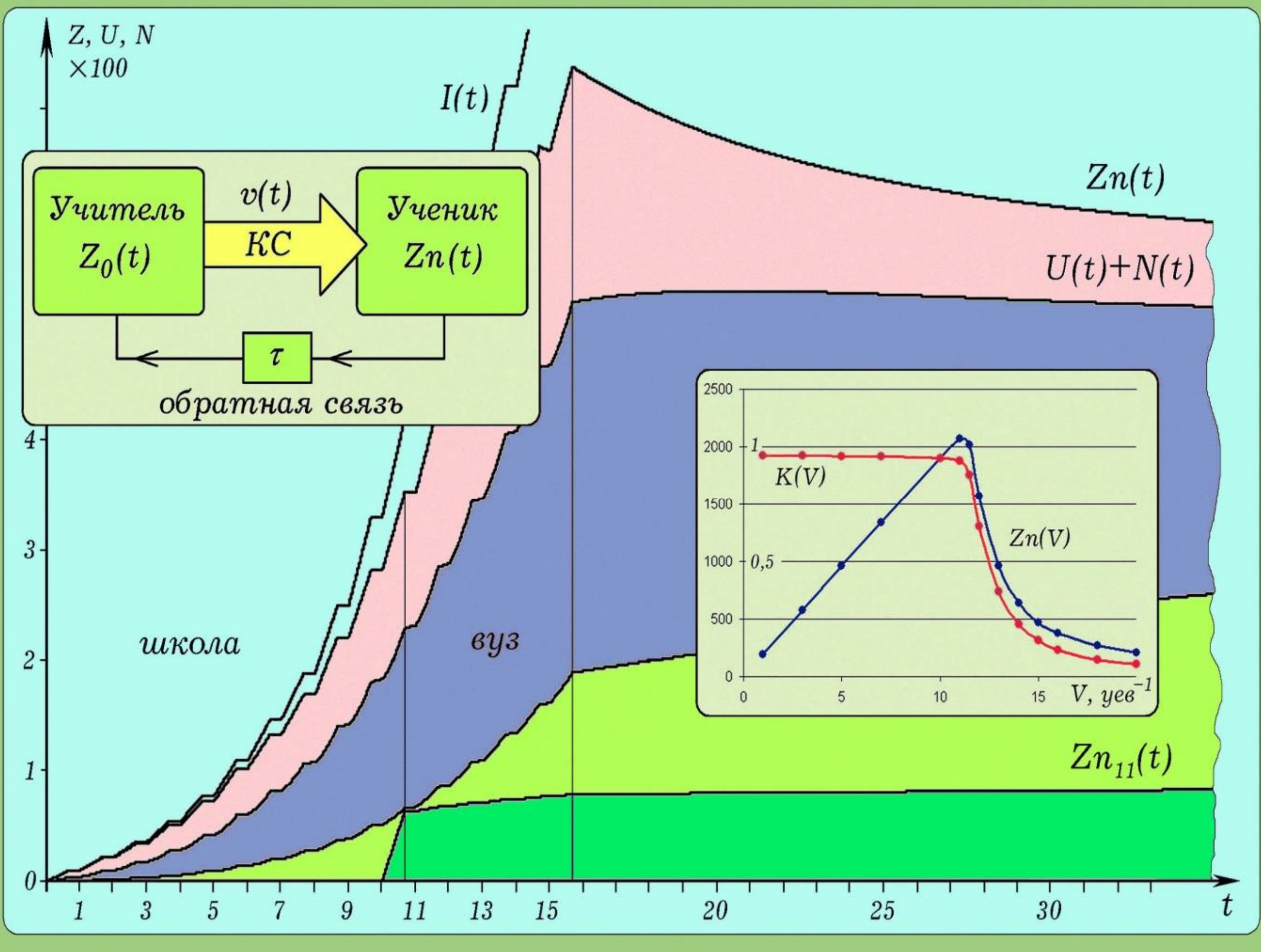
Р.В. Майер

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИДАКТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КОМПЬЮТЕРЕ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени В. Г. Короленко»

Р. В. Майер

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИДАКТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Монография

Научное электронное издание
на компакт-диске

Глазов
ГГПИ
2018

ISBN 978-5-93008-254-8

УДК 37.02
ББК 32.81
М14

Утверждено на заседании кафедры физики и дидактики физики ГГПИ. Протокол № 3 от 04.10.2017 г.

Рекомендовано УМО по математике педвузов и университетов Волго-Вятского региона в качестве монографии для студентов и преподавателей высших учебных заведений

Автор:
Р. В. Майер, доктор педагогических наук, профессор кафедры физики и дидактики физики ГГПИ

Рецензенты:
Ю. А. Сауров, доктор педагогических наук, профессор, член-корреспондент РАО, профессор кафедры физики и методики обучения физике ВятГУ;
В. А. Саранин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и дидактики физики ГГПИ

М14 **Майер Р. В.** Исследование математических моделей дидактических систем на компьютере [Электронный ресурс] : монография / Р. В. Майер. – Глазов : Глазов. гос. пед. ин-т, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Электронная монография посвящена проблеме дальнейшего развития математической теории обучения путем исследования различных моделей дидактических систем на персональной ЭВМ. Рассмотрены несколько подходов к моделированию учебного процесса, которые учитывают деление знаний на прочные и непрочные, логические и ассоциативные связи между элементами учебного материала, зависимость мотивации ученика от разности между его знаниями и требованиями учителя, снижение пропускной способности канала связи “учитель-ученик” при увеличении скорости передачи информации и другие факторы. С помощью информационно-кибернетического подхода проанализированы различные методы управления деятельностью ученика, для некоторых частных случаев решена оптимизационная задача обучения, получены графики, описывающие динамику изменения уровня знаний среднестатистического ученика.

Электронная монография предназначена для ученых и работников образования, интересующихся проблемами математического и компьютерного моделирования процесса обучения, а также студентов педвузов, магистрантов и аспирантов.

Системные требования: PC не ниже класса Pentium I; 128 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 95/98/2000/XP/7/8; Adobe Acrobat Reader; дисковод CD-ROM 2-х и выше; мышь.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Майер Роберт Валерьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИДАКТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Монография

Технический редактор, корректор *В. В. Баженова*
Оригинал-макет: *И. С. Леус*

Подписано к использованию 07.03.2018. Объём издания 6,0 Мб.
Тираж 8 экз. Заказ № 813 – 2018.

ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт
имени В. Г. Короленко»

427621, Россия, Удмуртская Республика, г. Глазов, ул. Первомайская, д. 25
Тел./факс: 8 (34141) 5-60-09, e-mail: izdat@mail.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Более полувека назад на стыке дидактики и математики возникла математическая теория обучения (МТО), занимающаяся исследованием процесса обучения методом математического моделирования. Однако изучение математических моделей аналитическими методами наряду с несомненными преимуществами имеет существенный недостаток: оно требует сложных рассуждений и математических выкладок. Развитие информационных технологий привело к возникновению метода имитационного (компьютерного) моделирования, что существенным образом изменило МТО, облегчило и ускорило решение сложных задач, повысило наглядность получающихся результатов. Компьютерное моделирование системы “учитель-ученик” предполагает написание компьютерной программы, имитирующей ее поведение, и проведение с ней серии вычислительных экспериментов при различных условиях с целью установления закономерностей ее функционирования и оценки эффективности различных стратегий управления.

Настоящая монография посвящена проблеме исследования некоторых математических моделей процесса обучения с помощью персональной ЭВМ. Получающиеся результаты можно рассматривать как обоснование ряда важных положений теории обучения и их следствий. Любая модель опирается на определенную совокупность достаточно общих утверждений, касающихся усвоения и забывания информации; они соответствуют фактам, установленным методами экспериментальной психологии. На их основе записывается система математических высказываний и создается компьютерная программа. Для моделирования конкретной ситуации, возникающей в педагогической практике, необходимо задать параметры учеников, распределение и сложность изучаемого материала. Высокое быстродействие компьютера позволяет достаточно оперативно осуществлять компьютерную имитацию учебного процесса, исследуя его закономерности при различных параметрах дидактической системы и внешних воздействиях. Повторяемость результатов, логичность, гибкость и наглядность – вот основные преимущества имитационного моделирования по сравнению с методом качественного анализа.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Дидактика (или теория обучения) изучает законы, принципы и закономерности усвоения знаний, формирования умений, навыков и убеждений, определяет объем и содержание образования, средства и методы обучения [4, 11]. Предметом исследования дидактики является взаимосвязь деятельности учителя и познавательной деятельности ученика. К ее задачам относятся описание и объяснение процесса обучения, выявление внутренних связей и отношений, раскрытие закономерностей и движущих сил развития учебного процесса и условий его совершенствования [13, 15]. Основные положения дидактики нашли свое отражение в работах С. И. Архангельского [3], В. П. Беспалько [7], Ю. К. Бабанского, Л. С. Выготского, П. Я. Гальперина, В. И. Загвязинского [15], М. П. Карпенко [19–21], В. В. Краевского, В. М. Кроля [24], А. Н. Леонтьева, И. Я. Лернера, В. Л. Матросова, В. М. Монахова, А. М. Новикова [82], Ж. Пиаже, С. Л. Рубинштейна, М. А. Холодной и др. В настоящее время для изучения дидактических систем используются: 1) метод педагогического эксперимента (наблюдения); 2) метод качественного моделирования (или метод качественных рассуждений); 3) метод математического моделирования; 4) метод имитационного моделирования на компьютере.

Моделирование – общенаучный метод познания, который применяется при изучении различных явлений природы и общества [57]. При моделировании дидактических систем (ДС) могут преследоваться следующие цели: 1) изучение сущности того или иного дидактического объекта или процесса, составляющих элементов и связей между ними; 2) объяснение уже известных результатов эмпирических исследований, согласование модели и ее параметров с результатами педагогического эксперимента; 3) прогнозирование поведения ДС в новых условиях при различных внешних воздействиях и способах управления; 4) оптимизация функционирования ДС, поиск правильного управления в соответствии с выбранным критерием эффективности [75].

Модель – это материальный или идеальный объект, замещающий исследуемую систему и адекватным образом отображающий ее существенные стороны. В педагогике «модели используются либо как исследовательский прием представления исследуемого педагогического объекта с целью его объяснения, изучения, уточнения; либо как инструмент, позволяющий на основе анализа модельного представления педагогического объекта влиять на его построение и функционирование» [102, с. 139]. В настоящее время получили широкое распространение методы математического [14, 94–96, 105] и имитационного (или компьютерного) моделирования [18, 46, 107]. Математические модели образуют широкий класс знаковых моделей, в которых используются логические условия, математические действия и операторы. Часто они представляют собой систему математических высказываний, алгебраических или дифференциальных уравнений. Использование **математических методов** для изучения дидактических систем привело к возникновению математической теории обучения (МТО) [5, 9, 90], которая, опираясь на небольшое количество постулатов, позволяет обосновать важные положения дидактики, проанализировать всевозможные ситуации, возникающие при обучении. При обсуждении различных вопросов МТО под учеником часто понимается не реальный школьник, а его абстрактная модель, то есть система математических уравнений и/или логических высказываний.

Метод имитационного моделирования предусматривает построение компьютерной модели дидактической системы (ДС), представляющей собой алгоритм или компьютерную программу, которая решает систему алгебраических или дифференциальных уравнений и имитирует поведение исследуемой системы “учитель-ученик” [39, 45, 116]. С ней проводят серию вычислительных экспериментов, устанавливают основные закономерности обучения, оценивают эффективность различных стратегий управления. Этот подход позволяет более полно проанализировать различные математические модели обучения на компьютере, проиграть те или иные ситуации, проверить и обосновать важные положения теоретической педагогики, опираясь на математические модели учебного процесса. При этом также приходится оперировать с абстрактными объектами: моделью ученика, учителя, учебного курса и т. д. Роль ученика может выполнять компьютерная программа, моделирующая отдельные аспекты его учебной деятельности.

Перечислим основные задачи моделирования процесса обучения:

1. Прямая (прогностическая) задача: зная параметры учащихся, характеристики используемых методов и учебную программу (распределение учебной информации), определить уровень знаний (или сформированности навыка) у учащихся во время и после окончания обучения.

2. Обратная задача: зная параметры модели ученика и требуемый уровень знаний Z_K в конце обучения, определить путь обучения (распределение учебной информации и время обучения), который приведет к достижению требуемого уровня знаний Z_K.

3. Оптимизационная задача: найти оптимальный путь обучения (применяемые методы, распределение учебного материала, длительность занятий и перерывов), который обеспечивает требуемый (или максимальный) уровень знаний учащихся при заданных (или минимальных) затратах учителя.

Различными аспектами моделирования процесса обучения занимались такие известные ученые, как В. М. Ананишев [2], Р. Аткинсон [5], Г. Бауэр, Р. Буш [9], В. Ф. Венда [12], О. Г. Гохман [27], Л. Б. Ительсон, З. Кротерс, А. Н. Колмогоров, Л. П. Леонтьев [27], В. В. Майер [29, 86], Ф. Мостеллер [9], Д. А. Новиков [81], Ф. С. Робертс [87], Ю. А. Сауров [10, 89], О. П. Свиридов [90], А. В. Соловов [92, 93], В. Е. Фирстов [98], М. В. Ядровская [102] и др. Их идеи положены в основу настоящей работы. Кроме того, используется системный подход [26, 91], методология мягких систем, нечеткая логика [6, 16], теория сложности [103], методы моделирования студента для компьютерных систем обучения [8, 28, 83, 97, 104], работы по когнитивной психологии (понимание, запоминание, забывание) [11, 17, 23], информационно-кибернетический подход [85, 88].

История развития математических и компьютерных методов исследования учебного процесса рассмотрена В. Ф. Вендой [12, с. 41–42] и А. В. Солововым [93]. Для имитационного моделирования дидактических систем используют: 1) непрерывные модели, основанные на численном решении системы дифференциальных уравнений [31, 69]; 2) дискретные модели, в которых обучаемый моделируется вероятностным автоматом [25, 46]; 3) мультиагентные модели, состоящие из множества программных агентов, обменивающихся информацией друг с другом [18, 58]. Также применяется метод статистических испытаний [68].

Развитие имитационного моделирования связано с созданием различных автоматизированных тестирующих и обучающих систем [22, 104]. При этом, как отмечает Ю. И. Петров [83], используемая модель обучаемого должна содержать информацию о его знаниях, умениях и навыках, способности к обучению, выполнению заданий, восстановлению забытой информации, скорость забывания и другие параметры. Е. Е. Буль в своей статье [8] анализирует скалярные, векторные, сетевые, имитационные модели обучения, разработанные в различных учебных заведениях, проводит сравнительный анализ по следующим критериям: распространенность типов моделей; использование параметров, определяющих результат и качество учебного процесса. Обычно модели обучаемых учитывают [8]: 1) уровень знаний; 2) психологические характеристики; 3) скорость обучения или усвоения; 4) выполнение заданий; 5) способность к обучению; 6) уровень умений и навыков; 7) метод или стратегию обучения; 8) структуру учебного курса.

Цель исследования состоит в развитии методологии моделирования процесса обучения, в повышении разнообразия применяемых подходов, в создании более совершенных математических моделей дидактических систем и их изучении с помощью компьютера. **Гипотезу** можно сформулировать так: используя законы психологии и методы математического и компьютерного моделирования, возможно обосновать основные закономерности учебного процесса и предсказать состояние ученика на разных этапах обучения.

Модель дидактической системы должна отражать ее наиболее важные качества, пренебрегая второстепенными. Согласно **принципу множественного описания**, любая сложная система (или процесс) может быть промоделирована различными способами; этим объясняется существование целой совокупности различных подходов к математическому и компьютерному моделированию ученика. Поведение дидактической системы зависит от огромного количества переменных состояния, параметров ученика и связей между ними, поэтому задача построения модели имеет большую неопределенность. Известные модели процесса обучения гораздо проще моделируемого объекта и учитывают лишь основные факторы, влияющие на результат обучения. Этим и объясняется существование нескольких альтернативных подходов к анализу дидактических систем, каждый из которых позволяет построить адекватную модель. При этом следует использовать системный анализ и методологию мягких систем.

С точки зрения **информационно-кибернетического подхода**, обучение сводится к управлению учителем (управляющее устройство) познавательной деятельностью ученика (объект управления) с целью формирования у него определенных качеств личности [92, 93]. Учитель располагает информацией о состоянии ученика Y и его среды S и владеет ресурсами R (технические средства и методы обучения). Задача учителя состоит в нахождении алгоритма обучения A, позволяющего изменить состояние ученика Y в соответствии с целями обучения C [93]. Учебный процесс характеризуется пятеркой компонентов $U = < Y, S, R, C, A >$.

Отдельного упоминания заслуживает проблема выбора параметров модели. Компьютер с программой, имитирующей функционирование дидактической системы, может рассматриваться как устройство, вычисляющее сложную функцию $Z(t)$ (количество знаний), зависящую от распределения учебного материала и нескольких параметров ученика. По нашему мнению, моделирование должно удовлетворять **требованию соответствия:** параметры ученика выбираются так, чтобы при заданном (разумном) распределении учебного материала результаты моделирования (функция $Z(t)$) соответствовали реальной зависимости $Z'(t)$ для достаточно успешного ученика, которая может быть оценена методом тестирования, педагогического наблюдения и т. д.

Настоящая монография содержит анализ и обобщение результатов, полученных автором в 2011–2017 годах. Все публикации автора по этой тематике могут быть разделены на следующие категории: 1) непрерывные однокомпонентные модели обучения, требующие решения дифференциального уравнения [32, 42, 46, 108]; 2) непрерывные многокомпонентные модели обучения, предполагающие решение системы диффуравнений [34–37, 40, 45, 49, 64, 106–108]; 3) дискретные модели, в которых ученик моделируется вероятностным автоматом [38, 46, 59]; 4) информационно-кибернетический подход к моделированию дидактических систем [39, 55, 71]; 5) модели ДС, учитывающие скорость передачи информации [51, 52, 66, 67]; 6) модель с изменяющимся коэффициентом забывания [47, 112]; 7) модели ДС, учитывающие снижение работоспособности ученика из-за усталости [41, 50, 65, 108, 109]; 8) моделирование изучения гипотетической дисциплины [43, 54, 56]; 9) решение оптимизационной задачи МТО [44, 48, 61, 62]; 10) моделирование формирования эмпирических знаний по физике [30, 31, 33, 36, 113, 114]; 11) модель обучения в школе и вузе [63, 69, 116]; 12) мультиагентный подход [58]; 13) применение метода статистических испытаний [35, 68]; 14) усвоение и забывание осмысленной (логически связанной) информации [78–80, 115]; 15) методология имитационного моделирования дидактических систем [60, 75–77, 111].

На рис. 0.1 изображена когнитивная сеть процесса обучения; она представляет собой ориентированный граф, вершины которого соответствуют внутренним и внешним факторам, влияющим на результат обучения – знания ученика Z. Соединяющие их дуги со стрелками символизируют взаимосвязи между ними. Если увеличение одного фактора вызывает увеличение другого, то рядом с ребром стоит знак “+”, а иначе – знак “–”. Результат обучения зависит от следующих факторов: 1) возраст, класс, год обучения t (Time); 2) требования учебной программы P (Program) к знаниям ученика; 3) интерес, мотивация к обучению M (Motivation); 4) количество усилий, прилагаемых учеником F (Force); 5) коэффициент усвоения α, характеризующий скорость усвоения нового материала; 6) коэффициент забывания γ, показывающий быстроту забывания усвоенной информации; 7) работоспособность W (Workability) или время, в течение которого ученик способен эффективно работать; 8) уровень требований учителя L (Level); 9) скорость сообщения новой информации υ; 10) длительность занятия, продолжительность обучения T (Time); 11) сложность учебного материала S; 12) используемость изучаемых знаний в учебной деятельности и повседневной жизни U (using).

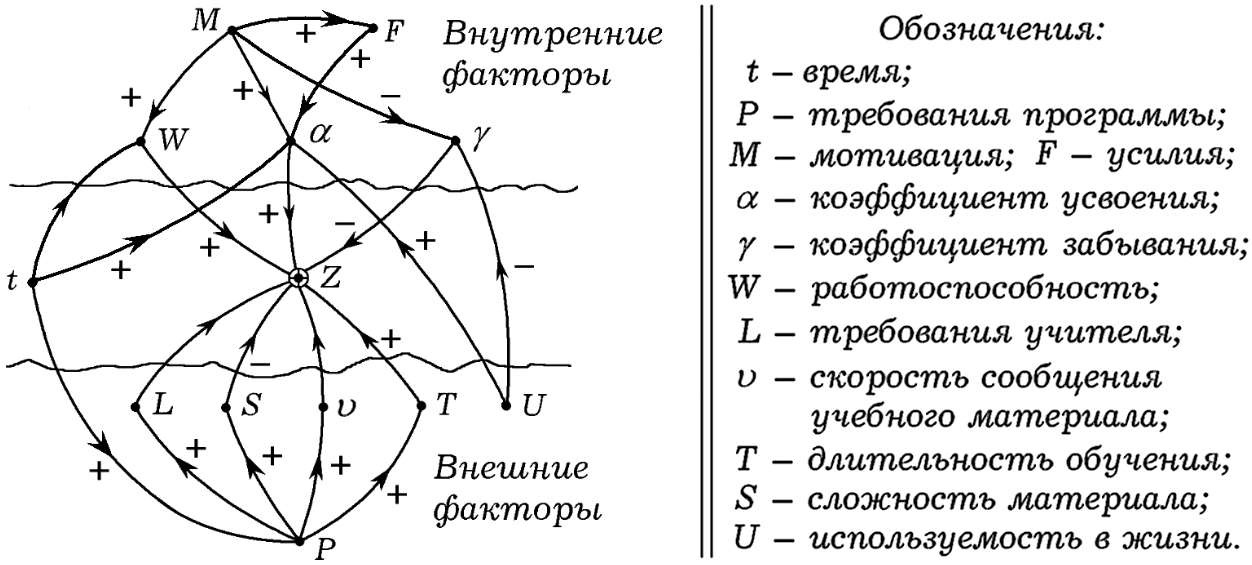


Рис. 0.1. Основные факторы, влияющие на результат обучения

Рядом с ребрами $P \to L$, $P \to S$, $P \to \upsilon$, $P \to T$ графа стоит “+”; это означает, что повышение требований программы обучения P приводит к увеличению уровня требований учителя L, сложности материала S, скорости сообщения информации υ, времени обучения T. Повышение мотивации M вызывает снижение коэффициента забывания γ, поэтому рядом с дугой $M \to \gamma$ стоит знак “–”. Отсутствие знака означает, что в некоторых случаях влияние положительное, а в других – отрицательное. На когнитивной схеме отражены только существенные факторы и связи, которые будут учитываться нами при моделировании учебного процесса. Количество усвоенных учеником знаний Z так же зависит от его психологических особенностей, отношений с учителем и другими школьниками, от качества учебника, от амбиций родителей и т. д.

При обсуждении проблемы точного определения состояния дидактической системы в различные моменты времени следует помнить о **принципе не-**

совместимости: высокая точность измерений (оценок, предсказаний) несовместима с большой сложностью изучаемой системы [16, с. 10]. Действительно, если объект состоит из большого числа взаимодействующих элементов, связанных между собой разнотипными связями, и находится под влиянием большого количества случайных факторов, то построить его модель, точно соответствующую оригиналу, практически невозможно. Увеличение точности предсказания состояния сложной системы приводит к уменьшению достоверности прогноза. Поэтому, по словам Л. Заде, при анализе сложных систем приходится «жертвовать точностью перед лицом ошеломляющей сложности» [16, с. 10], как того требует методология мягких систем.

На обучение влияет огромное количество разнообразных факторов, поэтому математические и компьютерные модели дидактических систем принципиально не могут быть очень точными. П. П. Чабаненко анализируя аналогичную проблему функционирования человеко-машинных систем, отмечал, что "адекватна не та модель, которая дает меньшие погрешности расчета показателей, а та, которая лучше отображает их объективный характер" [100, с. 49]. **Критерием адекватности** имитационных моделей дидактических систем является степень соответствия характера отклика модели (то есть знаний ученика) на изменение распределения учебного материала, требований учителя, параметров ученика (то есть входных величин) характеру объективно существующих закономерностей учебного процесса. Имитационные модели также должны отвечать **требованию устойчивости**, то есть небольшие изменения параметров системы, ее начальных условий и внешних воздействий не должны приводить к существенным изменениям результатов моделирования.

Имитационные модели, как правило, не имеют строгого обоснования, поэтому их применение следует отнести к **эвристическим методам познания.** Тем не менее, имитационное моделирование широко используется при изучении поведения человека в обществе [84, 87] и в процессе обучения [25, 77]. В настоящей монографии рассматриваются и исследуются на компьютере более десятка математических моделей учебного процесса, полученные в результате использования информационно-кибернетического подхода к анализу дидактических систем. При этом следует иметь в виду следующее:

1. Все рассматриваемые модели являются эволюционными; время t выступает в качестве независимой переменной и может измеряться в часах, сутках или месяцах.

2. Состояние дидактической системы характеризуется количествами того или иного вида знаний, сообщенных учителем и усвоенных учениками; эти величины могут измеряться в понятиях, формулах и т. д.

3. В монографии не рассматривается изучение конкретной дисциплины определенной группой учеников, а анализируется ситуация в самом общем виде. С целью сохранения общности выводов и получения универсальной модели обучения количество знаний измеряется в элементах учебного материала (ЭУМ) или условных единицах информации (УЕИ). Длительность обучения часто измеряется в условных единицах времени (УЕВ).

4. У различных учеников коэффициенты усвоения и забывания сильно отличаются. В рассматриваемых моделях они подобраны так, чтобы результаты имитационного моделирования соответствовали некоторому гипотетическому ученику, который на 70–90 % справляется с учебной программой.

5. Обсуждаемые модели не учитывают индивидуальные отклонения коэффициентов усвоения и забывания ученика от среднестатистических значений. Так же не принимаются во внимание изменения настроения и самочувствия, микроклимат в классе, особенности учителя и т. д.

6. Получающиеся графики и выводы следует рассматривать как результат исследования конкретной математической модели некоторой абстрактной дидактической системы, состоящей из учителя и одного или несколько учеников. Они справедливы в той степени, в какой исходные положения и проведенные рассуждения соответствуют реальной ситуации.

Глава 1.
МОДЕЛИРОВАНИЕ УСВОЕНИЯ И ЗАБЫВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИ НЕ СВЯЗАННОЙ ИНФОРМАЦИИ

В самом грубом приближении сообщаемая учителем информация представима в виде множества логически не связанных элементов учебного материала (ЭУМ), – независимых порций знания, одинаково хорошо усваиваемых учеником. Для более точного моделирования необходимо учитывать неоднородность изучаемого материала, зависимость прочности усвоения и скорости забывания от степени использования отдельных ЭУМ в учебной деятельности [76]. ***Первый подход*** к решению этой проблемы предполагает построение непрерывной модели, основанной на численном решении системы дифференциальных уравнений, учитывающей что: 1) прочность усвоения различных ЭУМ неодинакова; 2) прочные знания забываются существенно медленнее непрочных; 3) непрочные знания при их использовании учащимся постепенно становятся прочными; 4) при отсутствии обучения прочные знания становятся непрочными. ***Второй подход*** заключается в построении дискретной модели, которая учитывает, что при увеличении числа обращений ученика к данному ЭУМ: 1) время, затрачиваемое учеником, уменьшается, стремясь к некоторому пределу; 2) коэффициент забывания уменьшается, стремясь к нулю [47]. ***Третий подход*** состоит в создании двухкомпонентной вероятностной модели, которая учитывает: 1) связи между темами курса через вероятности обращения ученика к ЭУМ из предыдущих тем; 2) повышение доли прочных знаний при увеличении числа обращений ученика к каждому конкретному ЭУМ; 3) уменьшение времени работы с данным ЭУМ при увеличении числа обращений; 4) повышение коэффициента усвоения для рассматриваемого ЭУМ по мере увеличения общего количества знаний и/или знаний определенной темы [111]. Интерес представляет собой проблема ***эквивалентности этих трех подходов.***

1.1. Многокомпонентная модель усвоения и забывания логически не связанной информации (М-1.1). Одной из фундаментальных работ по изучению запоминания и забывания сообщаемой информации является исследование Эббингауза (1885 г.), занимавшегося изучением “чистой” памяти – то есть запоминания без участия процессов мышления [11]. Им использовался метод заучивания бессмысленных слогов, «не вызывающих никаких смысловых ассоциаций». Оказалось, что забывание происходит неравномерно (рис. 1.1). Сразу после окончания обучения объем удерживаемой в памяти информации быстро уменьшается и примерно через 8–9 часов составляет около половины от усвоенного материала. Постепенно скорость забывания уменьшается, в памяти испытуемого остается небольшая часть усвоенной информации. Получающаяся кривая забывания (рис. 1.1) плохо аппроксимируется экспоненциальной зависимостью $Z = Z_0 \exp(-\gamma \cdot t)$, так как при достаточно больших t испытуемый помнит какое-то количество усвоенной информации. В статье [97] обсуждается другое уравнение, описывающее забывание в опытах Эббингауза: $b(t) = 1/((\log t)^c + k)$, где b – доля информации, остающейся в памяти человека.

Автор согласен с Е. Н. Соколовым, утверждающим, что следует говорить не о забывании абсолютно осмысленного или бессвязного материала, а о закономерностях «забывания определенного количества качественно своеобразного материала» [17]. В опытах Эббингауза некоторые “бессмысленные” слоги ассоциировались с известными испытуемому словами и, видимо, поэтому запомнились прочно. Любой учебный материал характеризуется: 1) долей информации, которая легко ассоциируется с уже имеющимися у ученика знаниями; 2) долей информации, которая запоминается механически. Знания, используемые учеником в повседневной жизни или учебной деятельности, запоминаются быстрее и прочнее. При этом обдумывание изученных положений и установление ассоциаций относится к интеллектуальной деятельности и тоже повышает прочность запоминания. Знания, усваиваемые учеником, можно разделить на: 1) знания, часто использующиеся в его деятельности и запоминающиеся очень прочно; 2) знания, хорошо ассоциирующиеся с уже имеющимися знаниями, но не использующиеся в его деятельности; 3) плохо ассоциирующиеся и не используюшиеся учеником знания, которые быстро забываются.

На наш взгляд, каждому информационному блоку и конкретному ученику отвечает некоторый параметр, характеризующий легкость образования ассоциативных связей с уже имеющимися у ученика знаниями. От его величины, а также длительности обучения зависит прочность усвоения знаний. Можно предположить, что забывание больших объемов плохо ассоциируемой информации происходит по закону, похожему на закон Эббингауза, но гораздо медленнее. Предлагаемая имитационная модель обучения [76] опирается на самые общие положения и соответствует общеизвестным закономерностям: 1) после окончания непродолжительного обучения сначала знания ученика уменьшаются быстро, а затем все медленнее, и при $t \to \infty$ остаются постоянными (20–30 % от изученного материала); 2) после длительного или многократного обучения ученик прочно усваивает сообщенную ему информацию; скорость забывания мала.

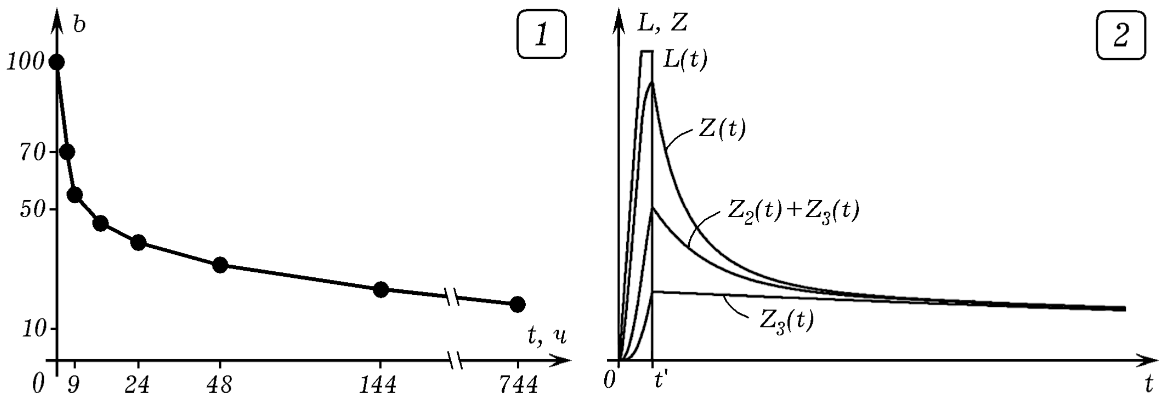


Рис. 1.1. Кривая Эббингауза [17] и результаты моделирования

<u>Построение модели.</u> Будем считать, что суммарные знания ученика Z включают в себя непрочные знания первой категории Z_1 (Зн-1), более прочные знания второй категории (умения) $Z_2 = U$ (Зн-2) и очень прочные знания третьей категории (навыки) $Z_3 = N$ (Зн-3): $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Во время обучения

($k = 1$) сообщаемая учителем информация сначала превращается в знания Зн-1, а затем в результате ее использования при выполнении учебных заданий – в знания Зн-2 и Зн-3 (рис. 1.2.1). При этом прочность усваиваемого материала постепенно возрастает. Скорость перехода непрочных знаний в категорию более прочных знаний характеризуется коэффициентами усвоения β_1 и β_2.

Рис. 1.2. Изменение прочности знаний при обучении и забывании

При отсутствии обучения ($k = 0$) происходит обратный переход (рис. 1.2.2): часть прочных знаний третьей категории постепенно становятся менее прочными знаниями второй категории, те в свою очередь частично переходят в разряд непрочных знаний первой категории, которые забываются. Скорости превращения прочных знаний в непрочные при забывании характеризуются коэффициентами забывания γ_2 и γ_3. В основе предлагаемой модели лежат следующие принципы:

1. В процессе обучения учащийся оперирует имеющейся у него информацией, выполняя различные учебные задания. При этом сообщаемые учителем знания сначала усваиваются непрочно (становятся знаниями Зн-1), затем по мере их повторения и использования – прочнее (превращаются в знания Зн-2), а затем становятся прочными (знания Зн-3).

2. Скорость увеличения непрочных знаний ученика в процессе обучения пропорциональна разности между уровнем требований учителя L (количеством

сообщаемых знаний) и суммарными знаниями ученика $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$; она составляет $\alpha(L - Z)$.

3. Во время обучения скорость превращения непрочных знаний Z_i в более прочные знания Z_{i+1} пропорциональна количеству непрочных знаний Z_i и равна $\beta_i Z_i$ ($i = 1, 2$).

4. При отсутствии обучения происходит забывание: знания ученика становятся менее прочными, а затем переходят в незнание. Скорость перехода прочных знаний ученика Z_i в менее прочные знания Z_{i-1} или в незнание пропорциональна количеству Z_i и равна $-\gamma_i Z_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Результат обучения характеризуется суммарным уровнем приобретенных знаний Z, коэффициентом прочности $\Pr = (Z_2 / 2 + Z_3)/Z$ и средним коэффициентом забывания γ_{cp} по всем ЭУМ. Если все приобретенные во время обучения знания непрочные ($Z_1 = Z$, $Z_2 = Z_3 = 0$), то коэффициент прочности $\Pr = 0$. Надо стремиться к ситуации, когда все приобретенные знания прочные ($Z_3 = Z$, $Z_1 = Z_2 = 0$), тогда $\Pr = 1$, γ_{cp} близко к 0. Предлагаемая трехкомпонентная модель обучения выражается системой из трех уравнений (во время обучения $k = 1$, иначе $k = 0$) [76]:

$$\frac{dZ_1}{dt} = k(\alpha(L - Z) - \beta_1 Z_1) - \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2,$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = k(\beta_1 Z_1 - \beta_2 Z_2) - \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3,$$

$$\frac{dZ_3}{dt} = k\beta_2 Z_2 - \gamma_3 Z_3, \quad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3,$$

$$\alpha = 0{,}1; \;\; \beta_1 = \beta_2 = 0{,}015; \;\; \gamma_1 = 0{,}027; \;\; \gamma_2 = 0{,}009; \;\; \gamma_3 = 9 \cdot 10^{-5}.$$

Допустим, изучаемая тема включает в себя n элементов учебного материала (ЭУМ): понятий, суждений или информационных блоков. Эти ЭУМ связаны друг с другом, а учитель в каждый данный момент требует усвоения всей изученной информации, то есть его уровень требований L равен количеству сообщенных им знаний с учетом их сложности. Будем считать, что сложность i-го ЭУМ S_i пропорциональна затратам времени и усилий, требующихся для усвоения данного ЭУМ; причем у самого простого ЭУМ $S_i = 1$, а у более сложных – S_i больше 1. Так как вся учебная информация в конечном счете передается в словесной форме, то можно оценить сложность того или иного блока учебного материала. Для расчета уровня требований L можно использовать формулу: $L = S_1 + S_2 + ... + S_i + ... + S_n$, где S_i – сложность i-го понятия, n – количество понятий в блоке. Если все n ЭУМ имеют сложность 1, то L равно n. Если учебный материал содержит 250 понятий (ЭУМ), из которых 83 имеют сложность 1, 122 понятий – сложность 2, а остальные 45 понятий – сложность 3, то уровень требований учителя $L = 83 \cdot 1 + 122 \cdot 2 + 45 \cdot 3 = 462$ ЭУМ. Скорость передачи информации $\upsilon = L / t$ равна количеству знаний, сообщаемых учителем в единицу времени, и зависит от уровня требований L, то есть от числа n ЭУМ и их сложности S_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Пусть в течение времени t' ученик пытается выучить N элементов учебного материала (ЭУМ), например, 30 иностранных слов. Сначала он пытается усвоить первый ЭУМ, затем – второй ЭУМ, не забыв первый ЭУМ, и т. д. В конце обучения он должен удерживать в памяти все N ЭУМ. При этом уровень требований, предъявляемых учеником к своим знаниям, равномерно возрастает. Перебрав за время t_1 все ЭУМ по одному разу, ученик в течение времени $t_2 = t' - t_1$ повторяет их снова и снова, пытаясь удержать в памяти все N ЭУМ. Уровень требований N при этом остается постоянным. Затем обучение заканчивается ($t > t'$, $L = 0$), начинается забывание.

<u>Результаты моделирования.</u> На рис. 1.1.2 показаны графики, получающиеся в результате решения рассмотренной выше системы уравнений на компьютере. При заданных параметрах модели примерно четверть изученной информации запоминается прочно и после окончания обучения ее количество уменьшается очень медленно. Все остальные усвоенные знания достаточно бы-

стро забываются. На рис. 1.3.1 представлены результаты моделирования обучения в течение 8 уроков по 4 часа, разделенных промежутками длительностью 164 часа (168 часов – 1 неделя). Изучается один и тот же учебный материал. Во время занятий ($L(t) = L_0$) количество знаний Зн-1, Зн-2, Зн-3 возрастает, а во время перерывов ($L(t) = 0$) – снижается из-за забывания. По мере увеличения Зн-3 и Зн-2 растет прочность усвоенных знаний. На рис. 1.3.2 приведены те же самые кривые, растянутые по оси времени. Видно, что во время занятий происходит плавное увеличение $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ и $Z_3(t)$.

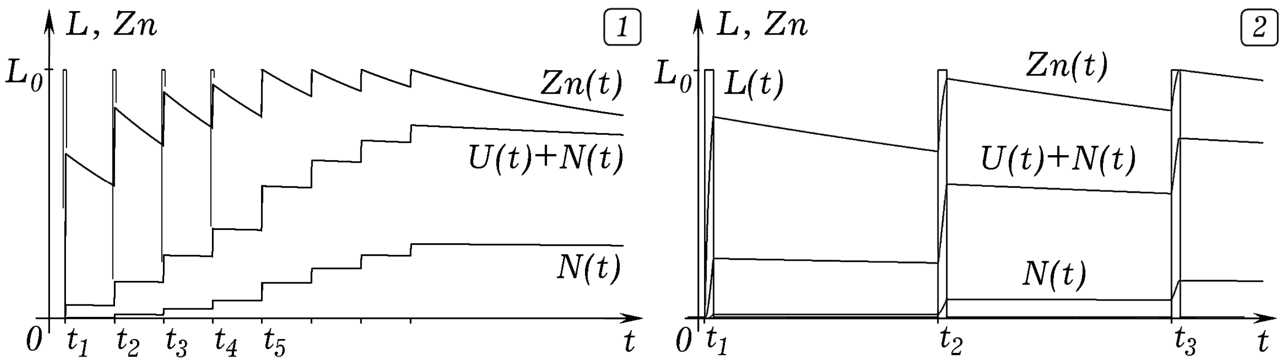


Рис. 1.3. Результаты моделирования (трехкомпонентная модель) [59]

Промоделируем ученика, который в течение 0,67 часа (40 мин.) изучает некоторый материал, а затем несколько раз его повторяет. Пусть на первом занятии он пытается запомнить половину некоторого текста, затем его повторяет, а потом запоминает вторую половину текста и повторяет весь текст. После этого следует перерыв, и в момент времени $t = 2$ часа начинается второе занятие длительностью 0,5 часа, на котором ученик снова пытается выучить весь текст. Третье и четвертое занятия начинаются в моменты 4 и 6 часов. Получающиеся кривые, характеризующие количества знаний различной степени прочности, представлены на рис. 1.4.1. Видно, как после каждого занятия количества знаний Зн-1, Зн-2 и Зн-3 увеличиваются, а в перерывах между ними – уменьшаются. Увеличение суммарного времени обучения приводит к повышению прочности усвоенных знаний.

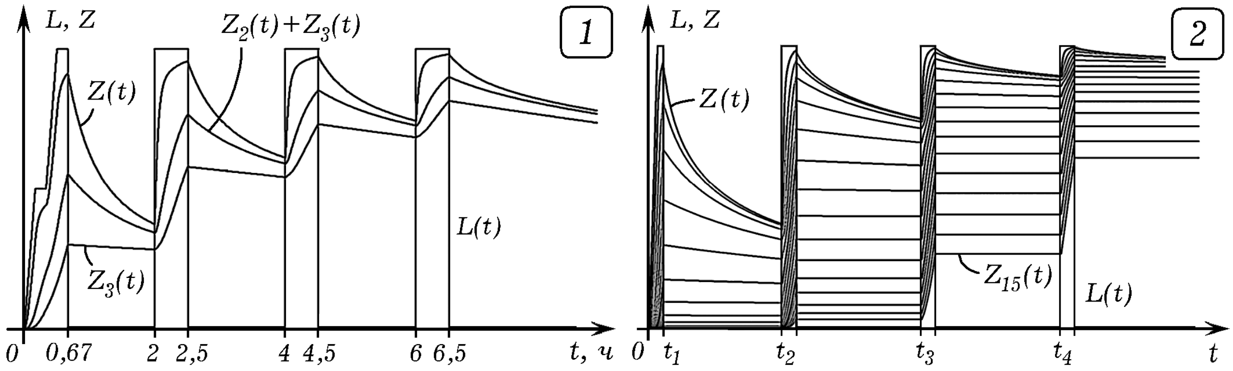


Рис. 1.4. Результаты моделирования: а) $N = 3$; б) $N = 15$

Многокомпонентная модель. Обобщая рассмотренную выше трехкомпонентную модель, приходим к следующей N-компонентной модели обучения, содержащей N дифференциальных уравнений:

$$\frac{dZ_1}{dt} = k(\alpha(L - Z) - \beta \cdot Z_1) - \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2,$$

$$\frac{dZ_i}{dt} = k\beta(Z_{i-1} - Z_i) - \gamma_i Z_i + \gamma_{i+1} Z_{i+1}, \quad i = 2, 3, ..., (N-1),$$

$$\frac{dZ_N}{dt} = k\beta \cdot Z_{N-1} - \gamma_N Z_N, \quad Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_N,$$

$$\alpha = 0{,}1; \quad \beta = 0{,}05; \quad \gamma_1 = 0{,}03; \quad \gamma_i = \gamma_{i-1}/2{,}72; \quad i = 2, 3, ..., N.$$

Здесь Z_1 – количество самых непрочных знаний ученика, которые забываются очень быстро; Z_N – количество самых прочных знаний; $\beta \cdot Z_1$ – скорость превращения знаний Зн-1 в знания Зн-2. Для решения этой системы уравнений при $N = 15$ используется программа ПР–1.1. Получающиеся графики приведены на рис. 1.4.2. Видно, что во время перерывов количество самых непрочных знаний ученика Z_1 быстро уменьшается, а самые прочные знания Z_{15} остаются неизменными. Эти и другие результаты моделирования позволяют объяснить следующие закономерности: ***1) во время занятий уровень знаний растет, а во время перерывов – снижается; 2) при изучении одной и той же совокупности вопросов на нескольких уроках прочность усвоенных знаний возрастает, скорость забывания стремится к нулю.***

1.2. Трехкомпонентная модель изучения курса, учитывающая сложность изучаемого материала (М-1.2). Рассмотрим ситуацию, когда ученик изучает некоторую дисциплину, состоящую из N тем (глав, параграфов); каждая тема изучается на одном уроке. В общем случае учебный материал неоднороден, каждая тема характеризуется коэффициентом сложности S_i, где i – номер темы (занятия). Если изучаемые вопросы очевидны для ученика, то будем считать, что сложность материала $S=0$. В случае, когда тема очень сложна (то есть для его объяснения требуется время, во много раз превышающее длительность урока), то $S=1$. Чем выше сложность материала, тем меньше коэффициент усвоения, поэтому будем считать, что $\alpha=\alpha_0(1-S)$.

Предлагаемая трехкомпонентная модель обучения выражается системой уравнений (при обучении $k=1$, при забывании $k=0$):

$$dZ_{1i}/dt = k(\alpha(L_i - Z_i) - \alpha_1 Z_{1i}) - (1-k)(\gamma_1 Z_{1i} - \gamma_2 Z_{2i}),$$

$$dZ_{2i}/dt = k(\alpha_1 Z_{1i} - \alpha_2 Z_{2i}) - (1-k)(\gamma_2 Z_{2i} - \gamma_3 Z_{3i}),$$

$$dZ_{3i}/dt = k\alpha_2 Z_{2i} - (1-k)\gamma_3 Z_{3i}, \quad Z_i = Z_{1i} + Z_{2i} + Z_{3i}.$$

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}3\cdot(1-S_i),\ \gamma_1 = 0{,}0015,\ \gamma_2 = \gamma_1/2{,}72,\ \gamma_3 = \gamma_2/2{,}72,$$

где S – сложность учебного материала, Z_{1i}, Z_{2i}, Z_{3i} – количества знаний Зн-1, Зн-2, Зн-3, изученных на i-м уроке. При длительном изучении одной темы количество знаний Z_i увеличивается до L_i, одновременно с этим происходит повышение доли прочных знаний Зн-3, растет прочность Pr.

Таблица 1.1

Распределение учебной информации по времени

Неделя	1		2		3		4		5		6		7		...		13	
Время t, час	6	162	6	162	6	162	6	162	6	162	6	162	6	162	...	...	6	162
Инф-ция I, усл. ед.	10	0	12	0	9	0	14	0	10	0	12	0	11	0	...	...	10	0
Сложность S	0,3	0	0,4	0	0,5	0	0,4	0	0,5	0	0,6	0	0,4	0	...	...	0,6	0

Для моделирования изучения дисциплины удобно использовать программу, считывающую информацию о распределении учебного материала из текстового файла. В простейшем случае файл должен содержать данные о длительности занятий T и перерывов T_n, количестве сообщенной учителем информации I_i (оно равно уровню требований L_i) и ее сложности S_i.

Пусть обучение длится 4 часа в неделю, на занятиях изучается одна и та же тема, распределение уровня требований $L = I$ задано в таблице 1.1. Продолжительность недели 168 ч, то есть 4 часа занятий чередуются с перерывами длительностью 164 ч (табл. 1.1). Используемая программа ПР–1.2 содержит цикл по времени, в котором определяется количество прочных и непрочных знаний ученика на следующем временном шаге и строятся графики $Z_3(t)$, $Z_2(t) + Z_3(t)$ и $Z = Z_1(t) + Z_2(t) + Z_3(t)$ (рис. 1.5). Исходные данные об уровне предъявляемых требований, длительности занятий и промежутков между ними находятся в текстовом файле data1.txt (Приложение), откуда считываются программой. Получающиеся графики похожи на кривые, представленные на рис. 1.3 для модели М-1.1: в течение занятий количества знаний Зн-1, Зн-2 и Зн-3 ученика быстро растут, а в промежутках между ними – медленно уменьшаются [59].

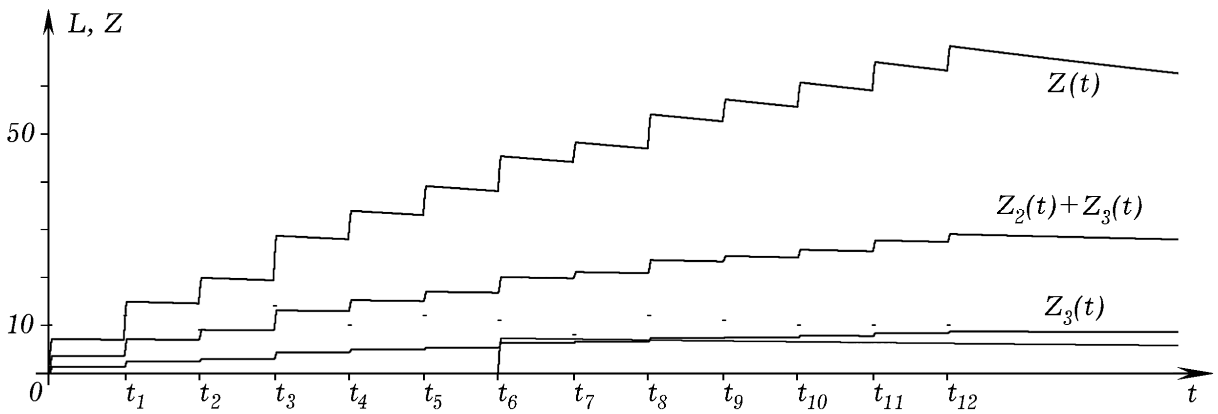


Рис. 1.5. Обучение в течение 13 недель с учетом сложности материала

Обсуждаемая модель универсальна и позволяет проанализировать поведение системы “учитель-ученик” при различных распределениях изучаемой информации $L(t) = I(t)$. В качестве примера рассмотрим обучение в течение 4 лет; пусть 9 месяцев в году ученик учится, а 3 месяца отдыхает на каникулах, причем уровень требований учителя задается в таблице 1.2. В файл data2.txt необходимо поместить исходные данные в формате, представленном в Приложении, и запустить программу ПР–1.3. Получающиеся графики представлены на рис. 1.6; из них видно, что во время обучения количества знаний Зн-1, Зн-2 и Зн-3 растут, а во время каникул снижается из-за забывания. Кривые $Z(t)$, $U(t)$ и $N(t)$ сильно зависят от параметров модели (коэффициентов усвоения и забывания); их следует подобрать так, чтобы получались разумные результаты.

Таблица 1.2

Распределение учебной информации по времени

Год	1				2				3				4				5	6
Кол-во месяцев	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	12	12
Инф-ция I, усл. ед.	5	5	5	0	5	7	8	0	7	7	8	0	8	8	9	0	0	0
Сложность S	0,1	0,2	0,1	0	0,1	0,2	0,2	0	0,1	0,2	0,1	0	0,2	0,2	0,1	0	0	0

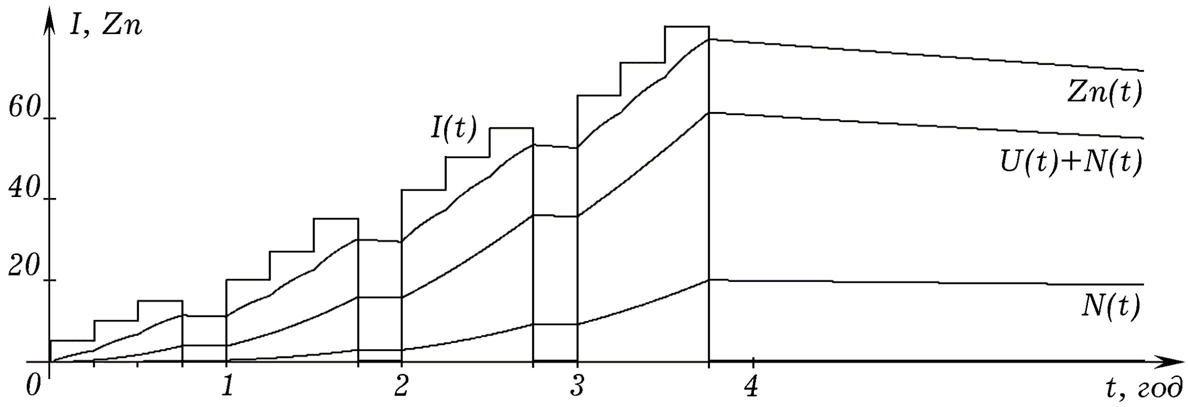


Рис. 1.6. Моделирование обучения в течение четырех лет (М-1.2)

1.3. Модель обучения с изменяющимся коэффициентом забывания (М-1.3). Хорошо известно, что те ЭУМ, которые включены в деятельность ученика, забываются существенно медленнее, чем ЭУМ, которые были один раз изучены и не используются. Возможно создать модель, в которой учитываются количества обращений s_i ученика к каждому ЭУМ и вычисляются соответствующие коэффициенты забывания γ_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) [47, 112].

<u>1. Многократное повторения одного ЭУМ на уроке.</u> Рассмотрим ученика, который в процессе обучения решает последовательность однотипных задач по одной и той же теме. Например, он в течение урока должен в определенные моменты времени складывать числа (или читать отдельные слова, выполнять

задания теста). Каждый раз уровень усвоения учеником соответствующего ЭУМ увеличивается до $Z=1$. Остальное время на уроке он занимается другой учебной деятельностью, которая нас не интересует. Пусть в момент t_s ученик начинает решать задачу в s-й раз. Учтем, что время решения задачи τ (или время, затрачиваемое на работу с данным ЭУМ), зависит от того, сколько раз s это задача решалась ранее. Можно предположить, что с ростом s время τ уменьшается по закону: $\tau = 1 + 1{,}5\exp(-s/5)$ условных единиц времени (УЕВ), стремясь к $\tau_\infty = 1$ УЕВ. Выполнив задание и повысив уровень владения соответствующим ЭУМ до 1, ученик переключается на решение другой учебной задачи и начинает забывать усвоенный ЭУМ в соответствии с законом забывания $dZ/dt = -\gamma \cdot Z$. Будем исходить из того, что при увеличении числа s использования данного ЭУМ он запоминается лучше, то есть коэффициент забывания уменьшается, например, по экспоненциальному закону: $\gamma = 0{,}002\exp(-s)$. В Приложении приведен текст компьютерной программы ПР–1.4 в среде Free Pascal, которая моделирует обучение при использовании ЭУМ в моменты времени 3, 6, 9, 12, 15, 18 УЕВ.

Результаты моделирования представлены на рис. 1.7. Видно, что после первого и второго обращения к данному ЭУМ приобретенные знания быстро забываются, а после пятого и шестого – забываются очень медленно. То есть в результате многократного использования данного ЭУМ коэффициент забывания уменьшается практически до 0, информация прочно запоминается.

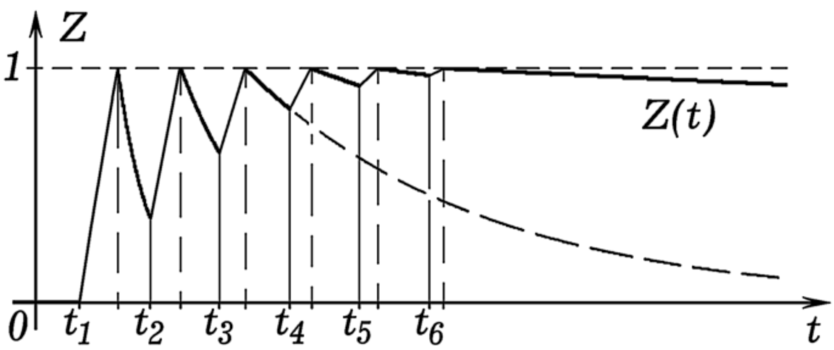


Рис. 1.7. Изменение уровня знаний одного ЭУМ в результате шести повторений

2. Многократное повторение множества ЭУМ на одном уроке. Теперь промоделируем изучение N ЭУМ в течение одного урока длительностью $T = t_2 - t_1$. Например, ученик изучает N новых слов иностранного языка (ЭУМ), которые пронумерованы от 0 до N. Читая текст, он в момент t'_1 встречается со словом 2 и в течение времени τ_2 переводит его, в момент t'_2 встречается со словом 5 и в течение времени τ_5 переводит его, в момент t'_3 – со словом 1 и т. д. Когда ученик переводит i-е слово первый раз ($s_i = 1$), он обращается к словарю и выписывает значение слова, второй раз – смотрит в тетрадь, третий раз – переводит по памяти и т. д., с каждым разом затрачивая меньшее время τ_i. Будем считать, что эти ЭУМ случайным образом встречаются ученику и на работу с i-м ЭУМ он затрачивает время $\tau_i = 1 + 2\exp(-s_i / 2)$ УЕВ (время решения задачи), где s_i – число обращений. По мере увеличения s_i происходит уменьшение коэффициента забывания i-го ЭУМ по следующему закону: $\gamma_i = 0{,}002 \exp(-s_i / 3)$ УЕВ.

Программа ПР–1.5 строит графики зависимостей: 1) суммарного количества знаний Z от времени; 2) среднего времени решения задачи τ по всем ЭУМ от времени; 3) среднего коэффициента забывания γ по всем ЭУМ от времени. Получающиеся кривые при $N = 10$ и $T = 300$ УЕВ изображены на рис. 1.8.1. Видно, что во время обучения суммарный объем знаний в среднем повышается, среднее время решения задачи τ снижается, стремясь к своему пределу τ_∞, средний коэффициент забывания γ уменьшается, стремясь к нулю.

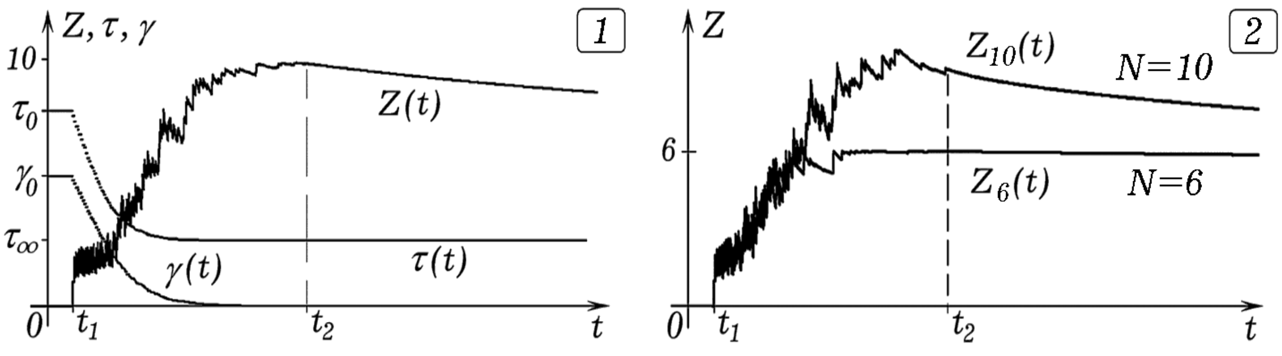


Рис. 1.8. Результаты моделирования при: 1) $N = 10$; 2) $N = 6$ и 10

Результаты моделирования для $N = 6$ и 10 представлены на рис. 1.8.2. Так как длительность урока одна и та же, то при увеличении количества N изучаемых ЭУМ среднее количество обращений к каждому ЭУМ уменьшается, средний коэффициент забывания γ в конце обучения растет, они запоминаются менее прочно. Поэтому при $N = 10$ уровень знаний ученика $Z(t)$ после окончания обучения снижается вследствие забывания, а при $N = 6$ остается практически постоянным [112].

При еще большем количестве изучаемых ЭУМ кривая $Z(t)$ после окончания обучения быстро убывает. На рис. 1.9 приведен результат моделирования при $N = 20$. Итак, **анализируемая модель показывает, что количество N ЭУМ, изучаемых на одном уроке, не должно быть слишком велико.** При больших N знания усваиваются непрочно и потом быстро забываются.

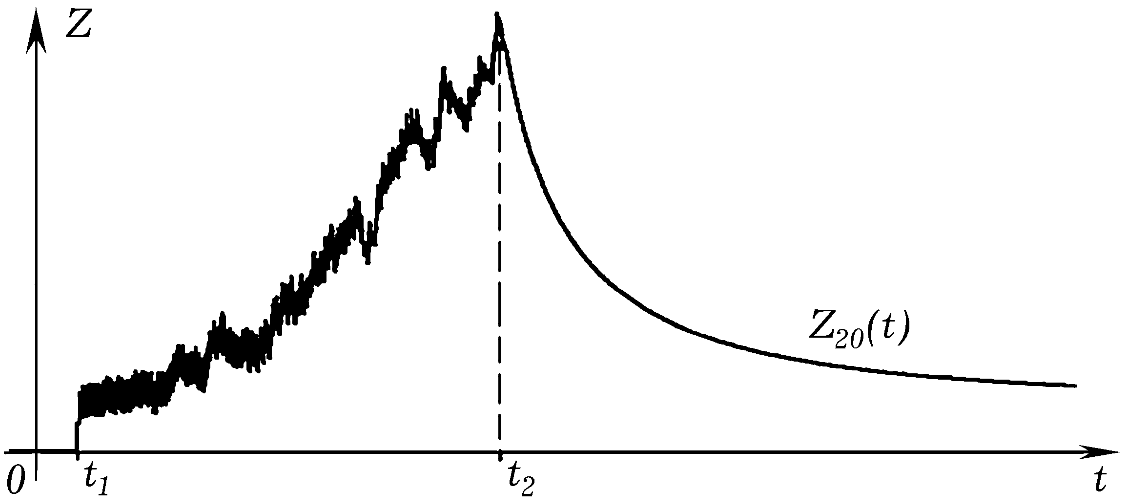


Рис. 1.9. Изменение уровня знаний при $N = 20$

Теперь изучим зависимость уровня знаний Z ученика через некоторое время t' после окончания урока от числа N изученных ЭУМ (или скорости поступления учебной информации $\upsilon = N/T$). Изменим программу ПР–1.5 так, чтобы изучаемые ЭУМ следовали бы по порядку, а не случайным образом, и рассчитаем количество знаний ученика Z и средний коэффициент забывания γ при различных N. В нашем случае длительность урока составляла $T = 300$ УЕВ, а контрольное время после окончания обучения $t' = 350$ УЕВ. Также вычислим показатель эффективности $K = Z/N$, равный отношению количества знаний Z ученика в момент $T + t'$ к общему числу изученных ЭУМ N.

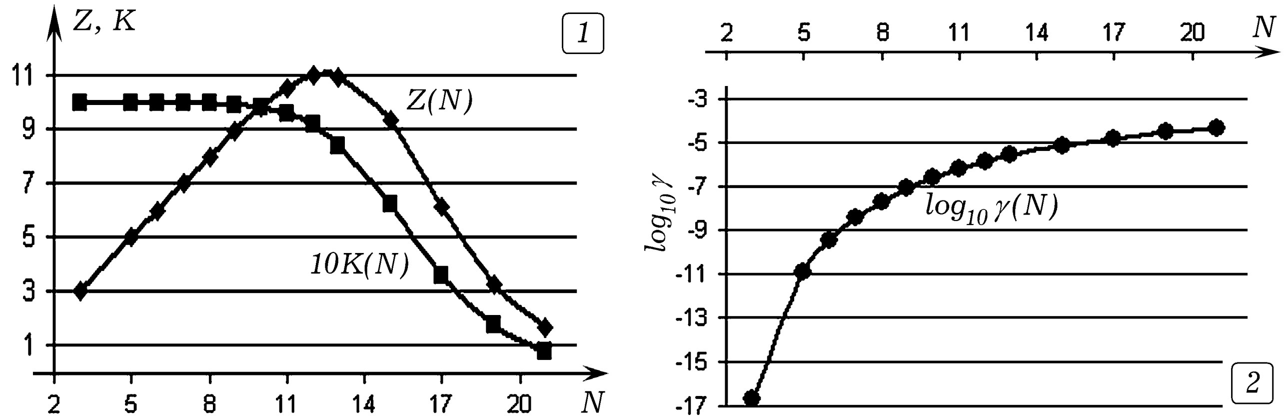


Рис. 1.10. Результаты моделирования обучения на уроке при различных N

Из рис. 1.10.2 следует, что с ростом N от 3 до 21 средний коэффициент забывания γ увеличивается от $2 \cdot 10^{-17}$ до $4 \cdot 10^{-5}$, то есть ЭУМ в среднем усваиваются хуже, забываются быстрее. При $N < 12$ количество знаний ученика Z через время t' после окончания обучения увеличивается почти пропорционально N, достигает максимума при $N = 12$, а затем при $N > 12$ уменьшается (рис. 1.10.1). Это объясняется влиянием двух факторов: 1) увеличением числа N изученных ЭУМ; 2) уменьшением количества обращений к каждому ЭУМ в течение урока фиксированной длительности T и, как следствие, ухудшением качества усвоения знаний (увеличением коэффициента забывания γ). При небольших N показатель эффективности K равен 1, а с ростом N снижается до нуля. Итак, ***для конкретного ученика существует такое*** N***, при котором его уровень знаний*** Z ***через время*** t' ***после окончания урока длительности*** T ***будет максимальным.*** При фиксированном T скорость передачи информации пропорциональна N. Чтобы обучение было эффективным, необходимо найти оптимальное значение скорости поступления учебной информации $\upsilon = N/T$.

Предложенная модель позволяет обосновать, что ***с ростом скорости поступления учебной информации: 1) количество знаний ученика после окончания обучения сначала увеличивается, достигает максимума, а затем***

уменьшается; 2) эффективность урока сначала равна 1, а затем плавно уменьшается до 0.

<u>3. Обучение на нескольких уроках.</u> Теперь промоделируем изучение $N = 30$ ЭУМ в течение трех уроков длительностью $T = 180$ УЕВ, разделенных перерывами продолжительностью $T_n = 220$ УЕВ. Во время урока ученик обращается то к одному, то к другому ЭУМ с равными вероятностями. Например, он переводит иностранный текст, содержащий незнакомые слова. По мере роста числа s_i обращений к i-му ЭУМ уменьшается затрачиваемое время τ_i и коэффициент забывания γ_i. Используется программа ПР–1.6, результаты имитационного моделирования приведены на рис. 1.11. Видно, что во время обучения номер i рассматриваемого ЭУМ изменяется случайно от 1 до 30, уровень знаний ученика Z при этом увеличивается. Во время перерывов происходит забывание, Z уменьшается. ***При изучении одной и той же совокупности ЭУМ на нескольких уроках прочность усвоения знаний возрастает, γ снижается.***

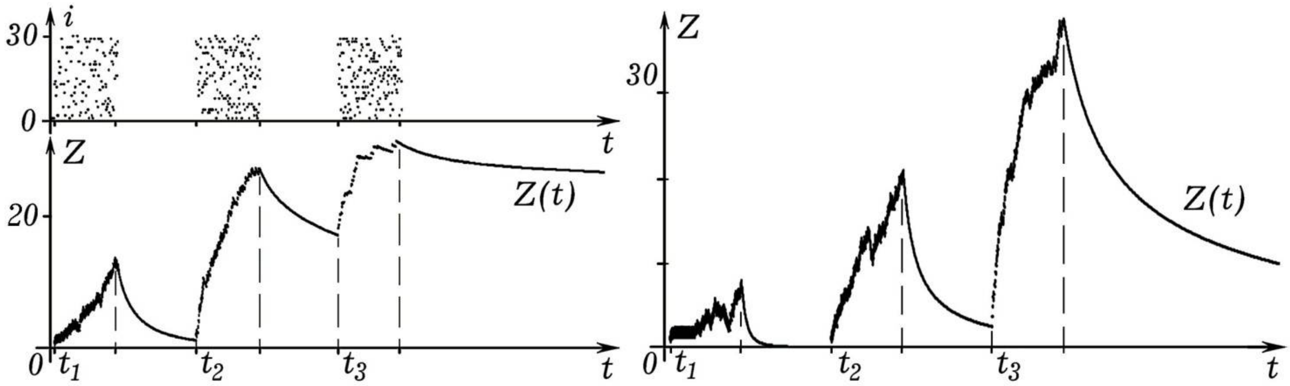


Рис.1.11. Моделирование изучения множества ЭУМ на трех уроках

1.4. Модель дидактической системы с изменяющимся коэффициентом забывания в таблицах Excel (М-1.3). Рассмотренная выше модель обучения опирается на следующие утверждения:

1. Учебный курс состоит из N независимых одинаковых по объему и сложности элементов учебного материала (ЭУМ), к которым ученик обращается в случайной или заданной последовательности. В каждый момент времени ученик может работать не более чем с одним ЭУМ.

2. Ученик неоднократно обращается к каждому ЭУМ. При каждом обращении ученика к i-му ЭУМ его уровень знаний Z_i i-го ЭУМ возрастает до 1, то есть ученик хотя бы небольшое время удерживает ЭУМ в памяти.

3. После окончания работы с i-м ЭУМ ученик начинает его забывать. Его количество знаний Z_i убывает по экспоненциальному закону, скорость которого определяется коэффициентом забывания γ_i: $dZ_i / dt = -\gamma_i \cdot Z_i$.

4. Каждому ЭУМ соответствует свой коэффициент забывания. При увеличении числа s_i обращений ученика к i-му ЭУМ коэффициент забывания γ_i уменьшается по закону: $\gamma_i = 0{,}002 \exp(-s_i / 3)$.

5. По мере увеличения числа s_i обращений ученика к i-му ЭУМ время работы ученика с i-м ЭУМ уменьшается, стремясь к некоторому пределу, который равен минимально возможному времени работы с данным ЭУМ. Эта зависимость может быть выражена формулой: $\tau_i = 1 + 2\exp(-s_i / 2)$.

6. Суммарное количество знаний в каждый момент времени равно сумме знаний учеником каждого ЭУМ: $Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_N$.

Для моделирования можно использовать электронные таблицы Excel. В специальном окне создается небольшая программа (макрос), запускаемая нажатием кнопки на экране. Текст программы приведен в Приложении (ПР–1.7). Она позволяет построить графики: 1) зависимости суммарных знаний Z от времени t (рис. 1.12.1); 2) зависимости среднего времени работы по всем ЭУМ от времени t; 3) зависимости среднего коэффициента забывания по всем ЭУМ от времени t; 4) зависимости количества знаний одного или нескольких ЭУМ от времени t (рис. 1.12.2). Для графиков на рис. 1.12 число ЭУМ $N = 15$, а время обучения $T = 350$ УЕВ. Видно, что ***во время обучения суммарное количество знаний в среднем возрастает, а после окончания – убывает из-за забывания. В случае когда к некоторому ЭУМ ученик обращается несколько раз, происходит уменьшение скорости забывания; после каждого обращения этот ЭУМ забывается все медленнее и медленнее*** (рис. 1.12).

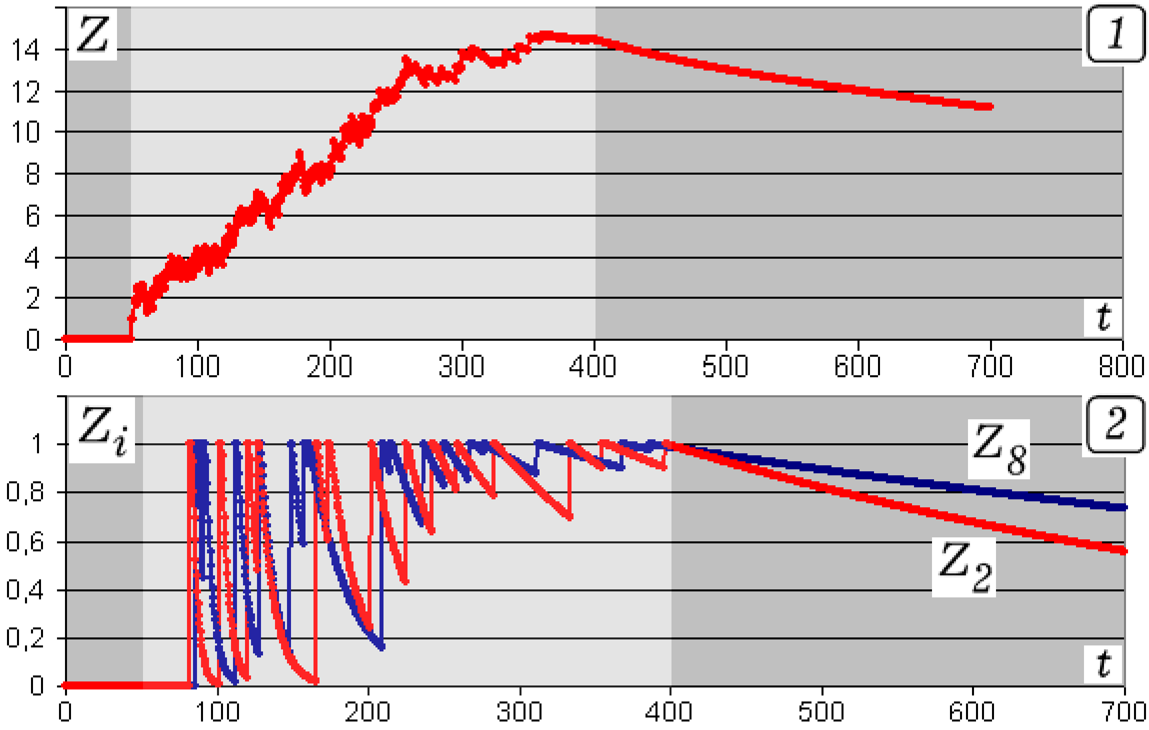


Рис. 1.12. Получающиеся зависимости суммарных знаний $Z(t)$ и знаний второго и восьмого ЭУМ от времени ($Z_2(t)$ и $Z_8(t)$)

Промоделируем изучение $N=40$ ЭУМ в течение четырех занятий продолжительностью по $T=150$ УЕВ. Занятия разделены перерывами длительностью $T_П=100$ УЕВ. Во время обучения ученик обращается то к одному, то к другому ЭУМ с равными вероятностями. По мере роста числа s_i обращений к i-му ЭУМ уменьшается затрачиваемое время τ_i и коэффициент забывания γ_i. Используется программа ПР–1.8, написанная для Excel. Из графиков (рис. 1.13.1) видно, что во время обучения номер i изучаемого ЭУМ изменяется случайно от 1 до 40, суммарное количество знаний ученика (переменная SZ, красная линия) при этом увеличивается. Во время перерывов происходит забывание, суммарный уровень знаний ученика Z уменьшается. На рис. 1.13.2 представлены результаты моделирования для случая, когда ЭУМ изучаются по порядку. Из-за уменьшения времени работы с каждым ЭУМ на первом занятии ученик не успевает рассмотреть все ЭУМ даже два раза, а в течение четвертого занятия успевает поработать с большей частью ЭУМ четыре раза. Графики, получаемые с помощью модели М-1.3, очень похожи на кривые, изображенные на рис. 1.1 и 1.4 (модель М-1.1), что позволяет говорить об ***эквивалентности этих моделей.***

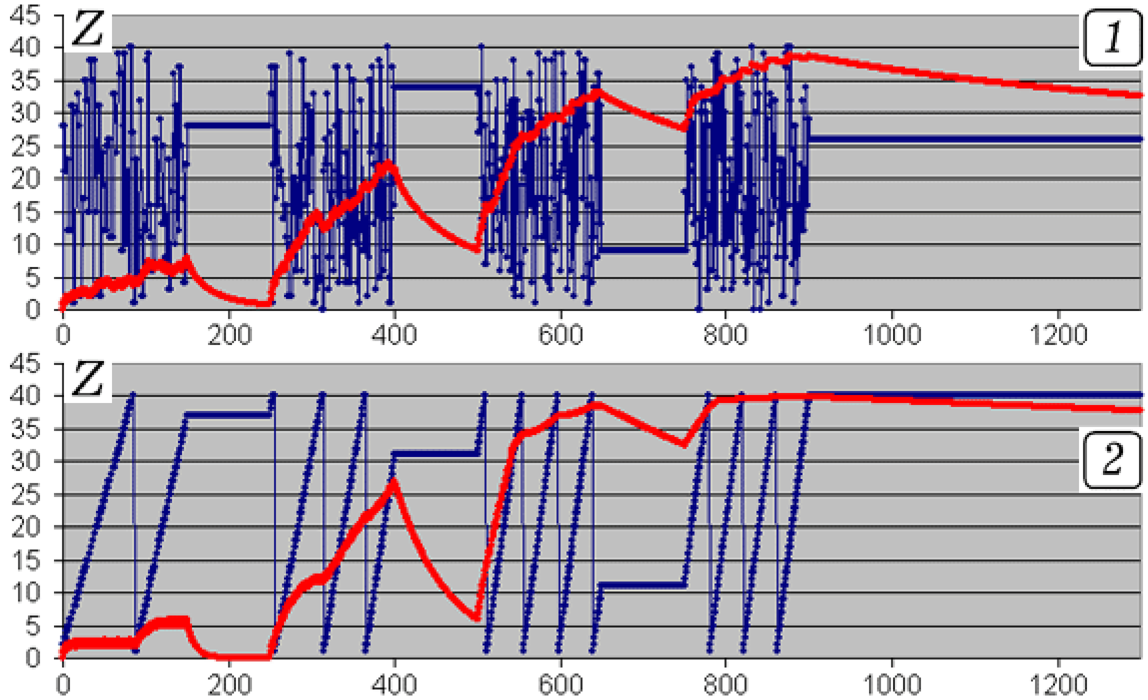


Рис. 1.13. Результаты имитационного моделирования обучения (ПР–1.8)

1.5. Двухкомпонентная вероятностная модель изучения курса (М-1.4). Возможен еще один подход к проблеме моделирования процесса обучения, позволяющий учесть связь между различными темами изучаемой дисциплины путем задания вероятности использования ранее изученных ЭУМ и зависимости скорости усвоения ЭУМ от степени усвоения предыдущих тем. В его основе лежит двухкомпонентная модель знаний, согласно которой вся воспринимаемая учеником информация может быть разделена на две категории: 1) непрочные или быстро забывающиеся знания; 2) прочные или медленно забывающиеся знания, интеллектуальные умения, навыки, формирующиеся как результат использования данного ЭУМ в деятельности учащегося.

Построение модели. Предположим, что изучаемый материал содержит N ЭУМ. Уровень Zn_i изученности i-го ЭУМ складывается из: 1) уровня непрочных знаний z_i, имеющих высокую скорость забывания; 2) уровня прочных знаний или навыков n_i, которые утрачиваются медленно. Можно записать, что

$Zn_i = z_i + n_i$. Будем считать, что во время обучения ученик на какое-то время полностью усваивает каждый ЭУМ, то есть хотя бы несколько минут удерживает соответствующую информацию в памяти. Это означает, что при работе ученика с i-м ЭУМ количество знаний Zn_i возрастает до 1 и часть непрочных знаний превращается в прочные. Одновременно с этим происходит уменьшение прочных и непрочных знаний всех остальных ЭУМ из-за забывания.

Состояние ученика в каждый момент времени t определяется двумя одномерными матрицами z_i и n_i ($i =$ 1, 2, …, N), элементы которых лежат в интервале от 0 до 1. Если i-й вопрос усвоен учеником полностью, то $Zn_i = z_i + n_i = 1$; а если не усвоен совсем, то $Zn_i = z_i + n_i = 0$. В результате работы с i-м ЭУМ его уровень изученности возрастает до $Zn_i = 1$, z_i и n_i увеличиваются. Практически сразу после окончания работы ученика с i-м ЭУМ начинается его забывание. С течением времени величины z_i и n_i снижаются по экспоненциальному закону, но z_i уменьшается существенно быстрее.

В самом грубом приближении можно считать, что коэффициент научения, определяющий скорость увеличения знаний ученика, остается постоянным. Психологи установили, что чем больше человек знает, тем проще ему усвоить новую информацию, то есть коэффициент усвоения i-го ЭУМ тем выше, чем больше суммарные знания ученика S_{zn} всего учебного материала и уровень изученности рассматриваемого ЭУМ $Zn_i = z_i + n_i$. Также учтем, что при работе с i-м ЭУМ (например, решение простой задачи, перевод слова или предложения) ученик затрачивает время τ_i, которое по мере увеличения уровня Zn_i усвоения i-го ЭУМ снижается до некоторого предела. Запишем дифференциальные уравнения в конечных разностях:

$dn_i / dt = \alpha_i (1 - n_i)$, $z_i = 1 - n_i$, (усвоение)

$dz_i / dt = -\gamma_z z_i$, $\quad dn_i / dt = -\gamma_n n_i$, (забывание)

$n_i^{t+1} = n_i^t + \alpha_i (1 - n_i^t) \Delta t$, $\quad z_i^{t+1} = 1 - n_i^{t+1}$,

$z_i^{t+1} = z_i^t - \gamma_z z_i^t \Delta t$, $\quad n_i^{t+1} = n_i^t - \gamma_n n_i^t \Delta t$.

Коэффициент усвоения и время обращения к i-му ЭУМ:

$$\alpha_i = a_1(a_2 + z_i + n_i - \exp(-S_{zn} / a_3)), \quad \tau_i = b_1 / (z_i + n_i + b_2),$$

Суммарное количество знаний и навыков находится по формулам:

$$Zn_i = z_i + n_i, \; S_{zn} = \sum_{i=1}^{N} (z_i + n_i), \; S_n = \sum_{i=1}^{N} n_i .$$

Коэффициенты заданы так: $a_1 = 0{,}16$ УЕВ $^{-1}$, $a_2 = 1{,}3$, $a_3 = 100$, $b_1 = 0{,}1$ УЕВ, $b_2 = 0{,}02$, $\gamma_z = 10^{-3}$ УЕВ $^{-1}$, $\gamma_n = 5 \cdot 10^{-5}$ УЕВ $^{-1}$.

Задание параметров изучаемой дисциплины. Допустим, изучаемый курс содержит 400 элементов учебного материала (ЭУМ) и состоит из четырех тем, каждая из которых включает по 100 ЭУМ [111]. Изучение тем разделяется перерывами длительностью 200 УЕВ. Степень изученности курса определяется количеством j ранее изученных ЭУМ. При этом изучаемый учебный материал содержит как новые (или плановые, из изучаемой темы) ЭУМ, так и ранее изученные ЭУМ, которые необходимы для понимания новой темы, решения задач, выполнения заданий. Например, изучая иностранный язык, ученик работает с текстом, содержащим новые для него слова, а также слова, изученные на предыдущих уроках. При прохождении n-й темы ученик в каждый момент времени работает с одним ЭУМ, при этом он либо знакомится с новыми вопросами из n-й темы, либо обращается к уже ранее изученному вопросу из n-й или предыдущей темы. Обозначим вероятность изучения нового вопроса n-й темы через $p_n^н$, а вероятность повторения (повторного обращения) к уже изученному вопросу из m-й темы ($m \le n$) через p_{nm}. Для рассматриваемой дисциплины в принципе можно построить таблицу (рис. 1.14.1), в которой указаны вероятности обращения ученика к вопросам изучаемой и предыдущих тем. Такая таблица будет отражать связи между темами дисциплины. Так как учащийся обязательно работает с тем или иным ЭУМ, то сумма вероятностей в каждой строке таблицы равна 1: $p_1^н + p_{11} = 1$, $p_2^н + p_{21} + p_{22} = 1$,

$$p_3^н + p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1, \quad p_4^н + p_{41} + p_{42} + p_{43} + p_{44} = 1.$$

1

	Новый вопрос	ПОВТОРЕНИЕ			
		Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4
Тема 1	$p_1^н$	p_{11}	0	0	0
Тема 2	$p_2^н$	p_{21}	p_{22}	0	0
Тема 3	$p_3^н$	p_{31}	p_{32}	p_{33}	0
Тема 4	$p_4^н$	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}

2

$$p_{i,j} = \begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}68 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}23 & 0{,}42 & 0 & 0 \\ 0{,}43 & 0{,}11 & 0{,}27 & 0{,}19 & 0 \\ 0{,}37 & 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}17 \end{pmatrix}$$

Рис. 1.14. Вероятности обращения ученика к ЭУМ из новой и предыдущих тем

Данная таблица может быть представлена в виде стохастической матрицы (рис.1.14.2), которая позволяет учесть степень связи n-й и m-й тем ($n > m$). Чем больше вероятность p_{nm}, тем чаще при изучении n-й темы ученик вынужден обращаться к какому-то ЭУМ из предыдущей m-й темы. При каждом обращении к i-му ЭУМ ученик повышает количество своих знаний Zn_i до 1, а часть непрочных знаний становится прочной.

<u>Результаты моделирования.</u> Для имитационного моделирования анализируемой дидактической системы применяется компьютерная программа ПР–1.9. Она содержит цикл по времени, в котором: 1) с помощью генератора случайных чисел и заданной матрицы вероятностей осуществляется выбор номера s “изучаемого” ЭУМ; 2) исходя из уровней усвоения s-го ЭУМ (переменные z_s и n_s), вычисляется коэффициент усвоения ученика α_s и время работы τ_s с этим ЭУМ (операторы a:=0.16*(1.3+z[s]+n[s]–exp(–Sz/100)) и dt:=abs(0.1/(z[s]+n[s]+0.02))); 3) определяются уровни знаний s-го ЭУМ после его изучения (операторы n[s]:=n[s]+a*(1–n[s]) и z[s]:=1–n[s]); 4) рассчитываются уровни знаний всех остальных не изучаемых в данный момент ЭУМ, которые уменьшаются за счет забывания (операторы z[i]:=(1–gz*dt)*z[i] и n[i]:=(1–gn*dt)*n[i]); 5) результаты выводятся на экран в графическом виде. После этого все повторяется снова. Когда переменная k равна 1, моделируется обучение (занятия начинаются в моменты 0, t_1, t_2, t_3), а когда k равно 0 – перерыв длительностью 200 УЕВ.

На рис. 1.15 представлены графики зависимостей от времени: 1) уровня Zn_{50} усвоения учеником 50-го ЭУМ (рис.1.15.1); 2) суммарного количества знаний S^1_{zn}, S^2_{zn}, S^3_{zn}, S^4_{zn} по каждой теме; 3) суммарного количества знаний S_{zn} и уровня прочных знаний (навыков) S_n по всей дисциплине в целом (рис. 1.15.2). Точки на рис. 1.15.2 соответствуют номерам изучаемых ЭУМ, которые выбираются случайным образом, исходя из стохастической матрицы $p_{i,j}$. Видно, что во время занятий общий объем знаний S_{zn} ученика и количество прочных знаний S_n увеличиваются; во время перерывов и после обучения происходит их снижение вследствие забывания. При этом непрочные знания быстро забываются, остаются только прочные. Из верхнего графика видно, как в обозначенные моменты времени, когда ученик обращается к 50-му ЭУМ, происходит быстрое увеличение уровня Zn_{50} знаний до 1, сменяющееся экспоненциальным убыванием. В эти же моменты резко увеличивается количество прочных знаний n_{50}, которое затем очень медленно снижается [111].

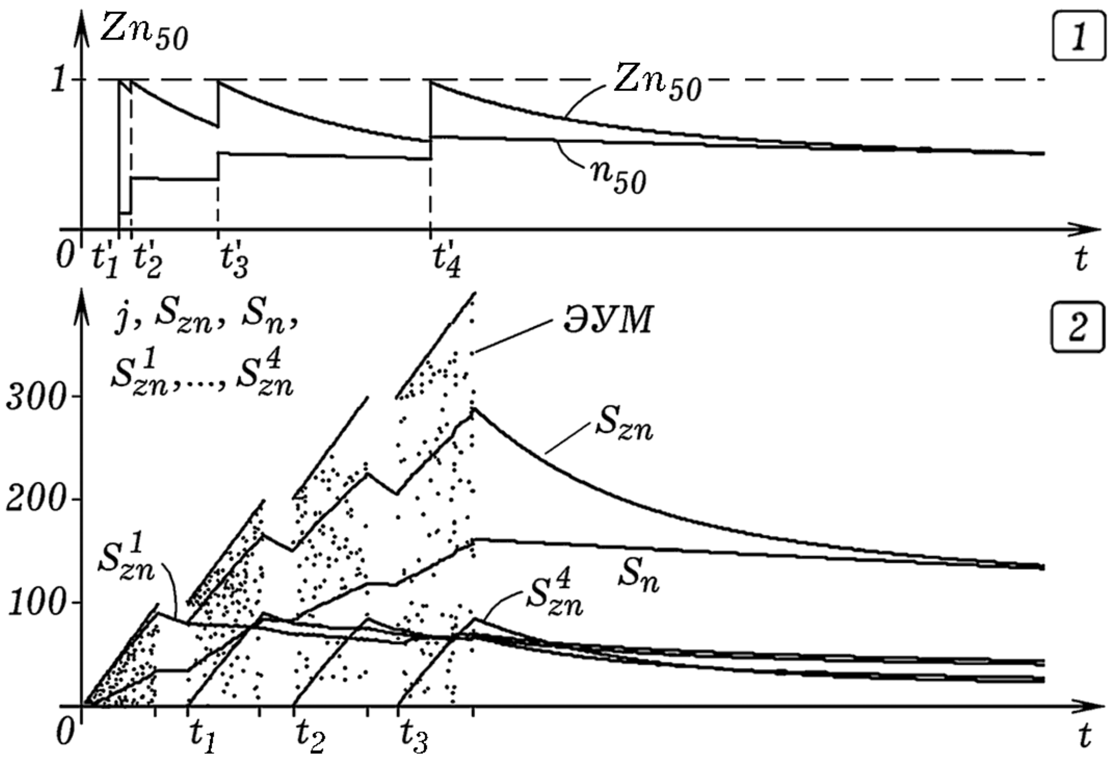


Рис. 1.15. Результаты имитационного моделирования изучения дисциплины

Предлагаемая модель изучения дисциплины учитывает: 1) связи между темами курса через вероятности обращения ученика к ЭУМ из предыдущих тем; 2) повышение доли прочных знаний при увеличении числа обращений ученика к данному ЭУМ; 3) уменьшение времени работы с данным ЭУМ при увеличении числа обращений к нему; 4) увеличение коэффициента научения для данного ЭУМ по мере увеличения суммарного количества знаний и/или знаний этого ЭУМ. Этот подход позволяет проследить динамику роста у ученика общего количества знаний (прочных и непрочных) и знаний каждой темы.

Сравнивая результаты использования моделей М-1.1, М-1.2, М-1.3 и М-1.4, рассмотренных в главе 1, можно обнаружить, что получающиеся графики зависимостей знаний ученика от времени очень похожи. Отсюда следует, что ***рассмотренные выше методы моделирования дидактических систем эквивалентны.***

Приложение к главе 1

ПР-1.1

```
Program Pyatnadcati_componentn_model;{M-1.1, ris.1.4.2}
{$N+}Uses crt, graph; Const dt=0.01; Mt=0.3; M=1;
ee=2.72; Y=650; N=15;
Var aa,a,t,vI,L,SZ,SZ5,SZ11: single; i,k,DV,MV: integer;
g,z: array[0..N+1] of single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); aa:=0.1; a:=0.05;
g[1]:=0.03; for i:=2 to N do g[i]:=g[i-1]/2.72;
Repeat t:=t+dt;
If (t<100)or(abs(sin(0.003*t))<0.15) then k:=1 else k:=0;
If (t<60) then vI:=10 else vI:=0; L:=L+vI*dt;
Z[1]:=Z[1]+k*(aa*(L-SZ)*dt-a*Z[1]*dt)+g[2]*Z[2]*dt-g[1]*Z[1]*dt;
For i:=2 to N-1 do begin
Z[i]:=Z[i]+k*a*(Z[i-1]-Z[i])*dt+g[i+1]*Z[i+1]*dt-g[i]*Z[i]*dt;
end; Z[N]:=Z[N]+k*a*Z[N-1]*dt-g[N]*Z[N]*dt; SZ:=0;
For i:=N downto 1 do begin SZ:=SZ+Z[i];
circle(10+round(Mt*t),Y-round(M*(SZ)),1); end;
circle(11+round(Mt*t),Y+1-round(M*(SZ5)),1);
circle(10+round(Mt*t),Y-round(M*L),1);
circle(10+round(Mt*t),Y,1); until (KeyPressed)or(t>5000);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

ПР-1.2

```
Program Obuchtnie_13_nedel; {M-1.2, ris. 1.5}
{$N+}Uses crt, graph; const Np=30; dt=0.01; Mt=0.5; Mz=8;
var D: text; DV,MV,i,j,j1,F,L1,LL: integer;
```

```
a,k,g1,g2,g3,SZ,SZ2,SZ3,t,tt: single;
no,Tm,L: array[0..50] of integer; S: array[0..50]of single;
Z,Z1,Z2,Z3: array[0..50]of single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); Assign(D,'E:\data1.txt');
Reset(D); g1:=3E-4; g2:=g1/2.7; g3:=g2/2.7;
For i:=1 to Np do Readln(D,no[i],Tm[i],L[i],S[i]);
Repeat t:=t+dt; j:=0; tt:=t;
Repeat inc(j); tt:=tt-Tm[j]; until tt<0;
For f:=1 to Np do begin k:=1; LL:=0;
If (f=no[j])and(f<>0) then LL:=L[j] else k:=0; a:=0.3*(1-S[j]);
Z1[f]:=Z1[f]+k*(a*(LL-Z[f])-a*Z1[f])*dt-g1*Z1[f]*dt+g2*Z2[f]*dt;
Z2[f]:=Z2[f]+k*(a*Z1[f]-a*Z2[f])*dt-g2*Z2[f]*dt+g3*Z3[f]*dt;
Z3[f]:=Z3[f]+k*a*Z2[f]*dt-g3*Z3[f]*dt; Z[f]:=Z1[f]+Z2[f]+Z3[f];
end; For i:=1 to Np do Z[i]:=0;
SZ:=0; SZ2:=0; SZ3:=0; For i:=1 to 20 do begin
Z[i]:=Z1[i]+Z2[i]+Z3[i]; SZ:=SZ+Z1[i]+Z2[i]+Z3[i];
SZ2:=SZ2+Z2[i]; SZ3:=SZ3+Z3[i];
{circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*Z[i]),1);} end;
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*Z[7]),1);
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*L[j]),1);
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*SZ),1);
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*SZ3),1);
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*(SZ2+SZ3)),1);
circle(10+round(Mt*t),650,1);
until Keypressed; Close(D); CloseGraph; END.
```

Файл data1.txt

```
1   6    10  0.3
0  162   0   0
2   6    12  0.4
0  162   0   0
3   6    9   0.5
0  162   0   0
4   6    14  0.4
0  162   0   0
5   6    10  0.5
0  162   0   0
6   6    12  0.6
0  162   0   0
7   6    11  0.4
0  162   0   0
8   6    8   0.6
0  162   0   0
9   6    12  0.5
0  162   0   0
10   6   11  0.7
0  162   0   0
11   6   10  0.6
0  162   0   0
12   6   10  0.5
0  162   0   0
```

```
13   6   10  0.6
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
0  900   0   0
```

ПР-1.3

```
Program Obuchtni_4_goda; {M-1.2, ris. 1.6}
{$N+}Uses crt, graph; const Np=20; dt=0.005; Mt=15; Mz=7;
var D: text; DV,MV,i,j,j1,F,SL,L1,LL: integer;
a,k,g1,g2,g3,SZ,SZ2,SZ3,t,tt: single;
no,Tm,L: array[0..50] of integer; S: array[0..50]of single;
Z,Z1,Z2,Z3: array[0..50]of single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); Assign(D,'E:\data2.txt');
Reset(D); g1:=3E-4; g2:=g1/2.7; g3:=g2/2.7;
For i:=1 to Np do Readln(D,no[i],Tm[i],L[i],S[i]);
Repeat t:=t+dt; j:=0; tt:=t; SL:=0;
Repeat inc(j); tt:=tt-Tm[j]; SL:=SL+L[j]; until tt<0;
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*SL),1);
For f:=1 to Np do begin k:=1; LL:=0;
If (f=no[j])and(f<>0) then LL:=L[j] else k:=0;
a:=0.3*(1-S[j]);
Z1[f]:=Z1[f]+k*(a*(LL-Z[f])-a*Z1[f])*dt-g1*Z1[f]*dt+g2*Z2[f]*dt;
Z2[f]:=Z2[f]+k*(a*Z1[f]-a*Z2[f])*dt-g2*Z2[f]*dt+g3*Z3[f]*dt;
Z3[f]:=Z3[f]+k*a*Z2[f]*dt-g3*Z3[f]*dt; Z[f]:=Z1[f]+Z2[f]+Z3[f];
end; For i:=1 to Np do Z[i]:=0;
SZ:=0; SZ2:=0; SZ3:=0; For i:=1 to 20 do begin
Z[i]:=Z1[i]+Z2[i]+Z3[i]; SZ:=SZ+Z1[i]+Z2[i]+Z3[i];
SZ2:=SZ2+Z2[i]; SZ3:=SZ3+Z3[i];
{circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*Z[i]),1);} end;
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*Z[7]),1);
{circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*L[j]),1);}
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*SZ),1);
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*SZ3),1);
circle(10+round(Mt*t),650-round(Mz*(SZ2+SZ3)),1);
circle(10+round(Mt*t),650,1);
until Keypressed; Close(D); CloseGraph; END.
```

Файл data2.txt

```
1   3   5   0.1
2   3   5   0.2
3   3   5   0.1
0   3   0   0
4   3   5   0.1
5   3   7   0.2
6   3   8   0.2
```

```
0   3   0   0
7   3   7   0.1
8   3   7   0.2
9   3   8   0.1
0   3   0   0
10  3   8   0.2
11  3   8   0.2
12  3   9   0.1
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
0   900 0   0
```

ПР-1.4

```
Program Izmenenie_coeff_zabivaniya_1;  {M-1.3, ris. 1.7}
{$N+}Uses crt, graph;
Const N=6; dt=0.001; Mt=20; t1: array[1..6] of
single=(3,6,9,12,15,18);
Var t,Z,g: single; i,s,Gd,Gm: integer;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd,Gm,''); t:=-3;
Repeat t:=t+dt;
For i:=1 to N do If (t>t1[i])and(s=i-1) then
begin s:=i; Z:=1; t:=t+1.5*exp(-s/5); end;
g:=0.002*exp(-s/1); Z:=Z-g*Z; circle(10+round(Mt*t),400,1);
circle(10+round(Mt*t),400-round(200*Z),1);
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

ПР-1.5

```
Program Izmenenie_coeff_zabivaniya_2; {M-1.3, ris. 1.8}
{$N+}Uses crt, graph;
Const N=13; dt=0.005; Mt=1; Var t,tt,g,t2,SZ,SZ1,ST,Sg: single;
i,j,Gd,Gm: integer; s: array[1..N] of integer;
Z: array[1..N] of single;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd,Gm,'');
Randomize; t:=-3;
Repeat t:=t+dt; tt:=tt-dt;
For i:=1 to N do If i<>j then Z[i]:=Z[i]-2E-3*exp(-s[i]/3)*Z[i];
If (tt<=0)and(t>50)and(t<350) then begin
j:=round(random(N*10)/10)+1;
If j>N then j:=1; Z[j]:=1; inc(s[j]);
tt:=1+2*exp(-s[j]/2); t2:=t; end;
SZ:=0; For i:=1 to N do SZ:=SZ+Z[i];  ST:=0;
For i:=1 to N do ST:=ST+(1+2*exp(-s[i]/2))/N; Sg:=0;
```

```
For i:=1 to N do Sg:=Sg+(2E-3*exp(-s[i]/3))/N;
If t<350 then line(10+round(Mt*t),480-round(30* SZ),
10+round(Mt*t2),480-round(30*SZ1));
If t<350 then circle(10+round(Mt*t),485,1);
circle(10+round(Mt*t),480-round(8E+4*Sg),1);
circle(10+round(Mt*t),480-round(80*ST),1);
circle(10+round(Mt*t),480-round(30*SZ),1);
circle(10+round(Mt*t),480,1); SZ1:=SZ;
circle(10+round(Mt*t),200-round(100*Z[2]),1);
until (KeyPressed){or(t>700)};
{writeln(t,'  Znaniya ',SZ,' zabivan ',Sg); readkey;} CloseGraph;
END.
```

ПР-1.6

```
Program Izmenenie_coeff_zabivaniya_3;  {M-1.3, ris. 1.11}
{$N+}Uses crt, graph; Const N=30; dt=0.003; Mt=0.5;
Var t,g,tt,SZ: single; i,j,Gd,Gm: integer;
s: array[1..N] of integer; Z: array[1..N] of single;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd,Gm,'');
Randomize; t:=-20; j:=1;
Repeat t:=t+dt; tt:=tt-dt;
If (tt<=0)and(((t>0)and(t<180))or((t>400)and(t<580))or((t>800)and
(t<980))) then begin
j:=round(random*N); If j>N then j:=N; If j<1 then j:=1;
{inc(j); If j>N then j:=1;} Z[j]:=1; inc(s[j]);
tt:=1+2*exp(-s[j]/2); end;
For i:=1 to N do Z[i]:=Z[i]-2E-3*exp(-s[i]/1.5)*Z[i]; SZ:=0;
For i:=1 to N do SZ:=SZ+Z[i];
circle(20+round(Mt*t),170-round(5*j),1);
circle(20+round(Mt*t),170,1);
circle(20+round(Mt*t),500-round(10*SZ),1);
circle(20+round(Mt*t),500,1);
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

ПР-1.7

```
Макрос для Excel {M-1.3, ris. 1.12}
Private Sub CommandButton1_Click()
N = 15: dt = 0.005: Dim s(15): Dim Z(15)
While t < 700
t = t + dt: tt = tt - dt: k = k + 1
For i = 1 To N
If i <> j Then Z(i) = Z(i) - 0.002 * Exp(-s(i) / 3) * Z(i)
Next i
If (tt <= 0) And (t > 50) And (t < 400) Then
j = Round(Rnd(1) * N): Z(j) = 1: s(j) = s(j) + 1
tt = 1 + 2 * Exp(-s(j) / 2): End If
SZ = 0: For i = 1 To N
SZ = SZ + Z(i): Next
ST = 0: For i = 1 To N
ST = ST + (1 + 2 * Exp(-s(i) / 2)) / N: Next
```

```
Sg = 0: For i = 1 To N
Sg = Sg + (0.002 * Exp(-s(i) / 3)) / N: Next
If k Mod 100 = 0 Then
Cells(k / 100, 1) = t: Cells(k / 100, 2) = SZ
Cells(k / 100, 3) = Sg: Cells(k / 100, 4) = ST
Cells(k / 100, 5) = Z(2): Cells(k / 100, 6) = Z(8): End If
Wend
End Sub
```

ПР-1.8

```
Макрос для Excel {M-1.3, ris. 1.13}
Private Sub CommandButton1_Click()
N = 40: dt = 0.005: Mt = 0.5
Dim s(40): Dim Z(40): t = -1: j = 1
While t < 1300
t = t + dt: tt = tt - dt: k = k + 1
f1 = (t > 0) And (t < 150): f2 = (t > 250) And (t < 400)
f3 = (t > 500) And (t < 650): f4 = (t > 750) And (t < 900)
If (tt <= 0) And (f1 Or f2 Or f3 Or f4) Then
j = Round(Rnd(1) * N): If j > N Then j = N
'j = j + 1: If j > N Then j = 1
Z(j) = 1: s(j) = s(j) + 1: tt = 1 + 2 * Exp(-s(j) / 2): End If
For i = 1 To N
Z(i) = Z(i) - 0.002 * Exp(-s(i) / 1.5) * Z(i): Next
SZ = 0: For i = 1 To N
SZ = SZ + Z(i): Next
If k Mod 100 = 0 Then
Cells(k / 100, 1) = t: Cells(k / 100, 2) = j
Cells(k / 100, 3) = SZ: End If
Wend
End Sub
```

ПР-1.9

```
Program Veroyatnostnaya_model; {M-1.4, ris. 1.15}
{$N+} uses crt, graph;
const M=4000; gz=0.001; gn=1E-5; Mz=0.8; Mt=0.2;
T1=500; T2=700;
var z,n,p: array[-1..M+1]of single; Gd,Gm,i,j,k,r,s: integer;
S1,S2,S3,S4,tt,sl,t,dt,a,a1,SZ,SN:single; Label mm;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'');
line(0,500,1500,500); Randomize;
Repeat k:=1;
If (tt<200)and((j=100)or(j=200)or(j=300)) then
   begin tt:=tt+dt; k:=0; end;
If tt>=200 then begin k:=1; tt:=0; j:=j+1; end;
If k=1 then begin
If j<101 then begin
If random(100)>40 then s:=j else begin
s:=round(j*random(100)/100-1); end; end;
If (j>100)and(j<201) then begin sl:=random(100);
k:=1; If sl>65 then s:=j else
```

```
If sl<20 then s:=round(100*random(100)/100-1) else
   s:=100+round((j-100)*random(100)/100-1); end;
If (j>200)and(j<301) then begin sl:=random(100);
If sl>60 then s:=j else begin
If sl<25 then s:=round(100*random(100)/100-1);
If (sl>24)and(sl<46) then s:=100+round(100*random(100)/100-1);
If (sl>45) then s:=200+round((j-200)*random(100)/100-1); end; end;
If (j>300)and(j<401) then begin sl:=random(100);
If sl>60 then s:=j else
If (sl>44) then s:=300+round((j-300)*random(100)/100-1) else
If (sl>25) then s:=200+round(100*random(100)/100-1) else
If (sl>5) then s:=100+round(100*random(100)/100-1) else
s:=round(100*random(100)/100-1); end;
a:=0.14*(1.3+z[s]+n[s]-exp(-Sz/100));
dt:=abs(0.1/(z[s]+n[s]+0.02)); n[s]:=n[s]+a*(1-n[s]);
If n[s]>1 then n[s]:=1; z[s]:=1-n[s]; If s=j then inc(j); end;
t:=t+dt; For i:=1 to M do { zabivanie }
If i<>s then begin z[i]:=(1-gz*dt)*z[i]; n[i]:=(1-gn*dt)*n[i];
end; SZ:=0; For i:=1 to M do SZ:=SZ+z[i]+n[i];
SN:=0; For i:=1 to M do SN:=SN+n[i]; S1:=0; S2:=0; S3:=0; S4:=0;
For i:=1 to M do begin
If i<101 then S1:=S1+z[i]+n[i];
If (i>100)and(i<201) then S2:=S2+z[i]+n[i];
If (i>200)and(i<301) then S3:=S3+z[i]+n[i];
If (i>300)and(i<401) then S4:=S4+z[i]+n[i]; end;
If k=1 then circle(round(Mt*t),500-round(s*Mz),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*SZ),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*S1),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*S2),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*S3),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*S4),1);
circle(round(Mt*t),150-round(100*(z[150]+n[150])),1);
circle(round (Mt*t),150-round(100*(n[150])),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*SN),1);
until (KeyPressed)or(j>M)or(t>8000);
For i:=1 to M do begin
If i<101 then S1:=S1+z[i]+n[i];
If (i>100)and(i<201) then S2:=S2+z[i]+n[i];
If (i>200)and(i<301) then S3:=S3+z[i]+n[i];
If (i>300)and(i<401) then S4:=S4+z[i]+n[i]; end;
ReadKey; CloseGraph;
writeln(S1:2:3,' ',S2:2:3,' ',S3:2:3,' ',S4:2:3);
END.
```

Глава 2.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИ СВЯЗАННОГО УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Знания, приобретаемые во время обучения, нельзя назвать бессмысленной или несвязанной информацией; они состоят из ЭУМ, многие из которых легко ассоциируются с уже имеющимися у ученика знаниями. По мнению С. Л. Рубинштейна, забывание осмысленного материала происходит значительно медленнее и не подчиняется закону Эббингауза. Он писал: «Если бы кривая Эббингауза выражала общий закон забывания, то педагогическая работа по закреплению знаний была бы сизифовым трудом» [17, с. 135]. Экспериментально установлено, что осмысленное запоминание имеет более высокую полноту, скорость, точность, прочность и примерно в 20 раз успешнее механического [17]. Эббингауз заучивал текст поэмы и список бессмысленных слогов того же объема; в результате он обнаружил, что усвоение осмысленной информации происходит примерно в 9 раз быстрее, а забывание – медленнее. Аналогичные результаты получили другие ученые, изучавшие скорость забывания понятий, имен, стихов, команд [21, с. 102]. В среднем через 3 месяца воспроизводится 47 % изученной осмысленной информации, через год 37 %, через два года – 29 %. Часть учебной информации является логически связанной (законы, теоремы, рассуждения и т. п.), а другая часть нет (даты, константы, некоторые факты, термины). Поэтому следует говорить не о забывании абсолютно осмысленного или бессвязного материала, а о закономерностях «забывания определенного количества качественно своеобразного материала» [17], характеризуемого долей логически связанной информации. В настоящей главе обсуждается моделирование усвоения и забывания осмысленной информации, представимой в виде системы связанных ЭУМ, образующих информационные блоки.

2.1. Модель понимания информационных блоков (М-2.1). Сообщаемая учителем информация дискретна, она состоит из отдельных блоков, которые делятся на элементы учебного материала (ЭУМ): понятия, формулы, иностранные слова и т. д. Обучение аналогично просмотру фильма, в ходе которого на экране последовательно сменяются блоки информации (текст, рисунки, формулы). Ученик понимает новый блок сообщаемой информации в том случае, если он понимает каждый входящий в него ЭУМ. Если ученик не усвоил какой-либо ЭУМ в блоке, то он не усваивает блок в целом (то есть не может решить задачу, доказать теорему, перевести предложение).

<u>Построение модели.</u> Пусть в блоке m ЭУМ, тогда время усвоения одного блока учеником не может превышать $t_1 = m / u$, где u – скорость сообщения информации учителем (число ЭУМ за 1 усл. ед. времени или УЕВ), иначе он не успеет понять следующий блок. Когда ученик понимает все m ЭУМ, он понимает весь блок. Вероятность понимания одного ЭУМ с одного раза $p = 0{,}7–0{,}9$. Если ученик не понял ЭУМ с первого раза, то он обращается к нему снова до тех пор, пока не поймет, либо пока не закончится время t_1, отводимое на понимание данного блока, и от учителя не придет следующий блок информации. Пусть все ЭУМ имеют информационный объем $I_1 = 1$. Время однократного обращения ученика к ЭУМ $t_{обр} = 1/\upsilon_M$, где υ_M – скорость его мыслительной деятельности в УЕВ$^{-1}$. Чем больше мыслительных действий совершает ученик за 1 УЕВ, тем быстрее он обдумает и поймет данный ЭУМ [66, 115].

Программа ПР–2.1, позволяющая изучить зависимость понимания и усвоения новой информации от скорости ее поступления, состоит из цикла по времени с шагом 0,01 [73]. Перед усвоением блока переменные EUM и $flag$ обнуляются, счетчик блоков N_bl увеличивается на 1, а также рассчитывается время $t_1 = m / u$, отводимое на усвоение одного блока. Количество ЭУМ в блоке m изменяется случайно: с вероятностью 0,3 $m = 4$; с вероятностью 0,3 $m = 6$; с вероятностью 0,4 $m = 5$. В среднем $m = 5$. Когда время работы ученика с одним

ЭУМ $k \cdot dt$ превышает значение $t_{обр} = 1/\upsilon_M$, программа моделирует случайный процесс понимания ЭУМ с вероятностью p. Если случайное x из интервала [0; 1] меньше p, это означает, что ученик понял ЭУМ и переменная EUM увеличивается на 1. Если при этом $EUM = m$, то есть ученик понял весь блок из m ЭУМ, то Pon_bl увеличивается на 1, флаг поднимается ($flag = 1$). Если ученик не успевает понять все m ЭУМ за время t_1, то считается, что он не понял данный блок. После этого ученик “изучает” второй блок информации и т. д. Так повторяется до тех пор, пока N_bl не достигнет 2000.

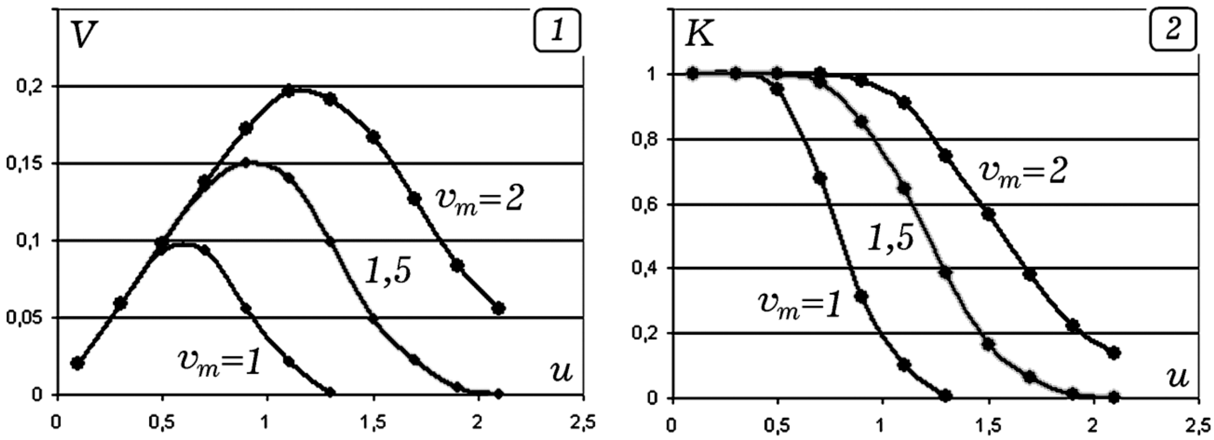


Рис. 2.1. Зависимость усвоения от скорости сообщения информации

<u>Результаты моделирования.</u> Программа выводит на экран количество сообщенных блоков N_bl, число понятых блоков Pon_bl и затраченное время Δt, что позволяет определить скорость сообщения $u' = N\_bl/\Delta t = u/5$ и скорость усвоения знаний $V = Pon\_bl/\Delta t$ (в блок/УЕВ). На рис. 2.1.1 представлены графики зависимости скорости усвоения V от скорости сообщения информации учителем u (в ЭУМ/УЕВ) при различных значениях скорости мышления ученика υ_M. Видно, что при небольшой скорости сообщения информации учителем скорость усвоения $V = dI_{уч}/dt = u' = u/5$. Ученик с данной скоростью совершения мыслительных операций успевает понять практически все сообщаемые учителем блоки. Дальнейшее увеличение скорости сообщения информации u приводит к тому, что ученик не успевает воспринять ее полностью: скорость

усвоения V достигает максимума, а затем снижается. Чем больше скорость мыслительных действий ученика υ_M, тем больше максимально возможная скорость усвоения V и соответствующая ей скорость сообщения информации u.

В книге [27, с. 108–157] рассмотрены различные математические модели $I_{уч} = \varphi(I)$, связывающие объемы усвоенного учеником $I_{уч}$ и изложенного на лекции материала I. Представленные на рис. 2.1.1 и 1.10.1 кривые похожи на графики функции $I_{уч} = \varphi(I)$ из [27]. Это объясняется тем, что $I = u'T = uT/5$, $I_{уч} = VT$, где T – длительность лекции. Коэффициент понимания материала равен отношению количества понятых блоков к общему количеству сообщенной информации: $K = I_{уч}/I$ или Pon_bl/N_bl. При малых скоростях передачи информации u ученик понимает практически все, что сообщает учитель, поэтому $K=1$. По мере увеличения u коэффициент понимания K плавно уменьшается до 0 (рис. 2.1.2). При увеличении скорости мыслительных действий υ_M скорость сообщения информации u учителем, соответствующая $K = 0{,}5$, растет [115]. График $K(u)$ соответствует графику зависимости эффективности обучения $K(N)$ от количества ЭУМ, изученных на уроке (рис. 1.10.1).

Используя электронные таблицы Excel, удалось достаточно точно подобрать функцию, соответствующую получившимся графикам. Для $\upsilon_M = 1{,}5$:

$$V = \frac{dI_{уч}}{dt} = \frac{u'}{1+\exp(a(u'-b))}, \quad u' = \frac{u}{5}, \; a = 27 \text{ УЕВ}, \; b = 0{,}24 \text{ 1/УЕВ}.$$

Здесь u' и V показывают количества переданных и усвоенных блоков за одну УЕВ. Если $u < 0{,}7$, то $1+\exp(a(u/5-b)) \approx 1$, скорость увеличения знаний ученика V (блок/УЕВ) равна скорости сообщения знаний учителем $u' = u/5$. Если $u > 1$, то V уменьшается, стремясь к 0 (рис. 2.1.1). По мере обучения увеличивается скорость мышления υ_M ученика, повышается способность усваивать новый материал. Скоростям υ_M = 1, 1,5, 2 соответствуют следующие значения параметров: $a=39$, $b=0{,}16$; $a=27$, $b=0{,}24$; $a=18$, $b=0{,}32$. Если υ_M увеличивается, то a уменьшается, а b возрастает [73]. Итак, ***при увеличении скорости сообщения учебной информации*** u***: 1) скорость ее усвоения (понимания)*** V ***сначала растет пропорционально*** u***, а затем снижается, стремясь к нулю; 2) эффективность сначала равна*** $K_{\max} = 1$***, а затем снижается до нуля.***

Возможна другая интерпретация получившихся результатов. Допустим, ученик решает задачи, каждая из которых требует выполнения m операций. Вероятность правильного выполнения каждой операции равна p. Если ученик не выполнил операцию с первого раза, то он делает вторую попытку и т. д., каждый раз затрачивая время $t_{обр} = 1/\upsilon_M$. На каждую задачу отводится фиксированное время $t_1 = m/u$. Графики на рис. 2.1.2 показывают зависимость вероятности решения задачи от скорости их поступления $u' = u/5$ (обратно пропорциональной t_1), при различных скоростях мышления υ_M.

2.2. Модель усвоения и забывания осмысленной информации (М-2.2). Сущность предлагаемого подхода состоит в том, что учебный материал разбивается на N отдельных идей (рассуждений, выводов формул). Каждая идея содержит M ЭУМ, расположенных упорядоченно и связанных между собой логическими связями [78–80]. Знание данного $(i, j)-$ЭУМ характеризуется числом $p_{i,j}$ из интервала [0; 1], равным вероятности правильного ответа на соответствующий элементарный вопрос (рис. 2.2). Вероятность воспроизведения учеником конкретной идеи равна произведению вероятностей $p_{i,j}$ воспроизведения всех ЭУМ, составляющих эту идею. Каждый ЭУМ также связан с некоторыми ЭУМ из других информационных блоков. Для простоты можно представить двумерную матрицу из N строк и M столбцов, в которой каждый элемент соответствует вероятности $p_{i,j}$ припоминания данного ЭУМ и связан с четырьмя соседними (рис. 2.2). Сила связей задается коэффициентами $c_{i,j}$.

Построение модели. Изучаемый материал будем характеризовать: 1) количеством идей (цепочек ЭУМ); 2) средней длиной идей L, то есть числом входящих в них ЭУМ; 3) долей D ЭУМ, которые известны ученику априори, то есть до обучения; 4) средним коэффициентом усвоения $a_{i,j}$ для каждого ЭУМ и его разбросом. Все ЭУМ можно разделить на две категории: 1) хорошо известные ученику до начала обучения, вероятность правильного ответа на них $p_{i,j} = 1$; 2) плохо известные ученику до начала обучения, $p_{i,j} = 0 - 0{,}1$. На рис. 2.2 показаны первый, второй, третий и девятый информационные блоки; ЭУМ первой категории (хорошо известные ученику до обучения) выделены жирной рамкой. Каждый ЭУМ связан с какими-то другими ЭУМ (коэффициент $c_{i,j}$ у некоторых связей может быть равен 0), а также с ЭУМ A, B, C, D, E, которые не входят в данную цепочку логических рассуждений. Эта связь со “сторонними” ЭУМ приводит к повышению коэффициента усвоения $a_{i,j}$ данного ЭУМ; ее можно учесть, задавая $a_{i,j}$ случайным образом из некоторого интервала.

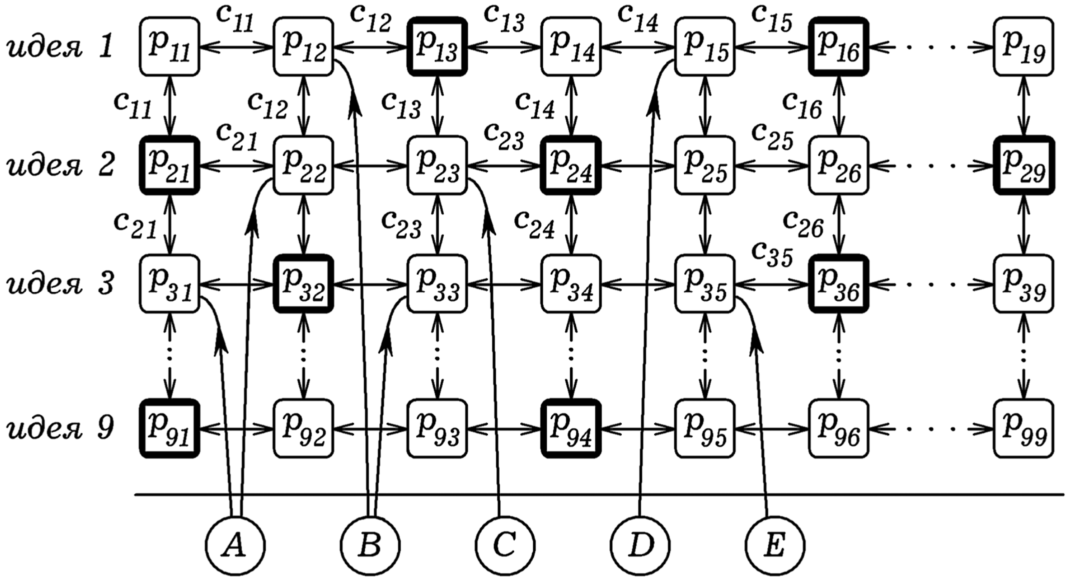


Рис. 2.2. Осмысленные знания как система связанных между собой ЭУМ

Будем плохо усвоенные ЭУМ ($p_{i,j} < 0{,}33$) изображать синими клетками, хорошо усвоенные ($p_{i,j} > 0{,}67$) – красными, а все остальные ЭУМ – зелеными (рис. 2.3). При обучении синие клетки превращаются в зеленые, а зеленые – в белые; среднее значение p всех вероятностей $p_{i,j}$ растет. Чем больше в строке (информационном блоке) красных и зеленых клеток, тем выше вероятность того, что ученик усвоил данный информационный блок и сумеет выполнить соответствующую последовательность рассуждений самостоятельно. Чем больше идей усвоил ученик, тем больше у него количество знаний Zn, тем выше вероятность воспроизведения всего учебного материала.

Важно, что знание одного ЭУМ приводит к более легкому усвоению и припоминанию другого связанного с ним ЭУМ. При обучении увеличиваются вероятности $p_{i,j}$ и коэффициенты связи $c_{i,j}$, ученик легко воспроизводит всю последовательность рассуждений (весь информационный блок). Можно провести аналогию с моделью ферромагнетика Изинга. Совокупность изученных ЭУМ в простейшем случае образует прямоугольную матрицу, похожую на систему атомов, расположенных в узлах кристаллической решетки; часть ЭУМ хорошо известны, а другие неизвестны ученику (атомы сориентированы по полю или против поля). При плавном увеличении внешнего магнитного поля (обучении) большинство атомы скачком переориентируются по полю (увеличивается $p_{i,j}$ для каждого ЭУМ). При этом на каждый атом (ЭУМ) влияют соседние атомы (то есть другие связанные с ним ЭУМ).

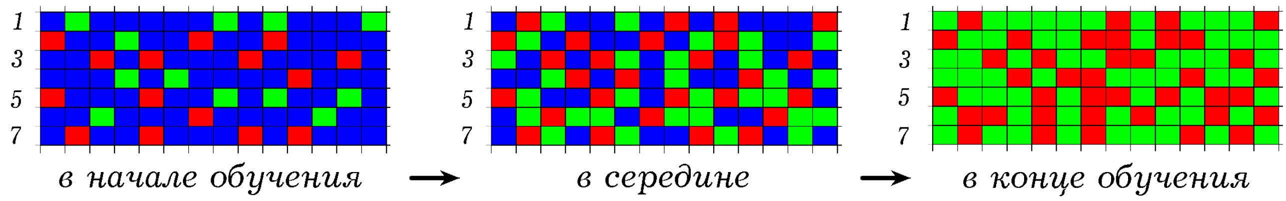


Рис. 2.3. Изменения матрицы ЭУМ в процессе обучения

Чтобы учесть тот факт, что некоторые ЭУМ хорошо известны ученику еще до обучения, создается матрица $d_{i,j}$, элементы которой с заданной вероятностью D равны 1, а с вероятностью $(1-D)$ – нулю. Пусть во время обучения ученик выполняет последовательность однотипных учебных заданий, последовательно повторяя идею за идеей, ЭУМ за ЭУМ. Известно, что при изучении логически связанного материала знание одного ЭУМ помогает ученику изучить или вспомнить знание другого, связанного с ним ЭУМ. При изучении j-го ЭУМ из i-й идеи в течение времени Δt вероятность правильного ответа ученика на соответствующий элементарный вопрос растет по закону:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k} + a \cdot (1 - p_{i,j}^{k})\Delta t + c_{i,j}(p_{i-1,j}^{k} + p_{i+1,j}^{k} + p_{i,j-1}^{k} + p_{i,j+1}^{k})\Delta t.$$

Здесь $c_{i,j}$ – коэффициент связи, позволяющий учесть влияние других ЭУМ на усвоение (i,j)–го ЭУМ. Для простоты будем считать все коэффициенты связи $c_{i,j}$ одинаковыми и постоянными. Модель учитывает, что время работы t_p ученика с (i,j)–ЭУМ при увеличении вероятности правильного ответа $p_{i,j}$ уменьшается: $t_p = \Delta t(1 + 3\exp(-3p_{i,j}))$, где Δt – шаг по времени. Если в данный момент ученик не оперирует с (i,j)–ЭУМ, то из-за забывания вероятность $p_{i,j}$ за время Δt снижается по экспоненциальному закону (программа ПР–2.2).

Для оценки знаний обучаемого и построения графика $Zn(t)$ необходимо промоделировать многократное периодическое “тестирование” ученика через равные промежутки времени. Знание учеником i-й идеи определяется так: ПЭВМ моделирует ответ ученика, в котором он последовательно излагает 1-й ЭУМ, 2-й ЭУМ, …, L–й ЭУМ i-й цепочки в течение заданного времени $t_{om} = 1{,}3L \cdot \Delta t$. Правильный ответ на вопрос, соответствующий j-му ЭУМ из i-й идеи, моделируется как случайный процесс, происходящий с вероятностью $p_{i,j}$: генерируется случайная величина x, равномерно распределенная в интервале [0; 1], и проверяется условие: $x_s < p_{i,j}^{k} + c_{i,j}(p_{i-1,j}^{k} + p_{i+1,j}^{k} + p_{i,j-1}^{k} +$ $+ p_{i,j+1}^{k})$. Если условие выполняется, то считается, что ученик ответил правильно, а иначе – нет. При неправильном ответе ученик снова пытается воспроизвести (i,j)–ЭУМ, а при правильном – переходит к следующему ЭУМ из той же идеи. Если все L ЭУМ i-й цепочки выполнены правильно за время ответа

$t_{от}$, то считается, что ученик знает i-й информационный блок. Количество знаний $Zn(t)$ учащегося равно числу идей (информационных блоков), которые он сумел воспроизвести. При таком "тестировании" знания ученика не увеличиваются, вероятности $p_{i,j}$ остаются неизменными.

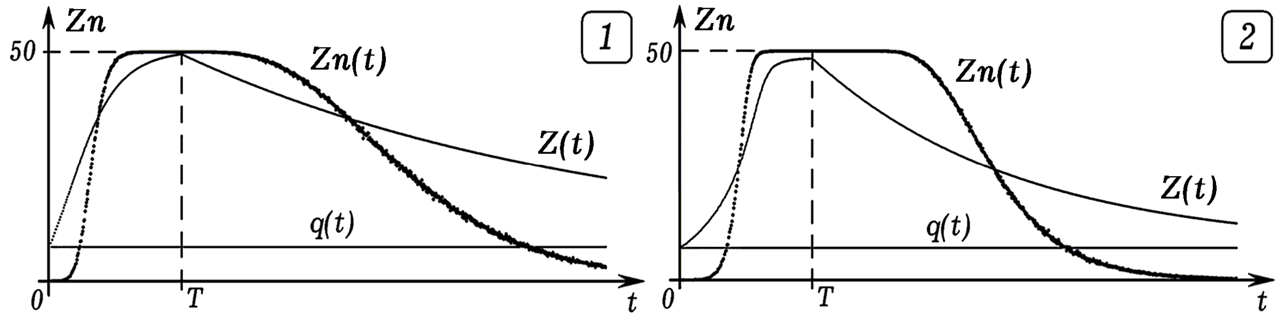


Рис. 2.4. Результаты компьютерного моделирования усвоения и забывания

Результаты моделирования. Используется программа ПР–2.2. На рис. 2.4.1 и 2.4.2 изображены графики $Z(t)$ и $Zn(t)$ для двух случаев: 1) связь между ЭУМ отсутствует ($c=0$, $a=1{,}6$); 2) ЭУМ связаны друг с другом ($0<c<1$, $a=0{,}4$). Считается, что до обучения 10 % рассматриваемых ЭУМ известны ученику, то есть $D=0{,}1$. В обоих случаях во время обучения ($0<t<T$) происходит плавный рост $p(t)$ и скачкообразное увеличение знаний $Zn(t)$, означающее резкий переход ученика в другое состояние. Отличие в том, что при учете связей между ЭУМ график $Z(t)=p(t)+q(t)$ прогнут в другую сторону, скачок понимания происходит более резко. Из результатов моделирования следует: 1) даже при отсутствии связей между ЭУМ обучение приводит к плавному повышению $Z(t)$, что вызывает скачок понимания учебного материала (график $Z(t)$); 2) наличие связей с коэффициентом $c_{i,j}$ повышает вероятность воспроизведения учеником данного информационного блока и делает этот скачок более резким; 3) после окончании обучения средний уровень усвоения изученных ЭУМ $p(t)$ (или $Z(t)$) уменьшается по экспоненте, а уровень знания изученного материала $Zn(t)$ сначала практически не уменьшается, а затем быстро снижается.

Усвоение и забывание логически связанной информации описывается логистическим законом: 1) усвоение: $dZn/dt = \alpha(I_0 - Zn)Zn$, где I_0 – число сообщенных блоков; 2) забывание: $B = Zn^0/100$, $x^0 = 100$, $dx/dt = -\gamma(100{,}5 - x)x$, $Zn(t) = B \cdot x(t)$. Если учесть, что при обучении увеличиваются коэффициенты связи $c_{i,j}$, то переход от незнания к знанию будет еще более резким.

Предложенная модель изучения системы логически связанных ЭУМ позволяет объяснить следующие закономерности: ***1) плавное повышение знаний отдельных ЭУМ приводит к резкому скачку уровня понимания изучаемой проблемы, после которого ученик может решать соответствующие учебные задачи за счет понимания-воспоминания; 2) монотонное забывание отдельных ЭУМ вызывает скачкообразное понижение уровня знаний; 3) усвоение и забывание происходят по логистическому закону.*** Когда ученик усваивает учебный материал, он может воспроизвести все составляющие его идеи. Чтобы воспроизвести конкретную идею, ученик должен усвоить все входящие в нее ЭУМ. Совместное изучение ЭУМ, входящих в данный информационный блок, приводит к резкому повышению вероятности понимания и усвоения идеи, решения соответствующей задачи.

2.3. Модель понимания, усвоения и забывания текстовой информации (М-2.3). Обычно обучение происходит в результате восприятия речевого сообщения или чтения учебного текста. Важным условием усвоения учебного материала является его понимание: ученик должен понять значение каждого нового слова, каждого предложения и всего текста. Происходящее осмысление сообщаемой информации сопровождается ее перекодированием или “переводом” на язык известных ученику понятий и категорий, встраиванием новых идей и понятий в уже существующую систему знаний ученика [3, 4]. Подобная ситуация возникает при: 1) восприятии речевого или текстового сообщения на родном или иностранном языке, которое содержит научные термины, новые для ученика слова и т. д.; 2) анализе математических, химических или иных формул, а также рисунков, состоящих из похожих элементов (графические модели молекул, геометрические построения, схемы электрических цепей); 3) изучении методов решения задач по одной теме. Перечисленные варианты охватывают практически все способы передачи знаний от учителя или учебника к ученику. Во всех случаях речь идет о понимании совокупности информационных блоков (высказываний, идей), каждый из которых содержит определенное количество элементов учебного материала (ЭУМ): символов, терминов, слов [78–80].

Развитие у учеников способности понимания (то есть перекодирования) учебного материала в чем-то аналогично формированию умения переводить иностранные тексты. Каждое предложение состоит из слов (понятий), которые связаны друг с другом ассоциативными или логическими связями. Предположим, что ученик хорошо разбирается в грамматике и синтаксисе. Чтобы перевести текст, школьник должен вспомнить значение каждого слова по отдельности и суметь понять смысл каждого предложения за ограниченное время.

Создадим ***модель усвоения и забывания определенного набора иностранных слов*** (понятий, ЭУМ) и формирования навыков перевода в результате чтения учебных текстов. Она должна соответствовать фактам: 1) в процессе перевода текстов ученик запоминает используемые слова, средний уровень их знаний повышается; 2) во время обучения происходит качественный скачок: ученик внезапно начинает хорошо переводить тексты, в которых используется данный набор слов; 3) часто ученик не в состоянии сразу перевести какое-то слово, но может его вспомнить по ассоциации; 4) после прекращения чтения текстов происходит обратный переход: умение ученика переводить (то есть понимать) текстовые сообщения сначала остается высоким, а затем постепенно снижается. Обобщая, эту модель можно также назвать ***моделью формирования и утрачивания навыка перекодирования информации.***

Построение модели. Рассмотрим множество $\Omega = \{C_1, C_2, ..., C_N\}$, содержащее N иностранных слов (понятий, величин, формул, символов, ЭУМ); доля d $(0 \le d \le 1)$ всех слов хорошо знакома ученику. Обучение сводится к переводу различных текстов, содержащих слова из Ω и образующих множество $\Psi = \{T_1, T_2, ...\}$. Его цель состоит в пополнении словарного запаса и формировании у ученика способности понимать тексты из Ψ, а не в усвоении содержащейся в этих текстах информации. Текст состоит из информационных блоков (предложений), содержащих L слов (ЭУМ) из множества Ω. Рассмотрим две ситуации, когда слова используются: 1) с равными вероятностями $p' = 1/N$; 2) в соответствии с законом Ципфа: вероятность p_i' использования любого слова длинного текста обратно пропорциональна его рангу i в списке слов, упорядоченных по убыванию p_i', то есть $p_i' = A/i$, где A определяется из условия $p_1' + p_2' + p_3' + ... p_N' = 1$.

Знание i-го слова характеризуется вероятностью p_i его правильного перевода учеником; все p_i образуют одномерную матрицу. Средний уровень владения данной совокупностью слов из Ω равен среднему арифметическому: $Z = p_{cp} = (p_1 + p_2 + ... + p_N)/N$. Если ученик владеет грамматикой и синтаксисом языка, то вероятность безошибочного понимания конкретного предложения (информационного блока) примерно равна произведению вероятностей перевода всех входящих в него слов.

Каждое слово из Ω может образовывать словосочетание с некоторыми словами и/или состоять с ними в ассоциативной связи (рис. 2.5.1). Коэффициенты связи $s_{i,j}$ $(0 \le s_{i,j} \le 1,\ s_{i,j} = s_{j,i})$ образуют двумерную матрицу N x N; если между какими-то двумя словами связь отсутствует, то $s_{i,j} = 0$. До начала обучения при $d = 0$ ученик не знает ни одного слова ($p_i = 0$), связи отсутствуют ($s_{i,j} = 0$). Чтение текстов приводит к увеличению знаний каждого слова, образованию и упрочнению ассоциативных связей; при этом вероятности p_i и коэффициенты связи $s_{i,j}$ растут до 1.

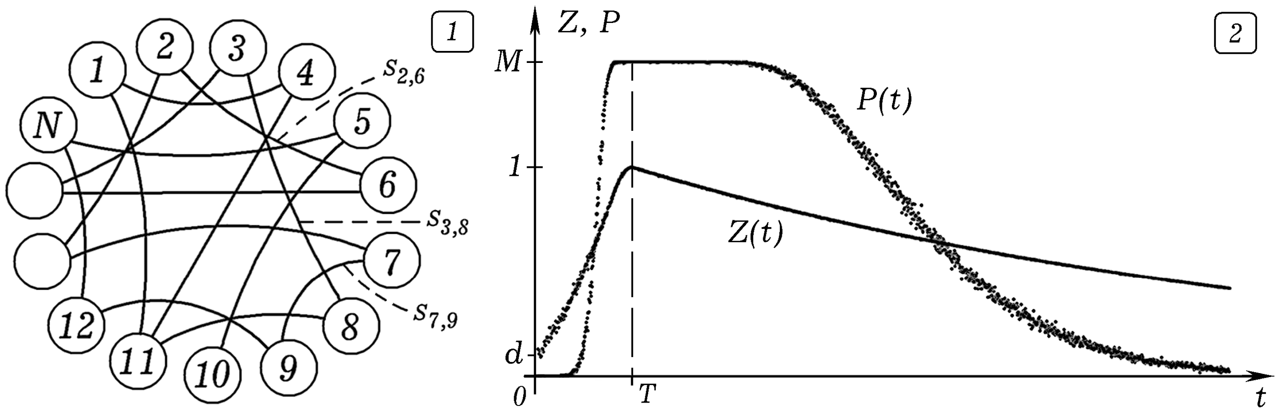


Рис. 2.5. Слова и связи между ними. Результаты моделирования

Ученик, встречая слово C_i (ЭУМ), вспоминает содержащее его словосочетание или переводит его по ассоциации с другим похожим на него словом (ЭУМ). Чем больше словосочетаний и ассоциаций ему известно, тем выше вероятность правильного перевода слова C_i. Вероятность того, что ученик вспомнит словосочетание C_iC_j и/или C_jC_i тем больше, чем выше p_j и $s_{i,j}$. Для слова C_i найдется такое другое слово C_j из Ω, что произведение $s_{i,j}p_j$ будет максимальным. Если в предложении i-е слово стоит после k-го слова, то вероятность понимания C_i зависит от произведения $s_{i,k}p_k$. При правильном переводе i-го слова повышается p_i, коэффициент связи с предыдущим словом $s_{i,k}$ и коэффициент активизированной связи со j-м словом $s_{i,j}$. Слово C_i не всегда образует словосочетание обязательно с предыдущим словом, но это не так важно. Оно может быть связано с каким-то другим словом из того же предложения.

Компьютерная программа, использующаяся для моделирования обучения, "формирует текст", содержащий $M = 20$ предложений, состоящих из $L = 10$ слов из Ω ($N = 500$). Слова входят в тексты с вероятностью p_i'. Так как все слова пронумерованы, то получаются последовательности типа "12-134-45-

97-…-368”. На чтение и перевод каждого слова затрачивается время $t_{ni} = (1 + 3\exp(-3p_i))\Delta t$, которое с ростом вероятности p_i уменьшается. Встретив слово в первый раз, ученик пользуется электронным словарем, в третий раз – вспоминает по памяти, в пятый раз – читает слово и сразу понимает его, не переводя на родной язык. При этом увеличение вероятности p_i знания i-го слова равно сумме: 1) приращения p_i на величину $a(1-p_i)\Delta t$ за счет повторения слова; 2) произведения вероятности знания предыдущего слова C_k и коэффициента связи с ним $s_{i,k}p_k$; 3) наибольшей вероятности образования словосочетания с любым другим j-м словом $s_{i,j}p_j$. Можно записать:

$$p_i^{t+1} = p_i^t + a(1-p_i^t)\Delta t + a(s_{i,k}p_k^t + s_{i,j}p_j^t)\Delta t.$$

Одновременно с этим растут коэффициенты используемых связей $s_{i,j}$ и $s_{i,k}$:

$$s_{i,j}^{t+1} = s_{i,j}^t + a_1(1-s_{i,j}^t)\Delta t, \qquad s_{i,k}^{t+1} = s_{i,k}^t + a_2(1-s_{i,k}^t)\Delta t.$$

После окончания обучения начинается забывание. Вероятности p_i и коэффициенты связей $s_{i,j}$ уменьшаются по экспоненциальному закону:

$$p_i^{t+1} = p_i^t - gp_i^t\Delta t,\ \ p_i^{t+1} = p_i^t\exp(-g\Delta t),\ \ s_{i,j}^{t+1} = s_{i,j}^t - gs_{i,j}^t\Delta t,\ \ s_{i,j}^{t+1} = s_{i,j}^t\exp(-g\Delta t),$$

где g – коэффициент забывания.

Для оценки уровня понимания $P(t)$ программа моделирует многократное “тестирование” ученика через равные промежутки времени. Понимание учеником предложения “12-134-45-97-…-368” проверяется так: компьютер моделирует ответ ученика, в котором он последовательно “переводит” 12-е слово, 134-е слово, …, 368-е слово в течение времени ответа $t_{om} = 1{,}3L \cdot \Delta t$. Правильный перевод i-го слова моделируется как случайный процесс, происходящий с вероятностью p_i, на который влияет: 1) знание учеником данного слова; 2) степень связи с предыдущим словом в предложении; 3) хорошее знание словосочетания с другим словом из Ω. Для этого генерируется случайная величина x из интервала [0; 1] и проверяется условие: $x_s < p_i^t + b(s_{i,k} p_k^t + s_{i,j} p_j^t)$. При его выполнении считается, что ученик перевел слово правильно. При неправильном ответе ученик повторно пытается перевести i-е слово, а при правильном – переходит к следующему слову в предложении. Если все L слов $r-$го предложения переведены правильно за время ответа t_{om}, то считается, что ученик правильно понял r – е предложение. Коэффициент понимания $P(t)$ данных текстов равен отношению числа правильно переведенных предложений к их общему числу. При таком “тестировании” вероятности p_i остаются неизменными, $P(t)$ (или $Zn(t)$) не растет.

Результаты моделирования. На рис. 2.5.2 показаны графики $Z(t) = p_{cp}(t)$ и $P(t) = Zn(t)$ для случая, когда слова используются с равными вероятностями $p' = 1/N$. Во время обучения T график $Z(t)$ растет почти пропорционально времени до 1. Если вероятность использования слов подчиняется закону Ципфа, то $Z(t)$ увеличивается сначала быстро, а затем медленно (рис. 2.6.1 и 2.6.2), что приблизительно соответствует уравнению $Z(t) = 1 - \exp(-bt)$. Это объясняется тем, что, когда p_i различны, ученик сначала хорошо запоминает часто используемые слова, а затем все остальные. Во время обучения $(0 \le t \le T)$ происходит повышение средней вероятности $Z(t) = p_{cp}(t)$ (т. е. знаний слов) от $d = 0{,}05$ – 0,4 до 1 и растет понимание $P(t)$ предъявляемых ученику текстов. После обучения уровень Z знаний слов из множества Ω снижается по экспоненциальному закону, уровень понимания $P(t)$ текстов, составленных из этих слов, какое-то время остается высоким, а затем плавно уменьшается до нуля. При увеличении коэффициента забывания g уровень понимания $P(t)$ снижается быстрее. Обучение и тестирование моделируются как случайные процессы, поэтому вместо непрерывных графиков получаются множества точек.

На рис. 2.6.1–2.6.5 представлены получающиеся графики формирования и утрачивания умения понимать тексты в следующих случаях: 1) доля известных слов $d = 0{,}2$, время обучения $T =$ 25 УЕВ, коэффициент забывания $g = 3 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2.6.1); 2) $d = 0{,}35$, $T = 25$ УЕВ, $g = 8 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2.6.2); 3) время обучения мало, поэтому ученик не успевает хорошо запомнить все слова и после окончания обучения быстро утрачивает способность понимать тексты (рис. 2.6.3 и 2.6.4); 4) два занятия длительностью $T_1 =$ 25 УЕВ и $T_2 = t_3 - t_2 = 10$ УЕВ разделены перерывом 5 УЕВ (рис. 2.6.5).

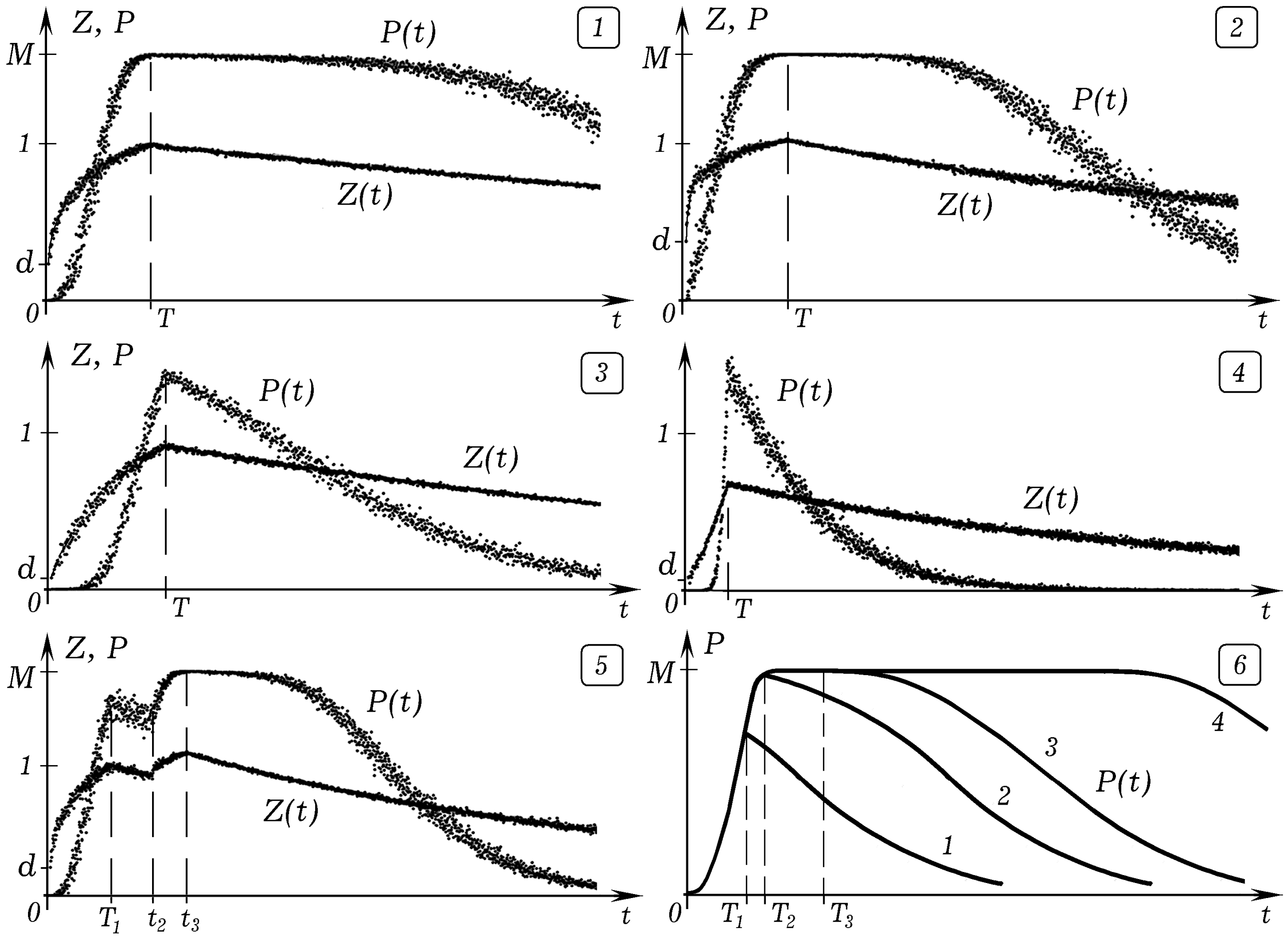


Рис. 2.6. Зависимости знаний слов $Z(t)$ и понимания текстов $P(t)$ от времени

Во всех ситуациях при обучении $Z(t)$ возрастает, а после окончания обучения – уменьшается, стремясь к d (ученик забывает все изученные слова). При достаточно продолжительном обучении способность понимать текст $P(t)$ (равное числу понятых предложений) увеличивается, достигая M. После окончания обучения ученик какое-то время сохраняет способность понимать тексты из Ψ, затем $P(t)$ медленно уменьшается до 0 по логистическому закону. Если время обучения T мало, то $Z(t)$ не успевает достичь 1 (рис. 2.6.3 и 2.6.4), поэтому $P(t)$ в конце обучения не доходит до M; после окончания обучения оно убывает по почти экспоненциальному закону.

Из рис. 2.6.6 видно, что во всех случаях происходит скачок понимания $P(t)$. Он обусловлен тем, что учебный материал состоит из предложений (информационных блоков), содержащих L ЭУМ. Чтобы перевести (то есть понять) конкретное предложение, ученик должен вспомнить значение всех входящих в него слов за определенное время. При работе с текстом происходит совместное изучение входящих в него слов (ЭУМ), растет средний уровень знаний Z слов из Ω и сила ассоциативных связей $s_{i,j}$ между ними. Все это способствует более легкому их запоминанию и воспроизведению. Итак, ***если учебный материал состоит из информационных блоков (или задач по одной теме), содержащих достаточно большое количество ЭУМ, то постепенное изучение отдельных ЭУМ приведет к резкому повышению понимания учебного материала (или умения решать задачи).***

Рассмотренная модель формирования и потери умения понимать тексты в процессе их чтения позволяет получить кривую зависимости уровня понимания $P(t)$ от времени при обучении и после его окончания (рис. 2.6.6). График $P(t)$ может быть приближенно аппроксимирован двумя логистическими кривыми (возрастающей и убывающей). Если время обучения T_1 мало, получается кривая 1; при достаточно длительном обучении (длительность T_3) получается кривая 3 или 4: ученик запоминает изученный материал надолго, у него формируются соответствующие умения. Результаты моделирования распространяются и на другие ситуации, связанные с пониманием и перекодированием речевой, текстовой, символьной и графической информации из Ψ. Во всех этих случаях обучение вызывает резкое повышение способности ученика понимать сообщаемую ему информацию, в которой используются ЭУМ из заданного множества Ω. Повышение уровня знаний всех ЭУМ приводит к пониманию всего предложения, а забывание хотя бы одного ЭУМ вызывает неспособность ученика понять смысл данного информационного блока. Чтобы у ученика сформировалась способность понимать тексты из Ψ, время обучения T должно быть достаточно большим. Сразу после окончания обучения уровень понимания $P(t)$ какое-то время остается высоким, а затем, по мере забывания отдельных ЭУМ, плавно снижается, стремясь к нулю.

2.4. Модель усвоения и забывания осмысленной информации, учитывающая встречаемость ЭУМ в повседневной жизни (М-2.4).

Учебный материал будем рассматривать как совокупность из N отдельных идей или информационных блоков (рассуждений, выводов формул и т. п.). Каждая идея является системой, состоящей из последовательности ЭУМ длиной l_i $(i = 1,..., N)$, связанных между собой логическими связями (рис. 2.7). Ученик не просто пытается запомнить совокупность отдельных ЭУМ (понятий, формул), он стремится усвоить последовательность рассуждений (вывод формулы и т. д.). Все ЭУМ делятся на две категории: 1) встречающиеся и используемые в последующей жизни и обучении; 2) не встречающиеся в дальнейшем.

Построение модели. Изучаемый материал можно задать следующими характеристиками [78–80]: 1) количество идей (цепочек ЭУМ); 2) средняя длина идей l_{cp} и ее разброс Δl; 3) доля D ЭУМ, используемых учеником в дальнейшей деятельности; 4) средний коэффициент усвоения a для каждого ЭУМ. Знание данного $(i, j) -$ЭУМ определяется числом $p_{i,j}$ из интервала [0; 1], которое показывает вероятность правильного ответа на соответствующий элементарный вопрос (рис. 2.7). Пусть $l_{cp} = 10$, разброс $\Delta l = 2$, тогда длина цепочки задается случайным образом $l_i = 8 + Round(4x_s)$; здесь и в дальнейшем x_s – случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0; 1]. За один шаг по времени Δt ученик может изучить 1 ЭУМ. При изучении j-го ЭУМ из

i-й идеи в течение времени Δt, вероятность правильного ответа ученика на соответствующий элементарный вопрос растет по закону:

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k} + a(1 - p_{i,j}^{k})\Delta t, \ (a = 0{,}1);$$

счетчик обращений к данному (i, j) – ЭУМ $s_{i,j}$ увеличивается на 1. С ростом количества обращений $s_{i,j}$ к данному ЭУМ коэффициент забывания уменьшается по закону: $g_{i,j} = 3 \cdot 10^{-4} + 0{,}05 \exp(-0{,}001 \cdot s_{i,j})$. Если ученик не работает с (i, j) – ЭУМ, то из-за забывания знание этого ЭУМ за время Δt уменьшается так: $p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k}(1 - g_{i,j}\Delta t)$. Чтобы учесть встречаемость некоторых ЭУМ в повседневной жизни, создается матрица $d_{i,j}$, элементы которой с заданной вероятностью D равны 1, а с вероятностью $(1 - D)$ – нулю. Во время и после обучения в течение промежутка Δt ученик с вероятностью $q = 0{,}025$ обращается к тому или иному ЭУМ с $d_{i,j} = 1$, используя его в своей деятельности; при этом $s_{i,j}$ увеличивается на 1, а $p_{i,j}^{k}$ возрастает на $a(1 - p_{i,j}^{k})\Delta t$. Суммы вероятностей $p_{i,j}^{k}$ для всех ЭУМ с $d_{i,j} = 1$ и $d_{i,j} = 0$ обозначим Z_1 и Z_2 соответственно. Суммарное количество знаний всех ЭУМ $Z_{12} = Z_1 + Z_2$.

	ЭУМ 1	ЭУМ 2	ЭУМ 3	ЭУМ 4	ЭУМ 5	ЭУМ 6	ЭУМ 7	ЭУМ 8	ЭУМ 9	ЭУМ 10	ЭУМ 11	ЭУМ 12
Идея 1	0,56	0,78	0,36	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27				
Идея 2	0,36	0,25	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27		
Идея 3	0,56	0,49	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27			
Идея 4	0,78	0,38	0,33	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27	
Идея 5	0,81	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27			
Идея 6	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27				
Идея 7	0,43	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27			
Идея 8	0,93	0,27	0,36	0,42	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27
Идея 9	0,56	0,25	0,56	0,61	0,49	0,38	0,94					
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Идея N	0,36	0,38	0,56	0,78	0,25	0,61	0,49	0,38	0,94	0,27		

Рис. 2.7. Осмысленные знания как совокупность N цепочек из l_i ЭУМ

Состояние ученика в каждый момент времени определяется матрицей вероятностей $p_{i,j}$, где $j = 1, 2, \ldots, l_i$; значение $p_{i,j}$ показывает вероятность знания j-го ЭУМ из i-й цепочки (рис. 2.7). Для оценки знаний обучаемого и построения графика $Zn(t)$ программа моделирует многократное “тестирование” ученика на каждом временном шаге (то есть в моменты $t_k = k\Delta t$). Знание учеником i-й идеи определяется так: ПЭВМ моделирует ответ ученика, в котором он последовательно излагает 1-й ЭУМ, 2-й ЭУМ, … l_i –й ЭУМ i-й цепочки в течение заданного времени $t_{om} = 1{,}3 \cdot l_i \cdot \Delta t$. Правильный ответ на вопрос, соответствующий j-му ЭУМ из i-й идеи, моделируется как случайный процесс, происходящий с вероятностью $p_{i,j}$: если $x_s < p_{i,j}$, то ученик ответил правильно, а иначе – нет. При неправильном ответе ученик снова пытается показать знание данного ЭУМ, а при правильном – переходит к следующему ЭУМ. Если все l_i ЭУМ i-й цепочки выполнены правильно за время t_{om}, то считается, что ученик знает i-й информационный блок. Количество знаний $Zn(t)$ учащегося равно числу идей (информационных блоков), которые он может воспроизвести. При таком “тестировании” знания ученика не увеличиваются, вероятности $p_{i,j}$ остаются неизменными.

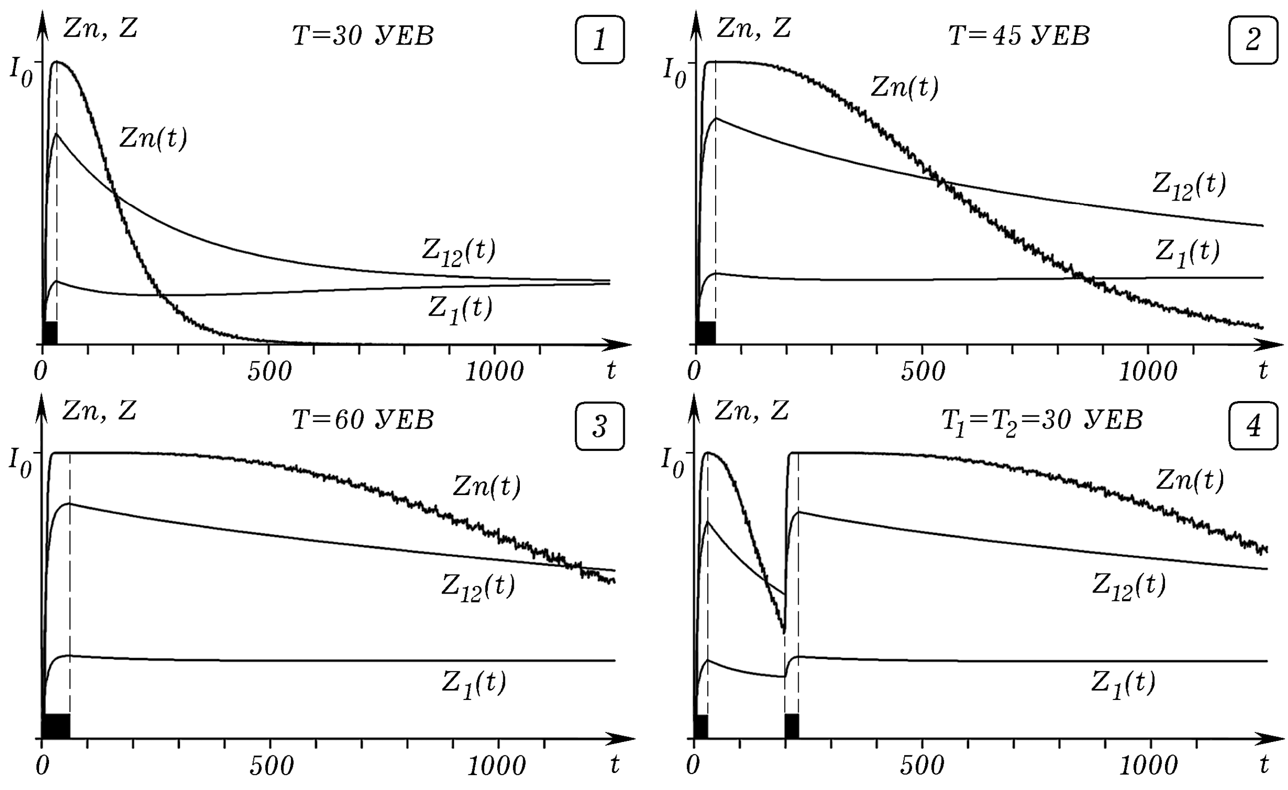


Рис. 2.8. Моделирование усвоения и забывания осмысленной информации

Результаты моделирования. На рис. 2.8.1–2.8.4 представлены результаты моделирования усвоения и забывания осмысленной информации при $D = 0{,}33$ и различных длительностях занятия T: 1) $T = 30$ УЕВ; 2) $T = 45$ УЕВ; 3) $T = 60$ УЕВ; 4) в течение двух занятий по 30 УЕВ. Из графиков $Zn(t)$ видно, что ***после окончания обучения количество знаний уменьшается по логистическому закону.*** При этом можно выделить три фазы забывания: 1) количество знаний ученика сначала остается практически постоянным, превышая $0{,}9I_0$ $(I_0 = N)$, то есть он может воспроизвести почти все изученные идеи, решить все задачи и т. д.; 2) количество знаний убывает почти пропорционально времени; 3) ученик помнит не более $0{,}1I_0$, то есть не может воспроизвести изученные идеи, но при этом хорошо помнит отдельные ЭУМ, с которыми он встречался или использовал в своей деятельности. Как видно из графиков, ***при*** $t \to \infty$ ***количество не использующихся в жизни знаний*** $Z_2 = Z_{12} - Z_1$ ***стремится к нулю тем быстрее, чем меньше время обучения*** T. Объем использующихся в повседневной жизни знаний Z_1 после окончания обучения уменьшается значительно медленнее или остается постоянным.

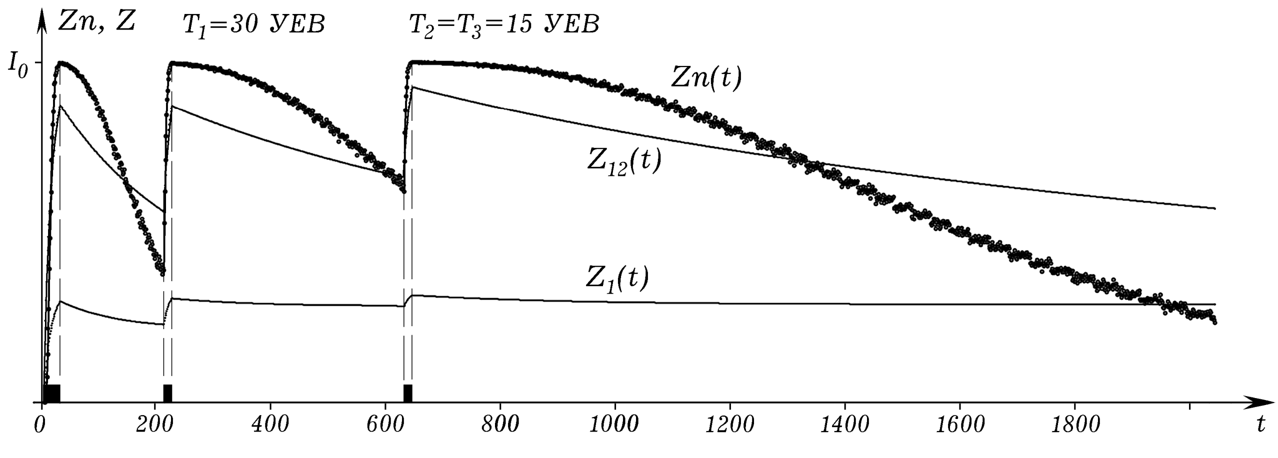


Рис. 2.9. Моделирование обучения в течение трех занятий

При изучении одного и того же материала в течение двух занятий (рис. 2.8.4) после первого занятия $(30 < t < 200)$ количество знаний $Zn(t)$ быстро снижается вследствие забывания неиспользуемых ЭУМ (т. е. уменьшения Z_2). ЭУМ, используемые учеником ежедневно, забываются медленно; Z_1 снижается незначительно. Во время второго занятия все ЭУМ запоминаются еще прочнее (число обращений $s_{i,j}$ растет, скорость забывания уменьшается). При $t > 230$ происходит забывание, Z_2 уменьшается медленнее, чем после первого занятия. Первая фаза забывания $(Zn(t) > 0{,}9I_0)$ длится дольше ($\approx$550 УЕВ). На рис. 2.9 приведены результаты моделирования в случае трех занятий.

Практическое значение имеет зависимость времени $t_З$ забывания половины изученной информации (период “полузабывания”) от длительности занятия T и средней длины l_{cp} цепочки ЭУМ. С ростом T (при постоянном $l_{cp} = 10$) увеличивается количество обращений к каждому ЭУМ, повышается прочность усвоения, а значит и $t_З$ (рис. 2.10.1).

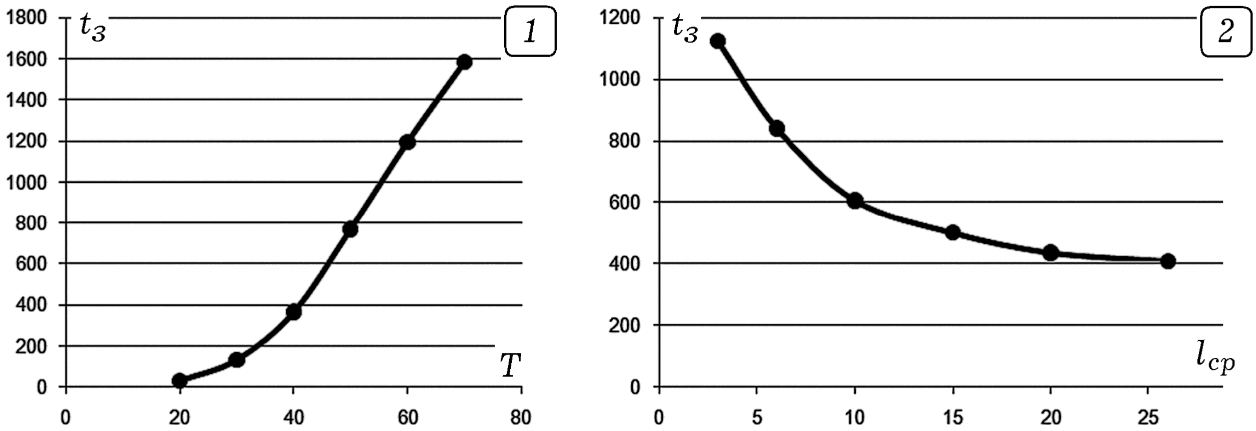


Рис. 2.10. Зависимость времени “полузабывания” $t_З$ от T и l_{cp}

При уменьшении средней длины идей l_{cp} учебный материал запоминается прочнее, а время, в течение которого забывается половина изученной информации I_0, растет. Увеличение длины цепочки ЭУМ при фиксированном $T = 45$ УЕВ снижает вероятность воспроизведения учеником соответствующей идеи за заданный промежуток времени t_{om}, уменьшает время $t_З$ забывания половины изученной информации (рис. 2.10.2). Итак, ***чем больше длительность урока и короче информационные блоки, тем прочнее усваивается одно и то же количество информации (в информационных блоках).***

Приложение к главе 2

ПР-2.1

```
Program Zavis_poniman_ot_skorosti_soobshen_inf; {M-2.1, ris. 2.1}
Uses crt; const dt=0.01; vm=1.5; u=0.7; p=0.7;
Var Pon_bl,EUM,N_bl,k,flag,M: integer; t,t1,top,x,z: real;
BEGIN Randomize;
Repeat t:=t+dt; If t1>0 then t1:=t1-dt;
If t1<=0 then begin M:=5; z:=random(100);
If z<30 then M:=4; If z>60 then M:=6;
t1:=M/u; inc(N_bl); EUM:=0; flag:=0;
{writeln(' Report blocks',N_bl);} end; inc(k);
top:=1/vm; If k*dt>top then begin  k:=0; x:=random(100)/100;
If (EUM<M)and (x<p) then inc(EUM);
If (EUM=M)and(flag=0) then begin inc(Pon_bl);
{writeln ('PONYL ', Pon_bl);} flag:=1; end; end;
until (KeyPressed)or(N_bl>=2000);
writeln ('report.blocks ',N_bl,'underst. blocks ',
Pon_bl, 'VREMYA ',t); ReadKey;
END.
```

ПР-2.2

```
Program Izuchen_logich_svyazan_informaci; {M-2.2, ris 2.4}
{$N+} Uses crt, graph; const dt=0.01; a=0.4; c=0.3;
g=6E-4; str=50; L=10; Y=650; Mt=0.2;
Var t,tr,tp,dtp,SR,SP,SQ:single; i,j,k,o,DV,MV: integer;
p: array[0..str+1,0..11] of single; dd: array[0..str+1,0..11]
of integer; R: array[0..str+1] of integer;
Procedure Test; Label m;
begin SR:=0; For k:=1 to 100 do begin For i:=1 to str do begin
j:=1; tr:=1.3*L*dt; R[i]:=0; Repeat tr:=tr-dt;
If random(100)/100<p[i,j]+c*(p[i-1,j]+p[i+1,j]+p[i,j-1]+p[i,j+1])
then inc(j); If j>=L then begin R[i]:=1; goto m; end;
If (tr<0) then R[i]:=0; until tr<0; m: end;
For i:=1 to str do SR:=SR+R[i]; end; SP:=0;
For i:=1 to str do For j:=1 to L do begin
If dd[i,j]=1 then SP:=SP+p[i,j]; end;  SQ:=0;
For i:=1 to str do  For j:=1 to L do begin  If dd[i,j]=0 then
SQ:=SQ+p[i,j]; end; circle(10+round(t*Mt),Y-round(SP),1);
circle(10+round(t*Mt),Y-round(SR/10),2); circle(10+round(t*Mt),
Y-round(SQ+SP+1),1); circle(10+round(t*Mt),Y-round(SQ+SP),1); end;
Procedure Zabivanie;
begin For i:=1 to str do For j:=1 to L do begin If dd[i,j]=0 then
p[i,j]:=p[i,j]*(1-g*30*dt); end; t:=t+30*dt; end;
Procedure Zabivan; begin For i:=1 to str do For j:=1 to L do If
dd[i,j]=0 then p[i,j]:=p[i,j]*(1-g*dt); end;
Procedure Obuchen;
begin For i:=1 to str do For j:=1 to L do
begin If dd[i,j]=0 then begin p[i,j]:=p[i,j]+a*(1-p[i,j])*dt+
c*(p[i-1,j]+p[i+1,j]+p[i,j-1]+p[i,j+1])*dt;
```

```
If p[i,j]>1 then p[i,j]:=1; end; tp:=dt*(1+3*exp(-3*p[i,j]));
t:=t+tp; end; Zabivan; Test; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); Randomize;
For i:=1 to str do For j:=1 to L do begin
If (random(100)/100<0.05)or(j=1) then dd[i,j]:=1 else dd[i,j]:=0;
If dd[i,j]=1 then p[i,j]:=1; end; line(0,Y,1600,Y);
Repeat If t<2000 then Obuchen else Zabivanie; inc(o);
If o>20 then begin o:=0; Test; end; until (KeyPressed)or(t>8000);
repeat until (KeyPressed); CloseGraph; END.
```

ПР-2.3

```
Program Perevod_tekstov; {M-2.3, ris. 2.6}
{$N+} uses crt, graph; const dt=0.02; a=0.6;Y=650; N=500; M=20;
L=10; st=15; Mt=0.08;
var pp,t,tr,tp,g,x,sm,Sp:single; q1,qm,i,j,k,k1,k2,r,
r1,q,qp,DV,MV: integer; p,pi: array[0..N+1] of single; sv: array
[0..N+1,0..N+1]of single; w: array[0..21,0..11] of integer;
dd: array[0..N+1] of integer;
Procedure Text; Label f;
begin For i:=1 to M do begin j:=0; Repeat inc(j); f:
q:=round(random(N*99)/99); x:=random(1000)/1E+3;
If x<pi[q]then begin w[i,j]:=q; end else goto f; until j>10;
end; end;
Procedure Test; Label m2;
begin r:=0;  For k1:=1 to 60 do begin For i:=1 to M do begin
tr:=1.3*L*dt;  r1:=0; j:=0; Repeat inc(j); m2:
x:=random(1000)/1E+3; tr:=tr-dt; sm:=0; q:=w[i,j]; For q1:=1 to N
do If p[q1]*sv[q,q1]>sm then begin sm:=p[q1]*sv[q,q1]; qm:=q1;
end; If x>p[q]+0.2*(sv[q,qm]*p[qm]+sv[q,qp]*p[qp]) then  goto m2
else  inc(r1); qp:=q; until  (tr<0)or(r1=L);
If (tr>0)and(r1=L) then inc(r); end; end;
circle(10+round(Mt*t),Y-round(r*0.5),2); end;
Procedure Psred;
begin pp:=0;  For i:=1 to M do For j:=1 to L do pp:=pp+p[w[i,j]];
circle(10+round(Mt*t),Y-round(pp*2),2); end;
Procedure Zabiv; begin g:=5E-5; For i:=1 to N do begin
p[i]:=p[i]*(1-g*30*dt);
For j:=1 to N do sv[i,j]:=sv[i,j]*(1-g*30*dt); end; t:=t+30*dt;
inc(k); If k>30 then begin k:=0; Test; end; Psred; end;
Procedure Obuchen;
begin Text;For i:=1 to M do For j:=1 to L do begin sm:=0;
q:=w[i,j]; For q1:=1 to N do If p[q1]*sv[q,q1]>sm then begin
sm:=p[q1]*sv[q,q1]; qm:=q1; end; p[q]:=p[q]+a*(1-p[q])*dt+
a*(sv[q,qm]*p[qm]+sv[q,qp]*p[qp])*dt;
If p[q]>1 then p[q]:=1; tp:=dt*(1+3*exp(-3*p[q])); t:=t+tp;
sv[q,qm]:=sv[q,qm]+a*(1-sv[q,qm])*dt; sv[qm,q]:=sv[q,qm];
sv[q,qp]:=sv[q,qp]+a*(1-sv[q,qp])*dt; sv[qp,q]:=sv[q,qp]; qp:=q;
end; Test; Psred; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); Randomize; Sp:=0;
For i:=1 to N do begin pi[i]:=1/i{N}; Sp:=Sp+pi[i];
```

```
If (random(100)/100<0.1) then dd[i]:=1 else dd[i]:=0;
If dd[i]=1 then p[i]:=1; end; For i:=1 to N do
pi[i]:=pi[i]/Sp; For i:=1 to N do For j:=1 to N do
sv[i,j]:=random(5)/100; line(0,Y,1600,Y);
Repeat t:=t+dt; inc(k2); If k2>20 then begin k2:=0; Text; end;
If t<2500 then Obuchen else Zabiv; until KeyPressed;
CloseGraph; END.
```

ПР-2.4

```
Program Osmisl_inform_izmen_koeff_zabivan; {M-2.4, ris. 2.8}
{$N+} uses crt, graph; const dt=0.01; a=0.1; Y=650; str=50;
st=15; Mt=0.8;
var t,tr,g,SR,SP,SQ: single; i,j,k,tt,o,DV,MV,kk: integer;
p: array[1..str,1..st] of single; dd: array[1..str,1..st]of
integer; s:array[1..str,1..st]of longint;
l,R: array[1..str]of integer;
Procedure Test; Label m;
begin SR:=0; For k:=1 to 100 do begin For i:=1 to str do begin
j:=1; tr:=l[i]*dt*1.3; R[i]:=0; Repeat tr:=tr-dt;
If random(100)/100<p[i,j] then inc(j); If j>=l[i] then begin
R[i]:=1; goto m; end; If (tr<0) then R[i]:=0; until tr<0; m: end;
For i:=1 to str do SR:=SR+R[i]; end;
circle(10+round(t*Mt),Y-round(SR/10),2); SP:=0;
For i:=1 to str do For j:=1 to l[i] do begin If dd[i,j]=1 then
SP:=SP+p[i,j]; end; circle(10+round(t*Mt),Y-round(SP),1); SQ:=0;
For i:=1 to str do For j:=1 to l[i] do begin If dd[i,j]=0 then
SQ:=SQ+p[i,j]; end; circle(10+round(t*Mt),Y-round(SQ+SP), 1); end;
Procedure Zabivanie;
begin For i:=1 to str do For j:=1 to l[i] do begin
If (dd[i,j]=1)and(random(100)<2.5) then begin
p[i,j]:=p[i,j]+a*(1-p[i,j])*dt; inc(s[i,j]); end; end;
For i:=1 to str do For j:=1 to l[i] do begin
g:=4E-4+0.05*exp(-1E-3*s[i,j]); p[i,j]:=p[i,j]*(1-g*dt); end; end;
Procedure Zabivan;
begin  For i:=1 to str do For j:=1 to l[i] do
begin g:=4E-4+0.05*exp(-1E-3*s[i,j]); p[i,j]:=p[i,j]*(1-g*dt);
end; end;
Procedure Obuchen;
begin For i:=1 to 50 do For j:=1 to l[i] do
begin inc(s[i,j]); p[i,j]:=p[i,j]+a*(1-p[i,j])*dt; end;
Zabivan; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); Randomize;
For i:=1 to str do l[i]:=8+round(random(100)/25);
For i:=1 to str do  For j:=1 to l[i] do  begin
If random(100)/100<0.333 then dd[i,j]:=1 else dd[i,j]:=0; end;
line(0,Y,1600,Y);
Repeat t:=t+dt;
If (t<30)or((t>220)and(t<245)) then Obuchen else Zabivanie;
inc(o); If o>100 then begin o:=0; Test; end;
circle(10+round(t*15),Y,1);
until (KeyPressed)or(t>2000); CloseGraph; END.
```

Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАЧИ УЧЕБНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛУ СВЯЗИ “УЧИТЕЛЬ-УЧЕНИК”

Рассмотренные выше модели учитывают, что усилия ученика прямо пропорциональны разности между уровнем требований учителя и количеством знаний ученика. В то же время хорошо известно, что с ростом требований мотивация сначала увеличивается, а затем уменьшается почти до нуля. Этот фактор имеет большое значение, так как при завышенных требованиях у ученика пропадает желание учиться, снижается его интерес и мотивация [11]. Когда уровень требований учителя слишком низок, ученику нет необходимости прилагать большие усилия, чтобы им соответствовать, эффективность обучения также мала. Мотивация ученика и эффективность обучения зависят от скорости изложения нового материала, ее соотношения с пропускной способностью канала “учитель-ученик”. В настоящей главе анализируется информационно–кибернетическая модель дидактической системы, состоящая из источника информации (учителя), приемника информации (ученика), которые соединены прямым каналом связи (от учителя к ученику) и обратным каналом связи (от ученика к учителю) [46, 71]. При этом учитывается следующее: 1) при увеличении отставания ученика от требований учителя усилия, прилагаемые учеником, сначала увеличиваются, достигают максимума, а затем уменьшаются; 2) при увеличении сложности материала и/или скорости передачи информации коэффициент передачи канала связи сначала постоянен и равен 1, а затем уменьшается до 0; 3) информация о состоянии ученика поступает к учителю с некоторой задержкой по обратному каналу связи; 4) учитель может управлять процессом обучения, изменяя скорость сообщения новой информации или организуя повторение изученного материала.

3.1. Учет зависимости степени понимания от быстроты поступления учебной информации (М-3.1). Пусть изучаемая тема включает в себя N элементов учебного материала (ЭУМ), которые связаны друг с другом, а учитель требует усвоения всей изученной информации, то есть его уровень требований $L(t)$ равен количеству сообщенных им знаний $I(t)$. Будем считать, что сложность i-го ЭУМ S_i пропорциональна затратам времени и усилий, требующихся для усвоения данного ЭУМ учеником пятого класса [74, с. 13–15]; тогда у самого простого ЭУМ $S_i = 1$, а у более сложных S_i больше 1. Если в течение урока учитель изложил N ЭУМ, то уровень предъявляемых им требований $L = S_1 + S_2 + ... + S_N$. Если все N ЭУМ имеют сложность 1, то $L = N$. Скорость передачи информации равна количеству знаний, сообщаемых учителем в условную единицу времени (УЕВ): $\upsilon = dI/dt = dL(t)/dt$. Она определяется числом ЭУМ, сообщенных в 1 УЕВ, и их сложностью.

Построение модели. Результат обучения сильно зависит от степени понимания изучаемого материала. Ученик понимает сообщаемую ему информацию лишь тогда, когда он может соотнести ее с собственной категориальной системой понятий [24]. В его сознании происходит перекодирование поступающей речевой или текстовой информации, ее “укладывание” в собственную понятийную систему с последующим запоминанием. Чем сложнее утверждения учителя, тем быстрее растет уровень его требований L (то есть скорость $\upsilon = dI/dt = dL/dt$ выше) и тем больше мыслительных действий должен совершить ученик, чтобы их понять. Если учитель излагает сложные вопросы, перескакивая через рассуждения, представляющие трудность для ученика, то ученик не сможет или не успеет связать сообщаемую ему новую информацию с собственной системой понятий, не поймет до конца всех проводимых рассуждений.

Если пренебречь забыванием, то скорость увеличения знаний ученика пропорциональна усилиям $F(t)$, затрачиваемым в единицу времени: $dZ/dt = \alpha F(t)$. Мотивация к обучению и затрачиваемые учеником усилия F: 1) при небольших $D(t) = L(t) - Z(t)$ (L незначительно превышает Z) пропорциональны величине D; 2) при больших D плавно уменьшаются до 0. Зависимость $F = F(D)$ можно аппроксимировать функцией:

$$F(D) = \frac{0{,}0127D}{1+\exp((D-150)/50)} = C(D)\cdot D,$$

график которой представлен на рис. 3.1.1. Из него видно, что существует оптимальная разность $D(t) = L(t) - Z(t)$, при которой скорость увеличения знаний максимальна. Величина $C(D) = 0{,}0127 \cdot (1+\exp[\,0{,}02\,D-3])^{-1}$ может быть интерпретирована как пропускная способность канала связи между учителем и учеником. Она позволяет учесть, что при больших D ученик перестает понимать всю сообщаемую учителем информацию и, осознав это, уменьшает прилагаемые усилия. В этом случае с ростом скорости υ сообщения информации увеличивается D, а это влияет на C. При этом C не зависит от υ явным образом.

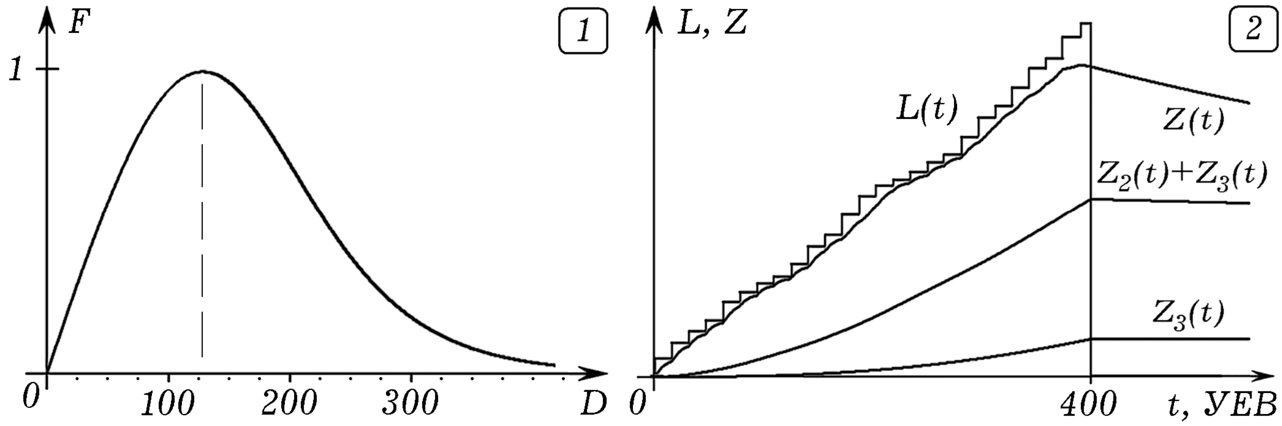


Рис. 3.1. Зависимость $F(D)$, изменение $Z(t)$, $Z_2(t)$ и $Z_3(t)$ при обучении

Во время обучения непрочные знания переходят в прочные (формируются умения и навыки), которые забываются медленнее. Рассмотрим трехкомпонентную модель, выражающуюся уравнениями (во время обучения $k=1$, а когда оно прекращается $k=0$):

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = \frac{k\alpha_1 D}{1+\exp(r(D-\theta))} - k\beta_1 Z_1 - \gamma_1 Z_1,$$

$$\frac{dZ_2(t)}{dt} = k\beta_1 Z_1 - k\beta_2 Z_2 - \gamma_2 Z_2, \quad \frac{dZ_3(t)}{dt} = k\beta_2 Z_2 - \gamma_3 Z_3,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3, \;\; D = L - Z, \;\; r = 0{,}02, \;\; \theta = 150.$$

Здесь Z_1, Z_2 и Z_3 – количества непрочных знаний, умений и навыков (то есть прочных знаний) ученика. Они отличаются прочностью усвоения и имеют коэффициенты забывания $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_3 = 2 \cdot 10^{-5}$. Коэффициенты усвоения $\alpha_1 = 0{,}17$, $\beta_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, $\beta_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ характеризуют быстроту усвоения знаний учеником и перехода непрочных знаний в прочные. Результат обучения характеризуется суммарным уровнем приобретенных знаний $Z(t)$.

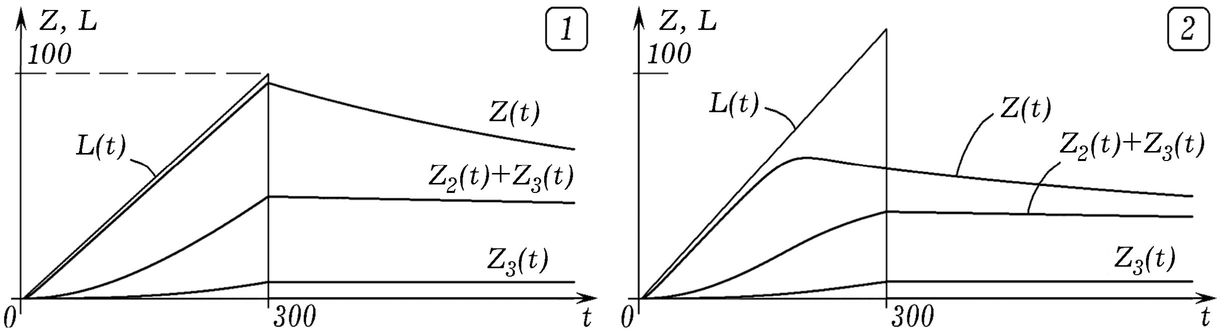


Рис. 3.2. Обучение при различных скоростях υ $(\upsilon_2 > \upsilon_1)$.

<u>Результаты моделирования.</u> Пусть в промежутке от 0 до 300 УЕВ ученик должен понять и запомнить определенный объем учебного материала (например, вывод формулы, решение сложной задачи). Используемая компьютерная программа ПР–3.1 (Приложение), моделирующая поведение дидактической системы, содержит цикл по времени, в котором задается уровень требований учителя и определяется количество знаний ученика Z_1, Z_2 и Z_3 на следующем временном шаге. Во время обучения скорость поступления информации от учителя υ остается постоянной, причем в каждый момент учитель требует знания всего предыдущего материала. При этом уровень требований учителя растет по закону: $L(t) = \upsilon \cdot t$. Результаты моделирования обучения при оптимальной ($\upsilon_{опт} = 10$ УЕВ$^{-1}$) и слишком большой скорости передачи информации ($\upsilon > \upsilon_{опт}$) представлены на рис. 3.2. Когда $\upsilon < \upsilon_{опт}$, ученик на занятии усваивает практически всю сообщенную ему информацию (рис. 3.2.1). Если $\upsilon > \upsilon_{опт}$, то сначала ($t < 180$ УЕВ) ученик успевает следить за рассуждениями учителя и усваивает практически все ЭУМ. Затем ученик “отрывается” от учи-

теля, перестает понимать и усваивать его рассуждения (рис. 3.2.2). Разрыв D между уровнем требований $L(t)$ и знаниями ученика $Z(t)$ возрастает, мотивация к обучению и прилагаемые учеником усилия F уменьшаются. Поэтому количество усвоенных знаний $Z(t)$ и коэффициент эффективности обучения K в конце обучения оказываются существенно ниже. После обучения ($t > 300$ УЕВ) из-за забывания Z_1, Z_2 и Z_3 уменьшаются. Аналогичные графики $Z(t)$, $Z(t)_2 + Z_3(t)$ и $Z_3(t)$, соответствующие ступенчатому увеличению $L(t)$, изображены на рис 3.1.2.

v, 1/УЕВ	Zn	K
1	195	0,977
2	391	0,976
4	779	0,974
6	1166	0,971
8	1546	0,966
9	1732	0,962
10	1911	0,956
11	2064	0,938
11,5	2080	0,904
12	1882	0,784
13	1289	0,496
14	932	0,333
16	594	0,186
18	438	0,122
20	348	0,087
22	290	0,066
24	249	0,052

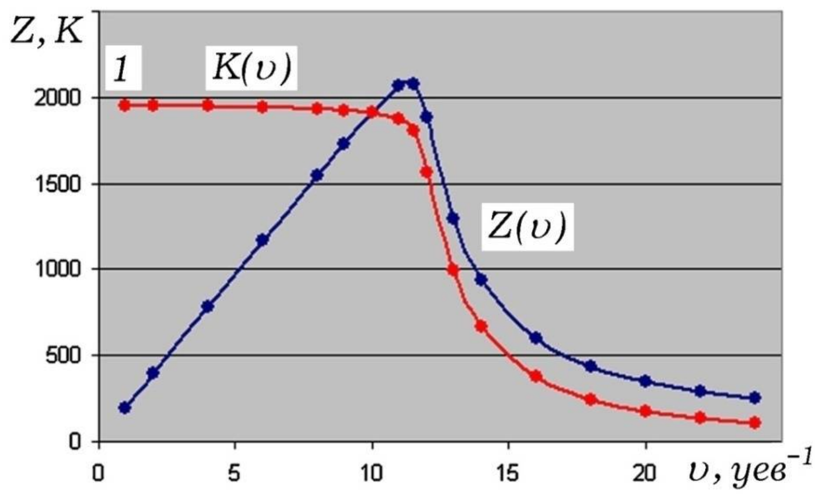


Рис. 3.3. Зависимость количества усвоенных знаний Z и эффективности обучения K от скорости υ поступления учебной информации

Изучим зависимости количества усвоенных учеником знаний $Z(t')$ и эффективности обучения $K = Z(t')/L$ от скорости изложения нового материала υ (программа ПР–3.1). Проведем серию вычислительных экспериментов, изменяя υ от 1 до 20 УЕВ$^{-1}$ при длительности обучения 400 УЕВ. Если считать, что 1 УЕВ составляет полминуты, то продолжительность обучения около 3,5 часов. Пусть в момент $t' = 400$ УЕВ, соответствующий окончанию обучения, осуществляется контроль его знаний $Z(t)$. Построим графики зависимостей знаний учащегося Z в конце обучения ($t' = 400$ УЕВ) и эффективности обучения K от скорости передачи информации υ (рис. 3.3). Из них видно следующее: 1) при

$\upsilon < 11$ УЕВ$^{-1}$ количество усвоенных знаний Z увеличивается прямо пропорционально υ, эффективность обучения K высокая и остается постоянной ($K_{max} = 1$); 2) при $\upsilon > 11$ УЕВ$^{-1}$ количество усвоенных знаний Z и эффективность обучения резко падают; 3) существует оптимальная скорость подачи информации (около 11 УЕВ$^{-1}$), при которой количество усвоенных знаний Z достигает максимума. Эти графики похожи на кривые, изображенные на рис. 2.1.1, и это не случайно.

Полученные результаты согласуются со ***второй теоремой Шеннона:*** если скорость передачи не превышает пропускной способности канала связи с шумом, то всегда найдется способ кодирования, при котором сообщение будет передаваться с требуемой достоверностью (то есть ученик усвоит сообщаемую информацию). Можно сформулировать и обратное утверждение: если производительность источника превышает пропускную способность канала связи с шумом, то не существует никакого метода кодирования, позволяющего безошибочно передать сообщение. Под кодированием в данном случае следует понимать “укладывание” учеником сообщенной информации в собственную понятийную систему с последующим запоминанием. Роль шума играют случайные процессы, препятствующие пониманию.

Рассмотренная модель обучения позволяет объяснить скачкообразный характер зависимости степени усвоения логически связанных между собой ЭУМ от скорости изложения материала. ***При слишком большой скорости поступления новой информации ученик не успевает следить за ходом мысли и “отрывается” от учителя.*** В результате последующая информация усваивается существенно хуже, ученик не понимает изучаемую тему. ***График зависимости эффективности K от скорости υ подачи информации имеет ярко выраженный спад, соответствующий границе между двумя состояниями, когда ученик усвоил изучаемый материал и когда не смог этого сделать.***

3.2. Модель, учитывающая отставание ученика D и пропускную способность C канала связи (М-3.2). Рассмотрим более сложную модель, в которой явным образом разделены: 1) зависимость усилий F ученика от разности D между его знаниями Z и требованиями учителя L; 2) зависимость пропускной способности C канала связи от скорости изложения υ. Эта модель учитывает следующее [66–68]:

1. Если пренебречь забыванием, то скорость увеличения знаний ученика dZ/dt пропорциональна его усилиям F, затрачиваемым в единицу времени, которые зависят от разности D между уровнем требований учителя L и знаниями ученика Z.

2. Затрачиваемые учеником усилия F (как и мотивация к обучению) при небольших $D = L - Z$ возрастают, достигают максимума, а при больших D ученик осознает, что не сможет соответствовать предъявляемым требованиям L, и F уменьшается, стремясь к некоторому пределу 0,1–0,3.

3. Канал связи “учитель-ученик” имеет определенную пропускную способность. При небольшой скорости $\upsilon = dL/dt$ изложения нового материала учителем коэффициент передачи канала связи K равен 1, а при больших υ ученик не успевает воспринять, понять и усвоить рассуждения учителя, поэтому K уменьшается до 0.

<u>Построение модели.</u> Так как скорость увеличения знаний ученика пропорциональна усилиям F, затрачиваемым в единицу времени, то: $dZ/dt = \alpha \cdot K(\upsilon)F(D)$, где K – коэффициент передачи прямого канала связи, который зависит от производительности источника $\upsilon = dL/dt$, $D = L - Z$ – разность между уровнем требований учителя и знаниями ученика [51, 52]. При небольших υ пропускная способность канала связи равна 1. При больших υ ученик не успевает усвоить рассуждения учителя, поэтому K уменьшается до 0. Предположим, что

$$K(\upsilon) = \frac{1}{1 + \exp((\upsilon - 12)/4)}.$$

При $\upsilon = 12$ УЕВ$^{-1}$ коэффициент $K = 0{,}5$. Мотивация к обучению и затрачиваемые учеником усилия F: 1) при небольших $D = L - Z$ (L незначительно превышает Z) возрастает пропорционально величине D, стремясь к единице; 2) при больших D ученик осознает, что не может усвоить требуемый материал и F уменьшается, стремясь к некоторому пределу $b = 0{,}1$–$0{,}3$. Эту зависимость можно аппроксимировать функцией [68]:

$$F(D) = 1{,}65 \cdot (1 - \exp(-0{,}01D)) \cdot \left(0{,}15 + \frac{0{,}85}{1 + \exp(0{,}02D - 4)} \right).$$

При $D \to \infty$ усилия F стремятся к $\approx 0{,}25$. Из графика $F(D)$ (рис. 3.4.1) видно, что существует оптимальная разность $D = L - Z$, при которой усилия ученика F максимальны.

Учтем, что при обучении непрочные знания переходят в прочные (формируются интеллектуальные умения и навыки), которые забываются медленнее. Получаем трехкомпонентную модель (на занятии $k = 1$, иначе – $k = 0$):

$$dZ_1 / dt = k\alpha \cdot K(\upsilon) F(D) - k\beta_1 Z_1 - \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2,$$

$$dZ_2 / dt = k\beta_1 Z_1 - k\beta_2 Z_2 - \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3, \quad dZ_3 / dt = k\beta_2 Z_2 - \gamma_3 Z_3,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad K(\upsilon) = 1/(1 + \exp(0{,}25\upsilon - 3)), \quad D = L - Z,$$

$$F(D) = 1{,}65 \cdot (1 - \exp(-0{,}01D)) \cdot \left(0{,}15 + \frac{0{,}85}{1 + \exp(0{,}02D - 4)} \right).$$

Здесь $\gamma_1 = 0{,}002$, $\gamma_2 = \gamma_1 / e$, $\gamma_3 = \gamma_2 / e$. Используется программа ПР–3.2.

Результаты моделирования. На рис. 3.4.2 представлены результаты имитационного моделирования обучения учеников с различными коэффициентами усвоения в случае, когда уровень требований учителя L в течение первой половины занятия возрастает прямо пропорционально времени t (изложение нового материала), а в течение второй половины – не изменяется (повторение и закрепление). При этом на протяжении всего занятия ученики занимаются интенсивной интеллектуальной деятельностью. Видно, что результаты обучения ученика сильно зависят от его способности усваивать новую информацию, которая характеризуется коэффициентом усвоения, изменяющимся от 18 до 25. Во время изложения теоретического материала ($t < T/2$) ученики с низким коэффициентом усвоения ($\alpha \le 22$) “отрываются” от учителя, после чего скорость увеличения их знаний существенно уменьшается. Во время второй половины занятия ($T/2 < t < T$), когда ученики занимаются повторением и закреплением, их знания увеличиваются быстрее. После окончания обучения происходит забывание. Ученики с высоким коэффициентом усвоения запоминают практически весь новый материал.

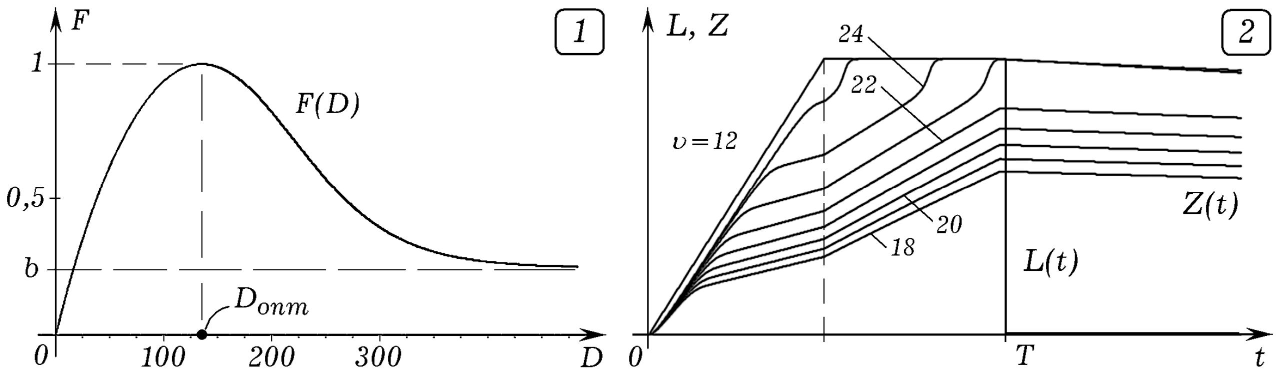


Рис. 3.4. Зависимость $F(D)$. Графики $Z(t)$ при $\alpha = 18, 19, \ldots, 25$

<u>Метод статистических испытаний.</u> Для изучения рассматриваемой дидактической системы можно использовать метод статистического моделирования, сущность которого состоит в следующем [99, 101]: 1. Создается компьютерная модель исследуемой системы, имитирующая поведение элементов системы и их взаимодействие друг с другом и внешней средой. 2. Автоматически выполняется серия из большого числа испытаний компьютерной модели, в ходе которых случайным образом изменяются параметры системы и внешние воздействия. 3. Результаты вычислительного эксперимента обрабатываются статистическими методами, интерпретируются и анализируются. При достаточно большом количестве испытаний получающиеся значения приобретают статистическую устойчивость и могут рассматриваться как характеристики функционирования исследуемой системы.

Применим метод статистических испытаний для случая, когда учитель половину времени (200 УЕВ) тратит на изучение теоретического материала, а другую половину (200 УЕВ) – на повторение (рис. 3.4.2). При этом рандомизируем следующие параметры модели: 1) коэффициент усвоения ученика α выбирается случайно из интервала [10; 16], а коэффициент β_1 – из интервала [0,005; 0,008], $\beta_2 = \beta_1 / 2{,}72$ (УЕВ$^{-1}$); 2) коэффициенты забывания γ_1 выбирается случайно из интервала [0,002; 0,0025], $\gamma_2 = \gamma_1 / 2{,}72$, $\gamma_3 = \gamma_2 / 2{,}72$ (УЕВ$^{-1}$). Пусть все эти случайные величины имеют равномерное распределение. Промоделируем обучение 1000 учеников при $\upsilon = 9$; 9,5; 10 УЕВ$^{-1}$ и рассчитаем их уровень знаний в момент $t' = 450$ УЕВ [68].

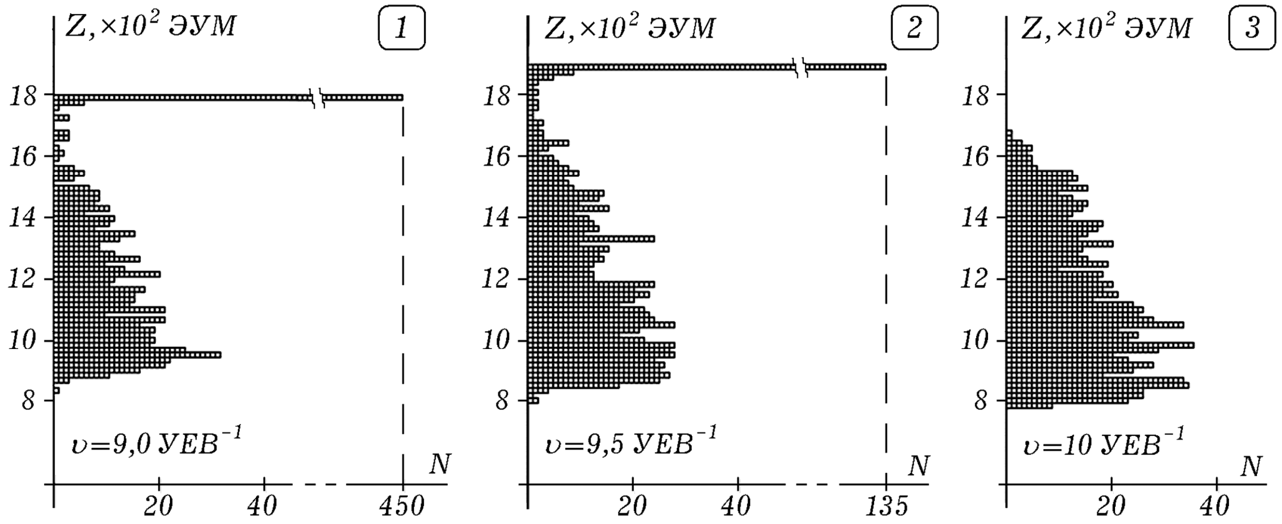


Рис. 3.5. Результаты “обучения” 1 000 учеников при $\upsilon = 9$; 9,5; 10 УЕВ$^{-1}$

Результаты моделирования представлены на рис. 3.5; по горизонтали откладывается количество учеников N с данным значением $Z(t')$. Видно, что при $\upsilon = 9{,}5$ УЕВ$^{-1}$ (рис. 3.5.2) однородная совокупность учеников после обучения распадается на две группы: 1) ученики, полностью усвоившие изучаемый материал (20 % от общего числа), их уровень знаний $Z \approx 1900$ ЭУМ; 2) ученики, частично усвоившие учебный материал (80 % от общего числа), их уровень знаний находится в интервале от 800 до 1700 ЭУМ. При меньшей скорости изложения материала $\upsilon = 9$ УЕВ$^{-1}$ (рис. 3.5.1) более 45 % полностью усваивают изложенный материал ($Z \approx 1800$ ЭУМ). Если $\upsilon < 7{,}5$ УЕВ$^{-1}$, то все ученики полностью усваивают сообщаемую информацию. При высокой скорости $\upsilon = 10$ УЕВ$^{-1}$ ни один ученик не успевает усвоить весь материал, уровень знаний учеников в момент t' лежит в интервале от 780 до 1650 ЭУМ (рис. 3.5.3).

3.3. Зависимость результата обучения от чередования изучения нового материала и его закрепления (М-3.2). Определенный интерес представляет собой проблема: как зависит результат обучения от чередования основных видов учебной деятельности: усвоения учебного материала и его закрепления? Предполагается, что учитель может: 1) сообщать новую информацию со скоростью $\upsilon \neq 0$, при этом его уровень требований $L(t) = L_0 + \upsilon \cdot t$; 2) организовывать повторение изученного материала, при этом $L = const$, $\upsilon = 0$. Математическая модель имеет вид [65]:

$$dZ_1 / dt = k\alpha \cdot K(u) F(D) - k\alpha_1 Z_1 - \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2,$$

$$dZ_2 / dt = k\alpha_1 Z_1 - k\alpha_2 Z_2 - \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3, \quad dZ_3 / dt = k\alpha_2 Z_2 - \gamma_3 Z_3,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad K(\upsilon) = 1/(1 + \exp(0{,}25\upsilon - 3)), \quad D = L - Z,$$

$$F(D) = 1{,}65 \cdot (1 - \exp(-0{,}01D)) \cdot \left(0{,}15 + \frac{0{,}85}{1 + \exp(0{,}02D - 4)}\right).$$

В нашем случае $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ УЕВ$^{-1}$, $\gamma_2 = \gamma_1 / 2{,}72$, $\gamma_3 = \gamma_2 / 2{,}72$, $\alpha = 14$ УЕВ$^{-1}$, $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ УЕВ$^{-1}$, $\alpha_2 = \alpha_1 / 2{,}72$. Используется программа ПР–3.3.

Результаты моделирования. Пусть учитель в течение времени T сообщает новый материал со скоростью $\upsilon = const$ так, что уровень требований $L(t) = \upsilon \cdot t$ (методика 1). Получающиеся графики $L(t)$ и $Z(t)$ представлены на рис. 3.6.1 ($\upsilon = 9$ УЕВ$^{-1}$). При небольшой скорости изложения υ ученик усваивает всю сообщенную информацию. Если скорость передачи новых знаний велика, то ученик не успевает за учителем, его отставание увеличивается и в какой-то момент t' он отрывается от учителя, понимая лишь часть изучаемого материала.

Если скорость υ еще больше, то ученик “отрывается” от учителя раньше, усваивая еще меньше. Если учебный материал разбить на $s=2$, 4 или 20 порций, и их изучение чередовать с повторениями (методика 2), то удастся незначительно увеличить скорость изложения нового материала. Сравнивая рис. 3.6.2, 3.7.1 и 3.7.2, получаем, что ***при увеличении количества порций*** s ***максимальная скорость*** υ***, при которой ученик еще способен усвоить весь новый материал, становится больше; также увеличивается общее количество знаний, сообщенных учителем и усвоенных учеником за время обучения*** $(t=T)$.

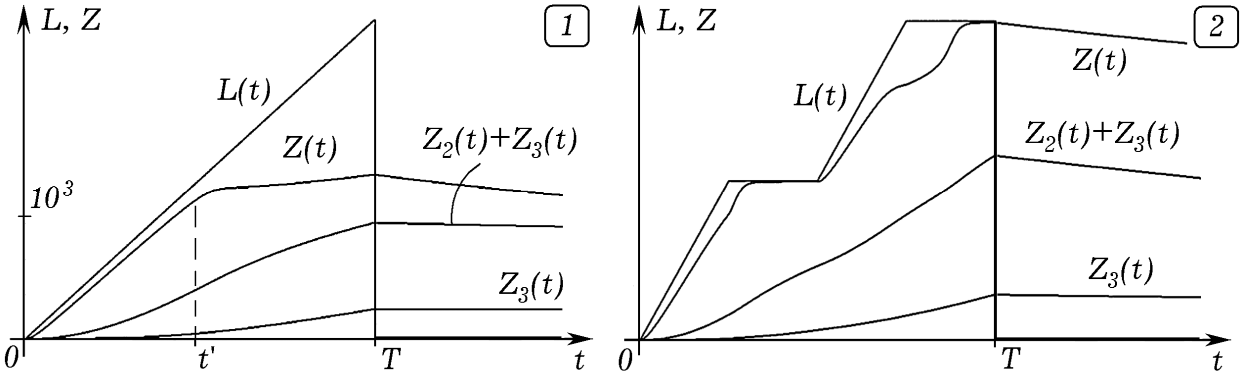


Рис. 3.6. Непрерывное и ступенчатое увеличение уровня требований L

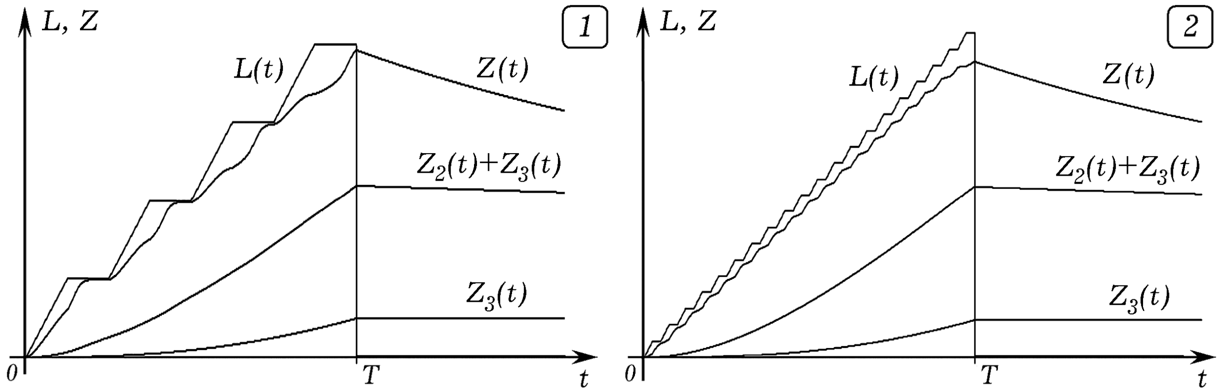


Рис. 3.7. Результаты моделирования обучения по методике 2:

1) $s=4$, $\upsilon=11{,}1$ УЕВ$^{-1}$; 2) $s=20$, $\upsilon=14{,}5$ УЕВ$^{-1}$

Изучим эту зависимость более подробно. Пусть в течение времени $T=400$ УЕВ организуется обучение, в ходе которого планируется половину времени потратить на изучение теоретического материала (L растет), а другую половину – на закрепление путем выполнения практических заданий ($L = const$). Рассмотрим две методики обучения, предусматривающие: 1) изучение всей теории, а затем выполнение практических заданий; 2) разбиение теоретического и практического материала на s порций; чередование изучения теории и практики так, чтобы суммарные значения времени изучения теории t_T и практики $t_П$ были одинаковы и равны $0{,}5T$. Используя метод имитационного моделирования, установим, какая из рассмотренных методик дает более высокий результат [109, 110].

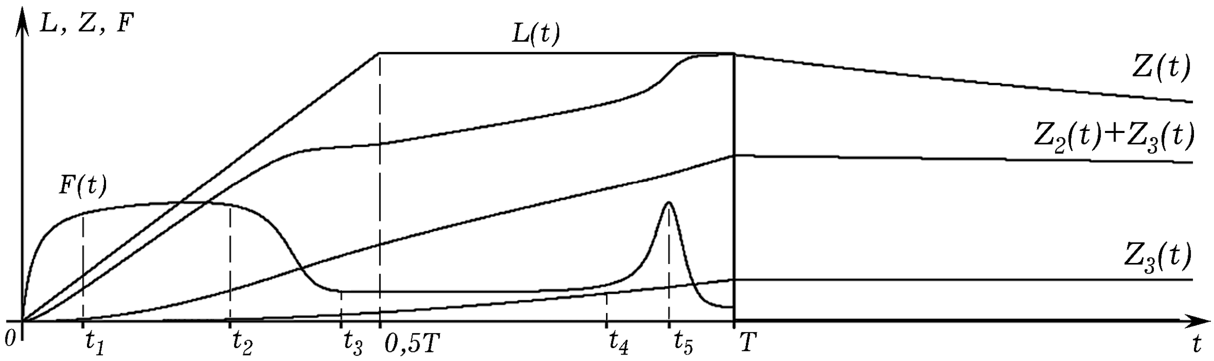


Рис. 3.8. Результаты моделирования обучения ($\upsilon = 9{,}5$ УЕВ$^{-1}$, $s = 1$)

Ситуация 1. Учитель не делит учебный материал на части; он половину времени обучения T излагает теоретические вопросы с некоторой постоянной скоростью так, что $L(t) = \upsilon \cdot t$, а затем организует повторение, то есть $L = const$ (рис. 3.8). При этом $\upsilon = 9{,}5$ УЕВ$^{-1}$, $s = 1$. Видно, что сначала по мере увеличения отставания D прилагаемые учеником усилия F возрастают (от 0 до t_1), а затем остаются высокими (от t_1 до t_2), так как D близко к оптимальному значению. Скорость изложения нового материала все-таки слишком велика, поэтому отставание ученика D возрастает настолько, что он отрывается от учителя (от t_2 до t_3) и начинает прилагать меньше усилий F. Ученик осознает свое отставание от учителя и плохо усваивает учебный материал (интервал от t_3 до t_4). Начиная с момента $t = 0{,}5T$, учитель организует повторение ($L = const$, $\upsilon = 0$), ученик выполняет практические задания. В течение времени от

t_4 до t_5 отставание D уменьшается, усилия F резко возрастают, достигая максимума. Происходит скачок: в течение короткого времени суммарные знания Z ученика увеличиваются почти до уровня требований L учителя. После окончания обучения ($t > T$) усилия F обращаются в ноль; из-за забывания непрочные знания ученика Z_1 быстро уменьшаются, а количество прочных знаний остается практически постоянным.

Ситуация 2. Учитель разбивает теоретический материал на $s = 4$, 8, 16… частей и чередует их с практическими заданиями. Моделирование показывает, что если увеличить количество порций s, то максимальная скорость υ_m, при которой ученик еще способен усвоить весь новый материал, становится больше. При этом увеличивается общее количество знаний, сообщенных учителем, и усвоенных учениками к концу обучения (в момент $t = T$). На рис. 3.7.1 и 3.7.2 представлены результаты имитационного моделирования обучения ученика по методике 2, предусматривающей разбиение теоретического материала на $m = 4$ и 20 частей и их чередование с практическими заданиями. Оба графика соответствуют максимальным скоростям изложения нового материала υ, при котором ученик еще усваивает практически всю информацию. Этот результат можно интерпретировать так: если в классе имеется 25 учеников с различными коэффициентами усвоения α, то чередование теории и практики при той же скорости изложения теоретического материала обеспечит усвоение сообщаемых знаний большим количеством учеников.

Итак, ***деление учебного материала на порции дает более высокий результат.*** Учитель, сообщив новую порцию учебного материала (например, 10 иностранных слов или алгоритм решения уравнения), должен организовать выполнение практических упражнений с целью повторения и закрепления полученных знаний. И только после того, как ученик прочно усвоил новый материал и у него сформировались соответствующие умения и навыки, учитель переходит к изучению следующей порции учебного материала. Альтернативный подход, заключающийся в изучении всего теоретического материала с последующим переходом к выполнению практических заданий, приводит к более низкому результату. Это объясняется тем, что сообщение учебного материала с большой скоростью приводит к отставанию ученика, которое может быть преодолено во время повторения и закрепления изученных ЭУМ [72].

В результате серии вычислительных экспериментов получены графики следующих зависимостей (рис. 3.9): 1) количества усвоенных знаний $Z(T)$ и коэффициента обученности ученика $K_L = Z(T)/L(t)$ от скорости сообщения информации υ при различных $s = 1, 2, 4, 8, 16$ (рис. 3.9.1 и 3.9.2); 2) максимального количества усвоенных знаний Z_m и соответствующей скорости изложения υ_m от s (рис. 3.9.3). Из графиков $Z(\upsilon)$ и $K_L(\upsilon)$ видно: ***1) при*** $\upsilon > \upsilon_m$ ***значения*** Z ***и*** K_L ***резко снижаются: ученик перестает усваивать материал; 2) при увеличении*** s ***максимально возможное количество усвоенных знаний*** Z_m ***и соответствующая скорость изложения*** υ_m ***растут, стремясь к предельным значениям.*** Скачкообразный характер зависимости степени усвоения материала от скорости его изложения (графики $Z(\upsilon)$, $K_L(\upsilon)$) вблизи критического значения υ_m соответствует границе между двумя состояниями, когда ученик понял и усвоил изучаемый материал и когда не смог этого сделать. Это согласуется со второй теоремой Шеннона, которую можно переформулировать так: если производительность источника информации – учителя больше способности ученика воспринимать новую информацию, то передача знаний от учителя к ученику невозможна.

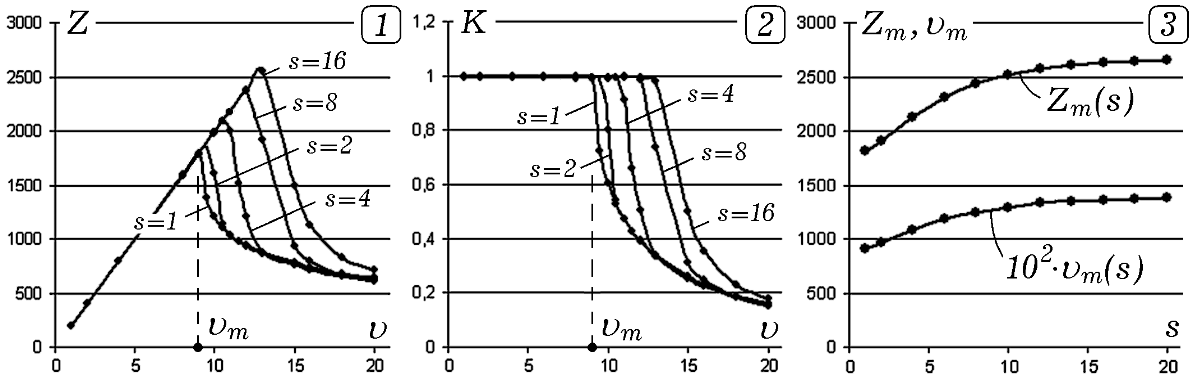


Рис. 3.9. Графики $Z(\upsilon)$, $K_L(\upsilon)$ при различных s; графики $Z_m(s)$, $\upsilon_m(s)$

Итак, рассматриваемая компьютерная модель М-3.2 позволяет обосновать следующее: ***при изучении новой темы учитель должен чередовать изложение теоретического материала с выполнением практических заданий***, рассмотрением примеров использования изучаемых теоретических положений в конкретных случаях [110]. Чем больше количество s порций (при прочих равных условиях), на которое разбивается теоретический материал, тем выше положительный эффект от чередования теории и практики. Кроме того, она помогает проанализировать изменения усилий F ученика со временем.

3.4. Моделирование дидактической системы при различных режимах управления (М-3.2). С помощью рассмотренной выше модели изучим замкнутую дидактическую систему, учитывая не только передачу учебной информации по прямому каналу связи, но и поток информации по обратному каналу связи, которая позволяет учителю непрерывно отслеживать состояние ученика (рис. 3.10). Анализируемая система управления также включает в себя учителя, который может: 1) излагать учебный материал с заданной скоростью, не обращая внимания на ученика (если обратная связь отсутствует); 2) отслеживать состояние ученика и, когда его отставание D превысит критическое значение, изменить методику обучения: организовать повторение, понизить уровень требований, уменьшить скорость изложения материала и т. д. (если имеется обратная связь). Для имитации этой дидактической системы используется компьютерная программа ПР–3.4, содержащая модель учителя [70, 71].

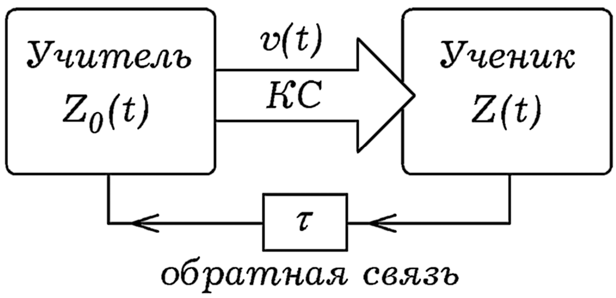


Рис. 3.10. Кибернетическая система обучения

Ситуация 1. Учитель излагает материал с некоторой постоянной скоростью $\upsilon = dZ_0 / dt$, совершенно не учитывая состояние ученика. Обратная связь отсутствует, реализуется разомкнутая схема управления. При небольшой скорости υ ученик усваивает всю сообщенную ему информацию. Если скорость передачи новых знаний велика ($\upsilon = 9$ УЕВ$^{-1}$, рис. 3.11.1), то ученик не успевает за учителем, его отставание увеличивается, и в какой-то момент он “отрывается” от учителя, понимая лишь часть изучаемого материала. При еще большей скорости υ ученик “отрывается” от учителя еще раньше, усваивая еще меньше.

Ситуация 2. Учитель непрерывно отслеживает состояние ученика, и, когда его отставание D превышает 150 ЭУМ, учитель мгновенно реагирует, переставая сообщать новую информацию и организуя повторение изученного материала в течение 20 УЕВ. Во время повторения уровень требований учителя остается постоянным, ученик выполняет практические задания, стараясь запомнить изученное ранее. После этого учитель снова приступает к изложению нового материала. Результаты моделирования представлены на рис. 3.11.2 ($\upsilon = 12$ УЕВ$^{-1}$), вертикальные линии соответствуют моментам t_1, t_2, t_3, …, когда $D = 150$ ЭУМ. При увеличении скорости изложения υ система адаптируется, ученик чаще задает вопросы, демонстрируя свое непонимание, учитель вынужден чаще останавливать изложение нового материала и заниматься повторением. Средняя скорость передачи знаний не превышает некоторого предельного значения, зависящего от характеристик ученика. При малых υ ($\upsilon < 8$ УЕВ$^{-1}$) ученик успевает усвоить материал и учитель не прерывается на повторение.

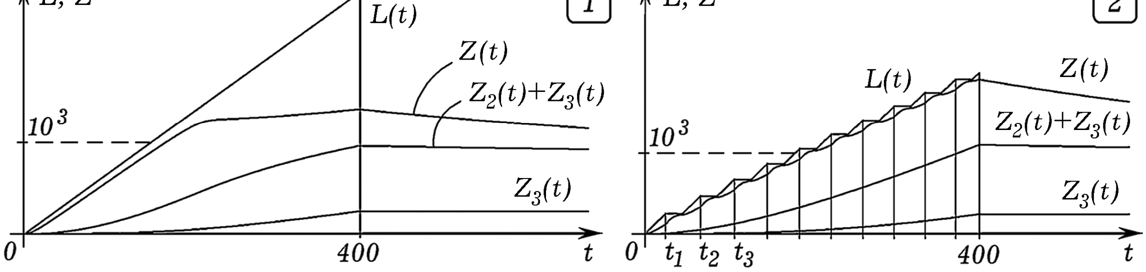


Рис. 3.11. Результаты моделирования ситуаций 1 и 2

Ситуация 3. Учитель непрерывно отслеживает состояние ученика, и, когда ученик начинает отставать на 150 ЭУМ, учитель реагирует с задержкой $\tau =$ 10–20 УЕВ, переставая сообщать новую информацию и организуя повторение изученного материала до тех пор, пока D не окажется меньше 50. Как только ученик сократит отставание до 50 ЭУМ, учитель начинает снова излагать новый материал (рис. 3.12.1, $\upsilon = 11$ УЕВ$^{-1}$). Вертикальные линии показывают моменты, когда D начинает превышать порог 150 ЭУМ. Горизонтальные участки графика $L(t)$ соответствуют повторениям изученного материала.

Ситуация 4. Учитель непрерывно отслеживает состояние ученика и, когда отставание D становится больше 150 ЭУМ (моменты t_1, t_2, t_3, …), реагирует с задержкой $\tau =$10–20 УЕВ. Он снижает уровень требований на 100 ЭУМ и организует повторение изученного материала до тех пор, пока D не уменьшится до 50 (рис. 3.12.2, $\upsilon = 15$ УЕВ$^{-1}$). После повторения учитель опять начинает излагать новый материал с той же скоростью υ.

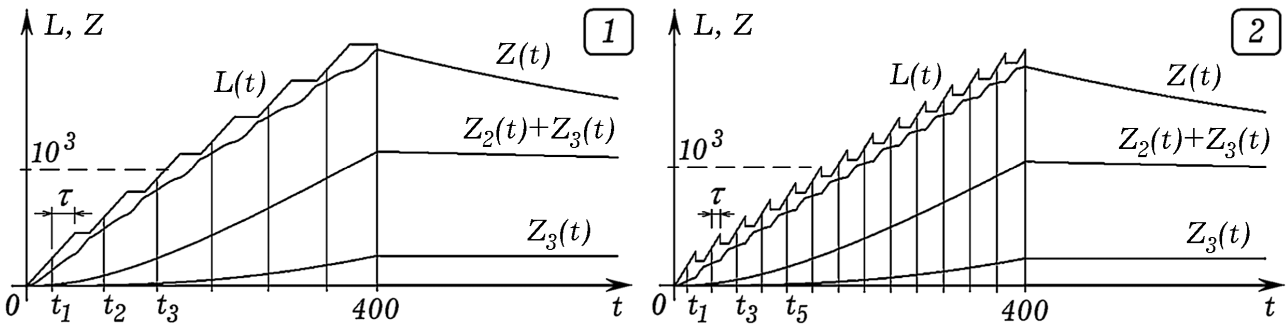


Рис. 3.12. Результаты моделирования ситуаций 3 и 4

Ситуация 5. Учитель непрерывно оценивает состояние ученика, и, когда тот начинает отставать на 150 ЭУМ, учитель реагирует с задержкой $\tau = 20$ УЕВ. Он перестает сообщать новую информацию и организует повторение изученного материала (горизонтальные участки на графике $L(t)$) до тех пор, пока D не окажется меньше 50. Как только ученик сократит отставание D до 50 ЭУМ, учитель начинает снова излагать материал, но уже с меньшей скоростью (рис. 3.13.1). Каждый раз скорость изложения уменьшается на 2 УЕВ$^{-1}$, принимая значения 14, 12, 10, 8 УЕВ$^{-1}$. Этот способ управления позволяет учителю найти оптимальную скорость изложения υ и адаптироваться к слабому ученику.

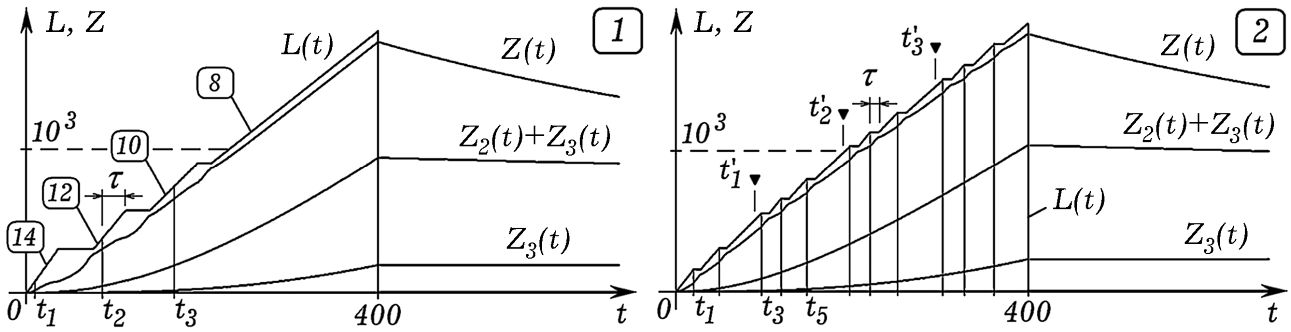


Рис. 3.13. Результаты моделирования ситуаций 5 и 6

Ситуация 6. Учитель непрерывно отслеживает состояние ученика. Когда ученик начинает отставать на 150 ЭУМ (t_1, t_2, t_3, …), учитель сразу организует повторение изученного материала до тех пор, пока D не окажется меньше 50. После этого учитель уменьшает скорость изложения на 1,5 УЕВ$^{-1}$. Если ученик все хорошо усваивает и в течение 40 УЕВ отставание D не превышает 150, то учитель увеличивает скорость изложения на 4 УЕВ$^{-1}$ (рис. 3.13.2). Моменты времени t_1', t_2', t_3', соответствующие увеличению υ, отмечены треугольными метками. Видно, что после одного увеличения следуют 3 повторения, сопровождающиеся уменьшением скорости изложения. Подобный метод управления позволяет учителю адаптироваться как к слабому, так и к сильному ученику. Во всех проанализированных случаях, за исключением первого, реализуется замкнутая система управления, учитель адаптируется к уровню знаний ученика и максимальной скорости восприятия новой информации. При этом независимо от скорости υ передачи информации учителем скорость обучения ученика dZ/dt не превышает некоторого предельного значения, определяемого пропускной способностью прямого канала связи КС (рис. 3.10).

Итак, ***результаты функционирования кибернетической системы “учитель-ученик” высоки, когда учитель адаптируется к возможностям***

ученика так, чтобы тот прикладывал максимально большие усилия [70–72]. При этом ***существует наибольшая скорость, с которой ученик может усваивать сообщаемую информацию***, она определяется его психологическими особенностями и не зависит от скорости изложения нового материала.

3.5. Зависимость эффективности самоадаптирующейся дидактической системы от скорости передачи информации (М-3.2). Допустим, что учитель излагает новый материал, уровень предъявляемых требований L растет пропорционально t. Когда учитель обнаруживает, что отставание D ученика от предъявляемых требований превышает пороговое значение 150 ЭУМ, он прерывает изложение теории и организует повторение изученного материала в течение 20 УЕВ (п. 3.4, ситуация 2). Во время повторения уровень требований учителя L остается постоянным, ученик выполняет практические задания, стараясь запомнить изученное ранее. После этого учитель снова приступает к изложению нового материала. Эту ситуацию моделирует программа ПР–3.5. Результаты моделирования представлены на рис. 3.14.1 ($\upsilon = 12$ УЕВ), вертикальные линии соответствуют моментам времени, когда $D = 150$ ЭУМ и учитель переходит к повторению. Система самоадаптирующаяся: при увеличении скорости изложения υ нового материала ученик чаще задает вопросы, обнаруживая свое непонимание, учитель вынужден чаще останавливать изложение нового материала и заниматься повторением.

Изменяя скорость υ изложения нового материала учителем, можно изучить зависимости общего уровня требований учителя L и суммарных знаний ученика Z в конце занятия от скорости υ (рис. 3.14.2). Видно, что, пока скорость υ сообщения информации ниже критического значения $\upsilon_{кр}$, ученик самостоятельно усваивает учебный материал, L и Z возрастают пропорционально скорости υ. Когда скорость изложения υ превышает критическое значение $\upsilon_{кр}$, учитель вынужден периодически прерывать изучение теории и заниматься повторением; при этом L и Z уменьшаются. Получается, что ***независимо от скорости передачи информации учителем увеличение знаний ученика в течение фиксированного времени обучения*** T ***не превышает некоторого пре-***

дельного значения (около 2700 ЭУМ), определяемого пропускной способностью прямого канала связи "учитель-ученик" (рис. 3.14.2).

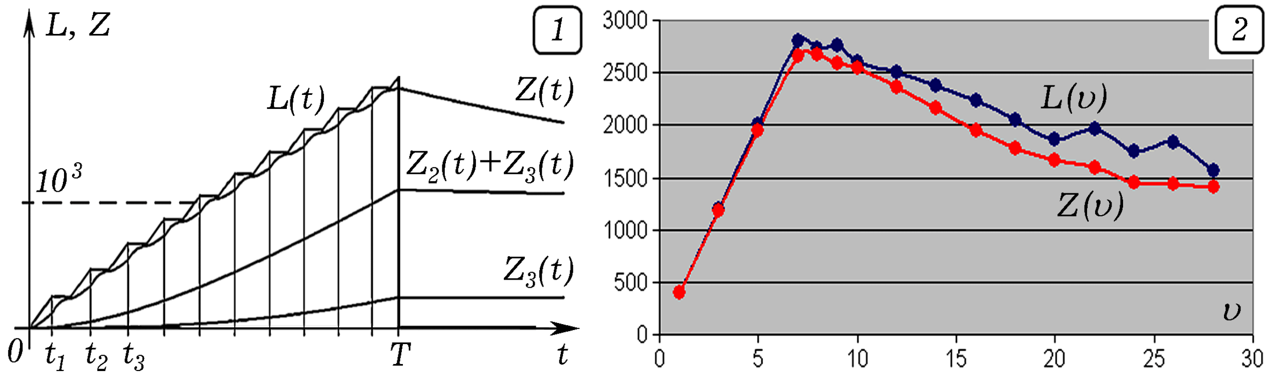


Рис. 3.14. Самоадаптирующаяся дидактическая система. Графики $L(\upsilon)$ и $Z(\upsilon)$

Изучим зависимость коэффициента обученности $K_L = Z / L$, количества усвоенной учеником информации Z и числа прерываний учителя $N_П$ от коэффициента усвоения ученика [70]. Для этого зададим конечную скорость υ сообщения информации учителем и проведем серию вычислительных экспериментов при различных коэффициентах усвоения α. Результаты моделирования позволяют утверждать, что с ростом коэффициента усвоения число прерываний учителя снижается до 0, количество усвоенных учеником знаний Z повышается до υT, коэффициент обученности K_L стремится к 1.

Компьютерная модель ученика также позволяет проанализировать зависимости суммарного времени изучения теории t_T, выполнения практических заданий $t_П$, коэффициента обученности K_L и числа прерываний учителя $N_П$ от скорости υ изложения теоретического материала. В результате проведения серии вычислительных экспериментов получены графики, изображенные на рис. 3.15. ***При увеличении скорости υ изложения материала: 1) суммарное время изучения теории t_T сначала равно длительности обучения T, а затем плавно уменьшается; 2) суммарное время повторения $t_П$ сначала равно нулю, а затем стремится к T; 3) число прерываний учителя $N_П$ сначала равно нулю, затем быстро возрастает, достигает максимума при $\upsilon = 12 - 14$ УЕВ$^{-1}$, а затем медленно убывает; 4) коэффициент обученности***

ученика K_L уменьшается от 1 до 0,8. Величины K, $N_П$ и L с ростом υ изменяются ступенчато, потому что возможно только целое число прерываний [70].

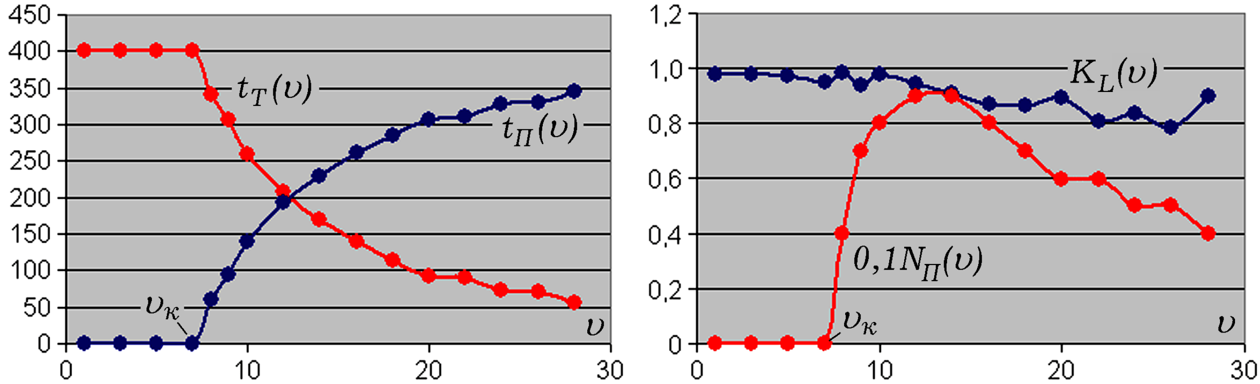


Рис. 3.15. Графики зависимостей $t_T(\upsilon)$, $t_П(\upsilon)$, $K_L(\upsilon)$ и $N_П(t)$

По графикам, представленным на рис. 3.14.2 и 3.15, можно определить критическое значение скорости $\upsilon_{кр}$ сообщения теоретического материала, при превышении которого ученик уже не может самостоятельно понять и усвоить учебный материал. При $\upsilon > \upsilon_{кр}$ учитель вынужден прерываться и заниматься повторением, разъяснением и выполнением практических заданий. При используемых параметрах модели оно составляет примерно 7 УЕВ$^{-1}$. Видимо, оптимальная скорость изложения нового материала лежит в интервале 7 – 9 УЕВ$^{-1}$. Когда υ превышает 14 УЕВ$^{-1}$, ученик не успевает понять теоретический материал, так как коэффициент передачи канала связи мал, а скорость сообщения информации с учетом ее сложности велика. Поэтому учитель вынужден слишком много времени тратить на повторение и закрепление, во время которого количество знаний ученика повышается до уровня требований.

Рассмотренная имитационная модель М-3.2 учитывает, что: 1) при обучении увеличивается количество непрочных знаний ученика, и они частично становятся прочными; 2) непрочные знания забываются быстрее прочных; 3) при увеличении скорости передачи нового материала ученик не успевает понять и усвоить всю сообщаемую ему информацию; 4) при увеличении отставания ученика от требований учителя усилия, прилагаемые учеником, сначала увеличиваются, достигают максимума, а затем уменьшаются; 5) информация о состоянии ученика поступает к учителю с некоторой задержкой по обратному каналу связи; 6) учитель может управлять процессом обучения, изменяя скорость сообщения новой информации или организуя повторение изученного материала. С помощью этой модели удалось обосновать следующее: ***1) при увеличении скорости сообщения нового материала скорость понимания (усвоения) сначала растет, достигает максимума, а затем снижается; 2) при чередовании теоретических и практических занятий ученик усваивает большее количество знаний; 3) результаты функционирования кибернетической системы “учитель-ученик” значительны, когда учитель адаптируется к возможностям ученика так, чтобы тот прикладывал максимально высокие усилия; 4) независимо от способа управления существует максимальная скорость, с которой ученик еще может усваивать новую информацию.*** Полученные результаты позволяют осуществить правильный выбор скорости изложения нового материала, при котором дидактическая система работает максимально эффективно: учитель успевает рассмотреть большое количество вопросов, а ученик усваивает практически весь изучаемый материал.

Приложение к главе 3

ПР-3.1

```
Program Model_zavisimost_F(D);  {M-3.1, Ris. 3.2, 3.3}
{$N+}Uses crt, graph; Const v=11; dt=0.005; Mt=1.5; Mz=0.12;
Var F,D,S,k,r,a,a1,a2,g1,g2,g3,L,Z,Z1,Z2,Z3,t,KK: single;
DV,MV: integer;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); r:=5E-3;
a:=13; a1:=0.005; a2:=a1/3; g1:=0.002; g2:=2E-4; g3:=2E-5;
Repeat t:=t+dt; k:=1; L:=L+v*dt;
If t>300 then begin k:=0; L:=0; end; D:=(L-Z);
F:=0; If L>Z then F:=4*(1-exp(-r*D))*(exp(-r*D));
Z1:=Z1+k*(a*F-a1*Z1)*dt-g1*Z1*dt;
Z2:=Z2+k*a1*Z1*dt-k*a2*Z2*dt-g2*Z2*dt;
Z3:=Z3+k*a2*Z2*dt-g3*Z3*dt; Z:=Z1+Z2+Z3; KK:=Z/(v*200);
circle(round(Mt*t),700-round(Mz*L),1);
circle(round(Mt*t),700-round(Mz*(Z1+Z2+Z3)),1);
circle(round(Mt*t),700-round(Mz*(Z2+Z3)),1);
circle(round(Mt*t),700-round(Mz*Z3),1);
circle(round(Mt*t),700,1); line(4,0,4,800);
{If abs(t-200)<0.01 then writeln(t,' ',v*200,' ',Z,' ',KK);}
until Keypressed; CloseGraph; END.
```

ПР-3.2

```
Program Metod_statistich_ispitan; {M-3.2, Ris. 3.4, 3.5}
{$N+}Uses dos,crt,graph;
Const dt=0.05; Mt=1.5; Mz=0.25; B=0.15; v=9;
```

```
Var F,D,Z,Z1,Z2,Z3,a,a1,a2,g1,g2,g3,SZ,y,k,KK,L,L1,vv,t: single;
DV,MV,m,j: integer; nn: array[1..120] of integer;
Function RND: single; var h,m,s,hs: word;
Begin GetTime(h,m,s,hs);
y:=1.11*y+hs/100+(hs/100)*random(1000)/1000;
y:=y-int(y); RND:=y; end;
Procedure RND1; begin a:=10+6*RND; a1:=0.005+3E-3*RND;
a2:=a1/2.72; g1:=2E-3+5E-4*RND; g2:=g1/2.72; g3:=g2/2.72; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'');
For j:=1 to 1000 do begin RND1; t:=0; Z1:=0; Z2:=0; Z3:=0;
Repeat t:=t+dt;  k:=1; If t<200 then L:=L+v*dt;
If t>400 then begin k:=0; L:=0; end; D:=(L-Z); F:=0;
If L>Z then F:=1.65*(1-exp(-D/100))*(B+(1-B)/(1+exp((D-200)/50)));
Z1:=Z1+k*(a*F/(1+exp((vv-12)/4))-a1*Z1-g1*Z1+g2*Z2)*dt;
Z2:=Z2+(k*a1*Z1-k*a2*Z2-g2*Z2+g3*Z3)*dt;
Z3:=Z3+(k*a2*Z2-g3*Z3)*dt; KK:=(Z1+Z2+Z3)/(v*200);
Z:=Z1+Z2+Z3; vv:=(L-L1)/dt; L1:=L; SZ:=Z1+Z2+Z3;
circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*L),1);
circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*(SZ)),1);
{circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*(Z2+Z3)),1);
circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*(Z3)),1);}
line(0,500,800,500); until (Keypressed)or(t>600);
For m:=20 to 120 do begin If (SZ/20>m-1)and(SZ/20<=m)then
begin inc(nn[m]); circle(10+4*m,700-nn[m]*4,2); end; end;
end; circle(10,10,2); Repeat until Keypressed;
CloseGraph; END.
```

ПР-3.3

```
Program Cheredovan_novogo_materiala; {M-3.2, Ris. 3.6, 3.7}
{$N+} Uses crt, graph;
Const dt=0.005; Mt=1.5; Mz=0.25; B=0.15; g1=2E-3; g2=g1/2.72;
g3=g2/2.72; a=13.8; a1=0.005; a2=a1/2.72; v=9.4; m=2;
Var DV,MV: integer; F,D,Z,Z1,Z2,Z3: single;
k,KK,L,L1,vv,Zn1,Zn,t: single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'');
Repeat t:=t+dt; k:=1; If sin(0.3142/20*t*m)>0 then L:=L+v*dt;
If t>400 then begin k:=0; L:=0; end; D:=(L-Z); F:=0;
If L>Z then F:=1.65*(1-exp(-D/100))*(B+(1-B)/(1+exp((D-200)/50)));
Z1:=Z1+k*(a*F/(1+exp((vv-12)/4))-a1*Z1-g1*Z1+g2*Z2)*dt;
Z2:=Z2+(k*a1*Z1-k*a2*Z2-g2*Z2+g3*Z3)*dt;
Z3:=Z3+(k*a2*Z2-g3*Z3)*dt; Z:=Z1+Z2+Z3; KK:=Z/(v*200);
vv:=(L-L1)/dt; L1:=L;
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*L),1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*Z),1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*(Z2+Z3)),1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*Z3),1); line(0,600,800,600);
{If abs(t-200)<0.01 then writeln(t,' ',v*400,' ',Z,' ',KK);}
until Keypressed; CloseGraph; END.
```

ПР-3.4

```
Program Zamknut_sistema_upravlen; {M-3.2, Ris. 3.12}
{$N+}Uses crt, graph; Const dt=0.005; Mt=1.5; Mz=0.2; B=0.15;
g1=0.002; g2=0.0002; g3=2E-5; a=15; a1=0.005; a2=0.0017;
```

```
Var DV,MV,ff,f1,f2,p: integer;
F,D,Z,Z1,Z2,Z3,v,vv,k,L,L1,t,tt,KK: single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); v:=14;
Repeat t:=t+dt; k:=1; If (ff=0) then L:=L+v*dt;
If (D>150)and(f1=0) then begin f1:=1; tt:=10; inc(p); end;
tt:=tt-dt; If (tt<0)and(f1=1) then ff:=1;
If (ff=1)and(f2=0) then begin L:=L-100; f2:=1; end;
If (ff=1)and(D<50) then begin ff:=0; f1:=0; f2:=0; end;
If t>400 then begin k:=0; L:=0; end; D:=(L-Z); F:=0;
If L>Z then F:=1.65*(1-exp(-D/100))*(B+(1-B)/(1+exp((D-200)/50)))
else F:=0; Z:=Z1+Z2+Z3;
Z1:=Z1+k*(a*F/(1+exp((vv-12)/4))-a1*Z1)*dt-g1*Z1*dt;
Z2:=Z2+k*a1*Z1*dt-k*a2*Z2*dt-g2*Z2*dt;
Z3:=Z3+k*a2*Z2*dt-g3*Z3*dt; KK:=(Z1+Z2+Z3)/(v*400);
vv:=(L-L1)/dt; L1:=L; circle(10+round(Mt*t),600,1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*L),1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*(Z1+Z2+Z3)),1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*(Z2+Z3)),1);
circle(10+round(Mt*t),600-round(Mz*Z3),1);
{If abs(t-400)<0.01 then writeln(t,' ',v*400,' ',Z,' ',KK,' ',p);}
until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

ПР-3.5

```
Program Vremya_izucheniya_povtoreniya; {M-3.2, Ris. 3.14, 3.15}
{$N+} Uses crt, graph; Const e=2.72; dt=0.005; Mt=1.5; Mz=0.2;
B=0.15; g1=0.002; g2=g1/e; g3=g2/e; a=12; a1=0.005; a2=a1/e;
Var DV,MV,q,p: integer;
F,D,Z,Z1,Z2,Z3,v,vv,k,L,L1,t,tz,KK,mm: single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); v:=12;
Repeat  t:=t+dt; k:=1; If q=0 then L:=L+v*dt;
If (D>150)and(q=0) then begin tz:=20; q:=1; inc(p);
end; tz:=tz-dt; If (tz<0)and(q=1) then q:=0;
If t>400 then begin k:=0; L:=0; end; D:=(L-Z); F:=0;
If L>Z then F:=1.65*(1-exp(-D/100))*(B+(1-B)/(1+exp((D-200)/50)))
else F:=0;
Z1:=Z1+k*(a*F/(1+exp((vv-12)/4))-a1*Z1)*dt-g1*Z1*dt+g2*Z2*dt;
Z2:=Z2+(k*a1*Z1-k*a2*Z2-g2*Z2+g3*Z3)*dt;
Z3:=Z3+(k*a2*Z2-g3*Z3)*dt; vv:=(L-L1)/dt;
If L>mm then mm:=L; Z:=Z1+Z2+Z3; KK:=Z/mm{(v*400)};
L1:=L; circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*L),1);
circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*Z),1);
circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*(Z2+Z3)),1);
circle(10+round(Mt*t),500-round(Mz*Z3),1);
(* If abs(t-400)<0.01 then writeln(t:2:3,' Treb=',{v*400}mm:2:3,
' Vr_t=',mm/v:2:3,' Vr_pov=',400-mm/v:2:3,' Z=',Z:2:3,'K=',KK:2:3,
' P=',p); *)
until Keypressed; CloseGraph; END.
```

Глава 4.
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБУЧЕНИЯ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

Особый интерес представляет собой моделирование обучения в школе и вузе, в ходе которого, исходя из заданных параметров обучаемого и распределения учебной информации, определяется уровень знаний ученика по различным предметам (темам, вопросам) в последующие моменты времени. При этом должны быть учтены психолого-педагогические закономерности дидактического процесса [11, 15]. Перечислим некоторые из них: 1) наиболее прочно усваиваются те элементы учебного материала (ЭУМ), которые включены в учебную деятельность и/или встречаются в повседневной жизни; 2) мотивация обучения и скорость увеличения знаний зависят от разности между уровнем требований и имеющимся у ученика количеством знаний; 3) результат обучения зависит от сложности материала и применяемых методов; 4) забывание происходит по экспоненциальному или логистическому закону. Следует учитывать неоднородность учебного материала; для этого знания ученика можно разделить разными способами [53, 77]: 1) на прочные и непрочные знания, в зависимости от скорости их забывания; 2) на логически связанные и несвязанные знания; 3) на знания, относящиеся к гуманитарным и точным наукам; 4) на используемые и неиспользуемые знания. При этом применяется матричная модель ученика; распределение различных видов учебной информации, коэффициентов усвоения и забывания по классам также задается в виде одномерных массивов. Следует помнить, что на практике реализуются самые разнообразные ситуации. Существование нескольких различных подходов к моделированию процесса обучения обусловлено сложностью дидактической системы и неопределенностью условий ее функционирования.

4.1. Двухкомпонентная модель обучения в школе (М-4.1). Рассмотрим двухкомпонентную модель ученика, знания которого по классам делятся на: 1) непрочные знания Z_i, забываемые быстро; 2) прочные знания N_i, которые практически не забываются. Через i обозначим номер класса, в котором изучались эти знания впервые. Состояние ученика в любой момент времени t определяется матрицами $Z_i = (Z_1, Z_2, ..., Z_{11})$ и $N_i = (N_1, N_2, ..., N_{11})$, характеризующими количества усвоенных прочных и непрочных знаний, которые входят в программу 1-го, 2-го, …, 11-го классов. Ученик характеризуется коэффициентами: 1) обучения α_i; 2) превращения непрочных знаний в прочные β_i; 3) забывания γ_{Zi} и γ_{Ni} ($i = 1, 2, \ldots, 11$).

Построение модели. Предлагаемая двухкомпонентная модель обучения выражается системой уравнений [69]:

$$dZ_i / dt = \alpha_i (L_i - Zn_i) - \beta_i Z_i - \gamma_{Zi} Z_i, \quad dN_i / dt = \beta_i Z_i - \gamma_{Ni} N_i, \quad i = 1, \ldots, 11.$$

Здесь L_i – уровень требований, предъявляемый учителем в i-м классе, равный сообщаемым знаниям Z_{0i}, $Zn_i = Z_i + N_i$ – суммарные знания ученика за i-й класс, Z_i – количество непрочных знаний за i-й класс, имеющих высокий коэффициент забывания γ_{Zi}, а N_i – количество у ученика прочных знаний за i-й класс, которые имеют низкий коэффициент забывания γ_{Ni}. При обучении в i-м классе изменяются Z_i и N_i ($i = 1, 2, \ldots, 11$), а также количества знаний за предыдущие классы, к которым обращается ученик. Общее количество знаний ученика, относящихся к i-му, $(i+1)$-му, …, j-му классам $Zn_{i-j} = Zn_i + Zn_{i+1} + \ldots + Zn_j$. Доля усвоенного учеником учебного материала за i-й класс равна $K_i^{zn}(t) = Zn_i(t) / L_i = (Z_i(t) + N_i(t)) / L_i$. Коэффициент прочности знаний ученика показывает, какую часть прочные знания составляют от общего количества знаний ученика в данный момент времени t:

$$P(t) = N(t) / (Z(t) + N(t)) = N(t) / Zn(t).$$

Рассматриваемая модель обучения должна учитывать: 1) основные закономерности обучения и забывания; 2) превращение непрочных знаний в прочные знания (или навыки), которые имеют меньший коэффициент забывания; 3) увеличение количества изучаемой информации и ее сложности (степени абстрактности) при переходе ученика в старшие классы; 4) повышение коэффициента усвоения школьника при переходе в следующий класс; 5) использование учеником j-го класса учебного материала, изученного в предыдущих 1-м, 2-м, …, $(j-1)$-м классах; 6) применение знаний из учебника j-го класса в повседневной жизни во время каникул и после окончания школы.

Параметры модели. Для моделирования изменения знаний ученика следует задать его параметры, начальное состояние в момент $t=0$ и оказываемое воздействие. Ученик характеризуется [112]:

1. Коэффициентами усвоения α_i, которые определяют быстроту перехода сообщаемой учителем информации $Z_{0i}=L_i$ за i-й класс в непрочные знания ученика Z_i. Значения α_i по мере обучения монотонно возрастают, так как чем больше информации ученик усвоил, тем легче он запоминает новую информацию. Коэффициенты α_i можно задать так: $a_i=$(1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.9, 2.2, 2.5, 2.8, 3.1, 3.4, 3.7), $\alpha_i=a_i/12$.

2. Коэффициентами формирования умений и навыков $\beta_i=\alpha_i/80$ ($i=1$, 2, …, 11), характеризующими скорость превращения непрочных знаний в прочные; при этом Z_i уменьшается, а N_i возрастает на ту же величину.

3. Коэффициентами забывания непрочных γ_{Zi} и прочных γ_{Ni} знаний, впервые изученных в i-м классе. Знания, полученные в 1–4-х классах, используются человеком в повседневной жизни и поэтому запоминаются хорошо. В старших классах увеличивается степень абстрактности учебной информации, то есть приобретаемые знания сильнее оторваны от повседневной жизни и имеют более высокий коэффициент забывания. Эти коэффициенты можно задать с

помощью массива целых чисел таким образом: $g_i = (10,\ 10,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18)$, $\gamma_{Zi} = g_i / 200$, $\gamma_{Ni} = \gamma_{Zi} / 60$. Так как забывание происходит по экспоненциальному закону, то время забывания половины имеющихся знаний равно $T = \ln 2 / \gamma$. Например, для непрочных знаний, изученных в шестом классе, γ_{Z6}= 0,065 месяц$^{-1}$, $T_Z \approx$ 10,7 месяца, а для прочных знаний – γ_{N6}= 0,00108 месяц$^{-1}$, $T_N \approx$ 53 года.

Внешнее воздействие, оказываемое на ученика характеризуется:

1. Распределением учебной информации в течение всего времени обучения в школе; оно задается массивом $L_i = (10,\ 12,\ 14,\ 17,\ 20,\ 24,\ 29,\ 35,\ 42,\ 50,\ 59)$, где L_i – уровень требований учителя в i-м классе, который равен количеству сообщенных им знаний.

2. Коэффициентами обращения ученика j-го класса к знаниям, полученным в i-м классе, задаваемыми матрицей:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0{,}7 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}7 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Из $\varepsilon_{3,11}$= 0,7 следует, что, обучаясь в одиннадцатом классе, ученик использует 70 % знаний, полученных в третьем классе.

3. Коэффициентом использования информации, изученной в i-м классе, во время каникул и после обучения, который можно задать так: $c_i = 0{,}3$ при $i < 5$ и $c_i = 0{,}3/(i-4)$ при $i \geq 5$. В обозначенные промежутки времени человек читает книги, выполняет математические действия, смотрит фильмы, разговаривает на иностранном языке, использует различные устройства и программные продукты. При этом в большей степени увеличиваются и закрепляются знания, полученные в 1–4-х классах, и в меньшей степени – знания из 9–11-х классов, уровень абстрактности которых выше.

Значения L_i, ε_{ij} и c_i должны отражать особенности школьной программы. Параметры α_i, β_i, γ_{Zi} и γ_{Ni} характеризуют гипотетического ученика, который успешно учится в школе. Время t измеряется в месяцах; считается, что из 12 месяцев в году 3 месяца ученик отдыхает, а 9 – учится. За начало отсчета $t = 0$ принят первый день обучения в первом классе, начальный уровень знаний ученика: $Zn(0) = 0$.

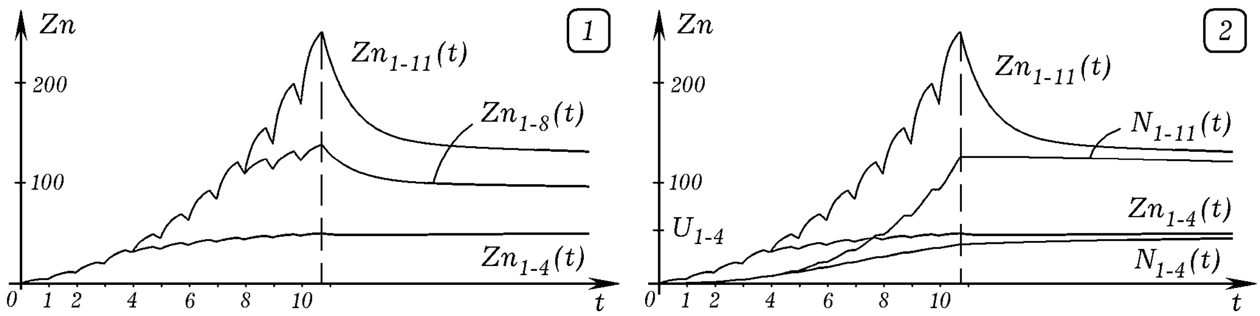


Рис. 4.1. Результаты моделирования обучения в школе

<u>Результаты моделирования.</u> Используется программа ПР–4.1. На рис. 4.1–4.3 представлены результаты имитационного моделирования изменения количества знаний гипотетического школьника в течение 11 лет посещения школы и 10 лет после ее окончания. На рис. 4.1.1 приведены графики зависимостей количества знаний ученика за 1–4-е, 1–8-е и 1–11-е классы от времени. Из рис. 4.1.2 видно, что в процессе обучения (1–11-е годы) суммарное количество знаний $Zn(t)$ в среднем возрастает, а после обучения – снижается в первую очередь из-за забывания непрочно усвоенных знаний. Провалы в графике $Zn(t)$ соответствуют летним каникулам, в течение которых школьник забывает часть непрочных знаний. Количество прочно усвоенных знаний (или навыков) $N(t)$ в течение обучения повышается, а после обучения практически не изменяется. Графики $Zn_{1-4}(t)$ и $N_{1-4}(t)$ показывают динамику изменения количества суммарных знаний и навыков (прочных знаний), соответствующих 1–4-м классам в течение всего рассматриваемого промежутка t от 0 до 20 лет. Речь идет о навыках чтения, письма, выполнения арифметических операций, элементарных знаний об окружающем мире, которые человек усваивает в начальной школе и за-

тем использует всю свою жизнь. Видно, что их количество монотонно возрастает, стремясь к предельному значению $L_{1-4} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, равному информации, которую должен в идеале усвоить ученик в 1–4-х классах.

На рис. 4.2.1 показаны графики изменения количества знаний $Zn_{5-8}(t)$ и $N_{5-8}(t)$, изучаемых в 5–8-х классах. Они имеют более высокий уровень абстрактности и в меньшей степени используются в повседневной жизни, поэтому суммарное количество знаний Zn_{5-8} к концу школы (t = 11 лет) равно $0{,}8\,L_{5-8}$, количество прочных знаний $N_{5-8} \approx 0{,}5\,L_{5-8}$ от общего уровня требований учителя $L_{5-8} = L_5 + L_6 + L_7 + L_8$. Так как приобретенные в 5–8-х классах знания также частично используются в повседневной жизни, то после окончания обучения их суммарное количество сначала снижается, а затем остается постоянным на уровне $0{,}5\,L_{5-8}$.

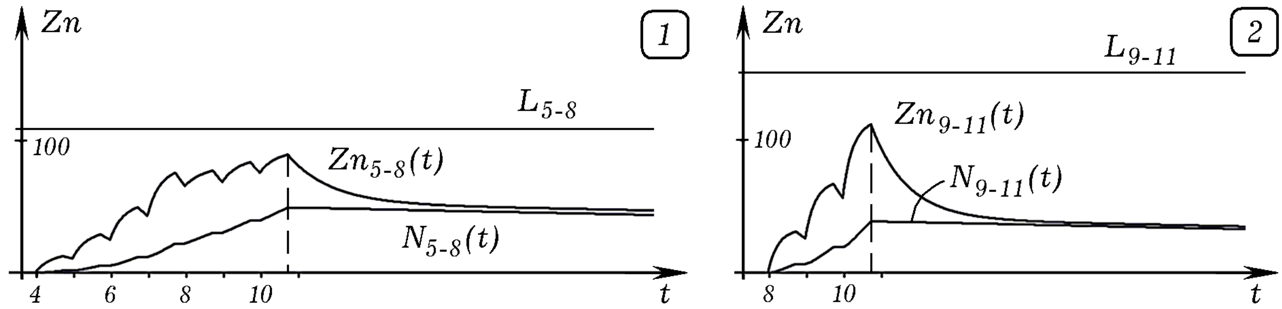


Рис. 4.2. Изменение количества знаний, изучаемых в 5–8-х и 9–11-х классах

Графики $Zn_{9-11}(t)$ и $N_{9-11}(t)$ на рис. 4.2.2 показывают изменение суммарного количества знаний и количества прочных знаний, изучаемых в 9–11-х классах. К концу обучения (t = 11 лет) суммарное количество знаний Zn_{9-11} достигает своего максимума $0{,}7\,L_{9-11}$, в то время как N_{9-11} примерно равно $0{,}25\,L_{9-11}$. При этом L_{9-11} – суммарное количество учебной информации, содержащееся в учебниках 9–11-х классов, которое в идеале должен усвоить учащийся. При подборе коэффициентов считалось, что гипотетический ученик после успешного обучения в школе помнит более $0{,}6\,L_{9-11}$, а за летние каникулы после 10-го класса забывает около трети усвоенного в 10-м классе материала (рис. 4.2.2).

Модель позволяет изучить зависимость доли усвоенных знаний $K_i^{zn}(i) = Zn_i / L_i$ и $K_i^n(i) = N_i / L_i$ (i=1, 2, … 11) ученика в i-м классе от времени. На рис. 4.3.1 показано распределение $K_i^{zn}(i)$ и $K_i^n(i)$ ученика в момент t=8 лет (начало 9-го класса), на рис. 4.3.2 – распределение $K_i^{zn}(i)$ и $K_i^n(i)$ в момент t = 11 лет (через 3 месяца после окончания школы), на рис. 4.3.3 – распределение $K_i^{zn}(i)$ и $K_i^n(i)$ в момент t = 15 лет. Видно, что в моменты t=8 лет и 11 лет величины $K_i^{zn}(i)$ и $K_i^n(i)$ практически монотонно убывают с ростом номера i (рис. 4.3.1 и 4.3.2). При t= 8 лет K_1^{zn}= 0,8 – 0,9, K_8^{zn} ≈0,6, $K_9^{zn}=K_{10}^{zn}=K_{11}^{zn}$= 0, а при t = 11 лет K_1^{zn} ≈0,95, K_{11}^{zn}= 0,7 – 0,8. После окончания обучения в школе происходит забывание непрочных знаний, их количество уменьшается. Уровень прочных знаний, соответствующих 1–4-му классу, остается высоким потому, что они используются в повседневной жизни (рис. 4.3.3). Для $i<5$ доля знаний, усвоенных учеником, высока (K_i^{zn}= 0,85 – 0,95), а затем по мере увеличения i коэффициент K_i^{zn} плавно снижается до 0,3.

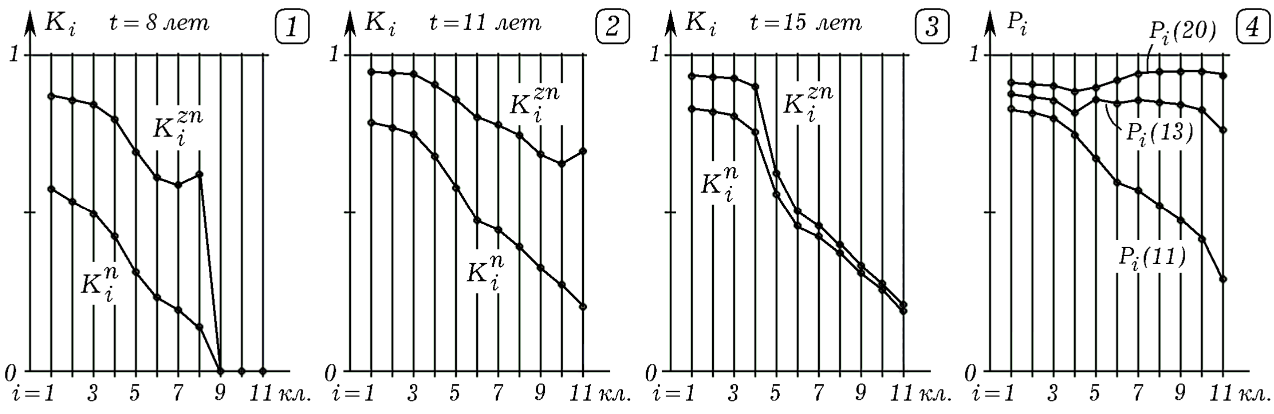


Рис. 4.3. Доля усвоенных знаний и их прочность в зависимости от класса

На рис. 4.3.4 показана зависимость прочности $P_i = N_i / Zn_i$ усвоенных знаний от номера класса после окончания обучения в моменты t=11, 13 и 20 лет. Видно, что сразу после окончания школы (t=11 лет) наиболее прочно усвоены знания 1–4-х классов (P_i = 0,8 – 0,9), а прочность знаний 9–11-х классов лежит в интервале 0,35–0,5. С течением времени из-за забывания количество непрочных знаний уменьшается быстрее, чем прочных (особенно для $i > 4$), поэтому коэффициент прочности знаний человека возрастает (хотя их количество уменьшается), и при $t =$ 20 лет для всех i примерно равен 0,9. Итак, ***рассмотренный метод позволяет проанализировать количество усвоенных учеником знаний и их качественный состав в разные моменты времени.***

4.2. Моделирование обучения в школе, учитывающее усвоение осмысленной информации (М-4.2). Возможен другой подход к созданию модели учебного процесса. Чтобы компьютерная имитация более точно соответствовала реальному процессу обучения в 11-летней школе, выделим следующие три категории знаний: 1) $D-$знания, использующиеся в дальнейшей деятельности и запоминаемые очень прочно; 2) $T-$знания различных теорий, идей, законов, рассуждений, которые хорошо ассоциируются с уже имеющимися у ученика понятиями, но не используются на практике; 3) абстрактные $A-$знания отдельных фактов, не использующиеся в дальнейшем и плохо ассоциирующиеся с уже имеющимися знаниями. Распределение учебной информации в течение всего времени обучения в школе (11 лет) можно задать тремя массивами, содержащими: 1) количество изучаемой информации (в ЭУМ) в каждом классе $I_i = L_i =$(30, 35, 40, 50, 65, 80, 100, 120, 145, 170, 175); 2) долю прочных $D-$знаний $d_{1i} =$ (0,65; 0,6; 0,55; 0,5; 0,45; 0,4; 0,35; 0,3; 0,25; 0,2; 0,1); 3) долю непрочных $A-$знаний $d_{3i} =$(0,05; 0,1; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,25; 0,3; 0,3; 0,3; 0,3). Скорости передачи учителем и усвоения учеником $D-$, $T-$, $A-$знаний (в ЭУМ/месяц) соответственно равны: $\upsilon_{1i} = d_{1i} I / T$, $\upsilon_{2i} = (1 - d_{1i} - d_{3i}) I / T$, $\upsilon_{3i} = d_{3i} I / T$, $T =$ 9 мес.

В течение учебного года количество знаний ученика за i-й класс возрастает пропорционально времени: $Z_i(t) = Z_{0i} + \upsilon_i (t - t_0)$. При этом все остальные (неиспользуемые) знания уменьшаются за счет забывания. Скорости забывания знаний первой и третьей категорий пропорциональны их количеству. Осмысленные логически связанные T – знания уменьшаются по логистическому закону (п. 2.2).

Предлагаемая математическая модель обучения имеет вид:

$$\frac{dD_i}{dt} = k\upsilon_{1i} - (1-k)\gamma_1 D_1, \; B = T_i^0/100, \quad x_i^0 = 100, \quad \frac{dx_i}{dt} = -\gamma_2(100{,}5 - x_i)x_i,$$

$$\frac{dT_i}{dt} = k\upsilon_{2i} - (1-k)Bx_i(t), \qquad \frac{dA_i}{dt} = k\upsilon_{3i} - (1-k)\gamma_3 A_i.$$

Здесь D_i, T_i и A_i – количества $D-$, $T-$ и $A-$знаний ученика, относящихся к i-му классу. Во время обучения в j-м классе информация, усвоенная в 1-м, 2-м, …, $(j-1)$-м классах, частично забывается; учебный материал за $(j+1)$, $(j+2)$, …, 11-й классы еще не изучался, поэтому если $i = j$, то $k = 1$, а иначе $k = 0$. Для нахождения общего количества знаний ученика $Zn(t)$ в данный момент времени t необходимо просуммировать знания D_i, T_i и A_i по всем $i = 1$, 2, …, 11: $Z_i = D_i + T_i + A_i$, $Zn_i = Z_1 + Z_2 + ... + Z_{11}$. Используется компьютерная программа ПР–4.2. В нашем случае параметры модели ученика ($\gamma_1 = 5\cdot10^{-3}$, $\gamma_2 = 7\cdot10^{-3}$, $\gamma_3 = 10^{-2}$) подбирались так, чтобы получающиеся результаты соответствовали обучению школьника, который успешно (то есть на 70–80 %) справляется с учебной программой.

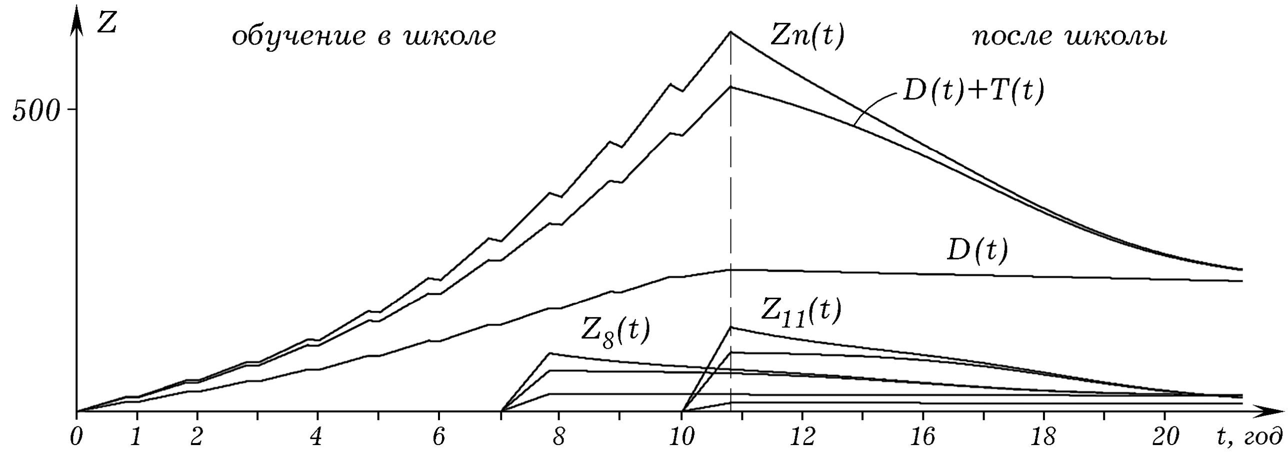


Рис. 4.4. Результаты моделирования обучения в 11-летней школе

На рис. 4.4 представлены графики $D(t)$, $D(t)+T(t)$ и $Z(t)=D(t)+T(t)+$ $+A(t)$, показывающие зависимость количества знаний различных категорий от времени. Небольшие провалы в графиках соответствуют летним каникулам. Видно, что после окончания школы $D-$знания, используемые на практике, забываются медленно, а непрочные $A-$знания – быстро. На рис. 4.4 также показаны графики изменения количества знаний, приобретаемых в 8-м и 11-м классах. ***Предложенный подход действительно позволяет изучить динамику изменения знаний при обучении в школе и после ее окончания.***

4.3. Моделирование обучения в школе и вузе: гуманитарные и точные дисциплины (М-4.3). Теперь проанализируем обучение будущего специалиста в школе и вузе, учитывая деление дисциплин на точные и гуманитарные. Для определенности допустим, что он/она, обучаясь в школе, проявляет интерес к точным наукам и после 11-го класса поступает в вуз на физико-математический факультет (5 лет), успешно его заканчивает и работает по специальности. Суммарное время обучения составляет 16 лет. Существенным фактором, влияющим на результат обучения, является степень использования математических моделей в той или иной дисциплине. Понимание и усвоение качественных моделей и рассуждений (история, биология, литература и т. д.) обычно сопряжено с меньшими трудностями, чем изучение математических абстракций и количественных моделей (математика, алгебра, геометрия, в меньшей степени физика и химия). Поэтому в данном случае все изучаемые предметы имеет смысл разделить на две группы [116]: 1) точные дисциплины Д1 (алгебра, геометрия, физика и химия), при изучении которых используются математические модели; 2) все остальные “неточные” дисциплины Д2 (русский и иностранный языки, литература, история, география, биология и т. д.), в которых превалируют качественные рассуждения. При этом сохраняется деление знаний на непрочные знания Зн-1 Z_i, не очень прочные знания и умения Зн-2 U_i и прочные знания и интеллектуальные навыки Зн-3 N_i.

Построение модели. Чтобы компьютерная имитация более точно соответствовала реальности, следует учесть, что результат обучения зависит от: 1) коэффициента усвоения k_i, который будем считать равным доле усваиваемой учебной информации на i-м году обучения; его величина зависит от интеллектуальных способностей ученика и от сложности изучаемого материала; 2) количества учебной информации $I_i = L_i$, которую обучаемый получает в 1-м, 2-м, 3-м, …16-м учебном году; 3) доли b_i учебной информации, изучаемой в i-м учебном году (i=1, 2, …, 16), которая используется в последующем обучении и в повседневной жизни. Чем больше b_i, тем быстрее увеличивается Z_i в последующие годы обучения и тем медленнее уменьшается Z_i вследствие забывания. Знания ученика (то есть состояние дидактической системы) в любой момент времени t определяется матрицами $Z_i = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{16})$, $U_i = (U_1, U_2, \ldots, U_{16})$ и $N_i = (N_1, N_2, \ldots, N_{16})$, характеризующими количества усвоенных знаний первой, второй и третьей категорий, которые входят в программу 1-го, 2-го, …, 16-го года обучения. Общее количество знаний за i-й год $Zn_i = Z_i + U_i + N_i$.

Распределение учебной информации в течение всего времени обучения в школе и вузе (16 лет) можно задать двумя массивами: 1) для дисциплин Д1: L_i^1 = (10, 12, 14, 19, 23, 32, 37, 42, 61, 80, 90, 100, 100, 100, 100, 100); 2) для дисциплин Д2: L_i^2 = (20, 24, 28, 38, 46, 64, 72, 84, 122, 160, 180, 40, 30, 0, 0, 0). При этом учитывается, что: 1) количество информации в школьных учебниках по дисциплинам Д2 примерно в 2 раза больше, чем для дисциплин Д1; 2) на 1-м, 2-м и 3-м курсах (12–14-е годы обучения) студент не очень глубоко изучает дисциплины второй группы (история, психология, иностранный язык); 3) в течение всего срока обучения в вузе (12–16-е годы обучения) студент активно изучает дисциплины физико-математического цикла. Так как обучение длится около 8 месяцев в году, то скорость поступления информации в i-м классе равна $\upsilon_i = L_i / 8$ (ЭУМ/месяц). Учитывая, что школьник более усердно изучает точные науки, коэффициент усвоения можно задать так: 1) для дисциплин Д1 физико-математического цикла k_i=(1, 0.95, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.8, 0.8, 0.8, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7); 2) для “гуманитарно-качественных” дисциплин Д2 k_i=(1, 0.95, 0.9, 0.8, 0.7, 0.7, 0.6, 0.6, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0 ,0). Такой выбор k_i обусловлен учетом следующих факторов: 1) увеличением сложности учебного материала; 2) увеличением его объема; 3) повышением способности ученика усваивать учебную информацию; 4) высоким интересом к “точным” наукам. Значения b_i, показывающие, какую часть информации, полученной в i-м году, ученик использует в обучении и дальнейшей жизни, задаются массивами: для дисциплин Д1 $b_i =$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.6); для дисциплин Д2 $b_i =$(1, 0.95, 0.9, 0.8, 0.7, 0.7, 0.6, 0.6, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0, 0). При повторении учебного материала, изученного в предыдущем i-м году ($i < j$, j – год обучения) скорость прироста знаний пропорциональна разности $b_i L_i$ и Zn_i (если $b_i L_i > Zn_i$).

Получаем следующую трехкомпонентную модель обучения [116]:

Во время обучения ($c = 1$):

$$dZ_i / dt = f \cdot k_i \upsilon_i + B(b_i L_i - Zn_i) - A\alpha_1 Z_i - (1 - b_i)\gamma_1 Z_i,$$

$$dU_i / dt = A(\alpha_1 Z_i - \alpha_2 U_i) - (1 - b_i)\gamma_2 U_i,$$

$$dN_i / dt = A\alpha_2 U_i - (1 - b_i)\gamma_3 N_i,$$

Во время каникул и после обучения ($c = 0$):

$$dZ_i / dt = q \cdot [B(b_i L_i - Zn_i) - A\alpha_1 Z_i] - (1 - b_i)\gamma_1 Z_i,$$

$$dU_i / dt = q \cdot A(\alpha_1 Z_i - \alpha_2 U_i) - (1 - b_i)\gamma_2 U_i,$$

$$dN_i / dt = q \cdot A\alpha_2 U_i - (1 - b_i)\gamma_3 N_i, \quad Zn_i = Z_i + U_i + N_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 16.$$

$$f = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad A = \begin{cases} f + 0{,}33 b_i, & i \le j \\ 0, & i > j; \end{cases} \quad B = \begin{cases} 0{,}02, & i < j, \\ 0, & i \ge j; \end{cases} \quad q = \begin{cases} q', & i \le j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Для любого момента времени t:

$Zn_i = Z_i + U_i + N_i$, $i = 1, 2, \ldots, 16$.

$$Zn(t) = \sum_{i=1}^{16} Zn_i(t), \quad Z(t) = \sum_{i=1}^{16} Z_i(t), \quad U(t) = \sum_{i=1}^{16} U_i(t), \quad N(t) = \sum_{i=1}^{16} N_i(t).$$

За $t = 0$ примем начало обучения в 1-м классе; при этом $Z_i = U_i = N_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, 16$. Если i равно году обучения j, то $f = 1$, и Z_i во время обучения увеличивается со скоростью $k_i \upsilon_i$; иначе $f = 0$. В j-м классе происходит изучение материала за j-й класс и повторение за 1-й, 2-й, …, $(j-1)$-й классы. Слагаемое $B(b_i L_i - Zn_i)$ позволяет учесть повышение знаний Z_i, изученных в предыдущих классах ($i < j$), за счет повторения и их использования в j-м классе. При обучении непрочные знания становятся более прочными; скорости перехода непрочных знаний в прочные при $i \le j$ равны $A\alpha_1 Z_i$ и $A\alpha_2 U_i$. Слагаемое $A\alpha_1 Z_i$ учитывает переход непрочных знаний Зн-1 в знания Зн-2; если $i = j$, то $f = 1$ и скорость перехода пропорциональна b_i и равна $(1 + 0{,}33 b_i)\alpha_1 Z_i$. Если $i < j$ (знания Z_i, получены ранее), то скорость приращения Z_i меньше и равна $0{,}33 b_i \alpha_1 Z_i$. Слагаемое $A\alpha_2 U_i$ позволяет учесть превращение знаний Зн-2 в прочные знания Зн-3.

Знания, часто используемые в повседневной жизни, забываются медленнее. Поэтому скорости забывания пропорциональны количеству знаний соответствующей категории и с ростом b_i уменьшаются; они равны: $-(1 - b_i)\gamma_1 Z_i$, $-(1 - b_i)\gamma_2 U_i$ и $-(1 - b_i)\gamma_3 N_i$. Допустим, что во время каникул интенсивность использования ранее усвоенных знаний в 10 раз меньше, чем во время обучения, тогда $q' = 0{,}1$. После окончания вуза знания точных дисциплин Д1 используются более активно, для них $q' = 0{,}3$, а для дисциплин Д2 $q' = 0{,}1$. При этом так же происходит переход непрочных знаний в прочные; скорости “упрочнения” знаний соответственно равны $qA\alpha_1 Z_i$ и $qA\alpha_2 U_i$. Параметры модели подбирались так, чтобы получающиеся результаты соответствовали обучению школьника или студента, который успешно (то есть на 70–80 %) справляется с учебной программой. Используется программа ПР–4.3.

Результаты моделирования. На рис. 4.5 показана динамика роста знаний $Zn(t)$, $U(t)+N(t)$ и $N(t)$, соответствующих точным дисциплинам Д1. Из графиков видно, что при обучении в школе и вузе суммарный уровень знаний ученика $Zn(t)$ по дисциплинам Д1 почти повторяет график зависимости $I(t)$. После окончания вуза человек продолжает работать по своей специальности, используя полученные при обучении знания. При этом непрочные знания становятся более прочными, количество прочных знаний $N(t)$ возрастает. График $Zn_{11}(t)$ показывает, что количество знаний, приобретенных в 11-м классе, постепенно возрастает до максимального значения $L_{11}(t)$.

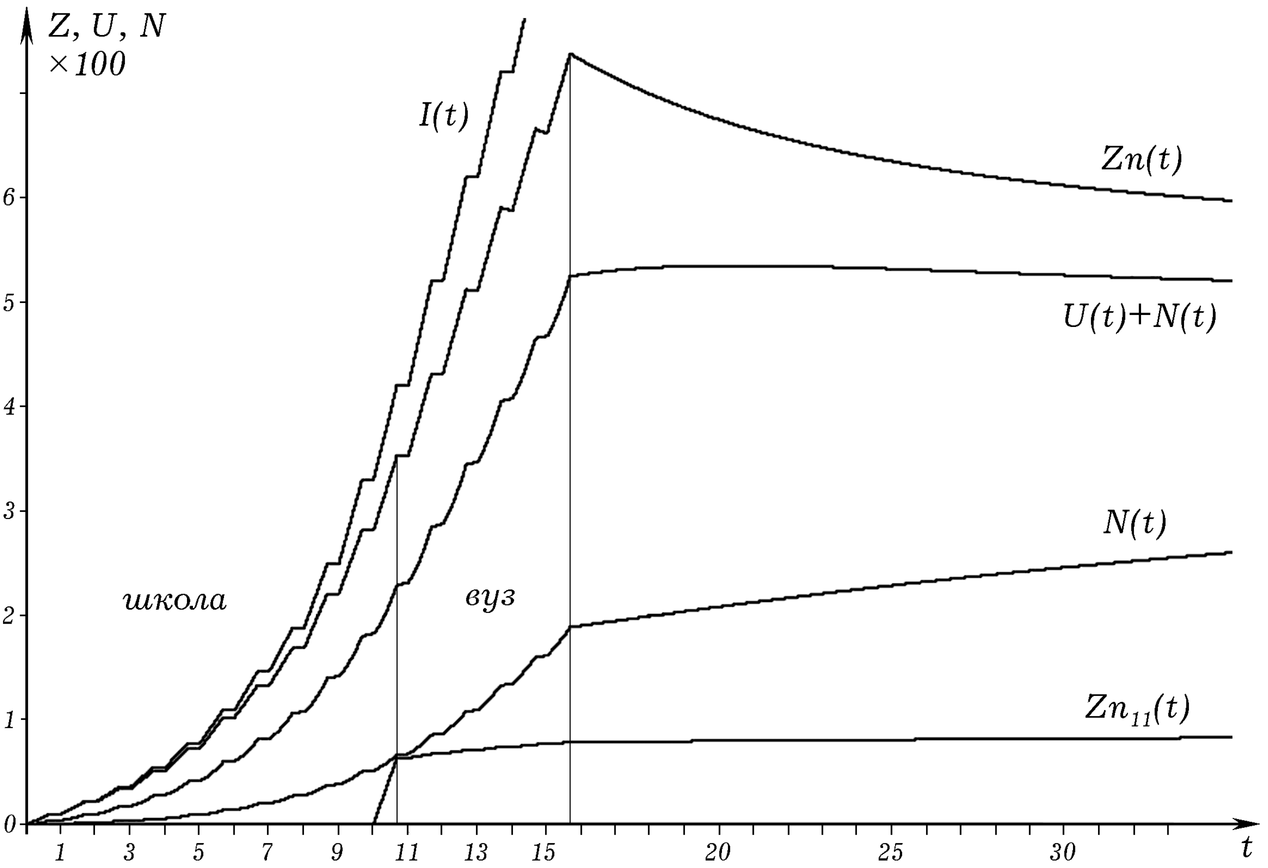


Рис. 4.5. Изменение знаний по дисциплинам Д1 (точные науки)

Графики, характеризующие изменение знаний по “гуманитарно-качественным” дисциплинам Д2, представлены на рис. 4.6. Видно, что при выбранных параметрах модели увеличение знаний $Zn(t)$ гораздо сильнее отстает от $I(t) = L(t)$, достигает максимума во время обучения в вузе, а затем уменьшается вследствие забывания. После окончания вуза количество прочных знаний $N(t)$ остается практически неизменным. Количество знаний Zn_8, соответствующих дисциплинам Д2 за 8-й класс, во время обучения в 8-м классе возрастает, затем остается постоянным и медленно снижается. Это объясняется тем, что рассматриваемый человек дисциплины Д2 использует в меньшей степени (b_i мало) и мотивация к их изучению низкая (k_i мало).

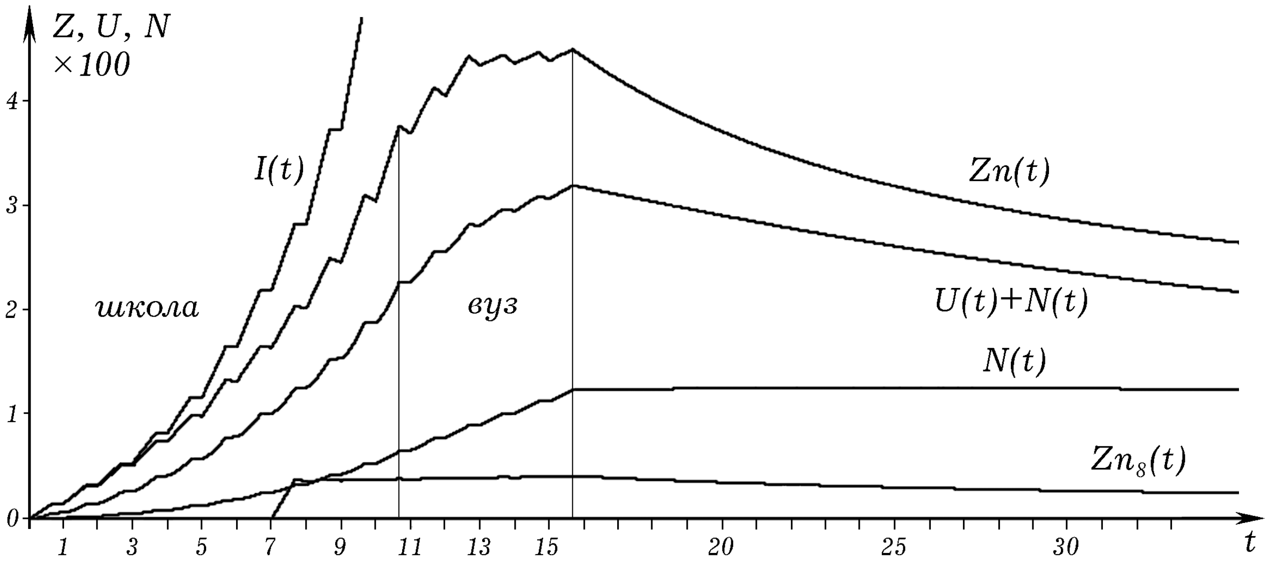


Рис. 4.6. Изменение знаний по дисциплинам Д2 (неточные науки)

Предложенный подход учитывает: 1) переход непрочных быстро забывающихся знаний в прочные, которые забываются медленнее; 2) использование изученной информации при последующем обучении и в повседневной жизни; 3) зависимость коэффициента усвоения от характера изучаемых предметов и года обучения; 4) распределения количества учебной информации по годам для различных видов дисциплин. ***Эта многокомпонентная модель обучения в школе и вузе позволяет проанализировать изменение знаний ученика по точным и гуманитарным наукам.*** Дальнейшее развитие модели требует ее уточнения и детализации, например, учета особенностей изучения отдельных предметов и т. д.

4.4. Модель обучения в школе и вузе: используемые и неиспользуемые знания (М-4.4). Известно, что знания, включенные в учебную деятельность ученика, запоминаются прочнее, а забываются медленнее. Для каждого конкретного ученика вся изучаемая в школе информация может быть разделена на две категории [77]: 1) полезные П-знания, которые часто используются на практике, в повседневной жизни и в последующем обучении; 2) неиспользуемые (бесполезные) Б-знания, которые ученик редко применяет в дальнейшем. Например, изучив нуклеотиды, входящие в состав РНК, ученик-гуманитарий не будет ежедневно использовать эту информацию и поэтому быстро ее забудет. Знания, относящиеся к истории, литературе и т. д., будут запоминаться прочнее, потому что он их использует, обсуждая различные книги, фильмы, доклады.

Обучение в школе реализуется в соответствии с принципами “от простого к сложному” и “от конкретного к абстрактному”. В начальной школе ученики учатся читать и считать, приобретают важные знания, которые необходимы каждому человеку в течение всей его жизни. В 5–8-х классах школьники знакомятся с основами наук, усваивая информацию, имеющую более высокую степень абстрактности; эти знания используются в последующем обучении. Знания, приобретаемые в 9–11-х классах, еще сильнее оторваны от повседневной жизни и в еще меньшей степени используются в дальнейшем. По мере перехода от начальной школы к старшим классам доля П-знаний уменьшается, а доля Б-знаний, не используемых в последующей жизни, растет.

<u>Построение модели.</u> Рассмотрим модель обучения в школе и вузе, которая учитывает: 1) распределение учебного материала по классам; 2) зависимость степени использования знаний в повседневной жизни и в последующем обучении от времени; 3) разделение П- и Б-знаний ученика на прочные и непрочные знания, забывающиеся с разными скоростями. Пусть состояние ученика в каждый момент времени t характеризуется матрицами: 1) Z_i^n – количество непрочных П-знаний, используемых на практике; 2) N_i^n – количество прочных

П-знаний и интеллектуальных навыков; 3) $Z_i^б$ – количество непрочных Б-знаний, не используемых на практике; 4) $N_i^б$ – количество прочных Б-знаний (навыков). Индекс i показывает, в каком классе эти знания были впервые изучены. При обучении в i-м классе ученик усваивает новый материал, количество непрочных знаний растет, и они частично переходят в прочные; Z_i^n, N_i^n, $Z_i^б$, $N_i^б$ увеличиваются. Предлагаемая модель ДС выражается уравнениями [77]:

$$\frac{dZ_i^n}{dt} = k(\upsilon_i^n - \alpha Z_i^n) + q_i p_i (L_i^n - Zn_i^n) - \gamma_1 Z_i^n, \quad \frac{dN_i^n}{dt} = k\alpha Z_i^n - \gamma_2 N_i^n,$$

$$\frac{dZ_i^б}{dt} = k(\upsilon_i^б - \alpha Z_i^б) - \gamma_1 Z_i^б, \quad \frac{dN_i^б}{dt} = k\alpha Z_i^б - \gamma_2 N_i^б, \quad Zn_i^n = Z_i^n + N_i^n,$$

$$Zn_i^б = Z_i^б + N_i^б, \quad Zn^n = \sum_{i=1}^{11} Zn_i^n, \quad Zn^б = \sum_{i=1}^{11} Zn_i^б, \quad Zn = Zn^n + Zn^б.$$

Номер класса обозначим через j. Во время обучения, если $i = j$ (изучается материал, соответствующий номеру класса), то $k = 1$, и знания Z_i^n увеличиваются со скоростью υ_i^n, одновременно переходя со скоростью αZ_i^n в прочные знания N_i^n; а иначе $k = 0$. Коэффициент $\alpha = 0{,}003$ УЕВ$^{-1}$ характеризует скорость перехода непрочных знаний в прочные во время обучения ($k = 1$), а коэффициенты забывания $\gamma_1 = 0{,}005$ УЕВ$^{-1}$ и $\gamma_2 = \gamma_1 / 2{,}72$ – скорости уменьшения прочных и непрочных знаний за счет забывания. Если в j-м классе повторяется материал i-го класса ($i < j$), то скорость увеличения знаний за i-й класс в результате повторения $V_{повт} = q_i p_i (L_i^n - Zn_i^n)$ пропорциональна разности между требуемым уровнем L_i и имеющимися знаниями Zn_i^n за i-й класс. Через p_i обозначена доля знаний, использующихся на практике, q_i – коэффициент повторения. Обучаясь в седьмом классе ($j = 7$), ученик повторяет и использует материал за 1–6-е классы (то есть $i < j$), а после окончания школы – за все 11 классов. Будем считать, что во время обучения в школе $q_i =$ 0, если $i \geq j$, и

$q_i =$ 0,1, если $i < j$. После окончания обучения человек использует знания менее интенсивно, будем считать, что $q_i =$ 0,05.

За условную единицу времени примем 1 мес. = 1 УЕВ, тогда 1 год = 12 УЕВ. Для простоты объединим каникулы и будем считать, что школьник в течение года $\Delta t_{об} =$ 9 мес. = 9 УЕВ непрерывно обучается, а остальное время – отдыхает. Скорость усвоения новой информации (в ЭУМ/месяц) пропорциональна скорости сообщения учебной информации учителем или суммарному количеству информации, изучаемой школьником в течение года. Анализируя школьные учебники и программы [74], мы пришли к выводу, что скорость сообщения учебного материала может быть задана массивом $\upsilon_i =$(5, 6, 7, 9, 12, 16, 22, 30, 40, 52, 66), а доля знаний, используемых на практике, – массивом $p_i =$(1, 1, 0.9, 0.8, 0.75, 0.7, 0.65, 0.6, 0.5, 0.4, 0.4). Тогда скорости поступления и усвоения П-знаний и Б-знаний в i-м классе равны: $\upsilon_i^n = p_i \upsilon_i$, $\upsilon_i^н = (1 - p_i)\upsilon_i$. Количество сообщенных учителем знаний совпадает с уровнем требований в i-м классе $L_i^n = \upsilon_i^n \Delta t_{об}$, $L_i^б = \upsilon_i^б \Delta t_{об}$, $I_i = L_i = \upsilon_i \, \Delta t_{об}$. Общий объем информации, сообщенный ученику с начала обучения ($t = 0$) до окончания j-го класса

$$I_j = \sum_{i=1}^{j} L_i = L_1 + L_2 + \ldots + L_j.$$

Используется программа ПР–4.4, результаты моделирования обучения в школе представлены на рис. 4.7. Видно, что во время обучения увеличиваются $I(t) = L(t)$, количества П-знаний $Zn^n(t)$, Б-знаний $Zn^б(t) = Zn(t) - Zn^n(t)$ и суммарных знаний $Zn(t)$. Во время каникул и после окончания школы происходит уменьшение знаний из-за забывания. Знания $Zn_8(t)$, изученные в 8-м классе, в большей степени используются на практике, чем знания $Zn_{11}(t)$ за 11-й класс, и поэтому забываются медленнее. Для моделирования обучения в школе и вузе (всего 16 лет) используется та же программа ПР–4.4. При этом для $i =$ 12, …, 16 (годы обучения в вузе) заданы $\upsilon_i =$(70, 70, 70, 70, 70) и $b_i =$(0.3, 0.25, 0.25, 0.2, 0.2). Результаты представлены на рис. 4.8.

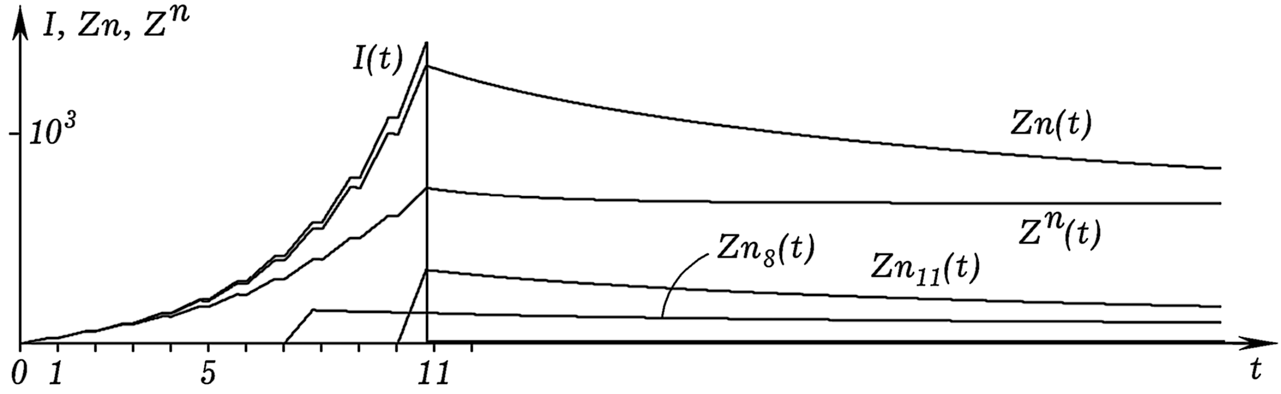


Рис. 4.7. Моделирование обучения в школе (11 лет)

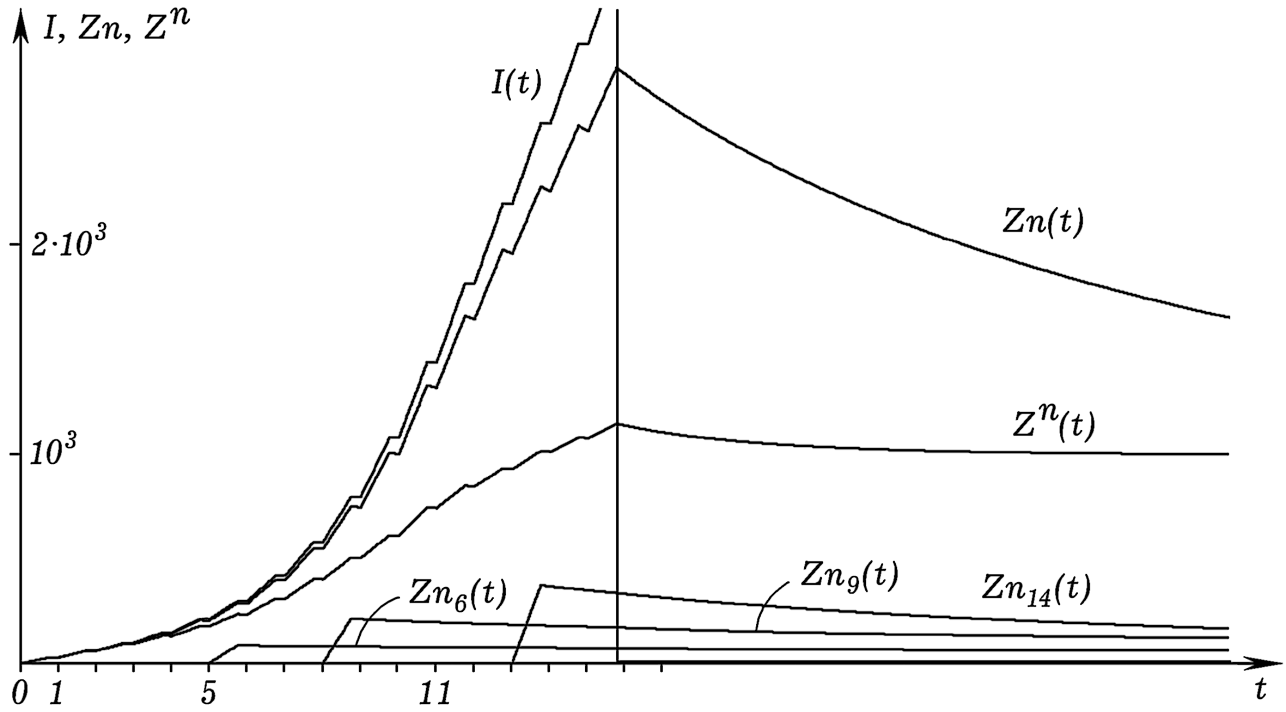


Рис. 4.8. Результаты моделирования обучения в школе (11 лет) и вузе (5 лет)

Итак, нами исследована математическая модель обучения, учитывающая: 1) деление всех знаний ученика или студента на часто используемые П-знания и редко используемые Б-знания; 2) деление П-знаний и Б-знаний на прочные и непрочные знания; 3) длительность учебного года и каникул; 4) распределение учебной информации по классам; 5) степень использования знаний в повседневной жизни и в последующем обучении. Показано, что ***подобные модели позволяют приблизительно представить изменение знаний некоторого гипотетического ученика-студента во время обучения в школе и вузе.***

4.5. Моделирование изучения студентом конкретной дисциплины (М-4.5). Теперь рассмотрим один из возможных способов моделирования изучения некоторой дисциплины. Предлагаемая многокомпонентная модель учитывает следующее: 1) все знания Z студента делятся на три категории: непрочные знания Зн-1 (Z_1), знания Зн-2 средней прочности (интеллектуальные умения Z_2), прочные знания Зн-3 (интеллектуальные навыки Z_3); 2) скорость увеличения непрочных знаний пропорциональна разности между уровнем требований $L = I$ преподавателя и суммарными знаниями Z студента и равна $\alpha(L - Z)$; 3) при обучении за время dt количество $\alpha_1 Z_1 dt$ знаний Зн-1 превращаются в знания Зн-2, а количество $\alpha_2 Z_2 dt$ знаний Зн-2 превращаются в знания Зн-3; 4) при отсутствии обучения за время dt количество $\gamma_3 Z_3 dt$ прочных знаний Зн-3 превращаются в не очень прочные знания Зн-2, а количество $\gamma_2 Z_2 dt$ знаний Зн-2 превращаются в непрочные знания Зн-1; количество $\gamma_1 Z_1 dt$ знаний Зн-1 забывается. При этом непрочные знания Зн-1 забываются быстрее прочных знаний Зн-3, так как имеют более высокий коэффициент забывания: $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$.

1
$$Z = \begin{pmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & \ldots & Z_1^{15} \\ Z_2^1 & Z_2^2 & \ldots & Z_2^{15} \\ Z_3^1 & Z_3^2 & \ldots & Z_3^{15} \end{pmatrix}$$

2
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & \ldots & 0{,}03 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}3 & \ldots & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}3 & \ldots & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0{,}03 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

3
```
1   6  1      4  0.8  2
0 162  1      0  80   1
2   6  1      5   6   1
0 162  1      0  162  1
3   6  1      6   6   1
0 162  1      0  162  1
4   6  1      7   6   1
0  79  1      0  162  1
1 0.7  2      8   6   1
2 0.8  2      .............
3 0.7  2
```

Рис. 4.9. Матрица знаний Z. Матрица повторения E. Формат входного файла

<u>Построение модели.</u> Пусть дисциплина состоит из 15 лекций или тем, тогда состояние студента в каждый момент времени определяется матрицей знаний Z размером 3×15, состоящей из 45 элементов (рис. 4.9.1); верхний индекс каждого элемента означает номер темы $i = 1, 2, \ldots, 15$, а нижний – категорию знаний (1, 2 или 3). Для имитационного моделирования обучения необходимо создать компьютерную программу, которая [54]: 1) считывает распределение

учебной информации, длительность занятий и перерывов из текстового файла; 2) учитывает повторение при подготовке к экзамену и контрольным работам; 3) учитывает, что при изучении данной темы используется некоторая часть информации из предыдущих тем; 4) определяет количество прочных и непрочных знаний в последовательные моменты времени по каждой теме. На рис. 4.9.2 представлена матрица E, элементами которой являются коэффициенты повторения (или связи) $e_{i,j}$, характеризующие степень использования учебного материала i-й темы при изучении j-й темы. Если $i = j$, то $e_{i,j} = 1$. Получающаяся трехкомпонентная модель обучения выражается системой дифференциальных уравнений (при обучении $k = e_{i,j}$, во время перерыва $k = 0$):

$$dZ_1^i / dt = k(\alpha(L^i - Z^i) - \beta_1 Z_1^i) - \gamma_1 Z_1^i + \gamma_2 Z_2^i,$$

$$dZ_2^i / dt = k(\beta_1 Z_1^i - \beta_2 Z_2^i) - \gamma_2 Z_2^i + \gamma_3 Z_3^i,$$

$$dZ_3^i / dt = k\beta_2 Z_2^i - \gamma_3 Z_3^i, \quad Z^i = Z_1^i + Z_2^i + Z_3^i, \quad i = 1,2,...,15, \quad e = 2,72...$$

$$\alpha = 0,3 \cdot (1 - S^i), \ \beta_1 = \alpha / e, \ \beta_2 = \beta_1 / e, \ \gamma_1 = 0,0015, \ \gamma_2 = \gamma_1 / e, \ \gamma_3 = \gamma_2 / e,$$

где i – номер изучаемой темы, S^i – сложность i-й темы из интервала [0; 1], которая определяется иначе, чем в п. 1.2. У очень простой темы $S^i = 0$, а у очень сложной темы $S^i = 1$, и студент не сможет ее освоить ($\alpha = 0$). Количества знаний студентов Z и уровень требований преподавателя L пропорциональны числу изученных или изучаемых элементов учебного материала (ЭУМ): понятий, элементарных суждений или математических формул. Все коэффициенты подобраны так, чтобы результаты моделирования соответствовали педагогической практике.

Пусть для изучения некоторой гипотетической дисциплины в течение семестра длительностью 15 недель = 105 дней отводится 90 астрономических часов (по 6 часов в неделю), включая работу в аудитории и выполнение домашнего задания. В течение недели (168 часов) студент 6 часов учится и 162 часа отдыхает или занимается другими предметами, затем снова 6 часов изучает данный курс, 162 часа отдыхает и т. д. Курс состоит из 15 тем, каждую неделю изучается новая тема. Уровень требований преподавателя и сложность тем задается матрицами: $L^i =$(10, 11, 10, 12, 12, 11, 12, 13, 11, 12, 12, 13, 12, 13, 12) и $S^i =$(0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,4; 0,2; 0,3; 0,3; 0,4; 0,3; 0,3; 0,3; 0,4; 0,3; 0,3). После четвертой, восьмой и двенадцатой недели организуются контрольные работы соответственно по: 1) 1-й, 2-й, 3-й и 4-й темам; 2) 5-й, 6-й, 7-й и 8-й темам; 3) 9-й, 10-й, 11-й и 12-й темам. В конце курса ($t = 15$ нед.) проводится экзамен по всем 15 темам. Во время подготовки к контрольной работе студент повторяет последние 4 темы, затрачивая на каждую по 0,7–0,8 часа (рис. 4.9.3). При подготовке к экзамену студент повторяет все 15 тем и затрачивает на каждую тему по 1 часу. В первый день подготовки студент занимается 8 часов, а на следующий день (после 16-часового перерыва) занимается 7 часов. После экзамена студент частично забывает изученный материал. Для учета степени использования на уроках предыдущего материала создадим треугольную матрицу E (рис. 4.9.2); ее элементы $e_{i,j}$ $(0 \le e_{i,j} \le 1; i < j)$ в правом верхнем углу соответствуют связям между темами курса. В программе ПР–4.5 они заданы так: $e_{i,j} = 0{,}1 + 0{,}2x_s$, где x_s – случайная величина из интервала $[0; 1]$.

<u>Результаты моделирования.</u> Применяется компьютерная программа ПР–4.5, получающиеся графики $Z(t)$ для студента, изучающего рассматриваемый курс, представлены на рис. 4.10 и 4.11. Из рисунка 4.10 видно, что в течение семестра суммарное количество знаний студента Z (и по отдельности Z_1^i, Z_2^i и Z_3^i) во время занятий резко возрастает, а в промежутках между занятиями уменьшается из-за забывания. При подготовке студента к трем контрольным работам (треугольные метки) и экзамену (круглая метка на рис. 4.11.1) количество знаний Z_1, Z_2 и Z_3 также резко увеличивается. После экзамена уровень знаний понижается из-за забывания. На рис. 4.11.1 также показаны графики $Z^9(t)$, $Z_{23}^9(t) = Z_2^9(t) + Z_3^9(t)$ и $Z_3^9(t)$ для девятой темы данной дисциплины [54].

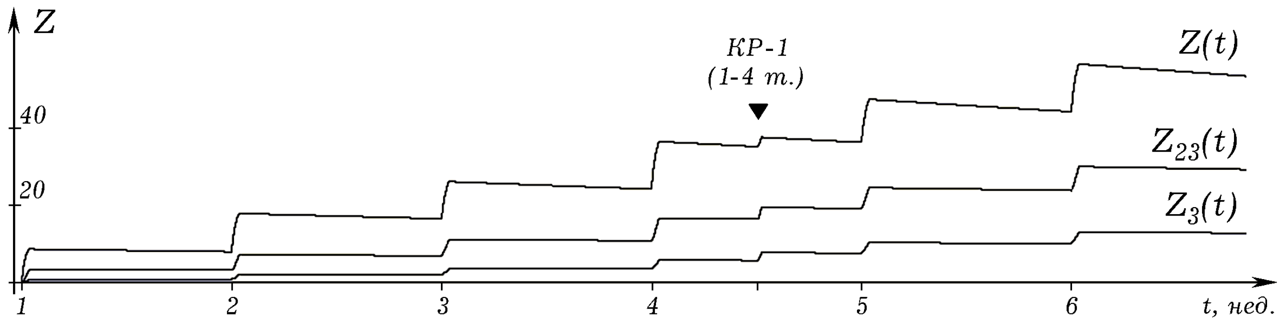


Рис. 4.10. Результаты моделирования обучения: недели 1–6

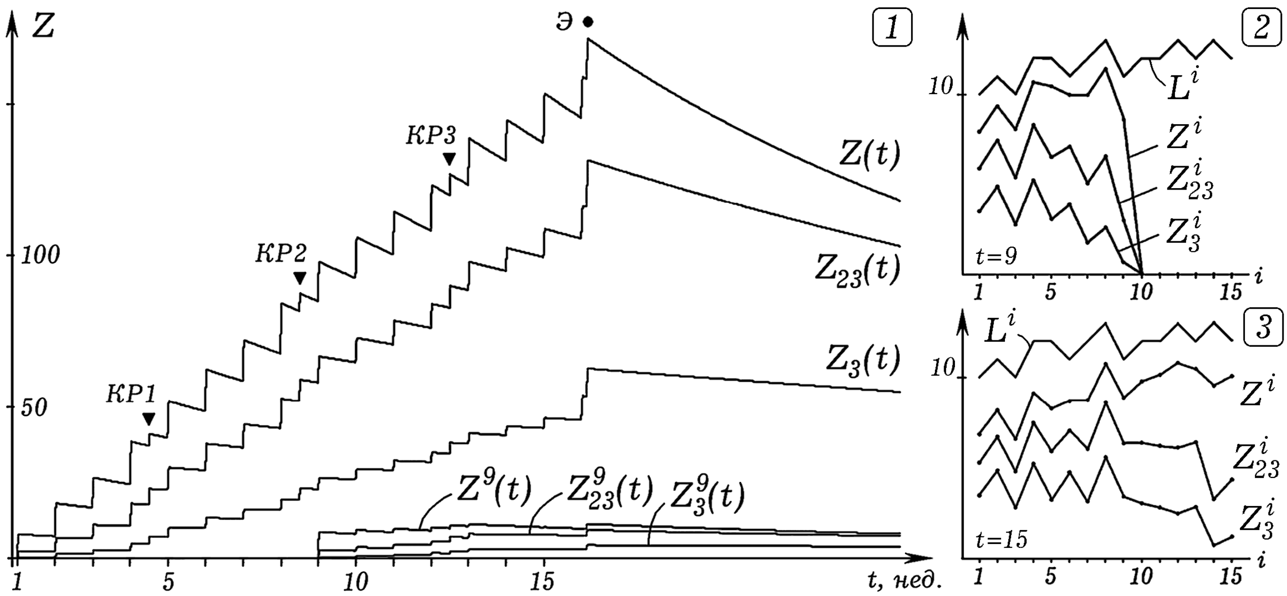


Рис. 4.11. Результаты моделирования изучения курса

Модель позволяет рассчитать значения Z_1, Z_2 и Z_3, соответствующие i-й теме для любого t, и построить соответствующие распределения, например, для моментов $t=9$ и $t=15$ недель (рисунок 4.11.2 и 4.11.3). Видно, что при $t=9$ недель студент усвоил только первые 9 тем (темы 10–15 он не изучал), причем доля прочных знаний, соответствующих темам 1–5, выше, чем для тем 6–9. Это вызвано тем, что при изучении текущей темы студент частично повторяет предыдущий материал и доля прочных знаний повышается. В момент $t=15$ недель студент овладел уже всем материалом, причем доля прочных знаний для тем 1–9 выше, чем для тем 10–15. Во всех случаях уровень знаний студента Z^i ниже уровня требований преподавателя L^i (i = 1, 2, …, 15), соответствующих оценке “отлично”. Пусть это будет **ситуация 1**.

Ситуация 2. Теперь предположим, что: 1) студент изучает дисциплину без подготовки к контрольным работам и экзамену; 2) сложность материала и уровень требований на каждом занятии одинаковы и равны $S = 0{,}2$ и $L = 10$ ЭУМ; 3) темы не связаны между собой: изучая j-ю тему, студент совершенно не использует материал из предыдущих тем ($e_{i,i} = 1$, остальные 0). Результаты моделирования представлены на рис. 4.12.1 и 4.12.2. Количество знаний Z_1^i, Z_2^i и Z_3^i ученика к концу обучения ($t = 15$ недель) с ростом номера темы i монотонно возрастает, оставаясь меньше L. Это объясняется тем, что вопросы, изученные в начале семестра, если их не повторять, забываются (рис. 4.12.2).

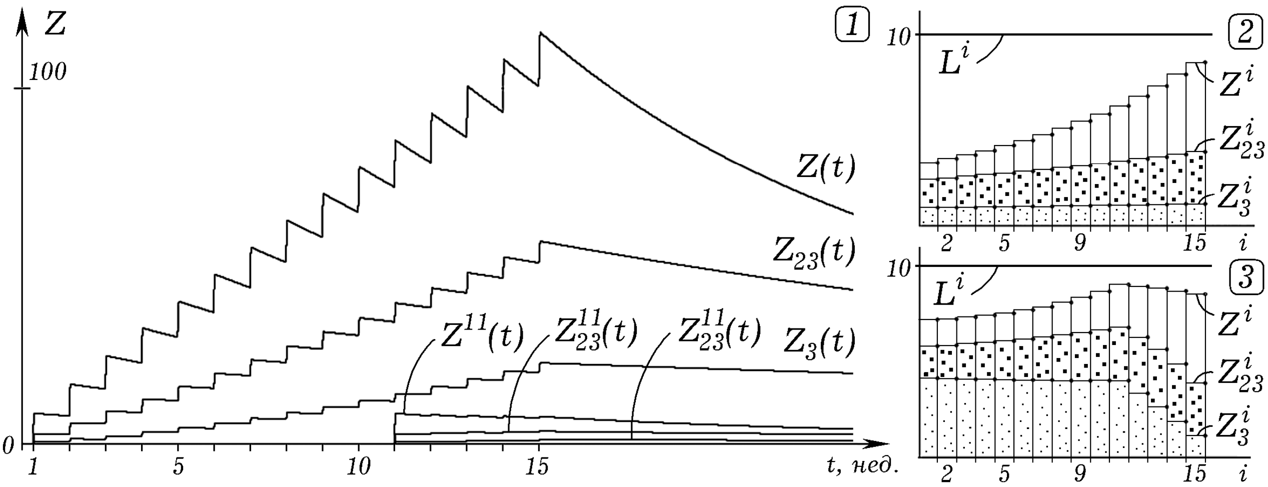


Рис. 4.12. Результаты моделирования изучения курса (ситуации 2 и 3)

Ситуация 3. Представим себе, что студент при изучении текущей темы повторяет материал из предыдущих тем; матрица E задается так: если $j-5 < i < j$, то $e_{i,j} = 0{,}3$; если $i \le j-5$, то $e_{i,j} = 0{,}4/j$. Контрольные работы и экзамен отсутствует, для всех тем $S = 0{,}2$ и $L = 10$ ЭУМ. Получающееся распределение знаний студента Z_k^i по темам в момент $t = 15$ недель представлено на рис. 4.12.3. При $i < 11$ количество усвоенных знаний Z_1^i, Z_2^i и Z_3^i возрастает, а при $i > 11$ – убывает при увеличении i. Эти объясняется тем, что: 1) чем раньше изучена тема, тем в большей степени она забывается к концу обучения; 2) при изучении j-й темы студент повторяет материал предыдущих четырех тем $(j-4)$, $(j-3)$, $(j-2)$, $(j-1)$ с коэффициентом повторения $e_{i,j}=0{,}3$.

Предложенная имитационная модель изучения курса учитывает: 1) деление всех знаний студента по прочности запоминания на три категории; 2) длительность занятий и промежутков между ними; 3) распределение учебной информации (уровня требований) по темам; 4) сложность учебного материала; 5) повторное изучение отдельных тем во время подготовки к зачету или экзамену; 6) степень использования учебного материала i-й темы при изучении j-й темы. ***Эта модель позволяет предсказать качественно-количественный состав знаний студента по различным темам рассматриваемой дисциплины с течением времени.***

Приложение к главе 4

ПР-4.1

```
Program Dvuhcomponent_model_obuchen;{M-4.2, ris. 4.1}
{$N+}Uses crt, graph; Const dt=0.01; Mt=4; Mz=1.7;
U:array[1..11] of integer=(10,12,14,17,20,24,29, 35,42, 50,59);
alfa:array[1..11] of single=(1,1.3,1.6,1.9,2.2,
2.5,2.8,3.1,3.4,3.6,3.9); g:array[1..11] of single=(7,8,
10,12,14,16,18,20,22,24,26);
Var gZ,gN,t,b,k,k1,ZZ,NN,Z2,N2,Z3,N3:single; DV,MV,i,j,k3:
integer; Z,N: array[1..11] of single;
e: array[1..11,1..11] of single;
Procedure KKK;
begin gZ:=g[i]/300; gN:=gZ/60; If (k=0) then begin If i<5
then k1:=0.3 else k1:=0.03/(i-4){exp(-(i-4)/3)}; end;
end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'');
For i:=1 to 11 do e[i,i]:=1; e[1,2]:=0.8;
e[1,3]:=0.8; e[2,3]:=0.7; e[1,4]:=0.8; e[2,4]:=0.7; e[3,4]:=0.6;
e[1,5]:=0.8; e[2,5]:=0.7; e[3,5]:=0.7; e[4,5]:=0.6; e[1,6]:=0.8;
e[2,6]:=0.8; e[3,6]:=0.7; e[4,6]:=0.7; e[5,6]:=0.6; e[1,7]:=0.8;
e[2,7]:=0.8; e[3,7]:=0.8; e[4,7]:=0.7; e[5,7]:=0.6; e[6,7]:=0.5;
e[1,8]:=0.8; e[2,8]:=0.8; e[3,8]:=0.8; e[4,8]:=0.7; e[5,8]:=0.6;
e[6,8]:=0.5; e[7,8]:=0.5; e[1,9]:=0.8; e[2,9]:=0.8; e[3,9]:=0.8;
e[4,9]:=0.7; e[5,9]:=0.6; e[6,9]:=0.5;  e[7,9]:=0.5; e[8,9]:=0.5;
e[1,10]:=0.8; e[2,10]:=0.8; e[3,10]:=0.8; e[4,10]:=0.7;
e[5,10]:=0.7; e[6,10]:=0.6; e[7,10]:=0.6; e[8,10]:=0.5;
e[9,10]:=0.5; e[1,11]:=0.8; e[2,11]:=0.8; e[3,11]:=0.8;
```

```
e[4,11]:=0.7; e[5,11]:=0.7; e[6,11]:=0.6; e[7,11]:=0.6;
e[8,11]:=0.6; e[9,11]:=0.5; e[10,11]:=0.5;
Repeat t:=t+dt; k:=1; If (round(t) mod 12>=9)or(t>12*11-3) then
k:=0; j:=round(t) div 12+1; If j<12 then For i:=1 to j do begin
k1:=k; KKK; b:=alfa[j]/80;
Z[i]:=Z[i]+k1*e[i,j]*(alfa[j]*0.1*(U[i]-Z[i]-N[i])-b*Z[i])*dt-
gZ*Z[i]*dt;
N[i]:=N[i]+k1*e[i,j]*b*Z[i]*dt-gN*N[i]*dt; end;
If j>11 then For i:=1 to 11 do begin KKK; b:=alfa[11]/80;
Z[i]:=Z[i]+k1*(alfa[11]*0.1*(U[i]-Z[i]-N[i])-b*Z[i])*dt
-gZ*Z[i]*dt; N[i]:=N[i]+k1*b*Z[i]*dt-gN*N[i]*dt; end;
ZZ:=0; NN:=0; Z2:=0; N2:=0; Z3:=0; N3:=0;
For i:=1 to 11 do begin ZZ:=ZZ+Z[i]; NN:=NN+N[i]; end;
For i:=1 to 4 do begin Z2:=Z2+Z[i]; N2:=N2+N[i]; end;
For i:=1 to 8 do begin Z3:=Z3+Z[i]; N3:=N3+N[i]; end;
circle(10+round(Mt*t),480-round(Mz*(Z2+N2)),1);
circle(10+round(Mt*t),480-round(Mz*(Z3+N3)),1);
{circle(10+round(Mt*t),480-round(Mz*(N2)),1);}
circle(10+round(Mt*t),480-round(Mz*(Z[4]+N[4])),1);
circle(10+round(Mt*t),480-round(Mz*(ZZ+NN)),1);
circle(10+round(Mt*t),480-round(Mz*NN),1);
circle(10+round(Mt*t),480,1); line(10,0,10,480); inc(k3);
If (k3>500)and(t<12*11) then begin k3:=0; {cleardevice;}
If j>1 then For i:=1 to 11 do begin
circle(10+20*i,480-round(300),1);
circle(10+20*i,480-round(300*(Z[i]+N[i])/U[i]),2);
{circle(10+20*i,480-round(300*(N[i])/(Z[i]+N[i]+0.01)), 2);}
line(10+20*i,485,10+20*i,100); line(5,180,300,180);
end; line(10,0,10,480); line(0,480,880,480); end;
until (KeyPressed)or(t>400);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

ПР-4.2

```
Program Uchet_usvoeniya_osmislen_informaci; {M-4.2, ris. 4.4}
{$N+}Uses crt, graph;
Const dt=0.01; Mt=0.7; M=0.7; ee=2.72; Y=650; str=50; st=15;
v:array[1..11]of integer=(30,35,40,50,65,80,100,120,145,170,175);
d3:array[1..11]of integer=(5,10,10,15,20,25,25,30, 30,30,30);
d1:array[1..11]of integer=(65,60,55,50,45, 40,35,30,25,20,10);
Var ttt,ob,ff,i,j,k,ii,o,DV,MV: integer;
t,L,dZ,SZ1,SZ2,SZ3: single;
Z3,Z2,Z1,A,x,dx:array[1..11]of single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'');
For i:=1 to 11 do x[i]:=100; ff:=1;
Repeat t:=t+dt; inc(ttt); ob:=1;
If ttt>10000 then begin inc(ff); ttt:=0; end;
If ttt>8000 then ob:=0; if ff>12 then ff:=12;
circle(10+round(t*Mt),10*ff+50,1);
For i:=1 to 11 do begin
If (i=ff)and(ob=1) then begin Z3[i]:=Z3[i]+v[i]*d3[i]/10000*dt;
A[i]:=Z2[i]/100; Z2[i]:=Z2[i]+v[i]*(100-d3[i]-d1[i])/10000*dt;
```

```
Z1[i]:=Z1[i]+v[i]*d1[i]/10000*dt; end;
if (i<ff)or(ob=0) then begin dx[i]:=-5E-5*(100.5-x[i])*x[i]*dt;
x[i]:=x[i]+dx[i]; Z2[i]:=x[i]*A[i];
Z3[i]:=Z3[i]-5E-5*Z3[i]; Z1[i]:=Z1[i]-1E-6*Z1[i]; end;
ii:=8; circle(10+round(t*Mt),round(Y-Z1[ii]*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y-(Z1[ii]+Z2[ii])*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y-(Z1[ii]+Z2[ii]+Z3[ii])*M) ,1);
ii:=11; circle(10+round(t*Mt),round(Y-Z1[ii]*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y-(Z1[ii]+Z2[ii])*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y-(Z1[ii]+Z2[ii]+Z3[ii]) *M),1); end;
SZ1:=0; SZ2:=0; SZ3:=0;
For i:=1 to 11 do begin SZ1:=SZ1+Z1[i]; SZ2:=SZ2+Z2[i];
SZ3:=SZ3+Z3[i]; end;
circle(10+round(t*Mt),round(Y-SZ1*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y-(SZ1+SZ2)*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y-(SZ1+SZ2+SZ3)*M),1);
circle(10+round(t*Mt),round(Y),1);
until (KeyPressed)or(t>3500); CloseGraph; END.
```

ПР-4.3

```
program Tochnie_netochnie_nauki; {M-4.3, ris. 4.5}
{$N+}Uses crt, graph; Const dt=0.01; Mt=1.8; M=0.65; e=2.72;
Y=600; L: array[1..16]of integer=(10,13,17,22,28,
36,45,56,67,78,90,100,100,100,100,100); b: array[1..16] of single
=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0.9,0.8,0.7,0.6,0.6); ku:array[1..16] of
single =(1,0.95,0.9,0.9,0.9,0.9,0.8,
0.8,0.8,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7);
Var A,AA,BB,SUM,SUN,SN,Inf,gZ,gN,t,q,f,a1,a2,g1,g2,g3: single;
i,j,k,k3,c,DV,MV: integer;
v,Z,U,N,Zn,UN: array[1..18] of single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); For i:=1 to 16 do begin
v[i]:=L[i]/8; end; a1:=0.1; a2:=a1/e; g1:=0.03; g2:=g1/e;
g3:=g2/e; Repeat t:=t+dt; c:=1;
If (round(t) mod 12>=8)or(t>12*16-4) then c:=0;
j:=round(t) div 12+1; Sum:=0; SUN:=0; SN:=0;
If t>12*16-3 then j:=16; Inf:=Inf+c*v[j]*dt;
For i:=1 to j do begin If i=j then f:=1 else f:=0;
If i<=j then A:=(f+b[i]/3) else A:=0; If i>=j then BB:=0 else
BB:=0.02;If i<=j then q:=0.1 else q:=0;
If b[i]*L[i]>Zn[i] then AA:=BB*(b[i]*L[i]-Zn[i]) else AA:=0; If
c=1 then begin
Z[i]:=Z[i]+f*ku[i]*v[i]*dt-A*a1*Z[i]*dt+AA*dt-(1-b[i])*g1*Z[i]*dt;
U[i]:=U[i]+A*(a1*Z[i]-a2*U[i])*dt-(1-b[i])*g2*U[i]*dt;
N[i]:=N[i]+A*a2*U[i]*dt-(1-b[i])*g3*N[i]*dt; end;
If c=0 then begin
Z[i]:=Z[i]+q*(AA-A*a1*Z[i])*dt-(1-b[i])*g1*Z[i]*dt;
U[i]:=U[i]+q*A*(a1*Z[i]-a2*U[i])*dt-(1-b[i])*g2*U[i]*dt;
N[i]:=N[i]+q*A*a2*U[i]*dt-(1-b[i])*g3*N[i]*dt; end;
Zn[i]:=Z[i]+U[i]+N[i]; UN[i]:=U[i]+N[i]; SUN:=SUN+UN[i];
SN:=SN+N[i];SUM:=SUM+Zn[i]; end;
circle(10+round(Mt*t),Y-round(M*Inf),1); circle(10+round(Mt*t),
```

```
Y-round(M*SUM),1); circle(10+round(Mt*t),Y-round(M*SUN),1);
circle(10+round(Mt*t),Y-round(M*SN),1); circle(10+round(Mt*t),
Y-round(M*(Zn[9])),1); circle(10+round(Mt*t),Y,1);
until (KeyPressed)or(t>800);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

ПР-4.4

```
Program Ispolz_neisp_znaniya; {M-4.4, ris. 4.8}
uses crt, graph; const a=3E-3; g1=5E-3; dt=0.01; DL=16; ee=2.72;
Y=650; Mt=3; M=0.12; v:array[1..DL] of integer=
(5,6,7,9,12,16,22,30,40,52,66,70,70,70,70,70); p:array[1..DL] of
single=(1,1,0.9,0.8,0.75,0.7,0.65,0.6,
0.5,0.4,0.4,0.3,0.25,0.25,0.2,0.2);
var ZZP,ZZN,SZ,VV,Inf,t,q,g2: single; c,i,j,k,DV,MV,x: integer;
Lp,Lb,vb,vp,Zp,Np,Zb,Nb: array[1..DL] of single;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'');
For i:=1 to DL do begin  vp[i]:=v[i]*p[i];  vb[i]:=v[i]*(1-p[i]);
Lp[i]:=vp[i]*9; end; g2:=g1/ee;
Repeat t:=t+dt; c:=1;
If (round(t) mod 12>=9)or(t>12*DL-3) then  c:=0;
circle(20+round(Mt*t),Y+10-c*5,1); j:=round(t) div 12+1;
SZ:=0; ZZP:=0; ZZN:=0; If t>12*DL-3 then  j:=11;
For i:=1 to DL do begin  k:=0;
If i=j then k:=c; Inf:=Inf+k*v[j]*dt;  q:=0;
If i<j then q:=0.1; If t>12*DL-3 then q:=0.05;
VV:=q*p[i]*(Lp[i]-Zp[i]);
Zp[i]:=Zp[i]+k*vp[i]*dt-k*a*Zp[i]*dt+VV*dt-g1*Zp[i]*dt;
Np[i]:=Np[i]+k*a*Zp[i]*dt-g2*Np[i]*dt;
Zb[i]:=Zb[i]+k*(vb[i]-a*Zb[i])*dt-g1*Zb[i]*dt;
Nb[i]:=Nb[i]+k*a*Zb[i]*dt-g2*Nb[i]*dt;
ZZP:=ZZP+Zp[i]+Np[i]; ZZN:=ZZN+Zb[i]+Nb[i]; SZ:=ZZP+ZZN; x:=10;
circle(20+round(Mt*t),Y-round(M*(Zp[x]+Np[x]+Zb[x] +Nb[x])),1);
end; circle(20+round(Mt*t),Y,1); For i:=1 to DL do begin
circle(20+round(Mt*t),Y-round(M*(SZ)),1);
circle(20+round(Mt*t),Y-round(M*(ZZP)),1);  end;
circle(20+round(Mt*t),Y-round(M*Inf),1);
until (KeyPressed)or(t>400);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

ПР-4.5

```
Program Model_izucheniya_kursa; {M-4.5, ris. 4.11}
{$N+}Uses crt, graph; const Np=75; dt=0.015; Mt=0.3; Mz=3;
var aa:string; Sl: text; i,j,DV,MV,j1,Tm1,U1,S1,P1: integer;
ii,r: integer; no,Tm,Tr,S,P: array[-5..80]of integer;
Z,U,N: array[-1..20]of single;
e: array[-1..15,-1..15] of single;
alfa,k,gZ,gU,gN,t,Trr,b,ZZ,NN,Z2,N2,Z3,N3,UU,U2,t2: single;
Label mmm;
Procedure PPP; begin writeln; writeln; writeln;
For i:=4 to Np do begin writeln(i,' ',Tm[i],' ', U[i],' ',S[i]);
end; end;
```

```
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); Randomize;
Assign(Sl,'E:\vhod1.txt'); Reset(Sl); gZ:=0.0006; gU:=gZ/3;
gN:=gU/3; For i:=1 to Np do begin Readln(Sl, j1, Tm1, U1, S1, P1);
{writeln(j1,' ', Tm1,' ', U1,' ', S1);}
no[i]:=j1; Tm[i]:=Tm1; Tr[i]:=U1; S[i]:=S1; P[i]:=P1; end; {PPP;}
For j:=1 to 15 do For i:=1 to j do begin
e[i,j]:=0.1+random(20)/100; e[j,j]:=1; end;
Repeat t:=t+dt; j:=0; t2:=t;
Repeat inc(j); t2:=t2-Tm[j]; until t2<0;
For i:=1 to 15 do begin alfa:=0.2*(1-S[j]/10); b:=alfa/3;
if p[j]=2 then begin alfa:=0.3; b:=alfa/3; end; Trr:=Tr[j];
If i<=no[j] then k:=e[i,no[j]] else k:=0; if no[j]=0 then k:=0;
Z[i]:=Z[i]+k*(alfa*(Trr-Z[i]-N[i]-U[i])-b*Z[i])*dt-gZ*Z[i]*dt;
U[i]:=U[i]+k*b*Z[i]*dt-gU*U[i]*dt;
N[i]:=N[i]+k*b*U[i]*dt-gN*N[i]*dt; end; ZZ:=0; NN:=0; U2:=0;
For i:=1 to 15 do begin ZZ:=ZZ+Z[i]; U2:=U2+U[i]; NN:=NN+N[i];
end; circle(10+round(Mt*t),700-round(Mz*(Tr[j])),1);
circle(10+round(Mt*t),700-round(Mz*(Z[11]+U[11]+N[11])),1);
circle(10+round(Mt*t),700-round(Mz*(N[11])),1);
circle(10+round(Mt*t),700-round(Mz*(NN)),1);
circle(10+round(Mt*t),700-round(Mz*(NN+ZZ+U2)),1);
circle(10+round(Mt*t),700-round(Mz*(NN+U2)),1);
{circle(10+round(Mt*t),600-round(5*(j)),1);}
circle(10+round(Mt*t),700,1);
until (Keypressed)or(j>Np-1);
Repeat until Keypressed; CloseGraph;
END.
```

Файл vhod1.txt

```
1 6   11  2  1
0 162 0   0  1
2 6   11  3  1
0 162 0   0  1
3 6   13  3  1
0 162 0   0  1
4 6   13  3  1
0 78  0   0  1
1 2   11  1  2
2 2   11  1  2
3 2   13  1  2
4 2   13  1  2
0 80 0    0  1
5 6   12  4  1
0 162 0   0  1
6 6   15  3  1
0 162 0   0  1
7 6   12  5  1
```

```
0 162  0   0  1
8 6    14  3  1
0 78   0   0  1
5 2    14  1  2
6 2    14  1  2
7 2    15  1  2
8 2    14  1  2
0 80   0   0  1
9 6    11  4  1
0 162  0   0  1
10 6   12  3  1
0 162  0   0  1
11 6   11  5  1
0 162  0   0  1
12 6   14  3  1
0  78  0   0  1
9  2   13  1  2
10 2   12  1  2
11 2   13  1  2
12 2   14  1  2
0 80   0   0  1
13 6   12  4  1
0 162  0   0  1
14 6   13  3  1
0 162  0   0  1
15 6   12  5  1
0 162  0   0  1
1  1   12  1  2
2  1   12  2  2
3  1   12  1  2
4  1   12  2  2
5  1   12  1  2
6  1   12  1  2
0  16  0   0  1
7  1   12  1  2
8  1   12  1  2
9  1   12  1  2
10 1   12  1  2
11 1   12  1  2
12 1   12  1  2
13 1   12  1  2
14 1   12  1  2
15 1   12  1  2
0  16  0   0  1
13 2   12  1  2
14 2   12  1  2
15 2   12  1  2
9  1   12  1  2
10 1   12  1  2
11 1   12  1  2
12 1   12  1  2
0 800  0   2  1
0 800  0   2  1
0 800  0   2  1
0 800  0   2  1
0 800  0   2  1
0 800  0   2  1
0 800  0   2  1
```

Глава 5.
ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБУЧЕНИЯ И ЕЕ РЕШЕНИЕ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Одна из основных задач МТО состоит в оптимизации учебного процесса, то есть в нахождении таких его форм и методов организации, при которых функционирование системы образования было бы наиболее эффективным и при наименьших затратах приносило бы максимальную пользу [48]. Дидактическая система “учитель-ученик” является самонастраиваемой: учитель выбирает такие методы обучения, при которых ученик достигает наиболее высоких результатов. При этом он стремится минимизировать суммарные усилия и затраты времени на обучение, максимизируя целевую функцию – уровень знаний ученика. Ученик в свою очередь стремится так организовать свою деятельность, чтобы минимизировать разность между уровнем требований учителя и уровнем приобретенных знаний, умений и навыков. Повышение эффективности учебного процесса предполагает нахождение оптимального распределения учебного материала, уровня требований учителя, длительности занятий, при которых объем знаний учащихся в конце обучения достигнет заданного значения, а сам процесс обучения будет удовлетворять наложенным ограничениям на затраты времени и усилий его участников. Математическая теория обучения, оперируя идеализированными моделями ученика и учителя, позволяет решить ***оптимизационную задачу,*** которая распадается на две [46]: 1) найти методику обучения, которая минимизирует время обучения при заданном конечном уровне знаний ученика; 2) найти методику обучения, которая максимизирует конечный уровень знаний ученика при заданном времени обучения. При этом следует учитывать связи между различными ЭУМ, их сложность и важность для дальнейшей учебной деятельности. Речь идет о поиске “оптимального пути обучения”, которого должен придерживаться ”идеальный учитель”.

5.1. Поиск оптимальной последовательности изучения ЭУМ, связанных друг с другом (М-5.1). Рассмотрим проблему нахождения оптимальной последовательности изучения связанных между собой элементов учебного материала (ЭУМ). Учтем их значение или важность для достижения цели обучения, заключающейся в наилучшем выполнении теста, в котором изученные ЭУМ представлены в различной степени. Допустим, что ученик в течение фиксированного промежутка времени T=300 УЕВ изучает некоторую дисциплину, состоящую из трех тем. Каждая тема содержит 5 параграфов; в каждом параграфе излагаются ЭУМ одного типа. Тогда в каждой теме имеется по 5 типов ЭУМ (задач, вопросов, операций), общее число ЭУМ различного типа $N = 15$. В каждый дискретный момент $t = 1$, 2, …, 300 ученик решает по одной задаче, затрачивая время $\Delta t = 1$ УЕВ, и поэтому успевает решить $M = 300$ задач (в среднем по 20 каждого типа). После обучения учащиеся проходят тестирование, в ходе которого определяется уровень владения ими задач (вопросов), вошедших в тест. Учитель, зная, какие именно вопросы входят в тест, может решать много задач одного типа и не решать задачи другого типа, стремясь к тому, чтобы ученики справились с тестом наилучшим образом [61].

Построение модели. Вероятность правильного решения учеником задачи j-го типа (или уровень знаний j-го ЭУМ) обозначим через z_j ($0 \le z_j \le 1$). При решении задачи j-го типа значение z_j повышается на $\Delta z_j = \alpha_i (1 - S_j)(1 - z_j) \cdot \Delta t$ ($j = 1$, 2, …, 15), где S_j – трудность или субъективная сложность j-го ЭУМ для данного ученика, α_i – коэффициент усвоения учеником i-й темы ($\alpha_i = 0{,}05 - 0{,}3$). Будем считать, что забыванием можно пренебречь. К первой теме относятся вопросы 1–5, ко второй – вопросы 6–10, к третьей – вопросы 11–15. Уровни усвоения тем $Z_1 = z_1 + \ldots + z_5$, $Z_2 = z_6 + \ldots + z_{10}$, $Z_3 = z_{11} + \ldots + z_{15}$. В общем случае темы и входящие в них задачи не являются независимыми. Коэффициент усвоения учащимся той или иной темы может зависеть от уровня понимания ранее изученных тем. Сложность j-й задачи может быть связана с уровнем усвоения ранее изученной k-й задачи ($k < j$), нескольких задач или предыдущей темы.

Цель обучения выражается в содержании контрольного теста, в котором некоторые задачи встречаются чаще и поэтому имеют более высокий коэффициент важности V_j из [0; 1], в то время как другие встречаются реже, их важность мала. Результат тестирования равен взвешенной сумме, деленной на сумму важностей всех ЭУМ:

$$R = (V_1 Z_1 + V_2 Z_2 + V_3 Z_3 + \ldots + V_{15} Z_{15}) / (V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{15}).$$

Найдем оптимальную последовательность решения задач (изучения ЭУМ), при которой результат тестирования в конце урока будет наиболее высоким в условиях нехватки времени обучения T.

Для решения этой оптимизационной задачи используется стандартный алгоритм, реализованный в программе ПР–5.1 [61]. Берется исходная последовательность задач, и с помощью процедуры Obuchen моделируется обучение и определяется результат тестирования R. После этого произвольно изменяется путь обучения: для пяти случайно выбранных моментов времени t ($t = 1, 2, \ldots, 300$) произвольно выбирается номер типа решаемой задачи j ($j = 1, 2, \ldots, 15$). Опять моделируется обучение и вычисляется результат R', соответствующий новой последовательности ЭУМ. Если $R' > R$, то осуществленные изменения принимаются, в противном случае – отвергаются. Затем все повторяется снова. Так программа находит оптимальное распределение типов задач по времени. Для того чтобы программа “не застряла” в локальном максимуме, найденное на данном шаге распределение задач можно периодически “встряхивать”, случайно изменяя номер некоторых из них на ± 1, и повторять оптимизацию.

Результаты моделирования. В педагогической практике отдельные ЭУМ и темы могут быть различным образом связаны друг с другом и иметь неодинаковую важность для выходного тестирования. Рассмотрим ситуации:

Ситуация 1. Для усвоения второй темы требуются знания первой, а для усвоения третьей темы – знания второй темы. Поэтому коэффициенты усвоения тем зададим так: $\alpha_1 =$ 0,1, $\alpha_2 = 0{,}04Z_1 + 0{,}04$, $\alpha_3 = 0{,}04Z_2 + 0{,}04$. Сложность всех ЭУМ одинакова: $S_j =$ 0,7. Тест проверяет понимание всех вопросов, то есть важность всех ЭУМ одинакова: $V_j = 1$, $j =$ 1, 2,…, 15. На рис. 5.1.1 представлено оптимальное распределение номера j ЭУМ от времени t. Видно, что пока $t < 120$ УЕВ необходимо изучать ЭУМ первой темы; когда t лежит в интервале от 120 до 220 УЕВ, следует изучать ЭУМ из второй темы; при $t > 220$ нужно изучать ЭУМ из третьей темы. То есть на третью тему нужно затратить меньше времени, чем на первую и вторую. Внутри каждой темы все ЭУМ следует изучать в произвольном порядке и в равной степени. Соответствующие графики зависимостей усвоения изученных тем от времени $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$ представлены на рис. 5.1.2. На первый взгляд кажется, что в конце обучения $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ и $Z_3(t)$ должны быть равны, и в этом случае R максимально. Но это не так: темы неравноправны, от знания второй темы зависит усвоение третьей темы, а от знания первой темы – усвоение второй. При $t = 300$ получается так: $Z_1 \approx 2{,}6$; $Z_2 \approx 3{,}1$; $Z_3 \approx 2{,}5$.

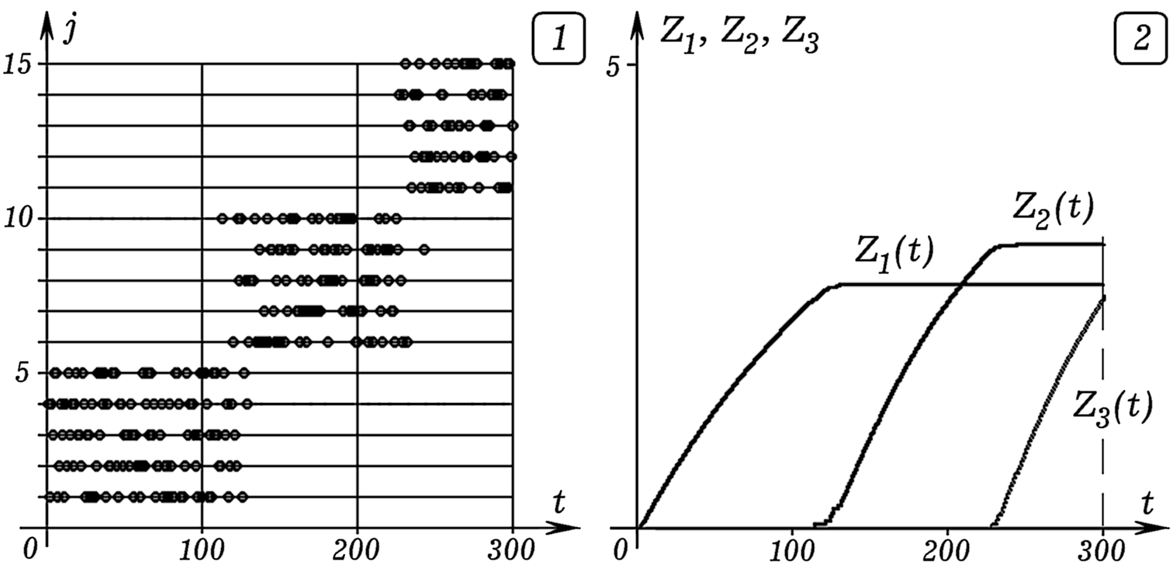


Рис. 5.1. Результаты оптимизации: ситуация 1

Ситуация 2. Для усвоения второй темы требуются знания первой, а для усвоения третьей темы – знания второй темы. Коэффициенты усвоения тем: $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}04Z_1 + 0{,}04$, $\alpha_3 = 0{,}04Z_2 + 0{,}04$. В тесте присутствуют все ЭУМ, то есть они имеют одинаковую важность: $V_j = 1$, $j = 1$, 2,…, 15. ЭУМ из одной темы связаны так: сложность каждого ЭУМ зависит от уровня знаний всех предыдущих ЭУМ из этой темы. Математически это можно задать так: 1) если $j = 5$, 10, 15, то $S_j = 1 - (z_{j-1} + z_{j-2} + z_{j-3} + z_{j-4})/5$; 2) если $i = 4$, 9, 14, то сложность $S_j = 1 - (z_{j-1} + z_{j-2} + z_{j-3})/4$; 3) если $j = 3$, 8, 13, то сложность $S_j = 1 - (z_{j-1} + z_{j-2})/3$; 4) если $j = 2$, 7, 12, то $S_j = 1 - z_{j-1}/2$; 5) если $j = 1$, 6, 11, то $S_j = 0$. Из результатов моделирования видно, что в оптимальном случае необходимо решать задачи почти друг за другом, затрачивая на каждую из них примерно одинаковое количество времени (рис. 5.2.1). При заданных α_1, α_2 и α_3 в конце обучения вторая и третья темы будут усвоены несколько лучше, чем первая (рис. 5.2.2).

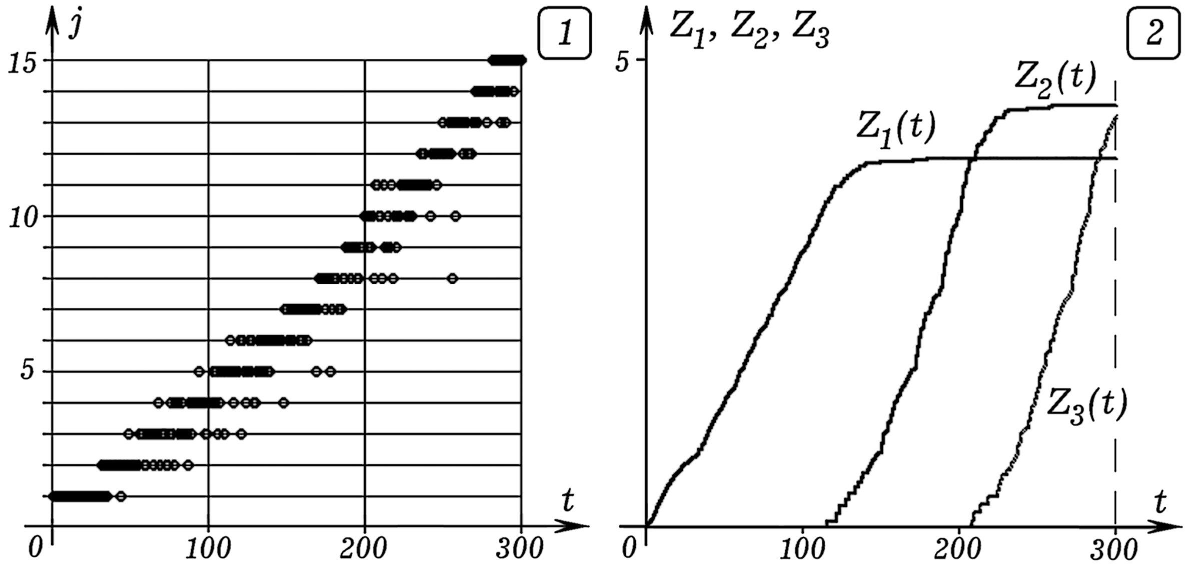


Рис. 5.2. Результаты оптимизации: ситуация 2

Ситуация 3. Для усвоения второй темы требуются знания первой, а для усвоения третьей темы – знания второй темы. Коэффициенты усвоения тем: $\alpha_1 = 0{,}05$, $\alpha_2 = 0{,}02Z_1 + 0{,}02$, $\alpha_3 = 0{,}02Z_2 + 0{,}02$. Вопросы из первой темы не зависят друг от друга и имеют одинаковую сложность 0,1. Вопросы из второй и третьей тем ($j > 5$) связаны друг с другом; сложность j-го вопроса тем меньше, чем больше уровень знаний $(j-1)$-го ЭУМ: $S_j = 1 - 0{,}95 z_{j-1}$. В тесте присутствуют только вопросы из третьей темы, поэтому при $j > 10$ важность $V_j = 1$, а при $j < 11$ важность $V_j = 0$. Результаты оптимизации представлены на рис. 5.3.1 и 5.3.2. Видно, что, пока $t < 100$ УЕВ, необходимо решать задачи по первой теме в произвольном порядке. При $t > 100$ следует решать задачи второй и третьей тем почти в порядке возрастания их номера j. В конце обучения при $t = 300$ УЕВ: $Z_1 \approx 2{,}7$; $Z_2 \approx 3{,}6$ и $Z_3 \approx 3{,}1$ (рис. 5.3.2).

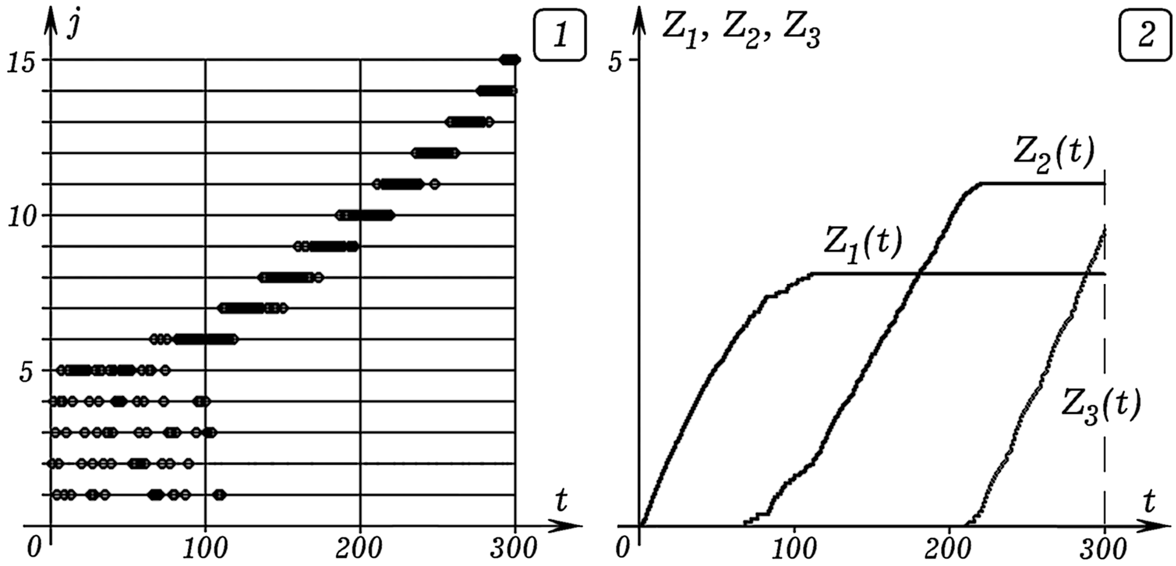


Рис. 5.3. Результаты оптимизации: ситуация 3

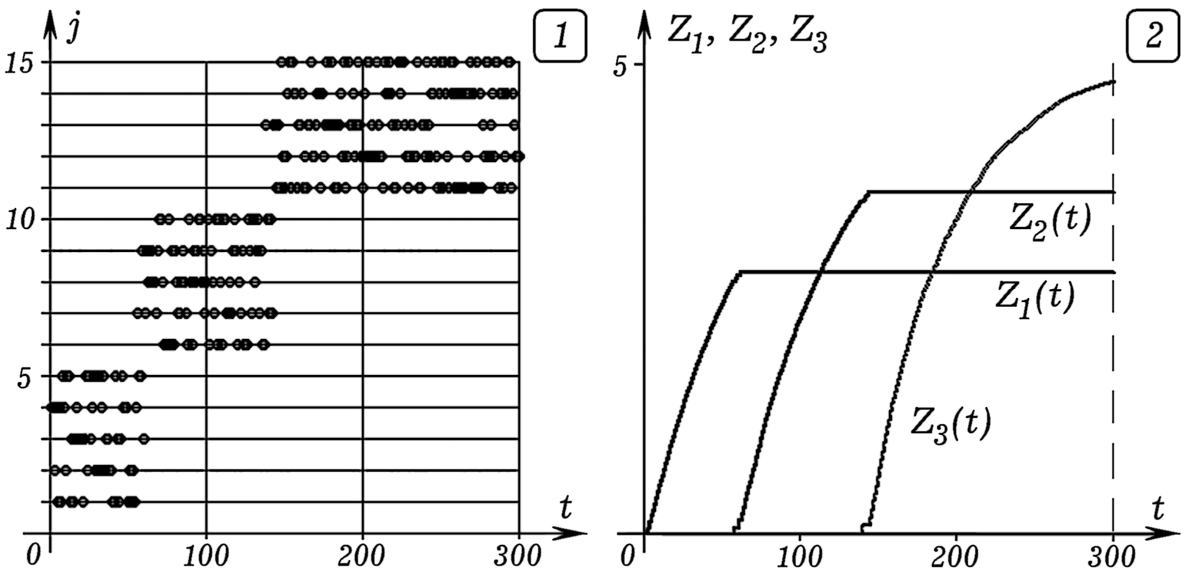


Рис. 5.4. Результаты оптимизации: ситуация 4

Ситуация 4. Для усвоения второй темы требуются знания первой, а для усвоения третьей темы – знания второй темы. Коэффициенты усвоения тем:

$\alpha_1 = 0{,}08$, $\alpha_2 = 0{,}03Z_1 + 0{,}03$, $\alpha_3 = 0{,}03Z_2 + 0{,}03$. Вопросы не зависят друг от друга и имеют одинаковую сложность 0,1. В тесте присутствуют только вопросы из третьей темы, поэтому при $j > 10$ важность ЭУМ $V_j = 1$, а при $j < 11$ важность $V_j = 0$. Результаты оптимизации представлены на рис. 5.4.1. Сначала ($t < 70$ УЕВ) необходимо решать задачи из первой темы, затем ($70 < t < 150$) следует решать задачи второй темы, а потом ($t > 150$ УЕВ) – из третьей темы. Внутри каждой из тем задачи решаются в произвольном порядке. В конце обучения при $t = 300$ УЕВ $Z_3 > Z_2 > Z_1$, причем $Z_3 \approx 4{,}8$ (рис. 5.4.2). ЭУМ из первой и второй тем следует изучать в той степени, в какой это поможет усвоить третью тему и справиться с тестом.

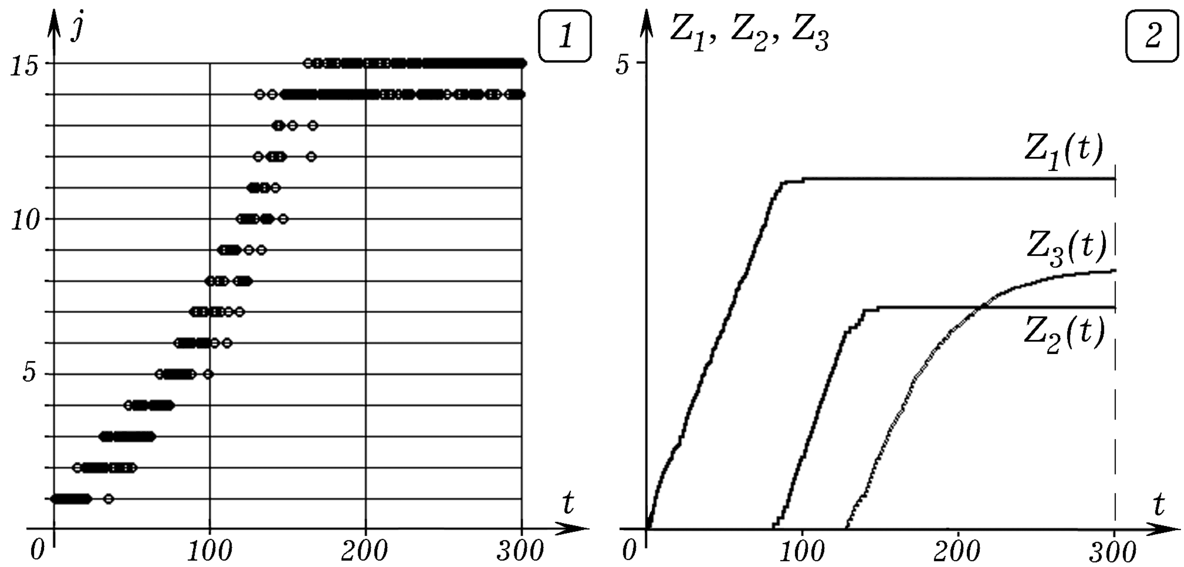


Рис. 5.5. Результаты оптимизации: ситуация 5

Ситуация 5. Коэффициент усвоения не изменяется: $\alpha = 0{,}1$. Сложность вопросов уменьшается в соответствии с формулой:

$$S_j = 1 - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{z_k}{k + 0{,}1}, \quad j = 2, 3, \ldots, 15.$$

Сложность первого ЭУМ $S_1 = 0$. Тест проверяет уровень знаний вопросов 14 и 15, поэтому их важность считается равной 1, а для всех остальных j важность $V_j = 0$. Результаты оптимизации – на рис. 5.5.1. Видно, что сначала необходимо решать задачи 1, 2, …, 14 почти в порядке возрастания их номера j, а затем уделить больше внимания задачам 14 и 15, которые присутствуют в тесте. Получающиеся графики $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$ представлены на рис. 5.5.2. В конце обучения при $t = 300$ УЕВ: $Z_1 \approx 3{,}8$; $Z_2 \approx 2{,}3$ и $Z_3 \approx 2{,}7$.

Ситуация 6. Для усвоения второй темы требуются знания первой, а для усвоения третьей темы – знания второй темы. Коэффициенты усвоения тем: $\alpha_1 = 0{,}16$, $\alpha_2 = 0{,}06 Z_1$, $\alpha_3 = 0{,}06 Z_2$. Сложность вопросов уменьшается по мере увеличения уровня знаний предыдущего ЭУМ: $S_j = 1 - 0{,}95 z_{j-1}$ ($j = 2$, 3, 4, …, 15), сложность первого ЭУМ $S_1 = 0$. В тесте присутствуют только вопросы под номерами $j = 3$, 4, 8, 9, 13, 14, поэтому их важность считается 1, а для всех остальных j важность $V_j = 0$. Результаты оптимизации приведены на рис. 5.6.1 и 5.6.2. Видно, что необходимо изучать ЭУМ 1, 2, …, 14 в порядке возрастания их номера j, одновременно уделяя больше внимания вопросам 3, 4, 8, 9, 13, 14, присутствующим в тесте. В конце обучения $Z_1 \approx Z_2 \approx 4{,}5$; $Z_3 \approx 3{,}7$ (рис. 5.6.2). Вопрос 15 изучать не надо.

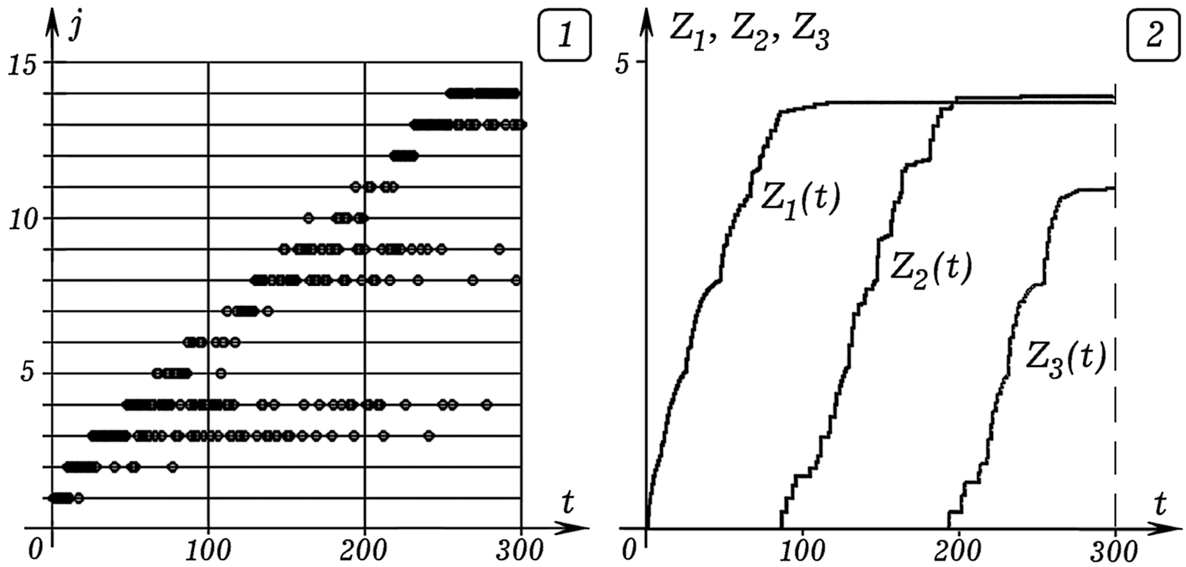


Рис. 5.6. Результаты оптимизации: ситуация 6

Итак, ***для рассмотренной выше математической модели дидактической системы осуществлен поиск оптимального пути обучения, проанали-***

зированы ситуации, встречающиеся в педагогической практике. При этом учитывается, что: 1) коэффициент усвоения ученика при изучении последующих тем зависит от уровня усвоения предыдущих тем; 2) субъективная сложность (трудность) ЭУМ зависит от уровня усвоения учеником предыдущих ЭУМ; 3) важность изучения того или иного ЭУМ различна и определяется целями обучения или содержанием выходного теста, с которым должны справиться учащиеся. Полученные результаты позволяют констатировать, что для анализируемых ситуаций существуют оптимальные распределения учебного материала, которые сильно зависят от: 1) связей между темами и отдельными вопросами; 2) целей обучения, нашедших выражение в подборе вопросов выходного теста.

5.2. Оптимизация времени изучения ЭУМ, учитывающая их сложность (М-5.2). Допустим, учебный курс состоит из $N = 100$ элементов учебного материала (ЭУМ) e_1, e_2, ..., e_N, каждый из которых характеризуется сложностью S_i из интервала [0; 1] ($i =$ 1, 2, …, N). Последовательность изучения ЭУМ не изменяется. Если $S_i = 0$, то сложность i-го ЭУМ минимальна, то есть он почти очевиден для ученика. При $S_i = 1$ сложность ЭУМ такова, что для его изучения требуется очень много времени. Рассмотрим два варианта: 1) сложность S_i – случайная равномерно распределенная величина в интервале [0; 1]; 2) сложность S_i равномерно растет от 0 до 1 с шагом $1/N$ по закону $S_i = i/N$. Общее время изучения T, равное сумме всех t_i ($i = 1,...,N$), остается постоянным, коэффициент усвоения учащегося α задан. Необходимо: 1) определить оптимальные значения t_i длительностей изучения каждого ЭУМ, при которых уровень знаний ученика в конце обучения будет максимальным; 2) получить соответствующую зависимость уровня знаний ученика от сложности ЭУМ; 3) изучить зависимость распределения времени t_i изучения ЭУМ от их сложности S_i при различных коэффициентах усвоения α и продолжительностях обучения T.

Построение модели. Будем исходить из того, что знания ученика Z_i: 1) увеличиваются со скоростью, пропорциональной произведению разности $(L - Z_i)$ на $(1 - S_i)$; 2) вследствие забывания уменьшаются со скоростью $\gamma \cdot Z_i$. Получаем дифференциальное уравнение [44]:

$$\frac{dZ_i}{dt} = \alpha(1 - S_i)(L - Z_i) - \gamma \cdot Z_i.$$

Уровень требований учителя для каждого ЭУМ равен $L = 1$. Будем считать, что знания Z_i i-го ЭУМ в результате обучения увеличиваются от 0 (ЭУМ совсем не изучен) до некоторого значения, не превышающего 1. Максимально возможное значение Z_i равно 1, что соответствует полному изучению i-го ЭУМ. Рассматриваемое дифференциальное уравнение можно записать в конечных разностях: $Z_i^{t+1} = Z_i^t + \alpha(1 - S_i)(1 - Z_i)\Delta t - \gamma \cdot Z_i \Delta t$. Программа должна моделировать изучение первого ЭУМ в течение времени t_1, затем изучение второго ЭУМ в течение времени t_2 и т. д., изучение N-го ЭУМ в течение времени t_N ($T = t_1 + t_1 + ... + t_N = \text{const}$). Определив уровень усвоения каждого ЭУМ, можно рассчитать суммарное количество знаний в произвольный момент t и в конце обучения: $Z = Z_1^t + Z_2^t + ... + Z_N^t$. Чтобы решить оптимизационную задачу, необходимо случайным образом варьировать время t_i изучения i-го ЭУМ и принимать такие значения t_i, при которых уровень знаний ученика в конце обучения становится выше.

Число параметров оптимизации равно N. Компьютерная программа ПР–5.2, решающая данную оптимизационную задачу, должна содержать [44]:

1. Значения следующих величин: 1) коэффициенты усвоения α и забывания γ ученика; 2) количество N изучаемых ЭУМ; 3) общее время обучения T; 4) сложность каждого ЭУМ S_i, которая равномерно растет от 0 до 1 с шагом

$1/N$ по закону $S_i = i/N$ либо принимает случайные значения из интервала [0; 1]; 5) начальные значения оптимизируемых переменных t_i (время изучения i -го ЭУМ). В программе ПР–5.2 задано: $N = 30$, $T = 60$ УЕВ, $t_i = T/N = 2$ УЕВ.

2. Процедуру Obuchenie, в которой осуществляется моделирование обучения. Она, исходя из известных t_i, определяет уровень знаний ученика Z_i по каждому i -му вопросу, а также суммарное количество знаний ученика Z по всем N вопросам в конце обучения.

3. Процедуру Grafik, которая очищает экран и строит графики: 1) зависимости $t_i = t_i(S_i)$ времени изучения различных ЭУМ от их сложности; 2) зависимости $Z_i = Z_i(S_i)$ количества знаний учеников для различных ЭУМ в конце обучения от их сложности S_i.

4. Цикл Repeat … until, в котором осуществляется оптимизация. В нем случайным образом выбираются 5 ЭУМ, изменяются их время изучения t_i на небольшие случайные величины, определяется новое суммарное время T'. Затем пересчитываются все остальные t_i' так, чтобы их сумма оставалась равной T. Для этого в цикле вычисляются новые значения $t_i' = t_i \cdot T/T'$. Снова моделируется изучение N вопросов (процедура Obuchen;) и вычисляется суммарный уровень знаний Z'. Если он оказывается выше предыдущего, то изменения принимаются, а иначе – отвергаются и все повторяется еще раз. Это повторяется, пока суммарное количество знаний Z не достигнет максимума.

Результаты моделирования. В результате работы программы ПР–5.2 получается график зависимости времени t_i изучения различных ЭУМ от их сложности S_i, при которой суммарный уровень знаний ученика Z в конце обучения максимален. В случае когда $N = 100$, $T = 100$ УЕВ и $\gamma = 0$, получаются кривые, изображенные на рис. 5.7.1 и 5.7.2. Для каждого α существует критический уровень сложности ЭУМ $S_к$; те вопросы, у которых $S > S_к$, изучать не следует ($t_i = 0$). При низком коэффициенте усвоения $\alpha = 0{,}3$ нужно изучать лишь те вопросы, сложность которых меньше 0,55, затрачивая на них больше времени (рис. 5.7.1, кривая 1). Вопросы со сложностью $S_i > 0{,}55$ изучать не следует. При увеличении α ученик быстрее усваивает информацию, поэтому время изучения простых вопросов с $S_i < 0{,}35$ уменьшается (кривые 2 и 3, соответствующие $\alpha = 0{,}7$ и 1,1), а за счет этого увеличивается круг вопросов, которые должны быть изучены ($S_к$ растет).

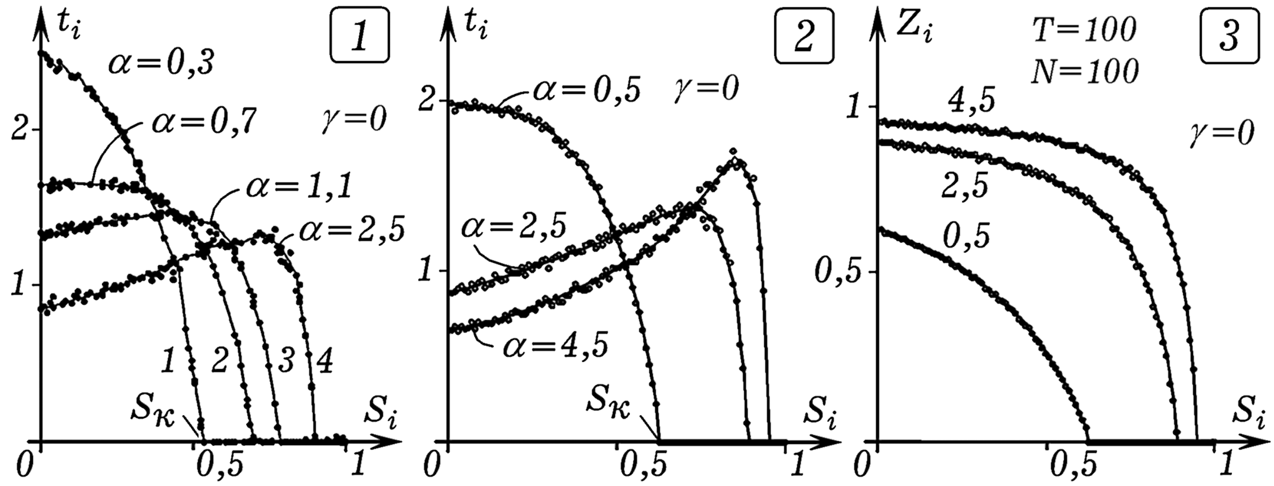


Рис. 5.7. Оптимальные распределения времени t_i изучения ЭУМ и уровня усвоенных знаний Z_i в зависимости от сложности S_i при различных α ($\gamma = 0$)

При высоком коэффициенте усвоения $\alpha = 2{,}5$ учащийся должен изучать почти все вопросы за исключением самых сложных ($0{,}9 < S_i < 1$), которые он все равно усвоит плохо (кривая 4, рис. 5.7.1). Это объясняется тем, что при S_i, стремящимся к 1, скорость увеличения знаний dZ_i / dt уменьшается до 0, и время, требуемое для изучения данного ЭУМ, стремится к бесконечности. Для не очень сложных вопросов с $S_i < 0{,}7$, которые изучаются достаточно полно (так что после обучения Z_i близко к 1), оптимальное время изучения ЭУМ почти прямо пропорционально сложности ЭУМ. На рис. 5.7.2 и 5.7.3 представлены графики $t_i(S_i)$ и $Z_i(S_i)$ при $\alpha = 0{,}5$; 2,5; 4,5. Видно, что с увеличением S_i уровень усвоения i-го ЭУМ в конце занятия уменьшается, то есть после оптимизированного обучения ученик знает простые вопросы лучше сложных (рис. 5.7.3).

При фиксированном времени обучения T повышение коэффициента усвоения α ученика приводит к росту суммарного количества знаний Z в конце обучения. Получающийся график зависимости $Z = Z(\alpha)$ при $T =$ const, $\gamma = 0$ и оптимальной организации обучения (распределении t_i) изображен на рис. 5.8. Он представляет собой возрастающую кривую, которая с ростом α от 0,1 до 3,5 увеличивается от 7 до 70. Максимально возможное значение Z равно $N = 100$.

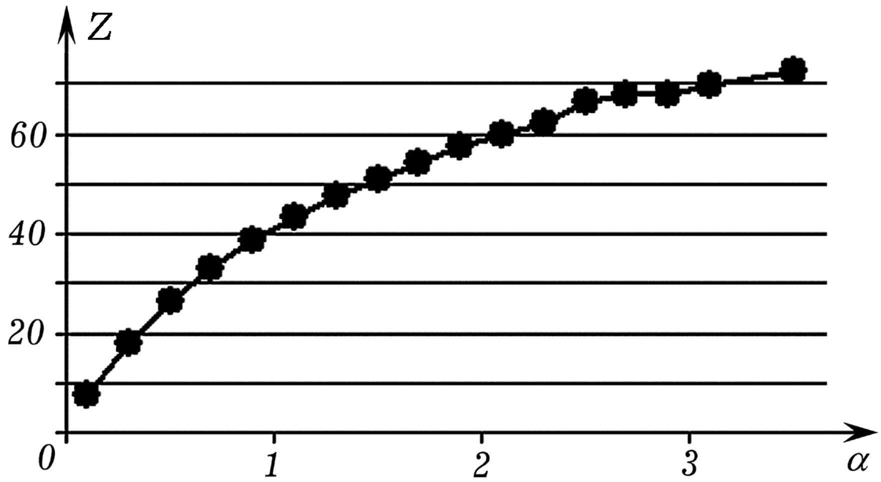


Рис. 5.8. Зависимость суммарного уровня знаний Z в результате оптимального обучения от коэффициента усвоения α при $T = const$ и $\gamma = 0$

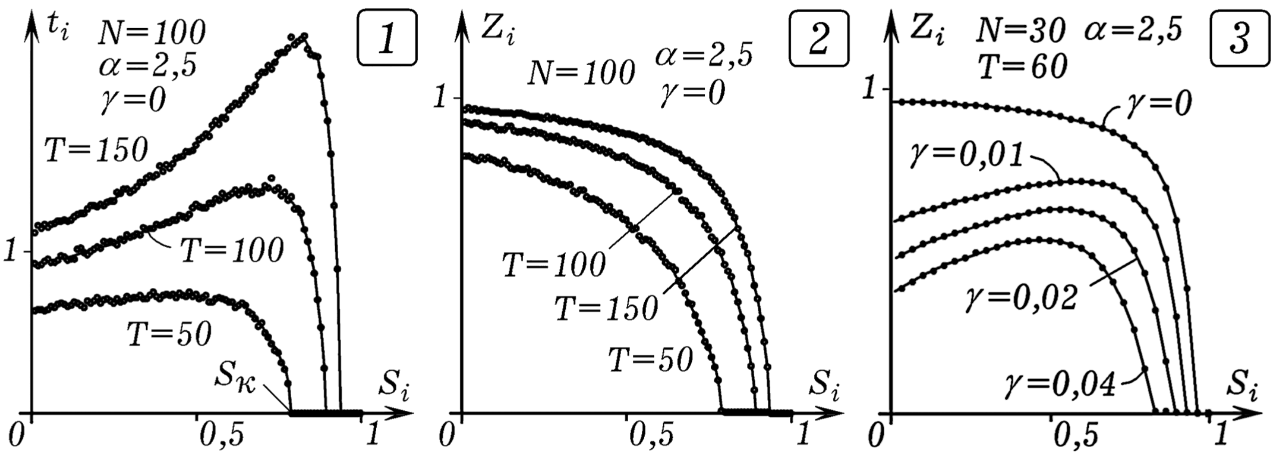


Рис. 5.9. Оптимизация времени t_i изучения ЭУМ при различных T и γ

На рис. 5.9.1 представлены результаты оптимизации времени изучения t_i различных ЭУМ в зависимости от их сложности S_i в случаях, когда время изучения T равно 50, 100 и 150 УЕВ. На рис. 5.9.2 изображены соответствующие графики зависимости знаний Z_i ЭУМ от их сложности S_i. Видно, что если длительность обучения T становится меньше, то $S_к$ снижается. Значит, следует изучать простые ЭУМ с небольшими S_i, затрачивая на каждый из них меньше времени. С увеличением длительности обучения T (например, 150 УЕВ) критическая сложность $S_к$ растет, график $t_i(S_i)$ сначала возрастает, а потом резко падает до 0.

На рис. 5.9.3 и 5.10 представлены графики $t_i(S_i)$ и $Z_i(S_i)$ при различных коэффициентах забывания γ для случая, когда S_i пропорционально i. Видно, что при $\gamma > 0$ ученик успевает забыть часть информации, полученной в начале обучения, и Z_i для всех i в конце обучения меньше, чем при $\gamma = 0$. При $S_i < 0{,}2$ оптимальное время изучения данного ЭУМ велико (рис. 5.10). Ученик успевает так хорошо изучить простые ЭУМ, что не успевает их забыть. Это вносит существенный вклад в конечный уровень знаний Z, который максимизируется компьютерной программой. Эта компьютерная модель позволяет решить задачу и при других параметрах модели α, γ, N, T.

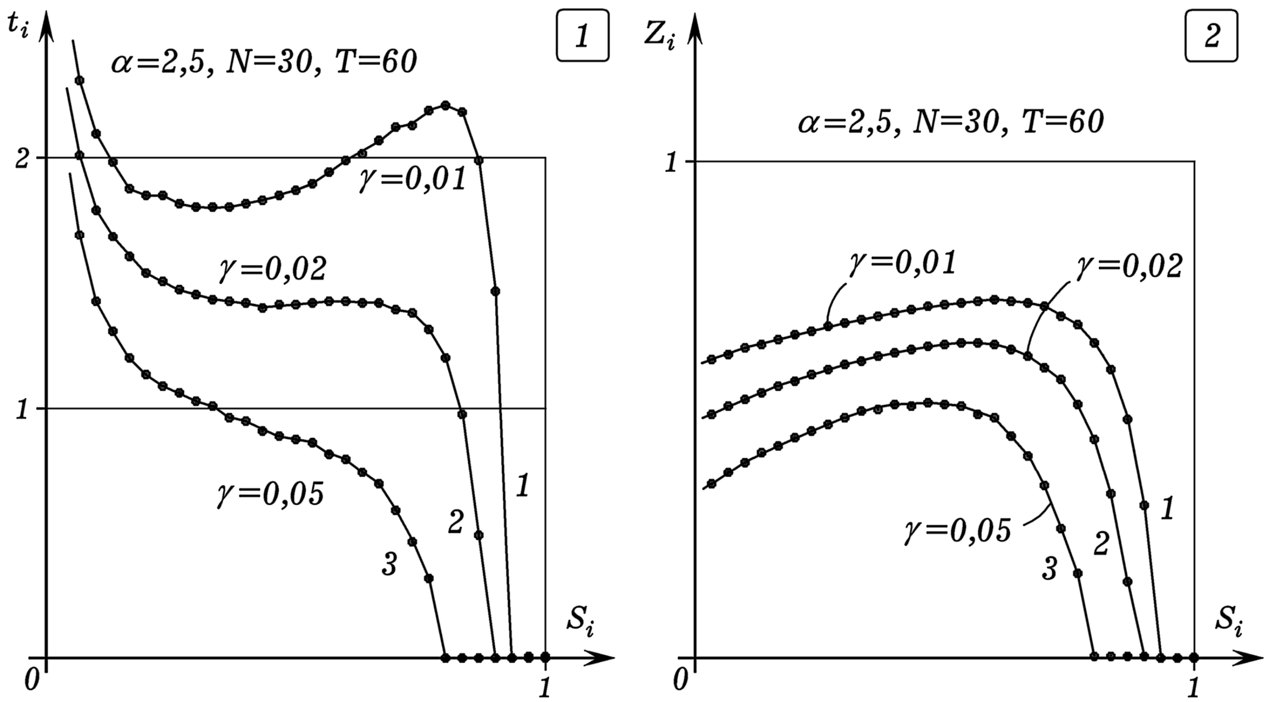


Рис. 5.10. Получающиеся графики $t_i(S_i)$ и $Z_i(S_i)$ при $\gamma > 0$

Итак, обсуждаемая модель позволила исследовать зависимость оптимального распределения времени изучения отдельных вопросов (ЭУМ) от γ, α, N, T. Было установлено следующее: ***1) характер распределения*** $t_i(S_i)$ ***сильно зависит от соотношения коэффициента усвоения ученика*** α***, длительности обучения*** T ***и количества изучаемых вопросов*** N ***; 2) при малых коэффициентах усвоения*** α ***имеет смысл изучать только простые ЭУМ, добиваясь высоких знаний для ЭУМ с*** S ***<0,3 – 0,4; 3) при высоком коэффициенте усвоения*** α ***следует изучать ЭУМ, имеющие сложность*** S ***<0,8, причем на более сложные ЭУМ необходимо затрачивать больше времени, чем на ме-нее сложные; 4) при уменьшении длительности обучения*** T ***нужно ограничиться изучением ЭУМ с низкой сложностью; 5) при отсутствии забывания зависимость уровня знаний ученика от сложности ЭУМ характеризуется убывающей функцией*** $Z_i(S_i)$ ***; 6) если происходит забывание, то уровень владения учащимся всеми ЭУМ снижается.*** Полученные результаты соответствуют основным положениям теории обучения.

5.3. Оптимизация времени изучения ЭУМ, учитывающая их важность для обучения (М-5.3). Любая дидактическая система является самонастраиваемой: учитель использует такие формы и методы обучения, при которых у ученика формируются знания, умения и навыки максимально эффективным образом. При этом он стремится минимизировать суммарные усилия F и затраты времени t на обучение, максимизируя целевую функцию – уровень знаний ученика Z. Ученик в свою очередь стремится так организовать свою деятельность, чтобы минимизировать разность между уровнем требований учителя L и уровнем приобретенных знаний Z (или выполненной работой). Определяя оптимальный путь обучения, получаем методику, по которой работает “идеальный учитель”.

Построение модели. Допустим, учебный курс включает в себя $N = 100$ элементов учебного материала (ЭУМ) e_1, e_2, ..., e_N и заканчивается тестированием. ЭУМ имеют одинаковую сложность, но различную важность V_i, которая зависит от использования данного ЭУМ при решении задач, усвоении других ЭУМ, выполнении заданий теста. Если $V_i = 0$, то важность i-го ЭУМ минимальна, то есть его изучать в рамках данного курса не нужно. При $V_i = 1$ важность ЭУМ такова, что его изучение необходимо для понимания следующих за ним вопросов. Пусть курс содержит ЭУМ различной важности; будем считать, что она связана с номером ЭУМ i соотношением: $V_i = i / N$ [48, 62]. Время изучения i-го ЭУМ обозначим через t_i. Общее время изучения T, равное сумме всех t_i ($i = 1,...,N$), остается постоянным, коэффициент усвоения учащегося α задан. Будем считать, что результаты R тестирования пропорциональны взвешенной сумме знаний ученика всех N ЭУМ с учетом их важности:

$$R = (V_1 Z_1 + V_2 Z_2 + ... + V_N Z_N)/(V_1 + V_2 + \ldots + V_N),$$

где Z_i – знания учеником i-го ЭУМ из интервала [0; 1]. Если $Z_i = 1$ для любого i, то $R = 1$. Определив уровень усвоения Z_i каждого ЭУМ, можно рассчитать R в конце обучения. Необходимо: 1) определить оптимальные значения t_i длительностей изучения каждого ЭУМ, при которых результат обучения R будет максимальным; 2) получить соответствующую зависимость уровня знаний ученика от важности ЭУМ; 3) изучить зависимость оптимального распределения времени t_i изучения ЭУМ от их важности V_i при различных коэффициентах усвоения α и продолжительностях обучения $T = t_1 + t_2 + ... + t_N$.

Предположим, что знания ученика Z_i увеличиваются со скоростью, пропорциональной разности $(L - Z_i)$, а забывания не происходит. Получаем дифференциальное уравнение: $dZ_i / dt = \alpha (L - Z_i)$. Уровень требований учителя L для каждого ЭУМ равен 1. При обучении знания Z_i i-го ЭУМ увеличиваются от 0 (ЭУМ совсем не изучен) до некоторого значения, не превышающего 1. Если i-й ЭУМ изучен полностью, то $Z_i = 1$. Это дифференциальное уравнение можно записать в конечных разностях: $Z_i^{t+1} = Z_i^t + \alpha(L - Z_i)\Delta t$. Программа должна моделировать изучение первого ЭУМ в течение времени t_1, затем изучение второго ЭУМ в течение времени t_2 и т. д., изучение N – го ЭУМ в течение времени t_N ($T = t_1 + t_2 + ... + t_N = \text{const}$). Чтобы решить оптимизационную задачу, необходимо многократно случайным образом варьировать время t_i изучения всех ЭУМ и принимать такие t_i', при которых значение R в конце обучения становится выше. Число параметров оптимизации равно N. Для нахождения оптимальных t_i $(i = 1,2,...,N)$ используется компьютерная программа ПР–5.3. Она содержит [48, 62]:

1. Значения следующих величин: 1) коэффициенты усвоения α ученика; 2) количество N изучаемых ЭУМ; 3) общее время обучения T; 4) важность каждого ЭУМ V_i, которая равномерно растет от 0 до 1 с шагом $1/N$ по закону $V_i = i/N$; 5) начальные значения оптимизируемых переменных t_i (время изучения i-го вопроса). В программе ПР–5.3 $N = 50$, $T = 50$ УЕВ, исходные значения $t_i = T/N = 1$ УЕВ.

2. Процедуру Obuchenie, в которой осуществляется моделирование обучения. Она, исходя из известных t_i, определяет уровень знаний ученика Z_i по каждому i-му вопросу, а также суммарное количество знаний ученика Z по всем N вопросам в конце обучения.

3. Процедуру Grafik, которая очищает экран и строит графики: 1) зависимости $t_i = t_i(V_i)$ времени изучения различных ЭУМ от их важности; 2) зависимости $Z_i = Z_i(V_i)$ количества знаний учеников для различных ЭУМ в конце обучения от их важности V_i.

4. Цикл Repeat … until, в котором осуществляется оптимизация. В нем случайным образом выбираются 5 ЭУМ, изменяется их время изучения t_i на небольшие случайные величины и определяется новое значение T'. Затем пе-

ресчитываются все остальные t_i' так, чтобы общая сумма оставалась равной T. Для этого в цикле вычисляются новые значения $t_i' = t_i T / T'$. Снова моделируется изучение N вопросов (процедура Obuchen;) и определяется его результат R'. Если он оказывается выше предыдущего, то изменения принимаются, а иначе – отвергаются и все повторяется еще раз. Так продолжается до тех пор, пока результат обучения R не приблизится к глобальному максимуму.

Результаты моделирования. Пусть общее время изучения всего курса $T = t_1 + t_2 + ... + t_N$ и коэффициент усвоения учащегося α заданы. Необходимо: 1) определить оптимальные значения длительностей изучения каждого вопроса, при которых результаты тестирования R ученика в конце обучения будет максимальными; 2) изучить зависимость распределения времени изучения ЭУМ от их важности V_i при различных коэффициентах научения $t_i = t_i(V_i)$; 3) получить соответствующую зависимость уровня знаний ученика от важности ЭУМ $Z_i = Z_i(V_i)$.

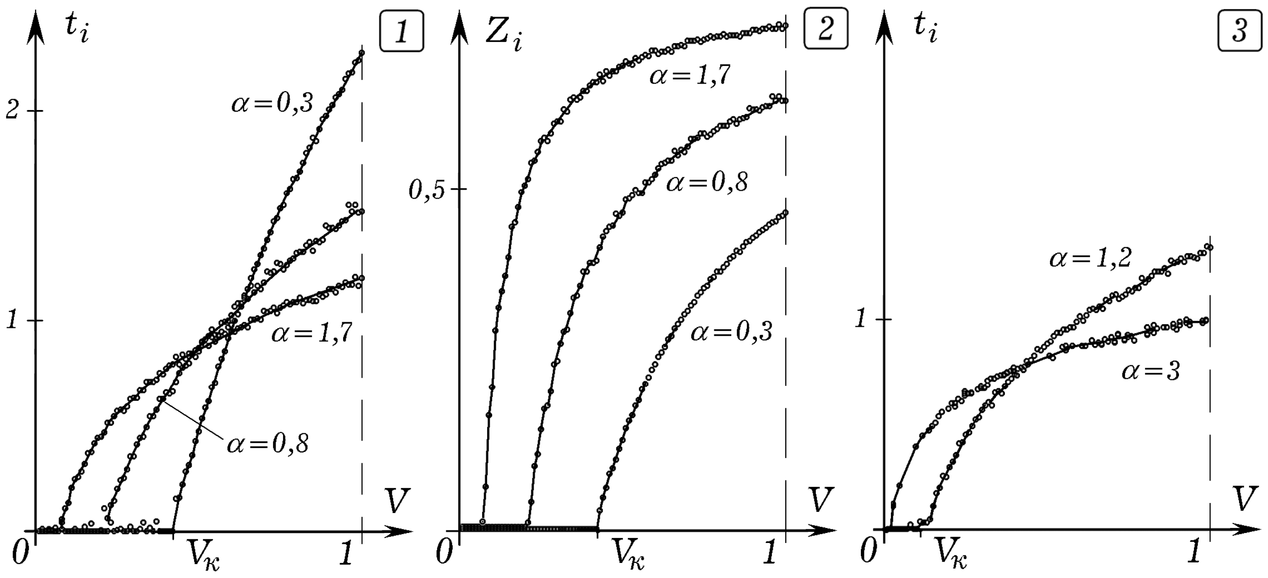


Рис. 5.11. Результаты оптимизации времени изучения различных ЭУМ

В результате работы программы ПР–5.3 строятся графики зависимостей времени t_i изучения различных ЭУМ и уровня их усвоения Z_i от важности V_i для оптимального способа обучения (когда Z в конце обучения максимально).

В случае когда $N = 100$, $T = 100$ УЕВ и $\gamma = 0$, получаются кривые, изображенные на рис. 5.11.1 и 5.11.2. Для каждого α существует критический уровень важности $V_к$; те вопросы, у которых $V < V_к$, изучать не следует ($t_i = 0$). При низком коэффициенте усвоения $\alpha = 0,3$ нужно изучать лишь те вопросы, важность которых велика, затрачивая на них больше времени (рис. 5.11.1). Вопросы, имеющие важность $V_i < 0,5$ ($i < N/2$), изучать не следует. С ростом α ученик быстрее усваивает информацию, поэтому критический уровень $V_к$ уменьшается. При увеличении длительности обучения T или уменьшении N также происходит снижение $V_к$, так как ученик успевает хорошо усвоить и важные, и не очень важные ЭУМ.

Обсуждаемая модель обучения позволила исследовать зависимость оптимального распределения времени изучения отдельных вопросов (ЭУМ) от α, γ, N, T и V. Было установлено следующее: ***1) характер распределения*** $t_i(S_i)$ ***сильно зависит от соотношения коэффициента усвоения ученика*** α***, длительности обучения*** T ***и количества изучаемых вопросов*** N***; 2) при малых коэффициентах усвоения*** α ***имеет смысл изучать ЭУМ с высокой важностью, добиваясь высоких знаний для ЭУМ с*** $V > 0,5$***; 3) при высоком коэффициенте усвоения*** α ***следует изучать ЭУМ, имеющие важность*** $V > 0,2$***, причем на более сложные ЭУМ необходимо затрачивать больше времени, чем на менее сложные; 4) при уменьшении длительности обучения*** T ***нужно ограничиться изучением ЭУМ с высокой важностью; 5) зависимость уровня знаний ученика от важности ЭУМ в оптимальном случае характеризуется возрастающей функцией*** $Z_i(V_i)$***.*** Это результаты соответствуют основным положениям дидактики.

Приложение к главе 5

ПР-5.1

```
Program Optim_posledov_izuchen; {M-5.1, ris. 5.1-5.6}
{$N+}uses crt, graph; const  N=15; TT=300; Ms=60;
var a,dZ,R,Z1,Z2,Z3,Z11,Z21,Z31,ZZ,V,S: single;
i,j,t,kk,DV,MV,fl:integer; z: array[0..N]of single;
k,u: array[0..TT] of word;
```

```
Procedure Obuchen;
begin For j:=1 to N do z[j]:=0;
For i:=1 to TT do begin Z1:=z[1]+z[2]+z[3]+z[4]+z[5];
Z2:=z[6]+z[7]+z[8]+z[9]+z[10]; Z3:=z[11]+z[12]+z[13]+z[14]+z[15];
If k[i]<6 then a:=0.1 else a:=0.04*Z1+0.04;
If k[i]>10 then a:=0.04*Z2+0.04; S:=0;
If k[i]>1 then S:=1-z[k[i]-1]*0.95;
z[k[i]]:=z[k[i]]+a*(1-z[k[i]])*(1-S);
If fl=1 then begin circle(410+i,400-round(Ms*Z1),1);
circle(410+i,400-round(Ms*Z2),1);
circle(410+i,400-round(Ms*Z3),1); end; end; R:=0;
For j:=1 to N do begin If j>10 then v:=1 else v:=0.1;
R:=R+v*z[j]; end; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,''); line(0,400,640,400);
randomize; For i:=1 to TT do k[i]:=1; Repeat Obuchen; ZZ:=R;
For i:=1 to TT do u[i]:=k[i]; For i:=1 to 5 do begin
j:=random(TT+1); k[j]:=random(N)+1; end; Obuchen;
If R<ZZ then For i:=1 to TT do k[i]:=u[i]; inc(kk);
If (R>ZZ)and(kk>200) then begin cleardevice; fl:=1; Obuchen;
fl:=0; kk:=1; For j:=1 to TT do circle(30+j,400-20*k[j],2);
line(0,400,800,400); For j:=1 to 15 do line(25,400-20*j,330,
400-20*j); ZZ:=R; end; If kk>6000 then kk:=0;
until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

ПР-5.2

```
Program Optimizaciya_slozhnost_EUM; {M-5.2, ris. 5.7}
{$N+}uses crt, graph;
const N=30; T0=60; dt=0.01; a=2.5; g=0.01;
var t,vr,Z0,SZ,St:single; k,i,j,v,Gd,Gm: integer;
Z,S,tz,tt:array[0..N+1] of single; Zn:string;
Procedure Obuchen; begin For i:=1 to N do Z[i]:=0;
SZ:=0; t:=0; vr:=tz[1]; i:=1;
Repeat t:=t+dt;
Z[i]:=Z[i]+a*(1-S[i])*(1-Z[i])*dt;
For j:=1 to N do if i<>j then Z[j]:=Z[j]-g*Z[j]*dt;
If t>vr then begin inc(i); vr:=vr+tz[i]; end;
until i>N; For i:=1 to N do SZ:=SZ+Z[i]; end;
Procedure Grafik; begin cleardevice;
For i:=1 to N do begin
circle(10+round(S[i]*300),480-round(tz[i]*150),2);
circle(400+round(S[i]*300),480-round(Z[i]*300),2);
end; Str(SZ,Zn); OuttextXY(20,20,Zn); end;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd,Gm,'');
Randomize; For i:=1 to N do begin tz[i]:=T0/N; S[i]:=i/N;
{S[i]:=random(100)/100;} end;
Repeat Obuchen; Z0:=SZ; v:=0; inc(k);
For i:=1 to N do tt[i]:=tz[i];
Repeat inc(v); i:=round(random(N+1));
tz[i]:=tz[i]+random(200)/1000-0.1;
If tz[i]<0 then tz[i]:=0; until v>5;
St:=0; For i:=1 to N do St:=St+tz[i];
For i:=1 to N do tz[i]:=tz[i]*T0/St; Obuchen;
If SZ<Z0 then For i:=1 to N do tz[i]:=tt[i];
```

```
If (SZ>Z0)and(k>1000) then begin Grafik;
k:=0; line(0,480,800,480); line(10,0,10,480);
line(400,0,400,480); end;
until KeyPressed;
END.
```

ПР-5.3

```
Program Optimizaciya_vazhnost_EUM; {M-5.3, ris. 5.11}
{$N+}Uses crt,graph; Const N=50; T0=50; shag=0.01;
a=0.5;Var t,vr,U,R,R1,St:single;i,k,Gd,Gm:integer;
Z,V,dt,tt: array[0..N+1] of single;
Procedure Obuchen;
begin For i:=1 to N do Z[i]:=0;
t:=0; vr:=dt[1]; i:=1;
Repeat t:=t+shag;U:=1; Z[i]:=Z[i]+a*(U-Z[i])*shag;
If t>vr then begin inc(i); vr:=vr+dt[i]; end;
until i>N; R:=0; For i:=1 to N do begin
R:=R+V[i]*Z[i]; end; end;
Procedure Grafik;
begin line(0,520,700,520);
For i:=1 to N do circle(round(V[i]*300),520-round(dt[i]*100),2);
For i:=1 to N do circle(350+round(6*i),520-round(Z[i]*500),2);
end;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd,Gm,'');
For i:=1 to N do begin dt[i]:=T0/N; V[i]:=i/N;end;
Repeat k:=0; For i:=1 to N do tt[i]:=dt[i];
Repeat inc(k); i:=round(random(N+1));
dt[i]:=dt[i]+random(200)/1000-0.1;
If dt[i]<0 then dt[i]:=0; until k>5;
St:=0; For i:=1 to N do St:=St+dt[i];
For i:=1 to N do dt[i]:=dt[i]*T0/St; Obuchen;
If R1>R then For i:=1 to N do dt[i]:=tt[i];
If R1<R then begin cleardevice; Grafik; R1:=R;
end; until KeyPressed;
END.
```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Имитационное моделирование дидактических систем – это не игра в числа и не дань моде. Это современный метод исследования процесса обучения, который учитывает фундаментальные закономерности, описывающие усвоение и забывание информации, а также другие психические процессы. Определенная свобода в выборе параметров дидактической системы ограничена требованием соответствия результатов моделирования фактическому уровню знаний успешного ученика. Графики, полученные в результате компьютерной имитации учебного процесса, позволяют отследить качественно-количественные изменения знаний гипотетического школьника или студента.

В монографии рассматриваются следующие проблемы: 1) моделирование изучения логически не связанного учебного материала; 2) моделирование изучения логически связанного учебного материала; 3) модели, учитывающие пропускную способность канала связи “учитель-ученик”; 4) моделирование обучения в школе и вузе; 5) различные подходы к решению оптимизационной задачи теории обучения. Новизна работы состоит в том, что: 1) предложены и проанализированы различные подходы к компьютерному моделированию обучения и показана их эквивалентность; 2) решены несколько частных проблем: компьютерное моделирование замкнутой дидактической системы, имитация процесса обучения в школе и вузе, решение оптимизационной задачи МТО и др. Монография содержит 26 компьютерных программ, написанных автором.

Рассмотренные компьютерные модели позволяют обосновать некоторые положения теоретической педагогики и их следствия, опираясь на основные закономерности процессов усвоения и забывания новой информации. Это особенно важно, когда проведение педагогического эксперимента может привести к отрицательным последствиям. Логичность и формализованность, воспроизводимость и конкретность получающихся выводов выгодно отличает метод имитационного моделирования от “метода качественных рассуждений”. Некоторые идеи и подходы, по мнению автора, достаточно полезны при создании автоматических систем обучения [1, 92].

Компьютерные программы, имитирующие учебный процесс, могут найти применение в педагогических вузах для подготовки будущих учителей. Они должны допускать изменение параметров “ученика”, длительности уроков, распределения учебного материала и методики обучения. В ходе работы с такой программой студент, играющий роль учителя, изменяет скорость поступления учебной информации, быстро реагирует на вопросы “учеников”, проводит экзамены, ставит оценки, стремясь достигнуть наиболее высокого уровня знаний за определенное время. После окончания “обучения” программа выводит графики, показывающие изменение “количества знаний всех учеников” и оценки за “проведенные экзамены”. Кроме того, она может анализировать работу “учителя” и ставить ему оценку.

Рис. 6.1. Имитация урока в системе simSchool (www.simschool.org)

Примером такой программы является система simSchool, созданная Д. Гибсоном [104] и являющаяся тренажером для учителей и студентов педвузов. Она размещена в Интернете (http://www.simschool.org) и позволяет промоделировать деятельность преподавателя во время урока. При запуске программы пользователь оказывается за учительским столом в виртуальном классе, заполненном “школьниками”. Каждый “ученик” (simStudent) характеризуется следующим уникальным набором параметров (или психологических характеристик): обучаемость (способность усваивать новый материал), экстраверсия или интроверсия, способность работать под руководством учителя, настойчивость, эмоциональная стабильность. Значения этих параметров варьируются в широких пределах. Пользователь, выполняя роль учителя, проводит урок, задает вопросы, смотрит за реакцией “школьников”. Программа запоминает все величины, характеризующие состояние “учеников” с течением времени. В конце сеанса обучения тестируемый студент может проанализировать проведенный “урок” и посмотреть, как изменялись настроение и активность “учеников” во время обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аипова А. Ш. Цифровые образовательные ресурсы и адаптивное обучение // Молодой ученый. 2015. № 4. С. 45–47.

2. Ананишнев В. М. Моделирование в сфере образования // Системная психология и социология. 2010. Т. 1, № 2. URL: http://systempsychology.ru/ journal/2010_1_2/36-ananishnev-vm-modelirovanie-v-sfere-obrazovaniya.html

3. Архангельский С. И. Лекции по теории обучения в высшей школе. М.: Высшая школа, 1974. 383 с.

4. Атанов Г. А., Пустынникова И. Н. Обучение и искусственный интеллект, или Основы современной дидактики высшей школы. Донецк: Изд-во ДОУ, 2002. 504 с.

5. Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения. М.: Мир, 1969. 486 с.

6. Борисов Н. А. Организация процесса обучения на основе нечеткой модели знаний студента // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 5 (2). С. 262–265.

7. Беспалько В. П. Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия). М.: МПСИ, 2002.

8. Буль Е. Е. Обзор моделей студента для компьютерных систем обучения // Educational Technology & Society. 2003. № 6(4). С. 245–250.

9. Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. Г.: Физматгиз, 1962. 484 с.

10. Бутырский Г. А., Сауров Ю. А. Модели уроков: магнитное поле, электрический ток в различных средах. Киров, 1988. 132 с.

11. Величковский Б. М. Когнитивная наука: Основы психологии познания: в 2 т. Т. 1. М.: Смысл: Академия, 2006. 448 с.

12. Венда В. Ф. Системы гибридного интеллекта: Эволюция, психология, информатика. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.

13. Гребенюк О. С., Гребенюк Т. Б. Теория обучения: учеб. для студ. высш. учеб. заведений. М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. 384 с.

14. Добрынина Н. Ф. Математические модели распространения знаний и управления процессом обучения студентов. Фундаментальные исследования. 2009. № 7. С. 7–9.

15. Загвязинский В. И. Теория обучения: Современная интерпретация: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М.: Академия, 2001. 192 с.

16. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.

17. Зинченко Т. П. Память в экспериментальной и когнитивной психологии. СПб.: Питер, 2002. 320 с.

18. Ивашкин Ю. А., Назойкин Е. А. Мультиагентное имитационное моделирование процесса накопления знаний // Программные продукты и системы. 2011. № 1. С. 47–52.

19. Карпенко М. П. Когномика. М.: СГА, 2009. 225 с.

20. Карпенко М. П. Телеобучение. М.: СГА, 2008. 800 с.

21. Качество высшего образования / под ред. М. П. Карпенко. М.: Изд-во СГУ, 2012. 291 с.

22. Коляда М. Г. Виды моделей обучаемых в автоматизированных обучающих системах // Искусственный интеллект. 2008. № 2. С. 28–33.

23. Коробов Е. Т. Понимание как дидактическая проблема [Электронный ресурс] // Московский психологический журнал. 2005. № 11. URL: http://magazine.mospsy.ru/nomer 11/s10.shtml

24. Кроль В. М. Психология и педагогика: учеб. пособие для техн. вузов. М.: Высшая школа, 2001. 319 с.

25. Кудрявцев В. Б., Вашик К., Строгалов А. С. и др. Об автоматном моделировании процесса обучения // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 4. С. 3–10.

26. Лаврушина Е. Г., Слугина Н. Л. Теория систем и системный анализ: учеб. пособие. Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. 171 с.

27. Леонтьев Л. П., Гохман О. Г. Проблемы управления учебным процессом: математические модели. Рига, 1984. 239 с.

28. Магазинников Л. И. Компьютерное управление обучением: пределы возможности [Электронный ресурс]. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=12831123

29. Майер В. В. Элементы учебной физики как основа организации процесса научного познания в современной системе физического образования: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. Глазов, 2000. 409 с.

30. Майер Р. В. Исследование процесса формирования эмпирических знаний по физике [Электронный ресурс]. Глазов: ГГПИ, 1998. 132 с. URL: http://rmajer.narod.ru

31. Майер Р. В. Проблема формирования системы эмпирических знаний по физике: дис. … д-ра пед. наук. СПб., 1999. 350 с.

32. Майер Р. В. Информационные технологии и физическое образование. Глазов, ГГПИ. 2006. 64 с.

33. Майер Р. В. Психология обучения без огорчения. Книга для начинающего учителя. Глазов: ГГПИ, 2010. 116 с.

34. Майер Р. В. Имитационное моделирование процесса обучения // Актуальные аспекты многоуровневой подготовки в вузе: коллективная монография. Кн. 4. Георгиевск: Георгиевский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Северо-Кавказский государственный технический университет», 2011. С. 83–93.

35. Майер Р. В. Имитационное моделирование процесса обучения как метод педагогического исследования // Наука и современность – 2012: сб. материалов XVIII Междунар. науч.-практ. конф. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. С. 81–85.

36. Майер Р. В. Имитационное моделирование процесса формирования эмпирических знаний у учащихся по физике [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2013. № 5. URL: http://psychology.snauka.ru/2013/05/2222

37. Майер Р. В. Исследование многокомпонентной модели обучения на ЭВМ // Наука и современность – 2012: сб. материалов XVI Междунар. науч.-практ. конф.: в 2 ч. Ч. 2. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. С. 33–38.

38. Майер Р. В. Решение сложных задач с учителем: моделирование на ПЭВМ // Информационные технологии в науке и образовании: материалы Междунар. науч.-практ. конф. и семинара «Применение MOODLE в сетевом обучении». Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2012. С. 55–58.

39. Майер Р. В. Кибернетический подход к исследованию процесса обучения // Практическая психология: Интенсивные методы и технологии в обучении и развитии личности: сб. науч. ст. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2013. С. 49–59.

40. Майер Р. В. Многокомпонентная модель обучения и ее использование для исследования дидактических систем // Фундаментальные исследования: Педагогические науки. 2013. № 10. С. 2524–2528.

41. Майер Р. В. Обобщенная имитационная модель обучения и ее исследование на ПЭВМ [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2013. № 4. URL: http://psychology.snauka.ru/2013/04/2054

42. Майер Р. В. Решение задач математической теории обучения методом компьютерного моделирования // Перспективы науки и образования. 2013. № 5. С. 95–100.

43. Майер Р. В. Двухкомпонентная модель изучения курса: результаты имитационного моделирования [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2014. № 11. URL: http://psychology.snauka.ru/2014/11/3835

44. Майер Р. В. Зависимость оптимального времени изучения ЭУМ от их сложности: Моделирование на компьютере // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 9. С. 16–20.

45. Майер Р. В. Исследование системы “учитель-ученик” с помощью компьютерной многокомпонентной модели обучения // Научные исследования и разработки. Социально-гуманитарные исследования и технологии. 2014. № 4. С. 53–56.

46. Майер Р. В. Кибернетическая педагогика: Имитационное моделирование процесса обучения [Электронный ресурс]: монография. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2014. 141 с. URL: http://maier-rv.glazov.net

47. Майер Р. В. Компьютерная модель обучения с изменяющимся коэффициентом забывания [Электронный ресурс] // International Journal of Open Information Technologies. 2014. Vol. 2, № 1. P. 12–16. URL: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/59/51

48. Майер Р. В. Оптимизация времени изучения элементов учебного материала различной важности: моделирование на компьютере // NB: Педагогика и просвещение. 2014. № 4. С. 51–63.

49. Майер Р. В. Основная задача математической теории обучения и ее решение методом имитационного моделирования // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 2. С. 36–39.

50. Майер Р. В. Влияние смены видов деятельности на результат обучения: Моделирование на ПЭВМ // Научные исследования и разработки. Социально-гуманитарные исследования и технологии. 2015. № 2 (11). С. 38–41. DOI: 10.12737/11936

51. Майер Р. В. Зависимость понимания темы от скорости поступления учебной информации: Результаты компьютерного моделирования [Электронный ресурс] // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 7. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/07/56515

52. Майер Р. В. Зависимость степени понимания от быстроты поступления учебной информации: результаты имитационного моделирования // Научный альманах. 2015. № 7 (9). С. 399–402. DOI: 10.17117/na.2015.07.399

53. Майер Р. В. Изучение дидактических систем методом имитационного моделирования на компьютере // Теоретические и практические аспекты психологии и педагогики: коллективная монография. Уфа: Аэтерна, 2015. С. 51–70.

54. Майер Р. В. Имитационное моделирование изучения студентами вузовского курса, учитывающее психологические закономерности усвоения и забывания [Электронный ресурс] // Концепт. 2015. № 12 (декабрь). ART 15430. URL: http://e-koncept.ru/2015/ 15430.htm

55. Майер Р. В. Исследование замкнутой дидактической системы методом компьютерного моделирования [Электронный ресурс] // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 9. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/09/57626

56. Майер Р. В. Компьютерная двухкомпонентная вероятностная модель изучения дисциплины // Современное образование. 2015. № 1. С. 42–52. DOI: 10.7256/ 2409-8736.2015.1.13701.

57. Майер Р. В. Компьютерное моделирование: учеб.-метод. пособие для студ. пед. вузов [Электронное учебное издание на компакт-диске]. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2015. 620 с.

58. Майер Р. В. Компьютерная модель обучения группы учеников: мультиагентный подход [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2015. № 6. URL: http://psychology.snauka.ru/2015/06/5493

59. Майер Р. В. Компьютерные модели скачкообразного и непрерывного увеличения знаний при обучении // International Journal of Open Information Technologies. Vol. 3. №. 9. 2015. С. 9–13.

60. Майер Р. В. О математическом и имитационном моделировании дидактических систем [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2015. № 10. URL: http://psychology.snauka.ru/2015/10/5895

61. Майер Р. В. Поиск оптимального пути обучения: имитационное моделирование на ПЭВМ // Дистанционное и виртуальное обучение. 2015. № 4. С. 4–11.

62. Майер Р. В. Поиск оптимальной последовательности решения учебных задач с учетом их важности и связей между ними: моделирование на ПЭВМ [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2015. № 8. URL: http://psychology.snauka.ru/2015/08/5649

63. Майер Р. В. Результаты имитационного моделирования обучения в 11-летней школе [Электронный ресурс] // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 11. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/11/59115

64. Майер Р. В. Учет изменения прочности знаний при обучении: моделирование в электронных таблицах Excel [Электронный ресурс] // Современные

научные исследования и инновации. 2015. № 1. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/01/45010

65. Майер Р. В. Чередование теоретических и практических занятий как эффективный метод обучения: Результаты имитационного моделирования // Современное образование. 2015. № 4. С. 145–155. DOI: 10.7256/2409-8736.2015.4. 16041

66. Майер Р. В. Зависимость количества усвоенной информации от скорости поступления: Моделирование на ПЭВМ // Проблемы школьного и дошкольного образования: материалы VII регионального научно-практического семинара «Достижения науки и практики – в деятельность образовательных учреждений» (с международным участием) [Электронное научное издание на компакт-диске]. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2016. С. 496–499.

67. Майер Р. В. Зависимость понимания от скорости сообщения информации: имитационное моделирование [Электронный ресурс] // Психология, социология и педагогика. 2016. № 1. URL: http://psychology.snauka.ru/2016/01/6342

68. Майер Р. В. Изучение имитационной модели ученика методом статистических испытаний // Журнал «Human Progress». 2016. Т. 2, № 3. Материалы Междунар. заочн. науч.-практ. конф. «Человеческое развитие: вызовы и перспективы» (Екатеринбург).

69. Майер Р. В. Имитационное моделирование обучения в школе // European Research: Innovation in Science, Education and Technology. 2016. № 12 (23): сб. ст. по материалам XXIII Междунар. науч.-практ. конф. (United Kingdom, London, 28–29 December 2016). С. 69–73.

70. Майер Р. В. Компьютерное моделирование процесса обучения // Теоретические и практические аспекты психологии и педагогики: коллективная монография. Уфа: Аэтерна, 2016. С. 127–145.

71. Майер Р. В. Компьютерная модель процесса управления дидактической системой: информационно-кибернетический подход // Проблемы управления. № 3. 2016. С. 58–64.

72. Майер Р. В. Компьютерная модель ученика и ее использование при анализе процесса обучения // Инновации в образовании. 2016. № 5. С. 108–115.

73. Майер Р. В. Компьютерные модели понимания и усвоения учебного материала // Дистанционное и виртуальное обучение. 2016. № 8. С. 32–38.

74. Майер Р. В. Контент-анализ школьных учебников по естественно-научным дисциплинам: монография [Электронное научное издание на компакт-диске]. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2016.

75. Майер Р. В. Моделирование как метод изучения дидактических систем // Бюллетень науки и практики: электрон. журн. 2016. № 9 (10). С. 227–234.

76. Майер Р. В. Закономерности усвоения, забывания и имитационное моделирование обучения // Инновации в образовании. 2017. № 5. С. 145–152.

77. Майер Р. В. Имитационное моделирование процесса обучения как один из методов современной дидактики // Дистанционное и виртуальное обучение. 2017. № 3. С. 49–56.

78. Майер Р. В. Имитационное моделирование усвоения и забывания осмысленной информации // Успехи современной науки. 2017. Т. 1, № 1. С. 42–44.

79. Майер Р. В. Моделирование обучения, основанное на представлении осмысленной информации в виде системы связанных элементов // НИР. Социально-гуманитарные исследования и технологии. 2017. № 2 (19). С. 16–21.

80. Майер Р. В. Усвоение и забывание осмысленной информации: Моделирование на компьютере // Научный потенциал. 2017. № 1. С. 17–22.

81. Новиков Д. А. Закономерности итеративного научения. М.: Институт проблем управления РАН, 1998. 77 с.

82. Новиков А. М. Основания педагогики / Пособие для авторов учебников и преподавателей. М.: Эгвес, 2010. 208 с.

83. Петров Ю. И. Некоторые подходы к моделированию обучаемого // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. Вып. 7. Иркутск: ИИТМ ИрГУПС, 2009. С. 176–185.

84. Плотинский Ю. М. Модели социальных процессов: учеб. пособие для высших учебных заведений. М.: Логос, 2001. 296 с.

85. Растригин Л. А. Адаптация сложных систем. Рига: Зинатне, 1981. 375 с.

86. Разумовский В. Г., Майер В. В. Физика в школе: Научный метод познания и обучение. М.: ВЛАДОС, 2004. 463 с.

87. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 496 с.

88. Розанова Л. В. Основы кибернетики: конспект лекций. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. 60 с.

89. Сауров Ю. А. Модели и моделирование в методике обучения физике. Киров, 2016. 216 с.

90. Свиридов А. П. Основы статистической теории обучения и контроля знаний. М.: Высшая школа, 1981. 262 с.

91. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем: учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 343 с.

92. Соловов А. В., Меньшиков А. А. Дискретные математические модели в исследовании процессов автоматизированного обучения // Educational Technology & Society. 2001. № 4. С. 205–210.

93. Соловов А. В. Электронное обучение: проблематика, дидактика, технология. Самара: Новая техника, 2006. 462 с.

94. Солодова Е. А., Антонов Ю. П. Математическое моделирование педагогических систем // Математика. Компьютер. Образование: сб. тр. XXII Междунар. конф. Ч. 1. Ижевск, 2005. С. 113–121.

95. Степанов И. И., Ефремов О. М., Суворов Н. Б. и др. Информативность математической модели процесса обучения // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 34–40.

96. Титов Б. А., Рябинова Е. Н. Математическая модель усвоения учебной информации в образовательном процессе // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011. № 3 (27). С. 334–340.

97. Томашевский В. М., Дмитрик I. М. Аналіз моделей навчання та контролю знань // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: збірник наукових праць. 2008. № 49. С. 147–152.

98. Фирстов В. Е. Математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в средней школе на основе кибернетического подхода: дис. … д-ра пед. наук. СПб., 2011. 460 с.

99. Харин Ю. С., Малюгин В. И., Кирилица В. П. и др. Основы имитационного и статистического моделирования: учеб. пособие. Мн.: Дизайн ПРО, 1997. 288 с.

100. Чабаненко П. П. Исследование безопасности и эффективности функционирования систем человек-техника эргосетями. Севастополь, 2012. 160 с.

101. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем: искусство и наука. М.: Мир, 1978. 302 с.

102. Ядровская М. В. Модели в педагогике // Вестник Томского государственного университета. 2013. № 366. С. 139–143.

103. Brent Davis, Dennis J. Sumara Complexity and Education: Inquiries Into Learning, Teaching, and Research. Mahwah, New Jersey, London, 2006. 201 p.

104. Gibson D., Jakl P. Data challenges of leveraging a simulation to assess learning. West Lake Village, CA. 2013. Retrieved from URL: http://www.curveshift.com/images/Gib son_Jakl_data_challenges.pdf

105. Hunt E. The Mathematics of Behavior. New York: Cambridge University Press, 2007. 346 p.

106. Mayer R. V. Multicomponent model of didactic system and its research on the computer // News of Science and Education. № 6. Sheffield: Science and Education LTD, 2014. P. 76–81.

107. Mayer R. V. Research of didactic systems with use of methods of computer modelling // Psychology, sociology and pedagogy: electronic journal. July 2014. № 7. URL: http://psychology.snauka.ru/en/2014/07/3406

108. Mayer R. V. Computer-Assisted Simulation Methods of Learning Process // European Journal of Contemporary Education. 2015. Vol. 13, Is. 3, P. 198–212, 2015. DOI: 10.13187/ejced.2015.13.198

109. Mayer R. V. Dependence of training result on alternation of the education material: computer simulation // Инновационная наука. 2015. № 11. Ч. 2. P. 144–146.

110. Mayer R. V. Research of the multicomponent pupil's model on the computer // Advanced Studies in Science. London. Vol. IV. 2015. P. 81–95.

111. Mayer R. V. The solution of problems of mathematical learning theory using computer models // Modern Europian researches. 2015. № 3. P. 113–125.

112. Mayer R. About the using of the computer models for studying of the didactic systems // ICERI2016 Proceedings. 9th International Conference of Education, Research and Innovation. Seville (Spain), 2016. P. 8664–8674.

113. Mayer R. V. Computer Model of the Physical Facts Learning // International Journal of Current Science Research. Vol. 2, Is. 1. 2016. P. 198–203.

114. Mayer R. V. Computer Model of the Empirical Knowledge of Physics Formation: Coordination with Testing Results // European Journal of Contemporary Education. Vol. 16, Is. 2. 2016. P. 239–247 DOI: 10.13187/ejced.2016.16.239

115. Mayer R. V. Computer simulation of learning and forgetting of the logically related information // Modern Europian researches. 2017. № 2. P. 96–105.

116. Mayer R. V. Training at School and University: Results of the Imitating Modeling // Бюллетень науки и практики: Электрон. журн. 2017. № 8. С. 291–300.

СОДЕРЖАНИЕ