта постановка вопроса приводит к следующей проблеме: на некотором точечном множестве $\mathfrak{P}$ в пространстве произвольного числа измерений даны две ограниченные функции точки: $f(P)$ и $F(P, A_1, A_2, \ldots, A_n)$, из которых вторая зависит ещё от параметров $A_1, A_2, \ldots, A_n$; эти параметры требуется определить таким образом, чтобы величина

$$\sup_{P\in\mathfrak{P}} |f(P)-F(P;\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)|$$

имела наименьшее значение. Свою теорию Чебышев называл теорией функций, наименее уклоняющихся от нуля, и посвятил ей, а также её приложениям большое число мемуаров, из которых основными являются:

1) Теория механизмов, известных под именем параллелограммов (Записки Академии наук, 1853).

2) Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций (Записки Академии наук, 1857).

Оба мемуара были напечатаны на французском языке, и в переводе на русский язык впервые появились в полном собрании сочинений Чебышева.

Размеры настоящего сборника не позволили включить в него названные мемуары. Мы включили лишь краткое извлечение из мемуара 1857 г., написанное самим Чебышевым для «Bulletin de la Classe Phys.-Math. de l'Académie», а также мемуар *О приближённых выражениях квадратного корня переменной через простые дроби*, напечатанный в Записках Академии наук в 1889 г., а затем перепечатанный в немецком переводе в «Acta mathematica» в XVIII томе в 1894 г. и во французском переводе в «Annales scientifiques de l'École Normale supérieure» в XV томе в 1898 г.

Этот мемуар мы выбрали потому, что он при небольших размерах даёт представление о методе Чебышева. Кроме того, он замечателен тем, что решённая в нём проблема о наилучшей аппроксимации (которая, отметим попутно, теснейшим образом связана с одной из проблем, решённых Е. И. Золотарёвым) имеет существенное значение для современной теории электрических фильтров.

Что касается извлечения из мемуара 1857 г., то в нём содержится большое количество любопытных алгебраических теорем, и привести их, хотя бы без доказательства, нам представлялось весьма желательным. Кроме того, в этом извлечении сформулирована теорема об аппроксимации с помощью рациональной дроби, являющаяся основной в теории Чебышева.

Исследования Чебышева были продолжены и углублены рядом выдающихся учёных (Е. И. Золотарёв, А. А. Марков, В. А. Марков, С. Н. Бернштейн, де-ла-Валле-Пуссен, Д. Джексон и др.).

Особое значение для анализа имеют работы С. Н. Бернштейна, который на базе чебышевских идей развил новое направление в теории функций.

Имея непрерывную в интервале $(-1, +1)$ функцию $f(x)$, С. Н. Бернштейн вводит в рассмотрение чебышевский функционал

$$E_n\{f\} = \operatorname*{Min}_{A_i} \operatorname*{Max}_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - A_0x^n - A_1x^{n-1} - \ldots - A_n|.$$

Предметом теории С. Н. Бернштейна является изучение зависимости между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и асимптотическим поведением величины $E_n\{f\}$ при $n \to \infty$.

В некотором смысле теория С. Н. Бернштейна аналогична вейерштрассовской теории аналитических функций, где роль величин $E_n\{f\}$ играют коэффициенты степенного ряда, представляющего функцию в окрестности какой-нибудь регулярной точки.

Имеется ряд монографий, в которых подробно изложены как исследования Чебышева, так и современная теория приближённого представления функций*).

---

*) Вот некоторые из них.

1. Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (Paris, 1919).

2. С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extremales et

IV. С циклом работ о наилучшем приближении функций связаны многочисленные работы Чебышева, посвящённые интерполированию и, в особенности, интерполированию по способу наименьших квадратов.

В этих работах, которыми Чебышев положил основание общей теории ортогональных полиномов (или полиномов Чебышева), существенную роль играют алгебраические непрерывные дроби вида

$$
\frac{b_0}{z - a_1 - \cfrac{b_1}{z - a_2 - \cfrac{b_2}{z - a_3 - \ldots}}} \tag{1}
$$

где z — переменная величина, а a_i, b_i — постоянные (вещественные) числа, причём $b_i \neq 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Значение этих непрерывных дробей основано на следующем предложении: если коэффициенты s_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ формального степенного ряда

$$
\frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots \tag{2}
$$

удовлетворяют неравенствам

$$
D_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),
$$

то степенному ряду (2) принадлежит вполне определённая непрерывная дробь вида (1), причём эту принадлежность нужно понимать в том смысле, что при любом натуральном n подходящая дробь n-го порядка

$$
\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}
$$

---

la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (Paris, 1926).

3. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций (Москва, 1934).

4. С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной (часть первая, Москва—Ленинград, 1937).

5. Н. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации (выходит из печати).

к этой непрерывной дроби разлагается в степенной ряд по убывающим степеням z, совпадающий с рядом (2) до члена

$$\frac{s_{2n-1}}{z^{2n}}$$

включительно, и это свойство вполне характеризует подходящую дробь (3) среди всех правильных дробей со знаменателем степени n; обратно, каждой непрерывной дроби вида (1) принадлежит в указанном смысле вполне определённый ряд вида (2).

Чебышев берёт интеграл *)

$$\int_a^b \frac{w(t)\,dt}{z-t},$$

где $w(t) \geqslant 0$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ есть заданная функция, имеющая «моменты» любого порядка

$$s_k = \int_a^b t^k w(t)\,dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

разлагает его формально в ряд вида (2) и находит принадлежащую этому ряду непрерывную дробь (1). В силу свойства подходящих дробей

$$\int_a^b \frac{w(t)\,dt}{z-t} - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

откуда,

$$Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t}\,w(t)\,dt + \int_a^b \frac{P_n(t)}{z-t}\,w(t)\,dt + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

*) Или сумму

$$\sum_k \frac{\mu_k}{z-\xi_k} \qquad (\mu_k > 0);$$

оба случая объединяются в один при применении интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{z-t},$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция.

и значит

$$\int_a^b \frac{P_n(t)}{z-t} w(t)\,dt = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$\int_a^b P_n(t)\, t^k w(t)\,dt = 0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

то-есть знаменатели $P_n(t)$ подходящих дробей ортогональны относительно веса $w(t)$:

$$\int_a^b P_m(t)\, P_n(t)\, w(t)\,dt = 0 \qquad (m \neq n).$$

Этот путь в теории ортогональных полиномов был, если и не единственным, то, во всяком случае, господствующим вплоть до недавнего времени.

Отметим некоторые частные системы, указанные Чебышевым ещё в 1859 г.

А. Полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля:

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x \qquad (n=1, 2, 3, \ldots);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} T_i(x)\, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{z-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \ldots}}}.$$

В. Полиномы Чебышева-Эрмита

$$H_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots);$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_i(x)\, H_k(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{z-t}\,dt=\cfrac{1}{z-\cfrac{1}{z-\cfrac{2}{z-\cfrac{3}{z-\dots}}}}.$$

C. Полиномы Чебышева-Лагерра

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\qquad (n=0,1,2,\dots);$$

$$\int_0^{\infty}L_i(x)L_k(x)e^{-x}\,dx=0\quad (i\neq k),$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{z-t}=\cfrac{1}{z-1-\cfrac{1^2}{z-3-\cfrac{2^2}{z-5-\cfrac{3^2}{z-7-\dots}}}}.$$

Отправным пунктом Чебышева была задача об интерполировании по способу наименьших квадратов, которая может быть сформулирована следующим образом: среди всех многочленов $F_n(t)$ степени n найти тот, для которого

$$\int_a^b |f(t)-F_n(t)|^2\,w(t)\,dt$$

имеет наименьшее значение, где $f(t)$ — заданная функция. Это — тоже задача о нахождении полинома, наименее уклоняющегося от данной функции, но при другом определении уклонения или, как принято теперь говорить, в другой метрике. Значение ортогональных полиномов для этой задачи усматривается немедленно, если полином $F_n(t)$ записать в виде

$$F_n(t)=\sum_{k=0}^{n}A_kP_k(t).$$

Действительно, элементарные условия экстремума приводят к следующему выражению для искомого полинома:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\int_a^b f(x) P_k(x) w(x)\,dx}{\int_a^b P_k^2(x) w(x)\,dx} P_k(t).$$

Идеи Чебышева были немедленно подхвачены и получили дальнейшее развитие, особенно в трудах А. А. Маркова и Т. Стилтьеса. Эти учёные разработали ряд важных вопросов, в центре которых находится проблема моментов, получившая своё полное разрешение лишь в последние два десятилетия в исследованиях Гамбургера, М. Рисса, Карлемана и Неванлинна.

Проблема моментов состоит в следующем: даны конечная или бесконечная последовательность вещественных чисел

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

и конечный или бесконечный интервал (a, b); разыскивается неубывающая функция $\sigma(x)$, для которой

$$\int_a^b x^k\,d\sigma(x) = s_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Эта проблема распадается на три:

a) проблема разрешимости;

b) проблема единственности (или определённости);

c) проблема фактического построения решений.

Необходимое условие разрешимости получается очень просто. Оно гласит: последовательность $\{s_k\}$ должна быть «ненегативной» относительно интервала (a, b), т. е. всякий раз из

$$A_0x^k + A_1x^{k-1} + \ldots + A_k \geqslant 0 \qquad (a < x < b)$$

должно следовать

$$A_0s_{k} + A_1s_{k-1} + \ldots + A_ks_0 \geqslant 0.$$

Это условие оказывается также и достаточным для существования функции $\sigma(x)$.

Проблема единственности (два решения не считаются различными, если они отличаются на аддитивную константу во всех их общих точках непрерывности) решается просто только в случае конечного интервала. Для интервала $(0, \infty)$ она была впервые поставлена и разрешена Стилтьесом, а для интервала $(-\infty, \infty)$ — указанными выше позднейшими авторами.

Чебышев, как мы вскоре увидим, подошёл к проблеме моментов вплотную.

В 1873 г. на конгрессе французской ассоциации для преуспеяния наук в Лионе Чебышев сделал два сообщения: *О квадратурах* и *О предельных величинах интегралов*, которые были напечатаны на французском языке в журнале Лиувилля за 1874 г., а на русском языке появились впервые в собрании сочинений. Обе статьи включены в настоящий сборник.

Небольшую заметку *О предельных величинах интегралов* можно рассматривать как хронологически первую работу по проблеме моментов. Проблема, которую в этой заметке поставил Чебышев, в модернизированной формулировке гласит: дана последовательность

$$s_0, s_1, \ldots, s_n \qquad (n < \infty)$$

позитивная*) относительно данного (конечного или бесконечного) интервала (a, b); пусть $\mathfrak{M}_n$ есть совокупность всех неубывающих функций $\sigma(x)$, для которых

$$s_k = \int_a^b x^k \, d\sigma(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Последовательность называется позитивной, если она ненегативна и если из

$$P(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n \geqslant 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$
$$P(x) \not\equiv 0$$

следует

$$A_0 s_n + A_1 s_{n-1} + \ldots + A_n s_0 > 0.$$

и $\sigma(a)=0$; требуется найти

$$M_n(\xi)=\sup_{\sigma(x)\in\mathfrak{M}_n}\sigma(\xi),\quad \mu_n(\xi)=\inf_{\sigma(x)\in\mathfrak{M}_n}\sigma(\xi),$$

где ξ — заданная точка внутри интервала $a<x<b$.

В механической интерпретации (указанной самим Чебышевым) проблема состоит в нахождении верхней и нижней граней для массы, приходящейся на интервал $(a,\ \xi)$, если даны первые $n+1$ моментов $(s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n)$ распределения массы по всему интервалу.

Чебышев привёл без доказательства решение своей проблемы для случая, когда ξ является корнем некоторого алгебраического уравнения степени $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, т. е. для специальных положений точки ξ. Первое доказательство неравенств Чебышева для общего случая и многие важные обобщения даны А. А. Марковым в его докторской диссертации (1884 г.). Поэтому в литературе эти неравенства называют неравенствами Чебышева-Маркова.

Хорошее изложение исследований Чебышева и Маркова читатель найдёт в диссертации К. Поссе «Sur quelques applications des fractions continues algébriques» (СПБ, 1886). По поводу позднейших исследований см. Стилтьес «Recherches sur les fractions continues» (Ann. de Toulouse, t. VIII—IX, 1894—1895; есть русский перевод); M. Рисс, Sur le problème des moments, I, II, III (Ark. för matem., astr. och fys., t. 16—17, 1922—1923); Н. Ахиезер и М. Крейн «О некоторых вопросах теории моментов» (Харьков, 1938).

В мемуаре *О квадратурах* Чебышев строит квадратурные формулы двух родов. Квадратурная формула первого рода имеет вид:

$$\text{(I)}\qquad \int_{-1}^{1} F(x)\,p(x)\,dx = k\,[F(x_1)+F(x_2)+\ldots+F(x_n)],$$

где $p(x)$ — заданная функция, для которой

$$\text{(Ia)}\qquad \int_{-1}^{1} p(x)\,dx \neq 0.$$

Квадратурная формула второго рода отвечает случаю, когда условие (Ia) не выполнено, и имеет вид

$$\text{(II)} \quad \int_{-1}^{1} F(x)\,q(x)\,dx =$$

$$= k\,[F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_m) - F(x_{m+1}) - \ldots - F(x_{2m})]$$

$$\left(\int_{-1}^{1} q(x)\,dx = 0\right).$$

Соответственно числу входящих параметров $(k, x_1, x_2, \ldots)$, Чебышев ставит для их нахождения требование, чтобы формула (I) была точной для любого многочлена $F(x)$ степени $\leqslant n$, а формула (II) — для любого многочлена степени $\leqslant 2m+1$. Эти требования приводят к уравнениям для определения указанных параметров и позволяют Чебышеву фактически построить ряд важных квадратурных формул. В первую очередь строится формула (I) для «веса» $p(x)=1$ при $n=2, 3, \ldots, 7$. Естественно возникает вопрос, возможна ли формула (I) для того или иного веса при любом n? Этого вопроса Чебышев не ставил. Между тем, оказалось, что при $p(x)=1$ и $n=8$ уравнение для нахождения узлов x_i имеет мнимые корни, так что эта формула при $n=8$ невозможна. Но при $n=9$ она снова существует и была построена. В 1937 г. С. Н. Бернштейн показал, что, начиная с $n=10$, формула Чебышева при $p(x)=1$ невозможна.

Формулу (II) Чебышев фактически строит для весов

$$q(x) = x, \qquad q(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

при $m = 1,\ 2$.

Вопросом о построении формул вида (II), верных для любого многочлена степени $\leqslant 2m$, занимался А. А. Марков.

В цитированной выше монографии по проблеме моментов, написанной М. Г. Крейном и мною, читатель найдёт подробности по поводу формул Маркова и Чебышева, а также новые результаты относительно их существования.

V. Теории вероятностей, которая рано привлекла к себе внимание Чебышева, посвящены: магистерская диссертация *Опыт элементарного анализа теории веро-*

ятностей (1846 г.) и три мемуара — *Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей* (1846 г.), *О средних величинах* (1866 г.) и *О двух теоремах относительно вероятностей* (1887 г.). Последний из этих мемуаров, напечатанный первоначально в Записках Академии, а затем (1890—1891 гг.) в Acta Mathematica, входит в настоящий сборник.

В мемуаре 1846 г. Чебышев дал первое строгое доказательство теоремы Пуассона или закона больших чисел. В следующем мемуаре Чебышев установил носящее его имя неравенство, с помощью которого он получил одну общую теорему, которая носит название — теорема Чебышева.

Наконец, в последнем мемуаре Чебышев сформулировал теорему о пределе вероятности, являющуюся обобщением теоремы Лапласа, и набросал её доказательство, на основе своих идей о методе моментов. Строгое доказательство предельной теоремы Чебышева и полное осуществление его идей являются большой заслугой А. А. Маркова.

В дальнейшем А. М. Ляпунов нашёл новые методы, которые оказались более сильными, чем метод моментов, но, несмотря на это, метод моментов в теории вероятностей своего значения не потерял и справедливо считается одним из замечательнейших созданий русской математики, которая в теории вероятностей продолжает занимать руководящее положение и по сей день.

Неравенством Чебышева называют следующее предложение: если математическое ожидание случайной величины x равно

$$a = Ex,$$

а её дисперсия равна

$$b = E(x-a)^2,$$

то при любом $\varepsilon > 0$

$$P(|x-a| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{b}{\varepsilon^2},$$

где $P(\alpha < y < \beta)$ означает вероятность неравенства $\alpha < y < \beta$. Доказательство получается немедленно, если ввести функцию распределения $\sigma(x)$ величины x. Действительно,

$$P(|x-a|<\varepsilon)=1-P(|x-a|\geqslant\varepsilon)=$$
$$=1-\int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon} d\sigma(x)\geqslant 1-\int\limits_{|x-a|\geqslant\varepsilon}\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}\,d\sigma(x)\geqslant$$
$$\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\,d\sigma(x)=1-\frac{b}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева гласит: пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — последовательность попарно независимых случайных величин, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — их математические ожидания и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — дисперсии; если дисперсии ограничены ($b_n\leqslant C$, $n=1, 2, 3, \ldots$), то при любом положительном ε

$$P\left(\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

и значит,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Эта теорема немедленно получается с помощью неравенства Чебышева, если его применить к случайной величине

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Из неё вытекает теорема Пуассона:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right)=1,$$

где p_i есть вероятность появления события при испытании с номером i, а m — число появлений события при n испытаниях, которые считаются попарно независимыми.

Переходим к предельной теореме Чебышева из последнего мемуара. Она состоит в следующем: пусть дана последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

попарно независимых случайных величин с математическими ожиданиями

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

и дисперсиями

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

Если все величины

$$E\,|x_i|^k \quad (k=1, 2, \dots;\ i=1, 2, \dots)$$

существуют и равномерно ограничены, то

$$\text{(I)}\ \lim_{n\to\infty} P\left(t_1 < \frac{x_1+x_2+\dots+x_n-a_1-a_2-\dots-a_n}{\sqrt{2(b_1+b_2+\dots+b_n)}} < t_2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Мы уже упомянули, что А. М. Ляпунов значительно обобщил эту теорему. Он требует лишь, чтобы существовали величины

$$c_i = E\,|x_i - a_i|^{2+\delta}$$

при некотором $\delta > 0$ и чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1+c_2+\dots+c_n}{(b_1+b_2+\dots+b_n)^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0,$$

и при этих условиях доказывает соотношение (I). Исследования А. А. Маркова и А. М. Ляпунова читатель найдёт в курсах теории вероятностей А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. Отметим также выпуск X «Успехов математических наук», в котором содержится ряд статей, посвящённых обобщениям теорем П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова, и в первую очередь фундаментальный мемуар С. Н. Бернштейна.

II. ТЕОРЕМА П. Л. ЧЕБЫШЕВА ОТНОСИТЕЛЬНО НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕСА *).

Н. И. Ахиезер

I. Пусть даны замкнутый (конечный **)) интервал $[a, b]$ оси x и две действительные непрерывные в $[a, b]$ функции $f(x)$ и $s(x)$, из которых вторая в $[a, b]$ не обращается в нуль. Составим выражение:

$$Q(x) = s(x)\frac{q_0x^n + q_1x^{n-1} + \ldots + q_n}{p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m}, \tag{1}$$

где m и n заданы, и поставим задачу найти вещественные параметры p_i, q_j так, чтобы уклонение

$$H_Q = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - Q(x)|$$

$Q(x)$ от $f(x)$ было наименьшим. Эта задача, очевидно, охватывает все три важных случая, которыми занимался Чебышев.

Прежде всего докажем, что среди функций (1) существует по крайней мере одна, для которой H_Q имеет наименьшее значение.

Пусть $H \geqslant 0$ есть нижняя грань множества всех H_Q.

---

*) Настоящая статья заимствована из монографии по теории аппроксимации, цитированной в приложении I.

**) Предположение конечности интервала не является существенным и сделано лишь для некоторого упрощения формулировок.

По определению, следовательно, существует бесконечная последовательность функций $Q_i(x)$ $(i=1, 2\ldots)$, для которой

$$H_{Q_i} \to H.$$

Пронормируем функции $Q_i(x)$ так, чтобы $\sum_{k=0}^{m} p_{ik}^2 = 1$ $(i=1, 2, \ldots)$. Покажем, что при таком нормировании все q_{ik} также будут ограничены.

Действительно, пусть $H_{Q_i} < C$ $(i=1, 2, \ldots)$ и пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ — некоторые фиксированные и различные точки внутри интервала (a, b); тогда

$$|s(\xi)| \frac{|q_{i0}\xi^n + q_{i1}\xi^{n-1} + \ldots + q_{in}|}{|p_{i0}\xi^m + p_{i1}\xi^{m-1} + \ldots + p_{im}|} \leqslant C + \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|,$$

где ξ — любая из точек ξ_j. Следовательно,

$$|q_{i0}\xi^n + q_{i1}\xi^{n-1} + \ldots + q_{in}| < K.$$

Если же значения полиномов

$$q_{i0}x^n + \ldots + q_{in}$$

в $n+1$ фиксированных точках ограничены, то ограничены и все коэффициенты этих полиномов.

Выберем из последовательности $\{Q_i(x)\}$ некоторую подпоследовательность, которую мы можем снова обозначить через $\{Q_i(x)\}$ так, чтобы существовали пределы

$$\lim_{i\to\infty} p_{ij} = a_j, \quad \lim_{i\to\infty} q_{ik} = b_k.$$

Мы придём тогда к функции вида (1)

$$P(x) = s(x) \frac{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m},$$

относительно которой докажем, что

$$H_P = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)| = H.$$

Действительно, $P(x)$ может обращаться в бесконечность не более чем в m точках. В каждой другой точке $\tilde{x}$ интервала $[a, b]$, очевидно,

$$P(\tilde{x}) = \lim_{i\to\infty} Q_i(x),$$

откуда

$$|P(\tilde{x})| \leqslant |f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x}) - Q_i(\tilde{x})| + |Q_i(\tilde{x}) - P(\tilde{x})| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| + H_{Q_i} + \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$. Следовательно, всюду в $[a, b]$ за возможным исключением m точек,

$$|P(x)| < M.$$

Поэтому это неравенство имеет место всюду в $[a, b]$ и $P(x)$ в бесконечность при $a \leqslant x \leqslant b$ совсем не обращается. Значит

$$Q_i(x) \longrightarrow P(x)$$

равномерно в $[a, b]$; поэтому из

$$H_P = \max|f - P| \leqslant \max|f - Q_i| + \max|P - Q_i| \leqslant H_{Q_i} + \varepsilon_i$$

следует, что

$$H_P \leqslant H,$$

а так как

$$H_P \geqslant H,$$

то

$$H_P = H,$$

и теорема доказана.

Теперь перейдём к теореме П. Л. Чебышева. Она гласит: функция $P(x)$, которая из всех функций вида (1) наименее уклоняется в $[a, b]$ от функции $f(x)$, единственна, если не считать различными две дроби, которые после сокращения совпадают. Эта функция вполне характеризуется таким своим свойством: если она имеет вид

$$P(x) = s(x)\frac{b_0x^{n-\nu} + b_1x^{n-\nu-1} + \ldots + b_{n-\nu}}{a_0x^{m-\mu} + a_1x^{m-\mu-1} + \ldots + a_{m-\mu}} = s(x)\,\frac{B(x)}{A(x)},$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и дробь $\frac{B(x)}{A(x)}$ несократима, то число N последовательных точек интервала $[a, b]$, в которых разность $f(x) - P(x)$ принимает с чередующимися знаками значение H_P, не менее чем $m + n - d + 2$, где $d = \min\{\mu, \nu\}$.

Докажем, что условие необходимо. Для этого предположим, что указанное в формулировке число «точек уклонения» в интервале $[a, b]$ есть

$$N' \leqslant m + n - d + 1.$$

Из этого предположения следует, что интервал $[a, b]$ можно так разбить на N' подинтервалов

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_{N'-1}, b], \tag{2}$$

что в каждом из этих подинтервалов по очереди будет выполняться одно из таких двух неравенств:

$$\left.\begin{aligned} -H_P \leqslant f(x) - P(x) < H_P - \alpha, \\ -H_P + \alpha < f(x) - P(x) \leqslant H_P, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где α — некоторое положительное число. Полагая

$$\Phi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_{N'-1})$$

и принимая во внимание, что полиномы $A(x)$, $B(x)$ не имеют общего делителя, найдём полиномы $\varphi(x)$, $\psi(x)$ (соответственно степени m и n) так, чтобы

$$\Phi(x) = A(x)\psi(x) - B(x)\varphi(x).$$

При помощи найденных полиномов построим функцию

$$Q(x) = s(x)\frac{B(x) - \omega \cdot \psi(x)}{A(x) - \omega \cdot \varphi(x)},$$

где ω — действительный параметр.

Мы можем теперь написать, что

$$f(x) - Q(x) = f(x) - P(x) + s(x)\frac{\omega\Phi(x)}{A(x)[A(x) - \omega\varphi(x)]},$$

причём для достаточно малых $|\omega|$ знаменатель $A(x)[A(x) - \omega\varphi(x)]$ будет положительным в $[a, b]$. С другой стороны, числитель последнего члена изменяет свой знак в $N'-1$ точках

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{N'-1}.$$

Учитывая поэтому неравенства (3), которые поочерёдно выполняются в интервалах (2), мы можем ω определить так, что всюду в $[a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - Q(x)| < H_P.$$

Так как полученный нами результат противоречит допущению, что $P(x)$ из всех функций рассматриваемого вида наименее уклоняется от $f(x)$, то необходимость условия доказана.

Достаточность условия вытекает из обобщения теоремы де-ла-Валле-Пуссена, которое гласит: если полиномы

$$A(x) = a_0 x^{m-\mu} + \ldots + a_{m-\mu}, \quad B(x) = b_0 x^{n-\nu} + \ldots + b_{n-\nu}$$
$$(\mu, \nu \geqslant 0, \ a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0)$$

не имеют общего делителя, а выражение

$$R(x) = s(x) \frac{B(x)}{A(x)}$$

в интервале $[a, b]$ остаётся конечным, и если разность

$$f(x) - R(x)$$

принимает в последовательных точках

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_N$$

интервала $[a, b]$ отличные от нуля значения

$$\lambda_1, \ -\lambda_2, \ \ldots, \ (-1)^{N-1}\lambda_N$$

с чередующимися знаками (так что можно принять $\lambda_i > 0$), причём

$$N = n + m - d + 2 \quad (d = \min\{\mu, \nu\}),$$

то для каждой функции $Q(x)$ вида (1) имеет место неравенство

$$H_Q \geqslant \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}.$$

Допустим, что некоторая функция $Q(x)$ вида (1) удовлетворяет неравенству

$$H_Q < \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}.$$

Составим разность

$$\Delta(x) = Q(x) - R(x) = [f(x) - R(x)] - [f(x) - Q(x)].$$

Очевидно, что числа

$$\Delta(x_1), \Delta(x_2), \ldots, \Delta(x_N)$$

отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки. Поэтому $\Delta(x)$ имеет в открытом интервале (a, b) по крайней мере $N - 1 = m + n + 1 - d$ нулей, что невозможно, ибо

$$\Delta(x) = s(x) \cdot \frac{V(x)}{U(x)},$$

и из многочленов $U(x)$, $V(x)$ второй имеет степень $\leqslant m + n - d$.

Нам остаётся доказать единственность функции наименьшего уклонения.

Допустим, что, кроме функции $P(x)$, существует вторая функция $Q(x)$ вида (1), для которой

$$H_Q = H_P = H.$$

Пусть для $Q(x)$ числа N', μ', ν', d' играют ту же роль, что и числа N, μ, ν, d для $P(x)$, причём

$$N' \geqslant m + n + 2 - d', \quad N \geqslant m + n + 2 - d.$$

Для определённости примем, что $N' \geqslant N$. Пусть

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{N'}$$

суть точки уклонения для $Q(x)$.

Составим разность

$$\Delta(x) = P(x) - Q(x) = [f(x) - Q(x)] - [f(x) - P(x)];$$

она в некоторых из точек β_i может обращаться в нуль; однако, если $\Delta(\beta\ ) \neq 0$, то, как легко видеть,

$$\operatorname{sign}[f(\beta_j) - Q(\beta_j)] = \operatorname{sign}\Delta(\beta_j). \tag{4}$$

Пусть, например,

$$\Delta(\beta_{i-1}) \neq 0,\ \Delta(\beta_i) = \Delta(\beta_{i+1}) = \ldots$$
$$\ldots = \Delta(\beta_{i+k}) = 0, \quad \Delta(\beta_{i+k+1}) \neq 0. \quad (5)$$

Так как

$$(-1)^{i-1}[f(\beta_{i-1}) - Q(\beta_{i-1})],$$
$$(-1)^{i+k+1}[f(\beta_{i+k+1}) - Q(\beta_{i+k+1})]$$

имеют одинаковые знаки, то, в силу (4), одинаковые знаки имеют числа

$$\Delta(\beta_{i-1}), \quad (-1)^k \Delta(\beta_{i+k+1}).$$

Поэтому число нулей разности $\Delta(x)$ в интервале $[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$ имеет ту же чётность, что и число k; на основании (5) это число нулей есть по крайней мере $k+2$.

Повторяя это рассуждение, мы найдём, что $\Delta(x)$ имеет в интервале $[a, b]$ по крайней мере N' нулей; но это абсурдно, так как

$$\Delta(x) = s(x)\frac{V(x)}{U(x)},$$

и из многочленов $U(x)$, $V(x)$ второй имеет степень

$$\max\{m+n-\mu'-\nu,\ m+n-\mu-\nu'\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{m+n-\mu',\ m+n-\nu'\} \leqslant N'-2.$$

Таким образом, единственность также доказана.

II. Особенно важным является частный случай, когда $s(x)=1$, $m=0$. В этом случае мы получаем теорему: многочлен n-ой степени $P(x)$, который наименее уклоняется от заданной непрерывной функции $f(x)$, единственен и вполне характеризуется тем, что число последовательных точек интервала $[a, b]$, в которых разность $f(x)-P(x)$ принимает с чередующимися знаками значение

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - P(x)|,$$

не меньше, чем $n+2$.

Как пример на эту теорему, рассмотрим задачу Чебышева: среди всех полиномов n-ой степени с равным 1 старшим коэффициентом найти тот [назовём его $T_n(x)$], максимум модуля которого в интервале $[-1, 1]$ имеет наименьшее значение. Чтобы применить общую теорему, мы должны искать полином степени $n-1$, который наименее уклоняется от функции $f(x)=x^n$. Поэтому, в силу теоремы Чебышева, искомый полином

$$T_n(x)=x^n-p_1x^{n-1}-\ldots-p_n$$

вполне характеризуется тем, что число последовательных точек интервала $[-1, 1]$, в которых $T_n(x)$ принимает с чередующимися знаками значение

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|T_n(x)|,$$

не меньше, чем $n+1$.

Покажем, что

$$T_n(x)=\frac{1}{2^n}\left\{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right\}.$$

То, что $T_n(x)$ — полином степени n, очевидно. Старший коэффициент равен

$$\lim_{x\to\infty}\frac{T_n(x)}{x^n}=\frac{1}{2^n}\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n=1.$$

Полагая $x=\cos\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, получим, что

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta$$

Поэтому

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Положим

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n}\qquad(k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Так как

$$T_n(x_k)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos k\pi=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}\qquad(k=0, 1, 2, \ldots, n),$$

то в точках

$$-1=x_n<x_{n-1}<x_{n-2}<\ldots<x_1<x_0=1$$

$T_n(x)$ принимает с чередующимися знаками значение $\pm\frac{1}{2^{n-1}}$ и, значит, действительно представляет решение поставленной задачи. $T_n(x)$ называется полиномом Чебышева степени n, наименее уклоняющимся от нуля.

В качестве второго примера рассмотрим следующую решённую Чебышевым задачу: найти погрешность наилучшего приближения в интервале $[-1, 1]$ функции

$$\frac{1}{x-a},$$

где $a > 1$, при помощи полинома степени n.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \frac{M}{2}\left\{v^n \frac{\alpha - v}{1-\alpha v} + v^{-n}\frac{1-\alpha v}{\alpha - v}\right\}, \qquad (1)$$

где

$$x = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right),$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha = a - \sqrt{a^2 - 1} < 1.$$

Так как $\Phi(x)$ есть рациональная функция от v, которая не меняется при замене v на $\frac{1}{v}$, то $\Phi(x)$ есть рациональная функция от x. Замечая, что

$$\lim_{x\to a}(x-a)\,\Phi(x) =$$

$$= \frac{M}{2}\lim_{v\to\alpha}\frac{(v-\alpha)(\alpha v - 1)}{2\alpha v}\cdot v^{-n}\cdot\frac{1-\alpha v}{\alpha - v} = \frac{M}{4}\,\frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^{n+2}},$$

заключаем, что при

$$M = \frac{4\alpha^{n+2}}{(1-\alpha^2)^2}$$

функция $\Phi(x)$ принимает вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{x-a} - P_n(x), \qquad (2)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n с действительными коэффициентами.

Когда точка x описывает интервал $[-1, 1]$ от правого конца к левому, точка v описывает в положительном направлении верхнюю половину окружности $|v|=1$. Из формулы (1) следует, что $\Phi(x)$ в интервале $[-1, 1]$ численно не превышает M, ибо при $|v|=1$

$$\left| v^n \frac{\alpha - v}{1 - \alpha v} \right| = 1.$$

Более того, мы замечаем, что $\Phi(x)$ принимает значение M, если

$$\arg \left\{ v^n \frac{\alpha - v}{1 - \alpha v} \right\} \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

и значение $-M$, если

$$\arg \left\{ v^n \frac{\alpha - v}{1 - \alpha v} \right\} \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Так как функция

$$v^n \frac{\alpha - v}{1 - \alpha v}$$

имеет в круге $|v| < 1$ n-кратный нуль в точке 0 и простой нуль в точке α, то, как легко видеть,

$$\arg \left\{ v^n \frac{\alpha - v}{1 - \alpha v} \right\}$$

увеличивается от π до $(n+2)\pi$, когда точка v описывает верхнюю половину окружности $|v|=1$ в положительном направлении. Поэтому функция $\Phi(x)$ принимает с чередующимися знаками значение M в $n+2$ последовательных точках интервала $[-1, 1]$.

Следовательно, из всех полиномов n-ой степени полином $P_n(x)$, определяемый формулами (1), (2), наименее уклоняется от $\frac{1}{x-a}$ в интервале $[-1, 1]$.

Искомая погрешность наилучшего приближения, таким образом, равна

$$M = \frac{4\alpha^{n+2}}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{(a - \sqrt{a^2-1})^n}{a^2-1}.$$

В мемуаре *Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций*, краткое извлечение из которого входит в настоящий сборник, Чебышев устанавливает ряд теорем о корнях алгебраических уравнений, используя функции, наименее уклоняющиеся от нуля. Рассмотрим одну из этих теорем. Для этого заметим, что на основании вышедоказанного

$$\min_{p_i} \max_{-h\leqslant x\leqslant h} |x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n| = \frac{h^n}{2^{n-1}}.$$

Пусть дано уравнение

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K = 0,$$

левая часть которого из чётных степеней x содержит только нулевую. Чебышев показал, что оно имеет по крайней мере один корень в интервале $[-H, +H]$, где

$$H = 2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}|K|}.$$

Приведём доказательство. Допуская противное, примем, что ни одно из уравнений

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx \pm K = 0$$

не имеет корня в указанном интервале. То же справедливо тогда и относительно уравнения

$$(x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx)^2 - K^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\max_{-H\leqslant x\leqslant H} |x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx| < |K|.$$

А так как

$$\max_{-H\leqslant x\leqslant H} |x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx| \geqslant \frac{H^{2l+1}}{2^{2l}},$$

то

$$H^{2l+1} < 2^{2l}|K|,$$

что абсурдно в силу определения H.

Аналогичными, в некоторых случаях более сложными, рассуждениями Чебышев доказывает и другие теоремы о корнях алгебраических уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

П. Л. Чебышев

П. Л. Чебышев

ИЗБРАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ

ОГИЗ · ГОСТЕХИЗДАТ · 1946

Цена 8 руб.